中文摘要

《全日制义务教育教学课程标准（实验稿）》（2001）将“图形的变换”引入初中几何教学目标，并强调了发展学生合情推理的重要性，这成为了新课改下初中几何的一大亮点。与此同时，“图形的变换”在历年中考中所占比例呈逐年上升趋势，特别是在2008、2010、2011年苏州市数学中考中，“图形的变换”成为了当年中考的“把关题”之一，也是最大的亮点之一，可见“图形的变换”在初中几何教学中的重要性。

如今新课改已进入了第十个年头，初中数学中“图形的变换”这部分内容的教与学的现状如何？学生在这部分内容上的认识水平与推理能力发展得如何？教师对这部分内容的教学有怎样的看法与困难？这些问题都是一线教师非常关心的问题，只有全面地了解了教与学的现状，一线教师才能更好的反思教学过程、改善教学设计、积累教学资源，为更顺利、有效的开展“图形的变换”的教学作一些贡献。

本研究对苏州市彩香中学65名初二学生进行了图形变换相关内容的测试，对该校18名一线数学教师进行了关于图形变换教学的问卷调查。通过对学生在测试中的解题情况和解题过程的分析，了解了学生在此内容上的认知水平与推理能力；通过对教师调查问卷的分析，了解教师在此内容上的教学方法与观点，以及在教学过程中存在的困难与迷惑；同时又以2010、2011年苏州市数学中考第28题为例，分析以“图形的变换”为内容的中考压轴题所考查学生的知识类型与能力类型。在上述基础上，笔者对“图形的变换”的教学提出三项教学建议：一、注意教学过程中，数学问题情境的创设；二、注意解题过程中，数学能力的训练、数学思想的渗透；三、注意分析相关中考题所考查的知识与能力的类型，研究中考导向。希望本研究对“图形的变换”的教学能引起更多专家与一线教师的思考与讨论。

关键词：图形的变换　认知水平　推理能力　教学建议

作　者：何　佳
指导老师：严亚强

Mathematics Teaching Research on Graph Tranformation in Junior Middle School

Abstract

It has become a bright spot of the geometry aspect during the new Curriculum Reform that “The Curriculum Standard of Full-time Compulsory Education (experimental draft) ” (2001), leads "the graph transformation" into the education target of junior middle school, and emphasizes the importance of development of plausible reasoning. Meanwhile, The proportion of "the graph transformation" in the Senior Middle School Entrance Examinations over the years is increasing, especially in the mathematics exams of Suzhou Senior Middle School Entrance Examination in 2008, 2010, and 2011, "the graph transformation" has become one of the checking points and also one of the biggest bright spots, therefore, the importance of “the graph transformation" in junior middle school Geometry teaching is clearly visible.

Now when the new curriculum reform has entered its tenth year, what is the current status of "the graph transformation" in the junior middle school mathematics teaching? How about the level of understanding and reasoning ability of the Students in this part of the contents? What kind of views and difficulties the frontline teachers toward this part of the contents have? These problems are all the issues the frontline teachers concerned about. With a comprehensive understanding of the current situation of teaching and learning, the frontline teachers can better reflect the teaching process, improve the teaching design, and accumulate the teaching resources, so as to make some contribution for carrying out more smooth and effective teaching of "the graph transformation".

This research based on the test of the relative content of the graph transformation towards Sixty five Grade-Two students of Suzhou Caixiang Junior Middle School and on the questionnaire investigation about teaching on "the graph transformation" toward the eighteen frontline mathematics teachers of the same school. Through the test of students in problem solving situations and problem solving process analysis, we understand the cognitive level and reasoning ability of the students on this content; through questionnaire analysis of teachers, we know the content teaching methods and perspectives of teachers, as well as the difficulties and confusion in the teaching process. Meanwhile, taking the examples as the twenty-eighth questions in the mathematics test of Suzhou Senior School Entrance Exam in 2010 and 2011, it analysis the knowledge and ability types of students through these finale questions taking "the graph transformation" as the content. On the basis of the above, the author put forward three suggestions towards "the graph transformation" teaching: first, focus on establishing the mathematical problem situation in the teaching process; second, focus on training on mathematical ability and infiltrating of mathematical thinking during the problem solving process; third, focus on studying the exam guide through the analysis of the knowledge and abilities type in related questions in Senior School Entrance Exam. Highly hope that this study on" the graph transformation" teaching can cause the thinking and discussion of more experts and teachers.

Key words: graph transformation, cognitive level, reasoning ability, teaching design

Written by：He Jia
Supervised by：Yan Ya Qiang

第1章 绪 论

1.1 研究的背景

1.1.1 新一轮课程改革

“图形的变换”进入中学数学教材，是近几十年来国内外数学改革的一个主要特征。虽然各国中学的“图形的变换”教学内容不尽相同，但存在着非常一致的观点，即“国际数学课程改革核心——将运动观点引入几何，成了一种时尚。”[①]引入“图形的变换”能使图形动起来，有助于发现图形的几何性质，是研究几何问题的有效工具。特别是平移、旋转以及轴对称、中心对称等观念已被不少国家的中小学教材所吸收，并放在比较重要的位置。

《全日制义务教育教学课程标准（实验稿)》(2001)（以下简称《标准》）将“图形的变换”引入初中几何教学目标，提出“在7~9年级中，……学习平移、旋转、对称的基本性质，欣赏并体验变换在现实生活中的广泛应用，……”[②]，并将“图形的变换”放在一个非常重要的地位。

新课改下数学教材的编排充分体现了《标准》的这一精神，如华师大版不仅设置独立的章节来教授图形的轴对称、平移、旋转、相似，并且借助图形变换的方法来探索其他平面图形的性质（如等腰三角形、平行四边形的性质与识别等)；苏科版更是将图形的变换作为几何教材编排的一条主线，完全打破了传统教材以公理体系为主线的教材体系。

随着《标准》 将“图形的变换”引入初中几何教学目标，与之相对应的几何推理方式，即合情推理也成为了新课改下几何部分的又一大亮点。《标准》在推理与论证的方面提出：“在探索图形性质、与他人合作交流等活动过程中，发展合情推理，进一步学习有条理地思考与表达。……”[③]由此可见，《标准》强调从具体情景或前提出发进行合情推理。对推理的要求从传统的“纯粹的演绎推理”转向“先合情推理，后演绎推理”的模式；从单纯强调几何的推理价值转向更全面地体现几何的教育价值，特别是几何在发展学生空间观念，以及观察、操作、探索、合情推理

[①] 孔凡哲、崔英梅. 平移、旋转课程内容的中韩对比［J]. 小学教学研究，2006(4)：26-27.
[②] 中华人民共和国教育部. 全日制义务教育教学课程标准（实验稿). 北京：北京师范大学出版社，2001:37.
[③] 同上。

等方面“过程性”的教育价值。

1.1.2 图形的变换在中考的地位

【近四年江苏省十三大市中考图形与图形的变换的分值与比率】

	2006年		2007年		2008年	
	分值(分)	比率(%)	分值(分)	比率(%)	分值(分)	比率(%)
南京市	7	5.83	2	1.67	8	6.67
苏州市	15	12.00	9	7.20	10	7.69
无锡市	13	10.00	11	8.46	10	7.69
常州市	5	4.17	7	5.83	9	7.50
镇江市	5	4.17	10	8.33	7	5.83
扬州市	13	8.67	20	13.33	6	4.00
泰州市	10	6.67	18	12.00	7	4.67
南通市	7	5.38	6	4.00	9	6.00
盐城市	15	10.00	19	12.67	23	15.33
淮安市	9	6.92	19	12.67	21	14.00
宿迁市	13	8.67	15	10.00	17	11.33
徐州市	6	4.00	9	6.00	11	7.33
连云港市	3	2.00	11	7.33	6	4.00
合计	121		156		144	
平均	10.08	7.37	13	9.12	12	8.50

【09年江苏省中考数学为全省统一命题，分值为16分，比率为10.7%】

根据以上表格中的数据，我们发现虽然“图形的变换”这部分内容在整个初中数学教材中所占的篇幅很少，但是历年我省各市的中考题中图形的变换的比例却不少，并整体上呈上升趋势。特别是2010年、2011年苏州市数学中考试卷中第28题（共29题）分别为以三角形平移、正方形旋转为背景的动态问题，它们分别是当年数学中考卷的“把关题”之一、最大的亮点之一，由此全面考查学生的观察、操作、探索、合情推理、空间观念等几何综合能力，可见“图形的变换”对培养学生几何能力起到重要作用。

因此，近年来无论是教育研究者还是一线的中学数学教师对“图形的变换”这部分内容都产生了很大的研究热情，主要是从教材分析、教学设计、解题技巧、中考热点的角度进行研究。如今新课改已进入了第十个年头，对于学生在“图形的变换”这部分内容的学习现状到底如何呢？教师在这部分内容的教学上又有何体会

与困难呢？同样值得研究。

1.2 研究的问题

新课程改革已推出十年，在经历了课改之初的激烈争论与反响后，新课改精神已普遍融入当前中学数学教学，各版新教材在编排上已日趋完善，一线教师对新教材的使用已日趋成熟。在此环境下，本文对新课改中的最大亮点——“图形的变换”进行教学研究。“图形的变换”包括图形的轴对称、平移、旋转、相似四种，其中轴对称、平移、旋转同属于全等变换，是新课改的新增内容，随之而来的推理方式也是新课改的亮点之一，而相似变换不属于全等变换，与它们差别较大，同时相似是初中几何的传统内容，并非是新课改的特色，因此本文的研究将集中在图形的轴对称、平移、旋转这三种变换。(下文中“图形的变换”主要是指轴对称、平移、旋转三种变换)。

本文研究目前学生在“图形的变换”内容上的认知水平与推理能力如何？了解一线教师对“图形的变换”的教学如何处理？在教学过程中有何种体会与困惑？本文将根据研究结果，从“图形的变换”的概念、性质、典型例题三方面进行教学分析与设计，对“图形的变换”相关的中考试题进行深层分析，为课堂教学提出教学建议，为新课改的进一步推进作些许贡献。

1.3 研究的方法

在本文的研究过程中，笔者采用了文献分析法、测试法、问卷调查法、实证研究法等的研究方法。

我运用文献分析法查阅了初等数学、教育学、心理学、学科教学、数学课程论等相关文献，为论文写作奠定了理论知识与专业文化基础；查阅与本课题相关的文献资料并分析归纳，积累了不少有关“图形的变换”的资料，借鉴许多专家学者、一线教师的研究成果与研究方法，进行本文的研究。

几何教学的目的主要是学生认知水平的发展与推理能力的培养，因此笔者精心编制测试卷，以测试法研究学生分别从学生在“图形的变换”这部分内容上的认知水平与推理能力。为了正确掌握“图形的变换”的教学的情况，首先，制定了较为科学的调查问卷，以问卷调查法从中学数学教师，了解图形的变换在教与学两方面存在的一些困难。

第 2 章　文献综述

2.1 国外中学数学课程中“图形的变换”内容设置概述

2.1.1 英国中学数学课程中“图形的变换”内容设置概述

英国《标准（2000)》将内容分为“使用和应用数学”、“数与代数”、“图形、空间与测量”以及“数据处理”四个领域，与中国《标准》内容领域的具体划分有一定的相似性。英国《标准（2000)》的“图形、空间与测量”和中国《标准》的“空间与图形”对应，内容设置包括“角（圆周角、平角、直角和对顶角、锐角、钝角和反射角，角的大小，平行线中有关角的性质，三角形中的角，对四边形的分类，勾股定理)，圆（直径与圆的关系)，三维图形（几何特征，平面投影)，旋转，平移，反射，伸缩变换，坐标系，测量（时间和质量测量，度量衡，速度和密度的测量)，构图（线段，角，二维图形，立方体，正四面体，正四棱锥，中垂线和角平分线，面积与体积，圆的周长和面积)，轨迹”。其中“旋转、平移、反射、伸缩变换”即为“旋转、平移、对称、相似”四种基本的图形变换。[①]

2.1.2 日本中学数学课程中“图形的变换”内容设置概述

日本中学数学课程内容也包括轴对称、平移、旋转和相似四种图形变换。但对这部分内容的课程目标日本只用了“认识”和“欣赏”两个层次，而中国不仅要求学生能够“认识”和“欣赏”，还要对其性质能够理解，并能做出简单图形经过轴对称、平移和旋转之后的图形，灵活地运用变换进行图案的设计和组合。关于相似变换的内容，日本的处理方式更清晰，将相似从“变换及对称”中独立出来，归为“全等及相似”，一方面，相似变换紧接着其它三种变换之后介绍，顾及到了知识的整体与连贯性，另一方面，将相似与全等三角形的内容同时安排，更利于学生理解和掌握全等和相似的性质及判定的区别和联系。[②]

2.1.3 美国中学数学课程中“图形的变换”内容设置概述

在美国中学数学课程内容中，处理几何内容的方法除演绎法外，还包括了向量、坐标以及变换等方法。《美国标准(2000)》认为所有 K～12 年级的学生要“运用变换和对称分析数学情境”，9 — 12 学段的学生要“通过草图、坐标、向量、函数

[①] 傅赢芳．数学应用的中英初中数学课程比较[D]．浙江师范大学，2003:13-14.
[②] 杨俊波．中日初中数学课程比较[D]．沈阳师范大学，2007:12.

和矩阵等理解和表示物体在平面上的翻折、反射、旋转及缩放。”[1]可见，美国在处理几何内容时所采用的方法更丰富，但与中国一样最为重要的还是演绎、向量、坐标和变换，其中向量法和坐标法在思路上是完全一致的。[2]

2.2 中国数学课程中“图形的变换”的相关概述

2.2.1 中国数学课程标准中“图形的变换”内容设置概述

中国数学课程标准又指出，7～9 年级的推理与论证的学习应从以下几个方面展开：“在探索图形性质、与他人合作交流等活动过程中，发展合情推理，进一步学习有条理地思考与表达；在积累了一定的活动经验与掌握了一定的图形性质的基础上，从几个基本的事实出发，证明一些有关三角形、四边形的基本性质，从而体会证明的必要性，理解证明的基本过程，掌握用综合法证明的格式，初步感受公理化思想。”简而言之，7～9 年级的推理与论证应“先合情推理，后演绎推理”，七年级、八年级上半学期主要发展合情推理，八年级下半学期、九年级主要发展演绎推理。

从上述研究不难发现，一些发达国家都将“图形的变换”引入教学大纲或课程标准内容，并都认同了几何的推理不能再只局限于演绎推理，而应适当的加入合情推理。由此可以说，将“图形的变换”引入我国中学数学课程，是顺应了现代数学和现代数学教育的发展趋势的。

2.2.2 苏科版初中数学教材中“图形的变换”内容的编排概述

（一）平移变换出现在“七（下）第七章平面图形的认识（二）”中，章节介绍：

第1节探索直线平行的条件

第2节探索平行线的性质

第3节图形的平移

第4节认识三角形

第5节三角形的内角和

“平移”是现实生活中广泛存在的现象，它不仅是探索图形性质的必要手段，而且也是解决现实生活中的具体问题以及进行数学交流的重要工具。在直观的基础上，通过分析，体会平移的应用价值和丰富的内涵，认识和欣赏平移，探索平移的基本性质，促进观察、分析、归纳等一般能力和审美意识的发展。在“平移”的教

[1] 唐恒钧．中美中小学几何课程比较及其启示[D]．浙江师范大学，2005:7-8.

[2] 刘绍学，章建跃．几何中的向量方法[J]．数学通报，2004(3)：7-8.

学，教材立足于学生已有的生活经验和初步的数学活动经验，首先从观察生活中的平移现象开始，直观地认识平移，并在此基础上，分析生活中平移现象的共同规律，得出平移的基本性质，再运用其基本性质进行简单的平移作图和简单的图案设计。

（二）轴对称变换出现在“八（上）第一章轴对称图形”中，章节内容呈现顺序为：认识轴对称和轴对称图形——探索轴对称的性质——设计轴对称图案——探索线段、角、等腰三角形、等边三角形、等腰梯形的轴对称性及其相关的性质——数学活动。内容呈现的形式为“问题情境——探索活动——归纳结论”。

轴对称是现实生活中广泛存在的现象，探索轴对称的基本性质，认识轴对称在现实生活中的广泛应用，欣赏现实生活中的轴对称图形，是密切数学和现实之间联系的重要内容，掌握轴对称和轴对称图形的性质，对学生更好地认识现实世界，描述图形的形状和位置关系，发展直觉思维和空间观念，提高合情推理和初步的演绎推理能力有着十分重要的作用。

教材突出探索活动，使学生亲历“做数学”的过程。探索轴对称的性质和轴对称图形的性质，课本安排了折纸、画图、印墨迹、操作、猜想等多种学生喜欢的实践活动，创设了大量贴近学生生活的有趣的问题情境，体现了本套教材“做数学”的特色。引导学生在做中感受和体验，在做中学习数学知识，在做中培养创新精神。在亲历观察、操作、推理、想象的过程中，感悟轴对称与轴对称图形的数学本质，明晰线段、角、等腰三角形、等边三角形、等腰梯形的对称性及其相关性质，掌握运用轴对称图形的性质解决一些问题的思想方法，发展空间观念，提高动手能力，形成创新意识。

（三）旋转变换出现在“八（上）第三章中心对称图形（一）”中，在此之前，学生已学习了“图形的平移”、“轴对称和轴对称图形”，初步积累了一定的图形变换的数学活动经验，教材在此基础上，立足于学生已有的生活经验和初步的数学活动经验，从观察生活中的旋转现象开始，直观地认识旋转，然后让学生观察、操作、画图等数学活动，分析旋转现象的共同规律，得到旋转的基本性质，丰富对图形变换的认识。教材从图形旋转的特殊情形——旋转角为 180°入手，展开对中心对称性质的探索，并在此基础上进行简单的中心对称作图。

教材以中心对称为主线，展开对平行四边形、矩形、菱形、正方形以及三角形中位线、梯形中位线性质的研究。其主要表现在以下 3 个方面：（1）通过操作

实践等活动，探索旋转图形、中心对称与中心对称图形的性质，利用中心对称图形的性质，研究平行四边形的性质，在此基础上展开对矩形、菱形、正方形的研究；（2）利用中心对称变换，研究三角形中位线和梯形中位线的性质，并通过中心对称变换向学生展示重要的数学思想方法——三角形中位线性质的研究转化为平行四边形性质的研究，梯形中位线的性质研究转化为三角形中位线性质的研究；（3）课本在用特殊事物的特殊属性的方法给出平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念的同时，紧扣中心对称这一线索，通过操作、观察活动，使学生理解平行四边形、矩形、菱形、正方形分别是由三角形绕其一边的中心、直角三角形绕其斜边的中点、等腰三角形绕其底边的中点、等腰直角三角形绕其底边的中点旋转180°而成的中心对称图形，向学生展示这些特殊的四边形的形成过程，为研究平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质提供新的方法。

在呈现形式上，教材突出图形性质、常用判别方法的探索过程，引导学生通过图形变换和简单的推理，主动地探索图形的有关性质和常用的判别方法，并在自主探索的过程中，学会思考，学会有条理地表达。此外，教材在引导学生说理方面安排了两个层次：一是通过操作和合情推理探索，发现结论；二是用推理的形式说明理由，发展学生有条理地思考和表达的能力。这一安排，使学生能在直观的基础上学习说理，体现直观与简单推理的融合。

2.2.3 高等数学观点下图形变换的定义、性质概述

《标准》把图形的变换引入初中几何的教学内容中，并强调了图形变换的地位，突出了变换在图形认识过程中的作用。然而《标准》以及教材都没有给出变换的定义。在近代数学里，用“映射”来定义变换：从一个集合A到其自身的映射f，即f：A—A，叫做变换。几何变换就是图形到图形的一种映射。[①]

（一）轴对称变换

所谓轴对称变换，通俗地说是把一个图形变成它的轴对称图形的变换，就是轴对称变换。轴对称变换[②]的严格定义如下：如果存在一条定直线l，对于图形F上每一点P，作出关于l的对称点P_1(即线段PP_1被l所垂直平分)，所有这样的对称点P_1形成的图形为F_1，则由F变成F_1的变换，叫做轴对称变换，l叫做对称轴。其中的F、l、F_1三者中任意两个确定，那么第三个就唯一确定。

轴对称变换的性质可以总结归纳为：

① 刘盛利. 中学数学对称思想研究[D]. 内蒙古师范大学，2007:40.

② Richard R. Skemp. 数学学习心理学[M]，陈泽民译. 北京：九章出版社，2002.

性质 1　轴对称变换把线段变成与它相等的线段。

性质 2　轴对称变换把任意图形变换成与它镜像相同的图形。即我们能使两图形于它们的对称轴对折重合。

性质 3　具有同一对称轴的两个轴对称变换的乘积是恒等变换。即相当于在对称轴不变的情况下，把一个图形连续作两次轴对称变换，第一次是由原图到它的象，第一次是由象到原图。

性质 4　轴对称变换有无穷多个二重点，他们都是对称轴上的点。即只要两个图形的对应点重合，则这两点一定在对称轴上。如作线段关于它自身所在的直线轴对称变换，仍是它自身，二重点都在对称轴上。

性质 5　轴对称变换有无穷多条二重线，它们是对称轴或垂直于对称轴的直线。[①]

（二）平移变换

所谓平移变换，描述性定义是使图形 F 上的点沿同一方向，平移同一距离得到图形 F_1。而平移变换[②]的严格定义是在向量基础之上给出的：如果平面上图形 F 经过变换得到图形 F_1，F 中每一点 P 在 F_1 中的对应点为 P_1，向量 $\overline{PP_1}$ 总等于已知的向量 $\bar{a}$，那么这个变换叫做平面上的平行移动，简称为平移。$\bar{a}$ 的长度 $|a|$ 叫做平移距离，$\bar{a}$ 的方向叫做平移方向。更通俗地讲，平移变换就是图形上的所有点都沿同一个方向，运动相等的距离。

平移变换的性质可以总结归纳为：

性质 1　平移的距离为零时是恒等变换。即原图形没变。

性质 2　两个平移的乘积是一个平移。我们还可将该性质推广到 n 个平移的乘积仍是一个平移。

性质 3　平移的逆变换是一个平移。即将图形 F 沿 $\bar{a}$ 方向平移的 F_1 是平移变换，那么将图形 F_1 再沿 $-\bar{a}$ 方向平移的图形 F_2 应该还是一个平移。

性质 4　非恒等变换的平移没有二重点，但有无穷多条二重线（这些直线上的点都变了，但直线的位置没有变），它们都平行于平移方向。[③]

（三）旋转变换

所谓旋转变换[④]，严格来讲是：将平面图形 F 上各点，绕一定点 O 旋转同一个

[①] 刘盛利．中学数学对称思想研究[D]．内蒙古师范大学，2007:40.
[②] 裴娣娜．教育研究方法导论[M]．合肥：安徽教育山版社，2005：71－88.
[③] 刘盛利．中学数学对称思想研究[D]．内蒙古师范大学，2007:42.
[④] 郑毓信．数学教育：动态与省思[M]．上海：上海教育出社，2005：64－69.

角度θ得图形 F_1，这种变换叫做旋转变换，简称为旋转。记作 R(O，θ)(F)= F_1。定点 O 叫做旋转中心，角度θ叫做旋转角。即一个旋转中心和一个旋转角决定一个旋转。当旋转角为 180°时，叫做中心对称变换。当旋转角为 0°或 360°时，其实图形并未改变，我们称之为恒等旋转变换(幺变换)。

旋转变换的性质可以总结归纳为：

性质 1 旋转是把任意图形变成与它真正一样的图形。

性质 2 具有同一旋转中心的两个旋转的乘积是一个旋转，即 R(O，θ_1)·R(O，$-\theta_2$)=R(O，$\theta_1+\theta_2$)。其实就是将旋转角为$\theta_1+\theta_2$的旋转变换分两次来完成，中间停顿一下继续同向旋转即可。

性质 3 旋转的逆变换是旋转变换，且 R^{-1}(O，θ)=R(0，$-\theta$)，即将原图按顺时针方向绕点 O 旋转变换θ角度是旋转变换，那么逆时针绕点 O 旋转还是旋转变换。因为旋转的方向相反，故旋转角互为相反数。

性质 4 当旋转角等于 360°时，旋转变换只有一个二重点，是旋转中心；中心对称变换有无穷多条二重线，它们都通过对称中心，非恒等变换和中心对称的旋转没有二重线。

性质 5 将一个图形作两次不同的中心对称变换，所得的图形与原图形的对应点连线平行且相等。①

2.2.4 与图形变换相对应的推理方式概述

中学几何教材引入了“图形的变换”，同时也引入了合情推理方式。《标准》指出，在探索图形性质、与他人合作交流等活动过程中，发展合情推理，配合一定的数学说理，让学生通过直观感知、操作确认、归纳类比等方式认识几何图形的特征、性质及识别。“空间与图形”对推理的要求发生了变化，从纯粹的演绎推理转向“先合情推理，后演绎推理”的模式，强调从具体情景或前提出发进行合情推理；从单纯强调几何的推理价值转向更全面地体现几何的教育价值，特别是几何在发展学生空间观念，以及观察、操作、探索、合情推理等方面“过程性”的教育价值。②

（一）合情推理的含义

“合情推理”一词最早始见于 G·波利亚的《数学与猜想》。他指出：“一个认真想把数学作为他终身事业的学生必须学习论证推理，这是他的专业也是他那门学科的特殊标志。然而为了取得真正的成就他还必须学习合情推理，这是他的创造

① 刘盛利．中学数学对称思想研究[D]．内蒙古师范大学，2007:44.
② 鲍建生、周超．数学学习的心理基础与过程[M]．上海：上海教育出社，2009：279-288.

性工作赖以进行的那种推理。"[①]G·波利亚在致力于改变美国数学落后状态的工作中，大力倡导合情推理的方法，并获得成功。他通过对数学创造和数学学习等具体思维过程的再现、分析，提出了"合情推理"的思维模式，开辟了一条与传统的思辨方式截然不同的新途径。G·波利亚是在与传统观念普遍认可的演绎推理相对立的意义上引入合情推理的，并力图将数学推理的非演绎机制尽可能地涵盖其中。[②]

弓爱芳，夏靖在"新课程理念下对合情推理的再认识"一文中认为：合情推理的说法分为两大类：一类从逻辑学的角度出发，认为推理是根据已知判断提出新的判断的思维形式，推理有两种，论证推理与合情推理，前者回答如何证明定理的问题，后者回答如何发现定理的问题，并且认为，合情推理的主要形式是归纳推理与类比推理。我们把它称为狭义的合情推理。另一类从数学方法论角度出发，不仅把合情推理看作是推理，而且看作是科学的发现方法。因而，连同归纳、类比在内，把观察、实验、联想、猜测、直观等一系列科学发现的手段、方法都归到了合情推理的范畴。我们把它称作广义的合情推理。[③]

从数学教育的角度看，广义的合情推理更具有意义。合情推理是一种推理过程，即在认知过程中，人们根据已有的知识结构与经验、能力水平，在某种情境和过程中，运用观察、实验、归纳、类比、联想、直觉等非演绎的（或非完全演绎的）思维形式，推出关于客体的合乎情理的推理过程，产生的认识可以是不确定的。[④]

（二）合情推理与演绎推理

正如波利亚所说："数学家的创造性工作成果是论证推理，即证明；但是这个证明是通过合情推理，通过猜想而发现的。只要数学的学习过程稍能反映出数学发明过程的话，那么就应当让猜测、合情推理占有适当的位置。"[①]因此，合情推理与演绎推理是相辅相成的关系，两者既对立，又统一，是辩证的统一体。

从逻辑的角度看，演绎推理和合情推理是不同的思维形式；从思维的角度看，二者在思维过程中是联系密切、密不可分的：[⑤]

（1）演绎推理离不开合情推理。作为演绎推理前提的已知判断，归根结底是人们通过实践获得的，而实践直接提供的往往是非常具体的个别的知识，这些知

① [美]乔治·波利亚．数学与猜想(第一卷) [M]．李心灿等译．北京：科学出版社，2001：序言第V页．
② 赵莉．合情推理的中学数学教学研究[D]．沈阳师范大学，2007：3．
③ 刘若菡．高中数学合情推理的教学研究[D]．东北师范大学，2009:5．
④ 杨松．基于合情推理思想的教学研究——以高中解几何为例[D]．上海师范大学，2010:8．
⑤ 杨树森．普通逻辑学[M]．合肥：安徽大学出版社，2001：227．

识要上升为普遍的知识，就离不开合情推理。

（2）合情推理也离不开演绎推理。这表现在两个方面：一是人们通过实践获得经验材料(这是合情推理的主要前提)的过程，需要有理论的指导，而理论思维的过程主要是运用演绎推理；二是合情推理得到的或然性结论，需要运用演绎推理加以理论证明，否则不能成为人们普遍接受的科学理论。

（3）人们的认识过程是一个实践一认识一再实践一再认识的循环往复以至无穷的过程，在这一认识链条中，从实践经验上升到普遍理论的过程主要运用合情推理，而用已有的科学理论指导实践的过程，则主要运用演绎推理，缺少其中任何一环，认识的链条就会中断。

（4）在思维过程中，演绎推理和合情推理总是交错进行，你中有我，我中有你。从思维的角度来看，合情推理与演绎推理并不像逻辑上划分的那么清，思维的过程就是从合情推理开始、由演绎推理论证，再由合情推理推广，如此循环，很难区分是演绎推理还是合情推理。

2.3 初中数学“图形的变换”教学研究的文献综述

在新课程背景下，“图形的变换”作为一块全新的内容进入初中几何教材，并占有重要的地位，这对于每一位中学数学教师来说，都是一种对教学理念与教学方法的挑战。因为，笔者作为一名一线的数学教师，在多年的教学实践中非常重视这部分内容的教学尝试与探索，同时也查阅了大量有关图形变换的研究资料。目前，在对“图形的变换”的教学研究，主要集中在以下几个方面：

2.3.1 对“图形的变换”进入中学教材的必要性与可行性的研究

在新课改初期，对于初中几何引入“图形的变换”内容，特别是与之相对应的合情推理方式，很多教学界人士、一线数学教师都产生了疑虑、争论甚至是反对。因此产生了很多研究“图形的变换”进入中学教材的必要性与可行性的论文。

例如：论文《图形运动问题的分析》[①]一文中，具体指出了“图形的变换”在中学数学中的必要性和可行性：（1）增加“图形的变换”是为了适应现代化科技发展的需要；（2）实践证明中学生学习“图形的变换”是可行的；（3）“图形的变换”有利于新教材的构建；（4）“图形的变换”能促进学生认知结构的优化组合。

又如《初中数学课程与信息技术的整合》[②]一文中也提及“图形的变换”在中学

[①] 孔凡哲、芦淑坤．平移、旋转、现象、工具和思想方法[J]．中学生数理化，2005(10):4-5.
[②] “中学数学课程教材与信息技术整合的研究”课题组．中学数学课程教材与信息技术整合的思考[J]．课程 教材 教法，2002(10):51.

数学教材中的必要性和可行性：引进"图形的变换"，革新了初中部分传统内容的处理方法，能够降低教学难度；可以更新学生对空间形式的思维方式，为学生建立一种符合现代教学发展要求的思维模式；进一步强化了中学数学对应用数学的基础作用。

2.3.2 对"图形的变换"应用价值的研究

在各类期刊杂志上还有很多文章指出："图形的变换"是解决实际问题的工具，引入"图形的变换"，能更好的为高中数学及高等数学服务，"图形的变换"理论是学习很多应用科学必要的基础等。这些都体现了"图形的变换"的应用价值。例如：论文《初中数学"平移与旋转"教材分析与教学研究》[①]一文中指出："图形的变换"的应用价值主要体现在两方面：一是平移、旋转和翻折是几何变换中的三种基本变换.所谓几何变换就是根据确定的法则,对给定的图形(或其一部分)施行某种位置变化，然后在新的图形中分析有关图形之间的关系。这类实体的特点是：结论开放，注重考查学生的猜想、探索能力；便于与其它知识相联系，解题灵活多变，能够考察学生分析问题和解决问题的能力；其中所含的数学思想和方法丰富，数字与图形的结合、方程的思想及数字建模，函数的思想，分类讨论的思想方法等。二是平移与旋转在各数学分支中的应用，包括平移与旋转方法在平面几何、立体几何、解析几何、代数、三角形和其他学科中的应用。

2.3.3 对"图形的变换"教学的研究

作为一线数学教师，在各类期刊杂志上发表的文章，主要是自己在"图形的变换"这部分内容的教学实践，或是"图形的变换"这类新题型的解题研究，特别是当"图形的变换"成为了中考的新热点。

如《平移、旋转、现象、工具和思想方法》中，对于中学数学中如何进行平移与旋转的教学提出了自己很好的建议；又如《平移与旋转教学设计》一文，对怎样进行具体教学给出了具体的教学设计等。

如《例说图形变换在解题中的应用》[②]、《平移和旋转在解决问题中的巧用例说》[③]、《巧用图形变换探究解题新途径》[④]、《图形变换在解题中的应用》[⑤]等文章中，以教学案例的方式，展示了图形变换作为一种数学方法，在几何解题中的应

[①] 张文蔚．初中数学"平移与旋转"教材分析与教学研究[D]．西北师范大学，2007:12-19.

[②] 张良江．例说图形变换在解题中的应用[J]．新课程（教育学术），2010(1):124-125.

[③] 薛美．平移和旋转在解决问题中的巧用例说[J]．中学数学杂志（初中版），2009(6):37-38.

[④] 杨浩．巧用图形变换探究解题新途径[J]．上海中学数学，2007(9):47-48.

[⑤] 姚荣盛．图形变换在解题中的应用[J]．中学数学杂志（初中版），2008(4):39-40.

用。又如《例析以旋转为载体的中考试题》[①]、《透析以图形变换为题材的中考压轴题》[②]、《图形变换思想在中考中的应用》[③]、《图形变换——中考数学压轴题命题的热点》[④]等文章中，以历年的中考真题为例，分析与图形变换相关的试题特点与其考察重点。

在查阅文献的过程中，笔者发现在大量关于"图形的变换"的文章中，对"图形的变换"的教育价值、应用价值、教材研究、教学研究很多，但鲜有对目前中学生在"图形的变换"内容上的学习现状研究与目前一线教师教学状况的研究。新课程改革已进入了第十个年头，新课程理念已被一线教师广泛接受，新教材在几轮教学实践中被不断完善，现在我们应进一步研究学生在"图形的变换"内容上的学习现状如何？学得容易吗？掌握得好吗？教师在"图形的变换"内容上的数学现状如何？

2.4 相关的理论基础

几何教学的目的主要是学生认知水平的发展与推理能力的培养。因此，我查阅了大量关于中学生认知发展、推理能力培养、几何思维水平方面的理论。

2.4.1 皮亚杰的认知发展理论

皮亚杰认为心理发展是认知结构不断发展变化的过程。认知结构是一种内在的心理结构，是不同发展水平的儿童对外界事物作出反应的组织方式。认知结构的发展涉及图式、同化、顺应和平衡四个概念。图式是指动作或活动的结构或组织。这里的动作或活动是指外部动作和内化了思维活动。图式最初来自遗传，是一些先天的无条件反射，以后在适应环境的过程中，图式不断丰富起来。图式从低级向高级发展是通过同化和顺应两种形式进行的。同化是指主体将环境刺激信息纳入并整合到已有的图式之中，以加强和丰富原有的认知结构。顺应是指主体已建立的认知结构不能同化外界新的刺激，就要按新刺激的要求改变原有认知结构或创造新的认知结构，以适应环境的需要。因此，同化只是数量上的变化，不能引起图式的改变；而顺应则是质的变化，创立了新的图式或调整原有的图式。同化和顺应两种形式是相辅相成、协调统一的的过程。平衡是主体的发展趋向，主体主动趋向于与环境平衡；这种平衡是通过同化和顺应两种机能实现的。皮亚

[①] 王凤学．例析以旋转为载体的中考试题[J]．中学数学教育，2007(2):33-35.
[②] 马娇，孙晓峰．透析以图形变换为题材的中考压轴题[J]．中学数学月刊，2008(3):21-24.
[③] 周赛春．图形变换思想在中考中的应用[J]．上海中学数学，2010(3):24-26.
[④] 陈德前．图形变换——中考数学压轴题命题的热点[J]．中学数学杂志（初中版），2007(5):50-52.

杰强调主体在认知发展结构过程中的主动性。[①]

著名数学教育家斯根普认为，理解是一个同化和顺应的过程，即把新的认知结构纳入到学习者已有的认知建构之中。建构主义数学教学观重视学生数学认知水平发展过程中的主动建构，运用观察、实验、类比、归纳、联想等方法是个体主动建构的桥梁，个体对新信息进行检录、分析、过滤、组合以形成图式过程，当新信息不能被建构时，则原猜想被推翻，需要重新猜想；当同化、顺应完成时，认知建构将在原有水平上有一定提高。建构主义强调以学生为主体，重视教学过程中问题情境的创设，重视教学过程中学生的自我建构。“建构主义数学教学有如下特征：主体参与、情境教学、个体体验、合作学习”。[②]

皮亚杰把儿童的心理发展划分为四个阶段。他的心理发展阶段论观点为：心理发展表现为连续发展过程中的阶段性；每个阶段都具有独特的典型特征：各阶段的发展次序是固定的；前一阶段与后一阶段具有阶段性，前一阶段是后一阶段的前提，也是后一阶段的量的积累过程，先前的认知结构包含并融合在后继的结构之中。皮亚杰将儿童心理发展划分的 4 个阶段为：

1、感知运动阶段（0～2 岁）：这个阶段儿童主要凭借感知和运动之间的关系获得动作经验，在这些活动中形成了一些低级的行为图式，以此来适应外部环境，进一步探索外界环境。这一阶段儿童的认知活动处于感知动作思维水平，只限于对当前直接感知的环境施以动作。

2、前运算阶段（2～6、7 岁）：这个阶段儿童的主要特征是把上一阶段中获得的感知运动图式内化为表象系统，具有了符号功能，开始能够运用语言或符号来代表他们经历的事物，但还不能很好地掌握概念的概括性和一般性，具体表现为：（1）泛灵论，认为外界的一切事物都是有生命的。（2）自我中心，认为所有的人与自己都有相同的感受，不能从他人的角度看待问题。（3）思维的不可逆性，只知道 A>B，不知道 B<A。（4）未掌握守恒。掌握守恒是指不论事物的形态如何变化，儿童都知道其本质是不变的。这一阶段的认知活动处于表象思维水平。

3、具体运算阶段（6、7 岁～11、12 岁）：这个阶段儿童的主要特征是获得了守恒概念，思维具有可逆性，可以进行逻辑运算，但仍需要具体事物的支持，因此，这一阶段的认知水平处于依靠具体经验支持的逻辑思维水平。

4、形式运算阶段（11、12 岁～14、15 岁）：这个阶段儿童的主要特征是思维

① 皮亚杰著．发生认识论原理[M]．王宪钿等译．北京：商务印书馆，1981．
② 郑毓信．建构主义之慎思[J]．开放教育研究，2004(1):4-7．

摆脱了具体内容的约束，使形式从内容中解脱出来，能够提出假设，凭借演绎推理等形式解决抽象问题，其认知活动达到抽象逻辑思维水平。①

由皮亚杰的理论可知，学生进入初中以后，形式运算思维开始发展，并逐步走向成熟，学生的思维处于从形象逻辑思维向抽象逻辑思维过渡的时期，因此在教学中要充分考虑初中阶段学生的思维特点，在教学设计上要有利于学生思维的发展。比如，处于具体运算阶段的儿童，虽然思维有了很大的发展，但是仍需借助表象的支持，因此直观教学仍不可少；处于形式阶段的儿童可获得以命题形式呈现的概念与规则，但是大多数中学生仍未到该发展水平，因此中学生学习抽象概念与规则，仍需要经验的支持。

2.4.2 范·希尔几何思维的五个水平

本研究是对几何内容进行教学研究，因此有必要对范希尔夫妇的几何思维发展理论进行介绍。

在五十年代的荷兰，几何教学所面临的问题是很普遍的。范希尔夫妇作为荷兰一所中学的数学教师，每天都亲身经历着这些问题，最让他们感到困惑的是教材所呈现的问题或作业所需要的语言及专业知识常常超出了学生的思维水平，这使得他们开始关注皮亚杰的工作。经过一段时间的研究，他们提出了几何思维的五个水平。

层次 0：视觉(visuality)儿童能通过整体轮廓辨认图形，并能操作其几何构图元素（如边、角）；能画图或仿画图形，使用标准或不标准名称描述几何图形；能根据对形状的操作解决几何问题，但无法使用图形之特征或要素名称分析图形，也无法对图形做概括的论述。

层次 1：分析(analysis)儿童能分析图形的组成要素及特征，并依此建立图形的特性，利用这些特性解决几何问题，但无法解释性质间的关系，也无法了解图形的定义；能根据组成要素比较两个形体，利用某一性质做图形分类，但无法解释图形某些性质之间的关联，也无法导出公式和使用正式的定义。

层次 2：非形式化的演绎(informal deduction)儿童能建立图形及图形性质之间的关系，可以提出非形式化的推论，了解建构图形的要素，能进一步探求图形的内在属性和其包含关系，使用公式与定义及发现的性质做演绎推论。但不能了解证明与定理的重要性，不能由不熟悉的前提去建立证明结果的成立，也未能建立

①皮亚杰著．发生认识论原理[M]．王宪钿等译．北京：商务印书馆，1981．

定理网络之间的内在关系。

层次 3：形式的演绎(formal deduction)学生可以了解到证明的重要性和了解“不定义元素”、“定理”和“公理”的意义，确信几何定理是需要形式逻辑推演才能建立的，理解解决几何问题必须具备充分或必要条件；能猜测并尝试用演绎方式证实其猜测，能够以逻辑推理解释几何学中的公理、定义、定理等，也能推理出新的定理，建立定理间的关系网络，能比较一个定理的不同证明方式；能理解证明中的必要与充分条件。

层次 4：严密性(rigior)在这个层次能在不同的公理系统下严谨地建立定理以分析比较不同的几何系统，如欧氏几何与非欧氏几何系统的比较。

范希尔夫妇几何思维发展理论认为：几何学习不是一个连续的过程，而是一个跳跃的阶段过程，思考能力在某一水平上需要停留一个时期，这些水平是分先后顺序、分层次的。学生在某一水平上要达到理解和掌握，就必须掌握前一水平上的大部分能力；反之，学生在某一水平上理解不深的概念，到了高一水平就可能理解清楚了。水平间的发展，不是靠年龄的增长或身体的成熟，而是靠教学来推动，学生可以通过若干教学阶段取得进步，但是不可绕过某一水平而向高一水平发展。

范希尔夫妇的上述几何思维水平的划分，已经提出了如何安排学习材料的要求，也指出了每个阶段教学的起点和目标。对此，他们又提出了相应教学阶段的划分理论。

阶段 1：学前咨询(information)——教师和学生就学习对象进行双向交谈，教师了解学生如何理解指导语，并且帮助学生理解要学习的课题。学生提出问题，对课题的对象和运用的词汇做出观察，确定下一步的学习。

阶段 2：引导定向(guided Orientation)——教师为学生仔细安排活动顺序，使学生认识到学习进行的方向，逐渐熟悉这一结构的特性。在这个阶段中，许多活动都是引起一个特定的反应的一步（简单）作业。

阶段 3：阐明(explication)——通过前面的经验和教师最小程度的提示，学生明确了词汇的意义，表达自己对内在结构的看法。通过这一阶段，学生开始形成学习的关系系统。范希尔夫妇指出：在这个阶段的过程中，经验的获得取决于正确的语言符号和学生们在课堂上学习透过讨论去表达他们所观察到的结构的意见，老师只需注意这些讨论所使用的习惯措词。关联系统在这阶段就有一部份形成了。

阶段 4：自由定向(free orientation)——在这个阶段，学生碰到多步作业或能以不同方式完成的作业。在寻找方法和解决问题过程中，学生获得了经验。通过自己确定学习领域的方向，他们对学习对象之间的关系越来越明确。按照范希尔夫妇的观点：这个阶段是自由探索，调查的范围是大多数学生知道的，但学生仍需迅速地找到他的方向。

第3章 关于图形变换的教学现状研究

3.1 关于初中生图形变换的能力实验设计

3.1.1 实验的目的

通过研究学生在图形变换测试中的解题情况和解题结果，分析了解学生对于图形变换的认知水平与推理能力的现状，并为进一步完善图形变换的课堂教学设计与例题编排提供现实依据。

3.1.2 实验的内容

问卷共四大题，均为主观题。（详细问卷见附录一）第1题，考查轴对称、平移和旋转的定义；第2题，考查轴对称的性质（成对称轴的两个图形全等）；第3题，考查旋转的性质（旋转前后对应点到旋转中心的距离相等，旋转角相等）；第4题，考查平移的性质（平移前后图形的形状和大小都不变）。第2、3、4题虽然考查的是轴对称、平移、旋转各自的性质中的一个方面，但由于这三种图形变换的性质有类比性，都是从变换前后图形的全等关系、变换前后对应点连线之间的关系、以及变换前后图形的形状和大小是否改变这三方面来考虑的，问卷在设计分别从三个变换的不同方面进行测试，因此本实验对学生图形变换的认知水平的考查是比较全面的。

问卷除第1大题以填空题得形式给出外，第2、3、4题中分别设计了四个小问，分别从四个方面来考查学生的认知结构的广泛性、认知结构的组织性、综合推理能力和推理的反思能力。认知结构的广泛性是指学生头脑中储存的与解决图形变换有关的基础知识的数量，这些基础知识包括三角形的基本概念、定理、性质，图形的面积求法等；认知结构的组织性是指学生对头脑中相关知识的组织方式，包括常规程序和解题策略，常规程序是指非算法程序，如三角形有关性质、定理的应用，解题策略是指在不熟悉的情况下取得进展的技巧。综合推理能力包括直观推理、结构关联推理和形式逻辑推理等；推理的反思能力则是指对整个推理过程进行反思，找出推理过程的本质关系、问题解决的关键。

试题形式如下：①联系相关知识，要求被试根据所给问题写出与其有关的概念和定理；②考虑问题的角度，要求被试写出从哪些角度思考所给问题；③给出正确的解答，要求被试根据几何定理写出规范的问题解答步骤；④总结关键，要

求被试总结解题的关键，考察被试对推理过程的了解。

3.1.3 实验的对象

选取苏州市彩香中学初二学生为实验对象，在初二选取两个班，共65人，所选取的班级均处于本年级中等水平，两个班级使用的都是苏科版的教材。

3.1.4 实验的总体结果

问卷共65份，其中有效问卷为64份。

	满分	均分	得分率
第一题	24	21.3	88.5%
第二题	26	20.3	77.9%
第三题	26	18.8	72.1%
第四题	24	11.3	46.9%
总分	100	71.1	71.1%

3.1.5 实验结果的分析

3.1.5.1 从解题情况分析学生的认知水平

第一题考查运用平移、旋转、轴对称的定义判断三组图形属于哪种图形变换，第一组图形是ΔABC经平移后得到$\Delta A'B'C'$；第二组图形是ΔABC绕某一点旋转180°后得到$\Delta A'B'C'$，也可以说是中心对称；第三组图形是ΔABC经轴对称后得到$\Delta A'B'C'$。

关于平移、旋转、轴对称的定义的引入与给出，苏科版教材都是从实际生活中这三种变换的现象入手，让学生感受三种变换的基本涵义，并随之给出对这三种变换的描述性的定义。教材中给出“在平面中，将一个图形沿着某个方向移动一定的距离，这样的图形运动叫做图形的平移；在平面内，将一个图形绕一个定点转动一定的角度，这样的图形运动称为图形的旋转，这个定点称为旋转中心，旋转的角度称为旋转角；把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么称这两个图形关于这条直线对称，也称这两个图形成轴对称，这条直线叫做对称轴。”在第一题的设计上，笔者没有给出旋转中心和对称轴，是为了避免对学生产生暗示作用，因此，学生需要在理解三种变换定义的基础上，根据已有的经验和空间想象能力，直观判断图形的变换。

从同学们的回答情况看，第一题有50名同学全对，有14名同学出现了错误，其中有2名同学是全错。第一空有56名同学正确的回答出“平移”，有8名同学出

错，其中4名同学回答“平行”，说明同学能发现平移前后图形对应边、对应点连线之间的位置关系，但并未能准确的说出变换的名称；1名同学回答“全等”，说明同学只注意了两个三角形形状与大小的关系，但忽略了两者之间的位置关系；2名同学回答“位似”，说明同学把“位似”与“平移”的定义混淆了。第二空有56名同学正确的回答出“旋转”，并且其中6名同学更准确的回答出了“中心对称”，有8名同学出错，其中7名同学都回答了“翻转”，说明同学能想象出图形发生了转动的过程，但并未能准确的说出变换的名称。第三空只有5名同学回答了“轴对称”，47名同学都回答了“翻折”，可以说这部分学生是理解轴对称的定义的，但并未能准确的说出变换的名称，从另一个角度我们可以发现动手操作的过程给学生更深刻的印象，有6名同学回答“对称”，在初中阶段几何中的对称有两种：轴对称与中心对称，这两种对称属于两种不同的图形变换，可见这部分学生还是对图形变换的概念不清，有5名同学回答“旋转”，说明没能判断出图形的变换类型。

从第一题的回答情况来看，绝大部分学生理解了三种图形变换的定义，并能对这三种变换加以区分，只是有少部分学生虽能想象出变换的过程，但未能准确的说出变换的名称，或是对某种变换定义的理解还不够完整，存在片面性。

第二题主要考查对轴对称的性质：“成对称轴的两个图形全等；如果两个图形成轴对称，那么对称轴是对称点连线的垂直平分线”的理解和应用。笔者在设计此题时，给出了一个轴对称图形，因此学生既可以从轴对称图形的定义出发，对$\angle BCD$的度数进行整体求解，也可以把位于对称轴两旁的部分看成两个图形，而这两个图形成轴对称，通过先求$\angle BCD$的一半度数，进而得到$\angle BCD$的度数。

从同学们的回答情况看，有55名同学得到了正确的答案，其中有22名同学在对于“读了题目以后，你想到的数学知识有哪些?”的回答中提到了“轴对称图形对应角相等”、“五边形内角和540°”；在对于“你是从哪几个角度来考虑问题的解决方法的?”的回答中提到“找相等的角，用五边形内角和540°反推算出$\angle BCD$的度数”。其中有29名同学在对于“读了题目以后，你想到的数学知识有哪些?”的回答中提到了“成轴对称的两个图形全等”、“四边形内角和360°”；在对于“你是从哪几个角度来考虑问题的解决方法的?”的回答中提到“从两个四边形全等的角度得到$\angle AOC$为90°，$\angle BCO$是$\angle BCD$的一半；用四边形内角和360°反推算出$\angle BCD$一半的度数，从而得到$\angle BCD$的度数”。其中只有4名同学在对于“读了题目以后，你想到的数学知识有哪些?”的回答中除了“成对称轴的两个图形全等”、“四边形内角和360°”，

还提到“对称轴是对称点连线的垂直平分线”；在对于“你是从哪几个角度来考虑问题的解决方法的?”的回答中提到“从对称轴是对称点连线的垂直平分线的角度得到$\angle AOC$为90°，从两个四边形全等的角度得到$\angle BCO$是$\angle BCD$的一半；再用四边形内角和360°反推算出$\angle BCD$一半的度数，从而得到$\angle BCD$的度数”。

从同学们的回答情况看，大部分学生对轴对称的性质能熟练掌握，并且能结合与问题相关的知识来解决问题，但由于学生对“图形的全等性”过分印象深刻、过分依赖，使得学生容易忽略“对称轴与对称点连线之间的关系”，这反映了学生对图形变换的几何性质还是以直观认识为主，对其对应点的内在联系的认识还尚未薄弱。

第三题主要考查对旋转的性质：“旋转前、后的图形全等，对应点到旋转中心的距离相等，每一对对应点与旋转中心的连线所成的角彼此相等” 的理解和应用。笔者在设计此题时，给出的是一个三角形绕其一个顶点旋转后得到另一个三角形，图中线段交错，为学生寻找旋转角、相等的角和边设置了一定的障碍。

从同学们的回答情况看，有50名同学得到了正确的答案，其中有18名同学在对于“读了题目以后，你想到的数学知识有哪些?”的回答中提到了“旋转角的定义”、“旋转前、后的图形全等”、“相似三角形的判定与证明”或“三角形内角和”，在对于“你是从哪几个角度来考虑问题的解决方法的?”的回答中提到“从寻找与$\angle BED$相等的角的角度出发，通过$\Delta ADO \backsim \Delta BEO$或者三角形内角和相等，得到$\angle BED=\angle BAD$”。有20名同学在对于“读了题目以后，你想到的数学知识有哪些?”的回答中提到了“旋转角的定义”、“旋转前、后的图形全等”、“等腰三角形的判定与性质”、“补角的定义”，在对于“你是从哪几个角度来考虑问题的解决方法的?”的回答中提到“从$\angle BED$与$\angle CED$互补的角度出发，通过等腰ΔAEC、对应角相等得到$\angle CED$的度数，从而求出$\angle BED$的度数”。有2名学生在对于“读了题目以后，你想到的数学知识有哪些?”的回答中提到了“旋转角的定义”、“旋转前、后的图形全等”、“三角形外角的性质”，在对于“你是从哪几个角度来考虑问题的解决方法的?”的回答中提到“从寻找与$\angle BED$相等的角的角度出发，通过三角形外角的性质与旋转前后对应角相等，得到$\angle BED=\angle EAC$”。另有7名同学在对于“读了题目以后，你想到的数学知识有哪些?”的回答中写到“旋转前、后的对应边的夹角等于旋转角”，因此从这个角度可直接得到$\angle BED$的度数，这个结论确实是正确的，但教材中并没有给出这个结论，在与该班任课教师交流之后得知教师在教授旋转角的定义时，对旋转角的定义进行了拓展，并给出了这个结论，学生在课堂中记住了

这个结论，并用于解题。另有5名同学找错了旋转角，说明学生对“每一对对应点与旋转中心的连线所成的角彼此相等”这一性质还没有掌握。

从同学们的回答情况看，大部分学生对旋转角的定义、旋转的性质掌握的比较牢固，能够灵活的运用旋转的性质与其他相关几何知识结合进行解题，并且从相似三角形、等量代换、角度计算等角度来考虑解决问题的方法。

第四题主要考查平移的性质：“平移前、后的图形全等”与“图形面积的转换”的理解和应用。笔者在设计此题时，所给出的条件无法直接求出阴影部分的面积，需要学生运用平移的性质进行面积的转换，通过求梯形ABEH的面积得到阴影部分面积。不仅考查了学生对平移性质的掌握情况，还考查了学生对求图形面积的数学方法的运用能力。

从同学们的回答情况看，只有14名同学得到了正确的答案，在对于“读了题目以后，你想到的数学知识有哪些?”的回答中提到了“平移前、后的图形全等”或“平移前、后的三角形面积相等”，在对于“你是从哪几个角度来考虑问题的解决方法的?”的回答中都提到了“从图形面积转换的角度出发，两个面积相等的三角形同减去ΔHEC，得到阴影部分面积等于梯形ABEH的面积”。其实有31名同学在对于“读了题目以后，你想到的数学知识有哪些?”的回答中也都能提到了“平移前、后的图形全等”或“两三角形面积相等”，但对于“你是从哪几个角度来考虑问题的解决方法的?”的回答中大部分同学采取了直接求面积的方法。

通过对同学们图形变换测试的分析，可以发现，学生对图形变换的有关知识的记忆还是比较牢固的，并且能够在解决问题时联系到与问题相关的知识，但是在选择所用知识的时候表现出了差别。仔细分析学生在解决问题时使用的知识，不难发现学生倾向于使用“变换前、后图形全等”这一性质，这可能与初一几何对全等三角形的强化有关，全等三角形固然是初中几何的一个重要内容，但是图形的变换还有另一块重要的性质，即“对应点连线之间的关系、对应点与旋转中心之间的关系、对应点连线与对称轴之间的关系”，这块性质反映的是图形变换过程中的性质，对它的记忆与应用有利于培养学生的空间想象能力与动态想象能力，这一块知识的忽略或弱化对学生今后的几何学习是一种损失。

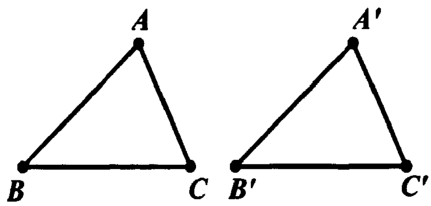
3.1.5.2 从解题过程分析学生的推理水平

新课程强调在几何课程中发展学生的推理能力，初中学生的几何推理方式包括：直观推理、结构关联推理和形式逻辑推理，而每一种推理方式都有其独特的

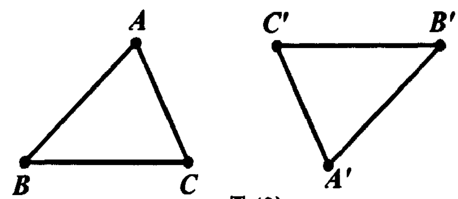
推理技能。通过分析学生的解题过程，了解学生是如何进行推理的？主要采用怎样的推理方式？不同推理方式的技能特点如何？

（一）直观推理

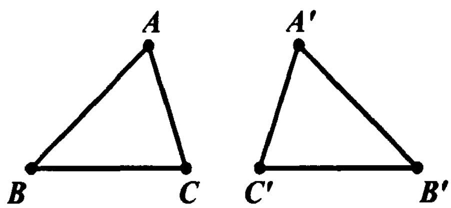
问题 1：如图所示ΔABC经图形变换后得到$\Delta A'B'C'$，请写出图（1）、图（2）、图（3）分别为哪一种图形变换？



图（1）



图（2）



图（3）

本题要求学生判断 3 张图分别属于哪一种图形变换，主要考查学生的直观推理能力。直观推理是指基于直观或实验的判断或推理，包括形象识别、实验验证和直观感知三种方式，而每种方式均有其独特的技能特点，如下表：[①]

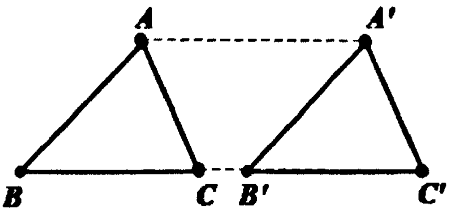
直观推理	特点
形象识别	A.将实物或图形与个体头脑中相应的普遍形象对照作出判断或推理； B.能够识别图形的基本特征或性质； C.能够根据条件画出图形，能够识别基本的变位图形。
实验验证	A.通过实验进行判断或推理； B.辅助形象识别进行实验验证。
直观感知	A.基于形象识别的感悟、联想和反思； B.基于实验的感悟、联想和反思。

简而言之，典型的直观推理有三种：第一种是通过形象识别作出判断，即看上去像；第二种是通过实验操作作出判断，即通过实验验证是正确的；第三种是模糊的判断，根据图形表象联想，即仔细想一下是这样的，而学生直观推理能力发展的基本顺序是：形象识别一实验验证一直观感知。

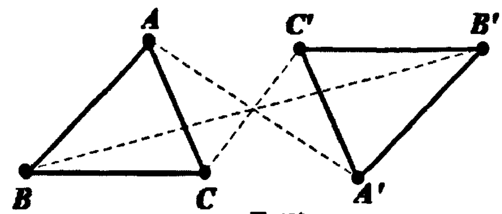
从同学们的解题过程来看，有 39 名学生直接运用直观感知判断出三种图形变

① 李红婷．7—9 年级学生几何推理能力发展及其教学研究[D]．西南大学，2007:41.

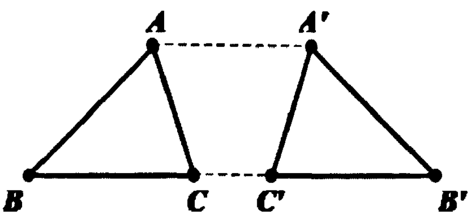
换，答卷上没有任何操作验证的痕迹；有11名学生连接了对应点，通过观察对应点连线之间的关系，辅助直观感知，判断出三种变换，如下图所示；其余部分学生没能作出正确的判断。



图(1)



图(2)



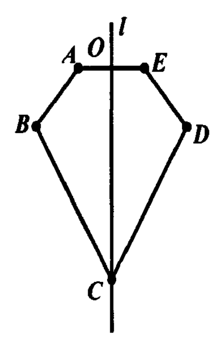
图(3)

直观推理是几何学习过程中最基本的推理方式，虽然随着学习内容的不断展开，推理的抽象程度和难度将逐渐增大，但是几何直观推理贯穿于几何推理发展的全过程，起到重要的辅助作用。同时，学生还能借助直观推理来发现一般规律、探寻证明思路、理解抽象内容。

（二）结构关联推理

问题2：如图，如果直线l是多边形$ABCDE$的对称轴，其中

$\angle A = 130°, \angle B = 110°$，那么$\angle BCD$的度数是多少？



本题主要考查学生的结构关联推理能力。结构关联推理是指建立在对象及其性质之间、对象与对象之间的多种关联的推理。学生在关系探寻中发现和理解这些关联，运用已有的经验、知识，进行联想、归纳、猜想等推理活动，从而建立解决问题的结构关联网络。

结构关联推理的技能特点如下表所示：[①]

结构关联推理	特点
可接受 (acceptable)	A.正确地理解和确认前提、结论和相关的已知信息； B.能识别复杂图形中的基本图形，找出推理所需要的隐含关系； C.能有效地进行条件转化； D.能够建立起推理所需要的结构关联网络，并从中分离出本质关系。

[①] 李红婷．7—9年级学生几何推理能力发展及其教学研究[D]．西南大学，2007:57.

不完整 (incomplete)	A.在理解和确认前提、结论和相关已知信息等方面可能有障碍； B.不能确认复杂图形中的基本图形，或只能找出部分隐含关系； C.在关系转换方面可能有障碍； D.不能够建立起推理所需要的完整的结构关联网络，或不能从中分离和表达本质关系。
不适当 (improper)	A.在理解或确认前提、结论和相关已知信息等方面可能不适当； B.在推出所需要的隐含关系或关系转换方面可能不适当； C.建立了不适当的结构关联网络，或建立了不适当的本质关系。
直观证明 (intuitive proof)	A.通过直观或实验方式猜想出隐含关系； B.通过直观确认本质关系。

简而言之，学生几何结构关联推理技能分为四个层次：可接受、不完整、不适当、直观证明。能够正确理解前提、结论，揭示推理结构中的各种隐含的内在关系，建构起问题解决的结构网络，找到其本质关系，从而解决问题，是可接受的推理；在关系转化中，缺少了必要的关系或遗漏了必要的推理步骤，使得结构网络不完整，属于不完整推理；将推理建立在错误的条件上，或用正确的条件推出不合理的关系，属于不适当推理；把推理建立在直观判断上，属于直观证明。

从同学们的解题过程来看，均有一定数量的学生分别属于结构关联推理技能这四个层次。

比如：（Ⅰ）因为直线l是多边形$ABCDE$的对称轴，

所以四边形 ABCO≌四边形 EDCO，

所以$\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOE, \angle BCD=2\angle BCO$，

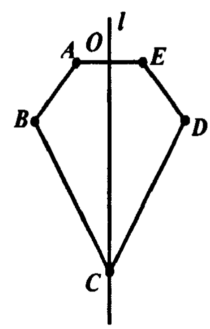
又因为$\angle AOE=180°$，所以$\angle AOC=90°$，

因为四边形内角和为 360°，$\angle A=130°, \angle B=110°$

所以$\angle BCO=360°-\angle A-\angle B-\angle AOC$

$=360°-130°-110°-90°=30°$，

所以$\angle BCD=2\angle BCO=2\times30°=60°$



（Ⅱ）因为直线l是多边形$ABCDE$的对称轴，

所以$\angle E=\angle A, \angle D=\angle B$，

因为$\angle A=130°, \angle B=110°$，

所以$\angle E=130°, \angle D=110°$，

因为五边形内角和为 540°，

所以$\angle BCD=540°-\angle A-\angle B-\angle D-\angle E$

$=540°-130°-110°-110°-130°=60°$

（Ⅲ）因为直线l是多边形$ABCDE$的对称轴，

所以$l\perp AE, \angle BCD=2\angle BCO$，

所以$\angle AOC=90°$，

因为四边形内角和为 360°，$\angle A=130°, \angle B=110°$，

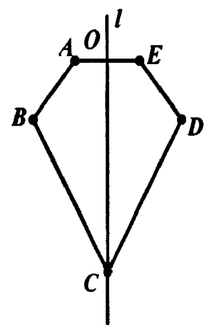
所以$\angle BCO=360°-\angle A-\angle B-\angle AOC$

$=360°-130°-110°-90°=30°$，

所以$\angle BCD=2\angle BCO=2\times 30°=60°$

以上（Ⅰ）、（Ⅱ）（Ⅲ）三种证明过程属于“可接受”推理。在参加测试的 64 名学生中约有 48.4%学生以“可接受”推理解决问题。

（Ⅳ）因为直线l是多边形$ABCDE$的对称轴，



所以$\angle AOC=90°$，

因为四边形内角和为 360°，$\angle A=130°, \angle B=110°$，

所以$\angle BCO=360°-\angle A-\angle B-\angle AOC$

$=360°-130°-110°-90°=30°$，

所以$\angle BCD=60°$

在推理过程（Ⅳ）中，缺少连接条件和所求的步骤，即因为直线l是多边形$ABCDE$的对称轴，所以$\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOE$，又因为$\angle AOE=180°$，所以$\angle AOC=90°$；因为直线$l$是多边形$ABCDE$的对称轴，所以$\angle BCD=2\angle BCO=2\times 30°=60°$。我们称其为推理步骤不完整求法。或许有些学生认为这个关系是显然的，或许有些教师认为这个推理仍然是正确的，缺少的步骤可以忽略，但事实上这样的理解和评价在一定程度上会导致学生忽视推理的严谨性。在参加测试的 64 名学生中约有 26.6%学生出现了“不完整”推理。

（Ⅴ）因为直线l是多边形$ABCDE$的对称轴，

所以四边形 ABCO≌四边形 EDCO，

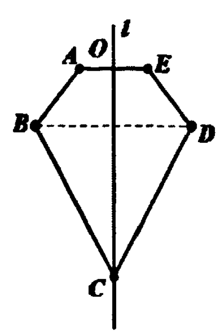
又因为五边形内角和为 540°，

所以四边形 ABCO 的内角和为 270°，

所以$\angle BCO=270°-\angle A-\angle B$

$=270°-130°-110°=30°$，

所以$\angle BCD=2\angle BCO=2\times 30°=60°$



（Ⅵ）因为直线l是多边形$ABCDE$的对称轴，

所以直线l垂直平分 BD，CB=CD，

所以 BD=CB=CD，

所以△CBD 是等边三角形，

所以 $\angle BCD = 60°$

在推理过程（Ⅴ）中，学生由四边形 ABCO≌四边形 EDCO，推出四边形 ABCO 的内角和为五边形内角和的一半，即 270°，显然是错误的，我们称其为不适当推理。虽然根据之后的推理过程，可以发现这里的 270°是指 $\angle A$、$\angle B$、$\angle BCO$ 三个角的和，但是推理过程中称“四边形 ABCO 的内角和为 270°”显然是不合理的，这说明学生在推理语言上还是不够准确和严谨。在推理过程（Ⅵ）中，学生根据轴对称的性质，得到“直线 l 垂直平分 BD”，但学生记忆中垂线的性质可以得到线段相等，因此想当然的得出结论“BD=CB=CD”，这显然是错误的，也是不适当推理。

在参加测试的 64 名学生中约有 5.6%学生出现了此类错误，约占错误率的 42.9%。像这种把某种可能性当作事实，或者把个人直觉、经验当作推理依据，缺乏推理依据的“想当然”推理是初中学生常犯的错误。需要教师不断引导训练，使学生明白必须通过推理建立起命题条件到结论间的关联关系。

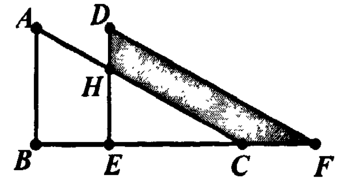
（Ⅶ）$360° - 130° - 110° - 90° = 30°$

$30° \times 2 = 60°$

（Ⅷ）$540° - 130° \times 2 - 110° \times 2 = 60°$

对于推理过程（Ⅶ）、（Ⅷ），学生的理由通常是：“看出来的”、“我用量角器量了一下”，也有学生回答：“猜出来的”，但说不出猜想的理由，亦有学生明白结果的推理过程，但不会书写表达，我们称其为直观求证。直观求证是通过直接观察或实验验证获得结论，但一般用于猜想，还必须进行合乎逻辑的推理。在参加测试的 64 名学生中约有 10.9%学生进行了直观求证。

问题 4：如图是重叠的两个直角三角形，将其中一个直角三角形沿 BC 方向平移 BE 距离就得到此图形，已知 AB=3，BE=HE=2，求阴影部分面积。



本题也是主要考查学生的结构关联推理能力。除了在平移变换的背景下，推理出平移的性质，更重要的是在图中探寻出与阴影部分面积相关的图形，即实现图形面积的转换，这也正是本题解题的关键。如果学生能够推理出阴影部分面积与梯形 ABEH 面积的等量关系，那么就很容易求出梯形 ABEH 面积，从而得出阴影部分面积。

结构关联推理能力强的学生，能够弱化枝节关系，概括主要关系，捕捉本质关系，或将思路逆推，省略一些中间步骤，迅速概括材料，建立本质关系，推理思路清晰、表达严谨，有时还会伴有较强的直觉思维特征，能够找到快捷、优美的方法。如以下推理（Ⅸ）：

（Ⅸ）因为△ABC经过平移后得到△DEF，

所以 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ABC}$

所以 $S_{\triangle DEF}-S_{\triangle HEC}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle HEC}$

即 $S_{阴影}=S_{梯形ABEH}$

因为 AB=3，BE=HE=2

所以 $S_{梯形ABEH}=\frac{1}{2}\times(2+3)\times 2=5$

所以 $S_{阴影}=5$

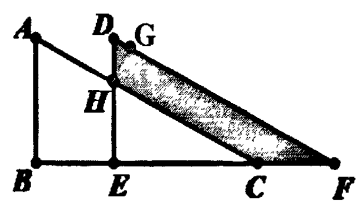
在参加测试的64名学生中只有21.9%学生准确的找到了与阴影部分面积相关的图形，实现了图形面积的转换，作出了正确的解答。

结构关联推理能力较弱的学生往往纠结于各种关系的处理中，难以把握问题的本质，事后甚至只能回忆起题目的一些“细枝末节”。以下推理（Ⅹ）、（Ⅺ）为学生的错误推理：

（Ⅹ）过点H作HG⊥DF于点G

$S_{阴影}=S_{\triangle DEF}-S_{\triangle HEC}=\frac{1}{2}EF\cdot DE-\frac{1}{2}HE\cdot EC$

或 $S_{阴影}=\frac{1}{2}(HC+DF)\cdot HG$



（Ⅺ）由平移得△ABC≌△DEF，

所以 BC=EF

所以 BC−CE=EF−CE

即 BE=CF

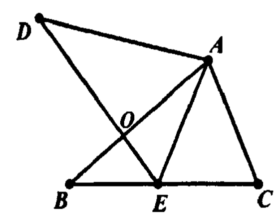
推理（Ⅹ）属于没有能够把握问题的本质，约有9.4%的学生出现此类错误；推理（Ⅺ）属于拘泥于“细枝末节”的关系上，约有6.3%的学生出现此类错误，另有54.6%的学生对此题束手无策，解答过程空白。

范·希尔曾经说过：“没有关系网络，推理是不可能的”。结构关联推理活动使学生在不确定的、彼此关联的探究活动中，建立已知条件与个体经验中的相关定义、定理等之间的关联，识别图形的特征及其与相关图形之间的关系，在复杂图

形中找出基本图形，识别对象之间隐含的性质或关系，建立起在条件与结论之间“搭桥”的验证关系，在因果之间建立起一条优化的推理链。传统观念认为，几何学习的困难在于逻辑规则复杂，学生难以通过形式逻辑推理证明这一关，但在教学实践中发现，结构关联推理是学生在几何学习上必须通过的第一关，学生常常苦于找不到关系而使推理无法进行。结构关联推理在几何推理中具有重要作用，有意识的结构关联推理教学有利于促进学生几何推理能力的快速发展。

（三）形式逻辑推理

问题3：如图，ΔABC绕点A顺时针旋转50°后得到ΔADE，且点E恰好在BC边上，你能求出$\angle BED$的度数吗？



本题的解题思路主要有两种：第一种是由已知条件可以证明△ADE≌△ABC，得∠D=∠B；再证△ADO∽△EBO，得$\angle BED=\angle DAB$。第二种是由已知条件可以证明△ADE≌△ABC，得AE=AC,∠DEA=∠C；再证△AEC是等腰三角形，得底角的度数，从而得到∠DEB=180°-2∠C。

但不论哪种解题思路，都属于二次推理结构，属于形式逻辑推理。形式逻辑推理一般表现为在结构关联推理的基础上进行模型化提炼和形式逻辑表达，能运用公理、定理，按照形式逻辑推理的规则来表达推理过程。形式逻辑推理要求学生掌握有关形式逻辑推理规则，能够根据推理所需要的已知信息和隐含信息，明确对象之间、对象与相关概念、定义、定理之间的关联关系，进行有效转化，建立起连接已知与未知的蕴涵关系，实现按照形式逻辑推理规则与方式来表达推理的思维过程。形式逻辑推理的技能特点如下表所示：①

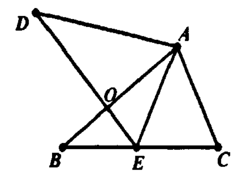
形式逻辑推理	特点
可接受 (acceptable)	A.能够按规则表达已知信息； B.能够进行可接受结构关联推理； C.能够按照形式逻辑推理方式表达推理的思维过程。
不完整 (incomplete)	A. 不能够完整地按规则表达已知信息； B. 不能够完整地进行可接受结构关联推理； C. 不能够按照形式逻辑推理方式表达推理的思维过程。
不适当 (improper)	A. 采用了不适当方式表达已知信息； B. 采用了不适当方式进行结构关联推理；

① 李红婷．7—9年级学生几何推理能力发展及其教学研究[D]．西南大学，2007:67.

	C. 采用了不适当方式表达形式逻辑推理的思维过程。
直观证明 (intuitive proof)	A. 采用了真观推理方式进行结构关联推理; B. 不能进行形式逻辑推理表达。

从学生的解题过程来看，62.5%的学生能够按照形式逻辑推理进行证明，能够清楚的表达证明过程，下面是三种正确的形式逻辑推理证明过程。

（Ⅰ）证明：∵ΔABC绕点 A 顺时针旋转 50°后得到ΔADE



∴∠DAB=50°（旋转角的定义）

$\Delta ABC \cong \Delta ADE$（旋转前、后的图形全等）

∴ ∠D=∠B（全等三角形对应角相等）

又∵∠DOA=∠BOE（对顶角相等）

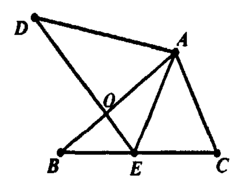
∴△AOD∽△EOB（如果两组对应角相等，那么这两个三角形相似）

∴∠BED=∠DAB（相似三角形，对应角相等）

又∵∠DAB=50°

∴∠BED=50°（等量代换）

（Ⅱ）证明：∵ΔABC绕点 A 顺时针旋转 50°后得到ΔADE



∴∠DAB=50°（旋转角的定义）

$\Delta ABC \cong \Delta ADE$（旋转前、后的图形全等）

∴ ∠D=∠B（全等三角形对应角相等）

∵ ∠DAB=180°－∠D－∠DOA

∠DEB=180°－∠B－∠BOE（等式的性质）

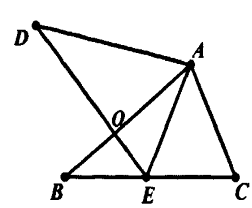
又∵∠DOA=∠BOE（对顶角相等）

∴∠BED=∠DAB（等量代换）

又∵∠DAB=50°

∴∠BED=50°（等量代换）

（Ⅲ）证明：∵ΔABC绕点 A 顺时针旋转 50°后得到ΔADE



∴∠EAC=50°（旋转角的定义）

$\Delta ABC \cong \Delta ADE$（旋转前、后的图形全等）

∴ ∠C=∠DEA（全等三角形，对应角相等）

AE=AC（全等三角形，对应边相等）

∴∠AEC=∠C（等边对等角）

又∵∠EAC=50°

$$\therefore \angle AEC=\angle C=\frac{180°-50°}{2}=65°$$（等式的性质）

又$\because \angle DEA=\angle C$

$\therefore \angle DEA=\angle AEC=65°$（等量代换）

$\therefore \angle BED=180°-\angle DEA-\angle AEC$

$=180°-65°-65°=50°$（等式的性质）

但仍有 7.8%的学生错误的判断了旋转角；10.9%的学生推理逻辑混乱；另有18.8%的学生只有答案，没有给出证明过程，或者是对问题束手无策。在几何中运用形式逻辑推理进行证明是必要的。几何不能只凭直观、实验来判断命题的真假，必须通过证明来判断真理。正如 Douglas 所说："几何学的证明是根据已知的几何定理和逻辑法则(起形式系统规则的作用)，从条件(已知的定理)推出所要证明的结果(需要证明的定理)。几何学是一个形式逻辑系统，是一座由公理、定理通过规则结合成统一整体的蔚为壮观的大厦"(道.霍夫斯塔特，1984)。[①]

3.1.5.3 小结

以上通过分析学生测试中的解题情况和解题过程，对学生在《图形的变换》部分的认知水平与推理能力进行了分析研究，现笔者以问卷中的数据、情况，对学生在《图形的变换》部分的认知水平、推理能力进行推测与归纳。

学生在《图形的变换》部分的认知水平如下表所示：

		认知水平			
		了解	理解	掌握	应用
平移	定义			√	
平移	性质①：平移前、后的两个图形全等。				√
平移	性质②：图形经过平移，连接各组对应点所得的线段互相平行（或在同一条直线上）并且相等。	√			
旋转	定义			√	
旋转	性质①：旋转前、后的两个图形全等。				√
旋转	性质②：对应点到旋转中心的距离相等，每一对对应点与旋转中心的连线所成的角彼此相等。		√		
轴对称	定义		√		
轴对称	性质①：成轴对称的两个图形全等。				√
轴对称	性质②：如果两个图形成轴对称，那么对称轴是对称点连线的垂直平分线。	√			

① 李红婷．7—9 年级学生几何推理能力发展及其教学研究[D]．西南大学，2007:66.

总体上来说，学生基本上都能掌握平移、旋转、轴对称三种图形变换的定义，并能根据定义来判断图形变换的类型；学生对“变换前、后图形的全等性”（即表中性质①）掌握的非常好，并都能灵活的应用；但学生对“变换过程中对应点之间的关系”（即表中性质②）普遍掌握的不够好，极少有学生应用此定理解题，造成该问题的原因可能有两个：一方面是学生对性质①印象深刻，习惯用全等三角形的思路解决问题，从而忽略了性质②的使用；另一方面是教师在教学过程中，对性质②的探索、发现过程不够重视，一带而过，或者是在探索、发现过程中讲解不够清晰，使学生在学的过程中就没理解、掌握好，同时也与教师例题的选择有关，教师选择例题时倾向于性质①，以图形变换为背景训练学生的形式逻辑推理能力，忽略了学生几何的动态想象能力、合情推理能力。2011 年苏州市数学中考试卷上的第 28 题是一个正方形旋转的问题，考查的正是“变换过程中对应点之间的关系”（即表中性质②)，学生的动态想象能力、合情推理能力，考生普遍反映为“看不懂题目”、“想象不出来”、“很难，不会做”。笔者认为，对于图形变换部分的教学，不能仅局限于传统几何教学中的对定义、定理的记忆，对形式逻辑推理能力的训练，还应在教学过程中引导学生关注变换的过程，发展学生几何想象的能力和合情推理的能力，当然这些正是我们教师需要在教学中不断的研究与尝试的。

学生在《图形的变换》部分的推理能力（各层次的人数比率）如下表所示：

	可接受	不完整	不适当	直观证明
直观推理	78.1%			
结构关联推理	35.2%	15.7%	10.7%	7%
形式逻辑推理	34.4%	28.1%	18.7%	18.8%

总体上来说，学生的直观推理能力比较强，即使还有 21.9%的学生没有完全回答正确，但是错误的很大一部分原因是学生对变换的名称记忆不准确。约有$\frac{1}{2}$的学生结构关联推理较强，能够迅速的推理出对象与其性质之间、对象与对象之间的多种关联，正确的解答问题，但可能由于学生几何推理的严谨性还不够，或者是学生学习态度不够认真，导致了部分推理过程的不完整；另有$\frac{1}{2}$的学生结构关联推理较弱，能通过定理的记忆推理出对象与其性质之间，但发现不了对象与对象之间的关系，或者纠结于细枝末节的关系，而把握不了问题的本质关系，甚至推理还没有入门，对问题束手无策，或只凭直觉证明。约有$\frac{1}{3}$的学生形式逻辑推理

已相当清晰，约有$\frac{1}{3}$的学生形式逻辑推理尚不够严密，还需要进一步的训练，但也还有约有$\frac{1}{3}$的学生形式逻辑推理还没有入门，对于初二的学生还说，这个问题将使学生今后的几何学习非常艰难。初中三年是学生发展推理能力的关键时期，而“图形的变换”是发展学生综合推理能力的重要内容。

3.2 关于教师教授图形变换的教学调查

3.2.1 调查的内容

《中学数学教师调查问卷》共由 9 个选择题、2 个简答题组成(见附录 2)。该问卷中提出的问题是对于前面实验的补充，目的在于从中学数学教师的角度，了解图形的变换在教与学两方面存在的一些困难。问卷中问题 1、2 是了解受访教师对新课程教材的使用经历，以及对两本教材在编排上的倾向性；问题 3、4 的提出，旨在了解一线教师对《图形的变换》这部分内容的定位；问题 5、6、7 的提出，旨在了解教师对《图形的变换》这部分教学内容的理解与把握，以及主要采取的课堂教学方法，因为这将决定课堂教学的导向，直接影响学生的认知水平与推理能力；问题 8、9 的提出，旨在了解学生在课堂教学中的反映、课后的反馈情况；问题 10 以简答题的形式提出，旨在比较全面地了解教师在教学实施中的一些困难或迷惑；问题 11 的提出，旨在从教师的角度充分发现学生在这部分内容存在的困难，是对学生实验的一种补充，请教师提建议。

3.2.2 调查的对象

调查苏州市彩香中学 18 名数学教师，受访教师分别在初一、初二、初三从事一线数学教学工作，教龄均在三年以上（包括三年），其中有 3 名数学教师只使用过苏科版教材，15 名数学教师先后使用过华师大版、苏科版教材。

3.2.3 调查的结果

	选 A 人数	选 B 人数	选 C 人数	选 D 人数	选 A 比率	选 B 比率	选 C 比率	选 D 比率
第 1 题	15	3			83.3%	16.7%		
第 2 题	11	4			73.3%	26.7%		
第 3 题	12	6	0		66.7%	33.3%	0	
第 4 题	0	3	15		0	16.7%	83.3%	
第 5 题	9	0	0	9	50%	0	0	50%

第 6 题	0	0	3	15	0	0	16.7%	83.3%
第 7 题	0	9	4	5	0	50%	22.2%	27.8%
第 8 题	18	0	0		100%	0	0	
第 9 题	6	12	0		33.3%	66.7%	0	

3.2.4 调查结果的分析

（一）客观题的分析

从调查结果来看，15 名数学教师先后使用过华师大版、苏科版教材，有 3 名数学教师只使用过苏科版教材。在两本教材都使用过的教师中，有 73.3%的教师认为华师大版的教材在《图形的变换》这部分内容的编排上更适合学生学习，只有 26.7%的教师倾向于苏科版教材的编排。笔者认为这可能是由于华师大版教材将轴对称、平移与旋转分别编排为两个独立章节章的内容，即第 10 章为《轴对称》、第 15 章为《平移与旋转》，这使得学生在学习图形变换的内容时系统性强，有利于学生认知水平的发展，而平移与旋转的性质有一定的类比性，都是从“变换前、后图形的全等性”与“对应点之间的关系”两方面展开研究，因此先后探索平移与旋转的性质，有利于学生合情推理能力的发展。相比之下，苏科版教材并没有将平移与旋转作为独立的一章内容，而是将“平移”作为《平面图形的认识（二）》中一节的内容，紧接在平行线之后；将“旋转”作为《中心对称图形（一）》中的第一节内容，在介绍了旋转之后，紧接着将旋转作为一种数学方法来研究中心对称图形、平行四边形、特殊平行四边形、三角形与梯形的中位线的性质与判定；虽然教材中有《轴对称图形》这一章，但是在介绍完轴对称变换之后，紧接着也是将轴对称作为一种数学方法来研究垂直平分线、角平分线、等腰三角形、等腰梯形的性质与判定。可以这样说，图形的变换在华师大版中更强调其作为一块数学知识，从而系统地学习概念、研究性质；而图形的变换在苏科版中更强调其作为一种数学方法，以其作为教材编排的一条线索，从而研究发现其他几何图形的性质。从调查结果来看，教师还是倾向于华师大版。

在问卷中，有$\frac{2}{3}$的教师认为《图形的变换》这部分内容在初中几何中的地位“重要”；有$\frac{1}{3}$的教师认为“一般”。有$\frac{1}{6}$的教师将《图形的变换》这部分内容定位为“一种数学方法”；有$\frac{5}{6}$的教师将《图形的变换》这部分内容定位为“一种数学思想”。可以这样说，《图形的变换》作为新课改之后初中几何新增的一块内容，已经普遍

受到了教师的重视，并且大家也达成共识——《图形的变换》不仅仅被看作一块知识内容来学习，更应将其上升为一种数学思想方法来运用。

在问卷中，有一半的教师选择"变换概念的理解"作为教学的重点；同样有一半的教师选择"变换思想的运用"作为教学的重点。有$\frac{1}{6}$的教师认为"变换性质的应用"是教学的难点；有$\frac{5}{6}$的教师认为"变换思想的运用"。有一半的教师主要采用的教学方法是"演示法"；有 22.2%的教师选择"启发法"；有 27.8%的教师选择"课堂讨论法"。从调查结果发现，教师在选择教学重点时走向两个极端，一半教师选择对概念的理解，而事实上三种变换的概念对学生来说是及其容易理解掌握的，根本无需用一节课的内容来讲解；一半教师选择对思想的运用，而事实上任何数学思想的运用对学生来说都是一种高层次的要求，需要教师在教学过程中潜移默化的渗透，绝非一节课就能解决的问题；而受访教师偏偏没有一个人选择性质的发现或应用，但事实上在图形变换此类问题中，变换性质的应用往往是解决问题的关键，决定了学生"图形变换"这部分内容的认知水平，变换性质的发现过程对学生发展几何空间想象能力、动态想象能力，综合推理能力都具有重要的作用。其次在主要教学方法的选择上，有 50%的教师选择"演示法"，即将图形变化的过程通过教具或多媒体展示给学生看，教师可能认为这样做简便、清晰的展示了变换过程，便于学生发现性质，但事实上却错过了发展学生几何空间想象能力、动态想象能力的绝佳机会，学生连变换的过程都想象不出，何谈变换思想的运用呢，只有一半的教师选择"启发法"或"课堂讨论法"。

此外，受访教师全部都认为学生的课堂反映是"感兴趣"的，但只有$\frac{1}{3}$的教师认为学生的课后反馈是"理想"的，$\frac{2}{3}$的教师认为学生的课后反馈是"一般"。

在此我们可以发现，教师问卷和学生测试卷所反映的结果是一致的。教师在教学设计中不重视变换性质的发现与应用，而学生对变换性质的应用仅限于对自己早已熟悉的全等三角形的应用，但对于崭新的变换过程中的"对应点之间的关系"的掌握却很不牢固，更鲜有应用了。同时，只有一半的学生在结果关联推理方面能力较强，另一半学生结构关联推理较弱，甚至不会推理，对问题束手无策，或只凭直觉。

（二）主观题的分析：

问题 10 请教师简要叙述：教师在《图形的变换》这部分教学中遇到的困难。教师在问卷中提到：①《图形的变换》这部分内容中有许多知识都是通过学生探

索性思考和实验操作来加强理解，学生在课堂上表现出了浓厚的兴趣，探究意识与动手能力得到了增强，但在解题和测试中学生的成绩却不一定高；②《图形的变换》这部分内容弱化学生的演绎推理，发展学生的合情推理，这使得学生在解答问题时证明不够严谨，依赖直观推理。③《图形的变换》这部分内容缺少有针对性的例题、练习，以及相关的配套学习资料，教师需要花大量的时间和精力来寻找相关或相近的题目给学生练习，教师教的辛苦，学生的课业负担重，成绩总上不去。④教师在旋转变换的教学上有困难，即使用演示法将旋转的过程展示给学生看，也不是所有学生都能理解。⑤图形变化中的画图部分比较繁，花费时间长，影响教学进度。等等。

问题11请教师简要叙述：学生在《图形的变换》这部分学习中遇到的困难。教师在问卷中提到：①课堂上由教师指导着想象和实验，学生对大部分内容都能掌握，但遇到自己解答习题时就还是不会做。②有些图形的变换比较复杂，或是图形比较复杂，学生就会感到有些怕，不敢动手去尝试。③学生在旋转变换上的困难比较大，旋转过程中性质比较多，线段比较繁，学生不容易理清楚。④教材中“图形的变换”这部分内容比较分散，前后连贯性、系统性较差，学生学完之后遗忘性大。

第4章　关于图形变换的教学建议

4.1 注意教学过程中，数学问题情境的创设

《新课标》提出在“空间与图形”的教学中应注重学生所学知识与实际生活的密切联系，应注重学生在观察、操作中获得对平面几何图形的直观经验。因此在几何图形概念的教学中，教师应注重创设情景、设计提问，让学生自主探索、合作交流、归纳总结，体验在数学学习中获得成功的喜悦。“数学来源于生活，生活中处处有数学。”（《新课标》）几何教学应尽可能从实际生活中的现象入手，通过让学生用眼观察、用手操作、自身体验，化抽象概念为直观现象，让学生在数学活动中学会数学知识。

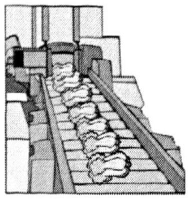
从上述研究可知，在《图形的变换》这部分内容的课堂教学中，图形变换的概念与性质都需要通过学生的探索性思考与实验操作来认识理解。在这样的课堂上学生往往表现出了浓厚的兴趣，课堂气氛活跃，但是学生对于图形变换的性质，特别是反映图形变换过程中的性质，即“对应点连线之间的关系、对应点与旋转中心之间的关系、对应点连线与对称轴之间的关系”，掌握的很不理想，更不要说是性质的应用了。作为教师，我们必须要反思自己的教学，我们设计的学生活动是否是有效的，对于学生的探索发现、认识理解是否有指导性。我们需要在教学过程中，创设一个又一个适合学生能力发展水平的问题情境，使新知识与学生已有的知识和生活经验相联系；使新的数学概念、定理得到不断巩固，建立数学模型；使新的数学知识得到拓展延伸，培养数学能力。

（一）导入型问题情境

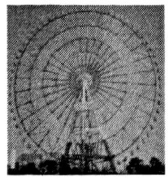
案例1：苏科版（八上）第三章第一节《图形的旋转》

——导入“旋转概念”的问题情境

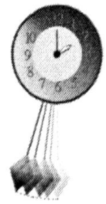
多媒体展示：生活中的运动现象。



图① 传送带



图② 摩天轮



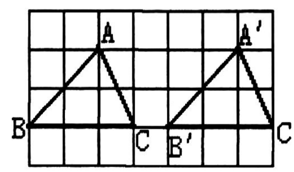
图③ 钟摆

（师）图①中，传送带上的物体在作什么运动？

（生）平移运动。

例 1：如右图所示，每个小正方形的边长都是 1 个单位长度，

△ABC 移到了△A′B′C′的位置。



（师）结合图中的平移变换，说说平移的基本要素。

（生）△ABC 向右平移 4 个单位长后到△A′B′C′的位置。

（师引导生回忆平移的要素为平移的方向和平移的距离。）

（师）你用什么方法找出图形平移的方向和平移的距离？

（生）根据图形上某一个点平移前后的位置变化。

（师）非常好！图形的平移可以理解为“图形中的每一个点都按同样的方向移动了相同的距离。”

（师）图②、③中摩天轮和钟摆在作什么运动？

（生）旋转运动。

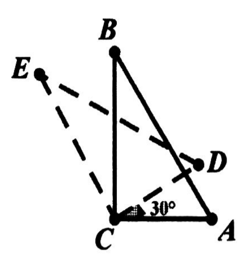
（师）图②、③中的旋转现象有什么共同的特征？

（生）它们都是绕着一个固定的点转动；它们转动的方向不同；……

（师）观察图③中的时钟，你能计算出：从 2 点整到 3 点整，时针针尖旋转了多少角度吗？

（生）$360° \div 12 = 30°$

例 2：如右图所示，将一块三角尺 ABC 旋转到 DEC 的位置。



（师）请你描述三角尺 ABC 如何旋转到 DEC 的位置。

（生）（鼓励学生踊跃发言，互相补充……），

三角尺 ABC 绕点 C 逆时针方向旋转了 30°后，

到达 DEC 的位置。

（师）我们在定义一次旋转时，必须包含旋转的中心、旋转的方向和旋转的角度，它们是旋转的三个要素。

（板书）旋转的概念：在平面内，将一个图形绕一个定点向某个方向转动一定的角度，这样的图形运动称为图形的旋转，这个定点称为旋转中心，旋转的角度称为旋转角。旋转的三个要素为旋转中心、旋转方向和旋转角。

【设计意图】一方面在给出旋转定义之前，先让学生通过一个平移的例子回顾平移的有关概念，引导学生类比平移来认识旋转；另一方面从生活中的旋转运动入手，使学生直观感受物体的旋转，通过一个旋转的例子让学生描述旋转的过程，引出旋转的定义。

从教师的调查问卷中得知，教师和学生对于旋转变换都存在着一些困难，教师认为旋转变换的课堂教学效果很不理想，尝试用演示法将旋转的过程展示给学生看，但似乎学生还是不能完全理解；学生也认为在旋转变换的学习上困难比较大，旋转过程中出现的线段比较多，图形比较复杂，在认识旋转的概念、探索旋转的性质时不容易分清楚，因此很难理解掌握。这就与教师教学中问题情境的创设有关了。

案例 2：苏科版（八上）第三章第一节《图形的旋转》

——导入“旋转性质”的问题情境创设方法（一）

学生活动：

1、将一块三角尺 ABC 绕点 C 按逆时针方向旋转到 DEC 的位置。（如图 1）

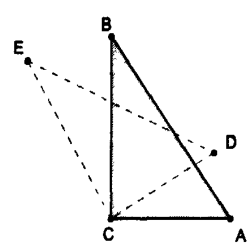


图1

（师）旋转前、后三角形的位置、形状与大小发生变化了吗？

（生）旋转前、后三角形的位置改变了，但形状、大小都没有改变。

（师）度量 $\angle ACD$ 与 $\angle BCE$ 的度数，线段 AC 与 DC 、BC 与 EC 的长度。你有什么发现？

（生）都对应相等。

2、将 ΔABC 绕点 O 按顺时针方向旋转到 $\Delta A'B'C'$ 的位置。（如图 2）

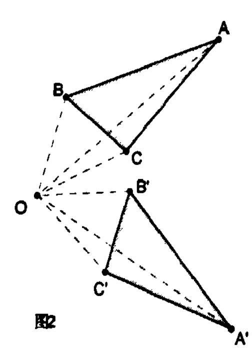


图2

（师）度量 $\angle AOA'$、$\angle BOB'$ 与 $\angle COC'$ 的度数，线段 AO 与 AO'、BO 与 BO'、CO 与 CO' 的长度。你有什么发现？

（生）都对应相等。

学生讨论：图 1、图 2 中的 ΔABC 在旋转过程中，哪些发生了改变？

哪些没有发生改变？

（板书）图形旋转的性质：旋转前、后的图形全等，对应点到旋转中心的距离相等，每一对对应点与旋转中心的连线所成的角彼此相等。

【点评】此问题情境直接将三角形的旋转设计为操作活动，学生需要在此复杂的活动中发现旋转的概念、探索旋转的性质，这一安排并不适合学生的能力发展水平，教学效果差也是必然的。由于此问题情境是课本提供的，大多数教师就拿来直接使用，导致学生在“图形的旋转”的学习中普遍遇到困难、教学效果很差。教师面对教材不应该全盘接受、“照本宣科”，而应该在深入研究教材的基础上，大胆的设计教学，源于教材，高于教材。

案例 3：苏科版（八上）第三章第一节《图形的旋转》

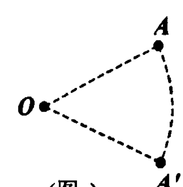
——导入“旋转性质”的问题情境创设方法（二）

1、分析点的旋转，旨在引导学生理解旋转的要素

（师）旋转前后，图形的形状、大小没有发生变化，只是它上面的每一个点的位置有所改变。因此，研究一个图形的旋转，我们可以从微观的研究一个点的旋转开始。

多媒体展示：点 A 绕点 O 按顺时针方向旋转到点 A' 的位置。

（师）在旋转过程中，哪个点是转动的？哪个点是固定不动的？固定不动的点叫做什么？



(图a)

（生）点 A 是转动的，点 O 是固定不动，点 O 叫做旋转中心。

（师）在旋转过程中，点 A 的旋转方向是什么？

（生）顺时针方向。

（师）点 A 旋转的角度应该如何测量？

（生）连接 OA、OA’，$\angle AOA'$ 是旋转角，测量 $\angle AOA'$ 的度数就是旋转的角度。

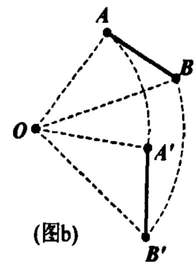
（几何画板显示 $\angle AOA'$ 的度数。）

（师）以上是在一个点的旋转过程中，确定旋转中心、旋转方向和旋转角的方法，这也是我们在任何图形中，确定旋转三要素的方法。

【设计意图】从最简单的平面图形——点的旋转入手，旋转中心和旋转方向一目了然，由于“创设情境”部分中“计算时针针尖转动的角度”已作了铺垫，学生容易想到连接 OA、OA’， $\angle AOA'$ 就是旋转角，测量 $\angle AOA'$ 的度数得到旋转角度，向学生清晰的展示旋转的三个要素，加深了对旋转概念的理解。

2、探索线段、三角形的旋转，旨在引导学生发现旋转的性质

探索1：多媒体展示：线段AB绕点O按顺时针方向旋转到线段$A'B'$的位置。



(图b)

（师）同学们分组活动，实践探索，回答下列问题：

（1）旋转前、后，点A与点___是对应点，点B与点___是对应点；

（2）连结线段AO、BO、$A'O$、$B'O$，并测量它们的长度，你有什么发现？

（3）测量$\angle AOA'$、$\angle BOB'$的度数，你有什么发现？

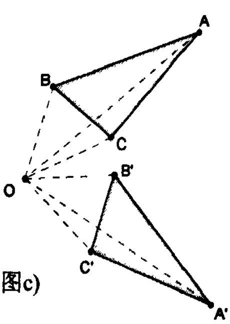
（4）组内讨论，归纳出旋转的特征。

（生）（鼓励学生踊跃发言，互相补充……），旋转前、后，对应点与旋转中心的连线长度相等，每一对对应点与旋转中心的连线所成的角相等。（板书）

（师）任何平面图形都是由点组成的，图形的旋转可以理解为图形上的每一个点同时都按相同的方式转动相同的角度。因此，研究图形旋转的关键是研究图形上点的旋转。

【设计意图】数学课程标准指出：动手实践、自主探究、合作交流是学生学习数学的重要方式。通过以上的自主探究，学生一定会有自己的收获和困惑，此时相互交流，学生的思维会得到补充、完善。学生通过动手实践、自主探究、合作交流已经掌握了大部分的内容，教师最后点出研究图形的旋转关键是研究图形上点的旋转，使学生对旋转的理解得到提升。

探索2：多媒体展示：ΔABC绕点O按顺时针方向旋转到$\Delta A'B'C'$的位置。



(图c)

（师）旋转前、后，点A、B、C的对应点分别是哪个点？

（生）点A'、点B'、点C'。

（师）利用"活动一"中得到的结论，找出图中有哪些相等的线段？有哪些相等的角？

（生）$AO=A'O$，$BO=B'O$，$CO=C'O$，$\angle AOA'=\angle BOB'=\angle COC'$

（师）观察ΔABC与$\Delta A'B'C'$，你认为两个图形之间有什么关系？与同学交流你的猜想。

（生）$\Delta ABC\cong\Delta A'B'C'$

（师）与组内同学合作，利用已知的线段、角的关系证明你们的猜想。

（生）证明：$\because \angle AOA'=\angle BOB'$

$\therefore \angle AOA'-\angle AOB'=\angle BOB'-\angle AOB'$

即 $\angle BOA=\angle B'OA'$

在 ΔBOA 和 $\Delta B'OA'$ 中，

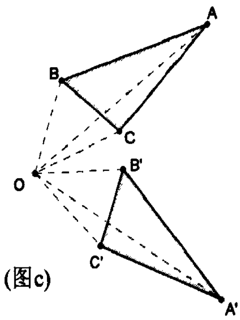
$\because BO=B'O$，$\angle BOA=\angle B'OA', AO=A'O$

$\therefore \Delta BOA \cong \Delta B'OA'(SAS)$

$\therefore AB=A'B'$

同理, $BC=B'C', AC=A'C'$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'(SSS)$



(图c)

（板书）旋转前、后的图形全等。

【设计意图】数学课程标准指出：有效的数学学习过程，应是教师引导学生主动地从事观察、实验、猜测、验证、推理与交流等数学活动，从而使学生形成自己对数学知识的理解和有效地学习策略。引导学生利用"活动一"中的结论来证明新的问题，在解决问题的过程中，渗透化归的数学思想。

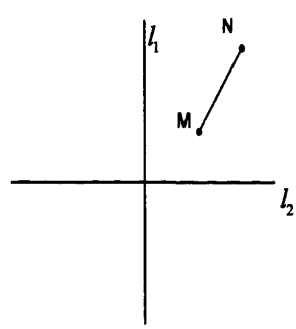
【点评】此问题情境的创设从"点"的旋转入手，由点、到线、再到面，从构建旋转的概念、到发现旋转前、后对应点的关系、再到探究旋转前、后图形的关系，将学生的认知逐步引向深入，适合学生的能力发展水平，也在无形中分解了这个复杂的教学目标。学生是数学活动的主体，在问题情境中学生通过观察、实验、交流、类比、归纳、猜想、证明等数学活动，达到对当前所学知识比较全面、正确的理解，即最终完成对所学知识的意义建构。

（二）巩固型问题情境

巩固型问题情境是指在得出数学概念、定理、公式后创设的问题情境，用于巩固新的知识和方法。

案例 4：《轴对称的性质》——巩固"轴对称性质"的问题情境

如右图所示：直线 $l_1 \perp l_2$，分别画出线段 MN 关于直线 l_1 和 l_2 的对称线段 M_1N_1 和 M_2N_2。线段 M_1N_1 与 M_2N_2 成轴对称吗？

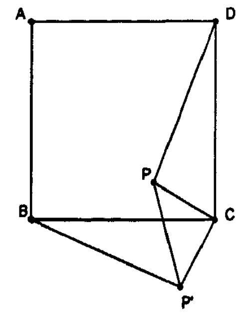


【设计意图】运用"轴对称的性质"，作出已知图形经过轴对称变换之后的图形；再

根据"轴对称的性质"，判断两个图形是否成轴对称。在讲授了轴对称的性质之后，创设这个问题情境，有利于学生巩固轴对称的性质与作图方法。

案例5：《图形的旋转》——巩固"旋转概念、性质"的问题情境

如右图所示，点P是正方形$ABCD$内一点，ΔPCD经过旋转后与$\Delta P'CB$ 重合。



（1）ΔPCD绕点____，经过____时针旋转______度后与$\Delta P'CB$重合；

（2）边DC的对应边是_____，$\angle CPD$的对应角是_____；

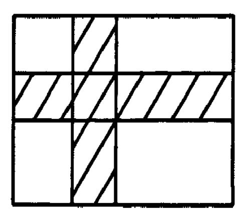
（3）如果$PC=1$，则$PP'=$____.

【设计意图】运用"旋转的概念"与"正方形的性质"，找到旋转中心、旋转方向与旋转角度；利用空间想象能力，找到旋转的过程中对应边、对应角；运用"旋转的性质"与"勾股定理"求出线段的长度。在讲授了旋转的概念与性质之后，创设这个问题情境，有利于学生巩固新知识。

（三）拓展型问题情境

"图形的变换"是《新课标》中初中几何部分新增的内容，《新课标》对轴对称、平移、旋转这三种图形变换的定位不仅仅是将其作为一个具体的几何知识点，更重要地是将其作为一个探索的工具、一种空间观念。因此，在"图形的变换"的教学设计中除了要让学生理解掌握图形变换的概念与定理，同时还要让学生感受图形变换的思想，丰富学生的空间观念。这就需要在教学中设置具有综合性、探索性的问题，即创设拓展型问题情境。

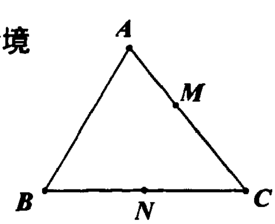
案例6：《图形的平移》——拓展"平移性质"的问题情境



如右图所示，在长为20m，宽为15m的长方形地块上，修建两条宽为2m的道路，余下部分种植西红柿。种植西红柿的面积是多少？你能用平移的方法简便地求出种植西红柿的面积吗？试试看。

【设计意图】运用"平移思想"探索面积的求法，将所求面积"化零为整"转化为一个矩形面积。创设此问题情境，有利于学生运用"平移的思想"，探索解题方法。

案例7：《图形的轴对称》——拓展"轴对称性质"的问题情境



如右图所示，M、N分别是△ABC的边AC、BC上的点，在AB上求作一点P，使△PMN的周长最小，并说明你的理由。

【设计意图】由于边 MN 的长度已确定，因此解题的关键是在 AB 边上找一点 P，使 MP+MP 的长度最短，运用轴对称的性质，作出在 AB 边上到点 M、N 的距离之和最短的点 P。创设此问题情境，有利于学生运用“轴对称的思想”探索解题方法，培养学生分析问题的能力。

4.2 注意解题过程中，数学能力的训练、数学思想的渗透

从教师调查问卷中得知：有教师提出“《图形的变换》这部分内容缺少有针对性的例题、练习，以及相关的配套学习资料，教师需要花大量的时间和精力来寻找相关或相近的题目给学生练习，教师教的辛苦，学生的课业负担重，成绩总上不去。”事实确实如此，新课改已推行了十年，但作为新课改后新增的几何内容，对图形变换有针对性的例题、练习还不够成体系，与其他几何内容相比没有那么的“唾手可得”，但是现在教学网络发达，相信只要教师能用心的寻找与积累，还是能发现不少关于图形变换的好题的。也有教师提出：“课堂上由教师指导着想象和实验，学生对大部分内容都能掌握，但遇到自己解答习题时就还是不会做。”任何一种能力都不可能是“一蹴即成”的，需要学生平时的练习中不断训练、逐步形成。由此可见，选择高质量的、适合学生的训练题，对教学效果有很大的影响。

（一）引导学生进行平移、旋转、折叠（轴对称）的实验操作，提高学生分解、组合图形的能力和动手能力。

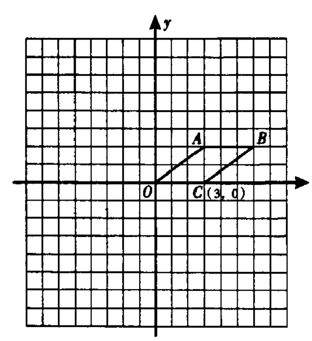


图 1.1

案例 8：如图 1.1 所示，每个小方格都是边长为 1 的正方形，以 O 点为坐标原点建立平面直角坐标系.

（1）画出四边形 $OABC$ 关于 y 轴对称的四边形 $OA_1B_1C_1$，并写出点 B_1 的坐标是______.

（2）画出四边形 $OABC$ 绕点 O 顺时针方向旋转 90° 后得到的四边形 $OA_2B_2C_2$，并求出点 C 旋转到点 C_2 经过的路径的长度.滉滉滉滉滉滉滉

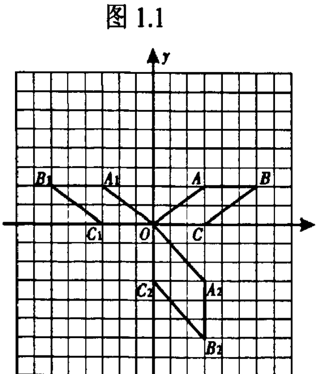


图 1.2

【分析】（1）根据轴对称的性质；“如果两个图形成轴对称，那么对称轴是对称点连线的垂直平分线”，依次画出四边形 $OABC$ 各顶点关于 y 轴的对称点，并顺次连接，得到四边形 $OA_1B_1C_1$，由于四边形 $OABC$ 在网格与直角坐标系内，因此，可容易读出 B_1 的坐标。

（2）根据旋转的性质：“旋转前、后，对应点到旋

转中心的距离相等，每一对对应点与旋转中心的连线所成的角彼此相等”，依次画出四边形 $OABC$ 各顶点绕点 O 顺时针方向旋转 90°后的对应点，并顺次连接，得到四边形 $OA_2B_2C_2$；在旋转变换的作图过程中，学生容易发现，点 C 旋转到点 C_2 经过的路径是圆心角为 90°，半径为 3 的圆弧，因此利用弧长公式即可求出点 C 旋转到点 C_2 经过的路径的长度。浘

【解答】(1) 四边形 $OA_1B_1C_1$ 如图 1.2 所示，B_1 的坐标是$(-6, 2)$.

(2) 四边形 $OA_2B_2C_2$ 如图 1.2 所示，点 C 旋转到点 C_2 经过的路径的长度为：

$$L=\frac{90\times\pi\times3}{180}=\frac{3\pi}{2}.$$

【小结】这是一个轴对称、旋转变化与坐标结合的题目，重点考查学生的动手操作能力与平面直角坐标系的知识。学生可在图形中获得已知条件，发展学生数形结合的能力。

案例 9：如图 2 所示，在8×6的网格图（每个小正方形的边长均为 1 个单位长度）中，⊙A 的半径为 2 个单位长度，⊙B 的半径为 1 个单位长度，要使运动的⊙B 与静止的⊙A 内切，则应将⊙B 由图示位置向左平移________个单位长度.

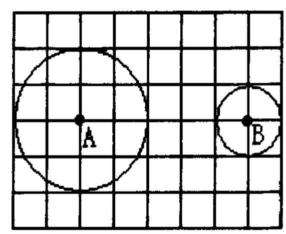


图 2

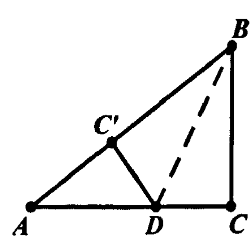
【分析】本题中⊙B 在进行平移变换，由于⊙B 的半径不变，因此分析⊙B 的平移运动只需要考虑圆心 B 的平移运动即可。圆心 B 沿射线 BA 的方向平移，而平移的距离则根据“⊙A 与⊙B 内切⇔ $AB=r_A-r_B$”，得到 A、B 两点的距离为 1，因此有两种情况：“当点 B 在点 A 的右侧”与“当点 B 在点 A 的左侧”

【解答】4 或 6

【小结】这是一个平移变换与两圆结合的题目，重点考查学生实验操作能力与两圆位置关系的知识，同时发展学生分类讨论的思想。

（二）加强平移、旋转、折叠过程中学生思维连贯性的训练，提高学生用所学知识与技能去分析、解决问题的能力。

案例 10：如图所示，在 Rt△ABC 中，∠C＝90°，AC＝8，BC＝6，按图中所示方法将△BCD 沿 BD 折叠，使点 C 落在边 AB 上的点 C′处，则折痕 BD 的长为________.

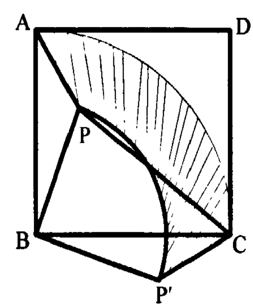


【分析】本题中△BCD 沿 BD 折叠，即△BCD 与△$BC'D$关于直线 BD 成轴对称，根据轴对称的性质“成轴对称的两个图形全等”，即可得到$BC=B'C'$，$CD=C'D'$，$\angle BC'D$ =∠C=90°等条件；由于无法直接求出 BD 的长度，因此可先求出 CD 的长度，设$CD=x$，则$C'D=x$，$AD=8-x$，因为$AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$，$BC'=BC=6$，所以$AC'=4$，在$Rt\Delta AC'D$中，由勾股定理可列出方程，求得x的值，从$Rt\Delta BCD$中再根据勾股定理，求出折痕 BD 的长。

【解答】$3\sqrt{5}$.

【小结】这是一个轴对称变换与勾股定理应用结合的题目，重点考查学生轴对称性质与勾股定理的应用，可以培养学生思维连贯性，减少思维的盲目性、间断性。

案例 11：如图所示，已知点 P 是正方形 ABCD 内的一点，连 PA、PB、PC，将△PAB 绕点 B 顺时针旋转 90°到△$P'CB$ 的位置。设 AB 的长为a，PB 的长为b（$b<a$），求△PAB 旋转到△$P'CB$的过程中边 PA 所扫过区域（图中阴影部分）的面积。



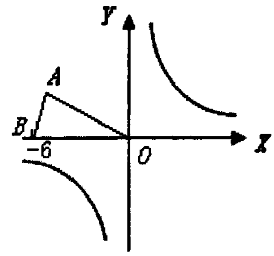
【分析】本题是在旋转背景下求图中阴影部分的面积。求面积的方法不外乎“直接求面积”或“面积的割补法”，本题只能用“面积的割补法”进行求解，即 $S_{阴}=(S_{扇形ABC}+S_{\triangle P'CB})-(S_{\triangle PAB}+S_{扇形PBP'})$ 根据旋转的性质“旋转前、后的两个图形全等”，得△PAB≌△$P'CB$，即$S_{\triangle P'CB}=S_{\triangle PAB}$，因此 $S_{阴}=S_{扇形ABC}-S_{扇形PBP'}$，扇形 ABC 的圆心角为 90°，半径为$a$；扇形的圆心角为 90°，半径为$b$，所以易得阴影部分的面积。

【解答】$S_{阴影}=\frac{\pi}{4}\left(a^2-b^2\right)$

【小结】这是一个旋转变换与面积的割补结合的题目，重点考查学生的分析推理能力、图形变换知识与学科内知识之间的联系。图形变换在几何问题中的作用在本题中充分体现，此类方法在几何中经常出现，也具有一定的难度，适当练习可提高学生用所学知识与技能去分析、解决问题的能力。

（三）加强图形变换知识与方程(方程组)、函数、特殊三角形、图形设计等知识的联系，提高学生综合运用数学知识的能力，渗透数学思想，培养学生良好的思维习惯。

案例12： 如图所示，等腰三角形OAB在直角坐标系中，点A的坐标为（$-3\sqrt{3},3$），点B的坐标为（－6，0）．



（1）若三角形OAB关于y轴的轴对称图形是三角形$OA'B'$，请直接写出A、B的对称点A'、B'的坐标；

（2）若将三角形OAB沿x轴向右平移a个单位，此时点A恰好落在反比例函数$y=\frac{6\sqrt{3}}{x}$的图像上，求a的值；

（3）若三角形OAB绕点O按逆时针方向旋转α度（$0<\alpha<90^\circ$）．

①当$\alpha=30^\circ$时点B恰好落在反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图像上，求k的值．

②问点A、B能否同时落在①中的反比例函数的图像上，若能，求出α的值；若不能，请说明理由．

【分析】本题将轴对称、平移、旋转三种变换与坐标、函数的有机结合。问题（1）考查轴对称变换后对称点的坐标；问题（2）考查平移变换与函数相结合的问题；问题（3）考查旋转变换与函数相结合的问题。

【解答】（1）$A'(3\sqrt{3},3),B'(6,0)$

（2）$\because y=3$　　$\therefore 3=\frac{6\sqrt{3}}{x}$，$x=2\sqrt{3}$　　$\therefore a=5\sqrt{3}$

（3）①　$\because \alpha=30^\circ$　　$\therefore$相应B点的坐标是（$-3\sqrt{3},-3$）　　$\therefore k=9\sqrt{3}$

②能，当$\alpha=60^0$时，相应A,B点的坐标分别是$(-3\sqrt{3},-3),(-3,-3\sqrt{3})$，

经经验：它们都在$y=\frac{9\sqrt{3}}{x}$的图像上

【小结】本题重点考察学生的动手操作能力与坐标的知识。变换过程中的相等的量以及等量关系，通过函数、解直角三角形来解决问题，考察学生数形结合的能力。

案例13： 如图所示，将正方形沿图中虚线(其中x＜y)剪成①②③④四块图形，用这四块图形恰能拼成一个矩形(非正方形)．

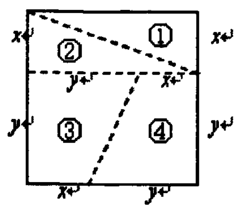
(1)画出拼成的矩形的简图；

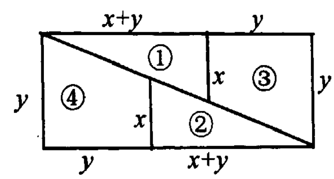
(2)若拼成后的矩形周长为4，求x的值．

【分析】本题是一个考查学生几何想象能力、几何与代数综合运用的能力。

问题（1）需要学生通过观察图形中各线段的等量关系，找出矩形的拼法，学生容易发现①③、②④可以拼成两个全等的直角三角形，而矩形即可由两个全等的直角三角形拼成的（图形如下）。问题（2）需要学生找出不变的量，在新拼成的矩形中用含x,y的代数式表示各线段，利用正方形和拼成的矩形面积相等、矩形周长为 4，列出关于x,y的方程组，从而求得x的值。这需要学生运用“方程思想”，将几何问题转化成代数问题来解决。

【解答】(1)





（2）由题设：$(x+y)^2=y(y+x+y)$　整理得：$x^2+xy-y^2=0$①

$2(y+y+x+y)=4$　　整理得：$3y+x=2$②

把②代入①整理得：$5x^2+10x-4=0$　解得：$x=\frac{-5\pm3\sqrt{5}}{5}$

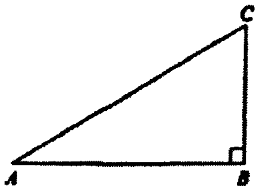
因为 0<x<y，所以$x=\frac{-5+3\sqrt{5}}{5}$.

【小结】根据图形的基本特征将图形进行重组，要求学生有较强的观察能力与动手操作的能力，在图形重组前后寻找不变的量与等量关系，渗透方程（组）思想，培养学生将几何与代数知识综合起来解决问题的能力。

4.3 注意分析相关中考题所考查的知识与能力的类型，研究中考导向

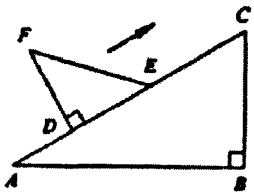
“图形的变换”是《新课标》中初中几何部分新增的内容，自然也成为了中考的热点问题。2008、2010、2011 年苏州市数学中考卷第 28 题（共 29 题）都是与“图形的变换”的相关问题(2009 年数学中考为江苏省统一命题)，难倒了不少应届考生，而同时又是当年数学中考卷的一个大亮点，一线教师争相研究。现以 2010、2011 年苏州市数学中考第 28 题为例，对中考试题的设计思路进行分析。

案例 14：（2010 年苏州中考）刘卫同学在一次课外活动中，用硬纸片做了两个直角三角形，见图①、②：



图①

图②



图③

图①中，$\angle B=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，$BC=6cm$；

图②中，$\angle D=90^\circ$，$\angle E=45^\circ$，$DE=4cm$；

图③是刘卫同学所做的一个实验，他将$\triangle DEF$的直角边DE与$\triangle ABC$的斜边AC重合在一起，并将$\triangle DEF$沿AC方向移动。在移动过程中，D、E两点始终在AC边上（移动开始时点D与点A重合）。

（1）在$\triangle DEF$沿AC方向移动的过程中，刘卫同学发现：F、C两点间的距离逐渐________。（填"不变"、"变大"或"变小"）

（2）刘卫同学经过进一步地研究，编制了如下问题：

问题①：当$\triangle DEF$移动至什么位置，即AD的长为多少时，F、C的连线与AB平行？

问题②：当$\triangle DEF$移动至什么位置，即AD的长为多少时，以线段AD、FC、BC的长度为三边长的三角形是直角三角形？

问题③：在$\triangle DEF$的移动过程中，是否存在某个位置，使得$\angle FCD=15^\circ$？如果存在，求出AD的长度；如果不存在，请说明理由。

请你分别完成上述三个问题的解答过程。

【分析】本题是一个以图形的平移活动为背景的几何题。题中有两个直角三角形的模型（即图①、②），根据锐角三角函数，易求出两个直角三角形的各边长，以此为以下解题过程中的已知条件。设计活动"将$\triangle DEF$的直角边DE与$\triangle ABC$的斜边AC重合在一起，并将$\triangle DEF$沿AC方向移动"，研究$\triangle DEF$在运动过程中出现的一些特殊情况。问题（1）让学生感受$\triangle DEF$沿AC方向移动的过程中F、C两点间的距离变化规律，此问学生可通过合情推理——在移动过程中，Rt$\triangle FDC$的DF边长不变，DC边长不断变小，因此斜边FC边长也变小。问题（2）中给出三个小问，都是关注移动过程中的特殊情况，问题①提出"移动至何处时，FC∥AB？"，学生容易以FC∥AB为已知条件求出线段AD的长度；问题②提出"移动至何处时，线段AD、FC、BC构成直角三角形？"，根据勾股定理逆定理，可验证三条线段是否能构成直角三角形，由于问题未明确哪一条线段为斜边，因此有

三种可能，学生需要运用“分类思想”，根据问题学生容易设 $AD=x$, 从而易得 $FC^2=DC^2+FD^2=(12-x)^2+16$. 又已知 BC=6, 将三个量根据三种分类情况列出方程，求出符合要求的 AD 的值，此时学生又需要运用“方程思想”；　问题③为讨论存在性的问题，学生可以 $\angle FCD=15°$ 为已知条件，求出 AD 的长度，但经检验不符合要求，因此不存在某个位置，使得 $\angle FCD=15°$。

【解答】(1) 变小.

(2) 问题①：解：$\because \angle B=90°$，$\angle A=30°$，$BC=6$，$\therefore AC=12$.

$\because \angle FDE=90°$，$\angle DEF=45°$，$DE=4$，$\therefore DF=4$.

连结 FC, 设 $FC \parallel AB$.

$\therefore \angle FCD=\angle A=30°$.

$\therefore$ 在 $Rt\triangle FDC$ 中，$DC=4\sqrt{3}$.

$\therefore AD=AC-DC=12-4\sqrt{3}$.

即 $AD=\left(12-4\sqrt{3}\right)$cm 时，$FC \parallel AB$.

问题②：设 $AD=x$，　在 $Rt\triangle FDC$ 中，$FC^2=DC^2+FD^2=(12-x)^2+16$.

(Ⅰ) 当 FC 为斜边时，

由 $AD^2+BC^2=FC^2$ 得，$x^2+6^2=(12-x)^2+16$，$x=\dfrac{31}{6}$.

(Ⅱ) 当 AD 为斜边时，

由 $FC^2+BC^2=AD^2$ 得，$(12-x)^2+16+6^2=x^2$，$x=\dfrac{49}{6}>8$

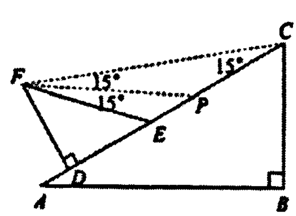
(不符合题意，舍去).

(Ⅲ) 当 BC 为斜边时，

由 $AD^2+FC^2=BC^2$ 得，$x^2+(12-x)^2+16=6^2$，$x^2-12x+62=0$，

$\Delta=144-248<0$，$\therefore$ 方程无解.

$\therefore$ 综上所述，当 $x=\dfrac{31}{6}$cm 时，经线段 AD、FC、BC 的长度为三边长的三角形是直角三角形.



问题③：解法一：不存在这样的位置，使得 $\angle FCD=15°$

假设 $\angle FCD=15°$.

由 $\angle FED=45°$，得 $\angle EFC=30°$.

作 $\angle EFC$ 的平分线，交 AC 于点 P，

则 $\angle EFP=\angle CFP=\angle FCP=15°$，

$\therefore PF=PC$，$\angle DFP=\angle DFE+\angle EFP=60°$.

$\therefore PD=4\sqrt{3}$，$PC=PF=2FD=8$.

$\therefore PC+PD=8+4\sqrt{3}>12$.

∴不存在这样的位置，使得$\angle FCD=15°$．

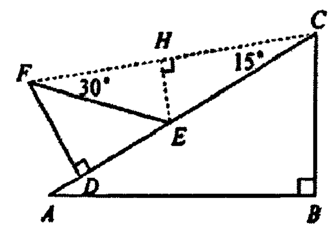
解法二：不存在这样的位置，使得$\angle FCD=15°$．

假设$\angle FCD=15°$，$AD=x$.

由$\angle FED=45°$,得$\angle EFC=30°$．

作$EH\perp FC$,垂足为H.

$\therefore HE=\dfrac{1}{2}EF=2\sqrt{2}$,



$CE=AC-AD-DE=8-x$,

且$FC^2=(12-x)^2+16$.

$\because \angle FDC=\angle EHC=90°$，$\angle DCF$为公共角，

$\therefore \triangle CHE\backsim\triangle CDF$.

$\therefore \dfrac{EC}{FC}=\dfrac{HE}{DF}$.

又$\left(\dfrac{HE}{DF}\right)^2=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{4}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.　　$\therefore \left(\dfrac{EC}{FC}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

即$\dfrac{(8-x)^2}{(12-x)^2+16}=\dfrac{1}{2}$.

整理后，得到方程$x^2-8x-32=0$.

$\therefore x_1=4-4\sqrt{3}<0$（不符合题意，舍去），

$x_2=4+4\sqrt{3}>8$（不符合题意，舍去）．

∴不存在这样的位置，使得$\angle FCD=15°$．

【小结】本题以图形的平移运动为背景，考查学生解决动态问题的能力。题目的综合性很强，主要考查了图形的变换、锐角三角函数、勾股定理及其逆定理、相似三角形、直角三角形、方程等知识点，还考查了分类讨论、方程、转化等数学思想方法。本题的解决需要学生根据几何知识将几何问题转化为代数问题来解决，学生需要会用变换的观点看待问题，能在动态的过程中找出不变的量与等量关系，通过几何与代数知识综合起来解决问题。对学生数学综合能力的要求非常高，这就需要教师在教学过程中注重方程思想、分类思想、化归思想渗透，提升学生数学素养。

案例 15:（2011 年苏州中考第 28 题）如图①，小慧同学把一个正三角形纸片（即△OAB）放在直线l_1上,OA 边与直线l_1重合，然后将三角形纸片绕着顶点 A 按顺时针方向旋转 120°，此时点 O 运动到了点O_1处，点 B 运动到了点B_1处；小慧又将三角形纸片AO_1B_1，绕点B_1按顺时针方向旋转 120°，此时点 A 运动到了点A_1处，点O_1运动到了点O_2处（即顶点 O 经过上述两次旋转到达O_2处）。

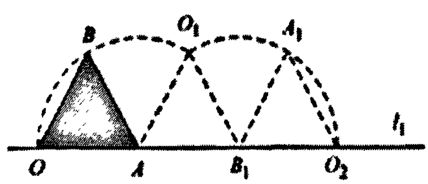
小慧还发现：三角形纸片在上述两次旋转的过程中，顶点 O 运动所形成的图形是两段圆弧，即$\overset{\frown}{OO_1}$和$\overset{\frown}{O_1O_2}$，顶点 O 所经过的路程是这两段圆弧的长度之和，并且这两段圆弧与直线l_1围成的图形面积等于扇形AOO_1的面积、△AO_1B_1的面积和扇形$B_1O_1O_2$的面积之和。

小慧进行类比研究：如图②，她把边长为 1 的正方形纸片 0ABC 放在直线l_2上，0A 边与直线l_2重合，然后将正方形纸片绕着顶点 A 按顺时针方向旋转 90°，此时点 O 运动到了点O_1处（即点 B 处），点 C 运动到了点C_1处，点 B 运动到了点B_1处；小慧又将正方形纸片$AO_1C_1B_1$绕顶点B_1按顺时针方向旋转 90°，………,按上述方法经过若干次旋转后，她提出了如下问题：

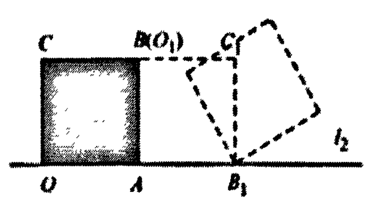
问题①：若正方形纸片 OABC 按上述方法经过 3 次旋转，求顶点 O 经过的路程，并求顶点 O 在此运动过程中所形成的图形与直线l_2围成图形的面积；若正方形纸片 OABC 按上述方法经过 5 次旋转，求顶点 O 经过的路程；

问题②：正方形纸片 OABC 按上述方法经过多少次旋转，顶点 O 经过的路程是$\dfrac{41+20\sqrt{2}}{2}\pi$？

请你解答上述两个问题。



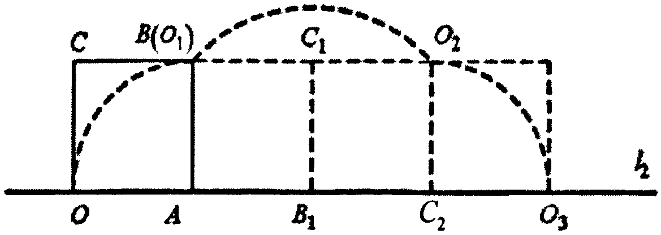
（图①）



（图②）

【分析】本题以学生熟悉的正三角形（即△OAB）旋转为例，让学生感受正三角形沿一直线翻滚过程中点 O 旋转所形成的路程，以及点 O 在此运动过程中所形成的图形与直线l_1围成图形。在此基础上，将正三角形变成正方形，考查学生类比正三角形沿直线翻滚的过程，动手作出正方形（即正方形 OABC）沿直线l_2翻滚的过程，研究分析在此运动过程中点 O 的旋转路程以及点 O 在此运动过程中所形

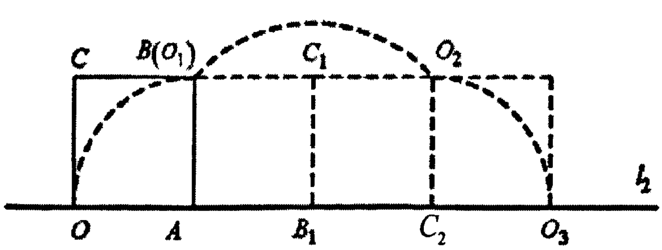
成的图形与直线l_2围成图形。



在作图的过程中，学生可以发现第一次旋转点 O 所形成的路线为$\overset{\frown}{OO_1}$，第二次旋转点 O 所形成的路线为$\overset{\frown}{O_1O_2}$，第三次旋转点 O 所形成的路线为$\overset{\frown}{O_2O_3}$，第四次旋转点 O 位置没有改变，更进一步发现旋转过程中点 O 所形成的路程以四次旋转为一个周期循环反复。

正方形纸片在上述三次旋转的过程中，顶点 O 运动所形成的图形是三段圆弧，即$\overset{\frown}{OO_1}$、$\overset{\frown}{O_1O_2}$和$\overset{\frown}{O_2O_3}$，顶点 O 所经过的路程是这三段圆弧的长度之和，并且这三段圆弧与直线l_2围成的图形面积等于扇形AOO_1的面积、$\triangle AO_1B_1$、$\triangle C_2B_1O_2$的面积扇形$B_1O_1O_2$的面积与扇形$O_2C_2O_3$之和，由于第四次旋转过程中点 O 位置不变，因此三次旋转过程中，点 O 所经过的路程与形成的图形面积即为一个旋转周期后点 O 的旋转路程以及点 O 在此运动过程中所形成的图形与直线l_2围成图形。由此易得，正方形五次旋转为正方形经历了一次旋转周期之后，再进行一次旋转；问题②中"正方形纸片 OABC 按上述方法经过多少次旋转，顶点 O 经过的路程是$\dfrac{41+20\sqrt{2}}{2}\pi$？"只需考虑$\dfrac{41+20\sqrt{2}}{2}\pi$是正方形经历多少个周期，余几次旋转后点 O 所经过的路程。

【解答】①如图所示，正方形纸片 OABC 经过 3 次旋转，顶点 O 运动所形成的图形是三段圆弧，即$\overset{\frown}{OO_1}$、$\overset{\frown}{O_1O_2}$、$\overset{\frown}{O_2O_3}$。



∴顶点 O 在此过程中经过的路程为：$\frac{90\cdot\pi\cdot1}{180}\times2+\frac{90\cdot\pi\cdot\sqrt{2}}{180}=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$

顶点 O 在此过程中经过的图形与直线 l_2 围成的图形面积为：

$$\frac{90\cdot\pi\cdot1}{360}\times2+\frac{90\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}{360}+2\times\frac{1}{2}\times1\times1=1+\pi$$

正方形纸片 OABC 经过 5 次旋转，顶点 O 经过的路程为：

$$\frac{90\cdot\pi\cdot1}{180}\times3+\frac{90\cdot\pi\cdot\sqrt{2}}{180}=\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi,$$

②∵正方形纸片 OABC 经过 4 次旋转，顶点 O 经过的路程为：

$$\frac{90\cdot\pi\cdot1}{180}\times2+\frac{90\cdot\pi\cdot\sqrt{2}}{180}=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi,$$

$$\therefore\frac{41+20\sqrt{2}}{2}\pi=20\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi+\frac{1}{2}\pi,$$

∴正方形纸片 OABC 经过了 81 次旋转.

【小结】本题以学生熟悉的正三角形旋转为例，进而拓展到了正方形，要求学生运用类比的思想研究分析正方形的旋转过程。在解题过程中，考查了学生动手实验操作的能力，考查了学生图形的旋转与圆中的计算“扇形面积公式、弧长计算公式”的结合，并且在图形运动过程中渗透了“周期性”的思想，为高中数学学习埋下伏笔。

第5章 结 论

本研究对苏州市彩香中学65名初二学生进行了图形变换相关内容的测试，通过对学生在测试中的解题情况和解题过程的分析，了解了学生在图形变换部分内容上的认知水平与推理能力，同时又对苏州市彩香中学18名一线数学教师进行了关于图形变换教学的问卷调查，旨在了解教师在图形变换部分内容的教学中存在的困难与迷惑。

首先，在学生认知水平的研究中发现学生对于三种图形变换的定义与变换前后图形的全等性掌握得很好，但是对于变换过程中的相关性质普遍掌握得不好，学生无法做到灵活应用；在图形变换的课堂教学中，有 50%的教师运用演示法，教师将课本中的图形的变换过程演示给学生看，引导学生发现变换的性质，但教师们普遍发现这样的教学设计并不能使学生很好的理解图形变换的性质；在教师的问卷调查中发现，旋转的概念与性质对教师、学生来说都是很难教学与理解的。

笔者通过对图形变换这部分教材的深入研究与自身积累的教学经验，提出教师应注意教学过程中，数学问题情境的创设。教师面对教材不能全盘接受、“照本宣科”，应该深入分析研究教材，为学生创设一个个适合学生能力发展水平的问题情境，使新知识与学生已有的知识和生活经验相联系，帮助学生实现新知识的自我建构。问题情境的创设主要有三类：导入型问题情境、巩固型问题情境、拓展型问题情境。导入型问题情境是在教学中使用最广泛，也是最重要的问题情境，本文以导入“旋转概念”的问题情境为例，展示了导入型问题情境如何将新知识与学生已有的知识和生活经验相联系，轻松认识理解新概念。又以导入“旋转性质”的两种问题情境创设的方法为例，通过分析比较，展示导入型问题情境的创设必须符合学生发展的“最近发展区”的理论；巩固型问题情境是指在得出数学概念、定理、公式后创设的问题情境，用于巩固新的知识和方法，本文以两个例题的设计为例加以说明；拓展型问题情境的创设是指在教学中设置具有综合性、探索性的问题，使学生感受图形变换的思想，丰富学生的空间观念，本文以两个例题的设计为例加以说明。

其次，在学生推理能力的研究中发现有一半以上的学生在结构关联推理方面很薄弱，结构关联推理活动使学生在不确定的、彼此关联的探究活动中，建立已

知条件与个体经验中的相关定义、定理等之间的关联，识别图形的特征及其与相关图形之间的关系，在复杂图形中找出基本图形，识别对象之间隐含的性质或关系，建立起在条件与结论之间“搭桥”的验证关系，在因果之间建立起一条优化的推理链。传统观念认为，几何学习的困难在于逻辑规则复杂，学生难以通过形式逻辑推理证明这一关，但是在教学实践中发现，结构关联推理是学生在几何学习上必须通过的第一关，学生常常苦于找不到关系而使推理无法进行。结构关联推理在几何推理中具有重要作用，有意识的结构关联推理教学有利于促进学生几何推理能力的快速发展。

笔者通过对图形变换相关试题的悉心积累与深入研究，提出教师应注意解题过程中，数学能力的训练、数学思想的渗透。教师在挑选此类试题时可以分以下三类：（1）引导学生进行平移、旋转、折叠（轴对称）的实验操作，提高学生分解、组合图形的能力和动手能力；（2）加强平移、旋转、折叠过程中学生思维连贯性的训练，提高学生用所学知识与技能去分析、解决问题的能力；（3）加强图形变换知识与方程(方程组)、函数、特殊三角形、图形设计等知识的联系，提高学生综合运用数学知识的能力，渗透数学思想，培养学生良好的思维习惯。

同时，笔者认真分析研究了近些年来苏州市数学中考试卷，发现2008、2010、2011年苏州市数学中考卷第28题(共29题)都是与“图形的变换”的相关问题(2009年数学中考为江苏省统一命题)，并以2010、2011年苏州市数学中考第28题为例，分析中考相关试题的设计思路。经过分析研究后发现，中考重点考查学生的动手实验、操作能力，与相关几何、代数知识相结合的能力、对分类、化归、转化、方程等数学思想的运用能力。要求教师在教学过程中注重学生数学综合能力的培养，数学思想方法的渗透，提升学生的数学素养。

最后，笔者通过本研究对图形变换的教学产生了一些感悟：

1.在初中数学“图形的变换”的教学中，不能仅局限于传统几何教学中的对定义、定理的讲授，对形式逻辑推理能力的训练，更应在教学过程中引导学生探索变换的过程，发展学生几何想象的能力和合情推理的能力，只有这样才能真正体现出“图形的变换”的教学价值，这需要一线教师在教学中继续研究与尝试。

2.《新课标》下不同版本的教材对“图形的变换”部分的知识体系安排各有千秋，而且在各版本中都存在着某些教学安排并不符合学生的能力发展，如果教师面对教材采取全盘接受、“照本宣科”的态度，那么教学效果差是必然的，一线教师应该

在深入研究教材的基础上，大胆设计符合学生能力发展的教学方案，源于教材，而高于教材。

3. “图形的变换”教学已进行了十年，但这部分内容的相关教学例题仍然未成体系，教师应在教学实践的基础上注意例题的积累，在分析研究历届相关中考题的基础上扩展延伸，逐步积累起一批高质量的、适合学生的例题与训练题，提升教学效果，促进学生学习。

参考文献

[1] 孔凡哲、崔英梅.平移、旋转课程内容的中韩对比［J］.小学教学研究，2006(4): 26-27.

[2] 中华人民共和国教育部.全日制义务教育教学课程标准（实验稿）.北京：北京师范大学出版社，2001:37.

[3] 傅赢芳.数学应用的中英初中数学课程比较[D].浙江师范大学，2003:13-14.

[4] 杨俊波.中日初中数学课程比较[D].沈阳师范大学，2007:12.

[5] 唐恒钧.中美中小学几何课程比较及其启示[D].浙江师范大学，2005:7-8.

[6] 刘绍学，章建跃.几何中的向量方法［J］.数学通报，2004(3): 7-8.

[7] 刘盛利.中学数学对称思想研究[D].内蒙古师范大学，2007:40.

[8] Richard R.Skemp.数学学习心理学[M]，陈泽民译.北京：九章出版社，2002.

[9] 裴娣娜.教育研究方法导论[M].合肥：安徽教育山版社，2005: 71－88.

[10] 郑毓信.数学教育：动态与省思[M].上海：上海教育出社，2005: 64－69.

[11] 鲍建生、周超.数学学习的心理基础与过程[M].上海：上海教育出社，2009: 279-288.

[12] [美]乔治·波利亚.数学与猜想(第一卷) [M].李心灿等译.北京：科学出版社，2001: 序言第V页.

[13] 赵莉.合情推理的中学数学教学研究[D].沈阳师范大学，2007: 3.

[14] 刘若菡.高中数学合情推理的教学研究[D].东北师范大学，2009:5.

[15] 杨松.基于合情推理思想的教学研究——以高中解几何为例[D].上海师范大学，2010:8.

[16] 杨树森.普通逻辑学[M].合肥：安徽大学出版社，2001: 227.

[17] 孔凡哲、芦淑坤.平移、旋转、现象、工具和思想方法[J].中学生数理化，2005(10)4-5.

[18]“中学数学课程教材与信息技术整合的研究”课题组.中学数学课程教材与信息技术整合的思考[J].课程 教材 教法，2002(10)，51.

[19] 张文蔚.初中数学“平移与旋转”教材分析与教学研究[D].西北师范大学，2007:12-19.

[20] 张良江.例说图形变换在解题中的应用[J].新课程（教育学术），2010(1):124-125.

[21] 薛美.平移和旋转在解决问题中的巧用例说[J].中学数学杂志（初中版），2009(6):37-38.

[22] 杨浩.巧用图形变换探究解题新途径[J].上海中学数学，2007(9):47-48.

[23] 姚荣盛.图形变换在解题中的应用[J].中学数学杂志（初中版），2008(4):39-40.

[24] 王凤学.例析以旋转为载体的中考试题[J].中学数学教育，2007(2): 33-35.

[25] 马娇，孙晓峰.透析以图形变换为题材的中考压轴题[J].中学数学月刊，2008(3): 21-24.

[26] 周赛春.图形变换思想在中考中的应用[J].上海中学数学，2010(3):24-26.

[27] 陈德前.图形变换——中考数学压轴题命题的热点[J].中学数学杂志（初中版），2007(5):50-52.

[28] 皮亚杰著.发生认识论原理[M].王宪钿等译.北京：商务印书馆，1981.

[29] 郑毓信.建构主义之慎思[J].开放教育研究，2004(1):4-7.

[30] 李红婷.7—9 年级学生几何推理能力发展及其教学研究[D].西南大学，2007: 41、57、66、67.

[31] 郭迷斋.关于学习相似三角形的认知实验研究[D].首都师范大学，2008: 20-21.

[32] 汉德森（D.Henderson）.Catania 会议发言.Duval，1998.

[33] 裴娣娜.教育研究方法导论[M].合肥：安徽教育山版社，2005: 71－88.

[34] 郑毓信.数学教育：动态与省思[M].上海：上海教育出社，2005: 64－69.

[35] 费丽平.初中生平行四边形认知水平研究[D].东北师范大学，2009:31-33.

[36] 陈嘉峰."空间与图形"的教学实践与思考[D].东北师范大学，2007:6-14.

[37] 陈东强.中学数学向量内容的教学研究[D].河北师范大学，2009:7-11.

[38] 陈婷.对 NCTM 几何课程标准的分析与思考[J].甘肃高师学报，2004，9(2):91-92.

[39] 蔡金法、聂必凯."美国 2000'数学课程标准"简介及反思[J].数学通报，2001(9):41-43.

[40]Robert E. Yager.Expanding the Use of the National Science Education Standards in Accomplishing Needed Reforms[J].School Science and Mathematics，2006,106(1).

攻读硕士学位期间公开发表的论文

[1] 何佳.支架式教学法在初中数学“图形的旋转”教学中的应用[J].中学数学月刊（增刊），2010（11）：9-10.

[2] 何佳.对管理注意力缺损多动障碍学生的思考与尝试[J].新课程，2011（01）：131.

[3]何佳.支架式教学，探究性课堂.苏州市中学数学优秀论文评比中获二等奖，2010.

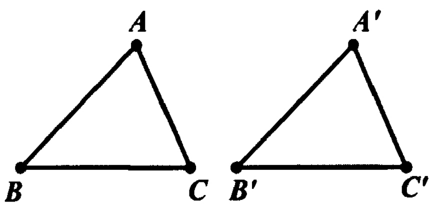
附录 A

《中学数学图形变换测试题》

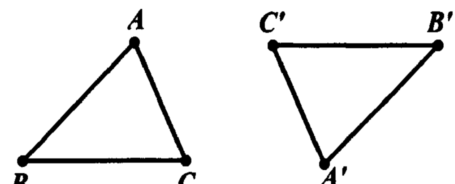
班级：_______ 性别：_______

同学们，感谢你参加这个关于图形变换的测试，此测试与你的成绩无关，请你根据自己的实际情况回答，回答越详细越好。

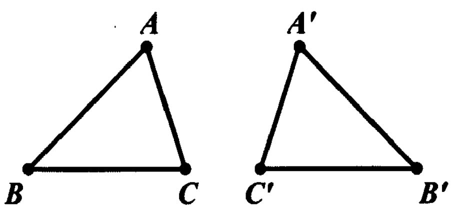
1、如图所示 ΔABC 经图形变换后得到 $\Delta A'B'C'$，请写出图（1）、图（2）、图（3）分别为哪一种图形变换？



图（1）



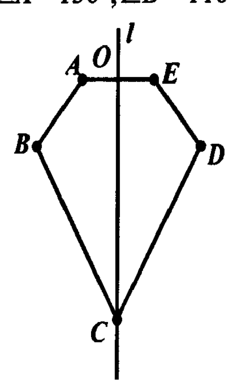
图（2）



图（3）

图（1）是________变换；图（2）是________变换；图（3）是_________变换。

2、如图，如果直线 l 是多边形 $ABCDE$ 的对称轴，其中 $\angle A=130°, \angle B=110°$，那么 $\angle BCD$ 的度数是多少？



（1）读了题目以后，你想到的数学知识有哪些？

（2）你是从哪几个角度来考虑问题的解决方法的？

（3）请写出问题的解答并说明理由。

（4）请你总结一下解答本题的关键。

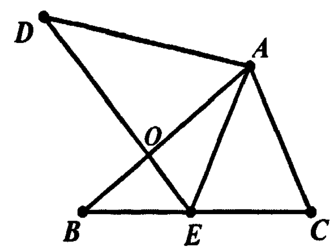
3、如图，ΔABC绕点 A 顺时针旋转 50°后得到ΔADE，且点 E 恰好在 BC 边上，你能求出$\angle BED$的度数吗？

（1）读了题目以后，你想到的数学知识有哪些？

（2）你是从哪几个角度来考虑问题的解决方法的？

（3）请写出问题的解答并说明理由。

（4）请你总结一下解答本题的关键。



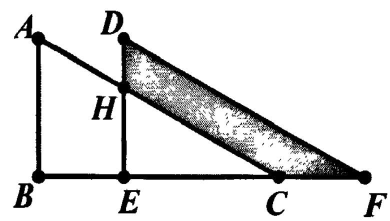
4、如图是重叠的两个直角三角形，将其中一个直角三角形沿 BC 方向平移 BE 距离就得到此图形，已知 AB=3，BE=HE=2，求阴影部分面积。

（1）读了题目以后，你想到的数学知识有哪些？

（2）你是从哪几个角度来考虑问题的解决方法的？

（3）请写出问题的解答并说明理由。

（4）请你总结一下解答本题的关键。



附录B

《中学数学教师调查问卷》

老师，您好！感谢您在百忙之中抽空接受我的调查。我想就初中几何《图形的变换》这部分内容的教学情况向您作一个调查问卷，一下选择题均为单选。

1、请问您使用过华师大版、苏科版两套初中数学教材进行教学？（ ）

A. 是　　B.否

2、就《图形的变换》这部分内容而言，华师大版与苏科版，您认为哪个版本的编排更适合学生的学习？（ ）

A. 华师大版　　B. 苏科版

3、您认为《图形的变换》这部分内容在整个初中几何中的地位如何？（ ）

A.重要　　B.一般　　C.不重要

4、您在进行《图形的变换》这部分教学时，是如何定位这部分内容的教学的？（ ）

A.一块数学知识　　B.一种数学方法　　C.一种数学思想

5、您认为在《图形的变换》这部分教学中，教学的重点是什么？（ ）

A.变换概念的理解　　B.变换性质的发现

C.变换性质的应用　　D.变换思想的运用

6、您认为在《图形的变换》这部分教学中，教学的难点是什么？（ ）

A.变换概念的理解　　B.变换性质的发现

C.变换性质的应用　　D.变换思想的运用

7、您在《图形的变换》这部分教学中，采用的主要教学方法是什么？（ ）

A.讲授法　　B.演示法

C.启发法　　D.课堂讨论法

8、您在《图形的变换》这部分教学中，学生的课堂反映如何？（ ）

A.感兴趣　　B.一般　　C.不感兴趣

9、从学生的作业、测试来看，你觉得教学效果如何？

A.理想　　B.一般　　C.不理想

10、您在《图形的变换》这部分教学中遇到的困难是什么？（请简要回答）

____

11、在《图形的变换》这部分内容的学习中，学生主要存在的困难是哪些？（请简要回答）______________________________

再次感谢您的合作，祝您工作顺利！

致 谢

我在苏州大学攻读教育硕士的三年时间即将结束，回想起在此期间教授们的悉心教导，同学们的坦诚交流，以及我在撰写论文过程中的奋斗与进步，令人难忘。感谢苏州大学给了我这个机会，在踏上工作岗位之后仍能回到大学静心学习。在苏大课堂里我接触到了各种教育教学理论，学习了科学的研究方法，虽然时间有限，很多问题无法深入，但是它却为我开启了一扇门，使我拥有了今后深入学习教育教学理论、将教学实践与教育理论相联系、运用科学的研究方法研究教学的可能性；在撰写论文的一年时间里，我实践了在苏大课堂中所学的研究方法，同时也树立了研究教学的信心。这一切都应该感谢苏州大学为我创造了从一名普通教师向一名研究型教师转型的必要条件。

在此，我要特别感谢我的学位论文导师严亚强教授。选题之初，在严教授的悉心指导下我顺利地确定了研究主题；在准备开题报告期间，我一度因为工作繁忙而导致开题报告停滞，正是由于严教授及时的关心、严格的要求与鞭策，我才能在开题前就完成了论文框架、文献综述与研究设计，并在开题时得到了很多宝贵的意见，这一切都为之后的研究铺平了道路；在论文的撰写过程中，严教授给予了我很多的鼓励与帮助，对于论文的不足之处给出了明确的指导和宝贵的意见，使我能顺利的完成本学位论文。在撰写论文的一年间，严教授严谨踏实的治学精神、认真负责的教学态度、精益求精的工作作风，令我敬佩，这也将是我今后教育教学工作中的努力方向。

同时，我还要感谢葛英老师、卫淑云老师、吴锷老师在开题报告时给予我的宝贵意见。感谢教研员殷容仪老师在本研究的思路与方法上给予我的启发和建议。感谢我的同事与朋友在我撰写论文期间给予我的关心与帮助。最后，感谢我的家人对我工作学习一贯的鼓励与支持！