

摘要

多输入多输出(Multiple-Input Multiple-Output)技术可以显著的提高系统的频谱效率和改善通信质量,是下一代移动通信系统的关键技术。为了最大限度的提高系统的吞吐量或者分集度,需要发送端采用功率注水、最优波束成型以及预编码等传输技术。这类技术需要发送端已知完整的信道信息,但是由于无线信道环境的时变特性,在实际系统中难以实现。另一方面,基于开环的空时编码等技术,虽然不需要发送端获知信道信息,但是不能获得很大的性能增益。与之相比,仅需要发送端已知部分信道信息的闭环传输系统可以结合两者的优点,从而更具有实际意义。本文以有限反馈自适应传输系统为研究对象,从码本设计、时间相关信道下的反馈量压缩和空间相关信道下的码本自适应三个方面展开研究。

基于部分信道信息的闭环传输系统有多种实现方式,包括均值反馈,方差反馈和基于码本的有限反馈等。其中,有限反馈技术由于结构简单,可以通过极小的反馈量获得可观的性能增益,得到了广泛关注。在最新移动通信 LTE 标准以及最新无线城域网标准 WiMAX 等业界标准中,都选择了有限反馈技术作为闭环传输的主要方案。有限反馈技术的首要问题是设计复杂度低,性能优良的码本。本文从接收信噪比和信道容量的角度出发,研究了独立同分布瑞利衰落信道下波束成型和空分复用系统中码本设计的具体算法。仿真结果表明,设计出的码本具有良好的误码率性能和较小的信道容量损失。

当系统的多普勒频移较小时,信道存在一定的时间相关性。利用相邻传输周期内信道信息存在相关性,可以进一步降低反馈量。本文采用了马尔可夫链对时间相关信道进行建模,根据系统所用的码本将连续的信道取值空间划分为若干个区域作为马尔可夫链的状态空间,从系统吞吐量的角度出发,研究了一种定长的结构简单的反馈量压缩算法。理论分析和仿真结果表明,反馈信息的延时和多普勒频移是影响反馈量压缩算法效率的主要因素。

当天线间距较小或信道环境中散射体不够丰富时,发送端和接收端天线阵列呈现出空间上的相关性。空间上的相关性会影响信道容量和分集度,并且增加了码本设计的难度。信道的统计信息可以提供空间相关的部分信息,因而可以用来改善系统性能。本文研究了空间相关信道下,信道统计信息与有限反馈系统之间的关系,提出了基于弦距离的码本变换及相关的码本自适应算法。仿真结果表明,在发送相关阵条件数较大,接收相关阵条件数较小时,自适应码本相对于固定不变的码本有较高的性能增益。

关键字: MIMO 系统, 信道状态信息, 有限反馈, 自适应传输, 弦距离, 马尔可夫链, 有限反馈吞吐量增益, 码本旋转和收缩

ABSTRACT

Multiple-Input Multiple-Output (MIMO), which is one of the key technology in next generation mobile communication system, can dramatically increase system spectral efficiency and improve quality of service. In order to increase system throughput or diversity order, it is necessary to adopt transmission technology such as power water filling, optimal beamforming and precoding. Due to time-variability of wireless channel environment, it is impractical to apply them in real systems without full channel state information (CSI). On the other hand, Open-loop transmission technology such as space-time coding requires no CSI to be available at the transmitter. As no-CSI leads to pessimistic designs, close-loop transmission systems with partial-CSI promise to have great practical value because they are capable of taking advantages from both technology mentioned before. This thesis works on limited feedback based adaptive transmission system, which encompasses codebook design, feedback compression in temporal-correlated channel and codebook adaptation in spatial-correlated channel.

There are several ways to implement partial-CSI close-loop control system, including mean-feedback, variance-feedback and codebook based limited feedback. Limited feedback is very attractive because of its simple structure and substantial performance gain through little feedback amount. It has already been accepted as main scheme of close-loop transmission in both LTE and WiMAX. The main issue of limited feedback is to design low-complexity codebook yet with good performance. Starting from receive SNR and channel ergodic capacity, codebook construction algorithms for beamforming and spatial multiplexing system are studied. Simulation results show that the codebooks promise good BER performance and little capacity loss.

Channel is temporal-correlated when Doppler frequency is small. Taking advantage of correlation among adjacent transmit periods under temporal-correlated channel, feedback amount can be further reduced. A Markov chain whose state is defined by partitions according to channel coefficients is used to model temporal-correlated channel. From the aspect of system throughput, a fixed-length and simple structured feedback compression algorithm is studied. Observed from theoretical analysis and simulation results, feedback delay and Doppler frequency are the main factor of compression efficiency.

When antennas are not well-separated or scatters are not adequate, antennas of transmitter and receiver are spatial-correlated. Spatial correlation will decrease channel capacity, diversity gain and increase the complexity of codebook design. Statistical channel information can be used to improve system performance because it indicates channel correlation. According to the connection between statistical information and limited feedback system, codebook transform based on chordal distance and corresponding codebook adaptation algorithm are proposed. Simulation results show that adaptive codebook has high performance gain with ill-conditioned transmit correlation and good-conditioned receive correlation.

Keywords: MIMO, CSI, limited feedback, adaptive transmission, chordal distance, Markov chain, limited feedback throughput gain, codebook rotation and scaling

图目录

2.1	窄带平衰落 MIMO 系统模型	5
2.2	发送和接收端均已知信道信息时,酉矩阵预处理和后处理示意图	6
2.3	发送端完全已知和未知信道信息时的遍历信道容量($N_t = N_r = 4$)	7
2.4	有限反馈系统示意图	8
3.1	矢量量化器结构图	11
4.1	$N_t = 3$ 的 MISO 波束成型系统在各种码本下的 BER 性能	31
4.2	$N_t = 3$ 的 MISO 波束成型系统在各种码本下的归一化信道容量	31
4.3	3×3 的 MIMO 波束成型系统在各种码本下的 BER 性能	32
4.4	3×3 的 MIMO 波束成型系统在各种码本下的归一化信道容量	32
4.5	$N_t = 4, N_r = 2, N_s = 2$ 的 MIMO 预编码系统在各码本下的 BER 性能	33
4.6	$N_t = 4, N_r = 2, N_s = 2$ 的 MIMO 预编码系统在各码本下的归一化信道容量	33
5.1	有限反馈的主要流程	35
5.2	AR 方法的自相关, 阶数 $p = 20, 50, 100, 200$	42
5.3	归一化多普勒频移为 $f_m = 0.01$ 时的量化信道信息序列的自相关	42
5.4	信道信息量化和有限延时有对系统吞吐量的影响	43
5.5	归一化多普勒频移 $f_m = 0.01$ 时, 可变延时有对系统吞吐量的影响	43
5.6	归一化多普勒频移 $f_m = 0.001$ 时, 可变延时有对系统吞吐量的影响	44
5.7	归一化多普勒频移 f_m 和反馈周期 K 对反馈量压缩的影响	44
6.1	4×4 空间相关 MIMO 信道下, 发送流数 $N_s = 2$ 的 BER 性能	52
6.2	4×4 空间相关 MIMO 信道下, 发送流数 $N_s = 2$ 的信道容量	52

表目录

1.1 符号说明	4
B.1 常用 $f(Z, Z^*)$ 型函数导数表	57

东南大学学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得东南大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

研究生签名： 陈 臻 日期： 09.2.26

东南大学学位论文使用授权声明

东南大学、中国科学技术信息研究所、国家图书馆有权保留本人所送交学位论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅，可以公布(包括刊登)论文的全部或部分内容。论文的公布(包括刊登)授权东南大学研究生院办理。

研究生签名： 陈 臻 导师签名： 高世明 日期： 09.02.26

第一章 绪论

1.1 引言

现代无线通信系统对数据吞吐量和服务质量都提出了更高的要求,但是无线传输本身却受到恶劣信道环境的影响,比如路径损耗、阴影、多径衰落和信道间干扰等。而实际系统则受到更多因素的制约,比如功耗、带宽、复杂度、尺寸和成本等限制。

早年, Winters[1], Telatar[2]和 Foschini[3]等人的工作指出在发送和接收端利用多天线技术, MIMO 系统可以在不增加发送功率的条件下显著提高频谱利用率。此外,通过采用空时码、波束成型等技术, MIMO 系统可以提供可观的分集增益。为了尽可能提高系统吞吐量或者分集度,需要发送端根据信道状态自适应的调整发送模式,这就要求发送端已知信道状态信息(CSI)。在过去,自适应传输在 FDD 系统中难以实现,这是由于 FDD 系统的前向和反向链路处于不同的频段,因而信道特性通常不相关。为了克服上述问题,可以利用前向和反向链路在其他方面的互易性,比如信道统计特性。当信道变化缓慢,或者具有很强的均值分量(比如具有较大的莱斯 K-因子)或者在空间、时间或频率上具有强相关时,前向链路和反向链路通常具有相同的统计特性。但是,相比于发送端完全已知信道状态信息的系统,仅已知信道统计信息的系统存在较大的性能损失。

为了弥补单纯的利用统计信道信息带来的性能损失,可以采用反馈来传递信道信息从而达到发送端自适应调整的目的。引入反馈后,系统通过一条低速率的反向链路向发送端提供前向链路的信息,比如信道状态、接收功率和干扰的程度等,发送端利用这部分信息进行自适应传输。反馈的实现可以有多种形式,本文主要研究低速率的数字反馈,通常称为有限反馈或者有限速率反馈。相比于简单的利用统计信道信息,有限反馈提供了更多的关于前向链路的状态信息,从而改善了发送端自适应的效果;同时,由于有限反馈仅需要低速率的反馈信道,因而更易于实现。由于有限反馈具有上述优点,最近的宽带无线通信标准如 UMTS-LTE[4]、IEEE 802.16e/WiMAX[5]、IEEE 802.11n [6, 7]等都采用了有限反馈技术,另外 3GPP2[8]和 IEEE 802.16m[9]标准化组织也考虑将有限反馈纳入其中。

1.2 有限反馈系统概述

本文仅研究单用户窄带系统,首先假设信道满足准静态衰落模型,即信道特性在包含数个符号周期的一段时间内保持不变,不同的时间段内的信道响应独立同分布。对于信道响应满足独立同分布瑞利衰落的理想信道,当发送端和接收端均已知完全信道信息,且发送功率一定时,系统的遍历信道容量由输入矢量的协方差决定[2, 10]。输入矢量的协方差矩阵中包含了功率分配和预编码的信息。当发送端不能获得完全信道信息时,信道统计信息可以用来设计输入矢量的协方差矩阵[11]。在有限反馈系统中,接收端可以通过训练序列等方法获得信道信息,然后利用矢量量化方法对信道信息进行量化。由于发送端关心的是输入矢量的协方差矩阵,所以接收端可以选取最大化信道容量的协方差矩阵通过某种方式反馈给发送端。如果在发送端和接收端都存储一个包

含 N_b 个协方差矩阵的码本 $\mathcal{Q} = \{\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{N_b}\}$, 则接收端需要根据信道信息在码本中搜索最大化信道容量的码字 $\mathbf{Q}_{n_{\text{opt}}}$, 将 $\lceil \log_2 N_b \rceil$ 位的标识信息 n_{opt} 传递给发送端。协方差矩阵码本可以是固定不变的也可以按照发送端与接收端约定好的规则同时进行调整。设计最大化信道容量的固定码本需要已知信道矩阵的平稳随机分布[12, 13], 利用基于矢量量化的 Generalized Lloyd Algorithm (GLA)[57, 58]算法产生的码本在仿真中表现出较好的性能[12]。此外, 随机矢量量化方法也可以用于码本的设计[14]。当选取的协方差矩阵的秩为 1 时, 系统为有限反馈波束成型系统。值得注意的是, 如果信道矩阵的秩为 1 时, 比如单接收天线的 MISO 系统中, 秩为 1 的协方差矩阵最优。对于 MIMO 波束成型系统, 接收端需要做接收合并。接收合并有多种方式, 包括最大比合并、等增益合并等[15]。

接收端通过反馈一定数量的信息给发送端来改善系统性能的方法最早出现在[16]中, 随后在[12, 17, 18, 19, 20]等文献中得到了广泛的研究。最简单的反馈方法是天线选择[21], 即波束成型矢量限定为仅有一个非零元素。在这种限定下, 最优的发送方案是将一个衰落周期内(信道环境近似不变)的所有数据全部通过对应的接收信噪比最大的那根发送天线发送。接收端根据信道信息确定最优的发送天线并用 $\lceil \log_2 N_t \rceil$ 比特将天线编号反馈给发送端。很明显, 在天线选择系统中, 由于发送端仅有有限的 N_t 种发送模式, 所以不能获得很大的性能增益。如果接收端通过反馈信道反馈更为详细的信道状态信息给发送端, 则可以进一步改善系统性能。在[12]中, MISO 系统的信道矩阵被量化为一组单位列向量 $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_{N_b}\}$, 接收端计算信道矩阵 \mathbf{h} 和码本中单位列向量 h_i 之间的内积, 寻找内积最大的 $h_{n_{\text{opt}}}$ 作为发送端的波束成型矢量。[22]和[23]分别在 MISO 和 MIMO 波束成型系统中证明了在独立同分布瑞利衰落信道下, 最小化中断概率、最大化接收 SNR 和最小化信道容量损失的码本设计都可以等效为将码本看成 \mathbb{C}^{N_t} 内的一组直线, 使得相距最近的两条直线之间的距离最大。在数学领域, 该问题称为 Grassmannian Line Packing (GLP)。构造最优或次优 Line Packing 的方法分为理论推导的和数值计算两类。差集方法[24, 25]是一种基于理论推导的构造方法, 但是该方法只适用于发送天线数目 N_t 和码字数目 N_b 满足一定条件的情况, 即 $N_t(N_t - 1)$ 可被 $N_b - 1$ 整除。在这个条件的约束下, 码字的数目 N_b 很难满足 2 的幂次, 因而缺乏实用价值。[26]上给出了实数情况下较完备的不同天线数目和码字数目对应的最优码本设计, 其主要设计思路是寻找一个替代准则, 使其便于使用梯度下降法进行搜索, 便于找到全局最优点且全局最优与 GLP 对应的全局最优之间误差尽量小。[27]基于同样的思路将算法扩展到复数形式。矢量量化是另一类重要的码本设计方法, [28]给出了 MISO 系统中利用矢量量化方法进行码本设计的一般原则, 即寻找一个失真函数(通常与信噪比和信道容量损失有关), 利用迭代来最小化失真函数从而得到局部最优解。若设置不同的初始条件, 则可以得到不同的局部最优解, 多次随机的设置初始条件进行迭代并选择最优的结果可以近似得到全局最优解。由于波束成型矢量均为单位矢量, 该矢量量化问题事实上属于球形矢量量化[29]。只要选取的失真函数恰当, 矢量量化方法可以很好的找到局部或全局最优解, 对天线数目和码字数目没有任何限制且可以针对独立同分布瑞利衰落以外的信道。[14, 30]提供了一种基于随机矢量量化的码本设计方法, 其根据最优波束成型矢量的统计特性产生大量独立同分布的码本样本, 在其中挑选码字间距离特性最好的样本作为最后的码本。当天线数目较多时, 利用该方法产生的码本具有较好的性能[14, 30]。除此之外, 还有其他一些码本设计方法, 比如基于 DFT 矩阵的码本设计方法[31], 基于 QAM 星座图的码本设计方法[32]以及基于 Kerdock 码的码本设计方法[33]等, 这里不再赘述。

在波束成型系统中, 单条发送数据流被映射到波束成型矢量上进行发送。预编码系统对其进行了扩展, 允许同时发送多条独立的数据流。天线子集选择[34]是最简单的预编码形式, 其预编码矩阵中的所有列均取自 \mathbf{I}_{N_t} 。如果同时发送 N_s 条独立数据流, 则总共有 $\binom{N_t}{N_s}$ 种天线子集选择矩阵, 接收端根据某种准则选择其中的一种并利用 $\lceil \log_2 \binom{N_t}{N_s} \rceil$ 比特将其反馈给发送端。与波束

成型系统相比, 预编码系统中的天线选择较为复杂, 因为准则难以确定。另一种简单的预编码系统仅对各天线的发送功率进行调节, 即预编码矩阵为对角阵。[35]研究了如何利用有限反馈调整天线的发送功率从而减小中断概率。如果让数据流在信道条件较好的特征方向上进行传输而不是简单的做天线选择, 则可以获得更好的性能。针对特征方向的有限反馈预编码系统的基本设计思路仍然是对信道矩阵 \mathbf{H} 进行量化, 接收端通过反馈信道将量化信息传递给发送端, 发送端根据量化信息确定预编码矩阵。针对特征方向的有限反馈预编码系统可以视为多维的特征方向波束成型, 所用预编码矩阵包含 N_s 个相互正交的单位列向量。波束成型系统中采用的基于 GLP 的码本设计方法可以拓展到预编码系统中, 其推广形式称为 Grassmannian Subspace Packing (GSP)。与一维情形不同的是, 两个子空间之间的距离有多种定义方式, 不同的距离定义可以用来优化不同的性能指标。根据合适的失真函数, 矢量量化方法也可以应用到预编码矩阵中。此外, 波束成型矢量通过 Householder 变换也可以得到预编码矩阵, 由 Householder 变换得到的预编码矩阵的各列向量可以保持正交性及较好的距离特性。同时, Householder 变换为多模式传输(独立发送流数可变)提供了一种简便的方案。显然最大化信道容量的预编码矩阵由信道矩阵最大的 N_s 个特征值对应的特征向量组成。对于空间上不相关的瑞利衰落信道, 最优预编码矩阵在同样维度的正交矩阵组成的集合上满足均匀分布[31], 因而随机矢量量化方法同样也可以应用在预编码系统中。

当系统的多普勒频移较小时, 信道存在一定的时间相关性, 准静态模型不再适用。马尔可夫链可以用来对信道进行建模, 时间上相距较近的传输周期间存在的时间相关性可以用来改善量化的效果或者降低反馈量。[36]对 MIMO 信道进行了参数化, 每个参数利用差分编码的方式用 1 个比特进行量化, 但是信道参数的多样性影响了量化的性能。在[37]中反馈的信息被压缩为 1 比特, 但是要求发送端周期性的广播信道子空间。[38]利用信道的时间相关性, 采用了传统的 Huffman 编码对反馈量进行无损压缩, 尽管这种反馈压缩方法可以最小化平均反馈量, 但是导致反馈信息为变长, 不利于应用在实际系统中[39]。[40, 41, 39]利用信道状态马尔可夫链模型分析了反馈延时对系统吞吐量造成的影响, 并利用马尔可夫链模型设计了反馈量压缩的算法。

当天线间距较小或和信道环境中散射体不够丰富时, 发送天线和接收天线间呈现空间上的相关性。对于 MISO 系统, [42]提出了改进的 GLP 以应对这种情况, 利用信道统计信息对码本进行旋转和归一化来产生新的码本。[43]将基于信道统计信息的方法拓展到 MIMO 波束成型情形, 并最终形成了系统的码本设计方法。此后, [44]又将系统的码本设计方法推广到预编码情形, 其选择了 2-范数投影距离作为子空间之间的距离度量, 使得码字的变换十分复杂。本文通过研究发现, 如果采用弦距离作为子空间之间的距离度量可以简化码字的变换过程。另外, [44]证明了基于 2-范数投影距离的预编码矩阵码本变换退化到一维形式符合[43]中系统的码本设计方法定义的形式。本文亦证明了基于弦距离的码本变换的退化形式也符合[43]中的定义。

有限反馈技术除了在学术界受到广泛关注外, 在工业界也得到了普遍的认可。最新的移动通信标准 3GPP LTE 支持多种基于码本的单用户有限反馈技术。3GPP LTE 标准的下行链路中使用的码本针对 2 或 4 发送天线, 可以支持波束成型和预编码。当发送天线数目为 2 时, 码本由两部分组成: 6 个码字用于波束成型(其中 2 个用于天线选择), 3 个码字用于预编码。当发送天线数目为 4 时, 16 个码字用于波束成型, 独立发送流数分别为 2、3、4 时的预编码各使用 16 个码字。预编码矩阵由波束成型矢量经过 Householder 映射得到的矩阵的列向量构造而成, 并且采用了嵌入式的结构, 即 2 条独立流对应的预编码矩阵由对应的波束成型矢量和另一个矢量组成, 3 条独立流对应的预编码矩阵则再添加一个矢量。嵌入式的结构节省了存储空间, 基站端可以方便的调节独立发送流数目, 易于实现多模传输。最新的无线城域网标准 IEEE 802.16e/WiMAX 同样支持多种单用户有限反馈方式。标准中给出的 2、3、4 发送天线对应的 3 比特码本类似于 GLP 产生的码本。3、4 发送天线对应的波束成型码本由生成矢量先后乘以一个 Householder 映射矩阵、一

个指数对角矩阵和另一个 Householder 矩阵得到, 这种生成方法节省了存储空间。3 比特和 6 比特预编码本同样根据波束成型码本经过 Householder 变换产生。

1.3 论文的主要内容和贡献

第二章介绍了 MIMO 无线通信系统模型, 包含已知完整信道信息的系统和已知部分信道信息的系统。另外, 介绍了时间相关信道模型和空间相关信道模型。

第三章研究了码本设计的几种主要方法, 包括基于矢量量化的 GLA 算法和基于数学理论的 GLP/GSP。本章主要分析码本设计的基本原理而不涉及具体的算法实现。

第四章分别研究了独立同分布信道下 MISO 波束成型系统, MIMO 波束成型系统和空分复用系统中的码本设计算法的实现及其性能。码本设计采用 GLA 算法, 设计准则为最大化接收 SNR 和最小化信道容量损失, GLP/GSP 码本作为性能参考。

第五章考虑利用时间相关性来降低反馈量, 利用马尔可夫链对信道的时变相关性进行建模, 定量的研究了反馈延迟对系统吞吐量带来的影响, 然后分析了反馈量压缩算法及其对反馈增益的影响。

第六章研究了空间相关信道下的有限反馈, 空间相关性导致最优成型矢量或预编码矩阵不再满足均匀分布, 而且由于相关性的时变性使得码本需要随之自适应变换。固定不变的采用第四章中设计的码本必然导致系统性能下降, 而在线的利用 GLA 算法来更新码本复杂度太高, 所以本章中提出了一种以独立同分布信道对应的码本为基础, 根据信道统计信息进行自适应调整的码本设计方案, 在性能和实现复杂度之间取得了平衡。

第七章对全文工作进行了总结, 并讨论了以后可以进一步研究的方向。

1.4 数学符号约定

在论文中, 标量以斜体表示, 向量以小写的粗斜体表示, 矩阵以大写的粗体表示。具体的符号说明如表 1.1 所示。

表 1.1: 符号说明

$(\cdot)^H$	矩阵或矢量的共轭转置	$A_{m,n}$	矩阵 A 第 m 行第 n 列对应的元素
$(\cdot)^T$	矩阵或矢量的转置	$\text{Tr}(A)$	矩阵 A 的迹
$(\cdot)^*$	标量, 矢量或矩阵的共轭	$\det(A)$	矩阵 A 的行列式
$(\cdot)^{-1}$	方阵的逆矩阵	I_N	$N \times N$ 的单位矩阵
$(\cdot)^\dagger$	矩阵的伪逆	$O_{M \times N}$	$M \times N$ 的零矩阵
\otimes	Kronecker 乘积	$\text{diag}(x)$	以向量 x 为对角线元素的对角阵
\odot	Hadamard 乘积	$\Re(\cdot)$	取实部
$\lceil x \rceil$	不小于 x 的最小整数	$\Im(\cdot)$	取虚部
$\ x\ , \ X\ $	向量 x 或者矩阵 X 的算子-2 范数	$\mathbb{R}^{M \times N}$	$M \times N$ 维的实数空间
$\ x\ _F, \ X\ _F$	向量 x 或者矩阵 X 的 Frobenius 范数	$\mathbb{C}^{M \times N}$	$M \times N$ 维的复数空间
$E\{\cdot\}$	统计平均	Ω^N	N 维单位超球面

第二章 系统模型

2.1 MIMO 无线通信系统

2.1.1 概述

具有 N_t 根发送天线和 N_r 根接收天线的典型窄带平衰落 MIMO 信道如图 2.1 所示。在多数

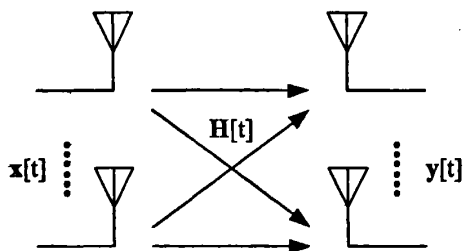


图 2.1: 窄带平衰落 MIMO 系统模型

情况下, MIMO 信道 $\mathbf{H}[t]$ 可以建模为平稳且各态遍历的随机过程。不失一般性, 去掉时间指标 t , 输入输出关系为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (2.1)$$

其中 \mathbf{H} 表示信道响应, 为 $N_r \times N_t$ 的随机矩阵, \mathbf{x} 是 $N_t \times 1$ 的传输矢量, \mathbf{y} 是 $N_r \times 1$ 的接收矢量, \mathbf{n} 为噪声矢量, 满足循环对称复高斯分布 $CN(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ 。即

$$E\{\hat{\mathbf{n}}\} = \mathbf{0} \quad \text{且} \quad E\{(\hat{\mathbf{n}} - E\{\hat{\mathbf{n}}\})(\hat{\mathbf{n}} - E\{\hat{\mathbf{n}}\})^H\} \quad (2.2)$$

其中 $\hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{n}) \\ \Im(\mathbf{n}) \end{bmatrix} \sim CN(0, \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{I}_{2N_r})$ 。 $H_{i,j}$ 表示第 j 根发送天线至第 i 根接收天线之间的信道响应。通常, 发送端会受到功率限制, 即 $\text{Tr}(\Sigma_x) \leq P_t$, 其中 $\Sigma_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\}$ 为传输向量的协方差矩阵。

Telatar[2]的工作表明, 对于独立同分布瑞利衰落信道, 为了达到信道容量, 需要输入向量满足零均循环对称复高斯分布。设输入向量的协方差矩阵 Σ_x , 对于特定信道状态 \mathbf{H} , 能够达到的信息速率为

$$\log \det \left(\mathbf{I}_{N_r} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}\Sigma_x \mathbf{H}^H \right) \quad (2.3)$$

通过在足够长时间内进行编码, 在随机 MIMO 信道内进行可靠通信的各态遍历信息速率为

$$E_{\mathbf{H}} \left\{ \log \det \left(\mathbf{I}_{N_r} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}\Sigma_x \mathbf{H}^H \right) \right\} \quad (2.4)$$

考虑发送向量协方差矩阵 Σ_x 对信道容量的影响, 在发送功率的限制下, 信道容量为

$$C = \max_{\Sigma_x: \text{Tr}(\Sigma_x) \leq P_t} E_H \left\{ \log \det \left(I_{N_r} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H} \Sigma_x \mathbf{H}^H \right) \right\} \quad (2.5)$$

对于任意的信道分布, 式(2.5)中的优化问题很难求解, 但是对于独立同分布瑞利衰落信道来说, 可以证明[2]在发送总功率 P_t 的限制下, 当输入向量 \mathbf{x} 服从零均且方差为 $(P_t/N_t)I_{N_t}$ 的循环对称复高斯分布时达到信道容量, 且信道容量为

$$C_{\text{no-CSI}} = E_H \left\{ \log \det \left(I_{N_r} + \frac{P_t}{\sigma^2 N_t} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right\} = \sum_{i=1}^{N_t} E \left\{ \log \left(1 + \frac{P_t}{\sigma^2 N_t} \lambda_i^2 \right) \right\} \quad (2.6)$$

所以, 当信道为独立同分布瑞利衰落且发送端未知信道状态信息时, 最优的传输方案就是对发送天线做等功率分配。

2.1.2 已知完整信道信息的系统

在2.1.1中, 由于发送端未知信道信息, 所以最优的发送向量分布由信道统计特性来确定。如果发送端已知信道状态信息, 就可根据信道状态信息自适应调整发送方案来提高吞吐量。

设信道矩阵的奇异值分解(SVD)为 $\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H$, 其中 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 分别为 \mathbf{H} 的左, 右特征向量构成的酉矩阵, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_t})$ 包含 \mathbf{H} 的奇异值, 且以降序排列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_t}$, 因而我们可以通过在发送端预乘酉阵 \mathbf{V} 和在接收端乘上酉阵 \mathbf{U}^H 来对角化 MIMO 信道, 如图2.2所示。特别的, 如果定义 $\tilde{\mathbf{x}} \triangleq \mathbf{V}^H \mathbf{x}$, $\tilde{\mathbf{y}} \triangleq \mathbf{U}^H \mathbf{y}$ 以及 $\tilde{\mathbf{n}} \triangleq \mathbf{U}^H \mathbf{n}$, 可以将输入输出关系简化为

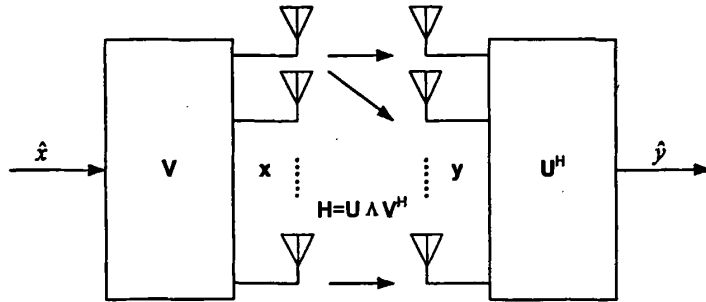


图 2.2: 发送和接收端均已知信道信息时, 酉矩阵预处理和后处理示意图

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (2.7)$$

对于对角的信道矩阵, 可以通过标准的注水算法来逼近信道容量[2, 45]。由于乘上酉阵之后并不会改变噪声向量的二阶统计特性, 所以对于独立同分布瑞利衰落信道, 当发送端和接收端均完全已知信道信息时, 遍历信道容量[2]为

$$C_{\text{perfect}} = \sum_{i=1}^{N_t} E_H \left\{ \log \left(1 + \frac{P_i^* \lambda_i^2}{\sigma^2} \right) \right\} \quad (2.8)$$

其中, $\{P_i^*\}_{i=1}^{N_t}$ 为注水功率分配

$$P_i^* = \left(\mu_0 - \frac{\sigma^2}{\lambda_i^2} \right)^+ \quad i = 1, \dots, N_t \quad (2.9)$$

μ_0 取值需满足传输功率限制 $\sum_{i=1}^{N_t} P_i^* = P_t$ 。式(2.6)与式(2.8)相比有着明显的区别。发送端未知信道信息时,简单的做等功率分配,而已知信道信息时,根据功率注水的原理分配不同的功率给不同的特征模式,特征模式越强(对应奇异值越大),分配功率越多。图2.3给出了完全已知信道信息和未知信道信息时的各态遍历信道容量。从结果可以看出,在低信噪比时,发送端完全已知信道信息时对谱效率有着明显的改善。但是如果信噪比进一步增大则信道容量的增加不再明显,因为在高信噪比下,最优的功率分配方案接近于等功率分配。

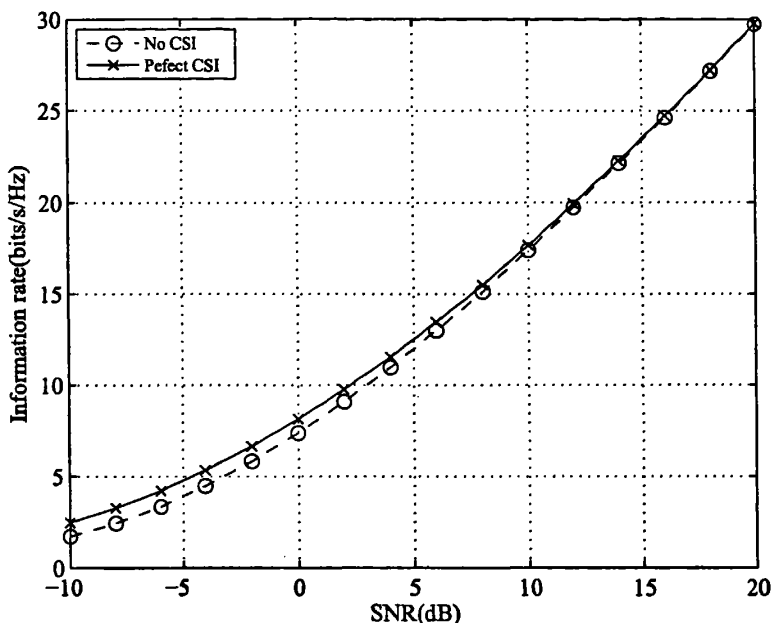


图 2.3: 发送端完全已知和未知信道信息时的遍历信道容量($N_t = N_r = 4$)

2.1.3 已知部分信道信息的系统

当发送端已知信道信息时,可以自适应的调整发送参数来提高谱效率。在慢衰落信道下的 TDD 系统中,由于信道的互易性,发送端和接收端可以分别进行信道估计,并且可以认为上/下行信道的特性基本一致,从而避免了反馈。对于 FDD 系统,由于上/下行信道特性并不相同,发送端信道估计的结果并不能替代接收端信道估计的结果。为了使得发送端可以根据接收端信道估计的结果进行自适应调整,需要接收端通过反馈信道将部分信道信息告知发送端。比如,在图2.2中需要反馈酉矩阵 \mathbf{V} 以便发送端对信道对角化。但是,由于无线信道的时变特性以及噪声的作用使得最终的反馈结果受到许多因素的影响,比如反馈延时、反馈误差以及信道估计误差等。更为重要的是,受到有限带宽的影响,直接反馈所有的 $(N_t \times N_r)$ 个信道矩阵元素的值并不现实。

由于反馈信道带宽有限,在一个衰落周期内,反馈信道仅能传递有限比特的信息。因此,需要对信道信息进行量化,然后利用有限的反馈比特来传递量化信道信息。为了达到这一目的,我们可以离线设计数种传输模式,存储在发送和接收端,接收端根据即时的信道信息来选择最佳的传输模式,并将选择的结果通过反馈信道传递给发送端。通常,我们将这些设计好的传输模式集合称为码本,对于波束成型系统,码本中存储的是成型矢量,而对于预编码系统,码本中存储的则是预编码矩阵。这类低反馈量的系统称为有限反馈系统,其基本的结构如图2.4所示。

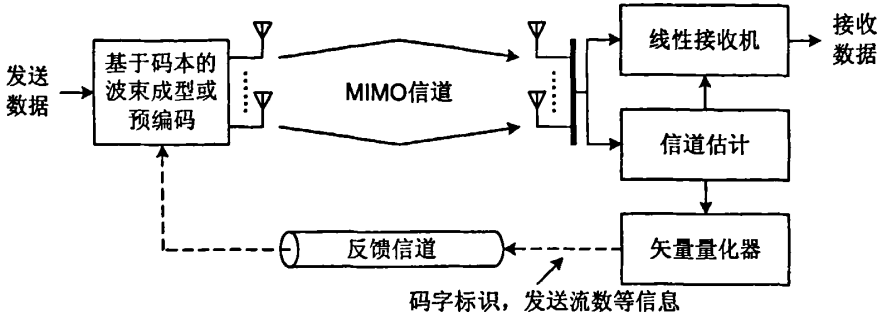


图 2.4: 有限反馈系统示意图

2.2 相关 MIMO 信道模型

在实际系统，受到信道环境以及天线间距的影响，信道不可能严格满足独立同分布关系。当移动终端处在移动中，且移动速度较慢时，对应的多普勒频移较小，因而信道响应存在时间上的相关性；当通信设备的天线间距较小时，不同天线上接收到的信号会呈现空间上的相关性。

2.2.1 时间相关信道模型

有限状态马尔可夫链是无线信道的一种有效模型[46, 47]，在无线通信系统分析中有着广泛的应用[48, 49, 50]。在本章的分析中，将量化得到的部分信道信息建模为有限状态马尔可夫链，称之为信道状态马尔可夫链。其状态空间由码本决定，而转移概率由信道的时相关特性决定。假定信道是平稳的随机过程，那么由量化得到的信道状态 $\{I_n\}$ 也是平稳的随机过程。如许多文献中的[46, 47]分析一样，该随机过程建模为一阶齐次马尔可夫链，状态空间为 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N_b\}$ 。一阶马尔可夫链的一个重要性质为其一阶记忆性，即给定最近状态 I_{n-1} ，将来状态 I_n 的值与过往状态 I_{n-2}, I_{n-3}, \dots 等无关，因此

$$\Pr\{I_n = i_n | I_{n-1} = i_{n-1}, I_{n-2} = i_{n-2}, \dots\} = \Pr\{I_n = i_n | I_{n-1} = i_{n-1}\} \quad (2.10)$$

根据上述性质，从状态 m 转移到 l 的概率定义为 $P_{l,m} \triangleq \Pr\{I_n = l | I_{n-1} = m\}$ 。状态 l 的平稳概率定义为 $\pi_l \triangleq \Pr\{I_n = l\}$ ，各状态的平稳概率可以写成向量形式 $\pi = [\pi_1 \ \dots \ \pi_N]^T$ 。各状态间的转移概率可以写成矩阵形式 \mathbf{P} ，其中 $P_{l,m} = P_{l,m}$ 。

对于一般的瑞利或莱斯衰落信道，可以假设信道状态马尔可夫链为各态遍历[39]。各态遍历的马尔可夫链的各状态是互通的，即状态空间内的任意两个状态可以在经过有限次转移后相互到达；另外，各状态是正常返的，即从任意状态出发，经过有限次转移回到自身的概率是 1，且平均返回时间是有限的；最后，各状态是非周期的，即从任意状态出发首次返回自身状态所需次数的最大公约数为 1。各态遍历的信道状态马尔可夫链具有以下性质：

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \mathbf{P}^D = [\pi \ \dots \ \pi] \quad (2.11)$$

接下来，进一步假设信道状态马尔可夫链是平稳的，且接收端准确无误的估计出马尔可夫链的平稳概率和状态转移概率。接收端将各概率，允许的反馈延迟以及原始码本反馈给发送端。当然，根据马尔可夫链的平稳特性，这样的反馈通常只需要做一次。

2.2.2 空间相关信道模型

首先,简单回顾一下各种信道二阶统计量的模型。2.1.1中介绍了独立同分布瑞利衰落信道模型,虽然独立同分布信道模型易于理论分析,但是很难精确符合实际信道的特性,因为很大的天线间距和丰富的散射环境在实际信道中很难得到满足。

相比之下, Kronecker 信道模型更加符合实际环境且经常为文献所采用[45, 42]。Kronecker 信道模型是一种发送接收可分离的相关模型,即信道元素的相关矩阵可以写成单边发送和接收相关矩阵的 Kronecker 积。信道矩阵定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\sqrt{E\{\text{Tr}(\mathbf{H}\mathbf{H}^H)\}}} \Sigma_r \mathbf{H}_{\text{iid}} \Sigma_t^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{E\{\text{Tr}(\mathbf{H}^H\mathbf{H})\}}} \mathbf{U}_r \Lambda_r^{1/2} \mathbf{H}_{\text{iid}} \Lambda_t^{1/2} \mathbf{U}_t^T \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中 $\mathbf{R}_r = E\{\mathbf{H}\mathbf{H}^H\} = \mathbf{U}_r \Lambda_r \mathbf{U}_r^H$ 及 $\mathbf{R}_t = E\{\mathbf{H}^T\mathbf{H}^*\} = \mathbf{U}_t \Lambda_t \mathbf{U}_t^H$ 分别为信道矩阵 \mathbf{H} 的单边发送和接收相关矩阵。显然,信道的归一化因子 $1/\sqrt{E\{\text{tr}(\mathbf{H}\mathbf{H}^H)\}} = 1/\sqrt{\text{tr}(\Lambda_t)} = 1/\sqrt{\text{tr}(\Lambda_r)}$ 。并且 Σ_r 和 Σ_t 定义如下:

$$\mathbf{R}_r = \Sigma_r \Sigma_r^H \quad \text{从而} \quad \Sigma_r = \mathbf{U}_r \Lambda_r^{1/2} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{R}_t = \Sigma_t \Sigma_t^H \quad \text{从而} \quad \Sigma_t = \mathbf{U}_t \Lambda_t^{1/2} \quad (2.14)$$

容易证明, Kronecker 信道模型中矩阵元素的相关矩阵 $\mathbf{R}_H = E\{\text{vec}(\mathbf{H}) \text{vec}(\mathbf{H})^H\}$ 可以表示为单边发送相关矩阵和接收相关矩阵的 Kronecker 乘积 $\mathbf{R}_t \otimes \mathbf{R}_r$ 。Kronecker 模型虽然便于理论分析,但是存在缺陷,即信道相关的可分离性假设。虽然在部分信道环境下 Kronecker 模型可以较好的符合实测数据[51],但是总的来说该模型并不能很好的模拟实际信道的特性[52, 53, 54, 55]。

为了克服上述缺陷,近年来学者们提出了一些改进的统计信道模型,包括虚拟信道[56],标准信道模型[53]等, Weichselberger[55]提出的一种通用的信道模型,对虚拟信道以及标准信道模型进行了推广。

Weichselberger 模型可以表示为

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}_r \left(\tilde{\Omega} \odot \mathbf{H}_{\text{iid}} \right) \mathbf{U}_t^T \quad (2.15)$$

其中 \mathbf{U}_t 和 \mathbf{U}_r 分别为反映发送和接收特征方向的酉矩阵, $\mathbf{H}_{\text{iid}} \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{I})$ 。 $\tilde{\Omega}$ 的元素均为实值,其各元素的值可以表示为耦合矩阵 Ω 对应元素的平方根,即 $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \odot \tilde{\Omega}^*$ 。耦合矩阵 Ω 可以表示为

$$\Omega_{m,n} = E\left\{ \left| \mathbf{u}_{r,m}^H \mathbf{H} \mathbf{u}_{t,n} \right|^2 \right\} \quad (2.16)$$

其中 $\mathbf{u}_{t,n}$ 和 $\mathbf{u}_{r,m}$ 分别表示 \mathbf{U}_t 的第 m 路特征方向和 \mathbf{U}_r 的第 n 路特征方向。 Ω 之所以称为耦合矩阵,是因为 $\Omega_{m,n}$ 表示的是发送端的第 n 路特征方向和接收端的第 m 路特征方向之间的平均耦合能量。用于构建该信道模型的参数包括:发送端的空间特征方向集合 \mathbf{U}_t 、接收端的空间特征方向集合 \mathbf{U}_r 和发送端各特征方向和接收端各特征方向之间的虚拟 SISO 信道之间的平均能量 Ω 。单边发送相关阵 $\mathbf{R}_t = E\{\mathbf{H}^T\mathbf{H}^*\} = \mathbf{U}_t \Lambda_t \mathbf{U}_t^H$, 接收相关阵 $\mathbf{R}_r = E\{\mathbf{H}\mathbf{H}^H\} = \mathbf{U}_r \Lambda_r \mathbf{U}_r^H$ 。其中 $[\Lambda_t]_{n,n} = \sum_{k=1}^{N_r} \Omega_{k,n}$, $[\Lambda_r]_{n,n} = \sum_{k=1}^{N_t} \Omega_{n,k}$ 。

当两边的酉矩阵 \mathbf{U}_t 和 \mathbf{U}_r 取 DFT 矩阵时, Weichselberger 模型退化为虚拟信道模型;当 Ω 的各元素不尽相同且不为零时, Weichselberger 模型退化为标准信道模型;当 Ω 可以表示为一个 $N_r \times 1$ 的向量和一个 $N_t \times 1$ 的向量的外积时, Weichselberger 模型退化为 Kronecker 模型。

第三章 码本设计

有限反馈系统最基本的问题是如何在固定反馈量的限制下选取最优的码本。码本设计本质上是矢量量化问题，对取值范围为 $\mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ 的输入矩阵进行量化得到 $\lceil \log_2 N_b \rceil$ 位的编码，即寻找映射 $\mathcal{M}: \mathbb{C}^{N_r \times N_t} \rightarrow \{c_1, \dots, c_{N_b}\}$ ，其中 N_t 为发送天线数目， N_r 为接收天线数目， c_i 为码字。为了寻找最优的码本，需要确定一组合适的编码函数和失真度量，然后通过经典的 GLA 算法得到接近最优的码本。矢量量化的方法对输入矢量的分布特征没有特殊的要求，甚至不需要完全已知输入矢量的分布函数，只要输入随机矢量具备各态遍历特性时，用足够长的训练序列就可以得到接近最优的码本。

特别地，对于独立同分布瑞利衰落信道来说，码本设计问题简化为均匀超球体中的矢量量化问题，其中，码字均为分布于 N_t 维复数空间里的一个单位超球面 Ω^{N_t} 上的确定的 N_t 维向量，随机输入矢量均匀分布于同一单位超球面 Ω^{N_t} 上。Love 等人关于独立同分布瑞利衰落信道下有限反馈系统的码本设计问题的分析表明了在该信道下，最小化码字之间的最大弦距离¹也可以得到最优的码本设计[23]。GLP 和 GSP 可以用于最优码本设计，以 GLP 为例，考虑 (N_b, N_t) 的复数码本，即 N_b 个 N_t 维复数空间内的单位复数向量的集合，注意到² $N_b > N_t$ ，GLP 要解决的问题是找到最优的码本，使其最大化码本中各码字之间的弦距离。

3.1 矢量量化方法

矢量量化器是指输入信号矢量空间 \mathcal{R} 到一组码字之间的映射。传统的矢量量化器 Q 定义为[58] k 维欧氏空间 \mathcal{R}^k 中的向量到包含 N 个输出或称作再生点的集合之间的映射， N 个输出常称作码字。关于空间 \mathcal{R}^k 的分割与矢量量化器密切相关，量化器将整个 \mathcal{R}^k 空间分割为 N 个区域 $\mathcal{R}_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$ 。第 i 个区域定义为 $\mathcal{R}_i \triangleq \{x \in \mathcal{R}^k : Q(x) = y_i\}$ 且对于任意 $i \neq j$ ，有 $U_i \mathcal{R}_i = \mathcal{R}^k$ 且 $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \emptyset$ 。

矢量量化器可以分为编码器 and 译码器两部分。编码器 \mathcal{E} 是指 \mathcal{R}^k 到标识集合 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$ 的映射 $\mathcal{E}: \mathcal{R}^k \rightarrow \mathcal{I}$ ，译码器 \mathcal{D} 是指标识集合 \mathcal{I} 到再生点集合 \mathcal{C} 的映射 $\mathcal{D}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ 。矢量量化的整个过程可以看成是编码和译码两个过程的级联，如图3.1所示。

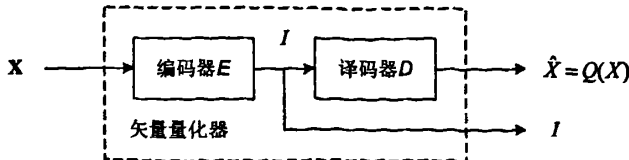


图 3.1: 矢量量化器结构图

¹设单位向量 $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^N$ ，则 v_1 和 v_2 之间的弦距离定义为 $d(v_1, v_2) = \sqrt{1 - |v_1^H v_2|^2}$ 。
² $N_b \leq N_t$ 的 GLP 问题是十分容易的，选取任意一组基的任意 N_b 个向量即可。

在语音和图像处理中，量化器直接对输入信号矢量进行量化编码，即译码器输出 $Q(\mathbf{X})$ 与编码器输入 \mathbf{X} 属于同一信号空间；在通信系统中，往往并不是直接对输入信号矢量本身进行量化，译码器输出与编码器输入可以分属不同空间，比如将要在4.2中提到的 MIMO 波束成型有限反馈系统中，输入信号空间为 $\mathbf{C}^{N_r \times N_t}$ ，但是译码器输出 $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^{N_t \times 1}$ ，其中 N_t 为发送天线数目， N_r 为接收天线数目。

矢量量化器设计的目的是找到一个确定编码器编码规则的码本和一个确定译码器译码规则的分割，以最优量化器的整体性能。为了衡量量化器的性能，需要定义一个失真度量准则 $d(\cdot, \cdot)$ ，准则定义了每个输入样本 \mathbf{x} 对应的失真度。量化器的整体性能用该失真度的统计平均或者最大失真来进行评估，本论文中采用了失真度的统计平均。矢量量化器 $Q(\cdot)$ 失真度的统计平均表示为

$$D = E\{d(\mathbf{X}, Q(\mathbf{X}))\} = \int d(\mathbf{x}, Q(\mathbf{x})) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

其中 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ 是矢量 \mathbf{X} 的概率密度函数，上述积分为 k 维空间的重积分。当输入矢量取值离散时，概率密度函数的表示式中会出现 δ 函数，在这种情况下通常用概率质量函数 $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ 表示

$$D = E\{d(\mathbf{X}, Q(\mathbf{X}))\} = \sum_i d(\mathbf{x}_i, Q(\mathbf{x}_i)) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \quad (3.2)$$

其中 $\{\mathbf{x}_i\}$ 表示 \mathbf{X} 所有非零概率的取值。

前面提到编码器由输入空间的分割 $\mathcal{R}^k = \cup_i \mathcal{R}_i$ 完全确定，译码器由码本 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ 完全确定。下面分析给定码本(译码器)时的最优分割(编码器)和给定分割(编码器)时的最优码本(译码器)。首先考虑译码器固定时的最优编码器设计。对于给定的码本，最优的分割满足近邻条件(Nearest Neighbor Condition)[58]：对于给定的输出集 \mathcal{C} ，最优分割满足 $\mathcal{R}_i = \{\mathbf{x} : d(\mathbf{x}, c_i) \leq d(\mathbf{x}, c_j), \forall j \neq i\}$ ，即仅当 $\forall j, d(\mathbf{x}, c_i) \leq d(\mathbf{x}, c_j)$ 时 $Q(\mathbf{x}) = c_i$ 。如果输入向量与多个码字之间的距离相等，即失真度相同，则选取任何一个码字作为编码的结果都不会影响最后总的平均失真度。在本文用到的矢量量化器中，我们简单的选取其中标识最小的码字作为该输入向量的编码结果，这种情况通常很少出现。接下来考虑给定分割下的最优码本设计，最优码本需满足中心条件(Centroid Condition)，即各个码字都应该位于对应的区域中心。区域中心 $\text{cent}(\mathcal{R}_i)$ 定义为[58]： $c_i = \text{cent}(\mathcal{R}_i) = \arg \min_c E\{d(\mathbf{X}, c) | \mathbf{X} \in \mathcal{R}_i\}$ 。

近邻条件和中心条件这两个最优码本设计的必要条件提供了迭代法设计量化器的基础。如果迭代收敛，则可以找到性能优良的量化器，但不一定是最优的。迭代前需要进行初始化，即给定一个初始码本，可以通过随机产生，通过近邻条件找出其对应的最优区域分割，然后通过中心条件计算该分割下的最优码字集合。这样便得到了一个新的矢量量化器，该量化器的平均失真不会大于先前的量化器。尽管两个必要条件看起来都很简单，但是要直接找到最优量化器的闭式解却十分困难。通过反复的迭代，虽然不能得到最优的闭式解，但是至少能保证每次迭代都是对先前量化器的改进，平均失真不会随着迭代的进行而增大。接下来将分析矢量量化器迭代设计法的经典算法 GLA 及其在有限反馈系统码本设计中的应用。

3.2 Generalized Lloyd Algorithm 算法

GLA 算法[58]是标量量化中经典的 Lloyd 算法[57]的推广，该算法通过最优量化器的两个必要条件进行迭代来不断修正量化器。GLA 算法基于 Lloyd 迭代，按照输入矢量的特点可分为已知连续输入矢量概率分布时的 Lloyd 迭代和基于训练序列的 Lloyd 迭代两种。已知连续输入矢量的概率分布时的 Lloyd 迭代描述为

算法 1 基于概率分布的 Lloyd 迭代

- 1: 给定码本 $C_m = \{c_i : i = 1, \dots, N\}$ 和输入矢量概率密度函数 f_x , 通过近邻条件找到对应的最优分割:

$$\mathcal{R}_i = \{x : d(x, c_i) < d(x, c_j), \forall j \neq i\} \quad (3.3)$$

如果矢量 x 位于两个区域的边界上, 即 $d(x, c_i) = d(x, c_j), i \neq j$, 则将矢量 x 归入 j 最小的区域 \mathcal{R}_j 。

- 2: 利用中心条件找出给定区域分割 C_m 的中心 $C_{m+1} = \{\text{cent}(\mathcal{R}_i) : i = 1, \dots, N\}$ 来确定最优的码本。

由两个必要条件可以得出, 给定译码器, 步骤一不会使得编码器性能进一步恶化。同样, 在给定的条件下, 步骤二不会导致译码器性能的恶化。因此, 通过 Lloyd 迭代, 量化器的平均失真不会增加。

在实际应用中, 由于输入矢量的分布特性难以准确获知, 所以通常需要对输入随机矢量进行实验观测从而获得训练序列, 利用训练序列来生成改进码本。事实上, 基于训练序列的 Lloyd 等效于迭代过程中用蒙特卡洛方法来近似最近相邻条件和中心条件中的积分。基于训练序列的 Lloyd 迭代定义为:

算法 2 基于训练序列的 Lloyd 迭代

- 1: 给定码本 $C_m = \{c_i : i = 1, \dots, N\}$ 和训练序列 $T = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$, 通过近邻条件找到训练序列集合对应的最优分割:

$$\mathcal{R}_i = \{x \in T : d(x, c_i) < d(x, c_j); \text{任意 } j \neq i\} \quad (3.4)$$

如果矢量 x 位于两个区域的边界上, 即 $d(x, c_i) = d(x, c_j), i \neq j$, 则将矢量 x 归入 j 最小的区域 \mathcal{R}_j 。

- 2: 利用中心条件找出给定区域分割 $\{\mathcal{R}_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ 的中心 $C_{m+1} = \{\text{cent}(\mathcal{R}_i); i = 1, \dots, N\}$ 来确定最优的码本。其中 \mathcal{R}_i 为有限集, 中心条件中的区域上的积分转化为关于有限集上的平均。

根据上述 Lloyd 迭代的定义, 基于训练序列的 GLA 算法参见算法3。由于利用近邻条件和

算法 3 基于训练序列的 GLA 算法

- 1: 生成一组初始码本 $C_0 = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$, 同时产生训练序列 $T = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ 。
- 2: 根据给定的码本 $C_m = \{c_i : i = 1, 2, \dots, N\}$, 通过近邻条件将训练序列集 T 划分为 N 个区域 $\{\mathcal{R}_i : i = 1, 2, \dots, N\}$:

$$\mathcal{R}_i = \{x \in T : d(x, c_i) < d(x, c_j), \forall j \neq i\} \quad (3.5)$$

根据码本 C_m 及其对应的分割 $\{\mathcal{R}_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ 计算矢量量化器的平均失真 D_m 。

- 3: 利用中心条件找出给定区域分割 $\{\mathcal{R}_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ 的中心 $C_{m+1} = \{\text{cent}(\mathcal{R}_i) : i = 1, \dots, N\}$ 来确定最优的码本。
- 4: 若 $D_m - D_{m-1} < \text{门限}$, 退出; 否则, 转到步骤 2。

中心条件进行迭代时, 每一步迭代相比于前一次均不会增加平均失真, 所以通常 5-8 次迭代就足

以收敛。值得注意的是 GLA 算法适用于任何分布的衰落信道，但是 3.3 提到的代数方法则仅适用于独立同分布瑞利衰落信道。

3.3 Grassmannian Line/Subspace Packing

GLP 是数学领域里一个得到广泛研究的问题[59, 60]，它要解决的问题是一维子空间的最优放置[59]。对于波束成型系统来说，如果码本设计准则为最大化接收 SNR，则设计准则可以转化为 $\max_{\mathbf{Q}(\cdot)} E\{|h\mathbf{w}|^2\}$ 。对于服从循环对称复高斯分布的 MISO 信道 \mathbf{h} ，若将其视为复数空间 \mathbb{C}^{N_t} 内的一维子空间或者指向复空间内某一方向的直线，则满足上述分布的 \mathbf{h} 在复空间内具有各向同性，即 \mathbf{h} 等可能的指向复空间内的任何方向。最大化 SNR 的目标下最优的波束成型矢量为 $\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{h}^H / \|\mathbf{h}\|$ ，因而最优的波束成型矢量代表的方向在复空间内也满足各向同性。

考虑成型矢量张成的一维子空间 Ω_m 。注意到由于 Ω_m 为复数子空间， Ω_m 内的单位矢量有一个重要的等效关系，单位矢量 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \Omega_m$ ，如果 $\mathbf{w}_1 = e^{j\theta} \mathbf{w}_2$, $\theta \in [0, 2\pi)$ ，那么 \mathbf{w}_1 和 \mathbf{w}_2 在接收 SNR 的意义上是等效的，这个结论是显而易见的，因为 $|h\mathbf{w}_1|^2 = |he^{j\theta} \mathbf{w}_2|^2 = |h\mathbf{w}_2|^2$ 。复数 Grassmannian 簇 $\mathcal{G}(N_t, 1)$ 定义为复数空间 \mathbb{C}^{N_t} 的所有一维子空间的集合。 $\mathcal{G}(m, 1)$ 上的距离函数定义为代表不同方向的单位向量之间的弦距离。比如对于单位向量 \mathbf{w}_1 和 \mathbf{w}_2 ，它们之间的距离为

$$d(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \sqrt{1 - |\mathbf{w}_1^H \mathbf{w}_2|^2} \quad (3.6)$$

GLP 的目的是在 \mathbb{C}^{N_t} 中找到 N_b 条直线使得它们之间的最小距离最大化，根据式(3.6)中距离的定义，问题转化为找到 N_b 个单位向量，使得它们之间的相关的模尽可能小。

用矩阵 $N_t \times N_b$ 的矩阵 $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \cdots \ \mathbf{w}_{N_b}]$ 来表示 $\mathcal{G}(N_t, 1)$ 上包含 N_b 条直线的 Line Packing，其中 \mathbf{w}_i 为单位向量，其列空间即为第 i 条直线。显然对于一个 Line Packing 来说，其最小距离是评估其性能的重要指标。最小距离定义为

$$\delta(\mathbf{W}) = \min_{1 \leq k < l \leq N_b} \sqrt{1 - |\mathbf{w}_k^H \mathbf{w}_l|^2} \quad (3.7)$$

对于任意的 N_t 和 N_b 的 Line Packing 在应用数学和信息论领域得到了广泛的研究[59, 27]。Rankin Bound 给出了最小距离的上界[59, 61]，上界为关于 N_t 和 $N_b \geq N_t$ 的函数[59, 61]。

$$\delta(\mathbf{W}) \leq \sqrt{\frac{(N_t - 1)N_b}{N_t(N_b - 1)}} \quad (3.8)$$

对于给定发送天线数目 N_t 和码本大小 N_b 的波束成型系统，Grassmannian 波束成型准则描述为：设计一个码本 $\mathbf{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{N_b}\}$ ，使得对应的矩阵 \mathbf{C} 最大化最小距离 $\delta(\mathbf{C})$ 。

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \max_{\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_b}, \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}} \min_{1 \leq k < l \leq N_b} \delta(\mathbf{C}) \\ &= \max_{\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_b}, \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}} \min_{1 \leq k < l \leq N_b} \sqrt{1 - |\mathbf{w}_k^H \mathbf{w}_l|^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

在实数情况下该问题得到了深入的研究[59, 60]并且有大量现成的最优的 Packing 结果可供利用[26]。对于复数情形，可以通过解析方法[24]和数值方法[27]来寻找最优 Packing。GLP 不仅可以用于瑞利衰落信道下的 MISO 有限反馈波束成型系统的码本设计，也可以应用于 MIMO 有限反馈波束成型系统[23]。

GLP 可以拓展到矩阵的情形，即 Packing 中的组成元素可以推广为多维子空间。复数 Grassmannian 簇 $\mathcal{G}(N_t, N_s)$ 定义为复数空间 \mathbb{C}^{N_t} 的所有 N_s 维子空间的集合。其中，任何一个

N_s 维子空间都可以看成一个 $N_t \times N_s$ 的酉矩阵的列向量张成的空间。 $\mathcal{G}(N_t, N_s)$ 簇上的距离可以用子空间之间的本原角来定义。假设 $\{\theta_i\}_{i=1}^{N_s}$ 为矩阵 \mathbf{W}_1 的列向量张成的子空间和 \mathbf{W}_2 的列向量张成的子空间之间的本原角[62]，那么矩阵 $\mathbf{W}_1^H \mathbf{W}_2$ 的奇异值分解为 $\mathbf{U}(\cos \Theta)\mathbf{V}^H$ ，其中 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 为酉矩阵， $\cos \Theta = \text{diag}(\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_{N_s})$ 。那么子空间之间的距离可以表示为

$$d(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_1^H - \mathbf{W}_2 \mathbf{W}_2^H\| = \|\sin \Theta\|^2 \quad (3.10)$$

对于 MIMO 窄带空分复用系统，发送天线数目为 N_t ，接收天线数目为 N_r ，信道为瑞利平衰落，信道响应可以建模为 $N_r \times N_t$ 的随机矩阵，发送端发射独立流数目为 N_s 。假设接收端完美同步，则接收端基带信号为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (3.11)$$

其中 $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_s}$ 为预编码矩阵， $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ 为信道响应矩阵，且 $\mathbf{H} \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{I})$ ， $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N_s}$ 为发送矢量， $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N_r}$ 为噪声矢量，且 $\mathbf{n} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ 。在最大化接收 SNR 的目标下，最优的预编码矩阵为 $\mathbf{W}_{opt} = \mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_{N_s}]$ ，其中 $\{\mathbf{w}_i : i = 1, 2, \dots, N_s\}$ 为信道矩阵 \mathbf{H} 的最大的 N_s 个奇异值对应的特征向量[63]。4.3中将看到对于独立同分布瑞利衰落信道，最优预编码矩阵 \mathbf{W}_{opt} 在 Grassmannian 簇 $\mathcal{G}(N_t, N_s)$ 上满足均匀分布。如同 GLP 一样，在该信道下的码本设计问题可以转化为 Grassmannian 簇上的 GSP[64]。GSP 要解决的问题是找到 Grassmannian 簇上的 N_s 个子空间，使得子空间之间的最小距离最大化。

3.4 码本设计方法总结

矢量量化方法和 GLP/GSP 是有限反馈系统中码本设计的两类主要方法，两种方法各有优缺点。矢量量化方法基于 Lloyd 迭代，所以算法复杂度较高，适合离线生成码本。矢量量化方法的优点便是适用性广，对于一般的 MIMO 无线通信信道，无论其是否为独立同分布瑞利衰落，算法均可保持不变且可以获得良好的性能。GLP/GSP 虽然在部分特定的发送天线数目 N_t ，发送流数目 N_s 和码字数目 N_b 的组合可以得到解析解，但是对于大多数实际系统配置，仍然需要用数值方法进行求解，所以计算复杂度并没有得到显著的降低，同时 GLP/GSP 只能针对独立同分布瑞利衰落信道，因而缺乏通用性。该方法主要的优势在于 Grassmannian 簇以及对应的 Packing 问题在数学和信息论领域得到了广泛的研究，因而有大量现成的码本可供利用。

第四章 独立同分布信道下的有限反馈

在上一章中我们分析了矢量量化方法和 GLP/GSP 这两种常用的码本构造方法。矢量量化方法根据所选取的准则，比如最大化接收 SNR 或者最大化遍历容量等，也可以有多种实现。其中，部分矢量量化准则与发射信噪比有关，而 GLP/GSP 与信噪比无关。在本章中，我们主要分析矢量量化方法设计的码本在独立同分布瑞利衰落信道下的性能，基于 GLP/GSP 设计的码本仅供性能分析参考。

4.1 MISO 波束成型系统

4.1.1 基带信号模型

MISO 系统仅有单根接收天线，该系统模型适用于移动终端的下行链路。由于体积的限制，在移动终端上制作多根天线较困难，因而下行链路可以看作是一个 MISO 系统，其基带信号可以描述如下

$$y = hws + n \quad (4.1)$$

其中 w 为波束成型矢量， n 为加性高斯白噪声，服从复高斯分布 $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$ 。设信道 h 服从循环对称复高斯分布 $\mathcal{CN}(0, \mathbf{I})$ ，注意到 h 为 $1 \times N_t$ 的行向量。假设接收端完全已知信道信息，即信道估计没有误差。发送符号 s 的功率为 $E_s\{|s|^2\} = \mathcal{E}_t$ 。对应的接收 SNR 为

$$\gamma_r = \frac{\mathcal{E}_t |hw|^2}{N_0} = \frac{(\mathcal{E}_t \|w\|^2) \left| h \frac{w}{\|w\|} \right|^2}{N_0} \quad (4.2)$$

出于功率限制的考虑，假设 $\|w\| = 1$ ，则(4.2)可以写为 $\gamma_r = \mathcal{E}_t \Gamma / N_0$ ，其中 $\Gamma = |hw|^2$ 为信道的等效增益。

4.1.2 基于最大化接收 SNR 的码本设计

为了使系统的符号差错概率(SER)最小，即使得 γ_r 的值最大，则最优的成型矢量为 $w_{\text{opt}} = \max_w \gamma_r = h^H / \|h\|$ 。对于有限反馈系统，发送端仅已知部分信道信息。发送接收端均存储有对 h 量化后的码本 $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_{N_c}\}$ ，其中 $\|c_i\| = 1$ 。码本设计准则为

$$\max_{Q(\cdot)} E \{ |hQ(h)|^2 \} \quad (4.3)$$

接收端根据信道信息 h 选择最佳的波束成型矢量 $\hat{w} \in \mathcal{C}$ ，使得接收 SNR 最大，即 $\hat{w} = \arg \max_{w \in \mathcal{C}} \gamma_r$ ，因而接收端量化编码的准则为

$$\hat{w} = Q(h) = \arg \max_{w \in \mathcal{C}} |hw|^2 \quad (4.4)$$

利用第三章中提到的 GLA 算法，基于最大化接收 SNR 的码本设计算法描述如下：

算法 4 基于最大化接收 SNR 的码本设计

- 1: 随机产生 N_b 个 $N_t \times 1$ 的单位向量作为初始码本。
- 2: 近邻条件: 对于给定的码字集合 $\{c_1, \dots, c_{N_b}\}$, 最优的区域分割为

$$\mathcal{R}_i = \{h \in \mathbb{C}^{1 \times N_t} : |hc_i|^2 > |hc_j|^2, \forall j \neq i\} \quad (4.5)$$

- 3: 中心条件: 对于给定的区域分割 $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{N_b}\}$, 最优的码字集合为

$$\begin{aligned} c_i &= \arg \max_{c \in \mathbb{C}^{N_t}, \|c\|=1} E\{|hc|^2\} \\ &= \arg \max_{c \in \mathbb{C}^{N_t}, \|c\|=1} c^H E\{h^H h, h \in \mathcal{R}_i\} c \end{aligned} \quad (4.6)$$

显然满足该条件的 c_i 为矩阵 $E\{h^H h, h \in \mathcal{R}_i\}$ 的非零特征值所对应的特征向量。

- 4: 如果 $E\{|hQ(h)|^2\}$ 收敛, 结束; 否则, 转到步骤 2。

4.1.3 基于最小化信道容量损失的码本设计

除了接收 SNR 之外, 有限反馈带来的信道容量损失也是评价码本设计的一个重要因素。下面考虑基于最小化有限反馈带来的信道容量损失的码本设计方法。发送端完全已知信道信息时, s 与 y 之间的互信息为 $I(h) = \log(1 + \mathcal{E}_t \|h\|^2 / N_0)$; 而在有限反馈系统中, 给定信道响应 h 和量化结果 \hat{w} 时, s 与 y 之间的互信息为 $I(h, \hat{w}) = \log(1 + \mathcal{E}_t |h\hat{w}|^2 / N_0)$ 。

定义信道容量损失为有限反馈系统的遍历容量相比于完全已知信道信息系统的容量损失为[28]

$$C_{\text{loss}} \triangleq E\{I(h) - I(h, \hat{w})\} \quad (4.7a)$$

$$= E\left\{\log\left(1 + \frac{\mathcal{E}_t \|h\|^2}{N_0}\right) - \log\left(1 + \frac{\mathcal{E}_t |h\hat{w}|^2}{N_0}\right)\right\} \quad (4.7b)$$

$$= E\left\{-\log\left[1 - \frac{\mathcal{E}_t \|h\|^2 / N_0 (1 - |v\hat{w}|^2)}{1 + \mathcal{E}_t \|h\|^2 / N_0}\right]\right\} \quad (4.7c)$$

式(4.7c)中 $v = h/\|h\|$ 表示 MISO 信道 h 的方向。该准则并不适用于 GLA 算法, 因为中心条件的计算会非常复杂, 必须对其进行简化以适应 GLA 迭代算法且保证迭代收敛。根据发送信噪比和反馈速率的不同, 可以分为两种情况进行简化:

1. 高反馈速率或者低发送信噪比: 假设反馈速率较高, 则 \hat{w} 比较接近信道方向 v , 于是 $(1 - |v\hat{w}|^2) \rightarrow 0$, 或者发送信噪比较低时, $\frac{\mathcal{E}_t}{N_0} \|h\|^2 \ll 1$, 式(4.7)中的信道容量损失简化为 $C_{\text{loss}} \approx E\left\{\frac{\mathcal{E}_t \|h\|^2 / N_0}{1 + \mathcal{E}_t \|h\|^2 / N_0} (1 - |v\hat{w}|^2)\right\}$ 。
2. 高发送信噪比: 假设发送信噪比较高时, $\frac{\mathcal{E}_t}{N_0} \|h\|^2 \gg 1$, 信道容量损失简化为 $C_{\text{loss}} \approx E\{-\log(|v\hat{w}|^2)\}$ 。

高反馈速率或者低发送信噪比近似情况下, 定义 $\alpha \triangleq \sqrt{\frac{\mathcal{E}_t \|h\|^2 / N_0}{1 + \mathcal{E}_t \|h\|^2 / N_0}}$, 则信道容量损失改写为 $C_{\text{loss}} \approx E\{\alpha^2 (1 - |v^H \hat{w}|^2)\}$, 对应的码本设计准则为 $\min_{Q(\cdot)} E\{\alpha^2 (1 - |v^H Q(h)|^2)\}$, 由于 α

¹此表达式对应于 e 为底信道容量, 对于 2 为底信道容量, 还需要乘上一个因子 $\sqrt{\frac{1}{\ln 2}}$ 。

与信道量化结果无关，最终设计准则改写为

$$\max_{Q(\cdot)} E \{ |\alpha v Q(h)|^2 \}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_t \|h\|^2 / N_0}{1 + \mathcal{E}_t \|h\|^2 / N_0}} \quad (4.8)$$

接收端的量化编码准则为 $\hat{w} = Q(h) = \arg \max_{w \in \mathcal{C}} |\alpha v w|^2$ ，由于接收端对每次信道实现进行单独量化时， α 和 $\|h\|$ 都是与码本无关的量，因而编码准则最终可以简化为

$$\hat{w} = Q(h) = \arg \max_{w \in \mathcal{C}} |hw|^2 \quad (4.9)$$

注意到 α 与发送信噪比有关，所以上述准则为每信噪比优化。高反馈速率或低信噪比下基于最小化信道容量损失的每信噪比优化码本设计算法描述如下：

算法 5 高反馈速率或低信噪比下基于最小化信道容量损失的每信噪比优化码本设计

- 1: 随机产生 N_b 个 $N_t \times 1$ 的单位向量作为初始码本。
- 2: 近邻条件：对于给定的码字集合 $\{c_1, \dots, c_{N_b}\}$ ，最优的区域分割满足

$$\mathcal{R}_i = \left\{ h \in \mathbb{C}^{1 \times N_t} : |\alpha v c_i|^2 \geq |\alpha v c_j|^2, \forall j \neq i \right\} \quad (4.10)$$

- 3: 中心条件：对于给定的区域分割 $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{N_b}\}$ ，最优的码字集合满足

$$c_i = \arg \max_{c \in \mathbb{C}^{N_t}, \|c\|=1} E \left\{ |\alpha v c|^2, h \in \mathcal{R}_i \right\} \quad (4.11)$$

式(4.11)改写为

$$c_i = \arg \max_{c \in \mathbb{C}^{N_t}, \|c\|=1} c^H E \left\{ \alpha^2 v^H v, h \in \mathcal{R}_i \right\} c \quad (4.12)$$

满足上述条件的 c_i 为 $N_t \times N_t$ 的矩阵 $E \left\{ \alpha^2 v^H v, h \in \mathcal{R}_i \right\}$ 非零特征值对应的特征向量。

- 4: 如果 $E \left\{ |\alpha v Q(h)|^2 \right\}$ 收敛，结束；否则，转到步骤 2。

如果发送信噪比足够小，则 $\alpha \approx \sqrt{\mathcal{E}_t \|h\|^2 / N_0}$ 。设计准则还可进一步简化为

$$\max_{Q(\cdot)} E \left\{ \frac{\mathcal{E}_t}{N_0} \|h\|^2 |v Q(h)|^2 \right\} = \max_{Q(\cdot)} E \left\{ |h Q(h)|^2 \right\} \quad (4.13)$$

其中，等式之所以成立是因为 $v = h / \|h\|$ ，且 \mathcal{E}_t / N_0 与量化无关。接收端量化编码规则为

$$\hat{w} = Q(h) = \arg \max_{w \in \mathcal{C}} |hw|^2 \quad (4.14)$$

值得注意的是，以减小有限反馈带来的信道容量损失为目标，在低信噪比近似的情况下，码本设计准则(4.13)与以降低系统误码率(SER)，即增大接收信噪比为目标码本设计准则(4.3)完全一致，所以低信噪比近似时基于最小化信道容量损失的码本设计算法与最大化接收 SNR 的码本设计算法相同。

高信噪比近似情况下，码本设计准则简化为 $\min_{Q(\cdot)} E \{-\log(|v Q(h)|^2)\}$ ，由于 \log 函数为单调递增函数，故设计准则改写为

$$\max_{Q(\cdot)} E \left\{ |v Q(h)|^2 \right\} \quad (4.15)$$

接收端编码准则为 $\hat{w} = Q(h) = \arg \max_{w \in \mathcal{C}} |vw|^2$ ，由于接收端对每次信道实现进行单独量化时， $|h|^2$ 与码本无关，因而编码准则最终可以简化为

$$\hat{w} = Q(h) = \arg \max_{w \in \mathcal{C}} |hw|^2 \quad (4.16)$$

高信噪比近似下基于最小化信道容量损失的码本设计算法为

算法 6 高信噪比近似下基于最小化信道容量损失的码本设计

- 1: 随机产生 N_b 个 $N_t \times 1$ 单位向量作为初始码本。
- 2: 近邻条件: 对于给定的码字集合 $\{c_1, \dots, c_{N_b}\}$ ，最优的区域分割满足

$$\mathcal{R}_i = \left\{ h \in \mathbb{C}^{1 \times N_t} : |vc_i|^2 \geq |vc_j|^2, \forall j \neq i \right\} \quad (4.17)$$

- 3: 中心条件: 对于给定的区域分割 $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{N_b}\}$ ，最优的码字集合满足

$$c_i = \arg \max_{c \in \mathbb{C}^{N_t}, \|c\|=1} E \left\{ |vc|^2, h \in \mathcal{R}_i \right\} \quad (4.18)$$

式(4.18)改写为

$$c_i = \arg \max_{c \in \mathbb{C}^{N_t}, \|c\|=1} c^H E \left\{ v^H v, h \in \mathcal{R}_i \right\} c \quad (4.19)$$

满足上述条件的 c_i 为 $N_t \times N_t$ 的矩阵 $E \left\{ v^H v, h \in \mathcal{R}_i \right\}$ 非零特征值对应的特征向量。

- 4: 如果 $E \left\{ |vQ(h)|^2 \right\}$ 收敛，结束；否则，转到步骤 2。

在实际通信系统中，由于信道环境的变化或者发送功率的调整，发送 SNR 有可能会发生变化，故基于最小化信道容量损失的每信噪比优化码本设计算法实现复杂度较高，而准则 $\max_{Q(\cdot)} E \left\{ |vQ(h)|^2 \right\}$ 和准则 $\max_{Q(\cdot)} E \left\{ |hQ(h)|^2 \right\}$ 与发送 SNR 无关，系统仅需要存储预先离线设计的码本，之后的通过程可以保持不变，因而更加适合应用在实际系统中。根据仿真结果，采用这两种准则设计出的码本在系统中的 BER 性能并没有明显下降，因而在独立同分布瑞利信道下的 MISO 系统中应该尽量采用这两种准则来设计码本。

除基于矢量量化的码本设计方法外，还可以利用 GLP 来设计码本。在最大化接收 SNR 的意义下，最优的波束成型矢量为 $w_{\text{opt}} = v$ 。在 3.3 中提到，如果信道 h 服从独立同分布瑞利衰落，则 v 在单位超球体 Ω_{N_t} 上满足各向同性。通过 GLP 可以找到一组码字，使得它们之间的距离尽可能大。直观上来说，对于各向同性分布，码字间距离越大性能越好。4.5 中给出了 GLP 设计的码本在有限反馈系统中的性能。

4.2 MIMO 波束成型系统

4.2.1 基带模型

对于 $N_r \times N_t$ 的 MIMO 系统(发送天线数目为 N_t ，接收天线数目为 N_r)，假设系统带宽 W 远小于信道相干时间的倒数 $1/\tau$ ，则离散等效信道可建模为 $N_r \times N_t$ 的矩阵 H 。接收端基带信号为

$$y = z^H H w s + z^H n \quad (4.20)$$

其中，矢量 w 和 z 分别为发送端成型矢量和接收端合并矢量，噪声矢量 n 服从循环正态分布 $CN(0, N_0 I)$ 。同时信道 H 满足独立同分布瑞利分布 $CN(0, I)$ 。假设接收端完全已知信道信息。 s

为发送符号, 其能量为 $E_s\{|s|^2\} = \mathcal{E}_t$ 。接收 SNR 为

$$\gamma_r = \frac{\mathcal{E}_t |z^H \mathbf{H} \mathbf{w}|^2}{\|z\|^2 N_0} = \frac{(\mathcal{E}_t \|\mathbf{w}\|^2) \left| \frac{z^H \mathbf{H} \mathbf{w}}{\|z\| \|\mathbf{w}\|} \right|^2}{N_0} \quad (4.21)$$

如果对 \mathbf{w} 和 z 做归一化以保持恒定功率, 则接收 SNR 可以改写为

$$\gamma_r = \frac{\mathcal{E}_r}{N_0} = \frac{\mathcal{E}_t |z^H \mathbf{H} \mathbf{w}|^2}{N_0} = \frac{\mathcal{E}_t \Gamma}{N_0} \quad (4.22)$$

其中 $\Gamma = |z^H \mathbf{H} \mathbf{w}|^2$ 为信道的等效增益。与 MISO 系统不同的是, MIMO 系统需要同时选择成型矢量和合并矢量。显然当给定成型矢量 \mathbf{w} 时, 最大化 $|z^H \mathbf{H} \mathbf{w}|$ 的矢量为 $z = \mathbf{H} \mathbf{w} / \|\mathbf{H} \mathbf{w}\|$, 这样的接收机被称为最大比合并(MRC)接收机。同时, 给定合并矢量 z 时, 最大化 $|z^H \mathbf{H} \mathbf{w}|$ 的矢量 \mathbf{w} 为 \mathbf{H} 最大奇异值对应的特征向量。

4.2.2 基于最大化接收 SNR 的码本设计

在最大化接收 SNR 的目标下码本设计准则为

$$\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \{ \|\mathbf{H} \mathcal{Q}(\mathbf{H})\|^2 \} = \max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \{ \mathcal{Q}(\mathbf{H})^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \} \quad (4.23)$$

接收端的编码准则为

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{C}} \|\mathbf{H} \mathbf{w}\|^2 = \arg \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{C}} \mathbf{w}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{w} \quad (4.24)$$

基于最大化 SNR 的 GLA 码本设计算法描述如下:

算法 7 基于最大化 SNR 的 GLA 码本设计

- 1: 随机产生 N_b 个 $N_t \times 1$ 的向量作为初始化码本。
- 2: 近邻条件: 对于给定的码字集合 $\{c_1, \dots, c_{N_b}\}$, 最优的区域分割满足

$$\mathcal{R}_i = \{ \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t} : \|\mathbf{H} c_i\|^2 \geq \|\mathbf{H} c_j\|^2, \forall j \neq i \} \quad (4.25)$$

- 3: 中心条件: 对于给定的区域分割 $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{N_b}\}$, 最优的码字集合满足

$$c_i = \arg \max_{c \in \mathbb{C}^{N_t}, \|c\|=1} E \{ \|\mathbf{H} c\|^2, \mathbf{H} \in \mathcal{R}_i \} \quad (4.26)$$

式(4.26)可以改写为

$$c_i = \arg \max_{c \in \mathbb{C}^{N_t}, \|c\|=1} c^H E \{ \mathbf{H}^H \mathbf{H}, \mathbf{H} \in \mathcal{R}_i \} c \quad (4.27)$$

满足上述条件的 c_i 为 $N_t \times N_t$ 的矩阵 $E \{ \mathbf{H}^H \mathbf{H}, \mathbf{H} \in \mathcal{R}_i \}$ 最大特征值对应的特征向量。

- 4: 如果 $E \{ \|\mathbf{H} \mathcal{Q}(\mathbf{H})\|^2 \}$ 收敛, 退出; 否则, 转到步骤 2。
-

4.2.3 基于最小化信道容量损失的码本设计

下面考虑信道容量有关的码本设计, 发送端完全已知信道信息时, s 与 y 之间的互信息为 $I(\mathbf{H}) = \log(1 + \mathcal{E}_t \|\mathbf{H}\|^2 / N_0)$; 对于有限反馈系统, 给定信道 \mathbf{H} 和量化结果 $\hat{\mathbf{w}}$ 时, s 与 y 之间

的互信息为 $I(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{w}}) = \log(1 + \varepsilon_t \|\mathbf{H}\hat{\mathbf{w}}\|^2/N_0)$ ，则信道容量损失为[28]

$$\begin{aligned} C_{\text{loss}} &= E\{I(\mathbf{H}) - I(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{w}})\} \\ &= E\left\{\log\left(1 + \frac{\varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2}{N_0}\right) - \log\left(1 + \frac{\varepsilon_t \|\mathbf{H}\hat{\mathbf{w}}\|^2}{N_0}\right)\right\} \\ &= E\left\{-\log\left[1 - \frac{\varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2/N_0}{1 + \varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2/N_0} \left(1 - \frac{\|\mathbf{H}\hat{\mathbf{w}}\|^2}{\|\mathbf{H}\|^2}\right)\right]\right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

为了利用 GLA 算法计算码本，需要对(4.28)进行简化，根据反馈速率和发送信噪比的不同，分为以下两种情况进行简化：

1. 高反馈速率或低发送信噪比：若反馈速率较高，则量化结果 $\hat{\mathbf{w}}$ 越接近于信道矩阵 \mathbf{H} 最大奇异值对应的特征向量，从而 $\left(1 - \frac{\|\mathbf{H}\hat{\mathbf{w}}\|^2}{\|\mathbf{H}\|^2}\right) \rightarrow 0$ ，或者发送信噪比较低，则 $\frac{\varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2/N_0}{1 + \varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2/N_0} \rightarrow 0$ 。信道容量损失简化为

$$C_{\text{loss}} \approx E\left\{\frac{\varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2/N_0}{1 + \varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2/N_0} \left(1 - \frac{\|\mathbf{H}\hat{\mathbf{w}}\|^2}{\|\mathbf{H}\|^2}\right)\right\} \quad (4.29)$$

2. 高发送信噪比：若发送信噪比较高，则 $\frac{\varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2/N_0}{1 + \varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2/N_0} \rightarrow 1$ ，从而信道容量损失简化为

$$C_{\text{loss}} \approx E\left\{-\log\left(\frac{\|\mathbf{H}\hat{\mathbf{w}}\|^2}{\|\mathbf{H}\|^2}\right)\right\} \quad (4.30)$$

高反馈速率近似情况下，码本设计准则为

$$\min_{\mathcal{Q}(\cdot)} E\left\{\frac{\varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2/N_0}{1 + \varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2/N_0} \left(1 - \frac{\|\mathbf{H}\mathcal{Q}(\mathbf{H})\|^2}{\|\mathbf{H}\|^2}\right)\right\} \quad (4.31)$$

略去与量化无关的部分，并定义 $\beta \triangleq \sqrt{\frac{\varepsilon_t/N_0}{1 + \varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2/N_0}}$ ，则设计准则简化为

$$\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E\{\|\beta \mathbf{H}\mathcal{Q}(\mathbf{H})\|^2\}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\varepsilon_t/N_0}{1 + \varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2/N_0}} \quad (4.32)$$

对于每次信道实现，参数 M 与码本无关，则编码准则简化为

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathcal{Q}(\mathbf{H}) = \arg \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{C}} \|\mathbf{H}\mathbf{w}\|^2 \quad (4.33)$$

接收端的编码准则为

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{C}} \|\mathbf{M}\mathbf{H}\mathbf{w}\|^2 \quad (4.34)$$

高反馈速率情况下，基于最小化信道容量损失的每信噪比优化码本设计算法参见算法8。

低发送信噪比时， $\beta \approx \sqrt{\varepsilon_t/N_0}$ ，码本设计准则简化为

$$\min_{\mathcal{Q}(\cdot)} E\left\{\frac{\varepsilon_t \|\mathbf{H}\|^2}{N_0} \left(1 - \frac{\|\mathbf{H}\mathcal{Q}(\mathbf{H})\|^2}{\|\mathbf{H}\|^2}\right)\right\} \quad (4.38)$$

略去与量化无关的部分，设计准则为

$$\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E\{\|\mathbf{H}\mathcal{Q}(\mathbf{H})\|^2\} \quad (4.39)$$

算法 8 高反馈速率基于最小化信道容量损失的每信噪比优化码本设计

- 1: 随机产生 N_b 个 $N_t \times 1$ 的向量作为初始化码本。
- 2: 近邻条件: 对于给定的码字集合 $\{c_1, \dots, c_{N_b}\}$, 最优的区域分割满足

$$\mathcal{R}_i = \{H \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t} : \|\beta H c_i\|^2 \geq \|\beta H c_j\|^2, \forall j \neq i\} \quad (4.35)$$

- 3: 中心条件: 对于给定的区域分割 $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{N_b}\}$, 最优的码字集合满足

$$c_i = \arg \max_{c \in \mathbb{C}^{N_t}, \|c\|=1} E \{ \|\beta H c\|^2, H \in \mathcal{R}_i \} \quad (4.36)$$

式(4.36)可以改写为

$$c_i = \arg \max_{c \in \mathbb{C}^{N_t}, \|c\|=1} c^H E \{ \beta^2 H^H H, H \in \mathcal{R}_i \} c \quad (4.37)$$

满足上述条件的 c_i 为 $N_t \times N_t$ 的矩阵 $E \{ \beta^2 H^H H, H \in \mathcal{R}_i \}$ 最大特征值对应的特征向量。

- 4: 如果 $E \{ \|\beta H c_i\|^2 \}$ 收敛, 结束; 否则, 转到步骤 2。

接收端编码准则为

$$\hat{w} = \arg \max_{w \in \mathbb{C}} \|H w\|^2 \quad (4.40)$$

低信噪比近似时, 基于最小化信道容量损失的码本设计算法与4.2.2中给出的基于最大化接收 SNR 的码本设计算法相同。

高发送信噪比近似情况下, 码本设计准则为

$$\min_{Q(\cdot)} E \left\{ -\log \frac{\|H Q(H)\|^2}{\|H\|^2} \right\} \quad (4.41)$$

根据 \log 函数的单调递增性, 设计准则简化为

$$\max_{Q(\cdot)} E \left\{ \frac{\|H Q(H)\|^2}{\|H\|^2} \right\} \quad (4.42)$$

接收端对应的编码准则为

$$\hat{w} = \arg \max_{w \in \mathbb{C}} \frac{\|H w\|^2}{\|H\|^2} \quad (4.43)$$

高发送信噪比近似情况下, 基于最小化信道容量损失的码本设计算法参见算法9。

在4.1.3中提到, 对于 MISO 系统, 在最大化接收 SNR 的意义下最优的波束成型矢量为 $w_{\text{opt}} = h/\|h\|$, 而该矢量在超球体 Ω_{N_t} 上满足各向同性, 因而可以用 GLP 来生成码本。对于 MIMO 系统, 码本设计则并不直观, 因为最大化 SNR 意义下最优的波束成型矢量 w_{opt} 为信道矩阵 H 最大奇异值所对应的特征向量。即便给定了信道矩阵的具体分布, w_{opt} 的分布推导也比较困难。对于本节描述的 MIMO 波束成型系统, 信道为独立同分布瑞利衰落, 可以证明[23], 最大奇异值对应的特征向量同样在超球体 Ω_{N_t} 上满足各向同性。这样, 对于独立同分布瑞利衰落信道, MIMO 波束成型系统的码本设计问题与 MISO 系统相同, 因而针对 MISO 系统使用 GLP 设计的码本可以直接用在 MIMO 波束成型系统中。

算法 9 高发送信噪比近似基于最小化信道容量损失的码本设计

- 1: 随机产生 N_b 个 $N_t \times 1$ 的向量作为初始化码本。
- 2: 近邻条件: 对于给定的码字集合 $\{c_1, \dots, c_{N_b}\}$, 最优的区域分割满足

$$\mathcal{R}_i = \left\{ \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t} : \frac{\|\mathbf{H}c_i\|^2}{\|\mathbf{H}\|^2} \geq \frac{\|\mathbf{H}c_j\|^2}{\|\mathbf{H}\|^2}, \forall j \neq i \right\} \quad (4.44)$$

- 3: 中心条件: 对于给定的区域分割 $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{N_b}\}$, 最优的码字集合满足

$$c_i = \arg \max_{c \in \mathbb{C}^{N_t}, \|c\|=1} E \left\{ \frac{\|\mathbf{H}c\|^2}{\|\mathbf{H}\|^2}, \mathbf{H} \in \mathcal{R}_i \right\} \quad (4.45)$$

式(4.45)改写为

$$c_i = \arg \max_{c \in \mathbb{C}^{N_t}, \|c\|=1} c^H E \left\{ \frac{\mathbf{H}^H \mathbf{H}}{\|\mathbf{H}\|^2}, \mathbf{H} \in \mathcal{R}_i \right\} c \quad (4.46)$$

满足上述条件的 c_i 为 $N_t \times N_t$ 的矩阵 $E \left\{ \frac{\mathbf{H}^H \mathbf{H}}{\|\mathbf{H}\|^2}, \mathbf{H} \in \mathcal{R}_i \right\}$ 最大特征值对应的特征向量。

- 3: 如果 $E \left\{ \frac{\|\mathbf{H}Q(\mathbf{H})\|^2}{\|\mathbf{H}\|^2} \right\}$ 收敛, 结束; 否则, 转到步骤 2。

4.3 MIMO 空分复用系统

4.3.1 基带信号模型

对于 MISO 信道或存在秩缺陷 MIMO 信道来说, 由于信道矩阵的秩为 1 或某个特征方向上的增益明显高于其他特征方向(即只存在单个显著特征方向), 波束成型系统在这类信道下是最优的。对于不存在单个显著特征方向的 MIMO 信道, 波束成型显然没有利用信道的所有资源。在这种情况下, 发送端可以通过空分复用提高系统的吞吐量。众所周知, 当发送端已知完整的信道信息时, 可以在 n 个显著的特征方向²上传输 n 路独立的数据流, 这样的系统称为空分复用系统。对于反馈信道带宽有限的实际系统来说, 发送端不可能完全已知信道信息。与波束成型系统类似, 在这种情况下, 发送端和接收端均存储一个相同的离线设计得到的码本, 码本中包含有限数目的预编码矩阵, 其维度与系统的设计有关, 对于发送天线数目为 N_t , 独立发送流数为 N_s (显然 $N_s \leq N_t$)的空分复用系统来说, 预编码矩阵为 $N_t \times N_s$ 的矩阵。接收端根据信道估计的结果选择合适的码字(预编码矩阵), 并将码字的标识反馈给发送端。

考虑一个 MIMO 无线通信系统, 发送天线数目为 N_t , 接收天线数目为 N_r , 发送和接收天线之间是平衰落信道, 信道矩阵建模为 $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$, 根据独立同分布瑞利衰落的假设, 信道矩阵的元素满足 $\mathbf{H} \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{I})$ 。信道的输入为 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N_t}$, 信道输出 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N_r}$ 可以表示为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{n} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H\mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (4.47)$$

其中信道矩阵 \mathbf{H} 的奇异值分解(SVD)为 $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H$, 设 \mathbf{H} 的秩为 M , 则 $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N_r \times M}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N_t \times M}$ 为半酉阵, 即 $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_M$, $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{I}_M$, $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 且 $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_M > 0$ 为 \mathbf{H} 的奇异值。 \mathbf{F} 为预编码矩阵, 用来将 N_s 维的发送向量映射到 N_t 根发送天线上的发送符号。平均传输功率为 $\mathcal{E}_t = E \{s^H s\}$ 。 \mathbf{n} 为噪声矢量, 服从循环对称复高斯分布 $\mathbf{n} \sim \mathcal{CN}(0, N_0 \mathbf{I})$ 。

² n 个显著的特征方向是指对信道 \mathbf{H} 进行奇异值分解后 $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_M, 0, \dots, 0)$, 且 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_M > 0$, 矩阵 \mathbf{V} 的前 n 列。

当发送端完全已知信道信息时,可以验证基于功率注水的空分复用传输方案是最优的。但由于反馈信道的带宽有限,将功率注水信息引入有限反馈将大大增加反馈量。所以在基于有限反馈的空分复用系统中,各特征方向上一般都采用等功率分配。为了保证预编码过程不改变发送功率,预编码矩阵 \mathbf{F} 的各列满足单位正交关系,即 $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1 \cdots \mathbf{f}_{N_s}]$, $\forall i, j \in [1, N_s], i \neq j, \mathbf{f}_i^H \mathbf{f}_j = 0, \mathbf{f}_i^H \mathbf{f}_i = 1$ 。码本 \mathcal{F} 中包含 N_b 个码字, $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{N_b}\}$ 。接收端根据码本 \mathcal{F} 对信道信息进行量化,选择出最佳的码字 $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}(\mathbf{H})$ 。发送端利用该码字进行预编码,接收端收到的信号为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{F}}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (4.48)$$

其中 \mathbf{H} , \mathbf{s} 和 \mathbf{n} 的定义与式(4.47)中一样。下面考虑各种准则下的码本设计,首先考虑最大化接收 SNR 的码本设计方法。由于空分复用系统中,到达接收端的独立流数大于 1,所以接收机较 MISO 系统复杂,这里仅考虑常用的两种线性接收机:ZF(Zero-Forcing)接收机和 MMSE(Minimum Mean Squared Error)接收机。平衰落信道下 MIMO 系统中的 ZF 接收机与频率选择性衰落信道下 SISO 系统中的 ZF 均衡器十分相似,通过在接收端对信道求逆以抑制来自其他发送流的干扰,ZF 滤波器的输出为待检测的发送符号和噪声的函数,表示为

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{s} + \mathbf{G}\mathbf{n} \quad (4.49)$$

其中 $\mathbf{G} = (\mathbf{H}\mathbf{F})^\dagger$ 用来对信道求逆。注意,在发送端选择独立发送流数目时,需要保证流数 N_s 小于等于信道矩阵 \mathbf{H} 的秩 M ,否则发送符号在接收端将无法辨识。正是由于上述限制,确保了在接收端求伪逆时,矩阵 $\mathbf{H}\mathbf{F}$ 列满秩,ZF 滤波矩阵可以改写为

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= [(\mathbf{H}\mathbf{F})^H(\mathbf{H}\mathbf{F})]^{-1}(\mathbf{H}\mathbf{F})^H \\ &= (\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{H}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H \end{aligned} \quad (4.50)$$

因而 ZF 滤波器的输出可以改写为

$$\mathbf{z} = \mathbf{s} + (\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{H}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{n} \quad (4.51)$$

经过 ZF 滤波器后的噪声矢量的协方差矩阵为

$$E\{\mathbf{G}\mathbf{n}(\mathbf{G}\mathbf{n})^H\} = N_0(\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{H}\mathbf{F})^{-1} \quad (4.52)$$

因此,第 i 路发送流对应的接收端信噪比为

$$\text{SNR}_i = \frac{\mathcal{E}_{it}}{N_0 \left[(\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{H}\mathbf{F})^{-1} \right]_{i,i}} \quad (4.53)$$

其中, \mathcal{E}_{it} 表示第 i 路发送流的发送功率,显然 $\sum_{i=1}^{N_s} \mathcal{E}_{it} = \mathcal{E}_t$ 。由于发送端采用等功率分配,即 $\mathcal{E}_{it} = \mathcal{E}_t/N_s$,因此第 i 路流对应的接收信噪比可以改写为

$$\text{SNR}_i = \frac{\mathcal{E}_t}{N_s N_0 \left[(\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{H}\mathbf{F})^{-1} \right]_{i,i}} \quad (4.54)$$

ZF 接收机虽然抑制了干扰但是却增强了噪声,高信噪比时这种影响不明显,但是低信噪比时需要找到一种方法来最大化整体的信干噪比,即找到合适的 \mathbf{G} 最小化 $E\{\|\mathbf{G}\mathbf{y} - \mathbf{s}\|^2\}$,该问题可以用经典的 MMSE 滤波器解决。MMSE 滤波器输出相比发送信号的均方差为

$$\begin{aligned} E\{\|\mathbf{G}\mathbf{y} - \mathbf{s}\|^2\} &= \text{Tr}(E\{(\mathbf{G}\mathbf{y} - \mathbf{s})(\mathbf{G}\mathbf{y} - \mathbf{s})^H\}) \\ &= \text{Tr}\left(\frac{\mathcal{E}_t}{N_s}(\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{G}^H - \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F} - \mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{G}^H + \mathbf{I}) + N_0\mathbf{G}\mathbf{G}^H\right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

为了找到 MSE 的最小值, 将 MSE 表达式对 \mathbf{G}^* 求偏导³得到

$$\frac{\partial (E \{ \|\mathbf{G}\mathbf{y} - \mathbf{s}\|^2 \})}{\partial \mathbf{G}^*} = \mathbf{G} \left(\frac{\mathcal{E}_t}{N_s} \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H + N_0\mathbf{I} \right) - \frac{\mathcal{E}_t}{N_s} \mathbf{F}^H\mathbf{H}^H \quad (4.56)$$

令偏导数等于 0, 可以得到 MMSE 滤波器系数为

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{\mathcal{E}_t}{N_s} \mathbf{F}^H\mathbf{H}^H \left(\frac{\mathcal{E}_t}{N_s} \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H + N_0\mathbf{I} \right)^{-1} \\ &= \mathbf{F}^H\mathbf{H}^H \left(\mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H + \frac{N_s N_0}{\mathcal{E}_t} \mathbf{I} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.57)$$

关于实值复变函数偏导数的定义以及矩阵偏导数的结果可以参考附录 B。第 i 路发送流对应的接收信噪比为[45]

$$\text{SNR}_i = \frac{1}{\left[\left(\frac{\mathcal{E}_t}{N_s N_0} \mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{H}\mathbf{F} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right]_{i,i}} - 1 \quad (4.58)$$

4.3.2 接收 SNR 相关的码本设计

在 MIMO 空分复用系统中, 由于接收信号中包含多路发送流的信息, 难以定义统一的接收 SNR, 最大化 N_s 路发送流的接收信噪比最小值可以作为码本设计的准则之一。可以证明[31]在这种准则下最优的预编码矩阵 \mathbf{F}_{opt} 由信道矩阵 \mathbf{H} 最大的 N_s 个特征值对应的特征向量组成, 记为 $\tilde{\mathbf{V}}$, 且在 Grassmannian 簇 $\mathcal{G}(N_s, N_t)$ 上均匀分布。预编码矩阵之间的距离特性较难准确刻画, 数学和通信中常用的距离准则包括: 2-范数投影距离 $d_{\text{proj}}(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j) = \|\mathbf{F}_i\mathbf{F}_i^H - \mathbf{F}_j\mathbf{F}_j^H\|$ 、Fubini-Study 距离 $d_{\text{FS}}(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j) = \arccos|\det(\mathbf{F}_i^H\mathbf{F}_j)|$ 和弦距离 $d_{\text{chor}}(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j) = \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{F}_j^H\mathbf{F}_i\mathbf{F}_i^H\mathbf{F}_j)}$ 。考虑到 Lloyd 迭代中心条件的求取, 只有弦距离 $d_{\text{chor}}(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j)$ 有较为简单的闭式解, 所以下面将用弦距离作为失真度量, 即 $d(\mathbf{H}, \mathbf{F}) = \text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^H\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^H\mathbf{F})$ 。码本设计准则为 $\min_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \left\{ \text{Tr}(\mathbf{I} - \mathcal{Q}(\mathbf{H})^H\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{V}}^H\mathcal{Q}(\mathbf{H})) \right\}$, 略去与量化器无关的部分, 设计准则可以改写为

$$\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \left\{ \left\| \tilde{\mathbf{V}}^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \right\|_F^2 \right\} \quad (4.59)$$

接收端的编码准则为

$$\mathcal{Q}(\mathbf{H}) = \max_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}} \left\| \tilde{\mathbf{V}}^H \mathbf{F} \right\|_F^2 \quad (4.60)$$

最大化 N_s 路发送流的接收信噪比最小值的码本设计算法参见算法 10。

4.3.3 满秩信道矩阵下基于最小化信道容量损失的码本设计

下面考虑针对信道容量的码本设计准则。给定信道 \mathbf{H} 和对应的预编码矩阵 $\hat{\mathbf{F}}$ 后, 发送消息 \mathbf{s} 和接收信号 \mathbf{y} 之间的互信息为

$$I(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{F}}) = \log \det \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{H} \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{H}^H \right) \quad (4.63a)$$

$$= \log \det \left(\mathbf{I} + \rho \Lambda \mathbf{V}^H \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{V} \Lambda^H \right) \quad (4.63b)$$

$$= \log \det \left(\mathbf{I} + \rho \Lambda^2 \mathbf{V}^H \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{V} \right) \quad (4.63c)$$

³由于 MSE 为实值复变函数, 所以 $\frac{\partial I(\mathbf{G})}{\partial \mathbf{G}}$ 与 $\frac{\partial I(\mathbf{G})}{\partial \mathbf{G}^*}$ 等价。由于对于仅含有 \mathbf{G} 和 \mathbf{G}^H 的函数表达式来说, 偏导数 $\frac{\partial I(\mathbf{G})}{\partial \mathbf{G}^*}$ 可以消掉与 \mathbf{G}^* 有关的部分, 所以此处采用对 \mathbf{G}^* 求偏导数的方法。

算法 10 最大化 N_s 路发送流的接收信噪比最小值的码本设计

- 1: 随机生成 N_b 个 $N_t \times N_s$ 的酉矩阵作为初始码本。
- 2: 近邻条件: 对于给定的码字集合 $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{N_b}\}$ 。最优的区域分割满足

$$\mathcal{R}_i = \left\{ \mathbf{H} \in \mathcal{C}^{N_r \times N_t} : \|\hat{\mathbf{V}}^H \mathbf{F}_i\|_F^2 \geq \|\hat{\mathbf{V}}^H \mathbf{F}_j\|_F^2, \forall j \neq i \right\} \quad (4.61)$$

- 3: 中心条件: 对于给定的区域分割 $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{N_b}\}$ ，对应的最优码字集合为

$$\mathbf{F}_i = \arg \max_{\mathbf{F} \in \mathcal{C}^{N_t \times N_s}, \mathbf{F}^H \mathbf{F} = \mathbf{I}} E \left\{ \|\hat{\mathbf{V}}^H \mathbf{F}\|_F^2, \mathbf{H} \in \mathcal{R}_i \right\} \quad (4.62)$$

满足条件的最优码字 \mathbf{F}_i 为矩阵 $E \left\{ \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^H \right\}$ 前 N_s 个特征值对应的特征向量。

- 4: 如果 $E \left\{ \|\hat{\mathbf{V}}^H \mathbf{Q}(\mathbf{H})\|_F^2 \right\}$ 收敛, 结束; 否则, 转到步骤 2。

其中, $\rho \triangleq \frac{E_s}{N_s N_0}$, 式(4.63b)用到了 \mathbf{H} 的奇异值分解以及等式 $\det(\mathbf{I} + \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^H) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{A})$, \mathbf{U} 为酉矩阵。式(4.63c)利用了 $\det(\mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{B}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{A})$ 。实际系统中, 要求独立发送流数 $N_s \leq$ 信道矩阵的秩 M , 否则接收信号不可辨识。首先, 考虑较为简单的情况, 强制发送流数目 $N_s = M$, 若完全已知信道信息, 且不采用功率注水, 则最优预编码矩阵 $\mathbf{F}_{\text{opt}} = \mathbf{V}$, 发送消息 \mathbf{s} 与接收信号 \mathbf{y} 之间的互信息为 $I(\mathbf{H}) = \log \det(\mathbf{I} + \rho \mathbf{\Lambda}^2)$ 。有限反馈系统的互信息可以改写为

$$\begin{aligned} I(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{F}}) &= \log \det[\mathbf{I} + \rho \mathbf{\Lambda}^2 - \rho \mathbf{\Lambda}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{V}^H \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{V})] \\ &= \log \det(\mathbf{I} + \rho \mathbf{\Lambda}^2) + \log \det \left[\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \rho \mathbf{\Lambda}^2)^{-1} \rho \mathbf{\Lambda}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{V}^H \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{V}) \right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

由有限反馈带来的信道容量损失为[65]

$$\begin{aligned} C_{\text{loss}} &= E_{\mathbf{H}} \{ I(\mathbf{H}) - I(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{F}}) \} \\ &= E \left\{ -\log \det \left[\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \rho \mathbf{\Lambda}^2)^{-1} \rho \mathbf{\Lambda}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{V}^H \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{V}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.65)$$

显然直接以上式作为准则进行码本设计不可行, 但是可以分为两种情况对其进行简化:

1. 高反馈速率: 假设反馈速率较高, 即码本中码字个数较多时, 最佳码字 $\hat{\mathbf{F}}$ 非常接近于完全已知信道信息时的预编码矩阵 \mathbf{V} , 则 $\mathbf{V}^H \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{V} \approx \mathbf{I}$, $(\mathbf{I} + \rho \mathbf{\Lambda}^2)^{-1} \rho \mathbf{\Lambda}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{V}^H \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{V})$ 相比于 \mathbf{I} 为一较小的矩阵, 化简得到 $C_{\text{loss}} \approx E \left\{ \text{Tr} \left((\mathbf{I} + \rho \mathbf{\Lambda}^2)^{-1} \rho \mathbf{\Lambda}^2 (\mathbf{I} - \mathbf{V}^H \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{V}) \right) \right\}$ 。
2. 高信噪比: 信噪比较高时, $(\mathbf{I} + \rho \mathbf{\Lambda}^2)^{-1} \rho \mathbf{\Lambda}^2 \approx \mathbf{I}$, 则 $C_{\text{loss}} \approx E \left\{ -\log \det \left(\mathbf{V}^H \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{V} \right) \right\}$ 。

高反馈速率近似情况下, 定义 $\tilde{\mathbf{\Lambda}}^2 \triangleq (\mathbf{I} + \rho \mathbf{\Lambda}^2)^{-1} \rho \mathbf{\Lambda}^2$, 则

$$C_{\text{loss}} \approx E \left\{ \text{Tr} \left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^2 \right) - \text{Tr} \left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^2 \mathbf{V}^H \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{V} \right) \right\} \quad (4.66)$$

新的设计准则为

$$\min_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \left\{ \text{Tr} \left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^2 \right) - \text{Tr} \left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^2 \mathbf{V}^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \mathcal{Q}(\mathbf{H})^H \mathbf{V} \right) \right\} \quad (4.67)$$

注意到 $\text{Tr} \left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^2 \right)$ 与信道量化无关, 因而设计准则可以进一步简化为

$$\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \left\{ \text{Tr} \left(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^2 \mathbf{V}^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \mathcal{Q}(\mathbf{H})^H \mathbf{V} \right) \right\} = \max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \left\{ \left\| (\mathbf{V} \tilde{\mathbf{\Lambda}})^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \right\|_F^2 \right\} \quad (4.68)$$

接收端相应的编码规则为

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathcal{Q}(\mathbf{H}) = \max_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}} \left\| (\mathbf{V}\tilde{\Lambda})^H \mathbf{F} \right\|_F^2 \quad (4.69)$$

高反馈速率近似下，基于最小化信道容量损失的每信噪比优化的码本设计的方法如下：

算法 11 基于最小化信道容量损失的每信噪比优化的码本设计

- 1: 随机产生 N_b 个 $N_t \times N_s$ 的半酉阵作为初始码本。
- 2: 近邻条件：对于给定的码字集合 $\{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{N_b}\}$ ，最优的区域分割满足

$$\mathcal{R}_i = \left\{ \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t} : \left\| (\mathbf{V}\tilde{\Lambda})^H \mathbf{F}_i \right\|_F^2 > \left\| (\mathbf{V}\tilde{\Lambda})^H \mathbf{F}_j \right\|_F^2, \forall j \neq i \right\} \quad (4.70)$$

- 3: 中心条件：对于给定的区域分割 $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{N_b}\}$ ，最优的码字集合满足

$$\mathbf{F}_i = \arg \max_{\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_s}, \mathbf{F}^H \mathbf{F} = \mathbf{I}} E \left\{ \left\| (\mathbf{V}\tilde{\Lambda})^H \mathbf{F} \right\|_F^2, \mathbf{H} \in \mathcal{R}_i \right\} \quad (4.71)$$

满足上述条件的 \mathbf{F}_i 为 $N_t \times N_s$ 的矩阵 $E \left\{ \mathbf{V}\tilde{\Lambda}^2 \mathbf{V}^H \right\}$ 最大的 N_s 个特征值所对应的特征向量 $[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_{N_s}]$ 。

- 4: 如果 $E \left\{ \left\| (\mathbf{V}\tilde{\Lambda})^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \right\|_F^2 \right\}$ 收敛，退出；否则，转到步骤 2。
-

信噪比较低时， $\tilde{\Lambda}^2 \rightarrow \rho \Lambda^2$ ，码本设计准则可以进一步简化为

$$\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \left\{ \left\| (\mathbf{V}\Lambda)^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \right\|_F^2 \right\} \quad (4.72)$$

接收端编码准则简化为

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathcal{Q}(\mathbf{H}) = \max_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}} \left\| (\mathbf{V}\Lambda)^H \mathbf{F} \right\|_F^2 \quad (4.73)$$

信噪比较高时， $\tilde{\Lambda}^2 \rightarrow \mathbf{I}$ ，码本设计准则可以简化为

$$\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \left\{ \left\| \mathbf{V}^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \right\|_F^2 \right\} \quad (4.74)$$

接收端编码准则简化为

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathcal{Q}(\mathbf{H}) = \max_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}} \left\| \mathbf{V}^H \mathbf{F} \right\|_F^2 \quad (4.75)$$

高信噪比近似情况下，码本设计准则为

$$\min_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \left\{ -\log \det (\mathbf{V}^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \mathcal{Q}(\mathbf{H})^H \mathbf{V}) \right\} \quad (4.76)$$

该准则并不适合用 GLA 算法求解，因为 $\det(\cdot)$ 的存在会使得 Lloyd 迭代中的中心条件求解十分困难。

4.3.4 非满秩信道矩阵下基于最小化信道容量损失的码本设计

在前面有关基于最小化有限反馈带来的信道容量损失的码本设计的讨论中，假设系统采用满秩预编码 ($N_s = M$)， $N_s < M$ 时基于最小化信道容量损失的码本设计与之类似。首先根据信道

矩阵的奇异值分解 $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H$ 定义如下分块矩阵:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2], \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^H \\ \mathbf{V}_2^H \end{bmatrix} \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{F}}^H [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

则发送端用 $\hat{\mathbf{F}}$ 做预编码且进行等功率分配时, 式(4.63)中定义的互信息为

$$I(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{F}}) = \log \det \left(\mathbf{I} + \rho \begin{bmatrix} \Lambda_1^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix} \right) \quad (4.78a)$$

$$= \log \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} + \rho \Lambda_1^2 \mathbf{Y}_{11} & \Lambda_1^2 \mathbf{Y}_{12} \\ \Lambda_2^2 \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{I} + \rho \Lambda_2^2 \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix} \right) \quad (4.78b)$$

$$= \log \det(\mathbf{I} + \rho \Lambda_2^2 \mathbf{Y}_{22} - \Lambda_2^2 \mathbf{Y}_{21} (\mathbf{I} + \rho \Lambda_1^2 \mathbf{Y}_{11})^{-1} \Lambda_1^2 \mathbf{Y}_{12}) \quad (4.78c)$$

$$+ \log \det(\mathbf{I} + \rho \Lambda_1^2 \mathbf{Y}_{11}) \quad (4.78d)$$

如果反馈比特数较多, 则(4.78d)结果中的第二项可以忽略, 因为 \mathbf{Y}_{12} , \mathbf{Y}_{21} 和 \mathbf{Y}_{22} 均是接近于 $\mathbf{0}$ 的矩阵。从而 $I(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{F}}) \approx \log \det(\mathbf{I} + \rho \Lambda_1^2 \mathbf{Y}_{11})$, 完全已知信道信息时, 信道容量为 $I(\mathbf{H}) = \log \det(\mathbf{I} + \rho \Lambda_1^2)$ 。与前面 $N_s = M$ 时的分析类似, 可以得到相应的最小化信道容量损失的码本设计准则

$$\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \left\{ \left\| (\mathbf{V}_1 \tilde{\Lambda}_1)^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \right\|_F^2 \right\}, \quad \tilde{\Lambda}_1^2 = (\mathbf{I} + \rho \Lambda_1^2)^{-1} \rho \Lambda_1^2 \quad (4.79)$$

接收端编码准则为

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathcal{Q}(\mathbf{H}) = \max_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}} \left\| (\mathbf{V}_1 \tilde{\Lambda}_1)^H \mathbf{F} \right\|_F^2 \quad (4.80)$$

相应的低信噪比近似和高信噪比近似下的最小化信道容量损失的码本设计准则

$$\text{低信噪比近似} \quad \max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \left\{ \left\| (\mathbf{V}_1 \Lambda_1)^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \right\|_F^2 \right\} \quad (4.81)$$

$$\text{高信噪比近似} \quad \max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \left\{ \left\| \mathbf{V}_1^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \right\|_F^2 \right\} \quad (4.82)$$

接收端编码准则为

$$\text{低信噪比近似} \quad \hat{\mathbf{F}} = \mathcal{Q}(\mathbf{H}) = \max_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}} \left\| (\mathbf{V}_1 \Lambda_1)^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \right\|_F^2 \quad (4.83)$$

$$\text{高信噪比近似} \quad \hat{\mathbf{F}} = \mathcal{Q}(\mathbf{H}) = \max_{\mathbf{F} \in \mathcal{F}} \left\| \mathbf{V}_1^H \mathcal{Q}(\mathbf{H}) \right\|_F^2 \quad (4.84)$$

4.4 码本设计准则总结

比较独立同分布瑞利衰落信道下, MISO, MIMO 波束成型系统和 MIMO 空分复用系统的码本设计准则和接收端编码准则可以看出, MISO 波束成型系统中, 基于最大化接收 SNR 和低信噪比近似时最小化信道容量损失对应的码本设计准则完全相同, 所有的编码准则完全相同; MIMO 波束成型系统码本设计准则和编码准则具有类似的特点; MIMO 空分复用系统信噪比相关的码本设计准则与高信噪比近似时最小化信道容量损失的设计准则相同, 信噪比相关, GSP 以及高信噪比近似时的编码准则相同, 而低信噪比近似和每信噪比优化对应的编码准则相同。

4.5 仿真结果

本节主要分析波束成型和预编码系统中, 利用前面提到的各种准则设计的码本所达到的误比特率性能和信道容量。首先考虑发送天线数目 $N_t = 3$, 单接收天线, BPSK 调制, 反馈量为 2、

3、4 比特，接收端采用硬判决检测的 MISO 系统，其误比特率(BER)性能如图4.1所示。根据仿真结果可以得出，基于矢量量化的方法与基于 GLP 的方法性能没有明显差别。4 比特码本误比特率性能与完全已知信道信息时相比已非常接近，3 比特码本误比特率性能相比完全已知信道信息时大约有 1dB 的下降。2 比特反馈的误比特率性能相比 3 比特反馈约有 1dB 下降。由此可见，对于 3×1 的 MIMO 波束成型系统，4 比特足以提供足够的信道信息。

图4.2给出了该系统中，各种设计准则下产生的 2、3、4 比特码本的归一化信道容量，即各信道容量均对完全已知信道信息且等功率分配的信道容量做了归一化。由仿真结果可以看出，随着反馈比特数的增加，有限反馈系统的信道容量越来越接近完全已知信道信息时的信道容量，但是接近的幅度越来越小。另外，虽然准则 $\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \|\mathbf{H}\mathbf{Q}(\mathbf{H})\|^2$ 和 $\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \|\mathbf{H}\mathbf{Q}(\mathbf{H})\|^2 / \|\mathbf{H}\|^2$ 都是准则 $\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} E \|\mathbf{M}\mathbf{H}\mathbf{Q}(\mathbf{H})\|^2$ 的近似，但是在独立同分布瑞利衰落信道下，近似带来的信道容量上的差别并不明显。后面将看到，在空分复用系统中，这种差别较为明显。

考虑 MIMO 波束成型有限反馈系统，发送天线数目 $N_t = 3$ ，接收天线数目 $N_r = 3$ ，QPSK 调制，图4.3给出了准则 $\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} \|\mathbf{H}\mathbf{Q}(\mathbf{H})\|^2$ ， $\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} \|\mathbf{H}\mathbf{Q}(\mathbf{H})\|^2 / \|\mathbf{H}\|^2$ 下产生的 2、3、4 比特码本以及 GLP 码本的误比特率性能，同时给出了完全已知信道信息时的误比特率性能。根据仿真结果，三种准则下产生的码本性能十分接近。可以看出，2 比特码本相比 3 比特码本有大约 0.5dB 的性能损失，3 比特码本相比 4 比特码本有大约 0.5dB 的性能损失，而 4 比特码本相比完全已知信道信息时有大约 0.8dB 的性能损失。

图4.4给出了三种设计准则下产生的 2、3、4 比特码本的归一化信道容量。由仿真结果可以看出，随着反馈比特数的增加，有限反馈系统的信道容量越来越接近完全已知信道信息时的信道容量，但是接近的幅度越来越小。

考虑 MIMO 空分复用系统，发送天线数目 $N_t = 4$ ，接收天线数目 $N_r = 2$ ，发送流数与矩阵的秩相等，为 $N_s = 2$ 。由于三种码本设计准则下生成的码本 BER 性能接近，所以这里仅采用 $\max_{\mathcal{Q}(\cdot)} \|\mathbf{H}\mathbf{Q}(\mathbf{H})\|_F^2$ 准则设计的码本。图4.5给出了 ZF 和 MMSE 接收机的误比特率性能。由于完全已知信道信息时，ZF 和 MMSE 接收机的信噪比相等，所以两条性能曲线重合。

图4.6给出了三种设计准则下产生的 2、3、4 比特码本对应的归一化信道容量。由仿真结果可以看出，当信噪比较高时，高信噪比近似准则下设计的码本对应的信道容量接近于针对每个信噪比点优化的码本对应的信道容量；当信噪比较低时，低信噪比近似准则下设计的码本对应的信道容量接近于每信噪比优化的码本对应的信道容量。GSP 设计的码本对应的容量与高信噪比近似准则接近，但是性能稍差。

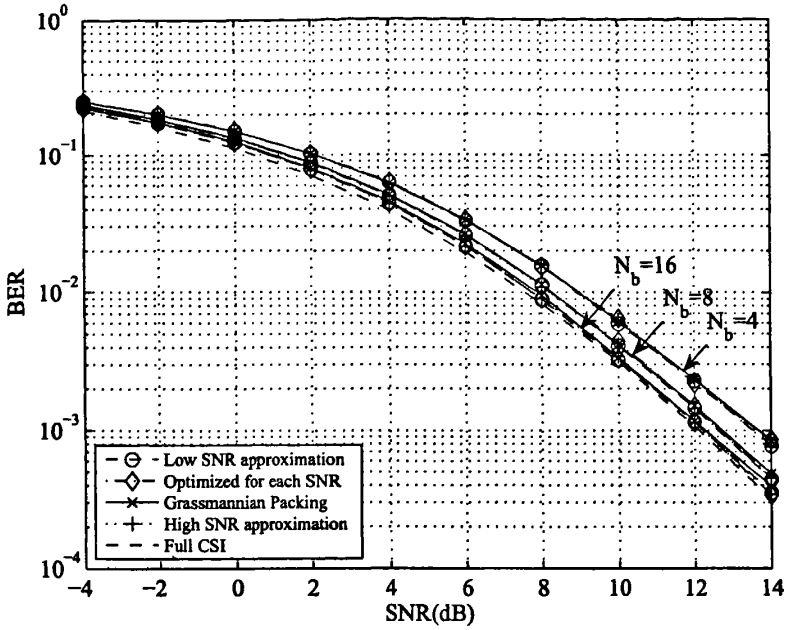


图 4.1: $N_t = 3$ 的 MISO 波束成型系统在各种码本下的 BER 性能

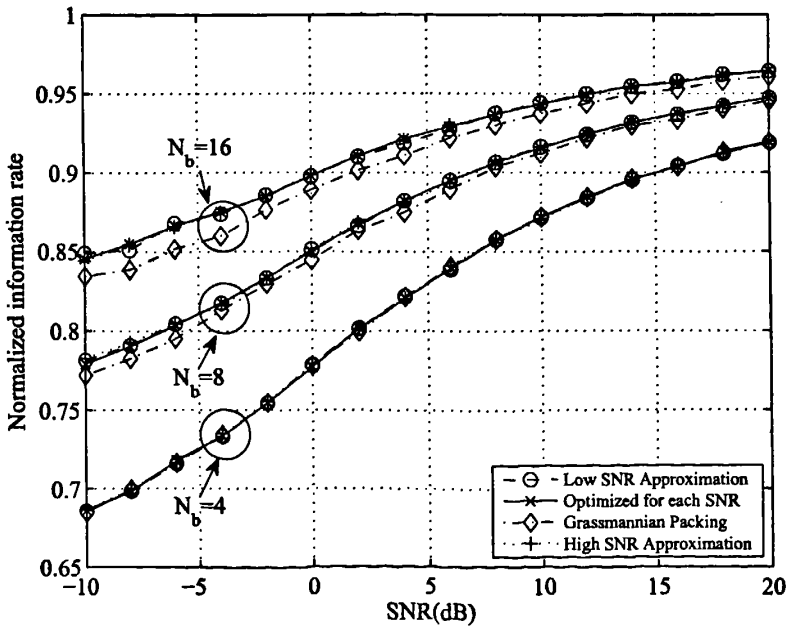


图 4.2: $N_t = 3$ 的 MISO 波束成型系统在各种码本下的归一化信道容量

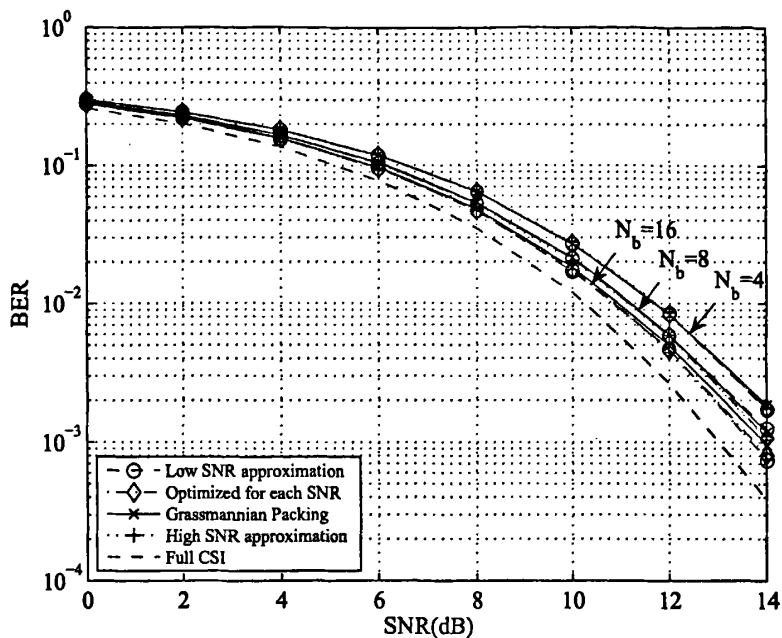


图 4.3: 3 × 3 的 MIMO 波束成型系统在各种码本下的 BER 性能

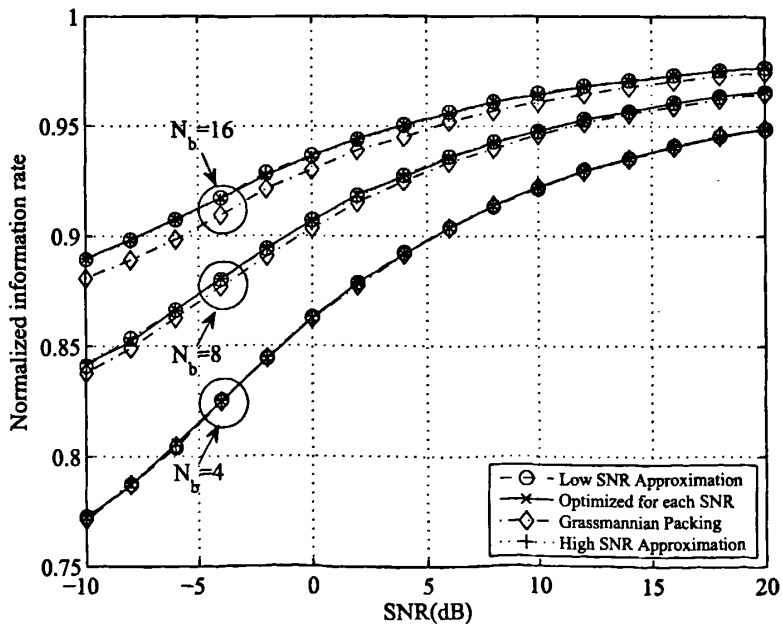


图 4.4: 3 × 3 的 MIMO 波束成型系统在各种码本下的归一化信道容量

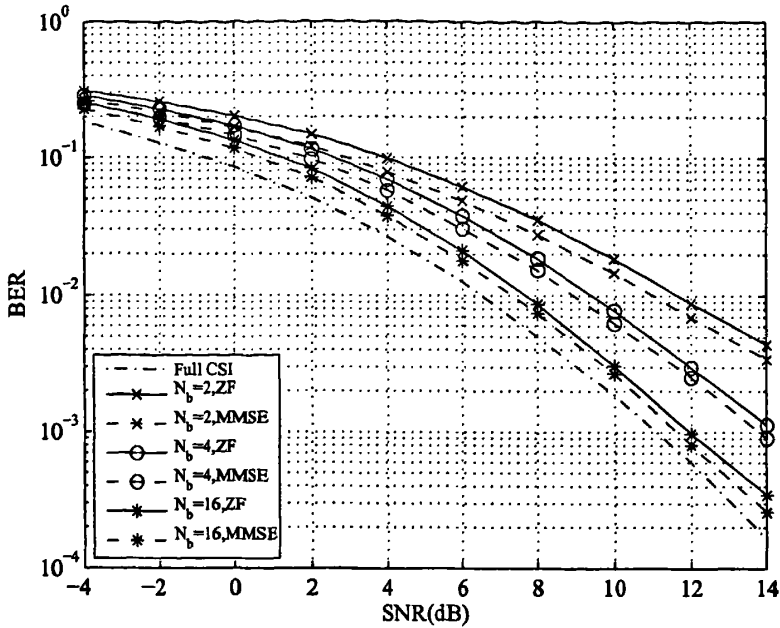


图 4.5: $N_t = 4, N_r = 2, N_s = 2$ 的 MIMO 预编码系统在各码本下的 BER 性能

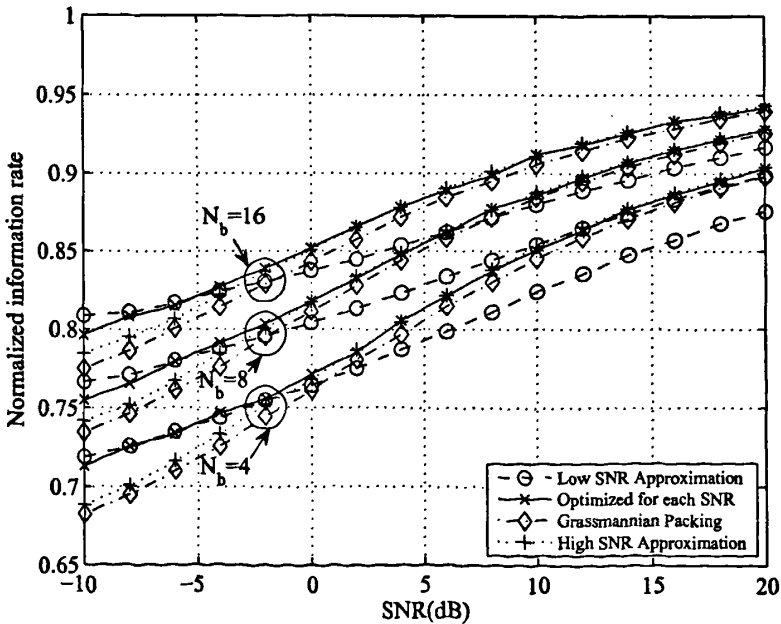


图 4.6: $N_t = 4, N_r = 2, N_s = 2$ 的 MIMO 预编码系统在各码本下的归一化信道容量

第五章 时间相关信道下的有限反馈

在上一章研究的独立同分布瑞利衰落下的有限反馈系统中，为了简化问题，假设不同的信道实现中信道响应满足独立同分布，从而有限反馈系统的设计可以转化为固定不变的矢量量化问题。码本预先通过离线设计得到，接下来的通信用均使用该码本直至通信结束。

在实际系统中，信道存在时间相关性，且相干时间越大，相关性越明显，具体表现为连续若干次信道实现所对应的最佳码字相同或者仅在码本的一个很小的子集内取值，这便为反馈量的进一步压缩提供了方向。由于波束成型系统可以视作预编码系统在发送流数为 1 时的特例，所以本章仅讨论预编码系统。

5.1 反馈延时

有限反馈的主要流程如图 5.1 所示。在实际系统中，无论是信道估计，还是码字选择，或是译码的过程中，均存在处理延时，并且反馈信息在反馈信道内传递也存在延时，因而反馈延时是一个普遍存在且不可忽略的问题。本节将分析反馈延时给系统吞吐量带来的影响。

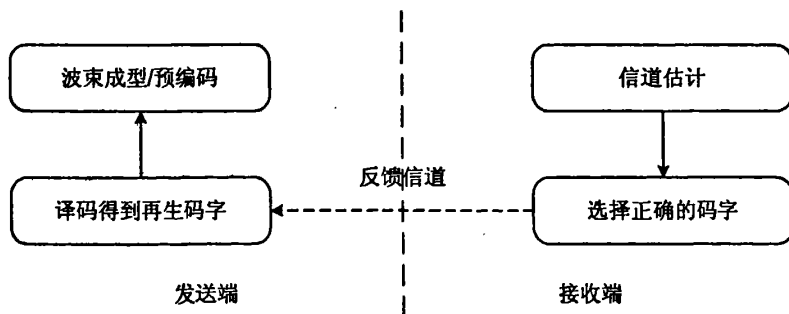


图 5.1: 有限反馈的主要流程

5.1.1 有限反馈吞吐量增益

对于 MIMO 预编码系统，考虑反馈延时，有限反馈系统的输入输出关系应当写成

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{H}[n]\mathbf{F}[n - D]\mathbf{x}[n] + \mathbf{n}[n] \quad (5.1)$$

其中 $\mathbf{H}[n]$ 为信号传输时的信道响应， $\mathbf{F}[n - D]$ 为延时的信道信息 $I[n - D]$ 对应的码字。发送端仅知道代表发送方向的码字但不知道信道的特征值信息，因而等功率分配是最优的。注意到即便给定了反馈延时要确定最优的发送端预编码方案也是相当困难的，因为最优发送方案与码本，信道随机分布和信道估计算法都有关。为了简单起见，本章中直接使用带有延时的码字 $\mathbf{F}[n - D]$

作为预编码矩阵，对应的遍历吞吐量为

$$R(D) = E \left\{ \log \det \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{Q} (\mathbf{H}[n-D])^H \mathbf{H}(n) \mathbf{H}(n) \mathbf{Q} (\mathbf{H}[n-D]) \right) \right\} \quad (5.2)$$

定义反馈吞吐量增益为系统在有限的反馈延时下的遍历吞吐量与反馈延时无穷大时的吞吐量的差值。首先考虑反馈延时固定时的情形，令 D 为固定的反馈延时，以采样点为单位， R 表示遍历吞吐量，则反馈吞吐量增益定义[41]为

$$\Delta R(D) \triangleq R(D) - R(\infty) \quad (5.3)$$

根据信道的马尔可夫链模型(参见2.2.1)，式(5.2)中的遍历吞吐量可以改写为转移概率的形式。

$$R(D) = \sum_{l=1}^{N_b} \sum_{m=1}^{N_b} R_{l,m} [P^D]_{l,m} \pi_m \quad (5.4)$$

其中，

$$R_{l,m} = E \left\{ \log \det \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{Q} (\mathbf{H}[n-D])^H \mathbf{H}(n) \mathbf{H}(n) \mathbf{Q} (\mathbf{H}[n-D]) \right) \mid \mathbf{H}[n] \in \mathcal{F}_l, \mathbf{H}[n-D] \in \mathcal{F}_m \right\}$$

ρ 为每路流的发送信噪比。常数 $R_{l,m}$ 通常没有闭式表达式，需要通过蒙特卡洛仿真来近似。

首先考虑两种极端的情形，零反馈延时($D=0$)和无穷反馈延时($D=\infty$)。根据遍历吞吐量的定义可以得到

$$R(0) = \sum_{l=1}^{N_b} R_{l,l} \pi_l = E \left\{ \log \det \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{Q} (\mathbf{H})^H \mathbf{H} \mathbf{H} \mathbf{Q} (\mathbf{H}) \right) \right\} \quad (5.5)$$

$$R(\infty) = \sum_{l=1}^{N_b} \sum_{m=1}^{N_b} R_{l,m} \pi_l \pi_m = \sum_{l=1}^{N_b} E \left\{ \log \det \left(\mathbf{I} + \rho \mathbf{F}_l^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{F}_l \right) \right\} \pi_l \quad (5.6)$$

对于不存在反馈延时的情况来说， $R(0)$ 与准静态信道模型下忽略反馈延时的有限反馈系统遍历信道容量相等；反馈延时无穷大时，预编码矩阵的选取与当前信道信息无关，要想获得更大的遍历吞吐量，可以在系统中引入空时分组码或者信道统计信息，两者均可在不需要反馈的情况下提高吞吐量。实际系统中的反馈延时必然有限，所以 $R(\infty)$ 仅作为性能分析时的参考。从 $R(0)$ 和 $R(\infty)$ 的表达式可以看出二者的值与信道状态马尔可夫链的转移概率无关，所以信道的动态特性仅会影响存在有限的反馈延时的系统。根据反馈吞吐量增益的定义(5.3)和式(5.4)可以得到反馈吞吐量增益的具体表达式

$$\Delta R(D) = \sum_{l=1}^{N_b} \sum_{m=1}^{N_b} R_{l,m} \left\{ [P^D]_{l,m} - \pi_l \right\} \pi_m \quad (5.7)$$

5.1.2 固定反馈延时带来的影响

假设每次信道实现接收端都反馈量化的信道信息给发送端，且认为每次反馈过程中，两端的处理延时是固定的，量化信道信息在反馈信道中的传输延时也固定，则吞吐量增益的表达式(5.7)中的反馈延时 D 可以看成是常数。定义随机矩阵 P 的逆 \tilde{P} 为 $\tilde{P}_{m,l} = \frac{\pi_m}{\pi_l} P_{l,m}$ ， $1 \leq m, l \leq N$ ，则当反馈延时一定时，反馈吞吐量增益存在以下上界[40]

$$0 \leq \Delta R(D) \leq \alpha \left(\sqrt{\lambda} \right)^D \quad (5.8)$$

其中, $\alpha = \sum_{m=1}^{N_b} \sqrt{\pi_m} \max_{l \in [1, N]} R_{l,m}$, $\lambda \in [0, 1]$ 为矩阵 $\mathbf{P}\bar{\mathbf{P}}$ 的第二大的特征值。矩阵 $\mathbf{P}\bar{\mathbf{P}}$ 的特征值是衡量信道动态特征的重要参数, 特征值越大说明信道的相干时间越大。从(5.8)也可以看出, 反馈吞吐量增益相对反馈延时 D 至少呈现指数衰减。衰减速率与特征值 λ 有关, 因而也就与信道相干时间有关。如果信道状态马尔可夫链是可逆的, 即 $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}$, 则 $\sqrt{\lambda}$ 为信道转移矩阵的第二大的特征值。

5.1.3 可变反馈延时带来的影响

如果信道相干时间较大, 则接收端没有必要每次信道实现都反馈完整的量化信道信息给发送端。接收端反馈一次信道信息后, 接下来的数次信道实现内发送端仅依靠前次反馈的残留信道信息就可以获得较高的吞吐量。假设信道信息的反馈周期为 K , 则周期内各次信道实现的反馈延时呈现出 $D, (D+1), \dots, (D+K-1)$ 的周期性变化。定义[41]可变延时的遍历吞吐量 $\bar{R}(K, D)$ 为

$$\bar{R}(K, D) \triangleq \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} R(k+D) \quad (5.9)$$

其中 $R(k+D)$ 表示反馈延时为 $k+D$ 时的系统遍历吞吐量。相应的, 定义可变延时的反馈吞吐量增益为 $\Delta \bar{R} = \bar{R}(K, D) - R(\infty)$, 则反馈吞吐量增益存在以下上界: 对于各种处理延时固定为 D 个采样点, 反馈周期为 K 个采样点的有限反馈系统, 反馈吞吐量增益存在以下上界[40]

$$0 \leq \Delta \bar{R}(K, D) \leq \alpha (\sqrt{\lambda})^D \frac{1 - (\sqrt{\lambda})^K}{K(1 - \sqrt{\lambda})} \quad (5.10)$$

反馈吞吐量增益的上界由三个部分组成: α , $(\sqrt{\lambda})^D$, $\frac{1 - (\sqrt{\lambda})^K}{K(1 - \sqrt{\lambda})}$, 分别表示信道量化, 固定处理延时以及周期反馈带来的可变延时部分带来的影响。显然, 反馈吞吐量增益相对固定延时部分 D 至少呈现指数衰减, 相对反馈周期 K 近似成线性反比。因此, 在快衰落信道下, λ 的值较小, 因而固定反馈延时部分相对于可变部分占主要成分。

5.2 反馈量压缩

由于反馈信道信息中包含了残留的空间相关的信息, 因而不必每次信道实现都反馈信道信息。如果采用周期性的反馈策略, 即每次信道信息传递之后, 接下来若干次信道实现内不传递信道信息或者仅传递有损压缩过的信道信息, 则可以进一步压缩残留空间相关信息。假设概率转移概率矩阵为 \mathbf{P} , 则 K 步转移概率矩阵为 \mathbf{P}^K , 定义 $P_{l,m}^{(K)} \triangleq [\mathbf{P}^K]_{l,m}$ 为状态 m 经过 K 步转移到状态 l 的概率。前后间隔 K 个采样周期的两次反馈时间点之间信道状态的相关性可以从 K 步状态转移矩阵得以体现。如果两次反馈时间点之间的相关性足够大, 则给定前次反馈的反馈信息时, 本次反馈的码字标识以较大的概率出现在码本的一个子集中。从马尔可夫链的角度看, 若相关性足够大, 给定信道状态马尔可夫链的上一状态, 则当前状态以较大概率出现在整个状态空间的一个子集中。

5.2.1 反馈量压缩算法

为了描述反馈量压缩算法完整的数学描述, 首先定义马尔可夫链的 ε -邻域[39]。将 K 步状态转移概率按降序排列为 $P_{1,m}^{(K)} \geq P_{2,m}^{(K)} \geq \dots \geq P_{N_b,m}^{(K)}$, 给定一个较小的实数 $0 < \varepsilon < 1$, 则马尔

可夫链状态 m 的 ε -邻域定义为[39]

$$\mathcal{N}_m(\varepsilon) \triangleq \left\{ N \leq l \leq N_b \mid \sum_{l=N}^{N_b} P_{l,m}^{(K)} \geq 1 - \varepsilon \text{ 且 } \sum_{l=N+1}^{N_b} P_{l,m}^{(K)} < 1 - \varepsilon \right\} \quad (5.11)$$

ε -邻域包含那些概率较大的转移状态，且这些状态的转移概率的总和大于 $(1 - \varepsilon)$ 。时间相关性越大， ε -邻域中包含的状态数越少，反之亦然。可以看出，这种基于 ε -邻域的反馈量压缩方法与传统的差分编码有所类似，但是所有基于差分的方法都存在着错误累积和扩展的问题。为了解决这一问题，可以周期性的在反馈数次压缩过的反馈信息(来自 ε -邻域)之后，重新反馈一次完整的状态信息，从而防止有损压缩带来的错误累积。该过程可以描述为，假设第 i 次反馈为完全反馈，且信道状态为 $I_{iK} = m$ (注意到反馈是周期性的，反馈时间间隔为 K)，则第 $i+1$ 次反馈为有损压缩反馈。如果信道状态正巧落在 ε -邻域 \mathcal{N}_m 内，则信道状态 $I_{(i+1)K}$ 被编码为 $|\mathcal{N}_m|$ 内码字中的一个， $|\mathcal{N}_m|$ 表示集合 \mathcal{N}_m 的势；如果不在 ε -邻域内，则任意选取一个码字来表示。有损压缩需要一个大小为 $(|\mathcal{N}_m| + 1)$ 的码本，编码后码字的长度固定为 $B_m(\varepsilon) = \lceil \log_2(|\mathcal{N}_m(\varepsilon)| + 1) \rceil$ 。由于通常邻域只占整个状态空间的一小部分，即 $B_m(\varepsilon) \ll \log_2 N_b$ ，所以可以起到压缩的效果。对于不同的状态 m ，其对应的 $|\mathcal{N}_m(\varepsilon)|$ 可能有所不同，为了保证压缩过的反馈信息比特数不变，选取 $B(\varepsilon) = \max_l B_l(\varepsilon)$ 。为了能够同时对压缩过的反馈信息和完整的反馈信息进行处理，发送和接收端都需要存储 $N_b + 1$ 个码本，其中 1 个大小为 N_b 的码本用于处理完整的反馈信息，这与上一章讲述的内容一致，另外 N_b 个大小为 $B(\varepsilon)$ 的码本分别用于处理 N_b 个码字对应的压缩过的反馈信息。

5.2.2 反馈量压缩对反馈增益的影响

由于上一节中描述的反馈量压缩算法为有损压缩，所以引入反馈量压缩之后必然会降低反馈增益。为了简化分析，假设完全反馈和有损压缩反馈交替进行，即每次完全反馈后下一个反馈时间点必然采用有损压缩反馈，反之亦然。采用反馈量压缩之后，系统的遍历吞吐量为

$$\tilde{R}(K, D) = \frac{1}{2}R(K, D) + \frac{1-\varepsilon}{2}R(K, D) + \frac{\varepsilon}{2}R(\infty) \quad (5.12)$$

其中 $R(K, D)$ 为不引入反馈量压缩的遍历吞吐量。等式右边的三项分别表示未压缩过的，压缩过的以及例外部分的信道反馈，注意到信道反馈的例外情况出现的概率为 ε 。根据式(5.3)可以得到，引入反馈量压缩之后的反馈吞吐量增益为

$$\Delta \tilde{R}(K, D, \varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Delta R(K, D) \quad (5.13)$$

其中 $\Delta R(K, D)$ 对应无反馈压缩时的反馈吞吐量增益。

平均反馈速率为

$$\tilde{R}_f(\varepsilon) = \frac{B + B(\varepsilon)}{2KT} \quad (5.14)$$

根据(5.13)， ε 应该尽可能小以减少由于有损压缩带来的反馈吞吐量增益的损失；同时，如果 ε 太小，则 $B(\varepsilon)$ 非常接近 B ，没有起到降低平均反馈速率的作用。此外，由式(5.14)可以看出，有损压缩的平均反馈速率至少大于无反馈压缩速率的一半。

间隔一次的反馈一般就可以达到较高的效率，因为信道状态信息之间残留的时间相关性在周期性的反馈中大大降低。若反馈间隔很短，则还可以进一步压缩反馈信息以减少残留的时间相关性，为了达到这一目的，可以采取分块的反馈压缩方法。分块的反馈压缩方法是前面描述的间隔

一次反馈压缩方法的推广，它将部分反馈的周期从 1 个反馈时间间隔拓展到 W 个，即每次完整反馈后，接下来的 W 个反馈时间点均采用有损压缩。分块反馈压缩对应的吞吐量为

$$\begin{aligned} \tilde{R}(K, D) = & \frac{1}{W+1} \sum_{l=1}^W R(K, D) \\ & + \frac{1}{W+1} \sum_{l=1}^W \left\{ (1-\varepsilon)^l R(K, D) + [1 - (1-\varepsilon)^l] R(\infty) \right\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

反馈吞吐量增益为

$$\Delta \tilde{R}(K, D, \varepsilon) = \frac{1 - (1-\varepsilon)^{W+1}}{(W+1)\varepsilon} \Delta R(K, D) \quad (5.16)$$

平均反馈速率为

$$\tilde{R}_f(\varepsilon) = \frac{B + WB(\varepsilon)}{(W+1)KT} \quad (5.17)$$

如果信道的时间相关性很大，即 $\varepsilon \ll 1$ ，则 $\Delta \tilde{R}(K, D, \varepsilon) \approx \Delta R(K, D)$ ，反馈量压缩对吞吐量增益没有显著的影响。否则， W 应取为 1 以减少吞吐量增益的损失。另外，容易得出当 $W = 1$ 时，式(5.15)和式(5.16)退化为式(5.13)和式(5.14)。

5.3 仿真结果

在本节的实验中，均假定系统为 4×2 MIMO 空分复用系统，且信道在空间上独立同分布，信道矩阵元素满足 $CN(0, 1)$ 分布。假设信道矩阵各元素在时间上的自相关遵循克拉克模型(Clarke's model)，由第一类零阶贝塞尔函数 $\mathcal{J}_0(2\pi f_D \tau)$ 来表示，其中 f_D 为多普勒频移， τ 为采样间隔。基于上述模型，信道状态马尔可夫链通过仿真来构造。由于信道矩阵元素独立同分布，所以可以独立产生。理想情况下，对于单个信道元素对应的随机过程，其同相和正交分量随机过程的自相关都需要满足

$$R[n] = \mathcal{J}_0(2\pi f_m |n|) \quad (5.18)$$

其中 $f_m = f_D T$ 为对采样频率 f_s 归一化过的最大多普勒频率 $f_m = f_D T$ 。同时同相和正交分量相互独立，且均值为零。

在数字信号处理中，AR 模型经常用来对离散随机过程进行建模，因为 AR 模型的参数可以直接根据需要匹配的相关特性直接得到。典型的 p 阶 AR 过程可以用以下时间迭代方法得到

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] + w[n] \quad (5.19)$$

其中 $w[n]$ 为复数零均高斯白噪声。AR 模型的参数包括滤波器系数 $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ 和噪声 $w[n]$ 的方差 σ_p^2 。对应的 $AR(p)$ 过程的功率谱密度为

$$S_{xx}(f) = \frac{\sigma_p^2}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k \exp(-j2\pi f k)|^2} \quad (5.20)$$

尽管实际环境中的功率谱不一定是合理的，但是任何形式的功率谱都可以用阶数足够高的有理表达式来进行近似。待近似的自相关函数 $R_{xx}[k]$ 与 $AR(p)$ 模型的参数存在以下关系：

$$R_{xx}[k] = \begin{cases} - \sum_{m=1}^p a_m R_{xx}[k-m], & k \geq 1 \\ - \sum_{m=1}^p a_m R_{xx}[-m] + \sigma_p^2, & k = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

改写成矩阵形式，则

$$\mathbf{R}_{xx}\mathbf{a} = -\mathbf{v} \quad (5.22)$$

其中

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} R_{xx}[0] & R_{xx}[-1] & \cdots & R_{xx}[-p+1] \\ R_{xx}[1] & R_{xx}[0] & \cdots & R_{xx}[-p+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}[p-1] & R_{xx}[p-2] & \cdots & R_{xx}[0] \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_p]^T \quad (5.24)$$

$$\mathbf{v} = [R_{xx}[1] \ R_{xx}[2] \ \cdots \ R_{xx}[p]]^T \quad (5.25)$$

且

$$\sigma_p^2 = R_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p a_k R_{xx}[-k] \quad (5.26)$$

如果 \mathbf{R}_{xx}^{-1} 存在，则 Yule-Walker 方程可以保证方程(5.22)有唯一的解 $\mathbf{a} = -\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{v}$ 。由参数 \mathbf{a} 生成的 $AR(p)$ 过程的自相关函数为

$$\hat{R}_{xx}[k] = \begin{cases} R_{xx}[k], & 0 \leq k \leq p \\ -\sum_{m=1}^p a_m \hat{R}_{xx}[k-m], & k > p \end{cases} \quad (5.27)$$

$AR(p)$ 过程的自相关函数直到 p 个采样点延时的值与被逼近自相关函数对应相等，而余下的延拓部分具有最大熵[66]。

实际仿真过程中，为了避免 Yule-Walker 方程出现病态，需要适当的调整 $\hat{R}_{xx}[0]$ 的值，给其加上一个很小的扰动 ϵ [67]，改进后的 $AR(p)$ 过程的自相关直到 p 个采样点延时的值为

$$\hat{R}_{xx}[m] = \begin{cases} R_{xx}[0] + \epsilon, & m = 0 \\ R_{xx}[m], & m = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (5.28)$$

ϵ 的取值与多普勒频移 f_m 有关， ϵ 的数量级与 f_m 的关系可参考[67]。

下面通过一个例子来分析 AR 方法建模的效果，待逼近的自相关函数为式(5.18)，归一化多普勒频移为 $f_m = 0.01$ ，扰动因子 $\epsilon = 10^{-7}$ 。分别比较阶数为 20, 50, 100, 200 的 AR 过程的长度为 250 的自相关序列。理论自相关结果由式(5.27)来确定，实验数据由 10^6 个采样点的时间自相关近似。

由图5.2可以看出，当 AR 阶数达到 200 之后，实验数据与理论值已极为接近，因而高阶的 AR 过程是产生已知统计特性的随机过程的有效方法。值得注意的是，为了去除 AR 过程的瞬态效应，需舍弃初始的若干个样本。在本例中，前 2000 个样本被舍弃。确定了时间相关瑞利衰落变量的产生方法之后，就可以用其产生时间相关瑞利衰落 MIMO 信道。假设信道为 3×3 MIMO，且在空间上为独立同分布瑞利衰落。信道矩阵的每个元素都满足 $CN(0, 1)$ 分布，时间相关性由 200 阶 AR 过程来产生，归一化多普勒频移为 $f_m = 0.01$ 。

为了验证马尔可夫链模型的有效性，采用量化信道信息的自相关作为参考。量化信道信息序列 $\{\mathbf{F}_n\}$ 用其对应的预编码矩阵(来自于码本 \mathcal{C})来表示，给定矢量量化器，量化信道信息序列 $\{\mathbf{F}_n\}$ 与信道状态 $\{I_n\}$ 之间为——映射的关系。 $\{\mathbf{F}_n\}$ 的自相关函数定义为 $R[k] = E\{\|\mathbf{F}_n^* \mathbf{F}_{n+k}\|^2\}$ ，其中 k 为时间间隔。在图5.3中，这个自相关函数用‘Clake’s model’来表示。 $R[k]$ 可以通过如下步骤得到：

算法 12 时间相关 MIMO 信道的生成

- 1: 按照前面所述方法产生 3×3 时间相关瑞利衰落信道模型。
- 2: 根据信道和量化准则确定量化信道信息序列 $\{\mathbf{F}_n\}$ 。
- 3: 假设信道各态遍历, 用时间平均来计算自相关函数 $R[k] = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M |\mathbf{F}_n^* \mathbf{F}_{n+k}|^2$ 。

另一方面, 已知信道模型后, 可以通过训练序列来生成马尔可夫链的状态转移矩阵 \mathbf{P} 和平稳概率 π 。根据状态转移矩阵 \mathbf{P} 和平稳概率 π 可以确定量化信道信息序列的自相关函数为 $R[k] = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N |c_l^* c_m|^2 [\mathbf{P}^k]_{l,m} \pi_m$, 其中, c_l 表示码本 \mathbf{C} 中的第 l 个码字。这个自相关函数用 'Markov chain' 来表示。

根据图5.3可以得出, 一阶马尔可夫链可以很好的近似克拉克衰落模型。当相关系数大于 0.6 时, 近似效果尤为显著。另外, 随着时间间隔的增加, 两条曲线都趋于收敛。更高阶的马尔可夫链可以取得更好的近似效果, 但是复杂度也会呈几何增长。

图5.4比较了量化信道状态信息和反馈延时对波束成型系统吞吐量的影响。假设反馈延时固定, 即反馈周期为 1。发送信噪比为 $\text{SNR}=10\text{dB}$, 信道的归一化多普勒频移为 $f_m = 0.01$, 码本大小为 $N_b = 16$ 。量化带来的吞吐量损失约为 0.2bits/s/Hz , 这个损失随码本大小变化而变化。根据图5.4可以看出, 当固定延时超过 6 时, 延时造成的吞吐量损失已超过量化带来的损失, 这是由于多普勒频移较大 ($f_m = 0.01$) 造成的。最后, 吞吐量随反馈延时呈指数递减, 当延时达到 90 时, 系统吞吐量 $R(D)$ 已接近 $R(\infty)$ 。因此, 在实际系统中, 反馈延时是影响系统吞吐量的关键因素。

图5.5比较了不同的固定处理延时 D 和不同的反馈周期 K 下, 波束成型系统的吞吐量。归一化多普勒频移 $f_m = 0.01$, 信噪比为 $\text{SNR} = 10\text{dB}$, 码本大小为 $N_b = 16$ 。从图中可以看出, 吞吐量随固定延时部分 D 呈指数衰减, 随反馈周期 K 约呈线性递减。图5.6给出了归一化多普勒频移 $f_m = 0.001$ 时, 吞吐量随固定延时和反馈周期的变化。比较两幅图的结果可以得出, 在快衰落信道下, 反馈延时对系统吞吐量的影响很大。

图5.7比较了不同的多普勒频移 f_m 和不同的反馈周期 K 下, 波束成型系统的反馈量压缩效果。这里取 $\epsilon = 0.1$, 根据5.11的定义, 计算得到码本的大小。由仿真结果可以得出, 多普勒频移越大, 反馈量压缩效果越差, 因为残留的时间相关性有限。同时, 反馈周期越长, 相邻反馈时间点之间的时间相关性越弱, 因而压缩效果也越差。图5.7中 $f_m = 0.05$ 和 $f_m = 0.001$ 对应的曲线出现突变是因为计算有损压缩码本的大小时取最大值 $B(\epsilon) = \max_l B_l(\epsilon)$ 造成了轻微的波动。

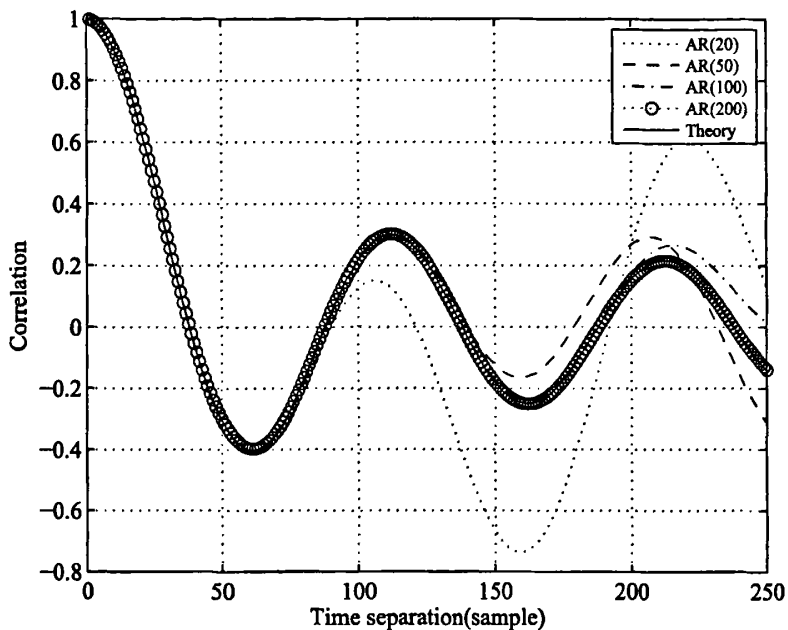


图 5.2: AR 方法的自相关, 阶数 $p = 20, 50, 100, 200$

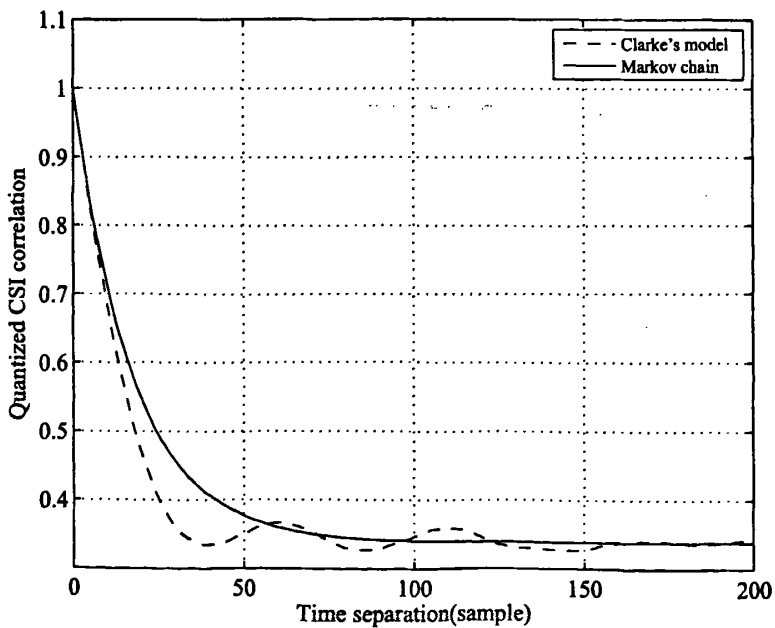


图 5.3: 归一化多普勒频移为 $f_m = 0.01$ 时的量化信道信息序列的自相关

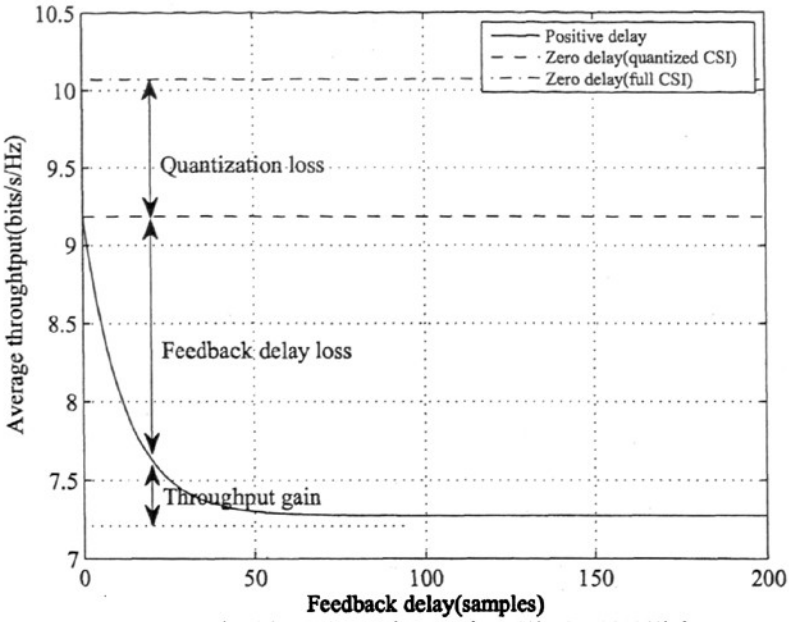


图 5.4: 信道信息量化和有限延时对系统吞吐量的影响

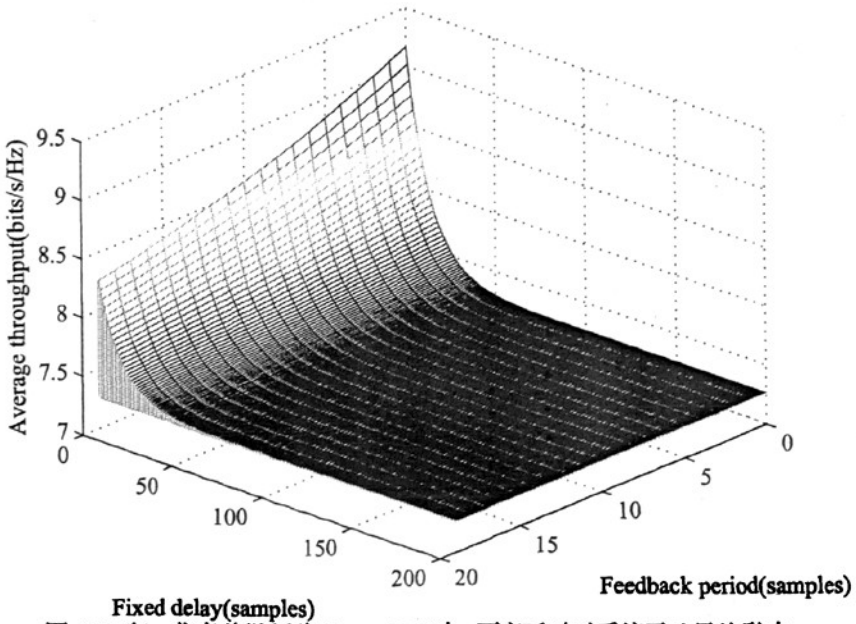


图 5.5: 归一化多普勒频移 $f_m = 0.01$ 时, 可变延时对系统吞吐量的影响

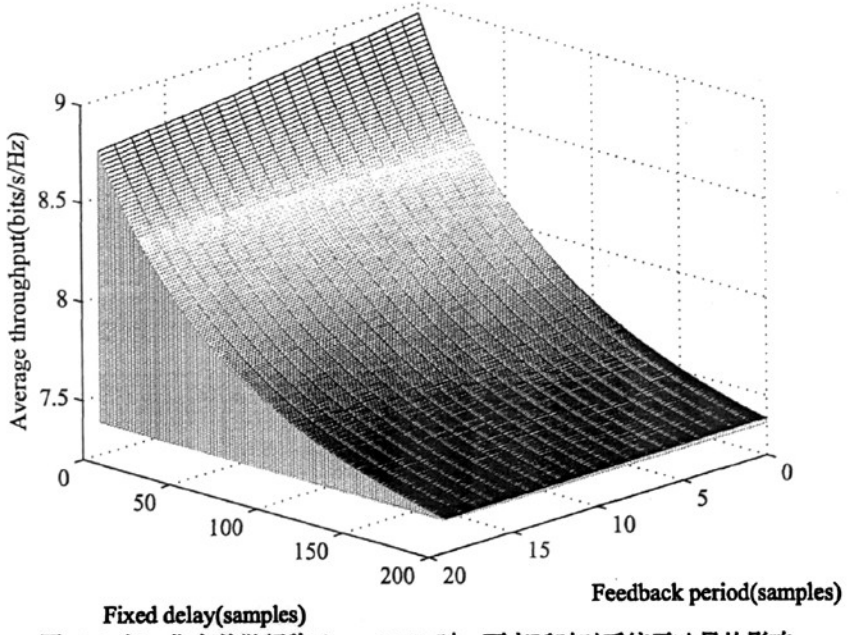


图 5.6: 归一化多普勒频移 $f_m = 0.001$ 时, 可变延时对系统吞吐量的影响

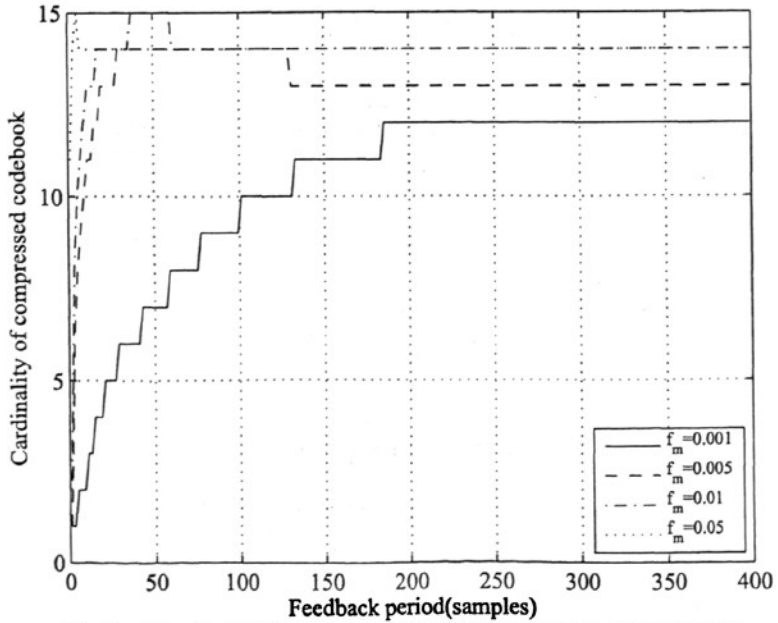


图 5.7: 归一化多普勒频移 f_m 和反馈周期 K 对反馈量压缩的影响

第六章 空间相关信道下的有限反馈

对于 MIMO 系统来说,除了存在时间上的相关性之外,还有可能存在空间上的相关性,尤其是当发送或接收端天线相距较近时。当信道存在空间上的相关性时,针对独立同分布信道设计的码本将遇到两个方面的挑战:第一、由于信道不再满足独立同分布特性,信道的最优量化结果不再均匀。在最后的量化结果中(码本 + 区域分割),单位复数空间内的某些区域码字出现概率较高,在其他区域分布比较稀疏。因而采用 GLP 码本可能会带来严重的性能下降;第二、由于信道统计特性会随着时间的推移而发生变化,显然计算复杂度较高的 GLA 并不适合实时的更新码本。由此可以得出,在空间相关信道下的有限反馈系统中应当尽量利用已有的码本,根据信道空间相关性对其进行简单的变换而不是用 GLA 重新生成。

6.1 统计反馈

在本节中,假设发送端不知道信道的即时信息,但是知道信道的统计信息。由于信道的统计特性相对于信道元素本身变化的速率较为缓慢,所以可以通过反馈来传递给发送端,甚至可以根据信道的互逆性,由发送端估计得到。下面考虑一种简单的传输方案,对于波束成型系统,每次传输所采用的成型矢量均为单边发送相关矩阵 \mathbf{R}_t 最大奇异值对应的特征向量;对于预编码系统,每次传输所采用的预编码矩阵为 \mathbf{R}_t 最大的 $N_s(N_s$ 为发送流数)个奇异值对应的特征向量构成的矩阵。由于发送端已知单边发送相关矩阵 \mathbf{R}_t ,因而不需要反馈。波束成型可以视作预编码的一种特殊形式($N_s = 1$),所以在本节中主要以预编码系统为研究对象。

将本节采用的 Weichselberger 模型重写如下:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}_r \left(\tilde{\Omega} \odot \mathbf{H}_{\text{iid}} \right) \mathbf{U}_t^T \quad (6.1)$$

其中, $\mathbf{H}_{\text{iid}} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ 。 $\tilde{\Omega}$ 的元素均为正数,耦合矩阵 $\Omega = \tilde{\Omega} \odot \tilde{\Omega}^*$ 。单边发送相关矩阵 $\mathbf{R}_t = E \{ \mathbf{H}^T \mathbf{H} \} = \mathbf{U}_t \Lambda_t \mathbf{U}_t^H$, 接收相关矩阵 $\mathbf{R}_r = E \{ \mathbf{H} \mathbf{H}^H \} = \mathbf{U}_r \Lambda_r \mathbf{U}_r^H$, $[\Lambda_t]_{n,n} = \sum_{k=1}^{N_r} \Omega_{k,n}$, $[\Lambda_r]_{n,n} = \sum_{k=1}^{N_t} \Omega_{n,k}$ 。

为了方便分析,定义以下参数:

- 总的发送功率 $\mathcal{E}_t = E \{ \mathbf{s}^H \mathbf{s} \}$;
- 发送相关矩阵的特征值 $\Lambda_t(k) = \sum_{i=1}^{N_r} \Omega_{i,k}$, $k = 1, \dots, N_t$, 且 $\Lambda_t(k)$ 按降序排列;
- 信道增益 $\Gamma = \sum_{i=1}^{N_r} \Lambda_r(i) = \sum_{i=1}^{N_t} \Lambda_t(i)$;
- 归一化信道增益 $\gamma_r \triangleq \frac{\Gamma}{N_r}$;
- 接收信噪比 $\text{SINR}_k = \frac{1}{\left[\left(\mathbf{I}_{N_s} + \frac{\mathcal{E}_t}{N_r} \mathbf{F}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{F} \right)^{-1} \right]_k} - 1$, 即采用 MMSE 线性接收机。

用 P 表示发送的 N_s 路数据中至少有一路出错的概率, 即

$$P = 1 - \prod_{k=1}^{N_s} (1 - P_k) \quad (6.2)$$

其中 P_k 表示第 k 路数据出错的概率。假设 N_s 路同时发送的数据均采用同样的调制方式, 则 P_k 可以表示为

$$P_k = \alpha Q\left(\beta \left(\text{SINR}_k^{1/2}\right)\right) \quad (6.3)$$

其中 SINR_k 为前面定义的第 k 路数据接收信干噪比, α 和 β 是与星座图有关的常数, $Q(\cdot)$ 是与标准正态分布有关的 Q -函数。

几个与信道矩阵 \mathbf{H} 有关的子矩阵定义如下:

- 定义 $\mathbf{H}_{\text{ind}} \triangleq \tilde{\Omega} \odot \mathbf{H}_{\text{iid}}$;
- $\tilde{\Lambda}_t$ 为 Λ_t 的 $N_s \times N_s$ 的主子矩阵, 即 $\Lambda_t = \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}_t & 0 \\ 0 & \times \end{bmatrix}$;
- $\tilde{\mathbf{H}}_{\text{ind}}$ 为 \mathbf{H}_{ind} 的 $N_r \times N_s$ 的主子矩阵, 即 $\tilde{\mathbf{H}}_{\text{ind}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{\text{ind}} & \times \\ \times & \times \end{bmatrix}_{N_r \times N_s, N_r \times (N_t - N_s)}$;
- $\hat{\Lambda}_t$ 表示消去 $\tilde{\Lambda}_t$ 的第 k 行和 k 列后得到的子矩阵, 在不引起歧义的前提下, 将下标 k 略去;
- $\hat{\mathbf{H}}_{\text{ind}}$ 表示消去 $\tilde{\mathbf{H}}_{\text{ind}}$ 的第 k 列得到的子矩阵, 在不引起歧义的前提下, 将下标 k 略去。

6.1.1 差错概率的增加

为了度量统计反馈相比完全已知信道信息时所造成的性能损失, 定义平均相对差错概率 ΔP 如下[44]

$$\Delta P \triangleq E_{\mathbf{H}} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{N_s} (P_{k,\text{stat}} - P_{k,\text{perf}})}{\sum_{k=1}^{N_s} P_{k,\text{perf}}} \right\} \quad (6.4a)$$

$$\leq E_{\mathbf{H}} \left\{ \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \frac{P_{k,\text{stat}} - P_{k,\text{perf}}}{P_{k,\text{perf}}} \right\} \quad (6.4b)$$

其中 $P_{k,\text{stat}}$ 为反馈统计信息时的符号差错概率, $P_{k,\text{perf}}$ 为反馈完全信道信息时的符号差错概率。

平均相对差错概率存在以下上界[44]:

$$\Delta P \leq E_{\mathbf{H}} \left\{ \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \frac{\exp\left(\frac{\beta^2 \Delta \text{SINR}_k}{2}\right) \sqrt{1 + \frac{\Delta \text{SINR}_k}{\text{SINR}_{k,\text{stat}}}}}{1 - \left(\frac{1}{\beta^2 \text{SINR}_{k,\text{perf}}}\right)} - 1 \right\} \quad (6.5)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta \text{SINR}_k &\triangleq \text{SINR}_{k,\text{perf}} - \text{SINR}_{k,\text{stat}} \\ &= 1 + \frac{\Lambda_t \mathbf{H}_{\text{iid}}^H \Lambda_r \mathbf{H}_{\text{iid}}}{\Gamma} - \frac{\det\left(\mathbf{I}_{N_s} + \frac{\epsilon_t}{N_s \Gamma} \tilde{\Lambda}_t^{1/2} \tilde{\mathbf{H}}_{\text{iid}}^H \Lambda_r \tilde{\mathbf{H}}_{\text{iid}} \tilde{\Lambda}_t^{1/2}\right)}{\det\left(\mathbf{I}_{N_s-1} + \frac{\epsilon_t}{N_s \Gamma} \hat{\Lambda}_t^{1/2} \hat{\mathbf{H}}_{\text{iid}}^H \Lambda_r \hat{\mathbf{H}}_{\text{iid}} \hat{\Lambda}_t^{1/2}\right)} \end{aligned}$$

对于 Weichselberger 模型, 以下上界[44]更能够直观的展示信道参数与差错概率性能损失之间的关系

$$\Delta P \leq \frac{\beta^2 \rho}{2\alpha} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{N_s} \Lambda_t(k)}{N_s} + \frac{1}{\beta^2 \mathcal{E}_t} \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{\Lambda_t(k)} + \frac{\beta^2 \mathcal{E}_t}{2\gamma_r} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{N_s} \Lambda_t(k)}{N_s} \cdot \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{N_s} + \sqrt{N_t}}{\sqrt{N_s}}\right) \quad (6.6)$$

$$= \frac{\beta^2}{2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_s} \Omega_{i,k}}{\sum_{i=1}^{N_r} \Omega_{i,N_s}} + \frac{1}{\beta^2 \alpha N_s} \sum_{i=1}^{N_r} \Omega_{i,N_s} \cdot \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_r} \Omega_{i,k}} \quad (6.7)$$

通过(6.7)可以看出, 最小化差错概率性能损失的 Λ_t 需最小化 $\frac{\Lambda_t(k)}{\Lambda_t(N_s)}$ 和 $\sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{\Lambda_t(k)}$ 。如果给定发送功率 \mathcal{E}_t , 那么容易得出当发送相关阵 \mathbf{R}_t 的特征值 $\Lambda_t(k)$ 按照大小可以明显的分为两部分: N_s 个较大的值(显著集)和 $(N_t - N_s)$ 个较小的值(非显著集)时, ΔP 可以达到最小化。取得最优的特征值组合为: $\Lambda_t(1) = \dots = \Lambda_t(N_s) = \mathcal{E}_t/N_s, \Lambda_t(N_s + 1) = \dots = \Lambda_t(N_t) = 0$ 。另外上述分析还为多模式传输(发送端发送流数可变)提供了理论基础。

6.1.2 平均互信息量的减少

本节将分析另一个重要的性能指标, 统计反馈带来的平均互信息量的减少。定义相对平均互信息量损失为

$$\Delta I \triangleq E_H \left\{ \frac{I_{\text{perf}} - I_{\text{stat}}}{I_{\text{perf}}} \right\} \quad (6.8)$$

其中 I_{stat} 为反馈统计信息时的信道容量, I_{perf} 为反馈完全信道信息时的信道容量。可以证明[44], 平均互信息量的减少存在以下上界

$$\Delta I \leq 2\kappa \sqrt{\frac{N_t}{N_r}} \cdot \frac{N_r}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{\Lambda_t(k) \log\left(1 + \frac{\mathcal{E}_t}{N_s} \Lambda_t(k)\right)} \quad (6.9)$$

其中 κ 为一常数。通过(6.9)可以得出达到最优的特征值组合也满足 $\Lambda_t(1) = \dots = \Lambda_t(N_s) = \mathcal{E}_t/N_s, \Lambda_t(N_s + 1) = \dots = \Lambda_t(N_t) = 0$ 。

6.1.3 码本设计原则

当信道信息完全已知时, 假设信道矩阵的 SVD 分解为 $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}^H$ 。如果发送端采用等功率分配, 则最优的预编码矩阵为 $\mathbf{F}_{\text{opt}} = \tilde{\mathbf{V}}$, 如果采用功率注水, 则最优的预编码矩阵为 $\mathbf{F}_{\text{opt}} = \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{\Lambda}_{\text{pa}}^{1/2}$, 其中 $\mathbf{\Lambda}_{\text{pa}}$ 是秩为 N_s 的 $\mathbf{\Lambda}_{\text{pa}}$ 的功率分配矩阵, 且满足 $\text{Tr}(\mathbf{\Lambda}_{\text{pa}}) \leq M$ 。 $\tilde{\mathbf{V}}$ 为矩阵 \mathbf{V} 的前 N_s 列; 仅已知信道统计信息时, 最优的预编码矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}_t$ 为 \mathbf{U}_t^* 的前 N_s 列¹。前面分析了信道状态对于统计反馈的性能影响, 当信道发送相关矩阵的特征值满足 $\Lambda_t(1) = \dots = \Lambda_t(N_s) = \mathcal{E}_t/N_s, \Lambda_t(N_s + 1) = \dots = \Lambda_t(N_t) = 0$ 时达到最优。

另外, 可以证明[68]当 $\{N_t, N_r\} \rightarrow \infty$ 且 $N_t/N_r \rightarrow 0$ 或者 ∞ 时, 最优预编码矩阵 $\tilde{\mathbf{V}}$ 收敛于统计反馈时的最优预编码矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}_t$ 。与独立同分布瑞利衰落信道不同的是, 空间相关信道下最优的预编码矩阵在复数空间 $\mathbb{C}^{N_t \times N_s}$ 上分布不再均匀, 因而增加了码本的设计难度。在实际系统中, 由于发送和接收天线数目有限或者它们的数目成比例, 仅依靠统计信息不足以取得渐进的性能增益, 但是可以预见 $\tilde{\mathbf{V}}$ 与 $\tilde{\mathbf{U}}_t$ 之间距离的平均值较小。如果增加自由度, 使得接收端可以选择多个码字($B > 0$), 且使得这些码字位于 $\tilde{\mathbf{U}}_t$ 附近, 则可以追踪 $\tilde{\mathbf{U}}_t$ 的局部变化。下面将分析将码字局部化的方法以最终提出空间相关信道下的码本设计方法。

¹本文中最佳预编码矩阵与[44]中的结论有所不同。在[44]中, 最佳预编码矩阵为 \mathbf{U}_t 的前 N_s 列, 而非 \mathbf{U}_t^* 。这是因为该文献中发送相关阵定义为 $\mathbf{R}_t = E\{\mathbf{H}^H\mathbf{H}\}$, 而本文中发送相关阵定义为 $\mathbf{R}_t = E\{\mathbf{H}^T\mathbf{H}^*\}$ 。

6.2 码本设计

局部化码本是为了将码字限制在复数空间 $\mathbb{C}^{N_t \times N_s}$ 的某个方向附近。码字的局部化是空间相关信道下码本自适应的基础。为了达到这一目的，需要借助码本的旋转和收缩两种重要的变换。

6.2.1 码本的旋转与收缩

为了定义码本的旋转与收缩，首先需要定义码字间距离。对于预编码矩阵系统，码字间距离有多种定义方式，比如 2-范数投影距离、Fubini-Study 距离和弦距离。在[44]中，采用了 2-范数投影距离作为预编码有限反馈系统中码字之间距离的度量。由于本文中的码本均由 GLA 算法产生，所以在本节中，采用弦距离作为码字间距离的度量，事实证明以弦距离作为度量定义的码本收缩具有较低的复杂度。码字间的弦距离具有以下两个重要的性质：

1. $0 \leq d_{\text{chor}}(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j) \leq 1$,
2. 酉不变性: $d_{\text{chor}}(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j) = d_{\text{chor}}(\mathbf{U}\mathbf{F}_i, \mathbf{U}\mathbf{F}_j)$ 。

在定义码本的旋转和收缩之前首先分析码本的局部特性，假设码本以码字 \mathbf{F}_1 为中心，存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得对于任意 $i \neq 1$ ，有 $d_{\text{chor}}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_i) \leq \theta$ 。如果 θ 值越小，就说明码本的局部特性越好。为了简单起见，始终将第一个码字 \mathbf{F}_1 作为码本的中心。

码本的旋转操作目的是将码本旋转至另一中心而保持码字间距离关系不变。详细的定义为：

定义 6.1 给定源码本 $\mathcal{F} = \{\mathbf{O}_{\text{src}}(\mathbf{F}_1), \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{N_b}\}$ ，以及目标码本的中心 \mathbf{O}_{des} ，旋转操作 $\mathcal{R}(\cdot)$ 作用于每个码字之后得到的目标码本 $\mathcal{G} = \{\mathbf{O}_{\text{des}}(\mathbf{G}_1), \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_{N_b}\}$ 满足中心旋转性: $\mathcal{R}(\mathbf{O}_{\text{src}}) = \mathbf{O}_{\text{des}}$ 和距离不变性: $d_{\text{chor}}(\mathbf{O}_{\text{des}}, \mathbf{G}_i) = d_{\text{chor}}(\mathbf{O}_{\text{src}}, \mathbf{F}_i)$ 。

针对上述定义存在以下定理：

定理 6.1 给定 \mathbf{O}_{src} 为中心的原始码本 $\mathcal{F} = \{\mathbf{O}_{\text{src}}(\mathbf{F}_1), \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{N_b}\}$ ， \mathbf{O}_{des} 为旋转后码本的中心，则旋转后的码本为 $\mathcal{G} = \{\mathbf{G}_i, i = 1, \dots, N_b\}$ ，其中

$$\mathbf{G}_i = [\mathbf{O}_{\text{des}} \quad \mathbf{O}_{\text{des}}^{\text{null}}] [\mathbf{O}_{\text{src}} \quad \mathbf{O}_{\text{src}}^{\text{null}}]^H \mathbf{F}_i \quad (6.10)$$

其中 $\mathbf{O}_{\text{src}}^{\text{null}}$ 和 $\mathbf{O}_{\text{des}}^{\text{null}}$ 分别表示 \mathbf{O}_{src} 和 \mathbf{O}_{des} 的 $N_t \times (N_t - N_s)$ 的零空间。

证明 令 $\mathbf{F}_i = \mathbf{O}_{\text{src}}$ ，则

$$\mathbf{G}_i = [\mathbf{O}_{\text{des}} \quad \mathbf{O}_{\text{des}}^{\text{null}}] \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{\text{des}} \quad (6.11)$$

再验证距离不变性

$$\begin{aligned} d_{\text{chor}}(\mathbf{O}_{\text{des}}, \mathbf{G}_i) &= \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_i^H \mathbf{O}_{\text{des}} \mathbf{O}_{\text{des}}^H \mathbf{G}_i)} \\ &= \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{F}_i^H \mathbf{O}_{\text{src}} \mathbf{O}_{\text{src}}^H \mathbf{F}_i)} = d_{\text{chor}}(\mathbf{O}_{\text{src}}, \mathbf{F}_i) \end{aligned} \quad (6.12)$$

■

码本收缩操作是为了让码字分布更为密集，同时保持码本中心不变。详细定义为

定义 6.2 给定 $\mathbf{O}_{\text{ctr}} = [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]^T$ 为中心的原始码本 $\mathcal{F} = \{\mathbf{O}_{\text{ctr}}(\mathbf{F}_1), \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{N_s}\}$, 经收缩操作 S 作用于每个除中心以外的码字之后得到的目标码本 \mathcal{G} 满足距离收缩性: $d(\mathbf{G}_i, \mathbf{O}) = \alpha d(\mathbf{F}_i, \mathbf{O})$, $i \neq 1$ 。其中 $\alpha \in (0, 1)$ 为收缩因子, α 越大表示码字分布越稀疏, $\alpha = 1$ 时目标码本不改变原始码本的距离特性。

若原始码本的中心为任意选取的, 则寻找收缩操作 S 的确切定义会非常困难。只有当中心取特定值的时候, 收缩操作定义较简单。当发送流数 N_s 小于发送天线数 N_t 时, 中心取为 $[\mathbf{I} \ \mathbf{0}]^T$; 当发送流数 N_s 等于发送天线数 N_t 时, 中心取为 \mathbf{I} 。对于前一种情形存在以下定理

定理 6.2 给定 $\mathbf{O}_{\text{ctr}} = [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]^T$ 为中心的原始码本 $\mathcal{F} = \{\mathbf{O}_{\text{ctr}}(\mathbf{F}_1), \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{N_s}\}$, 收缩后的码本为 $\mathcal{G} = \{\mathbf{O}_{\text{ctr}}(\mathbf{G}_1), \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_{N_s}\}$, 其中 $\mathbf{F}_i = [\mathbf{F}_{i1}^T \ \mathbf{F}_{i2}^T]^T$, 对应的收缩后的码字为 $\mathbf{G}_i = [\mathbf{G}_{i1}^T \ \mathbf{G}_{i2}^T]^T$, $d(\mathbf{O}_{\text{ctr}}, \mathbf{G}_i) = \alpha d(\mathbf{O}_{\text{ctr}}, \mathbf{F}_i)$, $0 < \alpha < 1$, 则 \mathbf{G}_{i1} 和 \mathbf{G}_{i2} 满足以下矩阵方程:

$$\mathbf{G}_{i1}^H \mathbf{G}_{i1} = \mathbf{V}_i ((1 - \alpha^2)\mathbf{I} + \alpha^2 \mathbf{W}_i) \mathbf{V}_i^H \quad (6.13a)$$

$$\mathbf{G}_{i2}^H \mathbf{G}_{i2} = \mathbf{V}_i (\alpha^2 \mathbf{I} - \alpha^2 \mathbf{W}_i) \mathbf{V}_i^H \quad (6.13b)$$

其中, $\mathbf{F}_{i1}^H \mathbf{F}_{i1} = \mathbf{V}_i \mathbf{W}_i \mathbf{V}_i^H$, \mathbf{F}_{i1} 和 \mathbf{G}_{i1} 为 $N_s \times N_s$ 的矩阵, \mathbf{F}_{i2} 和 \mathbf{G}_{i2} 为 $(N_t - N_s) \times N_s$ 的矩阵。

证明

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_i^H \mathbf{G}_i) &= \text{Tr} \left(\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{i1}^H & \mathbf{G}_{i2}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{i1} \\ \mathbf{G}_{i2} \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_{i1}^H \mathbf{G}_{i1}) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{V}_i ((1 - \alpha^2)\mathbf{I} + \alpha^2 \mathbf{W}_i) \mathbf{V}_i^H) \\ &= \alpha^2 \text{Tr}(\mathbf{V}_i (\mathbf{I} - \mathbf{W}_i) \mathbf{V}_i^H) \\ &= \alpha^2 \text{Tr}(\mathbf{I} - \mathbf{F}_{i1}^H \mathbf{F}_{i1}) \end{aligned} \quad (6.14)$$

因而 $d(\mathbf{O}_{\text{ctr}}, \mathbf{G}_i) = \alpha d(\mathbf{O}_{\text{ctr}}, \mathbf{F}_i)$ 。另外, 矩阵 \mathbf{G}_i 需要满足 $\mathbf{G}_i^H \mathbf{G}_i = \mathbf{I}$, 于是

$$\mathbf{G}_{i2}^H \mathbf{G}_{i2} = \mathbf{I} - \mathbf{G}_{i1}^H \mathbf{G}_{i1} = \mathbf{V}_i (\alpha^2 \mathbf{I} - \alpha^2 \mathbf{W}_i) \mathbf{V}_i^H \quad (6.15)$$

由于 \mathbf{G}_{i1} 为方阵, 所以较易求解, 显然 $\mathbf{G}_{i1} = ((1 - \alpha^2)\mathbf{I} + \alpha^2 \mathbf{W}_i)^{1/2} \mathbf{V}_i^H$ 为(6.13a)的一组解。由于 \mathbf{G}_{i2} 不一定为方阵, 因而(6.13b)的求解较为复杂。(6.16)为方程(6.13b)的一组解。

$$\mathbf{G}_{i2} = \begin{cases} [\mathbf{I} \ \mathbf{0}]^T (\alpha^2 \mathbf{I} - \alpha^2 \mathbf{W}_i)^{1/2} \mathbf{V}_i^H & (N_t - N_s) > N_s \\ [\mathbf{I} \ \mathbf{0}] (\alpha^2 \mathbf{I} - \alpha^2 \mathbf{W}_i)^{1/2} \mathbf{V}_i^H & (N_t - N_s) < N_s \\ (\alpha^2 \mathbf{I} - \alpha^2 \mathbf{W}_i)^{1/2} \mathbf{V}_i^H & (N_t - N_s) = N_s \end{cases} \quad (6.16)$$

将 \mathbf{G}_{i1} 和 \mathbf{G}_{i2} 组合起来就得到了对应的处理过后的码字 \mathbf{G}_i , 其他码字依此处理便得到了收缩过后的码本 \mathcal{G} 。

如果发送流数 N_s 与发送天线数目 N_t 相等, 则与上面分析类似可以得到矩阵方程

$$\mathbf{G}_i^H \mathbf{G}_i = (1 - \alpha^2)\mathbf{I} + \mathbf{F}_i^H \mathbf{F}_i \quad (6.17a)$$

$$\mathbf{F}_i^H \mathbf{F}_i = \mathbf{V}_i \mathbf{W}_i \mathbf{V}_i^H \quad (6.17b)$$

由于此时 \mathbf{G}_i 为方阵, 容易得到方程的一组解为 $\mathbf{G}_i = ((1 - \alpha^2)\mathbf{I} + \alpha^2\mathbf{W}_i)^{1/2} \mathbf{V}_i^H$ 。

特别的, 当 $N_s = 1$ 时, 上述定理退化为波束成型情形。假设原始码字为 $\mathbf{w}_i = [r_1 e^{j\theta_1} \cdots r_{N_i} e^{j\theta_{N_i}}]^T$, 码本中心为 $\mathbf{o} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$, 则对其做因子为 α 的收缩之后得到的码本为 $\mathbf{g}_i = [\sqrt{1 - (1 - \alpha^2)r_1^2} e^{j\theta_1} \ \alpha\sqrt{1 - r_1^2} e^{j\theta_1} \ 0 \ \cdots \ 0]^T$ 。注意到这里给出的结论与[43]中给出的 $\mathbf{g}_i = [\sqrt{1 - (1 - \alpha^2)r_1^2} e^{j\theta_1} \ \alpha r_2 e^{j\theta_2} \ \cdots \ \alpha r_{N_i} e^{j\theta_{N_i}}]^T$ 并不完全相同, 这是因为在解(6.13b)时选取了不同的特解, 但是二者均符合定义 6.2。

6.2.2 基于统计特性的码本自适应方法

有了上节定义的码本变换作为基础, 本节将研究基于信道统计信息的码本自适应方法。对于空间上相关的信道, 码本设计远比独立同分布瑞利衰落信道下复杂。即使对于特定模型, 比如 Kronecker 模型, Weichselberger 模型等, 也很难获知其特征向量的分布。然而, 根据 6.1 的分析, 信道矩阵最大的 N_s 个奇异值所对应的特征向量组成的矩阵在某种程度上趋向于发送相关矩阵对应的最大的 N_s 个特征向量构成的矩阵, 而发送相关矩阵条件数越大, 接受相关矩阵条件数越小, 趋向性越明显。在空间相关信道下, 信道矩阵最大的 N_s 个奇异值所对应的特征向量组成的矩阵分布不均匀, 在发送相关矩阵对应的最大的 N_s 个特征向量(称其为统计方向 \mathbf{F}_{stat})附近, 码本出现的概率较大, 而在远离统计方向的区域, 码本出现的概率较小。给定码字均匀分布的码本, 可以通过对其中部分码字进行变换, 使得它们之间的距离减小且集中于特定区域, 即使得该区域内码字分布较为密集, 而剩下的区域内码字分布较为稀疏。基于上述考虑, 可以利用信道统计信息对码本进行调整, 使得统计方向 \mathbf{F}_{stat} 附近码字分布较为密集, 而其他区域内分布稀疏。

给定信道的统计方向为 \mathbf{F}_{stat} 和均匀分布的原始码本 $\mathcal{F}_0 = \{\mathbf{F}_1, \cdots, \mathbf{F}_{N_b}\}$, 由于码字均匀分布, 不妨设码本的中心位于 \mathbf{F}_1 , 同时定义原始码本 \mathcal{F}_0 的子集 $\mathcal{F}'_0 = \{\mathbf{F}_1, \cdots, \mathbf{F}_S\}$, $1 < S < N_b$ 。为了适应信道特性需要将子集 \mathcal{F}'_0 内的码字旋转到新的中心 \mathbf{F}_{stat} , 且码字关于中心的距离收缩 α 倍。上一节中定义的码本收缩操作 S 要求码本的中心固定为 \mathbf{I} 或者 $[\mathbf{I} \ 0]^T$, 但是实际要求的中心可能指向任意方向, 为了利用 S 做码本收缩, 可以先将待处理的码本旋转至 \mathbf{I} 或者 $[\mathbf{I} \ 0]^T$ 为中心, 完成收缩操作后再旋转至要求的中心 \mathbf{F}_{stat} , 由于旋转操作 \mathcal{R} 并不改变码字与中心之间的距离, 因而也就间接的达到了目的。对应的算法描述如下:

算法 13 基于统计特性的码本自适应

- 1: 利用 GLA 或者 GLP 产生一组针对独立同分布瑞利衰落信道的初始码本 \mathcal{F}_0 , 并选定子码本 \mathcal{F}'_0 。
 - 2: 选取 \mathcal{F}_0 的第一个码字 \mathbf{F}_1 作为码本的中心, 利用码本的旋转变换 \mathcal{R} 将码本旋转至新的中心 \mathbf{I} 或者 $[\mathbf{I} \ 0]^T$ 得到码本 \mathcal{F}_1 , 子码本 \mathcal{F}'_0 经过旋转之后得到的新的子码本表示为 \mathcal{F}'_1 。
 - 3: 将第一个码字也作为子码本 \mathcal{F}'_1 的中心, 利用码本的收缩变换 S 将 \mathcal{F}'_1 中码字与中心之间的距离缩小 α 倍, 其余的码字不做变化, 得到新的子码本 \mathcal{F}'_2 , 整个码本表示为 \mathcal{F}_2 。
 - 4: 将 \mathcal{F}_2 旋转至要求的中心 \mathbf{F}_{stat} , 得到所需的码本 \mathcal{F} 。
-

经过上述变化之后, 原本均匀分布的码字变得不再均匀, 而是趋向于统计方向 \mathbf{F}_{stat} 。图中向量表示码本中的码字, 中心为 \mathbf{F}_1 , 虚线圆锥部分中包含的码字集合即为子码本 \mathcal{F}' , 其余的向量表示子码本外的码字。收缩操作只针对虚线圆锥内包含的码字。自适应码本应当由两部分组成: 由子码本 \mathcal{F}'_0 变换得到的集中在 \mathbf{F}_{stat} 附近的局部码本和其他分布于远离 \mathbf{F}_{stat} 方向的码字组成的全局码本。如果给定反馈比特数目, 局部码本和全局码本各包含的码字个数的最优配置需要针对信道的概率分布来确定。由于最优配置依赖于信道的概率分布, 因而实际系统中只能根据信

道相关矩阵的特征值，通过一定的经验公式大致确定某种特定的场景下码字当如何分配。

6.3 仿真结果

本节分析了空间相关信道下，采用基于信道统计信息的码本自适应变换后，预编码系统的误比特率性能和信道容量。系统为 4×4 MIMO，假设系统的发送和接收天线为线性阵列，则对应的信道模型表达式2.15中左右两边的酉矩阵为 U_t 和 U_r ，为 DFT 矩阵。

首先考虑在空间相关信道下，采用根据信道统计信息自适应的码本相对于针对空间上独立的信道设计的码本所获得的差错概率的减小和信道容量的增加。假设系统的耦合矩阵为：

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} 0.3414 & 0.3033 & 0.1035 & 0.0738 \\ 0.3966 & 0.2878 & 0.0513 & 0.0879 \\ 0.3719 & 0.3515 & 0.0937 & 0.0701 \\ 0.3404 & 0.3404 & 0.0827 & 0.1035 \end{bmatrix}$$

耦合矩阵 $\tilde{\Omega}$ 做了归一化，保证耦合矩阵的功率增益为 1，即 $\Omega = \tilde{\Omega} \odot \tilde{\Omega}$ 的所有元素之和为 1。码本大小为 16，收缩因子取为 $\alpha = 0.5$ ，子码本大小为 8，需要进行收缩操作的子码本为 $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_8\}$ 。在该耦合矩阵设定下，发送相关矩阵 \mathbf{R}_t 的特征值为 $\Lambda_t(k) = \{0.5280, 0.4142, 0.0290, 0.0288\}$ ，接收相关矩阵 \mathbf{R}_r 的特征值为 $\Lambda_r(k) = \{0.2247, 0.2505, 0.2756, 0.2493\}$ 。根据发送相关矩阵的特征值分布可以看出，对于此信道，发送流数应该取为 $N_s = 2$ ，即在 \mathbf{R}_t 最显著的两个特征方向上发送两路独立的数据，因为 $\Lambda_t(1) = \Lambda_t(2) \gg \Lambda_t(3) \approx \Lambda_t(4)$ 。发送端采用 QPSK 调制，接收端采用 MMSE 线性接收。从图 6.1 可以看出，当发送相关矩阵的特征值集合可以明显的分为两个子集：数值较大且较为接近的显著集和数值较小的非显著集时，仅依靠信道的统计信息就可以达到较好的误比特率性能。这是因为此时信道的最优预编码矩阵显著的趋向统计方向 \mathbf{F}_{stat} 。通过增加码本的大小，使得子码本内的 8 个码字更为靠近统计方向，而其余的码字远离统计方向。与固定不变的针对空间独立的信道设计的码本相比，自适应码本可以获得明显的性能增益。信噪比较低时，仅利用信道统计信息和利用变换码本的误比特率性能相近。信噪比较高时，由于仅利用信道统计信息时分集度较低，所以曲线斜率较小，性能开始恶化，当信噪比大于 20dB 时，甚至低于固定码本，而对于自适应码本，由于变换不改变码本的大小，依然具有较高的分集度，性能仍然优于固定码本情形约 0.6dB。图 6.2 给出了自适应码本和固定不变的针对空间独立的信道设计的码本对应的信道容量。由仿真结果可以看出，在高信噪比条件下，采用自适应码本时的信道容量比固定码本时约有 1dB 增益，与完全已知信道信息等功率分配时的容量十分接近。

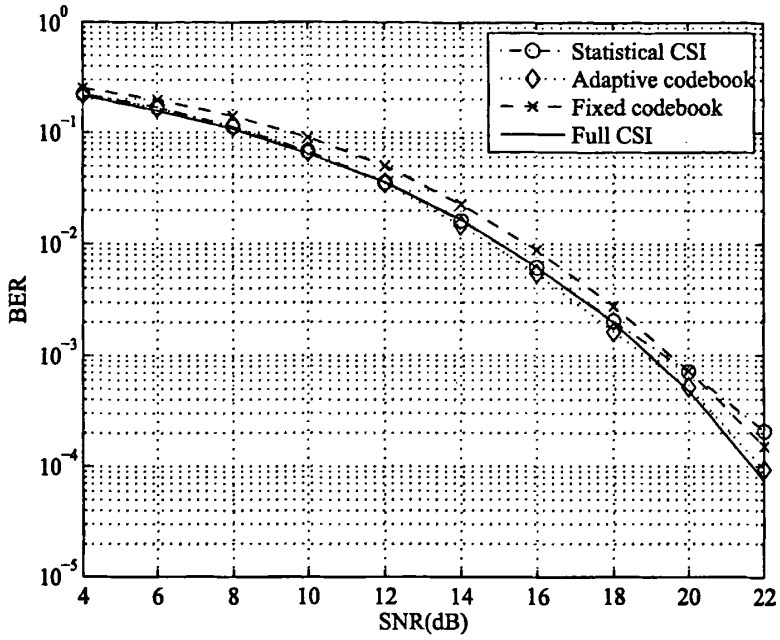


图 6.1: 4×4 空间相关 MIMO 信道下, 发送流数 $N_s = 2$ 的 BER 性能

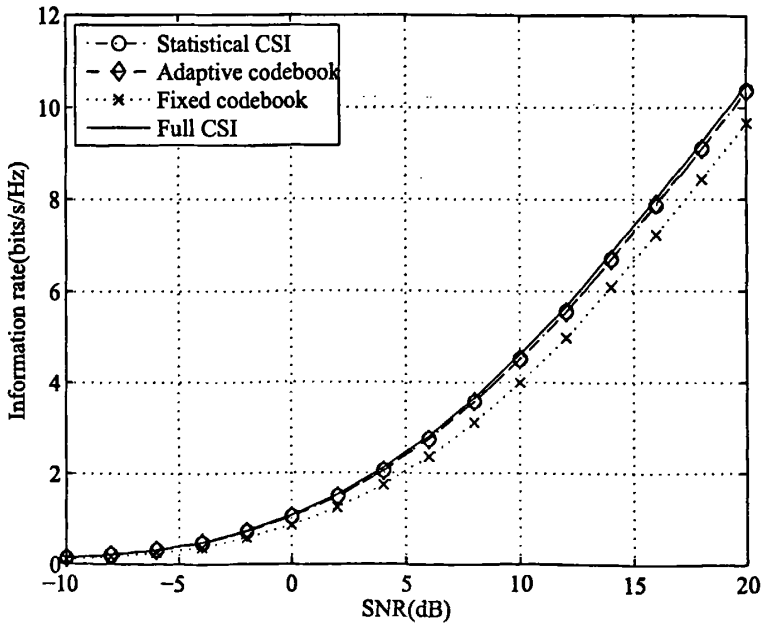


图 6.2: 4×4 空间相关 MIMO 信道下, 发送流数 $N_s = 2$ 的信道容量

第七章 总结

本论文对 MIMO 移动通信系统中基于有限反馈的自适应传输进行了系统的研究。有限反馈系统不同于均值反馈和方差反馈等基于信道统计特性的反馈方案。在有限反馈系统中,接收端对即时信道信息直接进行量化并将量化信息反馈给发送端。码本和编码准则是影响矢量量化器性能的关键因素。本论文全面的比较了各种码本设计方法,其中差集方法要求的码字个数往往不是 2 的幂次,所以缺乏实用价值;GLP 码本生成方法只有在特定的发送天线和码字数目下才存在解析解,而其他情况下仍然依赖数值计算。本文中着重研究的 GLA 算法基于迭代,原理简单,计算方便,适合离线生成码本。然后,论文以接收信噪比和有限反馈带来的信道容量损失作为码本设计性能的考量,对独立同分布瑞利衰落信道下的有限反馈系统进行了研究,结果表明码本的大小足够大(通常大于 16 即可)时,系统的 BER 性能和信道容量可非常接近完全已知信道信息时对应的性能。接着,论文研究了时间相关信道下的有限反馈系统,以系统吞吐量为性能指标,分析了反馈延时和反馈周期对于系统性能的影响。其中,系统的吞吐量随着固有反馈处理延时的增加呈指数递减,随反馈周期近似呈线性递减。因此,减小反馈处理的固有延时是保证系统吞吐量的关键要素。在多普勒频移不太大时,除了可以通过增加反馈周期来减小平均反馈量之外,还可以利用信道的空间相关性来缩小信道状态的取值空间,即对原始码本进行裁剪来达到降低反馈量的目的。本文中研究的基于马尔可夫链状态转移概率的定长码本压缩算法在多普勒频移有限时表现出良好的压缩效果。有限的天线间距以及不够丰富的散射体环境会造成信道在发送或接收端或者两端之间出现空间上的相关性。由于空间相关性的出现,使得最优码本不再满足均匀分布,从而增加了码本设计的复杂度。信道统计信息在移动通信系统中可以方便的估计得到,且变化的速度比即时信道状态信息要缓慢得多,所以可以利用它来辅助有限反馈系统设计。论文中针对信道统计信息与最有码本设计之间的关系,将其与有限反馈系统结合,设计了基于信道统计信息的自适应码本设计算法。其中,按照子空间之间的弦距离对码字变换进行了重定义。在发送相关条件数较大,接收相关条件数较小的情况下,自适应码本相比于固定不变的码本有较高的性能增益。

论文中针对的问题还可进一步研究,主要从这几个方面展开:一、更为有效的考虑时间相关性的有损码本压缩算法;二、发送和接收相关矩阵特征值与码本变换中用到的旋转因子之前可能存在的定量关系;三、不满足发送相关条件数较大,接收相关条件数较小时的自适应码本设计;四、针对实际信道,考虑所有非理想情况,包括时间和空间相关性,设计系统的有限反馈方案。

附录A CR-微积分初步

在通信系统和信号处理领域，经常会遇到一类应用需要针对若干个复数值的参数来优化某个感兴趣的实数取值的标量函数。比如，在自适应滤波器中经常提到的 LMS 算法需要在线调整复数滤波器的参数，又如通信系统中的 MMSE 接收机需要找到最优的滤波器系数来最小化 MSE。在诸如上述两个例子的应用中，通常都需要通过在函数的梯度方向来调整系数来达到优化的目的。

但是，这些基于梯度方向优化的问题往往会让人感到疑惑，因为计算对这些复数值参数的偏导数或梯度时，并不能够遵循复变函数理论中定义的标准复变量的导数。众所周知，复变函数 $f(z)$ 在 z_0 处存在可导的充分必要条件是函数在 z_0 处解析。根据标准的复变函数的定义，非常数的实数取值的复变函数是不可能解析的，因而也就不可能存在导数。

然而，一个实值复变函数同样也可以视为各复数参数对应的实部和虚部的实变函数。该实变函数是存在对这些实部和虚部分量的梯度的，因此可以将不可导的复数集 \mathbb{C} 到实数集 \mathbb{R} 的映射看成可导的 \mathbb{R}^2 到 \mathbb{R} 的映射。但是，人为的将实值复变函数的梯度问题转化为对应的实变函数的梯度问题，会使得问题变得更为复杂，所以如果可以根据对应的实变函数的梯度重新定义实值复变函数的梯度则可以使得问题简化。

A.1 C-可导和 R-可导

设 $z = x + jy$ ， x 和 y 均为实数。 $f(z)$ 为任意关于复数变量 z 的函数。根据复变函数理论，其导数定义为

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (\text{A.1})$$

并且 Δz 可以从复数平面的任何方向趋向于 0 的。这相当于给函数 $f(z)$ 加了一个相当强的条件。Cauchy-Riemann 条件可以用来判断函数是否可导。

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + jv(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

虽然很多常见的函数都可导，且求导结果与实数函数类似，比如 $z^n, e^z, \ln(z), \sin(x)$ 等，但是也有很多简单的函数不可导，比如 $\bar{z}, |z|$ 。值得注意的是，如果函数 $f(z)$ 可导，那么函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 对 x 和 y 也一定是可导的。

下面考虑对复变函数中定义的导数进行推广，如果 $f(z)$ 不解析，但是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 对 x 和 y 可导，根据 Remmert 的定义[69]，称该非解析函数实数可导，或 R-可导。同时，为了避免术语上的混淆，将复变函数理论中定义的可导称为复数可导，或 C-可导。显然，函数 C-可导必然 R-可导。

A.2 \mathbb{R} -导数和 $\overline{\mathbb{R}}$ -导数

根据 Remmert[69], Brandwood[70]等人的工作, 可以得出以下结论。

定理 A.3 任意一个非解析的函数均可以写成 $f(z, \bar{z})$ 的形式,

$$f(z) = f(z, \bar{z}) = f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y) \quad (\text{A.3})$$

如果实值函数 u 和 v 均对 x 和 y 可导, 那么 $f(z, \bar{z})$ 满足将 \bar{z} 视作固定不变时对于 z 解析, 将 z 视作固定不变时对于 \bar{z} 解析¹。

定义共轭坐标为 $c := (z, \bar{z})^T \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, 则复值或实值函数 $f(c) = f(z, \bar{z})$ 的 \mathbb{R} -导数形式上定义为 $\left. \frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial z} \right|_{\bar{z}=\text{常数}}$, 共轭 \mathbb{R} -导数或 $\overline{\mathbb{R}}$ -导数形式上定义为 $\left. \frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right|_{z=\text{常数}}$ 。[69]中还证明了 \mathbb{R} -导数和 $\overline{\mathbb{R}}$ -导数可以改写为

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - j \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (\text{A.4})$$

根据(A.4), 可以立即得到

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1 \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.5})$$

另外还可以证明[69], 对于 \mathbb{R} -可导的函数 f , $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 的充分必要条件是 f 满足 Cauchy-Riemann 条件。

\mathbb{R} -导数和 $\overline{\mathbb{R}}$ -导数具有以下性质:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)} \quad (\text{A.7})$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad (\text{A.8})$$

另外, 如果 $f(z)$ 是个实值函数, 那么 $\overline{f(z)} = f(z)$, 那么可以得到一个重要的等式

$$f(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad (\text{A.9})$$

根据上述结论, 实值复变函数驻点的计算可以由 $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 来得到。由于函数为实值, 所以上面两个条件事实上是等价的, 通常采用 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 来计算驻点。

¹注意这里只是判断是否解析时将 z 或 \bar{z} 视作固定不变, 因为事实上无法真正做到 z 变化时始终保持 \bar{z} 不变。

附录B 常用函数的 \mathbb{R} -导数和 $\overline{\mathbb{R}}$ -导数

在有关 MIMO 通信系统的推导中经常需要对 $f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*)$ 的函数求 \mathbb{R} -导数或者 $\overline{\mathbb{R}}$ -导数，并且函数 f 的取值为标量，但并不一定是实数。表B.1列出了常用函数的 \mathbb{R} -导数和 $\overline{\mathbb{R}}$ -导数。

表 B.1: 常用 $f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*)$ 型函数导数表

$f(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*)$	$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}^*}$
$\text{Tr}(\mathbf{Z})$	\mathbf{I}^\dagger	$\mathbf{0}^\ddagger$
$\text{Tr}(\mathbf{Z}^*)$	$\mathbf{0}$	\mathbf{I}
$\text{Tr}(\mathbf{AZ})$	\mathbf{A}^\top	$\mathbf{0}$
$\text{Tr}(\mathbf{Z}^H \mathbf{A})$	$\mathbf{0}$	\mathbf{A}
$\text{Tr}(\mathbf{ZAZ}^\top \mathbf{B})$	$\mathbf{B}^\top \mathbf{Z} \mathbf{A}^\top + \mathbf{BZA}$	$\mathbf{0}$
$\text{Tr}(\mathbf{ZAZB})$	$\mathbf{B}^\top \mathbf{Z}^\top \mathbf{A}^\top + \mathbf{A}^\top \mathbf{Z}^\top \mathbf{B}^\top$	$\mathbf{0}$
$\text{Tr}(\mathbf{ZAZ}^H \mathbf{B})$	$\mathbf{B}^\top \mathbf{Z}^* \mathbf{A}^\top$	\mathbf{BZA}
$\text{Tr}(\mathbf{ZAZ}^* \mathbf{B})$	$\mathbf{B}^\top \mathbf{Z}^H \mathbf{A}^\top$	$\mathbf{A}^\top \mathbf{Z}^\top \mathbf{B}^\top$
$\text{Tr}(\mathbf{AZ}^{-1})$	$-(\mathbf{Z}^\top)^{-1} \mathbf{A}^\top (\mathbf{Z}^\top)^{-1}$	$\mathbf{0}$
$\text{Tr}(\mathbf{Z}^p)$	$p(\mathbf{Z}^\top)^{-1}$	$\mathbf{0}$
$\det(\mathbf{AZB})$	$\det(\mathbf{AZB}) \mathbf{A}^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{Z}^\top \mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{B}^\top$	$\mathbf{0}$
$\det(\mathbf{ZZ}^\top)$	$2 \det(\mathbf{ZZ}^\top) (\mathbf{ZZ}^{-1}) \mathbf{Z}$	$\mathbf{0}$
$\det(\mathbf{ZZ}^*)$	$\det(\mathbf{ZZ}^*) (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z}^\top)^{-1} \mathbf{Z}^H$	$\det(\mathbf{ZZ}^*) \mathbf{Z}^\top (\mathbf{Z}^H \mathbf{Z}^\top)^{-1}$
$\det(\mathbf{ZZ}^H)$	$\det(\mathbf{ZZ}^H) (\mathbf{Z}^* \mathbf{Z}^\top)^{-1} \mathbf{Z}^*$	$\det(\mathbf{ZZ}^H) (\mathbf{ZZ}^H)^{-1} \mathbf{Z}$
$\det(\mathbf{Z}^p)$	$r \det^p \mathbf{Z} (\mathbf{Z}^\top)^{-1}$	$\mathbf{0}$
$\lambda(\mathbf{Z})$	$\frac{v_0^* u_0^\dagger}{v_0^H u_0}$	$\mathbf{0}$
$\lambda^*(\mathbf{Z})$	$\mathbf{0}$	$\frac{v_0 u_0^H}{v_0^\top u_0^*}$

^{*} $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}}$ 代表 \mathbb{R} -导数，为一矩阵，维度与求导对象 \mathbf{Z} 相同。

[†] $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}^*}$ 代表 $\overline{\mathbb{R}}$ -导数，同上。

[‡] \mathbf{I} 均为方阵，因为对应的函数 f 要求变量为方阵。

[§] $\mathbf{0}$ 的各元素均为 0，但是不一定为方阵。

值得注意的是，根据定理3，如果函数 $f(z, \bar{z})$ 为 \mathbb{R} -可导，那么计算其 \mathbb{R} -导数时可以将 \bar{z} 视为与 z 无关的常量，按照一般的实函数导数公式进行求导，计算 $\overline{\mathbb{R}}$ -导数时类似。将这个结论推广到矩阵形式，结论依然成立，即计算 \mathbb{R} -导数时将矩阵 \mathbf{Z}^* 视为与 \mathbf{Z} 无关的常量，按照一般实函数的矩阵求导公式进行求解。这样，我们不需要额外构造常用复变函数的 \mathbb{R} -导数和 $\overline{\mathbb{R}}$ -导数表，通过现有的关于实数的矩阵导数表就可以推导出对应的复变函数的导数。以表B.1中的 $\text{Tr}(\mathbf{ZAZ}^* \mathbf{B})$ 为例，

举例 B.1 将 Z^* 视作常量, 根据 $\frac{\partial}{\partial Z} \text{Tr}(AZ) = A^T$, 有

$$\frac{\partial}{\partial Z} \text{Tr}(ZAZ^*B) = \frac{\partial}{\partial Z} \text{Tr}(AZ^*BZ) = (AZ^*B)^T = B^T Z^H A^T \quad (\text{B.1})$$

将 Z 视作常量, 根据 $\frac{\partial}{\partial Z^*} \text{Tr}(Z^H A) = A$ 即 $\frac{\partial}{\partial Z^*} \text{Tr}(A^T Z^*) = A$, 有

$$\frac{\partial}{\partial Z^*} \text{Tr}(ZAZ^*B) = \frac{\partial}{\partial Z^*} \text{Tr}(BZAZ^*) = (BZA)^T = A^T Z^T B^T \quad (\text{B.2})$$

表B.1中给出的结论与现有的结果完全相符[71], 但是[71]中的推导十分繁琐, 本节通过将复数矩阵导数转化为实数矩阵导数, 可以使得问题大大简化。

致 谢

首先我要感谢我的导师高西奇教授。高老师渊博的学识，严谨的治学态度令人敬佩。还记得一次次组会上当大家遇到无法解决的难题时，高老师简洁的看法却能拨开云雾直接点明问题的本质，总是让我有豁然开朗的感觉，每一次讨论会过后，都让我对移动通信系统都会有新的认识。还记得平时简短的谈心，高老师是怎样孜孜不倦的教导我如何做人、做学问。还记得高老师是怎样为我提供宽松的研究环境和中肯的指导意见，一字一句认真批改我的论文……这些不仅成为了我美好的回忆，而且将成为我一笔宝贵的人生财富，令我受益终身。

其次，我要感谢张源老师。张老师虽然没有直接指导过我的毕业论文，但是他教我的那些做学问的方法，令我十分受益。书籍是人类进步的阶梯，张老师推荐的那一本本好书，一篇篇优秀论文令我的学习事半功倍。在我陷入低潮和迷茫时，张老师的悉心开导如一盏明灯指引我前行的方向。

此外，还要感谢江彬、李潇两位博士在我科研过程中给予的帮助，他们扎实的理论功底令人印象深刻。感谢研究同一方向的丁律博士对论文提出的宝贵意见。感谢巴特尔、梁霄、赵嘉宁等老师和王闻今、程远、刘锐、邓卫华等博士在我学习、生活及工作上的指导和帮助。感谢同一课题组的赵唯、王珏、韩芸芸、向星宇、褚鹏鸿等同学为我提供了许多解决难题的思路和建议。

最后，感谢我的父母，他们在物质和精神上的全面支持和鼓励是我完成学业的最大动力！

参考文献

- [1] J. Winters. On the Capacity of Radio Communication Systems with Diversity in a Rayleigh Fading Environment[J/OL]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 5(5):871–878, Jun 1987.
- [2] I. E. Telatar. Capacity of Multi-Antenna Gaussian Channels[J/OL]. *European Transactions on Telecommunications*, 10(6):585–595, 1999.
- [3] G. J. Foschini. Layered Space-Time Architecture for Wireless Communication in a Fading Environment When Using Multiple Antennas[J/OL]. *Bell Labs Technical Journal*, 1(2):41–59, 1996.
- [4] 3GPP TS 36.211 v8.4.0: Physical Channels and Modulation (Release 8)[S]. September 2008.
- [5] IEEE-SA Standard Board. IEEE Standard for Local and Metropolitan Area Networks Part 16: Air Interface for Fixed and Mobile Broadband Wireless Access Systems Amendment for Physical and Medium Access Control Layers for Combined Fixed and Mobile Operation in Licensed Bands, IEEE Std 802.16e-2005[S]. Feb. 2006.
- [6] T. K. Paul and T. Ogunfunmi. Wireless LAN Comes of Age: Understanding the IEEE 802.11n Amendment[J/OL]. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 8(1):28–54, First Quarter 2008.
- [7] Xiantao Sun, L. J. Cimini, L. J. Greenstein, D. S. Chan, and B. Douglas. Performance Evaluation of Quantized Feedback Beamforming in IEEE 802.11n Wireless Networks[C/OL]. In *Proc. 41st Annual Conference on Information Sciences and Systems CISS '07*, pages 884–888, 14–16 March 2007.
- [8] 3rd Generation Partnership Project 2[S/OL]. <http://www.3gpp2.org>.
- [9] IEEE-SA Standards Board. IEEE 802.16 Task Group m[S/OL], <http://wirelessman.org/tgm/>.
- [10] A. Goldsmith, S. A. Jafar, N. Jindal, and S. Vishwanath. Capacity Limits of MIMO Channels[J/OL]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 21(5):684–702, June 2003.
- [11] E. Visotsky and U. Madhow. Space-Time Transmit Precoding with Imperfect Feedback[J/OL]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(6):2632–2639, Sept. 2001.
- [12] A. Narula, M. J. Lopez, M. D. Trott, and G. W. Wornell. Efficient Use of Side Information in Multiple-Antenna Data Transmission over Fading Channels[J/OL]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 16(8):1423–1436, Oct. 1998.

- [13] R. S. Blum. MIMO with Limited Feedback of Channel State Information[C/OL]. In *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '03)*, volume 4, pages IV-89-92, 6-10 April 2003.
- [14] W. Santipach and M. L. Honig. Asymptotic Performance of MIMO Wireless Channels with Limited Feedback[C/OL]. In *Proc. IEEE Military Communications Conference MILCOM 2003*, volume 1, pages 141-146, 13-16 Oct. 2003.
- [15] A. Goldsmith. *Wireless Communications*[M]. Cambridge University Press, 2005.
- [16] D. Gerlach and A. Paulraj. Adaptive Transmitting Antenna Arrays with Feedback[J/OL]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1(10):150-152, Oct. 1994.
- [17] D. J. Love and R. W. Heath Jr. Grassmannian Precoding for Spatial Multiplexing Systems[C/OL]. *Proc. Allerton Conf. Commun., Control, and Comp*, 2003.
- [18] D. J. Love and Jr. Heath, R. W. Equal Gain Transmission in Multiple-Input Multiple-Output Wireless Systems[J/OL]. *IEEE Transactions on Communications*, 51(7):1102-1110, July 2003.
- [19] S. Zhou, Z. Wang, and G.B. Giannakis. Performance Analysis for Transmit-Beamforming with Finite-Rate Feedback[C/OL]. *Proc. Conf. on Inform. Sciences and Systems*, 2004.
- [20] Pengfei Xia, Shengli Zhou, and G.B. Giannakis. Multiantenna Adaptive Modulation with Beamforming Based on Bandwidth-Constrained Feedback[J/OL]. *IEEE Transactions on Communications*, 53(3):526-536, 2005.
- [21] S. Thoen, L. Van der Perre, B. Gyselinckx, and M. Engels. Performance Analysis of Combined Transmit-SC/Receive-MRC[J/OL]. *IEEE Transactions on Communications*, 49(1):5-8, Jan. 2001.
- [22] K. K. Mukkavilli, A. Sabharwal, E. Erkip, and B. Aazhang. On Beamforming with Finite Rate Feedback in Multiple-Antenna Systems[J/OL]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(10):2562-2579, Oct. 2003.
- [23] D. J. Love, Jr. Heath, R. W., and T. Strohmer. Grassmannian Beamforming for Multiple-Input Multiple-Output Wireless Systems[J/OL]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(10):2735-2747, Oct. 2003.
- [24] T. Strohmer and R. W. Heath. Grassmannian Frames with Applications to Coding and Communication[J/OL]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 14(3):257-275, 2003.
- [25] P. Xia, S. Zhou, and G. B. Giannakis. Achieving the Welch Bound with Difference Sets[J/OL]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(5):1900-1907, May 2005.
- [26] N. J. A. Sloane. How to Pack Lines, Planes, 3-Spaces, Etc.[R/OL], <http://www.research.att.com/~njas/grass/index.html>.
- [27] D. Agrawal, T. J. Richardson, and R. L. Urbanke. Multiple-Antenna Signal Constellations for Fading Channels[J/OL]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(6):2618-2626, Sept. 2001.

- [28] J. C. Roh and B. D. Rao. Transmit Beamforming in Multiple-Antenna Systems with Finite Rate Feedback: a VQ-Based Approach[J/OL]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(3):1101–1112, March 2006.
- [29] Pengfei Xia and G.B. Giannakis. Design and Analysis of Transmit-Beamforming Based on Limited-Rate Feedback[J/OL]. *IEEE Transactions on Signal Processing [see also IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing]*, 54(5):1853–1863, 2006.
- [30] W. Santipach and M. L. Honig. Achievable Rates for MIMO Fading Channels with Limited Feedback[C/OL]. In *Proc. IEEE Eighth International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications*, pages 1–6, 30 Aug.–2 Sept. 2004.
- [31] D. J. Love and R. W. Heath. Limited Feedback Unitary Precoding for Spatial Multiplexing Systems[J/OL]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(8):2967–2976, Aug. 2005.
- [32] D. J. Ryan, I. Vaughan, L. Clarkson, I. B. Collings, Dongning Guo, and M. L. Honig. QAM Codebooks for Low-Complexity Limited Feedback MIMO Beamforming[C/OL]. In *Proc. IEEE International Conference on Communications ICC '07*, pages 4162–4167, 24–28 June 2007.
- [33] T. Inoue and R. W. Heath. Kerdock Codes for Limited Feedback MIMO Systems[C/OL]. In *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP 2008*, pages 3113–3116, March 31 2008–April 4 2008.
- [34] A. F. Molisch and M. Z. Win. MIMO Systems With Antenna Selection[J/OL]. *IEEE Microwave Magazine*, 5(1):46–56, Mar 2004.
- [35] S. Ekbatani, F. Etemadi, and H. Jafarkhani. Outage Behavior of Quasi-Static Fading Channels with Partial Power Control and Noisy Feedback[C/OL]. In *Proc. IEEE Global Telecommunications Conference GLOBECOM '07*, pages 1556–1560, 26–30 Nov. 2007.
- [36] June Chul Roh and B. D. Rao. Efficient Feedback Methods for MIMO Channels Based on Parameterization[J/OL]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 6(1):282–292, Jan. 2007.
- [37] B. C. Banister and J. R. Zeidler. Feedback Assisted Transmission Subspace Tracking for MIMO Systems[J/OL]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 21(3):452–463, April 2003.
- [38] C. Simon and G. Leus. Feedback Reduction for Spatial Multiplexing with Linear Precoding[C/OL]. In *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP 2007*, volume 3, pages III–33–III–36, 15–20 April 2007.
- [39] Kaibin Huang, R. W. Heath, and J. G. Andrews. Limited Feedback Beamforming Over Temporally-Correlated Channels[R/OL]. *Submitted to the IEEE Transactions on Signal Processing*.
- [40] Kaibin Huang, B. Mondal, R. W. Heath, and J. G. Andrews. WLC38-5: Multi-Antenna Limited Feedback for Temporally-Correlated Channels: Feedback Compression[C/OL]. In *Proc. IEEE Global Telecommunications Conference GLOBECOM '06*, pages 1–5, Nov. 27 2006–Dec. 1 2006.

- [41] Kaibin Huang, B. Mondal, R. W. Heath, and J. G. Andrews. Markov Models for Limited Feedback MIMO Systems[C/OL]. In *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP 2006*, volume 4, pages IV–IV, 14–19 May 2006.
- [42] D. J. Love and R. W. Heath, Jr. Limited Feedback Diversity Techniques for Correlated Channels[J/OL]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 55(2):718–722, March 2006.
- [43] V. Raghavan, R. W. Heath, and A. V. Sayeed M. Systematic Codebook Designs for Quantized Beamforming in Correlated MIMO Channels[J/OL]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 25(7):1298–1310, September 2007.
- [44] V. Raghavan, A. M. Sayeed, and V. V. Veeravalli. Low-Complexity Structured Precoding for Spatially Correlated MIMO Channels[R/OL]. Under review, 2008.
- [45] A. Paulraj, R. Nabar, and D. Gore. *Introduction to Space-Time Wireless Communications*[M]. Cambridge University Press, 2003.
- [46] Hong Shen Wang and N. Moayeri. Finite-State Markov Channel—A Useful Model for Radio Communication Channels[J/OL]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 44(1):163–171, 1995.
- [47] C. C. Tan and N. C. Beaulieu. On First-Order Markov Modeling for the Rayleigh Fading Channel[J/OL]. *IEEE Transactions on Communications*, 48(12):2032–2040, Dec. 2000.
- [48] W. Turin. MAP Symbol Decoding in Channels with Error Bursts[J/OL]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(5):1832–1838, July 2001.
- [49] Jungnam Yun and M. Kavehrad. Markov Error Structure for Throughput Analysis of Adaptive Modulation Systems Combined with ARQ over Correlated Fading Channels[J/OL]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 54(1):235–245, Jan. 2005.
- [50] L. Li and A. J. Goldsmith. Low-Complexity Maximum-Likelihood Detection of Coded Signals Sent over Finite-State Markov Channels[J/OL]. *IEEE Transactions on Communications*, 50(4):524–531, 2002.
- [51] D. P. McNamara, M. A. Beach, and P. N. Fletcher. Spatial Correlation in Indoor MIMO Channels[C/OL]. In *Proc. 13th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, volume 1, pages 290–294, 15–18 Sept. 2002.
- [52] H. Özcelik, M. Herdin, W. Weichselberger, J. Wallace, and E. Bonek. Deficiencies of ‘Kronecker’ MIMO Radio Channel Model[J/OL]. *Electronics Letters*, 39(16):1209–1210, 7 Aug. 2003.
- [53] J. H. Kotecha and A. M. Sayeed. Canonical Statistical Modeling and Capacity Analysis of Correlated MIMO Fading Channels[R/OL]. *Submitted to the IEEE Transactions Wireless Communications*, 2004.
- [54] M. Özcelik, N. Czinik, and E. Bonek. What Makes a Good MIMO Channel Model?[C/OL] In *Proc. VTC 2005-Spring Vehicular Technology Conference 2005 IEEE 61st*, volume 1, pages 156–160, 30 May–1 June 2005.

- [55] W. Weichselberger, M. Herdin, H. Özcelik, and E. Bonek. A Stochastic MIMO Channel Model with Joint Correlation of Both Link ends[J/OL]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 5(1):90–100, Jan. 2006.
- [56] A. M. Sayeed. Deconstructing Multiantenna Fading Channels[J/OL]. *IEEE Transactions on Signal Processing*[see also *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*], 50(10):2563–2579, 2002.
- [57] S. Lloyd. Least Squares Quantization in PCM[J/OL]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(2):129–137, Mar 1982.
- [58] Allen. Gersho and R. M. Gray. *Vector Quantization and Signal Compression*[M]. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [59] J. H. Conway, R. H. Hardin, and N. J. A. Sloane. Packing Lines, Planes, etc...: Packing in Grassmannian Spaces[J/OL]. *Experimental Mathematics*, 5(2):139–159, 1996.
- [60] P. W. Shor and N. J. A. Sloane. A Family of Optimal Packings in Grassmannian Manifolds[J/OL]. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 7(2):157–163, 1998.
- [61] A. Barg and D. Yu. Nogin. Bounds on Packings of Spheres in the Grassmann Manifold[J/OL]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 48(9):2450–2454, 2002.
- [62] D. S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*[M]. John Wiley & Sons, Inc. New York, NY, USA, 1991.
- [63] D. J. Love and Jr. Heath, R. W. Multimode Precoding for MIMO Wireless Systems[J/OL]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(10):3674–3687, Oct. 2005.
- [64] B. Mondal, S. Dutta, and R. W. Heath. Quantization on the Grassmann Manifold[J/OL]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(8):4208–4216, Aug. 2007.
- [65] J. C. Roh and B. D. Rao. Design and Analysis of MIMO Spatial Multiplexing Systems with Quantized Feedback[J/OL]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(8):2874–2886, Aug. 2006.
- [66] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*[M]. Prentice Hall, 2001.
- [67] K. E. Baddour and N. C. Beaulieu. Autoregressive Modeling for Fading Channel Simulation[J/OL]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 4(4):1650–1662, July 2005.
- [68] V. Raghavan, V. V. Veeravalli, and A. M. Sayeed. Quantized Multimode Precoding in Spatially Correlated Multiantenna Channels[J/OL]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(12):6017–6030, Dec. 2008.
- [69] R. Remmert. *Theory of Complex Functions*[M]. Springer-Verlag, 1991.
- [70] D. H. Brandwood. A Complex Gradient Operator and its Application in Adaptive Array Theory[J/OL]. *IEE Proceedings H (Microwaves, Optics, and Antennas)*, 130(1):11–16, February 1983.
- [71] A. Hjørungnes and D. Gesbert. Complex-Valued Matrix Differentiation: Techniques and Key Results[J/OL]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(6):2740–2746, June 2007.