ii

# Study on electromagnetic mechanism in ECB

## Abstract

Due to its good comfortability, safety, high speed, high efficiency and low noise, Maglev Vehicles have become one of the research focus in high speed transportation for the developed countries in recent years and also been accepted as one innovative high speed transportation system.

Eddy current brake (ECB) is a new type of braking methods developed and applied in different fields owing to simple theory, friction-free and reliability in recent years. Because of no abrasion, flat braking character and great braking force when train running in a high speed range, the linear ECB equipment becomes one of integrated braking methods for high speed trains.

The objective of this paper is to study the electromagnetic mechanism of ECB in state project [863] named as *study on vehicle ECB technique* by Meglev Vehicle ECB

test rig. The electromagnetic mechanism is deeply analized based on both finite element method (FEM) and analytical method. So good computation accuracy of FEM and clear concept of analytical method are acquired.

Chapter 2, 3 present FEM of ECB. In chapter 2, FEM language proposed by professor Liang Guoping, a Chinese mathematician, is explained. Such language can be divided into four parts to describe a finite element problem completely and is the basis of chapter 3. In chapter 3 a math physical model for the linear ECB problem is proposed with its material parameters given, then a corresponding weak form equation needed by FEPG is derived. Some files are written to describe ECB. Finally, the computation results are analized. By means of FEM, the accurate magnetic field and braking force are both obtained. And we also show how velocity affects magnetic field and braking force.

Chapter 4 explains the analytical method for ECB. Linear ECB characteristic equation is derived based on Maxwell equation. The effects of velocity, current and air-gap on the braking force can be clearly seen. Thus the physical process of ECB can be well

understood.

In this paper, the related magnetic field and force are calculated, the physical process of ECB is analized and the test results are explained. So the work of the author is of significance for the R & D of ECB.

**key words:** Maglev Vehicles, ECB(Eddy current brake), electromagnetic mechanism, FEPG(finite element program generator)

iv

# 声明

本人郑重声明:本论文是在导师的指导下,独立进行研究工作所取 得的成果,撰写成博士/硕士学位论文<u>"涡流制游统中的中疏和建</u>研究 除论文中已经注明引用的内容外,对论文的研究做出重要贡献的个人 和集体,均已在文中以明确方式标明。本论文中不包含任何未加明确 注明的其他个人或集体已经公开发表或未公开发表的成果。

本声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名:李维刚 2005年 1月15日

### 第一章 绪论

§1.1 磁悬浮列车的涡流制动

§1.1.1 概述

20世纪70年代以来,国外的高速列车进入了蓬勃发展期<sup>[1,2]</sup>,最高试验速度和最高运营 速度都在不断的提高,因此属于高速列车关键技术之一的制动问题,就成为研究的重点之 一。与其它的列车一样,高速列车也是依靠消耗列车运动产生的动能实现列车的减速与停 车。由于高速列车速度高,动能很大,依靠单一的制动方式难以实现在规定时间与距离内的 制动要求,因此都是采用多种形式的联合制动方式。

由于磁悬浮列车良好的乘坐舒适性、安全性、高速、高效以及无噪声污染等优点,最近 几十年成为世界发达国家在高速交通领域的研究热点之一,并且发展成为一种全新的高速交 通系统。近年来,日本与德国都制造出了磁悬浮列车的原型车,而中国上海正在建设全世界 第一条磁悬浮列车商业运营线。

涡流制动是近几十年发展起来的一种新型的制动方式,因其原理简单、无摩擦和高可 靠而在不同的领域都获得应用[3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]。由于线性涡流制动装置不影响列车

粘着,当列车运行在高速区间时制动特性平坦,制动力大,因而成为高速列车联合制动方式 中的一种,同样也成为磁悬浮列车三种制动方式构成的(摩擦滑块制动、电阻制动和涡流制 动)联合制动中的一种。

目前在轨道交通车辆领域,正在研究和使用的涡流制动器分为旋转型涡流制动器和线 性涡流制动器两大类。法国国营铁路公司在部分TGV高速动车组(Y225型转向架)上安装 了旋转型涡流制动器,日本也在部分新干线高速列车的非动力车的从轴上安装了旋转型涡流 制动器,通过运行实验证明了它具有良好的制动效果,但由于产生的热量过大,且影响列 车粘着,未能得到推广。德国对涡流制动的研究重点放在线性涡流制动技术上。克诺尔制 动器公司在20世纪70年代初首次成功地研制了轨道涡流制动装置,并与法国国铁一起完成试 验;1985年德国铁路研究中心进行了涡流制动装置的静止试验和区间运行试验,1991年成功 地应用在ICE高速列车上,积累了较多的技术与使用经验;随后德国将线性涡流制动技术运 用在磁悬浮列车上。

中国国内的涡流制动技术的跟踪研究起始于20世纪80年代初期,随后有不少的探索性研 究成果在相关刊物上公布,见参考文献[12, 13, 14, 15, 16]。20世纪90年代初,由于京沪高速铁 路的可行性研究和筹建,同济大学电气工程系(原上海铁道大学)的教授们提出了正式研究

轮轨方式高速列车的线性涡流制动课题,随即获得铁道部的批准,1994年铁道部科技司下达 了列车线性涡流制动试验台的研制任务。到目前为止,国内对于线性涡流制动技术仅处于技 术研究阶段,未在各类高速轨道交通车辆上正式使用,磁悬浮列车涡流制动技术及实验系统 取得初步成果。

涡流制动装置实验系统的关键技术一旦突破,将为磁悬浮列车的可靠运行提供技术支持,使之成为真正意义上的舒适、高效、安全、高速与便捷的大众交通工具,使车辆线性涡流制动装置真正成为磁悬浮列车的安全保障技术。

国际上磁悬浮列车以及应用在其上的线性涡流制动装置已经进行了几十年的研究,不仅 生产了磁悬浮列车的原型车,而且世界上第一条真正意义上的商业运营线已经在上海通车; 线性涡流制动装置也在多种类型的高速列车上获得成功的使用。我国在车辆线性涡流实验系 统领域的技术突破后,不仅将为具有中国自主知识产权的磁悬浮列车和涡流制动系统的研制 提供部分基础的技术支持,也为其它的具有自主知识产权高速交通系统的研制提供部分基本 的技术支持。便利、高速的交通系统是国民经济发展的基础之一,同时高速磁悬浮列车的研 制发展将带动一大批相关产业的迅速发展。而且,若以2008年北京奥运会、2010年上海世博 会为契机,与此有关的相关技术的成功突破以及磁悬浮列车关键技术的研究成功,一方面将 向世界展示中国的研发能力和中国人的经济与市场意识,同时也为中国建立多元化的交通格 局和符合中国国情的高速交通体系、建立中国特色的高新技术产业做出贡献。交通产业一直 就是一个国家的支柱产业,是国民经济发展的主要方向之一,涡流制动项目配合国家对交通 技术领域的重点投入,其成功也必将为高新技术产业的发展与增长作出贡献。磁悬浮列车所 具有的安全、舒适、高速特性,极具发展前途:作为可靠安全运行控制技术之一的车辆线性 涡流制动技术不仅适用于磁悬浮列车,同时也适用于其它的高速轨道交通系统;而作为线性 涡流制动装置的技术基础的车辆涡流制动实验系统,同样具有广阔的市场前景。按照目前我 国的经济发展速度和国民对交通工具的需求程度以及各地对交通系统建设的基本投入,涡流 制动技术和涡流制动装置实验系统技术突破后,将可以形成上亿元的新增工业产值。

#### §1.1.2 涡流制动原理

1906年, 吕登贝格在他的博士论文中提出了涡流效应的理论:如果一立体导体在不均匀 磁场内的运动,那么在导体内将产生感应电势,在导体内产生电流。因为在磁场内的运动过 程所产生的电流通过导体电阻将产生发热,因而动能被转化为热能。这样以来动能被减小, 因此这种现象可以用于制动。

涡流制动有两种形式:一种是旋转型电磁涡流制动装置;另一种是线性(轨道型)电磁 涡流制动装置。两者都具有一个强大的电磁铁,通过电磁铁和电感应体的相对运动,将列车 的动能转化为电磁涡流产生的热能,达到制动的目的。 旋转型电磁涡流制动的电磁感应体是旋转的,电磁感应体可以装在车轴上,也可以直接 装在牵引电机的电枢轴头上,或者直接用车轮作电磁感应体,在感应体单侧或两侧沿圆周方 向排列4-8个电磁铁,旋转型电磁涡流制动仍须经过轮轨之间的粘着起作用,属于粘着制动 方式。法国TGV-001高速燃气轮动车组的Y225型转向架上进行过装车制动试验,但未推广应 用。日本新干线时速达270km/h的100系列高速动车组的4节非动力车从轴上,就安装了这种 制动装置。

线性(轨道型)电磁涡流制动装置是在转向架两侧的两个车轮之间装设一个长度 为1200-2000mm的条形磁铁,而电磁感应体则是钢轨。励磁电磁铁的磁极沿钢轨作多极分 布,即磁极的N-S极作交替配置,磁极数在4-40范围内选择,励磁电磁铁的极面与钢轨面的 垂直距离不小于6mm,线性电磁涡流制动基本原理如图1-1所示。



图 1-1 线性涡流制动原理

在列车静止状态(V=0)时将会产生垂直于轨面的垂向力。当涡流制动器对于钢轨作相 对运动时(V≠0),将产生一个非恒定磁场,根据电磁感应定理

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

时变磁通将感应出电压及涡流。此二次涡流的磁场是与制动器的磁场反向的。磁场迭加的结果使得在运行方向上铁芯前端部分的磁场被削弱,后部的磁场被加强,从而使垂向力减小,在与运行方向相反的方向上形成一个水平分力,即制动力F<sub>b</sub>。

这种制动方式不受轮轨间粘着限制,电磁铁与钢轨不直接接触,不产生摩擦从而无磨 损,电磁吸力使轴重有所增加从而提高了粘着力。在很大的制动速度范围内,其制动力均有 较好的数值。线性涡流制动的缺点是用电量较大,一次性投资也较大。但维修保养简单,日 常配件备用量也较小。另外,如果利用动车组电阻制动所发出的电能为线性涡流制动装置的 电磁铁励磁,则可能构成一种经济效益和技术性能均较好的联合制动方式。

由上述可知,线性涡流制动是一种较好的高速列车制动方式。70年代初期,德国慕尼黑 的克诺尔制动器公式首次研制成功了线性涡流制动装置,并与法国国铁(SNCF)一起进行 了试验。在巴黎里昂线上的试验表明,制动效果良好,但制动力较高的情况下,要求电磁铁 有很大的励磁功率,从而温度很高,产生的热量过大,因而未推广使用。1985年,德国铁路 研究中心(明顿)将该制动器装车进行了静止试验与区间运行试验,采用了加强通风冷却的 方法以降低温度,还减小了励磁绕组的电阻值,以降低电磁铁的功率,并于1991年成功的应 用在ICE高速列车上。日本国铁也进行过线性涡流制动器的模拟试验。

#### §1.2 磁悬浮车辆涡流制动试验系统

#### §1.2.1 概述

涡流制动试验系统的作用主要有以下3个方面:①测量不同速度条件下涡流制动力的大 小,用于分析涡流制动力与速度之间的关系;②提供数据用于分析制动力与气隙大小、磁极 数、励磁电流、温升、电磁铁结构、材质等因素之间的关系;③为磁悬浮列车的涡流制动系 统设计方案提供实用数据。

整个试验系统包括: ①模拟制动能量子系统,包括轨道轮、惯性轮、主轴、轴承、皮带 轮等; ②模拟电磁铁与钢轨之间作用子系统,包括电磁铁和气隙调整机构及扇形支架; ③信 息采集及控制子系统,包括拉力和压力传感器、速度传感器、电流传感器、信号调理电路、 研华数据采集卡、工控机以及励磁电源柜、控制转速的变频器等。此外,还包括将轨道轮和 惯性轮带到指定速度的动力装置,包括电动机及传动机构等。

整个试验系统如图1-2所示。试验控制是由工控机发出的模拟量信号和数字量信号分别 对励磁电源柜和变频器实施控制。励磁电源柜提供励磁电流以产生励磁磁通。在制动试验开 始前,先利用变频器驱动电动机,带动轨道轮使其转速达到设定值。通过两组传感器测出涡 流制动力(沿轨道轮切线方向)和电磁吸引力(垂直于轮面方向)。

#### §1.2.2 涡流制动试验台

涡流制动试验台以轨道轮和惯性轮的转动惯量模拟实际车辆直线运动的动能,以旋转的 轨道轮和扇形结构中电磁铁之间的相互作用模拟实际状况下钢轨与线性涡流电磁铁的相对运 动关系(见图1-3)。涡流制动试验台总体设计是将电磁铁置于轨道轮两侧的扇形支架中, 每侧6个电磁铁,整个支架安装在主轴上,支架可通过轴承绕主轴旋转。这样设计是为了最 大程度地减少重力、摩擦力等对测量涡流制动力和电磁吸引力的干扰。扇形支架中电磁铁与 轨道轮作用力可分解为沿轨道轮切线方向的涡流制动力和垂直于轨道轮方向的电磁吸引力, 因此在这两个方向上分别设置测力传感器。为了便于分别测出电磁吸力和涡流制动力并使二 者不互相干扰,将整个测力机构分成两个部分:测电磁吸引力的拉力传感器,安装在扇形支 架内部,一端固定在扇形支架中,另一端固定在电磁铁上;测涡流制动力的压力传感器,安 装在扇形支架外部的2个测力座上,其上沿轨道轮切线方向安装的4个压力传感器分别顶在扇



图 1-2 磁悬浮车辆涡流制动试验系统

形支架的两边,与涡流制动力等值的反作用力使得扇形支架摆动,因此压力传感器测出的就 是涡流制动力。

#### 试验台机械部分

线性涡流制动试验台机械部分是一个须承受因高速旋转和瞬间制动而产生振动和很大 转动惯量冲击的机构,既要求其机械传动部分、电磁铁与轮轨间的气隙灵活可调,又要求其 基坐部分牢固可靠。车辆涡流制动试验台系国内首创结构,结构选型只能参考国外类似试 验台资料,结构原理采取以传动轮(惯性轮组装和测试轮组装)能量来模拟机车运行时产生 能量的方法,然后通过电磁铁进行涡流制动。即由一台37kw,额定转速1450r.p.m的电机提 供动力,通过转速比为1:1.1的皮带轮传至主轴上(惯性轮组装和测试轮组装)。而产生涡 流制动的是安装在磁轭上的12个电磁铁,磁轭经过测力机构固定在左右支架上,为了减少阻 力,避免不必要能量损失,这套支架安装在可绕主轴旋转的调心轴承上,为了增加机构的刚 性整个机构座安装在一块重7吨的底座上,通过地脚螺栓固定在水泥地面上,使机构稳定可 靠。

#### 试验台电磁部分

电磁铁的设计是根据TR08 车上励磁线圈的相关参数,并结合本实验台的特点进行分析计算完成的。由于试验台中的电磁铁与反应板之间的相对运动为周期性的圆周运动,与TR08 车的直线运动有很大的差别,但又要模拟TR08 车的电磁铁,为此把TR08车的电磁铁一分为二,将其分布在作圆周运动的反应板的两侧。为了获得较大的制动力,尽量把6 个电磁铁作横向分布在半圆上的圆周边缘处(见图1-4)。这样布置后铁轭的尺寸应该为150mm厚,但是由于制造加工的原因把原150mm厚的磁极分成了两个部分,其中80mm厚的材料为电工纯铁,其余部分为铸钢组成。这样对制动力有所降低,为此把铁心尺寸从原



图 1-3 涡流制动试验台

来的80\*150 改成90\*150。线圈为铜泊导线饶制的泊式线圈,线圈的匝数与TR08车的一样, 为350 匝。为了在低速时能进行交流励磁,线圈在一个心柱上作上下布置,每层175 匝,两 层之间由厚1mm的绝缘板隔开。导线尺寸为420\*0.25的铜泊,导线的绝缘为0.03mm厚的聚酰 亚胺薄膜。

#### §1.3 线性涡流制动的数学模型

轨道涡流制动时,电磁铁、钢轨和气隙形成三维空间磁场。因为是三维非线性涡流 场,并与速度相牵连,以及磁饱和、集肤效应等因素,导致问题非常复杂。要从理论上确 定与气隙、速度和励磁电流成函数关系的制动力表达式是非常复杂的,但这方面的探索研 究很有意义。由于问题的复杂,仅仅使用简化模型的数值法或解析法被应用到这类问题 上[12, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25],且多采用有限元法(FEM)。本文试图从有限元法 和解析法同时入手来探索线性涡流制动的机理,主要精力放在有限元法上。有限元法用来完 成线性涡流制动的分析计算(第二、三章),而解析法用来完成对涡流制动的机理解释(第 四章)。

为了对轨道涡流制动试验台的制动力进行有限元计算,对本文所研究的模型,作如下假设:

(1) 忽略铁磁物质电导率的温度效应,认为电导率o为常数。

(2) 忽略铁磁物质的磁滞效应,认为铁磁物质均匀且各向同性。



图 1-4 电磁铁布置

(3) 忽略位移电流 ∂ D / ∂t 的影响。

(4) 假设磁场沿钢轨轴向为平行平面磁场,则电流密度和矢量磁位只有z轴方向的分量,磁力线全部在与x-y平面平行的平面内,磁场只有沿x轴和y轴方向的两个分量,且认为 所有这些平面内的磁场图形完全相同,即

$$\vec{J} = J_z \vec{k} \qquad J_x = J_y = 0$$
$$\vec{A} = A_z \vec{k} \qquad A_x = A_y = 0$$
$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} \qquad B_z = 0$$

另有

$$B_x = \left| \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right|$$
$$B_y = \left| -\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right|$$

根据以上假设,以及研究的轨道涡流制动的电磁场对称性较好,故将所研究的三维涡流场问题转化为二维涡流场问题<sup>[24, 26, 27]</sup>。

由以上假设, 电磁场基本方程组的微分形式为:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \vec{J}_e \tag{1-1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})$$
(1-2)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{1-3}$$

$\forall \cdot J = 0$	(1-4)

有关场量之间的关系为

 $\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{1-5}$ 

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E} \tag{1-6}$$

以上各式中:

*I*-磁场强度

*ā*-磁通密度

Ē-电场强度

Ĵ。-线圈电流密度

Ĵe-涡流电流密度

μ-媒质的磁导率

σ-媒质的电导率

**V**-媒质运动速度

目前,用于电磁场有限元计算的位函数主要有矢量磁位*A*,标量磁位 Ψ,矢量电位*T*及标量电位 Φ,可以用不同位函数组合的方法去求解不同的问题。当电导率σ为常数时,可以 只取矢量位求解,不需要引入标量电位,称为矢量磁位*A*法。本文就采用矢量磁位*A*作为求 解位函数。

矢量磁位的定义式为

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{1-7}$$

根据公式(1-7)和公式(1-5),公式(1-1)可写成:  

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \vec{J}_s + \vec{J}_e$$
 (1-8)

图1-5是轨道涡流制动的结构示意图。



图 1-5 轨道涡流制动结构示意图

在励磁线圈部分,由公式(1-8)可得:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} = \vec{J}_s \tag{1-9}$$

在气隙中得

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} = 0 \tag{1-10}$$

在磁极中得

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = 0 \tag{1-11}$$

在钢轨导体中,根据欧姆定律的微分形式得

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E} = \sigma \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{V} \times \vec{B} \right)$$
(1-12)

式中V表示钢轨运动的速度,因为线圈由直流电激励,可忽略制动过程中 A的变化,近 似认为A 不随时间变化,得出

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \sigma \vec{V} \times \vec{B} \tag{1-13}$$

由上述可知,全部区域内的一般方程为

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} - \sigma \vec{V} \times \vec{B} - \vec{J}_s = 0$$
 (1-14)

§1.4 有限元方法与FEPG软件

§1.4.1 有限元方法

偏微分方程是描述客观世界数量关系的一种重要的数学方法。大量的工程、科学、技术 和生产问题常常归结为微分方程的求解。五十年代末出现的有限元方法是求解偏微分方程的 一种有效的数值计算方法。有限元的核心思想是结构的离散化,就是将实际结构假想地离散 为有限数目的规则单元组合体,实际结构的物理性能可以通过对离散体进行分析,得出满足 工程精度的近似结果来替代对实际结构的分析,这样可以解决很多实际工程需要解决而理论 分析又无法解决的复杂问题。由于有限元方法能求解复杂区域的偏微分方程问题,因此一出 现就受到工程师,尤其是结构力学工程师的普遍欢迎和重视[28, 29, 30, 31, 32, 33]。

随着科学技术和生产的迅速发展,有限元方法的应用越来越广泛,各种工矿企业、设计、科研部门已普遍采用有限元方法进行生产过程的数值模拟、科研的数值试验和产品的优化设计,有限元方法和有限元软件已经成为许多高新科技的基本工具和手段,是现代高科技大厦不可缺少的重要支柱。

§1.4.2 FEPG软件

具有我国自主产权的有限元软件FEPG是在科学与工程计算领域的新一代有限元软件<sup>[34]</sup>。该软件系统采用人工智能的方法,实现了程序编码的自动化,即用计算机生成程序代码。目前国内外还没有发现同类产品。该软件受到工程、教育、科研界工程师和科学家的欢迎。国内外相关领域专家对该软件系统的独特性能给予了高度评价。

FEPG采取了三项技术--模型语言与软件生成器、元件化设计思想和公式库技术<sup>[35]</sup>。许 多成功的案例显示,向用户提供一种模型语言和一个编程界面。用户使用这种语言,通过界 面编程,然后由该语言的生成器,通过计算机自动产生相应的计算机代码程序,是克服软件 复杂性最有希望的方法。这种语言一般只适用于某个领域或某个行业,每个行业每个领域都 需要各自不同的模型语言。例如字处理器有字处理器的模型语言,界面设计有界面设计的模 型语言,有限元方法有有限元方法的模型语言。

### 第二章 有限元语言

一般来说,通常有限元软件都非常庞大复杂,用户难以理解,而且这些软件并不能完全 满足用户的各种需要,用户通常需要修改或添加自己的程序才能解决自己的问题。但是由 于软件的复杂性,使得用户要修改这样的软件是非常困难的,甚至是不可能的。软件复杂 性带来的另一个缺陷就是,往往一个人编制的程序,另一个人难以理解,甚至编程者本身 在过一段时间以后也看不懂自己编写的程序,这给软件的维护和升级带来相当大的困难。

如何降低软件的复杂性,简化软件和程序的编制,使得编制软件和程序不再是程序员 的专利,而是非专业人员也可以很容易的根据自身的需要,编制和拥有自己的程序和软 件。这已经越来越引起了软件业的关注。

我们需要寻求一种新的编程方法,发明一种新的编程工具,使得编程象设计那 么方便 明了,这样用户就能设计出高水平的软件,而无需专业编程人员的参与和帮助。这 种设计 更像流程图,而不是一行行的代码。甚至对于数学表述也能自动转换成计算机语言 程序代 码,比如对于有限元方法,我们只需给出问题的偏微分方程表达式的数学描述,计算机就能 自动产生相应的计算机语言程序。

为此,中国科学院梁国平研究员针对有限元方法提出了一种模型语言--有限元语言。 有限元语言是一种描述性的模型语言,描述所要求解的有限元问题及其求解算法,准

确地告诉计算机(其实是该语言的生成器)我们要做什么和如何做,以便计算机能准确无误地生成我们所需的有限元程序。这种有限元语言非常接近有限元书籍叙述有限元方法和 有限元问题时所采用的专业表述语言<sup>[36]</sup>。关于有限元方法的一些专业基础知识在这里就不赘述了,请参阅相关参考文献[37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46]。

通常对一个有限元问题求解的描述包括偏微分方程描述和有限元算法描述。因而描述 有限元问题的有限元语言也很自然地被分成两个部分:第一部分描写有限元问题的偏微分 方程,按照虚位移原理的形式,书写有限元问题的偏微分方程表达式,生成器将根据它生 成有限元计算所需的单元计算子程序。

第二部分描述求解该问题的有限元算法,包括描述非线性问题的线性化,动态问题对 时间的离散格式,对非线性迭代和时间步的控制,以及具体的有限元计算流程等。这部分 描述针对算法和流程又分成两类文件。

第一种类型文件是用于有限元算法的描述,给出有限元离散后线性方程组的系数矩阵 和右端项表达式,以及迭代步(包括非线性迭代和时间步迭代)的控制等内容,称为算法 文件,以NFE为扩展名,称为NFE文件。第二种类型文件主要是用于描述具体有限元求解 流程,对于多场耦合问题还包括给出各物理场所采用的单场算法名,各场之间的耦合方式,

该文件以GCN为扩展名,称为GCN文件。

下面首先说明有限元语言的第一部分一一对有限元问题偏微分方程的描述,并给出了 一个具体的例子: 使用该有限元语言完整地描述了一个Poisson方程的偏微分方程。

§2.1 偏微分方程文件

使用有限元方法求解一个问题,首先我们必须了解该问题的物理模型,即偏微分方程。 同样,使用有限元语言编程生成求解一个有限元问题的计算程序,我们首先需要正确完整。 地描述该问题的偏微分方程,用以生成有限元计算的单元计算子程序,包括单元刚度矩阵、 单元质量矩阵、单元阻尼矩阵和单元荷载向量的计算。不失一般性,我们提出的有限元语 言对偏微分方程的描述,从虚位移原理出发,描述微分方程的弱形式。我们称这类描述文 件为PDE文件。

根据偏微分方程的性质,一般对一个偏微分方程的描述可以归结为对以下几个信息的 描述:

一、给出一些定义信息,包括未知函数名,坐标变量名,单元刚度矩阵名、单元质量 矩阵名、单元阻尼矩阵名、单元载荷向量名,形函数类型,数值积分类型,材料信息,以 及为了简化对方程的描述而给出的用户自定义函数名等;

二、给出用户自定义函数的具体表达式;

三、给出单元刚度矩阵的具体计算表达式;

四、给出单元质量矩阵的具体计算表达式;

五、给出单元阻尼矩阵的具体计算表达式;

六、给出单元载荷向量的具体计算表达式;

因此,偏微分方程的有限元语言描述文件(PDE文件)最多只需要6段信息。下面具体 说明在描述过程中的各种语法规定。首先我们从定义信息段开始,说明各信息段的具体书 写格式及其所表述的意思。

§2.1.1 定义信息段

定义信息段主要给出一些定义信息,最多10行信息就足够了,下面先给出该信息段的 一般形式:

2.1 PDE文件定义信息段一般形式

DISP= 未知函数名,	未知函数名,,	未知函数名
COOR= 坐标变量名,	,坐标变量名,…	,坐标变量名

COEF= 非线性系数函数名,非线性系数函数名,…,非线性系数函数名
FUNC= 自定义函数名,自定义函数名,,自定义函数名
MATE= 材料参数名;…;材料参数名;材料参数缺省值;…;材料参数缺省值
SHAP= 单元几何形状类型符,单元节点数
GAUS= 单元几何形状类型符或高斯积分点数
MASS= 单元几何形状类型符,质量密度
DAMP= 单元几何形状类型符,阻尼系数
LOAD=表达式,表达式;···;表达式

其中的函数名、变量名和材料参数名均可由用户自由定义,用户仍然可以使用自己习惯的变量名。

下面详细讲述各行的含义及其填写规则。

在DISP信息行给出的是需要求解的微分方程的未知函数名。可以有任意多个未知函数 名,每个未知函数名对应一个未知函数,各未知函数名之间用空格、逗号或分号隔开。

COOR右边空一格(或等号)后给出坐标变量名,可以有任意多个,每个坐标变量名 对应一个坐标变量。坐标变量名之间用空格、逗号或分号隔开。

对于非线性或多场耦合问题等含有变系数问题,在COEF信息行给出系数变量名,可以 有任意多个,每个系数变量名之间用空格、逗号或分号隔开。对线性问题和没有变系数问

题,无需填写本行。

对于复杂繁冗的信息,如虚功表达式等,用户可以自行定义一些函数名,使书写变得 简洁,便于阅读和修改,这些函数名的定义就放在FUNC信息行中。在该行可以定义任意 多个函数,各函数名之间用空格、逗号或分号隔开。此行信息只用于定义函数的名字,后 面必须有FUNC信息段与之对应,在那里给出各函数名具体的函数表达式,该行之后的各 信息段中相同的表达式均可以用相应的自定义函数名来代替。注意该行信息必须与后面的 FUNC信息段配合使用。它们的关键字虽然一样,但是该FUNC行信息只是DEFI信息段中的 一个定义信息,它的具体内容都在FUNC信息段中填写,不要混淆了它们的作用。如果虚功 方程公式并不复杂繁冗,不需要格外的自定义函数,也可以不填写此行和后面的FUNC信息 段。

MATE右边空一格(或等号)后给出材料参数名,可以有任意多个,材料参数名之间 用空格或分号隔开,注意这里不能用逗号。后面填写材料参数对应的缺省值,之间用空格 或分号隔开,注意这里不能用逗号,也可以不写材料参数缺省值,此时,系统取缺省值为 0。这些材料参数名可以在其他信息段中使用。增加MATE行后,还可以在其他信息段中 使用变量名time、dt、imate和ielem,它们分别表示当前时刻(time)、时间步长(dt)、材料

号(imate)和单元号(ielem)。

SHAP信息行给出单元信息,包括单元类型符和单元节点数,例如:

SHAP Q, 4

表示双线性四边形单元。单元类型符规定如下:Q表示四边形单元;T表示三角形单元; C表示六面体单元;W表示四面体和五面体单元;L表示线单元。

GAUS信息行给出所采用的数值积分信息:采用节点积分还是高斯积分,如果是高斯 积分还需给出各方向上的高斯积分点个数。当采用节点积分的时候,就填写单元类型符。 当采用高斯积分的时候,就填写一个方向上的高斯积分点的数目。例如,如果是四边形单 元,填写2就表示有2×2个高斯积分点;如果填写Q就表示采用顶点积分。

MASS右边空一格(或等号)后给出单元类型符和单元质量密度。这里单元类型符规定 与SHAP行的规定相同,单元质量密度是FORTRAN语言表达式,可以是FORTRAN语言规 定的标准函数,也可以是用户自己定义的函数。本行反映了微分方程对时间的导数项,所 以仅对抛物方程和波动方程才有此行。本行的目的是给出质量矩阵MASS的表达式,在这里 只允许采用集中的方式。单元质量密度个数可以是未知函数的个数,若只写一个,表示所 有的单元质量密度都取同一个值,如不填写单元质量密度,系统将取单元质量密度为1.0。

DAMP右边空一格(或等号)后给出单元类型符和单元阻尼系数。这里单元类型符规 定与SHAP行的规定相同,单元阻尼系数是FORTRAN语言表达式,可以是FORTRAN语言 规定的标准函数,也可以是用户自己定义的函数。本行的目的是给出波动方程的阻尼矩 阵,仅对波动方程才有此行,在这里只允许采用集中的方式。单元阻尼系数个数可以是未 知函数的个数,若只写一个,表示所有的单元阻尼系数都取同一个值,如不填写单元阻尼 系数,系统将取单元阻尼系数为1.0。

LOAD右边空一格(或等号)后给出单元载荷项即微分方程右端项的FORTRAN语言表 达式,可以是FORTRAN语言规定的标准函数,也可以是用户自己定义的函数,表达式如果 有多项或者是有加减号的一项,此表达式要用括号括起来。表达式的个数是未知函数的个 数。

举例说明

这里及以后每节的例子都只是为了示范该节所讲述的信息段的填写,我们将在本小节最 后 结合一个实际问题的PDE文件描述总体风格和特点。

(1) 举例如下:

### 2.2 PDE文件DEFI信息段示例

DEFI

DISP u, v COOR x, y COEF ua, va, fu, fv, gx, gy FUNC funa, funb, func MATE em; ed; eqx; eqy;  $\{2.5e-7; 1.0e-6; 0.0; 0.0;\}$ SHAP q, 4 GAUS q MASS q; em DAMP q; ed LOAD eqx; eqy 空一行

(2) 说明如下:

上面例子中,DISP行定义了两个未知函数u和v,由此知道该问题是一个微分方程组, 两个未知函数u和v须同时求解。

COOR行给出坐标系的坐标变量名: x, y。

从COEF行知道,此问题有变系数,用到可能是上一个迭代步或上一个时间步计算得到 的数值结果,也可能是另一个场的结果等等。

从FUNC行知道,用户定义了三个替换函数,它们的具体表达式将在后面的FUNC信息 段给出。

MATE行说明此问题定义了四个材料参数。分别为em、ed、eqx和eqy。其缺省值分别为 2.5e-7、1.0e-6、0.0和0.0。

SHAP行给出的单元类型符是q,单元节点数为4,表示采用4节点四边形线性单元。

GAUS行给出了单元类型: q,表示采用节点积分方式。

MASS行说明取单元质量密度为em的质量矩阵,DAMP行说明取单元阻尼系数为ed的阻 尼矩阵。

LOAD行说明对未知函数u的载荷是eqx,对未知函数v的载荷是eqy。

§2.1.2 自定义函数段

上节我们提到,当某些信息,如虚功方程表达式,过于复杂繁冗时,可以使用用户自定义函数的方式来简化这些表达式的书写。本节我们将说明如何使用用户自定义函数简化 公式的书写。

首先需要定义的函数名必须在DEFI信息段的FUNC行给出。为了叙述方便,假定FUNC行定义了m个自定义函数名,一般自定义函数段的填写方式如下:

FUNC
\下面一段信息重复m次(包括空一行)
自定义函数名= ± [未知函数或其导数]*表达式
± [未知函数或其导数]*表达式
± [未知函数或其导数]*表达式
空一行

2.3 PDE文件自定义函数段一般形式

这里的"未知函数"是指在DEFI信息段DISP行规定的未知函数名,导数是指对原坐标系,即 COOR行定义的坐标变量的导函数。其一阶导数及二阶导数的一般表达方式为:

一阶导数:未知函数名/坐标变量名

二阶导数:未知函数名/坐标变量名,坐标变量名

这里的坐标变量名是指COOR行给出的变量名。

这里的"表达式"是FORTRAN语言表达式,可以是FORTRAN语言规定的标准函数,

也可以是用户自己定义的函数。"表达式"中不允许出现未知函数或其导数,以下各信息 段中的"表达式"都必须遵守此规定。

表示符{-/-}也可以作为表达式的变量,其中符号{-/-},表示前者对后者的偏导数。 例如: x,y是COOR行定义的原坐标变量名,ua是COEF行定义的系数变量名,则{ua/x}表示 $\frac{\partial ua}{\partial x}$ 。

符号"]"后面的乘号"\*"也可以是除号"/"。

本信息段可以占有任意多行,但每行开头的两个字符必须是"±["。用户自定义函数 与DISP行定义的未知函数一样,可以用在下面的各信息段中,但是不能用自定义函数的导数,这一点与后者是不同的。

### 举例说明

按照DEFI信息段FUNC行规定的符号,FUNC信息段可以如下

### 2.4 PDE文件自定义函数段示例

FUNC

funa=+[u/x]\*{ua/x} 空一行 funb=+[v/y]\*{va/y} 空一行 func=+[u/y]+[v/x]+[u/x]\*{ua/x}+[v/y]\*{va/y} 空一行

上面的例子中定义了三个函数: funa= $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial ua}{\partial x}$ , funb= $\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial va}{\partial y}$ , func= $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial ua}{\partial x}$ + $\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial va}{\partial y}$ , 其中ua和va是DEFI信息段COEF行中定义的方程的变系数,可能是非线性迭代 中上一迭代步或时间步的解。

§2.1.3 单刚信息段

一个微分方程的单元计算,一般包括刚度矩阵的计算、质量矩阵的计算、阻尼矩阵的计算 和右端载荷向量的计算。本段信息就是描述虚功方程的单元刚度矩阵计算,一般不可 缺 少, 它的一般形式如下:

### 2.5 PDE文件单刚信息段一般形式

	•	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

STIF
DIST= ±[未知函数或其导数; 未知函数或其导数]*表达式
±[未知函数或其导数;未知函数或其导数]*表达式
• • •
±[未知函数或其导数;未知函数或其导数]*表达式
至一行

其中DIST表示刚度矩阵为分布矩阵,如为集中矩阵则用另一个关键字:LUMP表示 (主要用于描述质量矩阵和阻尼矩阵的计算)。我们规定刚度矩阵不允许采用集中矩阵, 因此必须使用关键字DIST,而不能使用LUMP。从关键字STIF开始至空行结束之间可以 占有任意多行,但中间不允许有空行出现,并且换行后必须以符号"+["或"-["开头。 符号"]"后面的"\*"号也可以是"/"号。这里的未知函数是指在DEFI信息段中DISP行 规定的未知函数名或FUNC行规定的函数名,但是后者不能用其导数方式。这里的导数是 指DISP行规定的未知函数对原坐标系坐标变量(即COOR定义的坐标变量)的导数,它的 一般方式与FUNC信息段定义的导数方式相同。这里的表达式也与自定义函数描述信息段规 定的"表达式"相同。

这里的[未知函数或其导数;未知函数或其导数]表示内积,分号";"前面的"未 知函数或其导数"应理解为虚功方程中的未知函数或其导数。分号";"后面的"未 知函数或其导数"应理解为虚功方程中的虚位移。本语言规定未知函数与它的虚位移 取同一个名字,不另外规定虚位移名。两个配对的方括号"["和"]",应理解为它们 的内积。一般来说分号前和分号后的表达式交换位置后是不相等的(即不对称)。例 如: [u/x; u/y]≠[u/y; u/x]。

举例说明

Laplace方程: 
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
及其广义解表达式如下

$$\int_{\Omega} (\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y}) dV = \int_{\Gamma} (\frac{\partial u}{\partial x} n_x \delta u + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \delta u) d\Gamma$$

其刚度矩阵表达式的有限元语言描述如下:

STIF

DIST=
$$[u/x; u/x]+[u/y; u/y]$$

空一行

### §2.1.4 单元载荷向量信息段

和单元刚度矩阵一样,方程右端项,即单元荷载的描述也是一个微分方程的有限元语言 描述不可缺少的。本信息段和DEFI信息段中的LOAD行,用户只要填写一个。它的一般方 式为:

LOAD= ±[未知函数或其导数]\*表达式

±[未知函数或其导数]\*表达式

. . .

±[未知函数或其导数]\*表达式

空一行

其中"未知函数或其导数"的定义与STIF信息段的规定相同,但是这里的未知函数应 理解为其相应的虚位移。符号"]"后的乘号"\*"也可以是除号"/"。

此段信息同样可以占有任意多行,但换行后必须以"+["或"-["两个符号开头。

其中"表达式"与STIF信息段的规定完全相同。

举例说明

按照前面DEFI信息段的符号规定,LOAD信息段可有如下两种书写方式:

方式1:

LOAD = -[u]/2\*10 + [v]/2\*10

-[funa]\*(fu+fv\*2)

-[funb]\*(fu-fv)

-[func]\*(fv-fu\*2)

空一行

方式2:

 $LOAD = +[u]^{t}[u/x] + [v]^{t}[v/y] + [u/x]^{t}[u/y]^{t}$ 

空一行

注: 这里的举例仅说明LOAD信息段的书写形式,用户不必深究如何得到该表达式。我 们 在后面部分将用具体例子给出这方面的说明。

### §2.1.5 FORTRAN源程序段的使用

前面我们提到,使用有限元语言编程描述偏微分方程时,允许用户在PDE文件的某些信息段中插入FORTRAN语言源程序,或在最后附加FORTRAN语言源程序。下面针对各种情况详细说明如何插入Fortran源程序。

### 在信息段内插入

前面介绍的6个信息段中,并不是每一信息段内都可以插入FORTRAN语言源程序。

本语言规定只允许用户在DEFI信息段、FUNC信息段和STIF信息段这3个信息段中插入FORTRAN源程序,在这3个信息段中插入的位置也不尽相同。

在DEFI信息段中,FORTRAN源程序在末尾插入;而FUNC和STIF信息段则在开头(即关键字FUNC或STIF之后)插入FORTRAN源程序。

插入FORTRAN程序行的书写方式有下面三种:

1、 \$C6(空一格) FORTRAN源程序,

2、 \$C0(空一格) FORTRAN源程序,

3、 \$CV(空一格)FORTRAN源程序,

其中字母"C"和"V"大小写不限。

第一种方式表示空6列之后插入FORTRAN源程序,第二种方式表示不空列即从第一列 开始插入FORTRAN源程序,这是按照FORTRAN语言的规定设计的。第三种方式是为了在 插入的 FORTRAN源程序中可能包括已知函数对坐标变量的导数(此时要采用花括号"{" 和"}"的表达方式,但不是FORTRAN语言源程序)而设计的。

用户在使用上述方式插入FORTRAN源程序时,要注意以下几点:

1、当用户引入标号时最好采用1000以上的标号,以免与自动生成的标号相重。

2、其次,在信息段内插入的FORTRAN源程序段不允许有空行,因为本语言规定空行 为信息段的结束。

3、在DEFI信息段末尾插入FORTRAN源程序,表示在程序的开头,数值积分点循环和 变量初始化程序之前插入这些源程序,如果想将其放在变量初始化程序之后,可以通过在 源程序的前面加入一行

\$I

来实现。在FUNC或STIF信息段开头插入FORTRAN源程序表示在数值积分点循环体内插入 这些源程序,如果有FUNC信息段,这些源程序要在FUNC信息段插入,没有FUNC信息段 时才在 STIF信息段插入。

附加FORTRAN源程序

有两种方式可以在PDE文件中用到用户附加的FORTRAN子程序(SUBROUTINE) 和函数(FUNCTION)。第一种方式是在PDE文件的结束字END之后空一行填写关键 字FORT,然后附加这些FORTRAN子程序和函数。第二种方式是把这些FORTRAN源程序 放在另外一个FORTRAN源程序文件中,单独编译,最后与PDE文件产生的单元子程序一起 连接到单元计算子程序。

§2.1.6 PDE文件具体书写实例

下面以Poisson方程为例,给出一个PDE文件的具体书写实例。

给出问题如下:

$$\begin{cases} -\Delta u = -6\\ u \mid_{\Gamma} = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

其等价虚功方程形式为

$$\int_{\Omega} (\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \delta u}{\partial z}) d\Omega = \int_{\Omega} f \delta u d\Omega$$

假设采用四边形双线性元,数值积分采用节点积分,则描述该问题的PDE文件如下,在此 文件中每行右边的中文是相应的简单注释:

2.6 PDE文件形式1

$\langle u/xx+u/yy+u/zz = 6$	(pde)	注释行,微分方程表达式
$\setminus u = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z$	(solution $)$	注释行,微分方程的解
disp u		未知函数名字
coor x,y,z		坐标变量
mate		材料参数段,没有材料信息,可以不写该行

shap q 4	形函数段	
gaus q	数值积分点选取段	
空一行		
stif		
dist = $[u/x;u/x]$ + $[u/y;u/y]$ + $[u/z;u/z]$	刚度矩阵表达式	
空一行		
load = -[u] * 6.	载荷表达式	
┃ 空…行		
End		

或者如下形式,注意文件中LOAD信息段的处理:

2.7 PDE文件形式2

$\langle u/xx+u/yy+u/zz = 6$	(pde)	注释行,微分方程表达式
$\setminus u = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z$	(solution)	注释行,微分方程的解
disp u		未知函数名字
coor x,y,z		坐标变量
mate		材料参数段,没有材料信息,可以不写该行
shap q 4		形函数段
gaus q		数值积分点选取段
load -6.0		载荷表达式
空一行		
stif		
dist = $\left[\frac{u}{x}; \frac{u}{x}\right] + \left[\frac{u}{y}; \frac{u}{y}\right] + \left[\frac{u}{y}; \frac{u}{y}\right]$	z;u/z]	刚度矩阵表达式
空一行		
End		

至此,有限元问题偏微分方程的有限元语言描述已经基本介绍完了,下 面我们就来介绍一下描述耦合关系和计算流程的文件。

### §2.2 耦合关系和计算流程文件

有限元方法发展到今天,对于单场问题求解算法的研究一比较成熟,但对于多场耦合

问题的有限元求解研究还很不充分,其原因有二:其一、多物理场联立求解,因为各 方程 的性质差异比较大,算法问题不容易解决;其二、各物理场分别求解,耦合问题的数据结 构比较复杂,编程工作量大。而且现实世界中耦合问题千变万化,不同的耦合 场个数,不 同的耦合方式组合成无数种模式,我们不可能编制一个通用的程序适用于 所有的耦合场问 题。采用有限元语言编程,利用自动生成技术,我们只需给出各场的 有限元算法、耦合关 系及计算流程,就可以自动生成相应的有限元程序,并自动组织 各场之间数据的传递。保 证了程序的正确性和统一性。下面我们就来介绍用于描述这 种耦合关系和计算流程的有限 元语言程序: GCN文件

首先给出一个求解热固耦合问题的GCN文件,其中a、b和c分别表示位移场、温度场和 应力场,并逐行给出注释说明;

defi \ 算法段关键字

par a ell b & \ a是第一个场的标识符 ell表示采用线性稳态算法 与b场耦合 &表示生成的文件 不重命名

b ell \ b是第二个场的标识符 ell表示采用线性稳态算法

c str a b \ c是第三个场的标识符 str表示采用集中质量矩阵的最小二 乘算法 和a、b场耦合 空一行 \表示定义段结束,以下给出计算流程

startsin b \ 对b场采用变带宽对称求解器的方式进行初始化

startsin a \ 对a场采用变带宽对称求解器的方式进行初始化

solvsin b \ 对b场采用变带宽对称求解器进行求解

solvsin a \ 对a场采用变带宽对称求解器进行求解

stress c \ 对c场采用集中质量矩阵的最小二乘法进行求解

结合上面的例子,我们给出关于GCN文件的一般性描述。GCN文件分为两段:第一段为定 义段,用关键字defi标识;第二段为命令流段,给出多场耦合计算的流程。两 段信息之间空 一行表示分隔。

定义段第一行为关键字defi, 第二行开始每一行给出一个场的信息, 有多少 个场就需写 多少行。每一行的第一列为场标识符,按英文字母的排序顺序表示。第二 列为对应该场的 自由度数(也可以不填,系统将自动从PDE文件识别)。第三列为该 单场的算法文件名。 从第四列开始给出与该场耦合的场的标识。例如上例中a场(位 移场)和b场(温度场)耦 合,所以在描述a场的信息行中的第四列上填b。也可以和 多个场耦合,如上例中c场(应力 场)和a(位移场)、b(温度场)两个场耦合,则在c场信息行中第四、第五列上写a和b。 总之,和多少个场耦合就写多少个。但要注 意不能和自身耦合。每个场信息行的最后一列 给出&或不给,表示与该场相关的文件 名要不要重命名,也就是说,由此生成的批命令文件 中,各场相应命令后的文件参数名需不需要重新命名(一般是在文件名后加场标识符),

给出&号表示生成的文件名不需重命名,不给出则表示需重命名。后面我们还将详细说明。

第二段为命令流段,给出耦合场的计算流程,包括各场的初始化、边值计算和时间更 新、求解等。有限元语言为这一段的书写提供了一些相关的关键字:

- startc 用存单刚的方式初始化
- startsin 用不存单刚的方式初始化
- bft 计算随时间变化的场的边值和时间的更新
- solve 用存单刚的方式求解
- solvsin 用不存单刚的方式求解
- stress 用最小二乘法求解

填写命令流段时,按有限元计算的顺序使用这些关键字,除bft关键字外,每个关键字 后空 一个填上相应的场名标识表示是对该场的操作,如startsin b表示对b场用不存 单刚的方式初 始化。对bft关键字,如果所有场的边值均不随时间变化,则bft后不加 任何场标识;如果有 物理场的边值随时间变化,则在bft关键字后给出场标识,有几 个场就给出几个标识。各场 标识之间用空格分开,如a场和b场的边值都随时间变化,则命令流中处理边值的部分如下 填写:

bft a b

最后我们再给出GCN文件的一些相关说明:

1、GCN自动修改单场问题的算法形成耦合问题的算法,对算法文件的改动主要 又一下 几个方面:

a. 对算法的输出文件unod进行更名。如对a场将unod改为unoda,对b场则改为unodb。如果场的描述行最后有"&"则保持原来的文件名不变;

b. 加上coef段;

c. 读入耦合场数据。

2、生成的NFE文件命名方式为:GCN文件前缀名+场标识符,例如GCN文件为 et.gcn,则生成的NFE文件为:eta.nfe,etb.nfe,....。注意:PRE文件规定的场名要 跟这里的场名(即NFE文件名)保持一致。

3、用于生成单元子程序的PDE文件也应该按照GCN文件前缀名+场标识符的方式命名,如上例中对应于a场的PDE文件文件应为eta.pde,对应于b场的为etb.pde,等等。

从上面的介绍可以知道,使用有限元语言编程除了可以描述一般的单场问题外,更重要 的是可以描述任意多场和任意方式的耦合,而且对场的个数和各场自由度的个数都没有任何 限制,这是一般通用有限元软件无法做到的。

§2.3 数据结构文件

一个有限元问题的描述除了偏微分方程和算法外,前处理和数据结构的定义也是一个 很重要的部分,这部分包括坐标系信息、场名的定义、各场单元网格类型的定义、材料参数的给出等。我们规定将这些信息都放在一个扩展名为PRE的数据结构文件中。

该文件主要包括三个信息段:基本信息段、单元信息段和材料信息段。

下面结合一个热固耦合问题的数据结构文件: et.pre文件来说明该文件的具体内容 和书 写规定。

_		_
	2dxy 3 3 8 10	
	eta 015 u v	
	etb 0 1 3 u	
	etc 015 sx sy sxy	
	#	
	element y	
	eta	
	aeq4.4 pe pv alfa fx fy	

2.8 et.pre文件

```
#
etb
beq4 4 ek ec q
#
etc
ceq4 4 pe pv alfa fx fy
#
matedata
1 eta aeq4
1.0e9; 0.3; 1.0 e - 5; 0.0; 0.0;
1 etb beq4
1.0e1; 0.1; 0.0;
1 etc ceq4
1.0e9; 0.3; 1.0 e - 5; 0.0; 0.0;
#
```

第一行到第一个"艹"是第一个信息段--基本信息段:给出坐标系及各个物理场 的 总体信息,下面逐行解释:

第一行给出了5个信息:

1、坐标系: 2dxy--表示使用二维直角坐标系:

2、场的个数: 3--表示该问题需要求解3个物理场:

3、最大自由度数: 3--表示3个物理场中最大自由度数是3;

后面两个信息主要是用于使用图形界面显示时的字符长度和数据长度,对于程序的生 成的没有实际意义。

第二行开始,每行给出一个物理场的具体信息:

每行的第一个字符串给出场名: eta、etb、etc;

第二个参数给出初值的个数,本例是稳态问题,所以没有初值,该参数为0;

第三个参数给出单元类型数;

第四个参数给出材料参数个数,如有多种单元类型和多种材料参数个数,给其中 最大 者;

第五个及以后的参数给出自由度名。

接下来的是单元信息段,以关键字:

element y[或n]

开始,后面给出每个场每种单元类型的信息,每个场的信息之间以"#"号分隔,有 多少个场就写多少段;

每段第一行是场名,从第二行开始给出该场的各种单元类型的信息,每一行给出一种 类型的信息,有多少种单元类型就写多少行;每行的第一个字符串给出的是单元子程序 名, 第二个参数给出单元节点数, 第三个至最后给出材料参数名;

PRE文件的最后一个信息段是材料信息段, 该段信息以关键字:

matedata

开始,后面给出每个场的各种单元类型的各种材料参数:每组材料信息写两行,第一 行的第一个参数是该组材料在该场材料参数中的编号,第二个参数是场名,第三个 给出的 是单元子程序名,注意要与单元信息段中的相对应;第二行给出的是对应于单元 信息段中 给出的材料参数名的具体的数值,以";"隔开。

PRE文件最后以"艹"结束。

有了上面这些文件,一个有限元问题及其求解已经完全可以描述清楚了,接下来要做的 就是生成器一一有限元程序自动生成系统的事了。

### 第三章 基于FEPG的涡流制动电磁计算

本章使用有限元法来研究轨道涡流制动的电磁机理,主要的目标是计算不同速度下的磁 场分布和制动力,并对其作出适当的解释。文章开始从偏微分方程出发推导了FEPG系统需 要的虚功方程,给出了计算模型与材料参数,接着给出了描述轨道涡流制动问题的有限元语 言文件(理论基础在第二章),最后对计算结果进行了分析和解释。

### §3.1 轨道涡流制动的计算模型

### §3.1.1 非线性电磁场的牛顿迭代格式

由方程(1-14)出发,我们来进行一些化简。将(1-7)代入(1-14),得到

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} - \sigma \vec{V} \times \nabla \times \vec{A} - \vec{J}_s = 0$$
(3-1)

由于是二维问题,我们有

$$\vec{A} = A\vec{k} \tag{3-2}$$

$$\vec{J}_s = J_z \vec{k} \tag{3-3}$$

$$\vec{V} = V_x \vec{i} \tag{3-4}$$

于是

$$\vec{V} \times \nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ V_x & 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial y} & -\frac{\partial A}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} = -V_x \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \vec{k}$$
(3-5)

将(3-5)代入(3-1),并考虑到(3-2)-(3-4),得到  

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times A + \sigma \cdot V_x \cdot \frac{\partial A}{\partial x} - J_z = 0$$
 (3-6)

根据虚位移原理<sup>[34]</sup>,我们得到(3-6)弱解的积分形式  
$$\int_{\Omega} [\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times A + \sigma \cdot V_x \cdot \frac{\partial A}{\partial x} - J_z] \cdot \delta A d\Omega = 0$$
(3-7)

又因为

$$\int_{\Omega} \nabla \times (\frac{1}{\mu} \nabla \times A) \cdot \delta A d\Omega = \int_{\Omega} (\frac{1}{\mu} \nabla \times A) \cdot (\nabla \times \delta A) d\Omega + \int_{\Gamma} (\vec{n} \times (\frac{1}{\mu} \nabla \times A)) \cdot \delta A ds \quad (3-8)$$

其中, δA是A的虚位移, ī表示域Ω的边界Γ的法向单位向量。对于本涡流制动问题, 在 模型边界上磁位A受到第一类边界约束, 故有

$$\int_{\Gamma} (\vec{n} \times (\frac{1}{\mu} \bigtriangledown \star A)) \cdot \delta A ds = 0$$
(3-9)

故 (3-7) 式变成  

$$\int_{\Omega} (\frac{1}{\mu} \bigtriangledown \times A) \cdot (\bigtriangledown \times \delta A) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \cdot V_x \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta A d\Omega = \int_{\Omega} J_z \cdot \delta A d\Omega \qquad (3-10)$$

采用内积形式写为

$$(\frac{1}{\mu} \bigtriangledown \times A, \bigtriangledown \times \delta A) + (\sigma \cdot V_x \cdot \frac{\partial A}{\partial x}, \delta A) = (J_z, \delta A)$$
(3-11)

由于电磁铁和感应板都是非线性材料,磁导率µ是磁位A的函数,设

$$\mu = \phi(|\bigtriangledown \times A|) \tag{3-12}$$

定义一个泛函

$$F(A) = \left(\frac{1}{\mu} \bigtriangledown \times A, \bigtriangledown \times \delta A\right) + \left(\sigma \cdot V_x \cdot \frac{\partial A}{\partial x}, \delta A\right) - \left(J_z, \delta A\right)$$
(3-13)

上面的虚功方程(3-11)等价于

$$F(A) = 0 \tag{3-14}$$

我们运用牛顿迭代法来解决此非线性问题,如下

$$F(A + \triangle A) = F(A) + F'(A) \triangle A = 0$$
(3-15)

设

$$W = A + \triangle A \tag{3-16}$$

将(3-15)改为全量形式,利用(3-16),可得

$$F'(A)W = F'(A)A - F(A)$$
(3-17)

対 (3-13) 求导可得  

$$F'(A)W = \left(\frac{1}{\mu} \bigtriangledown \times W, \bigtriangledown \times \delta A\right) - \left(\frac{\phi'(|\bigtriangledown \times A|)}{\mu^2 \cdot |\bigtriangledown \times A|} \bigtriangledown \times A \cdot \bigtriangledown \times W, \bigtriangledown \times A \cdot \bigtriangledown \times \delta A\right) + \left(\sigma \cdot V_x \cdot \frac{\partial W}{\partial x}, \delta A\right)$$
(3-18)

$$F'(A)A - F(A) = (J_z, \delta A) - \left(\frac{\phi'(|\nabla \times A|) \cdot |\nabla \times A|}{\mu^2}, \nabla \times A \cdot \nabla \times \delta A\right)$$
(3-19)

故轨道涡流制动磁位A的牛顿迭代格式为  $(\frac{1}{\mu} \bigtriangledown \times W, \bigtriangledown \times \delta A) - (\frac{\phi'(|\bigtriangledown \times A|)}{\mu^2 \cdot |\bigtriangledown \times A|} \bigtriangledown \times A \cdot \bigtriangledown \times W, \bigtriangledown \times A \cdot \bigtriangledown \times \delta A) + (\sigma \cdot V_x \cdot \frac{\partial W}{\partial x}, \delta A)$   $= (J_z \cdot \delta A) - (\frac{\phi'(|\bigtriangledown \times A|) \cdot |\bigtriangledown \times A|}{\mu^2}, \bigtriangledown \times A \cdot \bigtriangledown \times \delta A)$ (3-20)

式中W为本次迭代步的值, $\mu$ 、B采用上一迭代步的值, $\phi'(|\nabla \times A|)$ 是导磁率对磁通密度的导数(因为 $|\vec{B}| = |\nabla \times \vec{A}|$ ),它根据磁化曲线采用数值微分求得。

这个公式是利用FEPG求解轨道涡流制动问题的依据,利用它求出磁位A后,可根据

(1-7) 求出磁感应强度

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial y} \\ -\frac{\partial A}{\partial x} \end{pmatrix}$$
(3-21)

从方程(3-21)可以得到下面的弱形式:

$$(b_x, \delta b_x) + (b_y, \delta b_y) = \left(\frac{\partial A}{\partial y}, \delta b_x\right) - \left(\frac{\partial A}{\partial x}, \delta b_y\right)$$
(3-22)

下面推导制动力的公式。

感应板中的涡电流密度

$$\vec{J_e} = \sigma \vec{V} \times \vec{B} = \sigma [V_x \vec{i} \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j})] = \sigma V_x B_y \vec{k}$$
(3-23)

感应板中的涡流损耗功率密度为

$$p = \vec{J}_e \cdot \vec{E} = J_e^2 / \sigma \tag{3-24}$$

感应板中的总涡流损耗功率为

$$P = \int_{V} p dV = \int_{\Omega} p \cdot a d\Omega = \int_{\Omega} \sigma (V_{x} B_{y})^{2} \cdot a d\Omega$$
(3-25)

式中a为感应板的厚度。

因此, 感应板受到的制动力为

$$F_b = P/V_x = \int_{\Omega} \sigma \cdot V_x \cdot a \cdot B_y^2 d\Omega$$
(3-26)

如何通过场计算来获取制动力呢?我们可以先计算出感应板中各单元的力密度,再在感应板区域内求积分就得到制动力。

定义

$$f_d = \sigma \cdot V_x \cdot a \cdot B_y^2 \tag{3-27}$$

方程(3-27)对应的弱形式为

$$(f_d, \delta f_d) = (\sigma \cdot V_x \cdot a \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2, \delta f_d)$$
 (3-28)

#### §3.1.2 计算模型和材料参数

根据涡流制动试验台的实际尺寸, 计算采用图(3-1)的模型。 其中:

3--电流流出纸面的线圈



图 3-1 涡流制动计算模型

#### 5--气隙

6--磁轭

书写PDE时,FEPG要使用的方程是(3-20)、(3-22)和(3-28),计算采用的边界条件是

$$A|_{\Gamma} = 0 \tag{3-29}$$

计算所采用的材料参数见表3-1(各物理量均取国际单位):

 $V_{x}$ area μ  $J_z$  $\sigma$ 1  $\phi(|\bigtriangledown \times A|)$ 0 2.63e+60 2 12.56e-7 - 4.6e6 5.9e+70 3 12.56e-7 $4.6e6 \quad 5.9e+7$ 0 4  $\phi(|\nabla \times A|)$ 0 2.63e+6 [0, 100] 5 12.56e-70 0 0 6 12.56e-50 1.0e3 0

表 3-1 材料参数

说明:表3-1中[0,100]表示感应板速度区间,与制动台试验速度区间对应。区域1和4(同种材料)的导磁率用函数来表示是因为导磁率是磁通密度的函数,计算时要使用磁化曲线(见图3-2)。

计算开始前要从磁化曲线上提取多组(*B*,*H*)数据,形成描述磁化曲线的数据文件mate.geo,它将在后面出现的potenz.pde文件中被读出,利用数值方法来可求出各点上



图 3-2 电磁铁和感应板的磁化曲线

的导磁率和导磁率对磁通密度的导数 $\phi'(| \bigtriangledown \times A|)$ 。

为了保证计算的精度,本文采用规格化网格(图3-3)。



图 3-3 计算模型的规格化网格

#### §3.2 轨道涡流制动的有限元语言程序

本章对轨道涡流制动研究的主要目标是磁场和制动力的计算。因此,三个相关的场被 求解。第一个场是磁位 A,采用非线性椭圆算法(FEPG标记为nell);第二个场是磁感应强 度B,它采用最小二乘法<sup>[34]</sup>通过对磁位A求旋度得到;第三个场是制动力密度,也采用最小二 乘法,对它在感应板区域内求积分就得到制动力。

有了上面的准备工作,下面给出该问题的微分方程表达式、有限元算法和计算流程的有 限元语言描述文件。

#### 描述磁位偏微分方程的有限元语言文件

3.1 磁位描述potenz.pde源文件

disp az coor x y

```
coef un
func funa, funb, func,
shap q 4
gaus 2
\
$c6 common /data/ bmag(6,100),hmag(6,100),amu(6,100)
$c6 common /ndata/ nmag(6),narea
mate fmu fjz u0 sigma 1.0d0 0.0d0 0.0d0 2.63d+6
func
funa=+[az/y]
funb = -[az/x]
func = + [az/y] * \{un/y\} + [az/x] * \{un/x\}
 stif
$c6 pe=fmu
$c6 gmu=0.0d0
$c6 fxy=1.0
$c6 if (num.eq.1.and.igaus.eq.1) then
$c6 open(197,file='mate.geo',form='formatted',status='old')
$c6 read(197,*) narea
c6 do i = 1,narea
$c6 read(197,*) nmag(i)
$c6 if (nmag(i).gt.0.1) then
$c6 do imag=1,nmag(i)
 $c6 read(197,*) bmag(i,imag),hmag(i,imag)
 $c6 amu(i,imag)=bmag(i,imag)/hmag(i,imag)
 $c6 enddo
 $c6 endif
 $c6 enddo
 $c6 close(197)
 $c6 endif
```

```
c6 if ((imate.eq.1).or.(imate.eq.4)) then
cv fxx = +{un/y}
v = -\{un/x\}
$c6 fxy=dsqrt(fxx**2+fyy**2)
$c6 if (fxy.lt.1.e-6) fxy=1.e-6
$c6 call fucmu(nmag(imate),imate,fxy,bmag,amu,xmu,gmu)
$c6 pe=xmu
$c6 gmu=gmu
$c6 endif
dist = +[funa;funa]/pe+[funb;funb]/pe+[az/x;az]
*sigma*time-[func;func]*gmu/pe/pe/fxy
load=+[az]*fjz-[func]*fxy*gmu/pe/pe
end
fort
      subroutine fucmu(nmate,iarca,bmo,bli,ali,xmu,gmu)
      implicit real *8 (a-h,o-z)
      dimension bli(6,100), ali(6,100)
      do i=1.nmate
       if (bmo.le.bli(iarea,i)) goto 200
      enddo
200 continue
       if (i.gt.nmate) then
       xmu=ali(iarea,nmate)
       gmu=0.0
       return
       endif
       if (i.eq.1) then
       b1=0.
       a1 = ali(iarea, 1) - (ali(iarea, 2) - ali(iarea, 1))/
      *(bli(iarea,2)-bli(iarea,1))*bli(iarea,1)
       b2 = bli(iarea, 1)
```

```
a2=ali(iarea,1)

else

b1=bli(iarea,i-1)

a1=ali(iarea,i-1)

b2=bli(iarea,i)

a2=ali(iarea,i)

endif

xmu=((b2-bmo)*a1+(bmo-b1)*a2)/(b2-b1)

gmu=(a2-a1)/(b2-b1)

return

end
```

#### 描述磁感应强度的有限元语言文件

#### 3.2 磁感应强度描述flux.pde源文件

```
\ B=curl(a)
disp bx by
coef az
coor x y
shap %1 %2
gaus %3
mass %1 vol
1
mate fmu fjz 1.0d0 0.0d0
stif
c_{0} = 1.0
cv curlazx = + \{az/y\}
cv curlazy = -\{az/x\}
dist = +[bx;bx]*0.0d0 + +[by;by]*0.0d0
load = +[bx]*vol*curlazx+[by]*vol*curlazy
end
```

描述制动力密度的有限元语言文件

3.3 制动力密度描述fb.pde源文件

disp fd coef az coor x y shap %1 %2 gaus %3 mass %1 vol \ mate fmu fjz 1.0d0 0.0d0 stif c6 vol = 1.0\$c6 fby2=0.0d0 \$c6 if(imate .eq.4) then  $cv curlazy = -\{az/x\}$ \$c6 fby2=2\*2.63d+3\*0.09\*time\*curlazy\*curlazy \$c6 endif dist = +[fd;fd]\*0.0d0load = +[fd]\*vol\*fby2end

说明: fby2为制动力计算公式中的被积表达式,即fd,仅在感应板区域才不为零,式中乘以2是因为涡流制动试验台两侧各有6个电磁铁,2.63d+3是感应板电导率的千分之一,除以1000是将制动力的单位化为千牛,time在这里代表感应板的速度,它的变化区间和步长在time0文件中给出。

描述有限元算法和计算流程的mf.gen文件

3.4 mf.gcn源文件

<del>ت</del>

```
defi
a nell &
b str a
c str a
STARTnin a
IF EXIST stop DEL stop
:1
BFT
IF EXIST END DEL END
:2
solvnin a
IF NOT EXIST END GOTO 2
stress b
solvsum c
call post
type sumf >> sumall
IF NOT EXIST stop GOTO 1
```

其中的a、b和c分别是磁位、磁感应强度和制动力的场标识符。

下面给出描述整体信息的数据结构文件: mf.pre

#### 3.5 \_mf.pre源文件

2dxy 3 2 8 10 mfa 0 1 4 az mfb 0 1 2 bx by mfc 0 1 2 fbden # element y mfa aeq4 4 fmu fjz u0 sigma # mfb

```
beq4 4 fmu fjz
#
mfc
ceq4 4 fmu fjz
#
matedata
1 mfa acq4
12.56d-5;0.0d0;0;0;
2 mfa aeq4
12.56d-7;-4.6d6;0;0;
3 mfa aeq4
12.56d-7;+4.6d6;0;0:
4 mfa aeq4
5*12.56d-6;0.0d0;-10;2.63d+6;
5 mfa aeq4
12.56d-7;0.0d0;0;0;
6 mfa aeq4
12.56d-5;0.0d0;0;0;
1 mfb beq4
12.56d-5;0.0d0;
2 mfb beq4
12.56d-7;-4.6d6;
3 mfb beq4
12.56d-7;4.6d6;
4 mfb beq4
5*12.56d-6;0.0d0;
 5 mfb beq4
 12.56d-7;0.0d0;
 6 mfb beq4
 12.56d-5;0.0d0;
 1 mfc ceq4
 12.56d-5;0.0d0;
 2 mfc ceq4
 12.56d-7;-4.6d6;
```

3 mfc ceq 4
12.56d-7;4.6d6;
4 mfc ceq4
5*12.56d-6;0.0d0;
5 mfc ceq4
12.56d-7;0.0d0;
6 mfc ceq4
12.56d-5; 0.0d0;
#

从mf.pre文件中看到感应板x方向速度为-10(m/s),这个值在计算过程中没有被 用到,这点可以从potenz.pde文件中看出,文件中速度是用time来表示的,它的值来源 于time0文件。试验台实际制动过程中速度是变化的,为了描述这个过程,系统还要使用 time0文件和pos文件,time0文件描述速度变化区间和步长,pos文件存放各步计算结果,下 面给出两个文件。

3.6 time0源文件

-5.0,100,5.0		
`	 	 

它表示速度分别取0,5,10,...,100m/s,共21步,化为km/h是0,18,36,...,360。

3.7 mf.pos源文件

21	
unod u	
unodb bx by	

它表示将每步的各节点磁位存入向量u,每步各节点的磁通密度分量存入向量bx,by。 有了上面的基本有限元语言程序,执行系统命令就可以生成所要的计算机源程序。

#### §3.3 模型计算结果及其分析

#### §3.3.1 磁场计算结果

从上文知程序共计算了不同速度下的21步结果。为了减少篇幅,下面只给出第1步、 第2步、第6步、第10步和第21步的结果,对应速度为0、18、90、162和360km/h下的工况。



图 3-4 感应板静止时的磁场分布



图 3-5 速度为18km/h时的磁场分布



图 3-6 速度为90km/h时的磁场分布



图 3-7 速度为162km/h时的磁场分布



图 3-8 速度为360km/h时的磁场分布

轨道轮静止时,励磁电磁铁线圈通以直流电后,电磁铁与感应板之间的气隙中的磁场分 布如图3-4所示。由电磁场理论知,磁场对载流导体或铁磁体的作用力是通过媒质传递的, 即在媒质中存在沿磁力线方向的纵张力和磁力线方向垂直的侧压力。纵张力使物体间距离缩 短,侧压力趋向于把物体挤开,所以轨道轮静止时,电磁铁与感应板之间的磁场力垂直于轨 面。轨道轮运行时,电磁铁与感应板之间有相对运动。于是,感应板在磁场中作切割运动, 感应板中产生动生电势;又由于制动过程中感应板速度是变化的,感应板中还存在感生电势。这两种电势的存在,使感应板中产生涡流。涡流的存在也使感应板内以及电磁铁与感应 板之间气隙中的磁场分布发生了变化,如图3-5所示。即在电磁铁运动方向(相对与感应板而 言,即感应板的运动反方向)的前极端气隙中磁场被削弱,在电磁铁的后极端气隙中的磁场 加强,气隙中的磁力线由感应板静止时的垂直方向向水平方向倾斜。因此,电磁铁与钢轨之 间的磁场力除了垂直分量外,还存在水平分量。这水平分力即为列车的制动力。

另外,可以看出随着速度的增大,气隙中的磁场迅速下降;当速度增大到某一程度时, 磁场下降减慢。

§3.3.2 制动力结果

图3-9是模型制动力计算结果和涡流制动试验台试验结果的比较。值得注意的是,涡流 制动试验台在制动过程中,气隙会有所变化(见第四章),而模型计算是在同一气隙下进行 的。



图 3-9 模型计算值与试验值的比较

这个结果与文献[26]介绍的图5趋势是一致的:在低速区计算值大于试验值,在高速区计 算值小于试验值。这是由于忽略了模型的横向边缘效应引起的。

为了得到对制动力更进一步的认识,我们可以考察一下气隙中磁场的变化情况,*B<sub>x</sub>、B<sub>y</sub>*为气隙磁通密度的空间分布。

由图可见:随着速度增大, *B*<sub>y</sub>开始迅速下降, 当速度增大到某一程度时, *B*<sub>y</sub>下降减 慢, 直到几乎不变; 当速度增大时, *B*<sub>x</sub>开始有所增大, 但接着几乎不变。

由电磁场理论可得到:

$$F_x = \frac{a}{2\mu_0} \cdot \int_{-L/2}^{L/2} B_x \cdot B_y dx$$
(3-30)

$$F_y = \frac{a}{4\mu_0} \cdot \int_{-L/2}^{L/2} (B_y^2 - B_x^2) dx$$
(3.31)

式中,L为感应板全长,F<sub>x</sub>为制动力,F<sub>y</sub>为电磁吸力。

根据式3-30、3-31和图3-10到图3-14,制动力的变化可以解释如下:速度刚开始增大时, 由于B<sub>x</sub>增大的趋势大于B<sub>y</sub>减小的趋势,故制动力随着速度的增大而增大;当速度增大到一 定程度时,由于B<sub>y</sub>还要进一步减小,而B<sub>x</sub>几乎不变,故随着速度的增大制动力减小,再接 着B<sub>y</sub>的缓慢减小导致了制动力的缓慢减小直到几乎不变。另外,很容易看出吸力随速度的增 大而迅速减小。



图 3-10 感应板静止时气隙磁场的空间分布



图 3-11 速度为18km/h时气隙磁场的空间分布



图 3-12 速度为90km/h时气隙磁场的空间分布



图 3-13 速度为162km/h时气隙磁场的空间分布



图 3-14 速度为360km/h时气隙磁场的空间分布

### 第四章 基于解析法的涡流制动机理分析

本章使用解析法来研究制动力与各物理量之间的关系,以便更清楚地理解涡流制动的 物理过程。本章推导了制动特性方程,分析了速度、励磁电流和气隙对制动力的影响,并用 国家863项目"车辆涡流制动技术研究"磁悬浮涡流制动试验台的试验数据对方程进行了验 证,结果表明特性方程在一定程度上地吻合了试验数据。

### §4.1 线性涡流制动的制动特性方程

涡流制动的物理过程非常复杂,它的理论根据是麦克斯韦方程。下面推导制动特性方程。

假设电导率 $\sigma$  和相对磁导率 $\mu_r$  为常数,则

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \tag{4-1}$$

又因为

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \tag{4-2}$$

为了确定电场和磁场,列出下列方程组:

$$rot\vec{B} - \mu_0\mu_r \cdot \sigma \cdot \vec{E} = 0 \tag{4-3}$$

设v为x方向的速度,则有方程

$$V \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + rot \vec{E} = 0 \tag{4-4}$$

$$div\vec{B} = 0 \tag{4-5}$$

$$div\vec{E} = 0 \tag{4-6}$$

最后,感应板受到的制动F由下列Lorenz关系确定

$$\vec{F} = \sigma \cdot \vec{E} \times \vec{B} \tag{4-7}$$

设K是与极距有关的,由磁导率常数和电磁铁几何尺寸决定的常数,并且

$$w = \frac{V}{V_c} \tag{4-8}$$

则制动力Fb可以写成下列简单的关系式:

$$F_b = k \cdot B^2 \cdot \frac{\sqrt{w}}{(1 + \sqrt{w})^2 + w}$$
(4-9)

其中, B为气隙中的磁感应强度。方程(4-9)即是轨道涡流制动的特性方程。可见, 停 车时的制动力F<sub>6</sub>等于零,运行时按速度的函数变化。此时, F<sub>6</sub>还与磁感应B的平方有关。 按(4-1)式B与磁场强度H和相对磁导率μ<sub>r</sub>有关。

当H正比于励磁电流时,空气中的μ<sub>r</sub> 大约为1,电磁铁中的μ<sub>r</sub> 大于1000;等磁势增大到 一定程度时μ<sub>r</sub> 开始变小,而且会小得多,以后电磁铁达到了饱和状态。从这个考虑出发可 以得出下列结论:在小励磁电流范围内,磁感应强度B正比于励磁电流上升;在饱和开始 时,B上升的速度减慢;等电磁铁完全处于饱和状态时,励磁电流的升高不会使B进一步提 高。

同样, 气隙的影响也可以用一些简化考虑来表示。由励磁电流I、单位长度匝数N和磁力 线长度l得到磁感应强度:

$$H = \frac{N \cdot I}{l} \tag{4-10}$$

各段的磁势

$$V = \int H \cdot dl \tag{4-11}$$

根据磁势定律

$$V = \oint H \cdot dl = \Theta \tag{4-12}$$

其中磁势Θ 是励磁电流I和线圈单位长度匝数N的乘积。

因为磁通

$$\Phi = B \cdot A \tag{4-13}$$

其中,A是磁力线穿过的面积,所以按(4-1)、(4-10)和(4-12)得到铁中的磁通

$$\Phi_{Fe} = A_{Fe} \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\Theta}{l_{Fe}}$$
(4-14)

根据磁路欧姆定律确定的磁阻为

$$R_m = \frac{V}{\Phi} \tag{4-15}$$

根据式(4-12)和(4-14)可以求出铁中的磁阻

$$R_{mFe} = \frac{l_{Fe}}{A_{Fe} \cdot \mu_0 \cdot \mu_r} \tag{4-16}$$

气隙中的磁通为(其中δ为气隙)

$$\Phi_L = \frac{\mu_0 \Theta}{\delta} \cdot A_L \tag{4-17}$$

由此得到气隙磁阻

$$R_{mL} = \frac{\Theta}{\Phi_L} = \frac{\delta}{\mu_0 \cdot A_L} \tag{4-18}$$

整个磁路的磁阻变成

$$R_m = R_{mFe} + R_{mL} \tag{4-19}$$

根据(4-16)和(4-17)得

$$R_m = \frac{l_{Fe}}{\mu_0 \mu_r \cdot A_{Fe}} + \frac{\delta}{\mu_0 \cdot A_L} \tag{4-20}$$

如果假定磁力线穿过空气和电磁铁的面积相同(即 $A_{Fe} = A_L = A$ ),则得到  $R_m = \frac{\mu_r \cdot \delta + l_{Fe}}{\mu_0 \mu_r \cdot A}$ (4-21)

根据(4-15)和(4-12)

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_m} \tag{4-22}$$

用(4-18)得到

$$\Phi = \frac{\Theta \cdot A \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}{\mu_r \cdot \delta + l_{Fe}} \tag{4-23}$$

根据(4-13)磁感应变成

$$B = \frac{\Theta \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}{\mu_r \cdot \delta + l_{Fe}} = \frac{N \cdot I \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}{\mu_r \cdot \delta + l_{Fe}}$$
(4-24)

虽然目前研究的线性涡流制动中提出的假设与实际试验不一样,但它以简明扼要的形式 讨论了涡流制动的问题,在这种假设下得到的沿运行方向的制动力方程在一定程度上还是能 与测得的结果吻合。它可用于解释涡流制动的复杂过程和理解涡流制动达到的试验结果。

### §4.2 试验数据验证

方程(4-9)中,取
$$B = 1.1T, K = 71.17, V_c = 200 km/h$$
,可得  

$$F_b = 85.6 \cdot \frac{\sqrt{v/200}}{v/200 + (1 + \sqrt{v/200})^2}$$
(4-25)

其中, $F_b$ 的单位是千牛,v的单位是km/h。

图4-1显示了磁悬浮涡流制动试验台从350 km/h开始制动的试验曲线和特性方程计算曲 线的比较。线圈中励磁电流为65A,制动开始时气隙为13mm。



图 4-1 制动特性方程与试验结果的比较

可见,方程与实验数据在一定程度上吻合,特别是在低速区吻合较好,这是因为随着速度的增大,气隙中的磁通密度的变化不能忽略。

### §4.3 速度、励磁电流和气隙对制动力的影响

对式(4-25)求导数并令

$$\left. \frac{dF_b}{dv} \right|_{v=v_m} = 0 \tag{4-26}$$

得  $V_m = 100 km/h$ 

制动力开始随着速度的增大而增大,到达最高点后随着速度的增大而减小。

根据方程(4-9),制动力随着磁感应强度的平方增加。再根据方程(4-19),在不变的 相对磁导率情况下,制动力随电流的平方增加,但当电流上升到一定值后,电磁铁开始发生 磁饱和,增长速度变缓。

图4-2是试验台在300km/h速度下得到的制动力与励磁电流的关系。可见,线圈中励磁电流小于60安培时,随着电流的增大,制动力迅速增长;电流超过60安培后,由于电磁铁磁饱和的影响,制动力缓慢增长。为了最大利用线圈的容量,励磁电流的最佳设计值在60-65安培左右。



图 4-2 励磁电流和气隙对制动力的影响

由(4-9)、(4-19)可以看出,气隙对制动力的影响很大:随着气隙的增大,制动力 减小,而且下降很快。图4-2中当制动开始的气隙由13m改为18mm时,制动力减小为一半左 右。

下面进一步由3组试验数据来看气隙对制动力的影响。图4-3汇总了分别 从350km/h、300km/h和250km/h开始制动的特性曲线。励磁电流均为65A,制动开始时 气隙均为13mm,制动结束时气隙都变为6mm。



图 4-3 试验台从不同速度开始制动的特性曲线

可见:

(1)制动力在低速区随速度的提高而增大,在高速区则随速度的提高而下降, 在118km/h(临界速度)的速度下达到最大。110-350 km/h速度段的涡流制动力曲线显示,在达到较高值后呈缓慢下降趋势,表现良好的制动特性。这正是高速列车在高速时制动 所需要的制动力。

(2)在临界速度以上的区问,曲线Fb1位于Fb2上方,Fb2位于Fb3上方。这是因为制动开始

时3条曲线的制动气隙都是13mm,随着制动过程的进行,电磁铁与轨道轮感应板之间的电磁 吸力不断增大,导致气隙不断减小,当曲线Fb1和Fb2速度降下来时,它们的气隙已经不再 是开始的13mm,而是减小到某个值,因而比气隙较大的Fb3的制动力大。

(3) 在临界速度以下,3条曲线重合,这是因为它们的气隙都减小到了最小值6mm,此时 有机械装置阻止气隙进一步减小。

### 结论

磁悬浮列车是21世纪极具竞争力的非接触地面有轨交通工具,目前德国和日本已经分别 推出了技术成熟的高速常导磁悬浮列车系统Transrapid和高速超导磁悬浮列车MLX01,我国 采用德国Transrapid磁悬浮列车技术的上海高速磁悬浮商业线已经建成,并投入运营。

本文以国家863项目"车辆涡流制动技术研究"磁悬浮涡流制动试验台为研究对象,同时从有限元法和解析法入手对线性涡流制动试验台的电磁机理进行了研究。FEPG是在科学与工程计算领域的新一代有限元软件,受到国内外众多领域科学家的好评,其开发思想将引领软件业的一场革命。根据本文的研究,可以得出以下结论:

(1)用二维模型近似计算轨道涡流制动试验台的三维电磁场,结果是合理的。这是从 与试验台试验结果的比较以及与国内外文献计算结果的比较得出的结论。说明一些实际的三 维场可以简化为二维模型进行计算,以节省时间和人力、物力。

(2)有限元是一种有效的数值计算方法,而FEPG是有效的有限元程序开发平台,是 有限元程序的生成器。它的出现为工程技术人员和领域专家使用有限元方法研究自己的问题 提供了非常有力的工具,受到了广泛的关注和好评。迄今为止,FEPG在电磁场的应用并不 多见。本文的工作是作者将FEPG软件应用于电磁场有限元计算的一次尝试,事实表明取得 了令人满意的结果。

(3)轨道涡流制动的优点是制动范围较大,有较高的制动力,是一种较好的制动方式。

本文的研究工作,达到了以下目标:计算了相关的磁场与制动力,即分析计算;理解 了涡流制动的物理过程,即机理研究;解释了涡流制动试验台的试验曲线,即实验解释。因 此,作者的工作对轨道涡流制动器的设计与研制具有一定的指导意义。

### 致 谢

衷心感谢我的导师郭其一教授。攻读硕士学位期间,郭老师在生活上给予我无微不至的 关怀和帮助,在学术研究上给予我悉心指导。研究生阶段,导师使我接触国家863"车辆涡 流制动技术研究"这样重大的课题,郭老师给我提供了很好的工作环境和实践机会,让我充 分的锻炼了自己的能力。郭老师坦荡的胸怀,严谨的治学态度,敏锐的学术眼光使我受益匪 浅,在此首先向郭老师表达最诚挚的谢意!

感谢电气工程系各研究室的老师和同学,特别是感谢本实验室的贾鹏、陈春和王玉等人 在我两年多研究生生活中给予我的乐趣和关心。感谢一直以来给予我帮助和关怀的家人和朋 友。

### 参考文献

- [1] 严陆光. 高速磁悬浮列车的诱惑. 了望. 2000, (28)
- [2] 林国斌, 连级三. 德国磁浮铁路技术. 国外铁道车辆. 1998, (2)
- [3] David Briginshaw(荷兰). 法国新一代高速列车AGV. 国外铁道车辆. 7 2001

[4] 刘少克. 德国磁悬浮列车TR07推进和制动系统. 机车电传动. 5 2000

[5] 涡流制动器商业化应用. 国际铁道工程 2000年10月. 10 2000

[6] 徐丽秀, 刘汝让. 德国高速列车的几种制动方式及特性. 国外铁道车辆. 2000, (2)

[7] 坂元一则(日本). 最新制动技术及开发动态. 国外内燃机车. 1996, (4)

[8] 王靖满. 高速磁悬浮列车的有关问题初探. 电气化铁道. 2002, (3)

- [9] 马大炜. 关于高速列车制动系统的思考. 铁道车辆. 1 2000
- [10] 蒋峰. 磁悬浮高速列车. 技术物理教学. 2002, (2)
- [11] 董明桂. 城际高速列车ICE3. 电力机车技术. 1998, (2)
- [12] 朱仙福. 线性涡流制动电磁分析. 上海铁道学院学报. 6 1994, 15(2)
- [13] 应之丁, 夏寅荪, 邵丙衡. 高速列车线性涡流制动模拟试验台结构方案初探. 铁道车辆. 1995, 33(7)
- [14] 邵丙衡, 张鑫, 朱仙福. 高速列车制动模式探讨. 机车电传动. 1995, (5)
- [15] 夏为林, 傅俊英, 邵丙衡. 高速列车轨道. 机车电传动. 1999, (6)
- [16] 张鑫. 线性涡流制动器的运行试验及模拟试验合惯性质量计算, 上海铁道学院学报, 5 1994, 15(2)
- [17] Friedrich R. Propulsion and Power Supply System of the Transrapid 07 Vehicle Design and Test Result Part I, Propulsion. International Conference on Maglev Transport'85, 1985

- [18] Friedrich R. Propulsion and Power Supply System of the Transrapid 07 Vehicle Design and Test Result Part II, Power Supply. International Conference on Maglev Transport'85, 1985
- [19] M.Tsuchimot, K.Miya, A.Yamashita, M.Hashimoto. An analysis of eddy currents and Lorentz force of thin plates under moving magnets. IEEE Transactions on magnetics. March 1992, 28(2)
- [20] D. Rodger, T. Karagular, P.J. Leonard. A formulation for 3D moving conductor eddy current problems. IEEE Trans Magn. September 1989, 25(5):4147-4149
- [21] D. Albertz, S. Dappen, G. Henneberger. Calculation of the 3D non-linear systems. IEEE Trans Magn. May 1996, 32(3):768-771
- [22] N. Esposito, A. Musolino, M. Raugi. Modelling of three-dimensional nonlinear eddy current problems with conductors in motion by an integral formulation. IEEE Trans Magn. May 1996, 32(3):764-767
- [23] J.H. Wouterse. Critical Torque of Eddy Current Brake with Widely Separed Soft Iron Poles. IEE Proceeding. July 1991, 138(Pt. B)
- [24] 朱仙福, 张秀荣, 高速列车轨道涡流制动的制动力分析与计算, 上海铁道学院学报, 12 1995, **17**(4)
- [25] 张逸成, 沈玉琢, 庞乾麟, 姚勇涛. 旋转涡流制动器电磁机构的设计研究. 铁道学报. 12 1998
- [26] 朱仙福, 罗会美, 邵丙衡. 磁悬浮列车的涡流制动问题. 机车电传动. 7 2001, (4)
- [27] 张秀荣,朱仙福,庞乾麟. 线性涡流制动装置磁场分布的有限元计算. 铁道学报. 10 1997
- [28] 孟庆龙, 颜威利. 电器数值分析. 北京: 机械工业出版社, 1993.
- [29] 曾余庚, 徐国华, 宋国乡. 电磁场有限单元法. 北京: 科学出版社, 1982
- [30] 李大潜. 有限元素法续讲. 北京: 科学出版社, 1979
- [31] 盛剑霓. 电磁场数值分析. 北京: 科学出版社, 1984
- [32] 周克定, 张肃文, 董天临, 辜承林译. 电磁场与电磁波. 北京: 机械工业出版社, 2000

[33] 奚梅成.数值分析方法.北京:中国科学技术大学出版社,1995
[34] 北京飞箭软件有限公司.FEPG参考手册:基于FEPG的有限元方法.北京,2004
[35] 梁国平.元件化程序设计方法及其语言.计算结构力学及其应用.1985,2(2)
[36] 梁国平.有限元程序的自动生成及有限元语言.力学进展.1990,2(20)
[37] 姜礼尚,庞之衡.有限元方法及其理论基础.北京:人民教育出版社,1980
[38] 李荣华,沈国忱.偏微分方程数值解.北京:人民教育出版社,1996
[39] 李开泰,黄艾香,黄庆怀.有限元方法及其应用.西安:西安交通大学出版社,1991
[40] 胡健伟,汤怀民.偏微分方程数值解.天津:南开大学出版社,1995
[41] 胡海昌.弹性力学的变分原理及其应用.北京:科学出版社,1980
[42] 徐兴,郭乙木,沈水兴.非线性有限元及其程序设计.杭州:浙江大学出版社,1993
[43] 张汝清,詹先义.非线性有限元分析.重庆:重庆大学出版社,1985
[44] 蒋友谅.非线性有限元方法.北京:北京工业大学出版社,1988

[45] 林群,朱起定. 有限元预处理和后处理理论. 上海:上海科学技术出版社, 1994

[46] 何君毅,林祥都,工程结构非线性问题的数值解法,上海:国防工业出版社,1994

# 附录

## 攻读硕士学位期间发表的论文及参加的科研项目

一、 学术论文

李维刚,朱仙福, PDE 工具箱在静磁场中的应用,机车电传动,2003 年 7 月第 4 期

二、 科研项目

1、国家 863 项目——车辆涡流制动技术研究

2、源口水库水调度计算机辅助决策系统