第二章 控制系统的数学模型

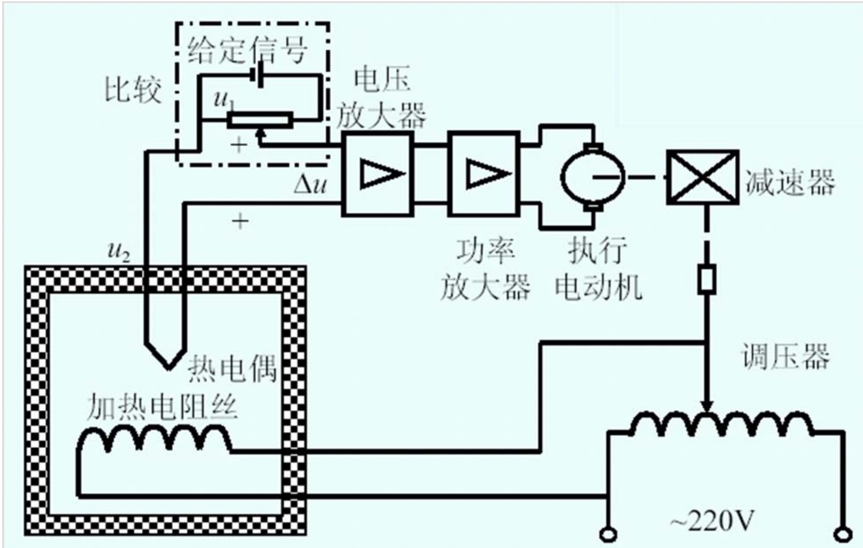
基本内容

- 控制系统的基本模型
- 微分方程
- 传递函数
- 控制系统的方框图
- 信号流图

基本要求

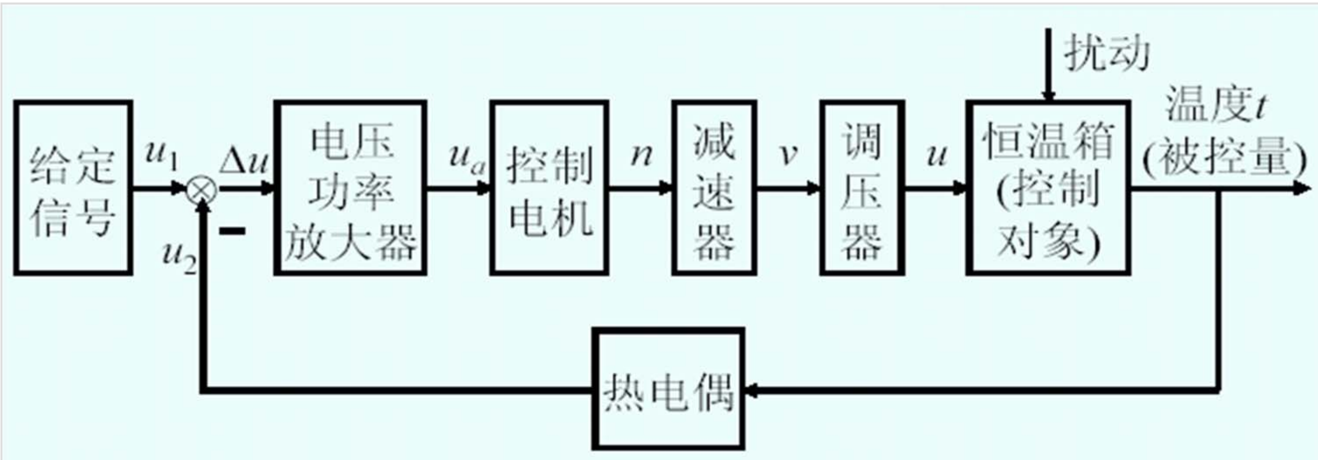
- 掌握微分方程列写的基本方法
- 掌握拉氏变换基本定理和常用拉氏变换表
- 重点掌握典型环节传递函数和闭环传递函数的求法
- 梅逊公式的应用

2.0 温故而知新



系统示意图

系统框图



2.1 数 学模 型

- 定义： 描述系统输入量、输出量以及内部各物理量之间动态关系的数学表达式

- 表示方式:

  1. 输入-输出描述（外部描述）

     微（差）分方程、传递函数

  2. 状态变量描述（内部描述）

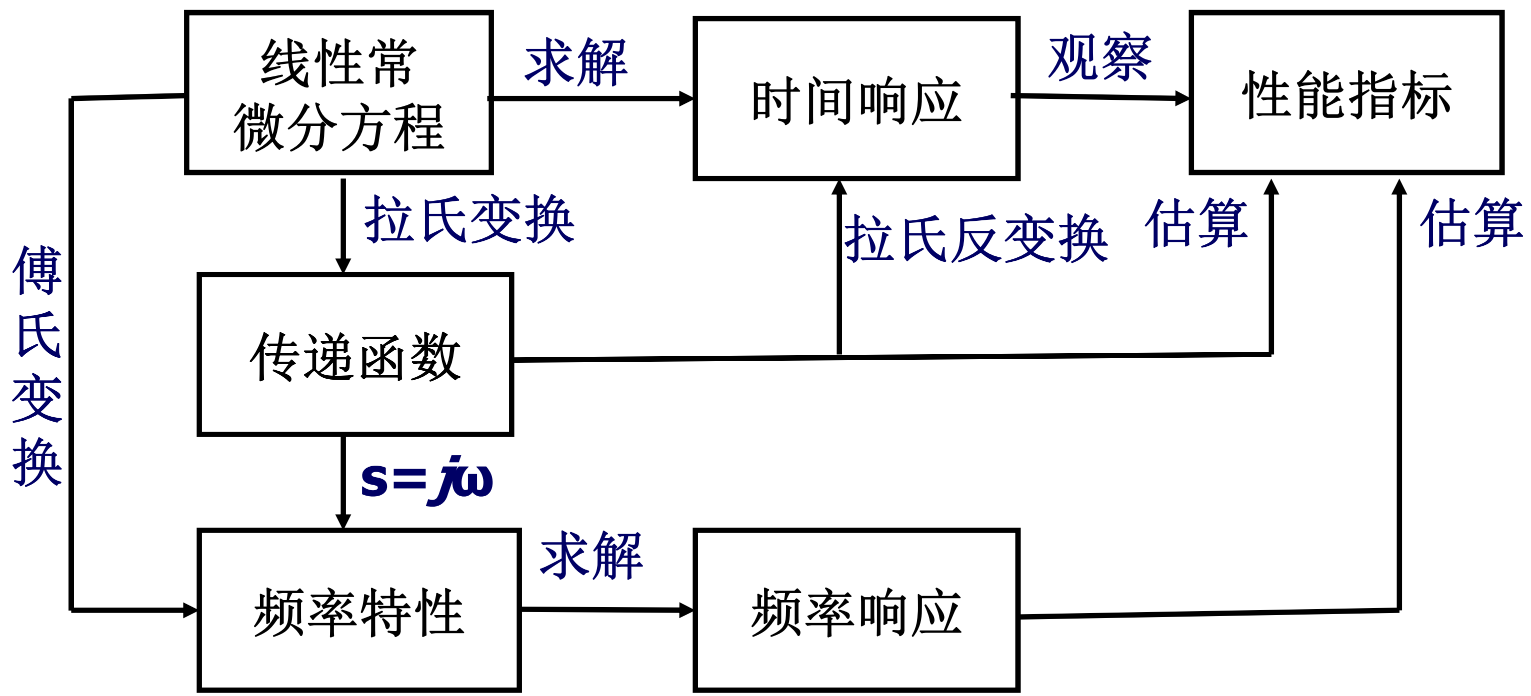
  3. 方框图

- 建立方法：

    1. 机理分析法

    2. 实验辨识法

- 求取性能指标的主要途径



2.2 傅氏变换与拉氏变换

- Fourier变换及其反变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- Laplace变换及其反变换

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

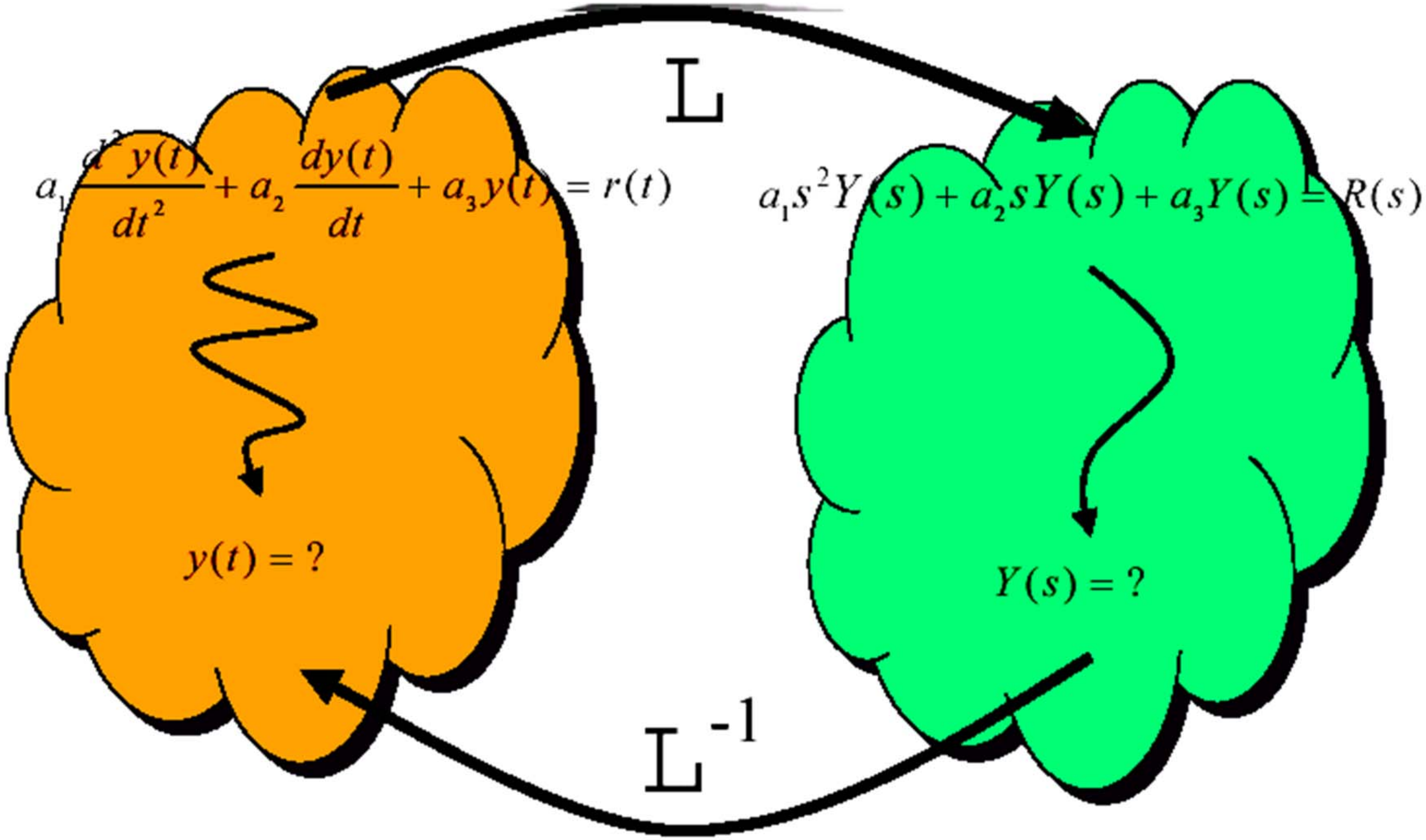
$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

• 拉普拉斯变换对照表

Itern no	$f(t)$	$F(s)$
1.	单位脉冲$\delta(t)$	1
2.	单位阶跃$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

- 拉普拉斯变换的定理

Item no.	Theorem		Name
1.	$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$	$= \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definition
2.	$\mathscr{L}[kf(t)]$	$= kF(s)$	Linearity theorem
3.	$\mathscr{L}[f_1(t) + f_2(t)]$	$= F_1(s) + F_2(s)$	Linearity theorem
4.	$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)]$	$= F(s+a)$	Frequency shift theorem
5.	$\mathscr{L}[f(t-T)]$	$= e^{-sT}F(s)$	Time shift theorem
6.	$\mathscr{L}[f(at)]$	$= \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Scaling theorem
7.	$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right]$	$= sF(s) - f(0-)$	Differentiation theorem
8.	$\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right]$	$= s^2F(s) - sf(0-) - \dot{f}(0-)$	Differentiation theorem
9.	$\mathscr{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right]$	$= s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Differentiation theorem
10.	$\mathscr{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau\right]$	$= \frac{F(s)}{s}$	Integration theorem
11.	$f(\infty)$	$= \lim_{s\to 0} sF(s)$	Final value theorem[1]
12.	$f(0+)$	$= \lim_{s\to\infty} sF(s)$	Initial value theorem[2]



L
$a_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_3 y(t) = r(t)$
$a_1 s^2 Y(s) + a_2 sY(s) + a_3 Y(s) = R(s)$
$y(t) = ?$
$Y(s) = ?$
L^{-1}

例2.1

解方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y=6,$

其中$\dot{y}(0)=2, y(0)=2$

$$Y(s)=\frac{2s^2+12s+6}{s(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s}+\frac{5}{s+2}-\frac{4}{s+3}$$

$$y(t)=1+5e^{-2t}-4e^{-3t}$$

2.3 线性系统的微分方程

- 建立系统输入-输出微分方程一般步骤

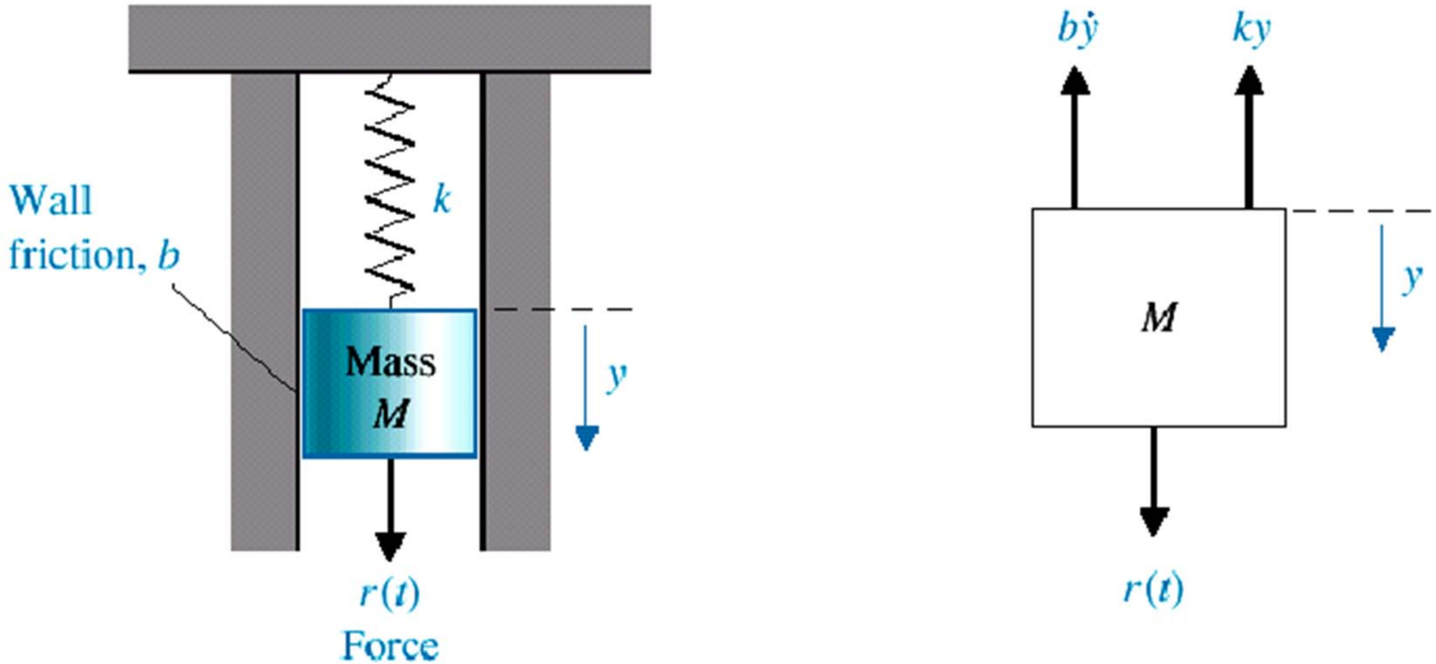
  1. 确定系统的输入量、输出量

  2. 提出合乎实际的简化系统的假定

  3. 根据机理列出描述系统运动规律的一组微分方程

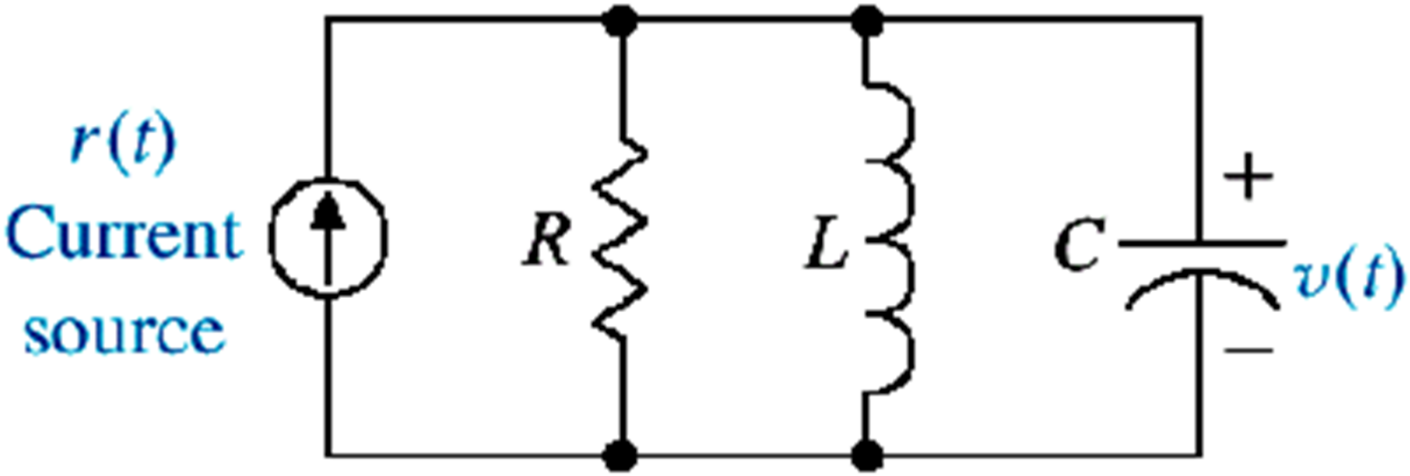
  4. 消去中间变量，求出描述系统输入与输出关系的微分方程

例2.2 质量-弹簧阻尼系统



$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=r(t)$$

例2.3 RCL并联电路



$$\frac{v(t)}{R}+C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt=r(t)$$

- 质量-弹簧阻尼系统

$$y(t) = K_1 e^{-a_1 t} \sin(\beta_1 t + \theta_1)$$

- **RCL**并联电路

$$y(t) = K_2 e^{-a_2 t} \cos(\beta_2 t + \theta_2)$$

- 相似系统

弹簧阻尼系统	机械系统	电系统
力 **F**	转矩 **T**	电压 **u**
质量 **m**	转动惯量 **J**	电感 **L**
粘性摩擦系数 **k**	粘性摩擦系数 **f**	电阻 **R**
弹簧系数 **k**	扭转系数 **k**	电容的倒数 **1/C**
位移 **y**	角位移 **θ**	电荷 **q**
速度 **v**	角速度 **ω**	电流 **i**

2.4 非线性系统的线性化

- 叠加性和均匀性

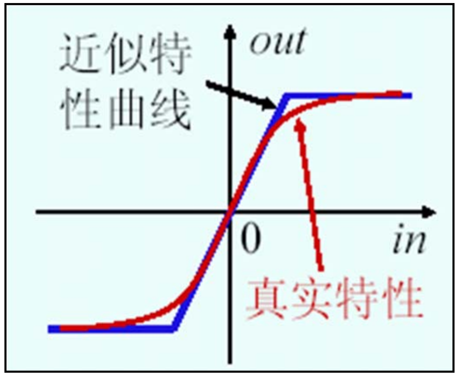
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

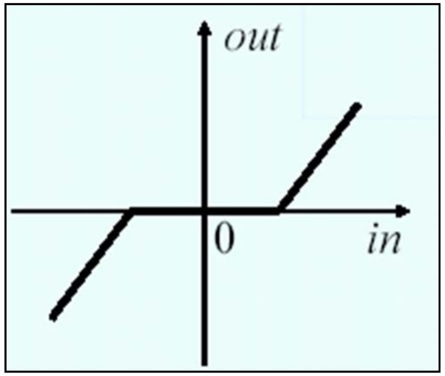
不满足以上条件的方程，就成为非线性方程。

- 常见非线性情况

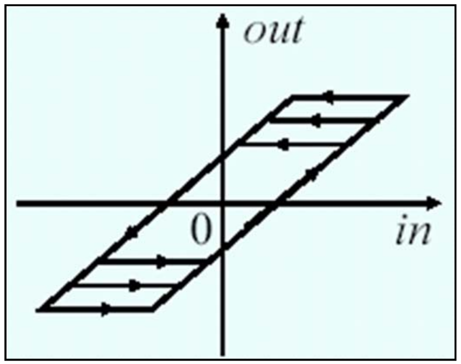
饱和非线性



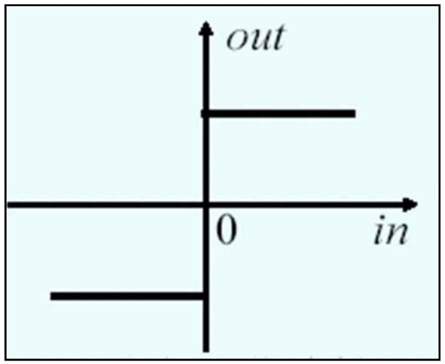
死区非线性



间隙非线性



继电器非线性



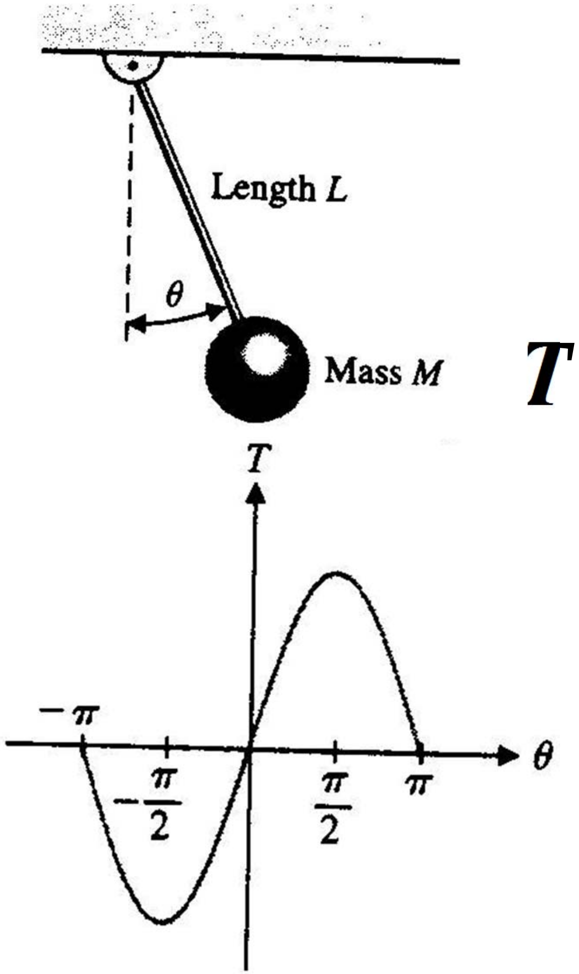
- 泰勒展开

$$y = g(x)$$

$$= g(x_0) + \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)}{1!} + \left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots$$

$$\Delta y = m \Delta x$$

例2.4 单摆系统



$$T = MgL\sin\theta$$

$$T - T_0 \cong MgL\frac{\partial \sin\theta}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\theta_0}(\theta - \theta_0)$$

$$T = MgL(\cos 0^o)(\theta - 0^o)$$

$$= MgL\theta$$

- 处理线性化应注意的问题

1. 线性化是相对某一额定工作点的
2. 当输入量变化范围较大时，势必引入较大的误差，应注意它的条件
3. 若非线性系统是不连续的，则不能采用上述线性化方法
4. 线性化之后得到的是增量方程，可认为其初始条件为零

2.5 线性系统的传递函数

- 定义：在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比

$$a_0 \overset{(n)}{c}(t) + a_1 \overset{(n-1)}{c}(t) + \cdots + a_{n-1}\dot{c}(t) + a_n c(t)$$

$$= b_0 \overset{(m)}{r}(t) + b_1 \overset{(m-1)}{r}(t) + \cdots + b_{m-1}\dot{r}(t) + b_m r(t)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

- 传递函数的极点和零点

$$G(s)=\frac{b_0(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{a_0(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

- 传递函数的说明

  1. 传递函数的概念只适用于线性定常系统

  2. 传递函数是系统本身的属性

  3. 传递函数包含联系输入量与输出量所必需的单位，但它不提供有关系统物理结构的任何信息

  4. 如果系统的传递函数已知，则可以针对不同形式的输入量来研究系统的输出

  5. 如果不知道系统的函数，则可通过引入已知输入量并研究系统输出量的实验方法，确定系统的传递函数

- 传递函数的优点

1. 比微分方程简单

2. 当输入$r(t)=\delta(t)$时，单位脉冲函数$R(s)=1$，其输出$C(s)=G(s)$

3. 令传递函数中的$s=j\omega$，则系统可在频率域内分析

4. $G(s)$的零极点分布决定系统响应过渡过程

2.6 典型环节的传递函数

比例因子　一阶微分因子　二阶微分因子　延迟环节

$$G(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{b}(\tau_i s+1)\prod_{l=1}^{c}(\tau_l^2 s^2+2\zeta_l\tau_l s+1)}{s^v\prod_{j=1}^{d}(T_j s+1)\prod_{k=1}^{e}(T_k^2 s^2+2\zeta_k T_k s+1)}$$

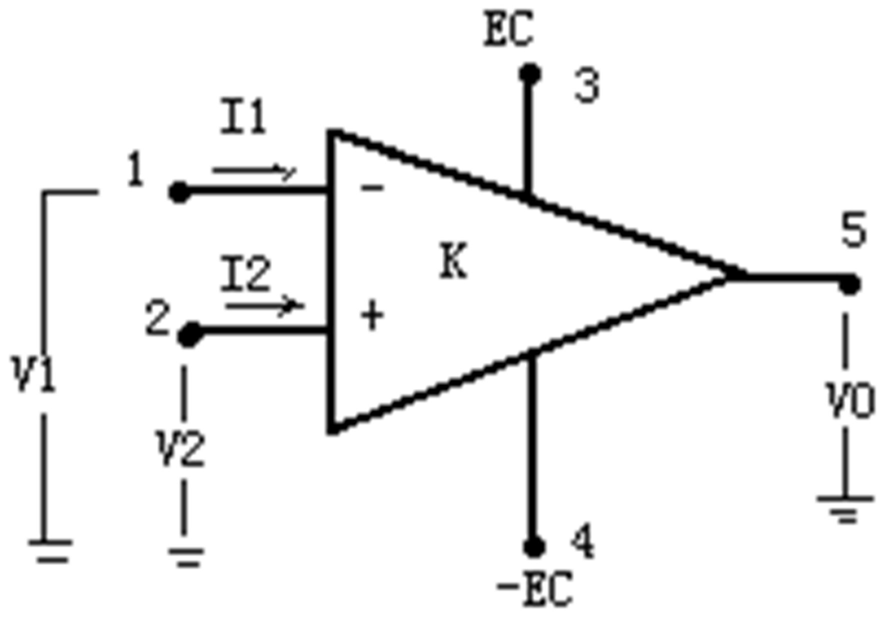
$e^{-\tau s}$

s

积分因子　惯性因子　振荡因子　纯微分环节

$$K=\frac{b_0}{a_0}\cdot\prod_{i=1}^{b}\frac{1}{\tau_i}\cdot\prod_{l=1}^{c}\frac{1}{\tau_l^2}\cdot\prod_{j=1}^{d}T_j\cdot\prod_{k=1}^{e}T_k^2$$

- 理想运算放大器



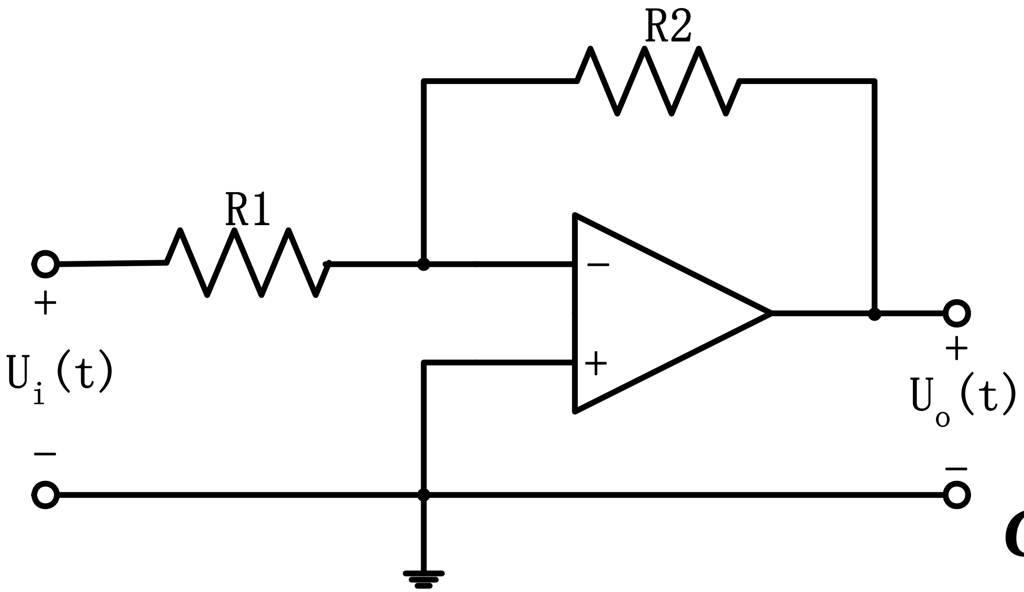
图YF

特性：
1. 输入阻抗为**∞**
2. 增益为**∞**

推导：
1. I1=I2=0
2. V1=V2

- 比例环节（放大环节）

$$c(t) = Kr(t) \qquad G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K$$



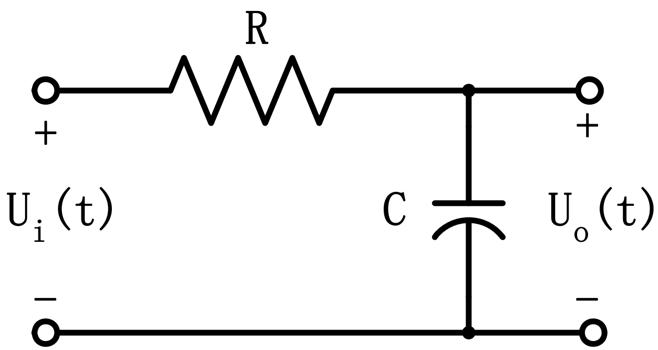
$$u_0(t) = -\frac{R_2}{R_1} u_i(t)$$

$$U_0(s) = -\frac{R_2}{R_1} U_i(s)$$

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1} = K$$

- 惯性环节

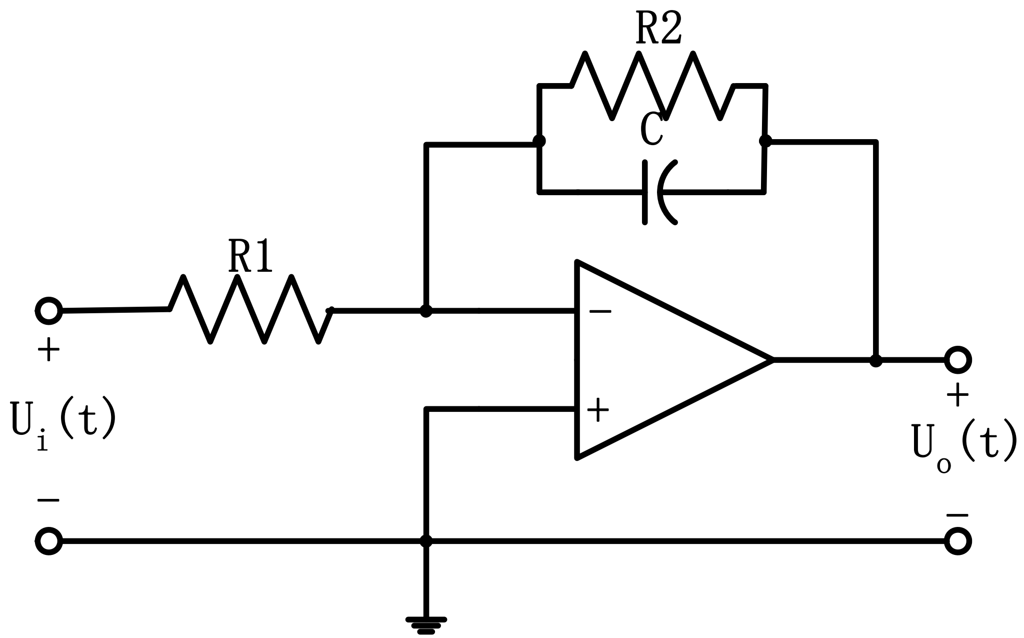
$$\tau\frac{d}{dt}c(t)+c(t)=Kr(t)\qquad G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{\tau s+1}$$



$$\begin{cases}U_i(s)=I(s)R+\dfrac{1}{Cs}I(s)\\ U_o(s)=\dfrac{1}{Cs}I(s)\end{cases}$$

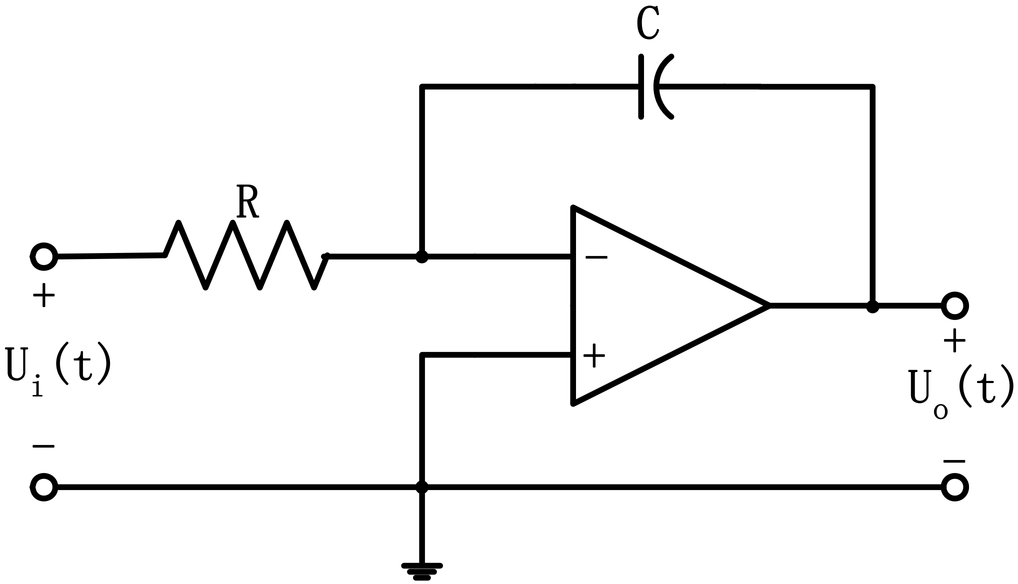
$$\begin{cases}u_i(t)=i(t)R+\dfrac{1}{C}\int i(t)dt\\ u_o(t)=\dfrac{1}{C}\int i(t)dt\end{cases}$$

$$G(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{1}{RCs+1}$$


R2
C
R1
+
$U_i(t)$
−
+
$U_o(t)$
−

- 积分环节

$$c(t) = K\int r(t)dt \qquad G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s}$$



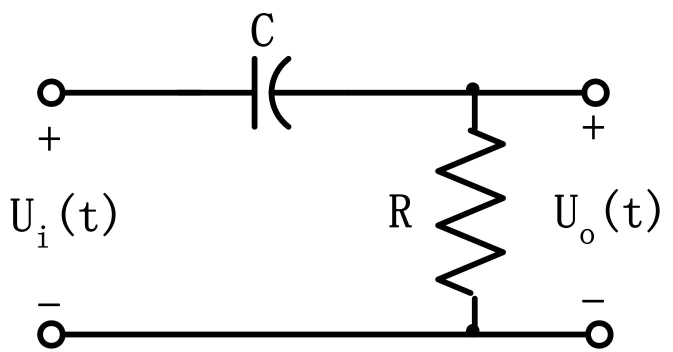
$$\frac{u_i(t)}{R} = -C\frac{du_o(t)}{dt}$$

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{1}{RCs}$$

- 微分环节

$$c(t)=\tau\frac{d}{dt}r(t)$$

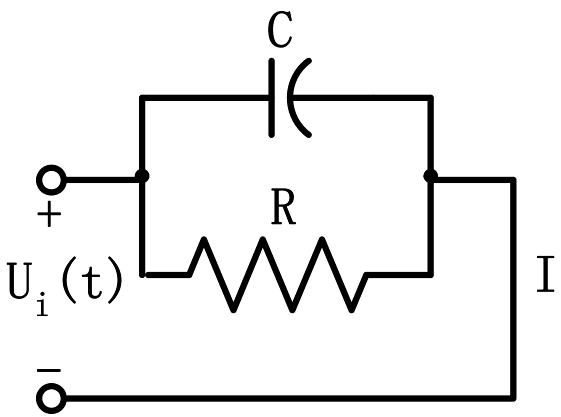
$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\tau s$$



$$\begin{cases} u_i(t)=i(t)R+\dfrac{1}{C}\int i(t)dt \\ u_o(t)=i(t)R \end{cases}$$

相当于一个微分环节和一个惯性环节的串联

$$G(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{RCs}{RCs+1}$$



一个比例环节和一个微分环节的并联。

$$G(s)=\frac{I(s)}{U(s)}=\frac{1}{R}(RCs+1)$$

一阶比例微分环节

- 振荡环节

$$\tau^2 \frac{d^2}{dt^2} c(t) + 2\zeta\tau \frac{d}{dt} c(t) + c(t) = Kr(t)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

对于单位阶跃输入***r(t)=1(t)***，令***K*=1**

$$C(s)=\frac{1}{s(\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1)}$$

令 $\omega_n=\frac{1}{\tau}$

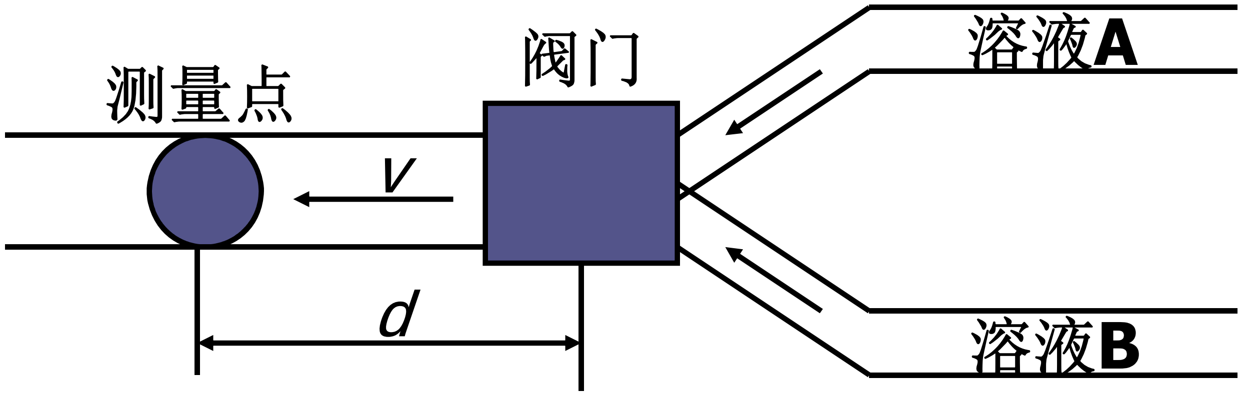
$$=\frac{\omega_n{}^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2)}$$

无阻尼自然振荡频率

$$c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\cos^{-1}\zeta)$$

阻尼自然振荡

- 纯滞后环节

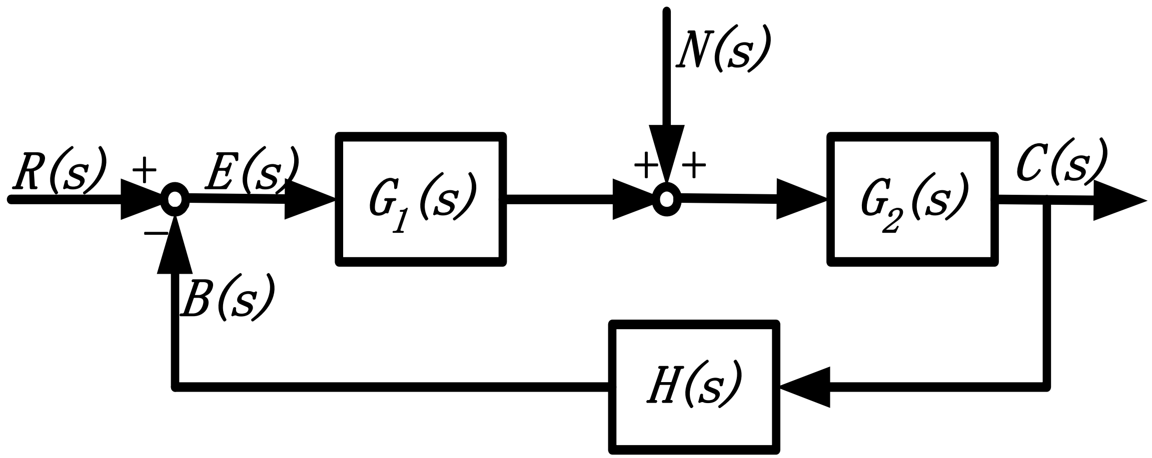


$$c(t) = r(t-\tau)$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}$$

2.7 方块图

- —— 是系统中各个环节的函数功能和信号流向的图形表示，由函数方块、信号引出点、信号相加点及具有方向的信号线组成。



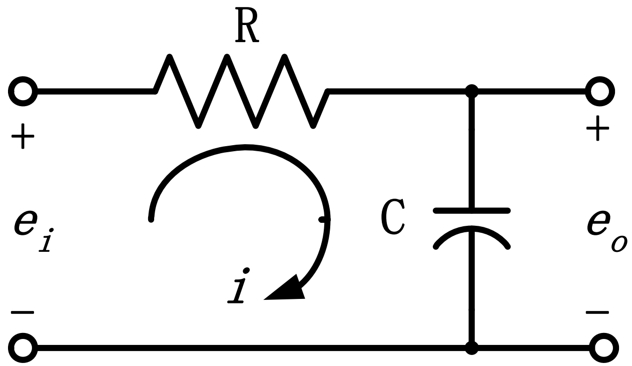
- 系统方块图的绘制步骤

  1. 考虑负载效应，分别列写系统各部件（环节）的微分方程

  2. 写出各元部件的传递函数，并将它们用方块表示，得到函数的方块

  3. 根据各元部件的信号流向，把各函数方块用信号线依次连接起来

- 例2.5 RC电路的方块图



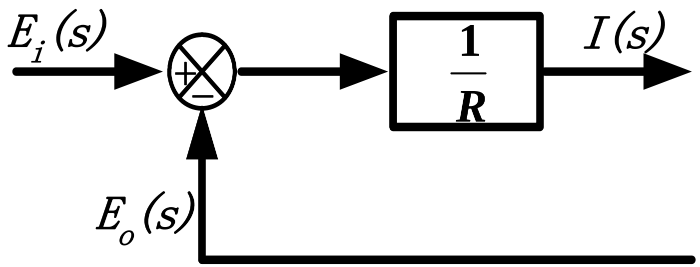
$$i=\frac{e_i-e_o}{R}$$

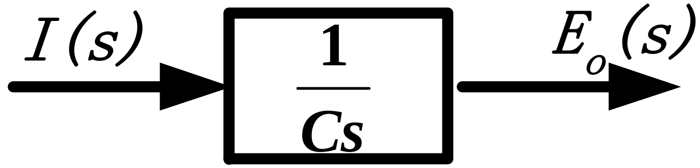
$$e_o=\frac{\int i\,dt}{C}$$

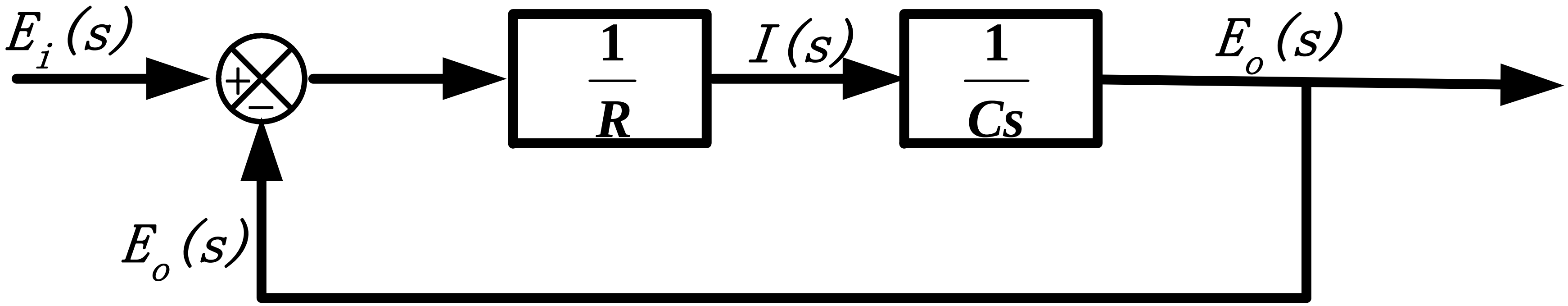
$$\xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$I(s)=\frac{E_i(s)-E_o(s)}{R}$$

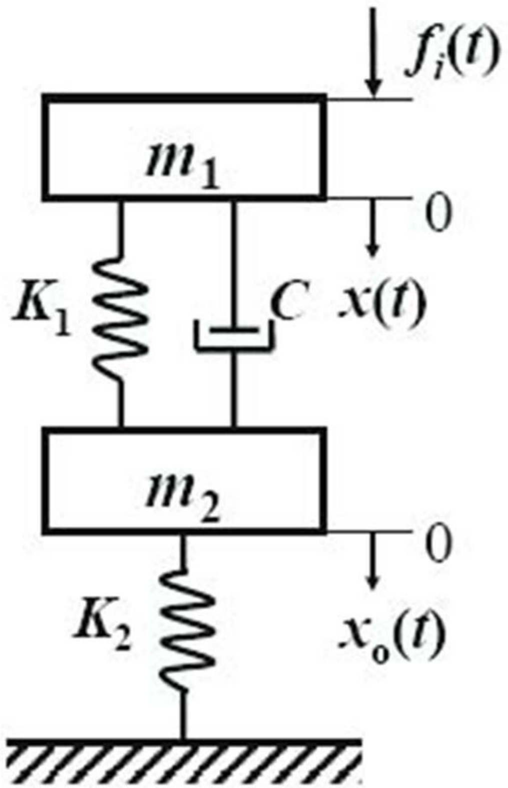
$$E_o(s)=\frac{I(s)}{Cs}$$

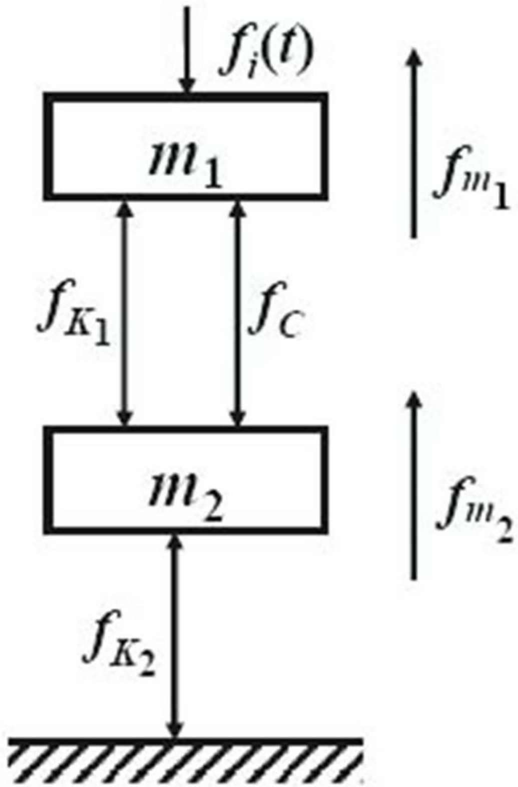

$E_i(s)$
$\frac{1}{R}$
$I(s)$
$E_o(s)$

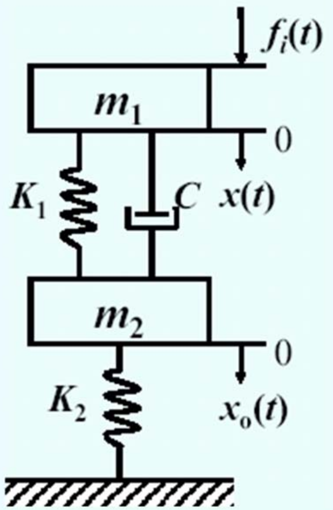

$I(s)$
$\frac{1}{Cs}$
$E_o(s)$


$E_i(s)$
$\frac{1}{R}$
$I(s)$
$\frac{1}{Cs}$
$E_o(s)$
$E_o(s)$

- 例2.6 机械系统







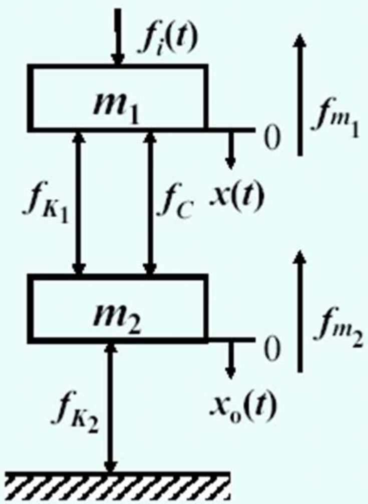
$$m_1\ddot{x}(t) = f_i(t) - f_C(t) - f_{K_1}(t)$$

$$f_{K_1}(t) = K_1\left[x(t) - x_o(t)\right]$$

$$f_C(t) = C\left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx_o(t)}{dt}\right)$$

$$m_2\ddot{x}_o(t) = f_{K_1}(t) + f_C(t) - f_{K_2}(t)$$

$$f_{K_2}(t) = K_2 x_o(t)$$



$$X(s) = \frac{1}{m_1 s^2}\left[F_i(s) - F_C(s) - F_{K_1}(s)\right]$$

$$F_{K_1}(s) = K_1\left[X(s) - X_o(s)\right]$$

$$F_C(s) = Cs\left[X(s) - X_o(s)\right]$$

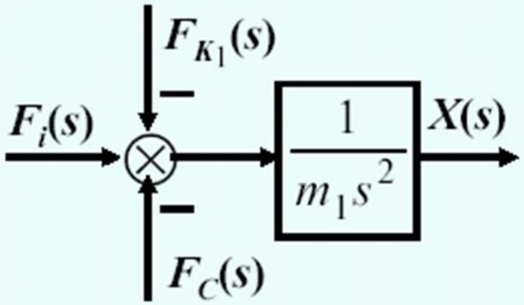
$$X_o(s) = \frac{1}{m_2 s^2}\left[F_{K_1}(s) + F_C(s) - F_{K_2}(s)\right]$$

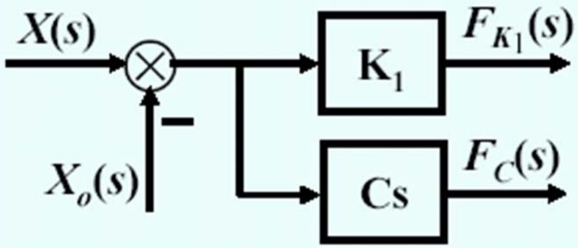
$$F_{K_2}(s) = K_2 X_o(s)$$

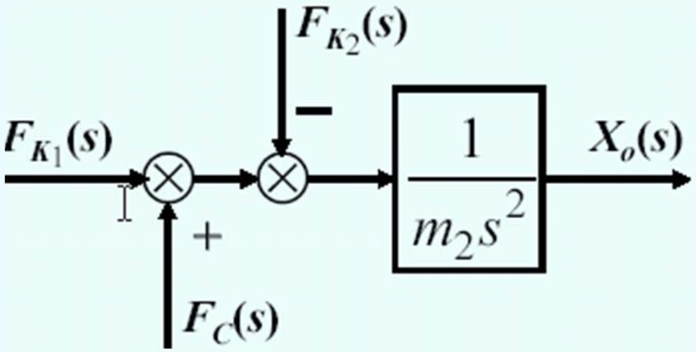
$$X(s)=\frac{1}{m_1 s^2}\left[F_i(s)-F_C(s)-F_{K_1}(s)\right]$$

$$F_{K_1}(s)=K_1\left[X(s)-X_o(s)\right]$$

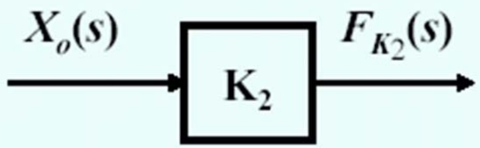
$$F_C(s)=Cs\left[X(s)-X_o(s)\right]$$



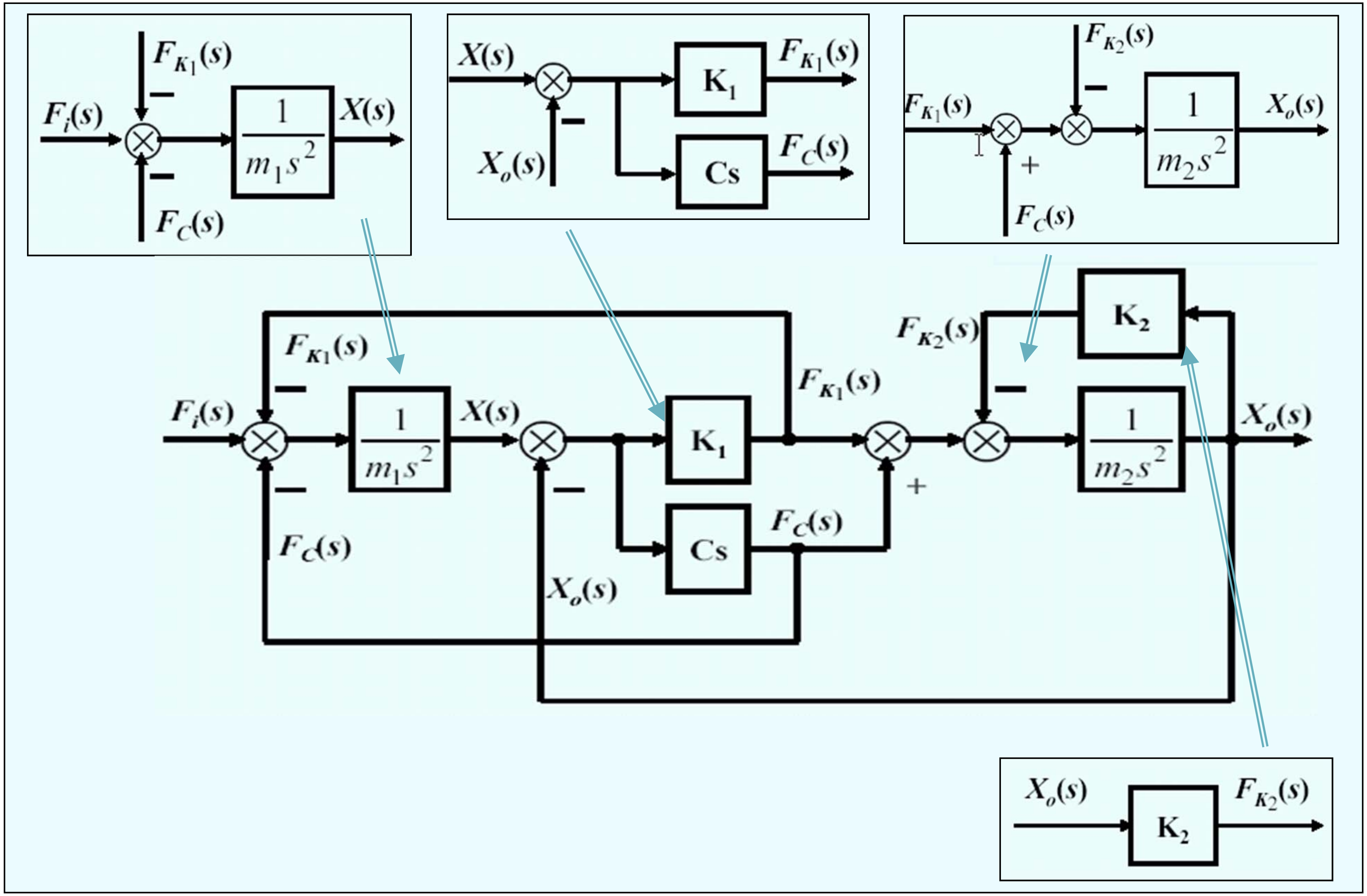




$$X_o(s)=\frac{1}{m_2 s^2}\left[F_{K_1}(s)+F_C(s)-F_{K_2}(s)\right]$$



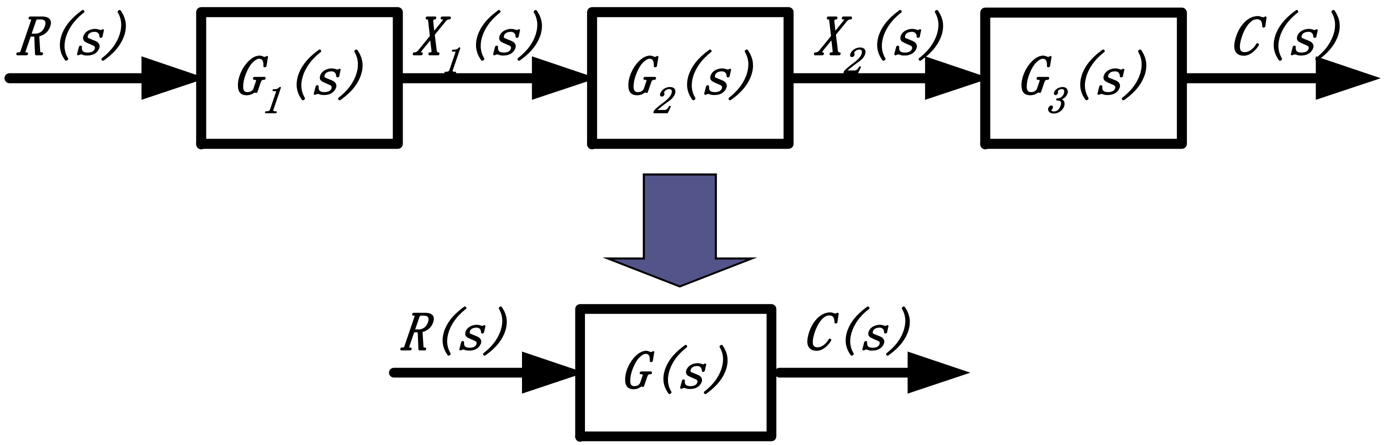
$$F_{K_2}(s)=K_2 X_o(s)$$



$F_{K_1}(s)$
$F_i(s)$
$X(s)$
$\frac{1}{m_1 s^2}$
$F_C(s)$
$X(s)$
K1
$F_{K_1}(s)$
Cs
$F_C(s)$
$X_o(s)$
$F_{K_2}(s)$
$F_{K_1}(s)$
$\frac{1}{m_2 s^2}$
$X_o(s)$
+
$F_C(s)$
K2
$F_{K_2}(s)$
$F_{K_1}(s)$
$F_i(s)$
$X(s)$
$F_{K_1}(s)$
$X_o(s)$
$F_C(s)$
$X_o(s)$
$F_{K_2}(s)$

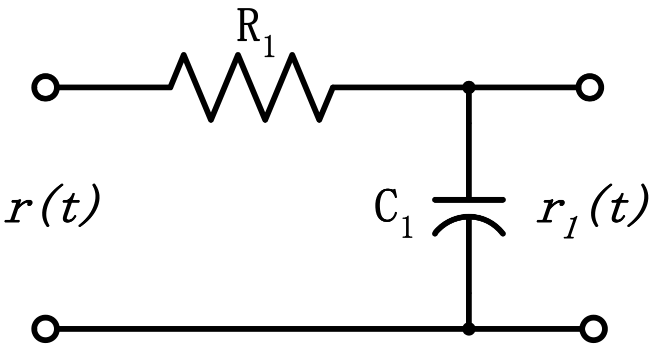
- 方块图的基本运算和变换

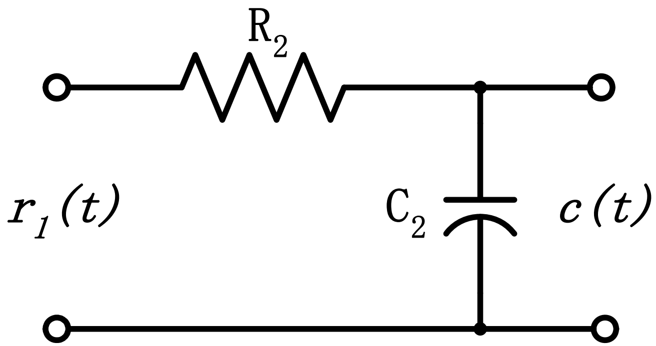
一、串联连接



$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot G_3(s)$$

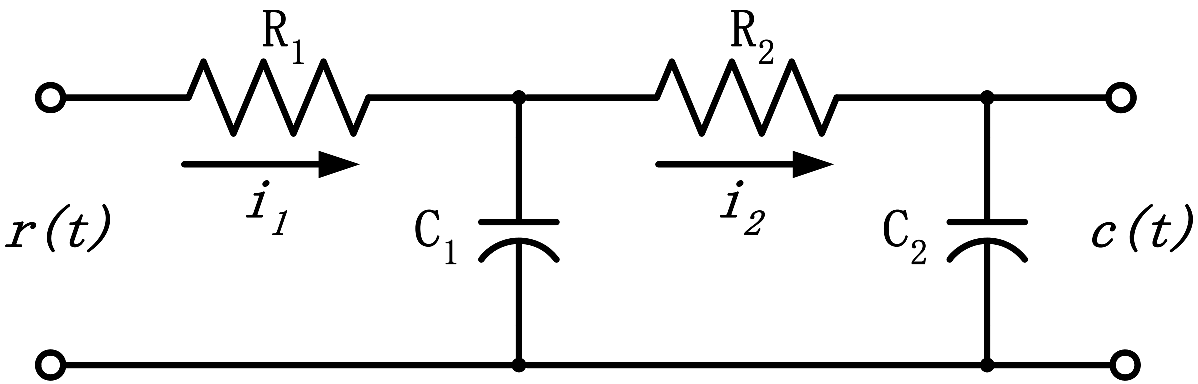
例2.7 RC串联电路



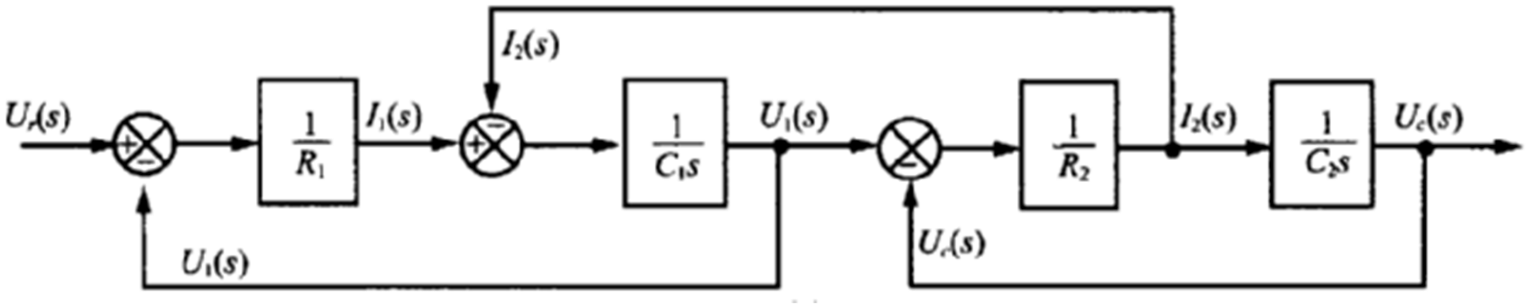


$$G_1(s) = \frac{1}{R_1C_1s+1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{R_2C_2s+1}$$

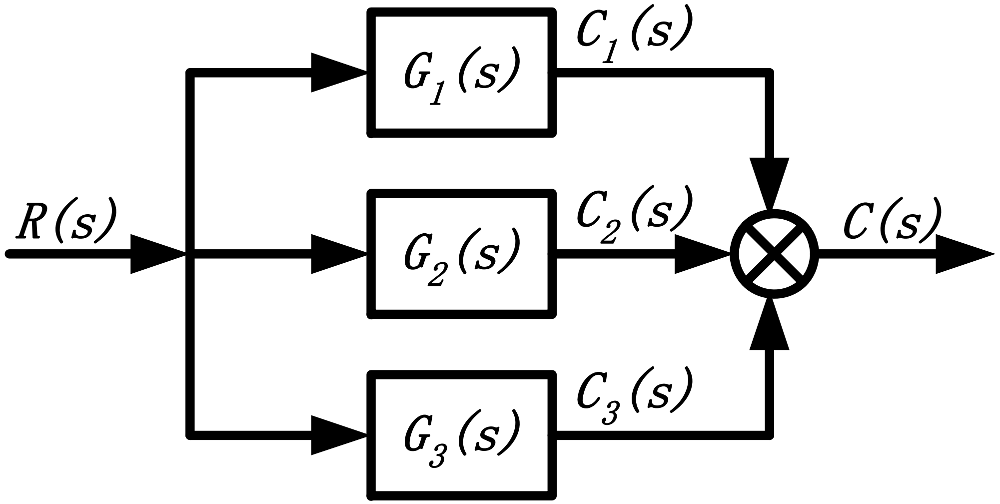


$$G(s) \overset{?}{=} \frac{1}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}$$



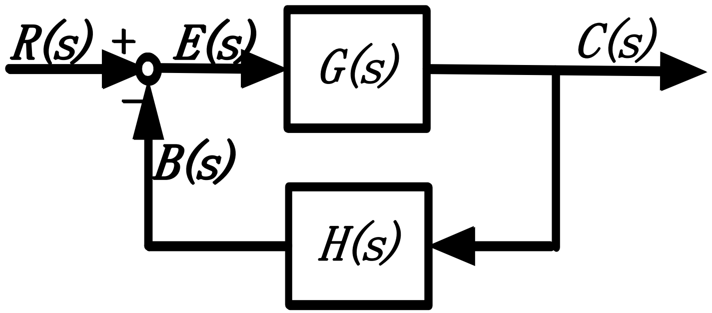
$I_2(s)$
$U_r(s)$
$\frac{1}{R_1}$
$I_1(s)$
$\frac{1}{C_1 s}$
$U_1(s)$
$\frac{1}{R_2}$
$I_2(s)$
$\frac{1}{C_2 s}$
$U_c(s)$
$U_1(s)$
$U_c(s)$

二、并联连接



$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=G_1(s)+G_2(s)+G_3(s)$$

三、反馈连接



开环传递函数

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

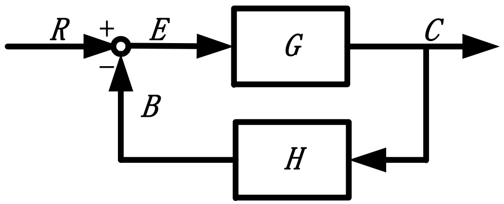
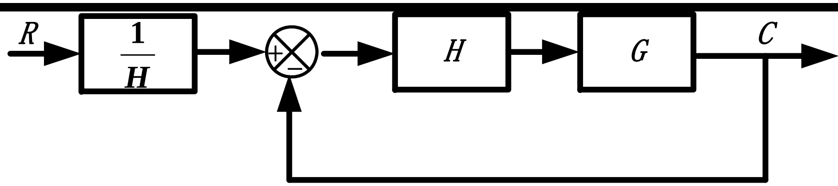
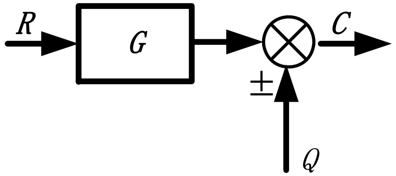
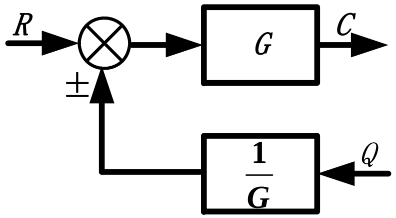
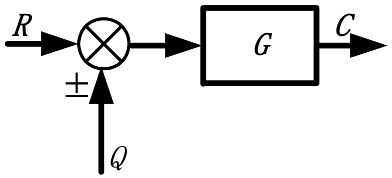
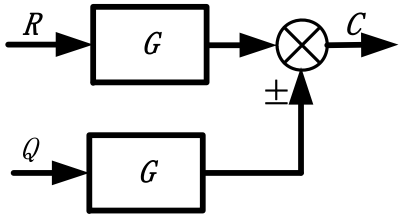
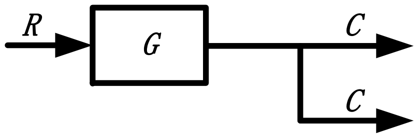
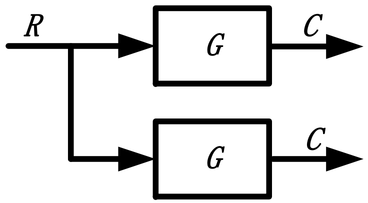
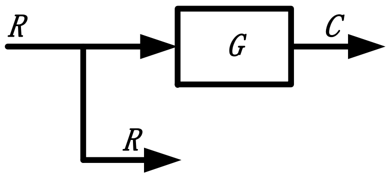
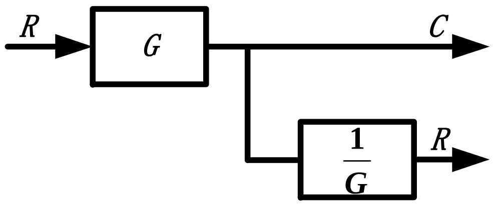
前向通道传递函数

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

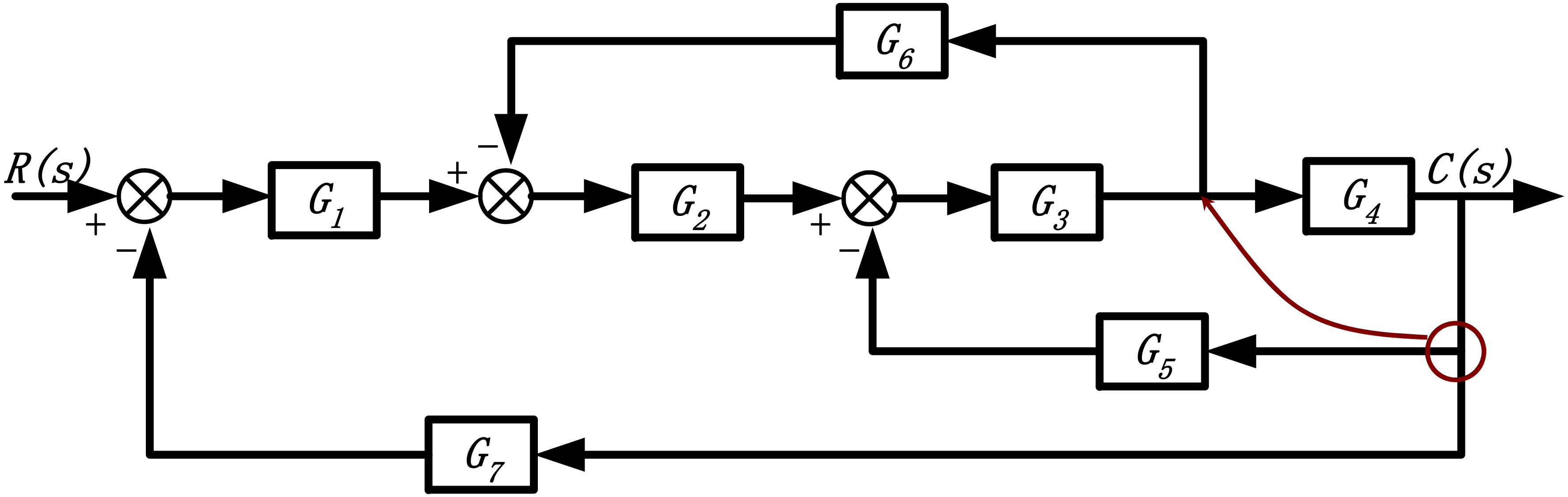
闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

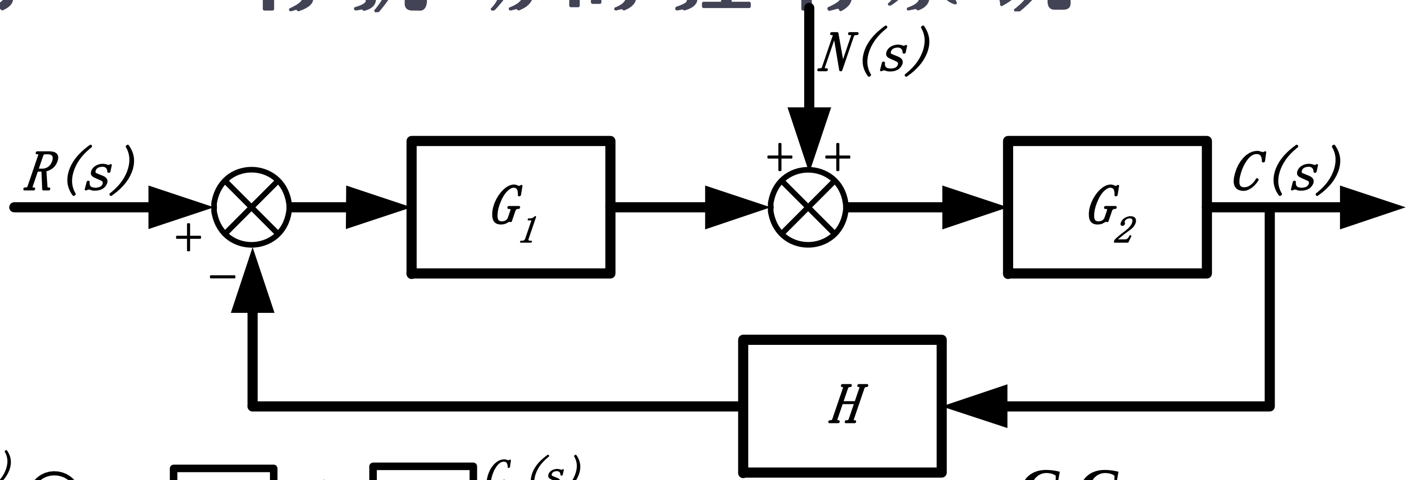
四、方块图的变换和简化

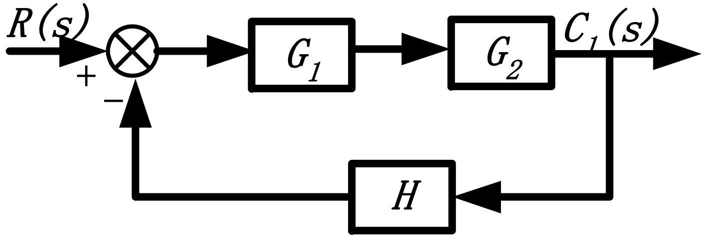
原方块图	等效方块图	说明
		等效单位反馈
		汇合点前移
		汇合点后移
		引出点前移
		引出点后移

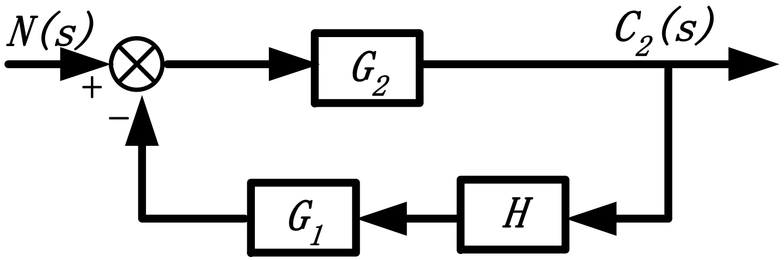
例2.8 简化系统方块图



例2.9 有扰动的控制系统





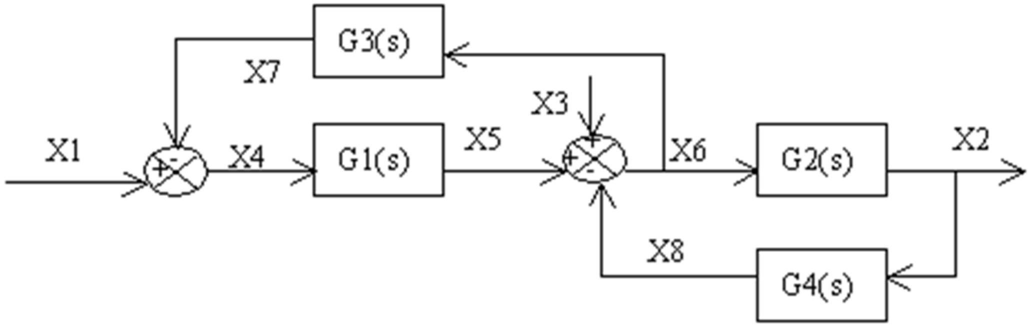


$$C_1(s)=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}R(s)$$

$$C_2(s)=\frac{G_2}{1+G_1G_2H}N(s)$$

$$C(s)=C_1(s)+C_2(s)$$

例2.10代 数 法



$X4(s)=X1(s)-X7(s) \qquad X6(s)=X3(s)+X5(s)-X8(s)$

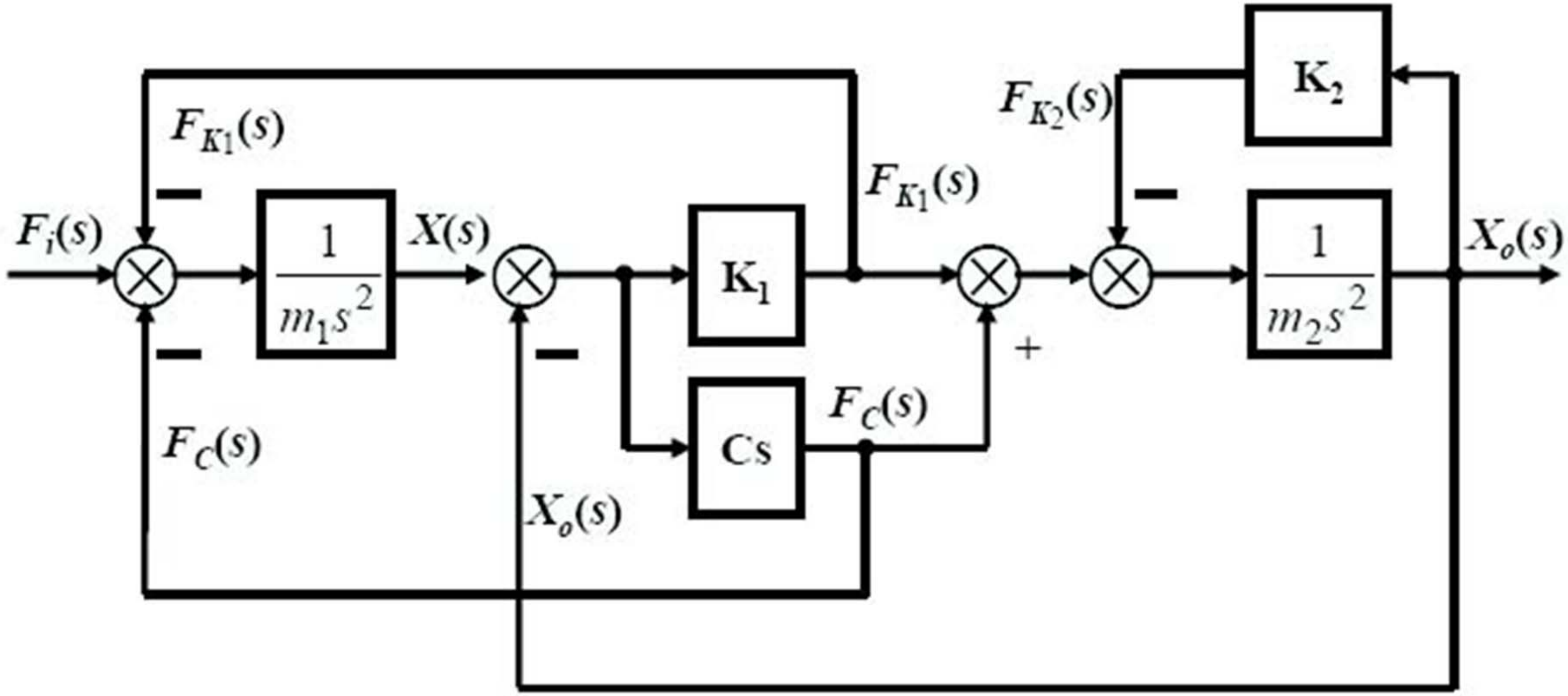
$X5(s)=G1(s)X4(s) \qquad X2(s)=G2(s)X6(s)$

$X7(s)=G3(s)X6(s) \qquad X8(s)=G4(s)X2(s)$

消去中间变量 $X4-X8$

$$X2(s) = \frac{G1(s)G2(s)}{1+G1(s)G3(s)+G2(s)G4(s)} X1(s) + \frac{G2(s)}{1+G1(s)G3(s)+G2(s)G4(s)} X3(s)$$

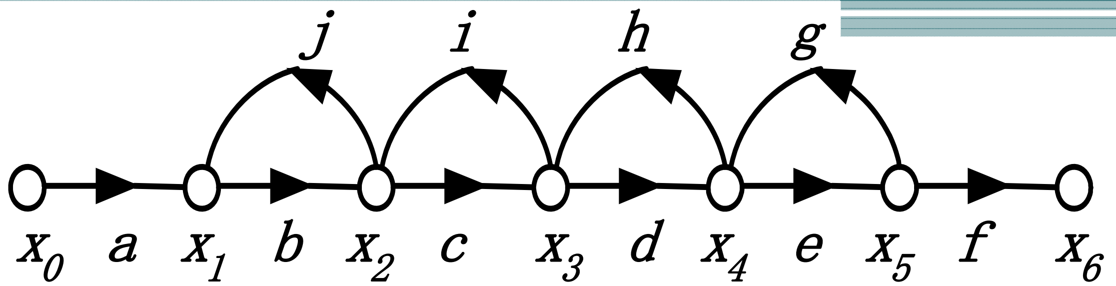
- 化简系统方框图



$F_{K1}(s)$
$F_i(s)$
$\frac{1}{m_1 s^2}$
$X(s)$
K_1
$F_{K1}(s)$
Cs
$F_C(s)$
$F_C(s)$
$X_o(s)$
+
$F_{K2}(s)$
K_2
$\frac{1}{m_2 s^2}$
$X_o(s)$

2.8 信号流图

- —— 是一种由节点和支路组成的，表示复杂系统中各变量关系的信号传递网络。节点代表系统的变量，支路是连接两个节点的定向线段并有一定的支路增益。



- 常用术语

源节点：只有输出支路的节点

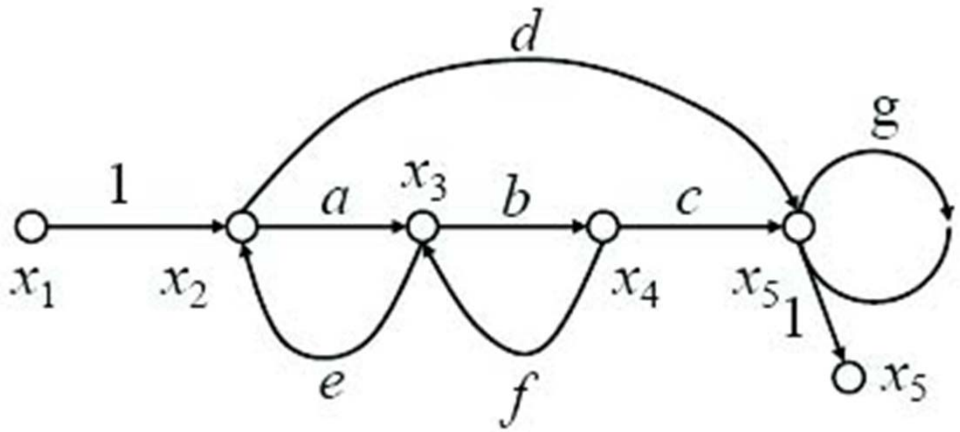
阱节点：只有输入支路的节点

混合节点：既有输出支路又有输入支路

前向通路：从源节点到阱节点的通路

回路：起于并终于同一节点

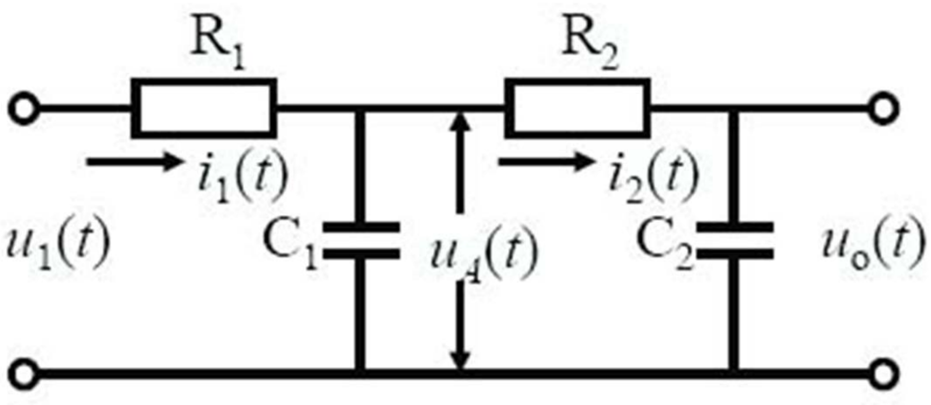
不接触回路：相互之间没有公共节点回路



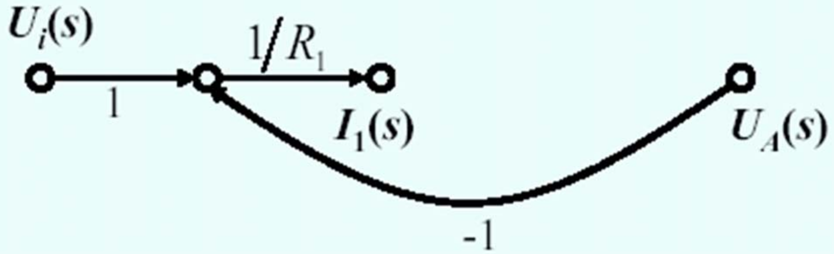
d
g
1
a
x_3
b
c
x_1
x_2
x_4
x_5
1
e
f
x_5

- 信号流图的绘制
  - ✓ 由系统微分方程绘制信号流图
    根据微分方程绘制信号流图的步骤与绘制方框图的步骤类似。
  - ✓ 由系统方框图绘制信号流图

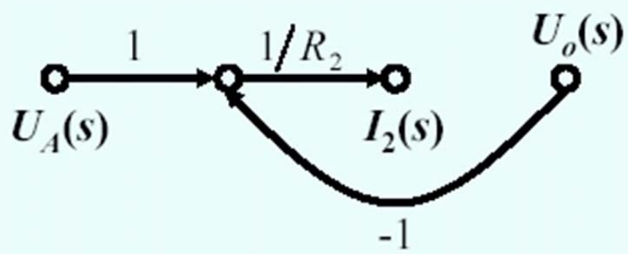
例2.11由系统微分方程绘制信号流图



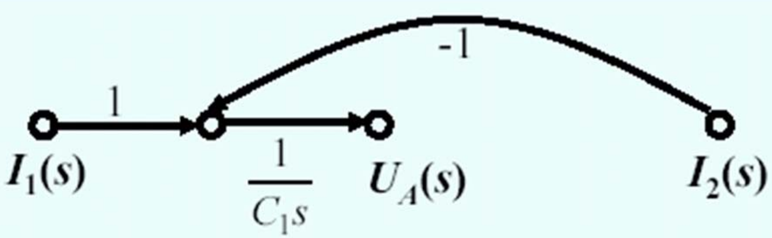
$$I_1(s) = \frac{U_i(s) - U_A(s)}{R_1}$$



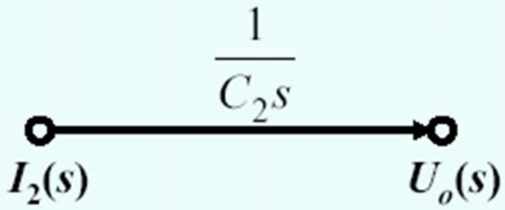
$$I_2(s) = \frac{U_A(s) - U_o(s)}{R_2}$$

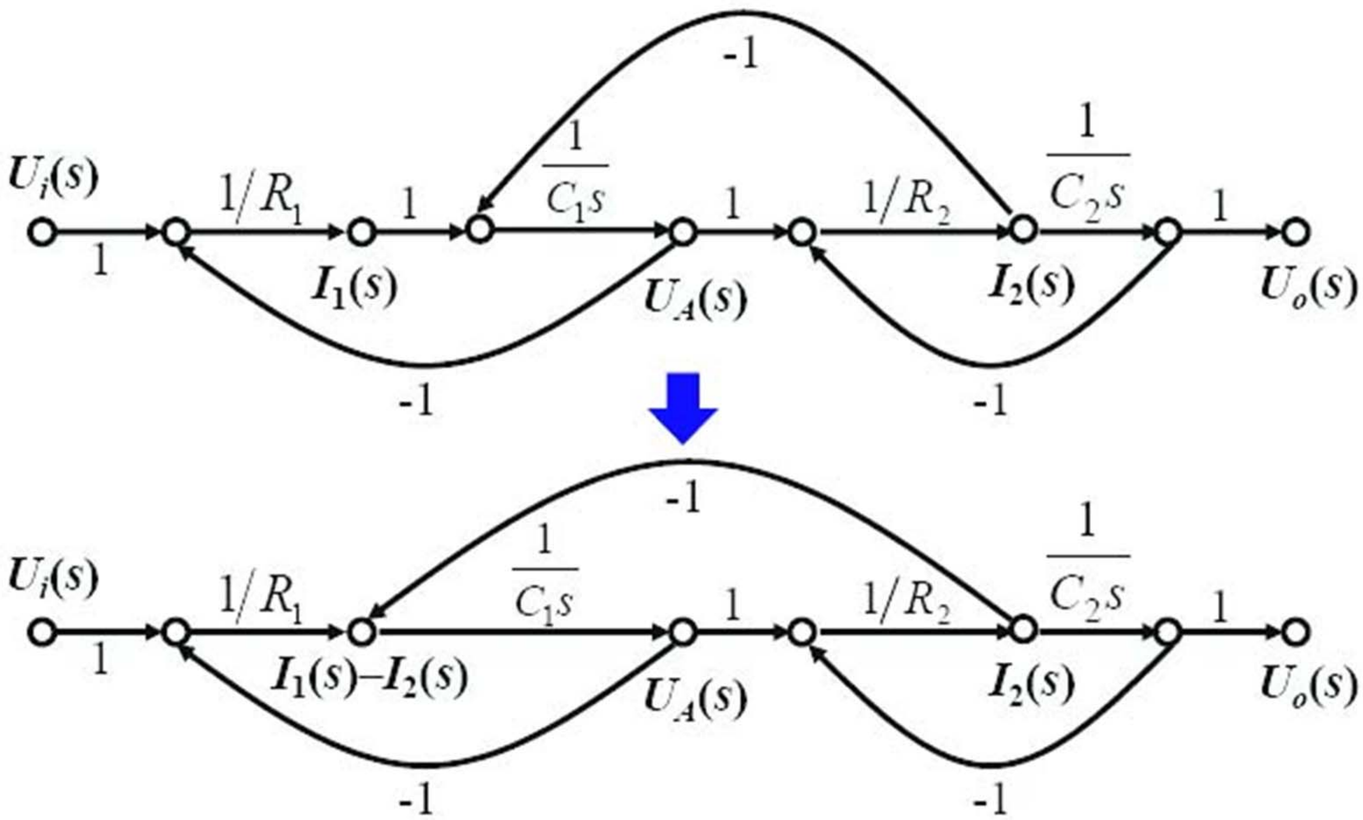


$$U_A(s) = \frac{1}{C_1 s}\left[I_1(s) - I_2(s)\right]$$

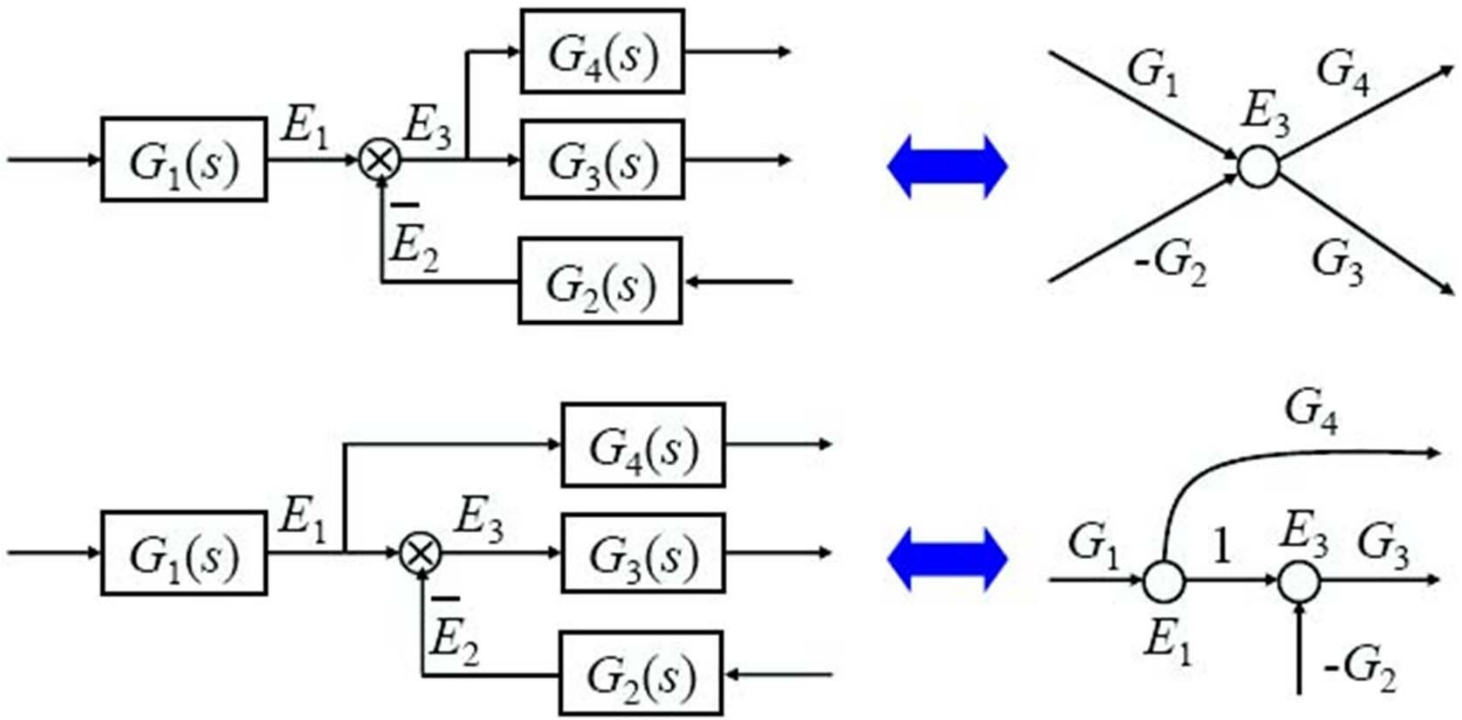


$$U_o(s) = \frac{1}{C_2 s} I_2(s)$$

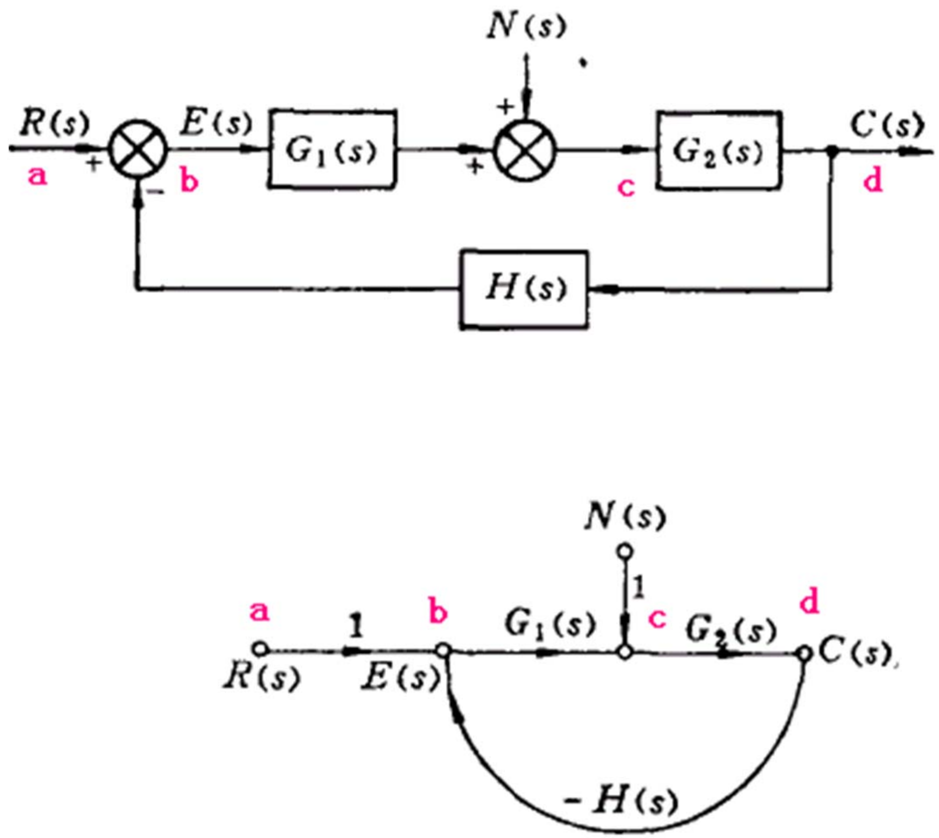



-1
$U_i(s)$
1
$1/R_1$
1
$\frac{1}{C_1 s}$
1
$1/R_2$
$\frac{1}{C_2 s}$
1
$I_1(s)$
$U_A(s)$
$I_2(s)$
$U_o(s)$
-1
-1
-1
$U_i(s)$
1
$1/R_1$
$\frac{1}{C_1 s}$
1
$1/R_2$
$\frac{1}{C_2 s}$
1
$I_1(s)-I_2(s)$
$U_A(s)$
$I_2(s)$
$U_o(s)$
-1
-1

- 比较点与节点之间的关系



例2.12 由方块图绘制信号流图

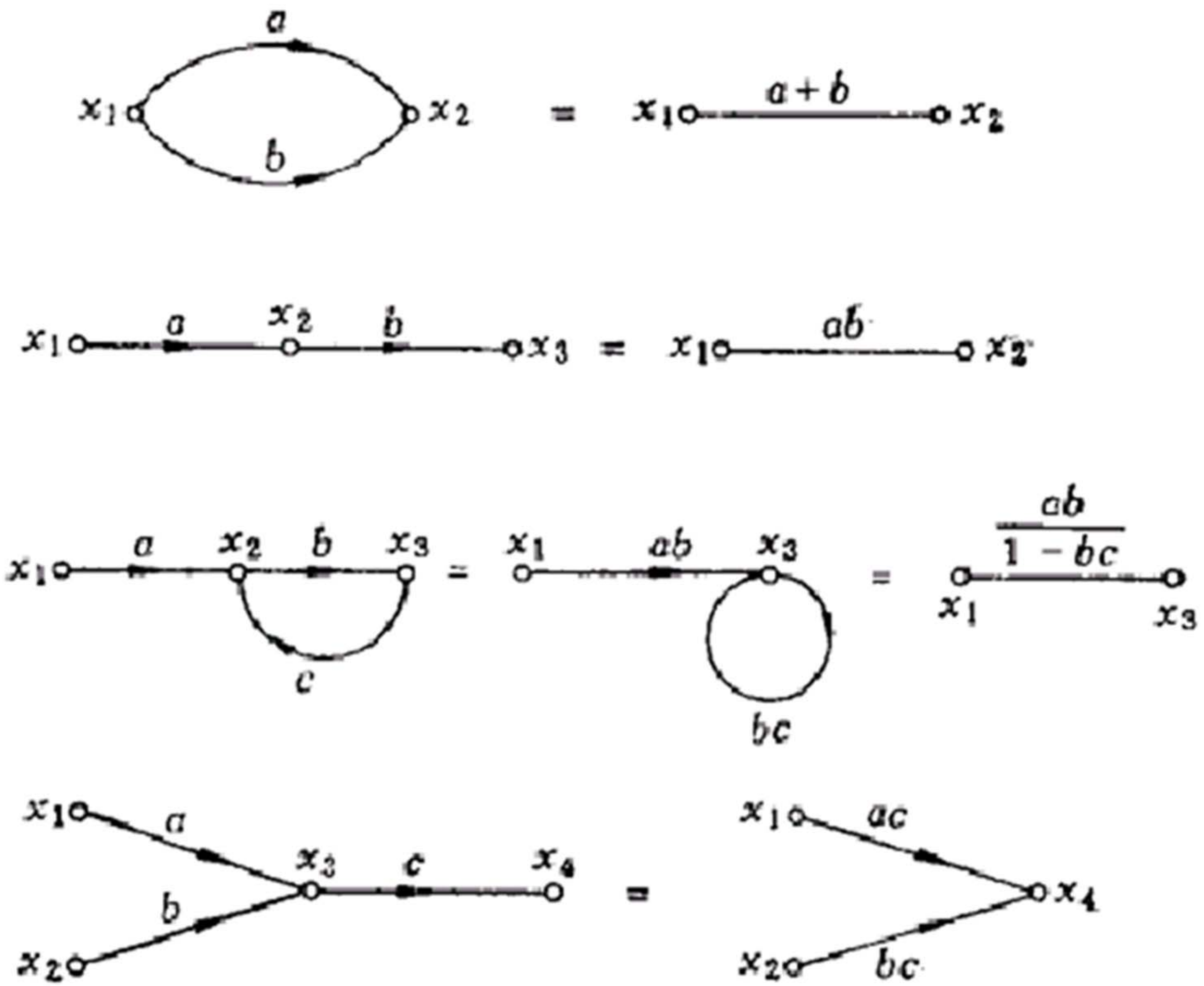


性质

- 信号流图只适用于线性系统
- 支路表示一个信号为另一个信号的函数关系，信号只能沿着支路上的箭头指向传递
- 在节点上可以把所有输入支路的信号叠加，并把相加后的信号传递到所有输出支路
- 对于一个给定的系统，其信号流图不是唯一的

- 简化

1. 串联支路的总传输等于各支路传输乘积
2. 并联支路的总传输等于各支路传输之和
3. 混合节点可以通过移动支路的方向消去
4. 回路可以根据反馈连接规则化为等效支路



a
b
x1
x2
=
a+b
x3
ab
c
bc
ab / 1 − bc
x4
ac

- 梅逊公式 $$P=\frac{\sum_{k} P_k \Delta_k}{\Delta}$$

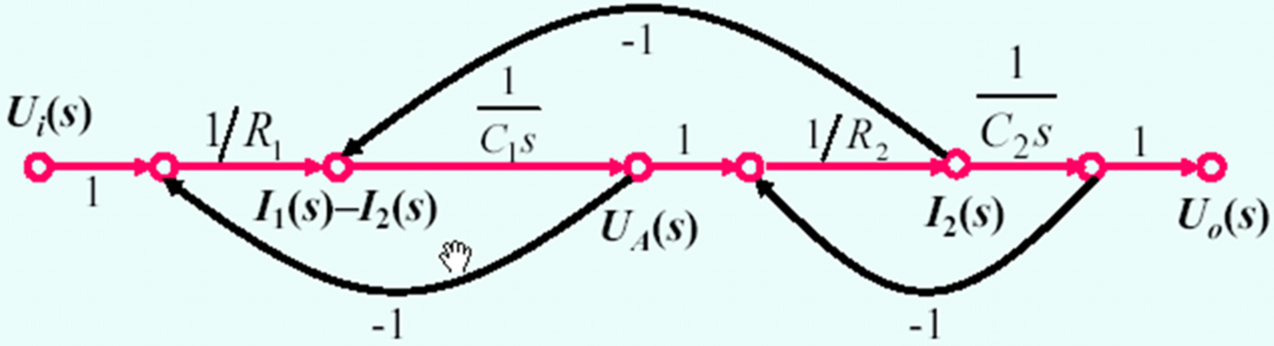
其中k为前向通道的数目；Δ为信号流图的特征式，

$$\Delta = 1-\sum L_1+\sum L_2+\cdots+(-1)^m\sum L_m$$

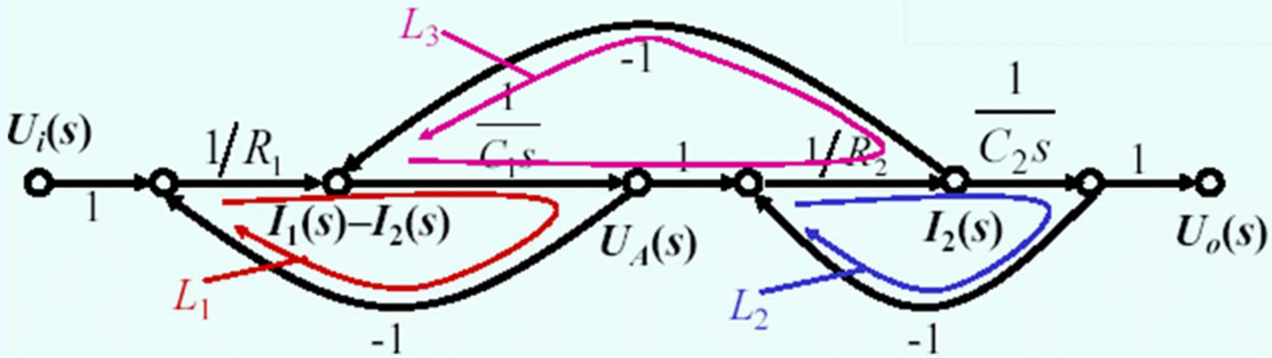
$\sum L_1$为所有单独回路增益之和；$\sum L_2$为所有每两个互不接触回路增益乘积之和；$\sum L_m$为任意m个互不接触回路增益乘积之和。

P_k为第k条前向通道总增益；Δ_k 为与第k条前向通道不接触部分的Δ值，称为信号流图余因子式。

只有一条前向通路 $P_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C_1 s} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{C_2 s}$



三个不同回路



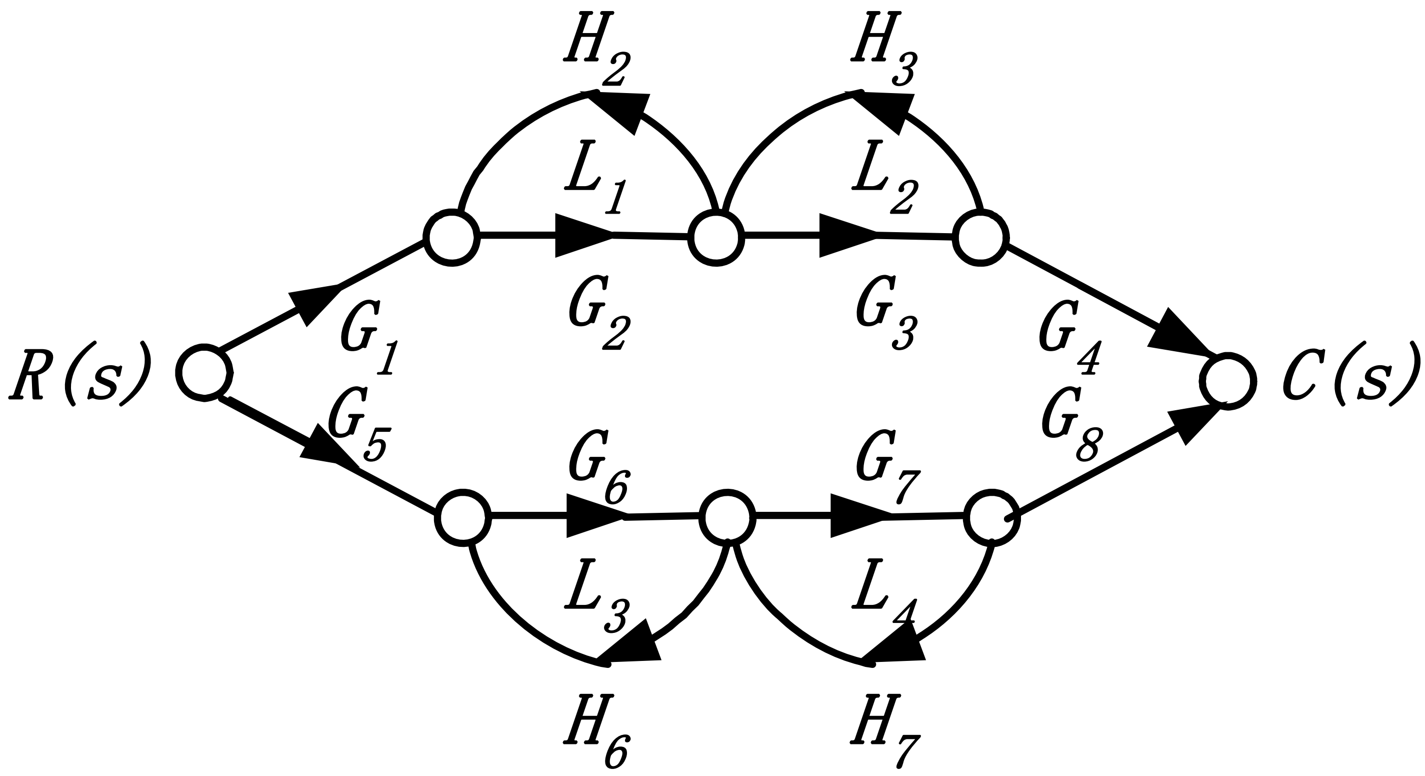
$$L_1 = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C_1 s}$$

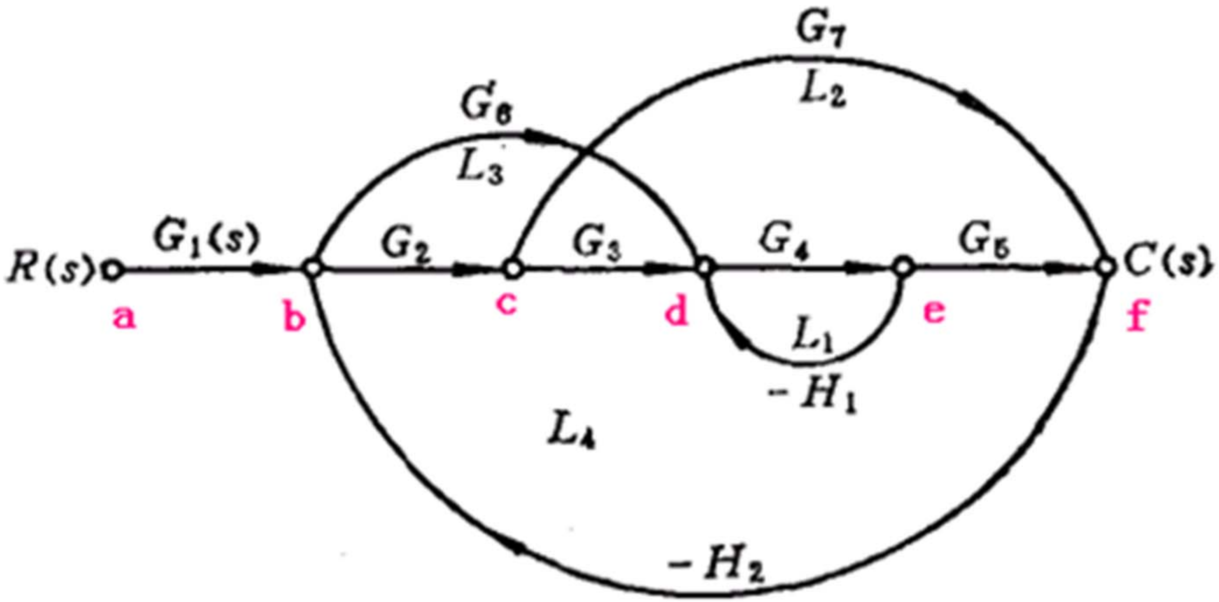
$$L_2 = -\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{C_2 s}$$

$$L_3 = -\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{C_1 s}$$

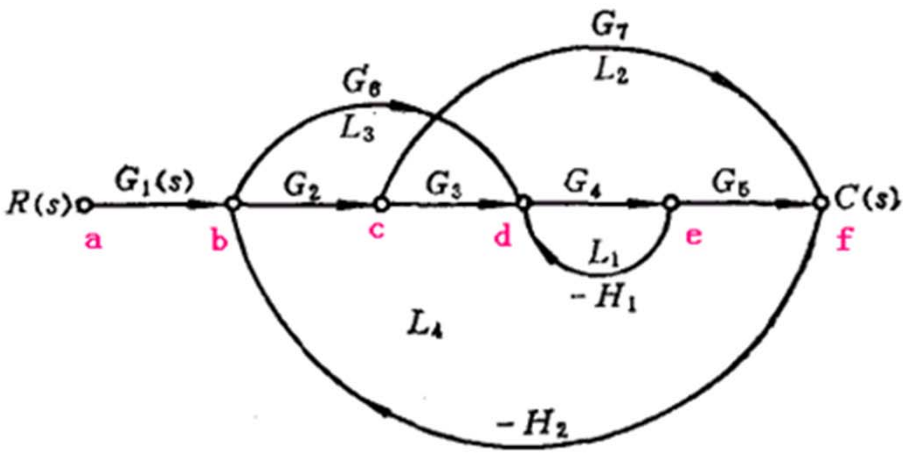
L_1、L_2不接触 P_1与L_1、L_2、L_3均接触

例2.13 求信号流图的传递函数





G7
L2
G6
L3
G1(s)
G2
G3
G4
G5
R(s)
C(s)
a
b
c
d
e
f
L1
-H1
L4
-H2



三条前向通路

abcdef $P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$

abdef $P_2 = G_1G_6G_4G_5$

abcf $P_3 = G_1G_2G_7$

四个回路

de $L_1 = -G_4H_1$

bcf $L_2 = -G_2G_7H_2$

bdef $L_3 = -G_6G_4G_5H_2$

bcdef $L_4 = -G_2G_3G_4G_5H_2$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1L_2$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1$$

$$\Delta_3 = 1 - L_1$$

$$\frac{C(S)}{R(S)} = G = \frac{1}{\Delta}(P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3)$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_6G_4G_5 + G_1G_2G_7(1 + G_4H_1)}{1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_6G_4G_5H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_4H_1G_2G_7H_2}$$

2.9 状态空间模型

- 传递函数的局限性

  1. 只描述系统的输入与输出之间的关系，不涉及到系统内部状态的信息

  2. 只适用于零初始条件下的单输入-单输出线性定常系统，无法表示时变系统，非线性系统以及非零初始条件下的线性定常系统

- 状态空间的基本概念

状态：表征系统运动信息的集合

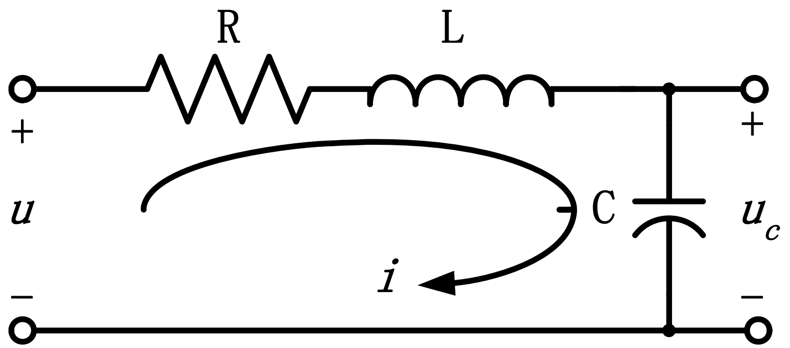
状态变量：足以描述系统全部运动的、数目最少的一组独立变量

状态方程：描述系统状态变量与输入变量之间关系的一阶微分方程组 $\dot{x} = Ax + Bu$

输出方程：描述系统输出变量与输入变量和状态变量之间关系的代数方程 $y = Cx + Du$

状态空间表达式：状态方程和输出方程的组合

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$



$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=u$$

$$\begin{cases}\dfrac{du_c}{dt}=\dfrac{i}{C}\\ \dfrac{di}{dt}=\dfrac{1}{L}\left[-u_c-Ri+u\right]\end{cases}$$

状态方程 $$\begin{bmatrix}\dot{u}_c\\ \dot{i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{C}\\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_c\\ i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}u$$

输出方程 $$u_c=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_c\\ i\end{bmatrix}$$

- **SISO线性定常系统的状态方程**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

- 传递函数与状态空间方程之间的关系

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} (sI - A)X(s) = BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

例2.14 根据状态空间方程求传递函数

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [2 \quad 1 \quad 0] x \end{cases}$$

2.10 数学模型的Matlab描述

- 连续系统的数学模型

  1. 传递函数分子、分母多项式模型

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

>>num=[b_0,b_1,…,b_m];
>>den= [a_0,a_1,…,a_n];
>>G=tf(num,den);

2. 零极点增益模型

$$G(s)=k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

```
>>z=[z1,…,zm];
>>p= [p1,…,pn];
>>k=[k];
>>G=zpk(z,p,k);
```

3. 部分分式展开

$$G(s)=\frac{r_1}{s-p_1}+\frac{r_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{r_n}{s-p_n}+K(s)$$

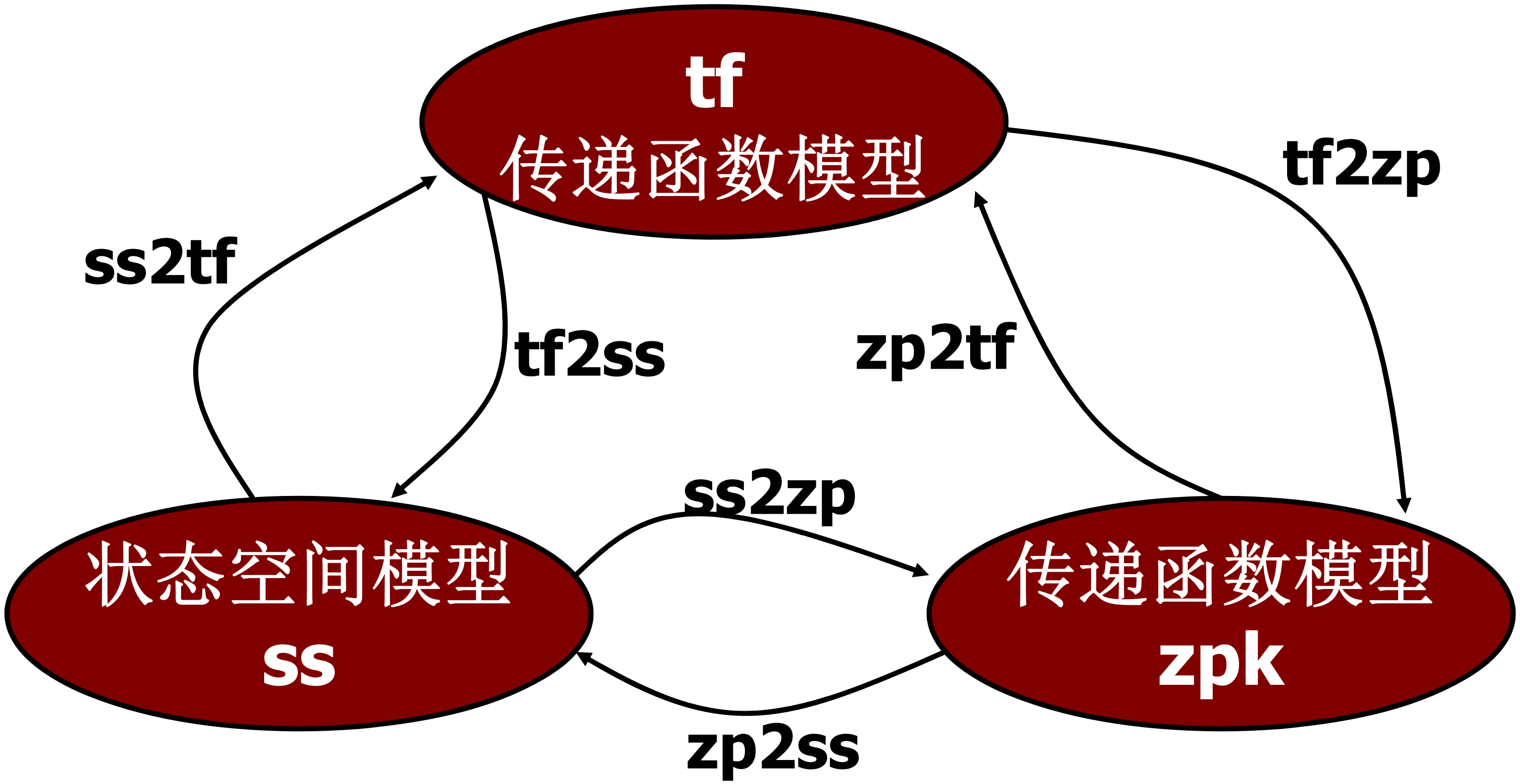
```
>>[r,p,k]=residue(num,den);
>>[num,den]=residue(r,p,k);
```

4. 状态空间模型

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

```
>>ss(A,B,C,D);
```

- 模型之间的转换


tf
传递函数模型
tf2zp
ss2tf
tf2ss
zp2tf
ss2zp
状态空间模型
ss
传递函数模型
zpk
zp2ss

- 控制系统建模

1. 系统并联　　$G = G_1 + G_2$

```
>>[num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2)
```

2. 系统串联　　$G = G_1 G_2$

```
>>[num,den]=series(num1,den1,num2,den2)
```

3. 反馈系统　　$G(s) = \dfrac{G_1}{1 + G_1 G_2}$

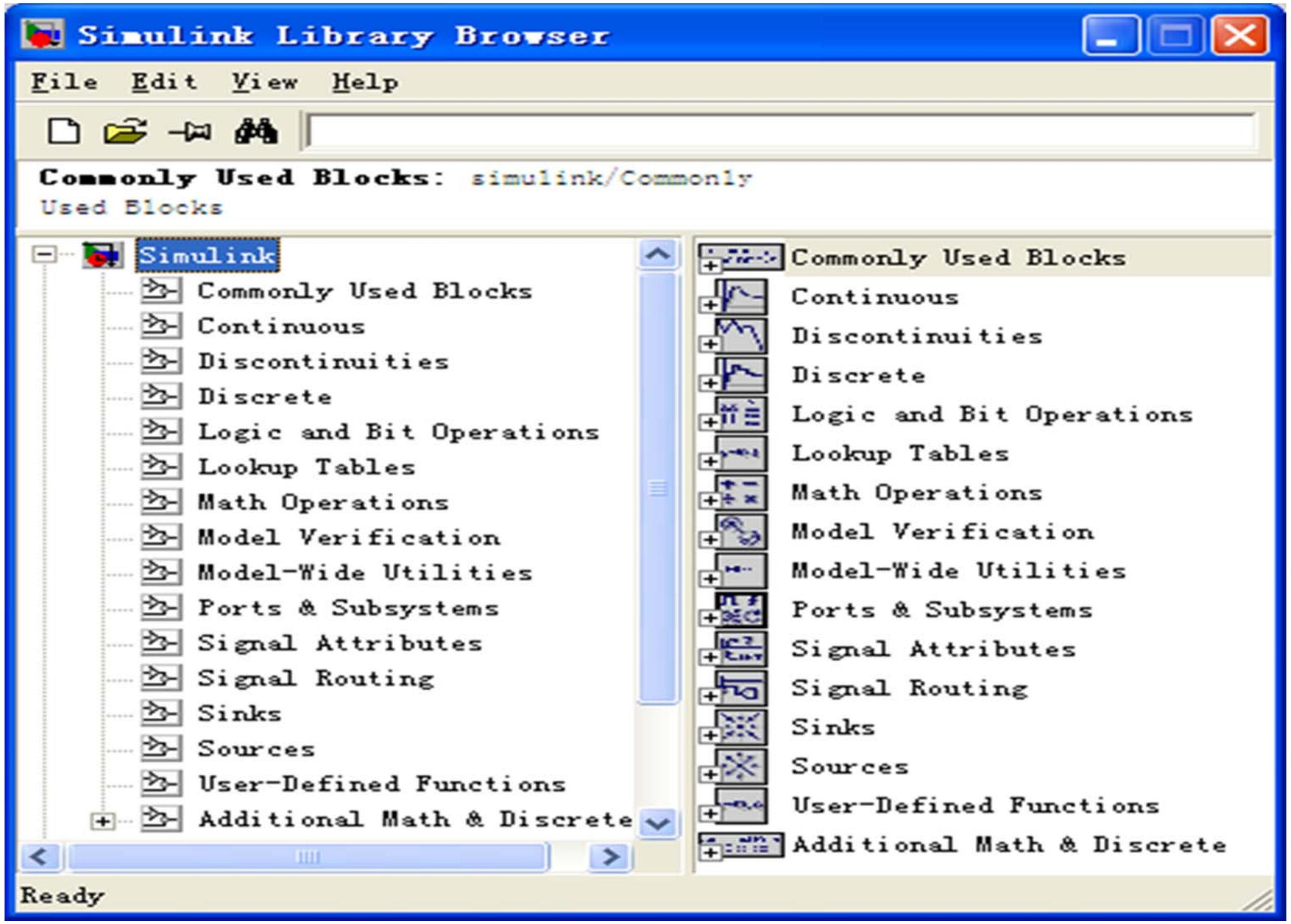
```
>>[num,den]=feedback(num1,den1,num2,den2,sign)
```

- **step**指令可用于求单位阶跃响应

```
>>[y,x,t]=step(num,den,t)
```

类似指令**impulse,lsim**等

- **Simulink建模方法**



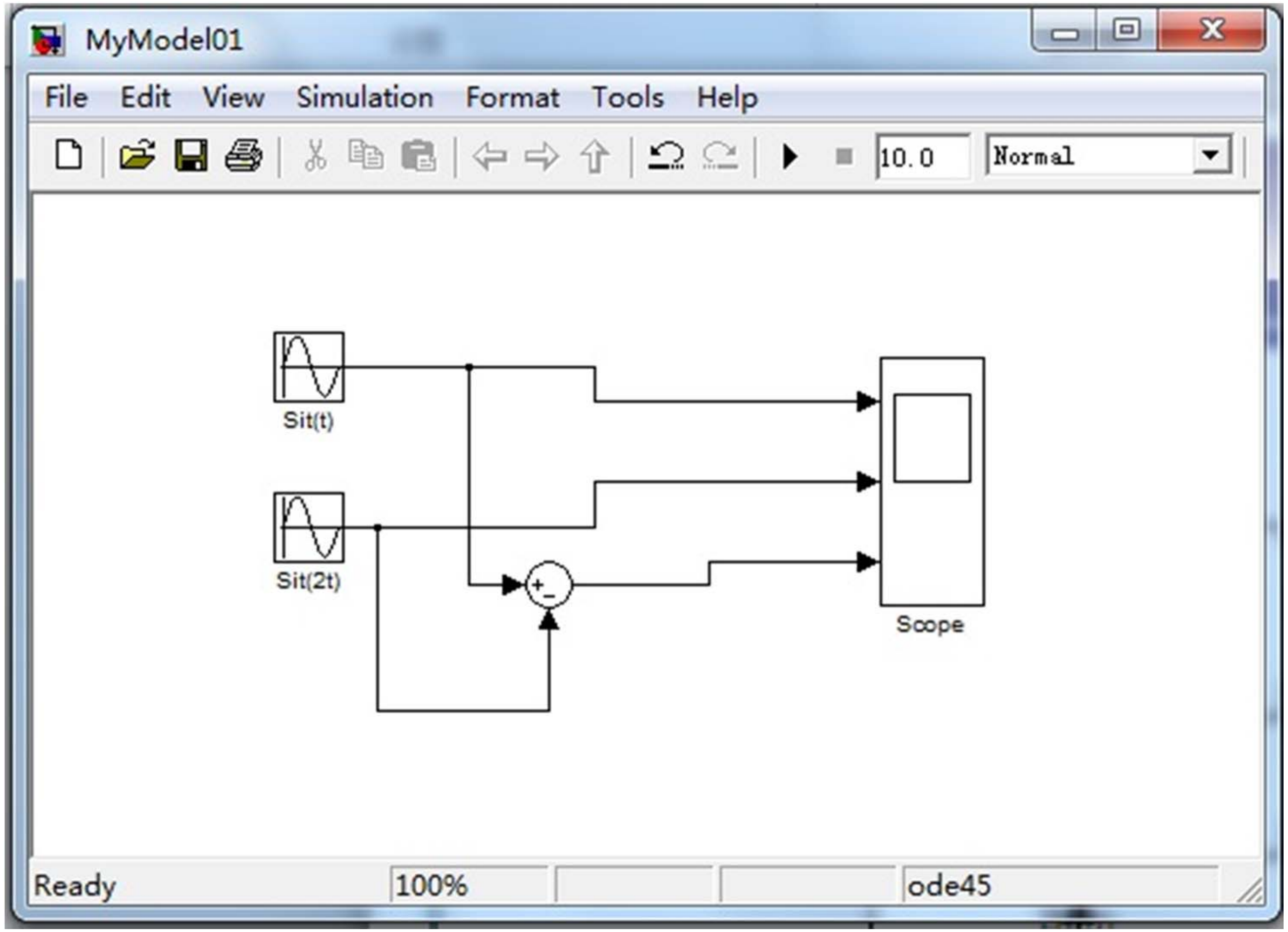
Simulink模块库包含的子模块库

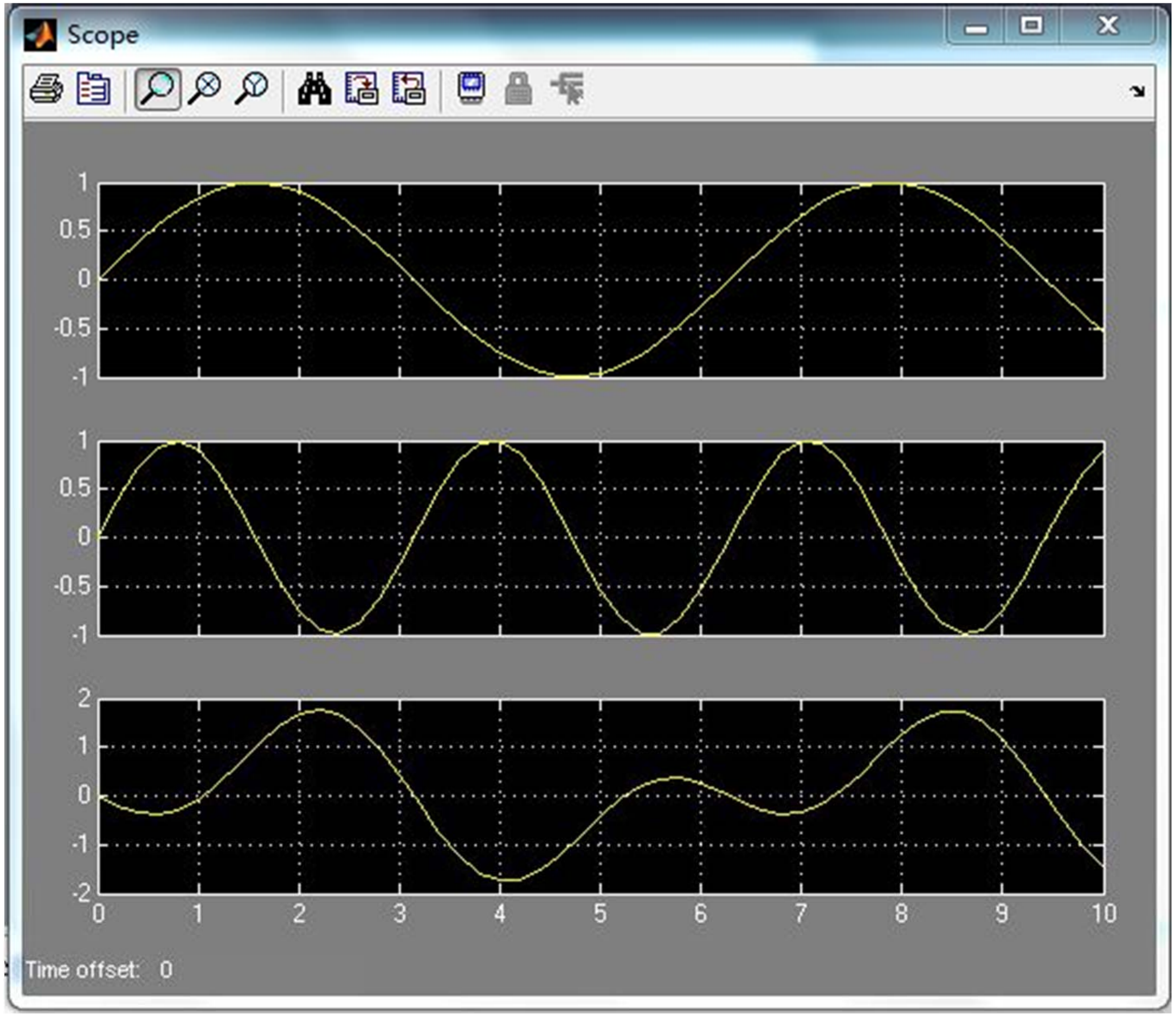
- （1）Commonly Used Blocks模块库，为仿真提供常用元件；
- （2）Continuous模块库，为仿真提供连续系统；
- （3）Discontinuous模块库，非连续系统元件；
- （4）Discrete模块库，为仿真提供离散元件；
- （5）Logic and Bit Operations模块库，提供逻辑运算和位运算的元件；
- （6）Lookup Tables模块库，线形插值查表模块库；
- （7）Math Operations模块库，提供数学运算功能元件；
- （8）Model Verification模块库，模型验证库；
- （9）Model-Wide Utilities模块库；
- （10）Ports and Subsystems模块库，端口和子系统；
- （11）Signals Attributes模块库，信号属性模块；
- （12）Signals Routing模块库，提供用于输入、输出和控制的相关信号及相关处理；
- （13）Sinks模块库，为仿真提供输出设备元件；
- （14）Sources模块库，为仿真提供各种信号源；
- （15）User-defined Functions模块库，用户自定义函数元件；
- （16）Additional Math &Discrete模块库。

建模与仿真

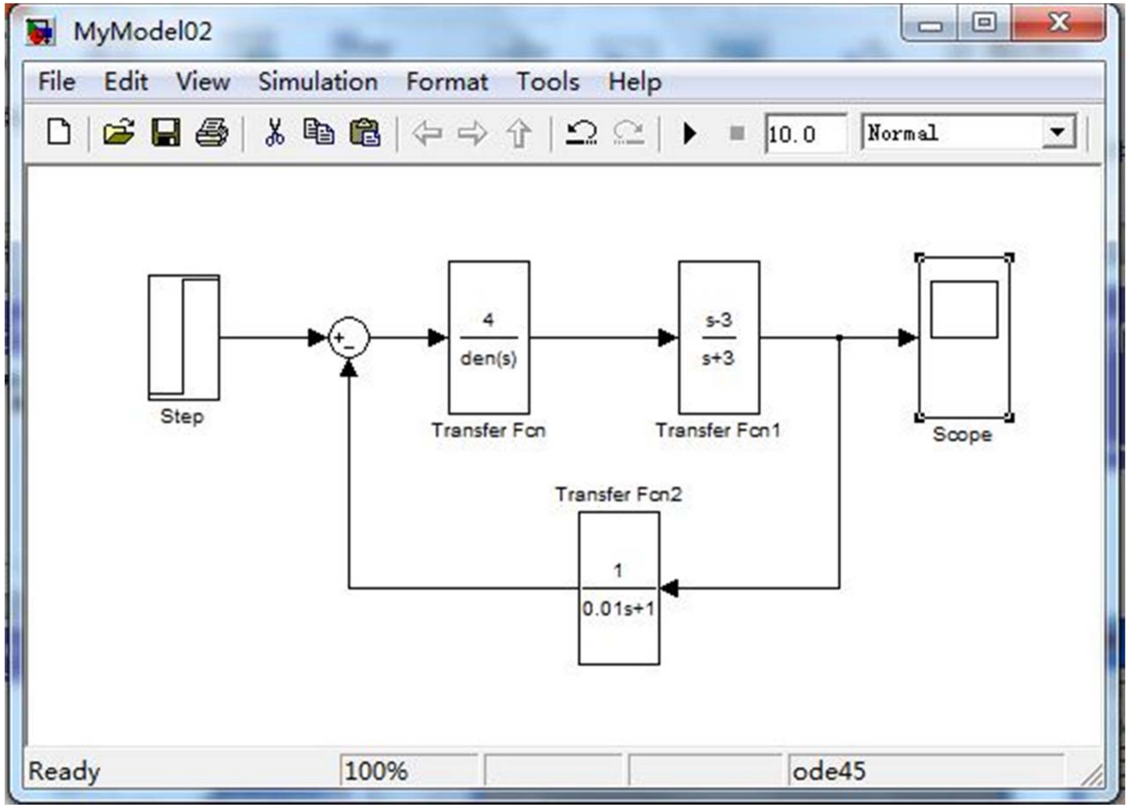
（1）新建一个模型窗口
（2）为模型添加所需模块
（3）连接相关模块，构成所需要的系统模型
（4）进行系统仿真
（5）观察仿真结果

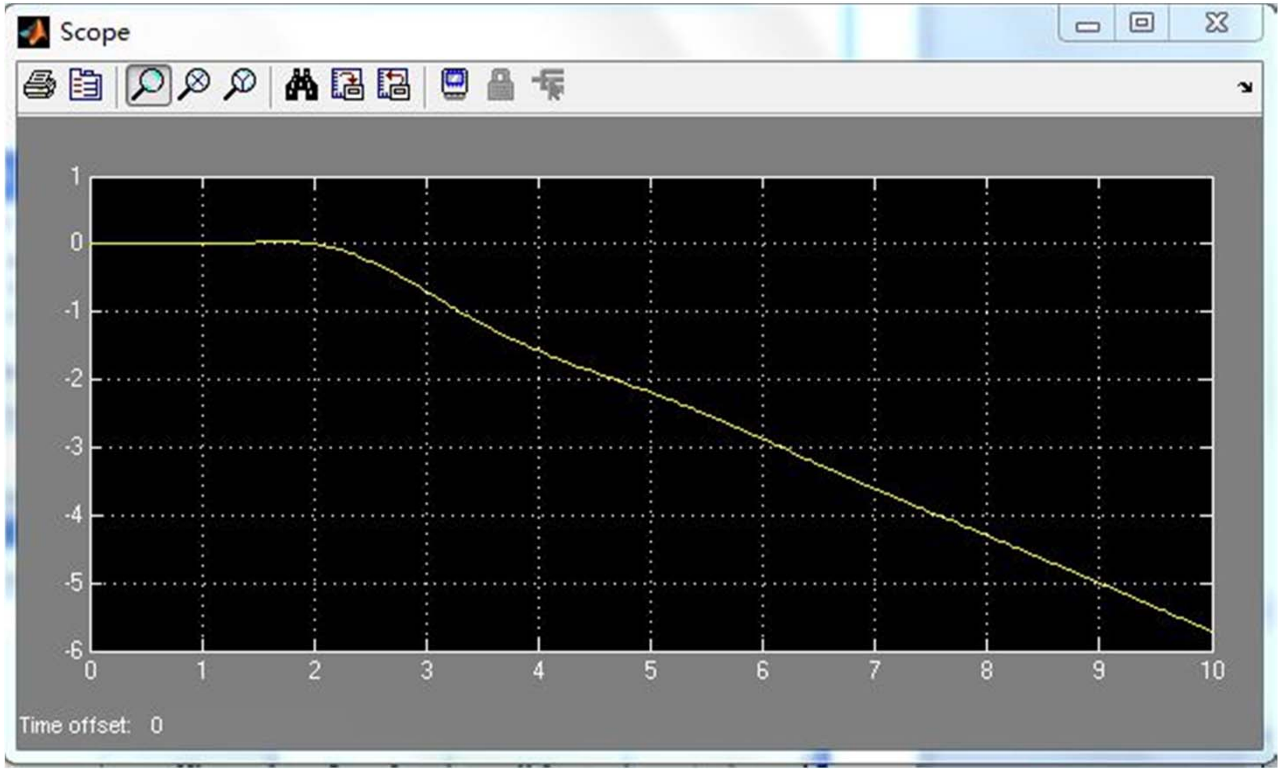
仿真计算y(t)=sin(t)-sin(2t)




Scope
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-0.5
-1
2
1
0
-1
-2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Time offset: 0

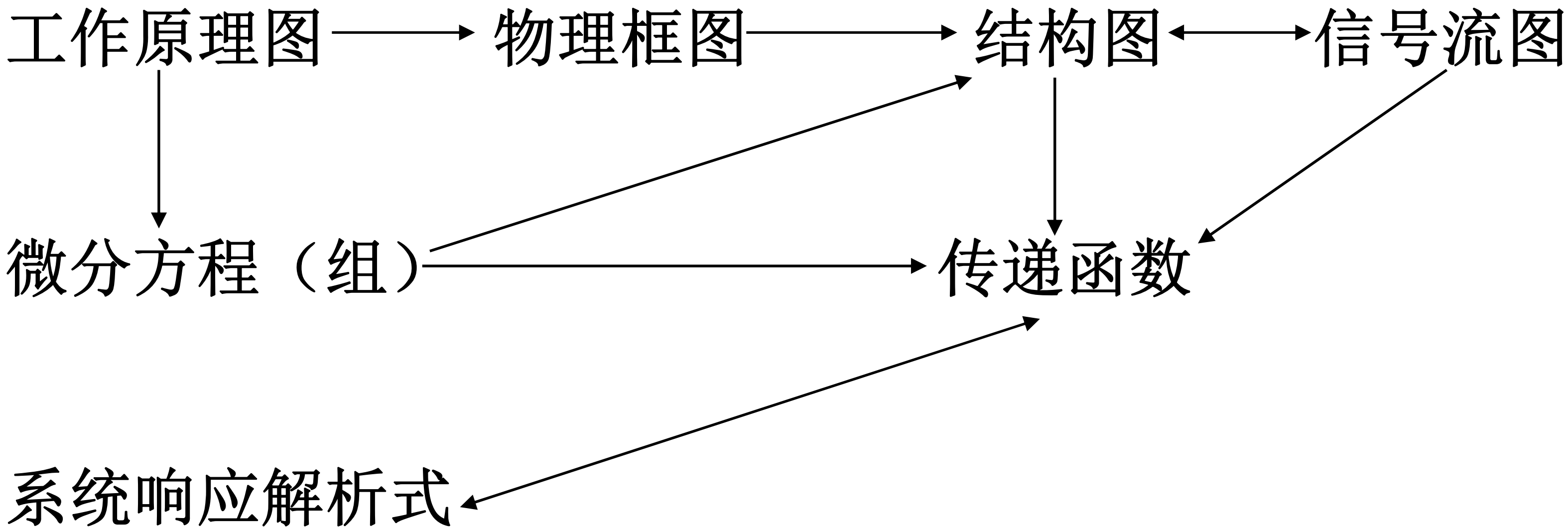
闭环系统的仿真模拟


MyModel02
File Edit View Simulation Format Tools Help
10.0
Normal
Step
4
den(s)
Transfer Fcn
s-3
s+3
Transfer Fcn1
Scope
Transfer Fcn2
1
0.01s+1
Ready
100%
ode45


Scope
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Time offset: 0

复习

- 数学模型基本概念
- 数学模型形式
  - 微分方程
  - 传递函数
- 控制系统的图形化描述
  - 方框图
  - 信号流图
- 闭环控制系统的传递函数


工作原理图
物理框图
结构图
信号流图
微分方程（组）
传递函数
系统响应解析式