

生物型体竞争模型的高分辨率高精度方法

沈俊

中国科学技术大学数学系

中国 合肥 230026

High Resolution High Order Schemes for a Hierarchical Size-Structured Model

Jun Shen

Department of Mathematics

University of Science and Technology of China

Hefei 230026, P. R. China

导师姓名： 舒其望教授

系别专业： 数学系 计算数学专业

研究方向： 偏微分方程数值解

完成时间： 2007 年 5 月

摘 要

生物型体竞争模型 (Hierarchical size-structured population model) 是生物数学中一类非常重要的竞争模型, 这一类模型通过生物以型体大小为基础的相互竞争关系描述了生物总数量随时间演变的规律, 具有重要而广泛的应用价值, 比如森林中各种植物对阳光的竞争模型、动物之间争夺食物与生殖优势的竞争模型等等。计算此类模型的主要难点在于方程的一些系数与边界条件中包含生物密度函数的全局积分, 以及方程中包含的非线性的增长率、死亡率和繁殖率等函数。

本文主要对此类型体竞争模型进行了细致的研究分析, 构造发展了一系列便于计算的数值计算格式, 包括一阶显式迎风有限差分格式、二阶显式高分辨率有限差分格式和五阶显式高精度有限差分 WENO (weighted essentially non-oscillatory) 格式, 并通过理论分析与大量数值算例证明了这些格式在数值计算这类模型方程中的良好性质与优越性。

对于一阶迎风格式和二阶高分辨率格式, 我们证明了其具有总变差有界即 TVB (Total Variation Bounded) 性质, 进而证明了这两种数值格式的稳定性与收敛性。同时我们分别给出了光滑解和间断解的数值算例验证了这两种数值格式的良好性质。

针对生物型体竞争模型的具体特点, 我们又构造了相应的高阶精度的 WENO 差分格式, 并通过大量数值算例验证了该格式的优异性质。对比一阶迎风格式、二阶高分辨率格式和其他已有的一阶与二阶差分格式, 我们的高阶 WENO 格式展现了其显著的卓越性, 在所有计算模型方程的光滑解和间断解的数值算例中, 高阶 WENO 格式都可以使用少得多的格点数来得到更为优异精确的结果。我们又将其应用于食蚊鱼的型体竞争模型 (*Gambusia affinis*), 进一步展现了高阶 WENO 格式的计算优越性。

关键词: 生物型体竞争模型, 迎风格式, 高分辨率格式, 稳定性, 收敛性, WENO 格式, 高阶精度

Keywords: hierarchical size-structured population model, upwind scheme, high resolution scheme, stability, convergence, WENO scheme, high order accuracy

Abstract

Hierarchical size-structured population model is an important structured population model in mathematical biology. This model mainly describes the evolution of hierarchically size-structured population at a given time. Hierarchical size-structured population model has been used in modeling many biology problems such as modeling the competition for sunlight in a forest and modeling the competition for food and the advantage of reproduction among some kind of animals. The main technical complication is the existence of global terms in the coefficient and boundary condition for this model with nonlinear growth, mortality and reproduction rates.

In this paper we develop and discuss three explicit finite difference schemes, namely a first order upwind scheme, a second order high resolution scheme and a fifth order weighted essentially non-oscillatory (WENO) scheme for solving the hierarchical size-structured population model with nonlinear growth, mortality and reproduction rates.

For the first order upwind scheme and the second order high resolution scheme, we prove their TVB (Total Variation bounded) property. Then we prove stability and convergence for both schemes and provide numerical examples to demonstrate their capability in solving smooth and discontinuous solutions.

Secondly we develop a high order explicit finite difference WENO scheme for solving the model. We carefully design approximations to these global terms and boundary conditions to ensure high order accuracy. Comparing with the first order monotone and second order total variation bounded schemes for the same model, the high order WENO scheme is more efficient and can produce accurate results with far fewer grid points. Numerical examples including one in computational biology for the evolution of the population of *Gambusia affinis*, are presented to illustrate the good performance of the high order WENO scheme.

中国科学技术大学学位论文相关声明

本人声明所呈交的学位论文,是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

本人授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权,即:学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,允许论文被查阅和借阅,可以将学位论文编入有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

作者签名: 沈俊

2007年5月19日

致 谢

首先我要向我的导师舒其望教授致以我最真挚的感谢与敬意。五年来在舒老师的谆谆教诲下,我不仅学到了宝贵的知识,更领悟到许多为人做事的道理。舒老师和蔼包容的态度、广博的知识、严谨敏锐的思维和风趣幽默的讲解都给予我深深的影响。本文从选题到每一个结果都凝聚着舒老师大量的心血,在此我再一次向舒老师致以诚挚的谢意。

特别感谢张梦萍教授对我的指导和帮助。五年来张梦萍教授在生活与学习上给予我大量的支持,使我得以顺利地完成学业。

我还要感谢计算数学专业的冯玉瑜教授、刘儒勋教授、陈发来教授、韩厚德教授和邓建松教授等各位老师。通过他们耐心细致的授课与指导,我学到了许多有用的知识,为论文的完成打下了良好的基础。

另外我也要感谢科学计算与应用几何实验室的兄弟姐妹们多年来的支持与帮助。感谢他们给予了我一个和睦融洽的学习环境,使我能够顺利的完成论文的写作。与他们生活的点点滴滴都将成为我今后的美好回忆。

谨以此文献给我亲爱的父母和姑姑、姑父,衷心感谢他们一直以来对我的理解与支持。

第一章 绪论

在这一章中我们主要将介绍生物型体竞争模型的历史背景,发展与现状及其在生物数学中的重要意义,并且对生物型体竞争模型的数值方法做了简要的回顾。

1.1 生物型体竞争模型简介

如何模拟一个或多个生物种群个体数量在特定的环境下随时间的演变在生物数学中是一个非常重要的课题,其主要的研究手段是根据生物种群的生理特征和竞争关系按照某种规律进行结构化研究,建立在这种规律下生物种群个体数量随着时间与环境的变化而变化的模型。在一个生物种群中,科学家们按照生物个体的年龄、发育程度、型体的大小或其他的生理特征将其划分为不同的层次结构,其中按照型体大小划分具有广泛而普遍的意义,例如在模拟一个森林中各种植物对阳光的竞争时一般按照植物型体的高低或大小来划分其对阳光的争夺能力,显然较高的大树能获得更多的阳光,从而获得宝贵的竞争优势(参见 [54, 98]);在食蚊鱼的繁衍模型中,型体的大小对其获得在繁殖中的优势至关重要,研究发现繁殖能力强的食蚊鱼其型体大小都集中在某个范围之内,体型过小或过大的鱼其繁殖能力都远远小于体型中等的(参见 [55, 8])。

生物学家与数学家们在一个多世纪以来对结构化生物种群进行了广泛而深入的研究(例如 [55, 97, 66, 38, 31, 12, 16, 86, 98, 65]等文献),建立了多种多样的生物结构模型,如型体竞争模型 (Size-Structured Model) [55, 66, 8]、年龄竞争模型 (Age-Structured Model) [97, 38]等,在构造这些模型时,其主要假设是在每个给定的时间上,生物个体数量的变化完全取决于当时的环境和个体的生理规律(繁殖率、死亡率、成长速度等),并且环境和生理规律对生物个体的影响随着个体的型体、年龄或者其他生理特征变化而随之变化,而反过来生物的数量对环境也会造成影响,从而根据这些变化规律构造出生物个体数量随时间变化的方程(组)。在上世纪八十年代之前,受到计算机技术和数值模拟方法的限制,对这些模型方程的研究方法主要局限在解析求解的方法,而实际上绝大多数这类生物模型方程都是复杂的非线性问题,用解析的方法很难得到其准确解。进入上世纪八十年代以来,特别是从九十年代开始,随着计算机技术和数值模拟方法的蓬勃发展,使用数值方法模拟计算这类生物模型方程得以迅速流行起来,涌现了大量关于数值计算模拟生物竞争模型方程的文章(例如 [4, 6, 14, 5, 89, 90, 3, 2]等)。

在这篇文章中我们主要针对生物型体竞争模型方程构造了一系列高分辨率高精度的数值格式。考虑如 [5, 74]中所给出的生物形体竞争模型方程

$$\begin{aligned} u_t + (g(x, Q(x, t)) u)_x + m(x, Q(x, t)) u &= 0, & (x, t) \in (0, L] \times (0, T] \\ g(0, Q(0, t)) u(0, t) &= C(t) + \int_0^L \beta(x, Q(x, t)) u(x, t) dx, & t \in (0, T] \\ u(x, 0) &= u^0(x), & x \in [0, L] \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 $u(x, t)$ 是在时间 t 时个体大小为 x 的生物密度, 包含全局积分的函数 $Q(x, t)$ 定义如下

$$Q(x, t) = \alpha \int_0^x w(\xi)u(\xi, t)d\xi + \int_x^L w(\xi)u(\xi, t)d\xi, \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (1.2)$$

其中 w 为权函数。 $Q(x, t)$ 通常被称为环境影响因子, 由生物密度函数 u 的加权全局积分决定。

生物型体竞争模型方程 (1.1) 中的函数 m 表示生物个体的死亡率, 边界条件中的函数 β 表示的是生物个体的繁殖率, 函数 C 表示从外部环境中流入的零形体大小的生物。(1.1)描述了一个由生物个体型体大小为主导影响的生物群落个体数量随时间演变的动态过程, 在这个模型中生物个体型体的大小对其占有生存和繁殖资源具有绝对影响, 从而影响到个体的生长发育、繁殖以及衰亡。我们改写模型 (1.1)中的第一个方程为

$$u_t = -(g(x, Q(x, t))u)_x - m(x, Q(x, t)),$$

注意到其中函数 g, m 分别代表生长率和死亡率, 这样我们就不难发现其生物意义是指在时间 t 时刻, 型体大小为 x 的生物个体数量的变化值等于新成长为 x 大小的个体数量减去 t 时刻死去的型体为 x 的个体数量; (1.1)中的边界条件

$$g(0, Q(0, t))u(0, t) = C(t) + \int_0^L \beta(x, Q(x, t))u(x, t)dx,$$

描述了 t 时刻新生零型体大小的个体数量等于该时刻所有生物新繁殖的零型体个体数 (假设所有新生生物型体均为零) 再加上从外部环境中流入的零型体大小生物; 而 (1.2)描述的是指对于型体为 x 的生物来说, 所有型体大小生物对其生存环境都会造成或大或小的影响, 例如在 [54]给出的森林中植物争夺阳光的模型中作者假设 $\alpha = 0$, 其生物意义是指高大的植物可以挡住矮小植物的阳光, 而矮小植物无法挡住高大植物。

模型 (1.1)的一个特殊之处在于 $x = 0$ 处的边界条件包含生物个体的生长函数 g , 并且与生物密度函数 $u(x, t)$ 在整个 $x \in (0, L]$ 区间上的积分有关。在这里我们设定函数 g, m, β 都是关于生物型体大小 x 和环境影响因子 Q 的函数, 这样这些函数都与生物密度函数 u 的全局积分密切相关, 从而使得求解生物型体竞争模型成为一个高度非线性的问题。

生物型体竞争模型最早是在 1967年在 Sinko 与 Streifer 的文章 [86]及 Bell 与 Anderson 的文章 [12]中提出, 之后数十年间大量的学者对生物型体竞争模型及其类似模型进行了广泛而细致的研究。特别是从九十年代至今的十几年间, 相关研究日益深入 (参见 [5, 14, 18, 24, 26, 46, 54, 74, 48, 25]等)。本文中我们主要研究的是形如 (1.1)的模型方程, 而在其它很多的文章中通常对函数 g, β, m 和 Q 做了更为严格的限制, 例如 [18]假设模型 (1.1)中的函数只与 Q 有关, 即: $g = g(Q), \beta = \beta(Q), m = m(Q)$, 这样作者就通过变量变换将含有全局积分的偏微分方程转化成为类似 [24]中的年龄竞争

模型,从而避免了全局积分并且分离出关于生物个体总数量的常微分方程,作者进一步证明了该方程解的存在唯一性并且在初值 u^0 的相容性条件下给出了该唯一解。需要指出的是 [18] 中的方法对于更一般的模型 (1.1) 并不适用。

在 [14] 中作者假设函数 g 和 β 线性依赖于 x , m 与 x 无关并且 $C(t) = 0$, 从而通过一对等价的偏微分方程和常微分方程证明了模型解的存在唯一性, 其中常微分方程描述了总的生物个体数量动态变化过程。

在 [54] 中作者假设模型 (1.1) 中 $\alpha = 0$, 该模型描述了森林中各种植物对阳光资源的竞争关系, 高大的树木在竞争中可以得到更多的阳光并且挡住了矮小植物的阳光, 作者利用坐标变换将一阶偏微分方程转化为一组常微分方程并得到了该常微分方程组的存在唯一性结果, 结合初值的相容性条件从而证明了原模型存在唯一的连续解。

在 [5] 中作者定义了模型方程 (1.1) 的弱解形式, 对于所有的 $t \in [0, T]$ 和任意的检验函数 $\varphi \in C^1((0, L) \times (0, T))$, 满足以下条件的 $u(x, t)$

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x, t) \varphi(x, t) dx - \int_0^L u^0(x) \varphi(x, 0) dx \\ = \int_0^t \int_0^L (u \varphi_s + g u \varphi_x - m u \varphi) dx ds \\ + \int_0^t \varphi(0, s) \left(C(s) + \int_0^L \beta(x, Q(x, s)) u(x, s) dx \right) ds \end{aligned} \quad (1.3)$$

即为模型方程 (1.1) 的弱解。作者引入了模型方程的假设条件:

- (H1) $g(x, Q)$ 对 x 和 Q 均为二阶连续可导; 对所有的 $x \in [0, L]$ 都有 $g(x, Q) > 0$; $g(L, Q) = 0$; $g_Q(x, Q) \leq 0$ 。
- (H2) $m(x, Q)$ 对 x 和 Q 均非负连续可导。
- (H3) $\beta(x, Q)$ 对 x 和 Q 均非负连续可导, 并且存在常数 $\omega_1 > 0$ 满足 $\sup_{(x, Q) \in [0, L] \times [0, \infty)} \beta(x, Q) \leq \omega_1$ 。
- (H4) $w(x)$ 非负连续可导。
- (H5) $C(t)$ 非负连续可导。
- (H6) $u^0 \in BV[0, L]$ 且 $u^0(x) \geq 0$ 。

从假设 H1-H6 出发, 因循 [4, 6, 23, 87] 的思想, [5] 中作者第一个证明了包含非线性生长率、繁殖率、死亡率函数的生物型体竞争模型 (1.1) 其弱解的存在唯一性并且给出了一个收敛到该弱解的一阶隐式差分格式。

我们指出 [5] 中给出的一阶隐式格式虽然可以收敛到 (1.1) 的弱解, 但是其精度只有一阶并且是隐式格式, 为了构造更加便于计算模拟 (1.1) 的数值格式, 我们在

[74]中首先给出了一阶显式迎风有限差分格式并证明了格式具有 TVB (Total Variation Bounded) 性质, 从而可以收敛到 (1.1) 的唯一弱解, 然后根据 [40, 58] 中基于 minmod 函数的 MUSCL (Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) 格式, 我们接着构造了一个便于计算的高分辨率二阶显式有限差分格式, 并且在验证二阶格式具有设定的精度和高分辨率性质的同时证明了其具有和一阶显式格式一样的 TVB 性质以及收敛性。在上述两种格式性质的证明当中, 我们参考了 [5, 23, 40, 67, 87] 中的一些思想, 但需要指出的是由于方程的全局约束条件、显式时间离散和二阶精度等因素的存在, 给我们的证明带来了极大的难度。

尽管在 [74] 中构造的高分辨率二阶格式比一阶格式精确得多, 我们还是希望能够得到 (1.1) 的更高精度的格式。由于模型方程的解可能含有间断部分, 我们期望新的高阶格式具有非线性稳定性, 在对解的光滑部分保持高阶精度的同时在间断部分可以得到锐利单调的间断图像。基于此目的, 我们在 [73] 中根据计算流体力学和一般守恒律方程中取得成功的 WENO 格式 [53, 75, 79, 80] 并针对方程 (1.1) 的具体特点构造了五阶精度的有限差分 WENO 格式。在 [73] 的数值算例中, 我们首先给出了一个间断解的例子, 通过与 [74] 中构造的格式对比图像我们展示了 WENO 在处理解的间断部分时的良好性质; 其次我们根据 [18] 中的方法构造了一个具有光滑准确解的模型例子来验证 WENO 格式对于光滑解可以达到预期的五阶精度; 最后我们选取了一个具有典型生物学意义的例子: 食蚊鱼的型体竞争模型 (*Gambusia affinis*), 通过这个例子我们不难看出高阶 WENO 格式的表现远远超过了 [74] 中的二阶高分辨率格式和 [8] 中所使用的二阶格式 (Lax-Wendroff 格式和 Box 格式), WENO 格式仅需使用少得多的格点数便可以达到与这些二阶格式相近或更佳的结果。在附录 I 中我们介绍了食蚊鱼竞争模型的背景资料, 有兴趣的读者可以通过这个例子加深生物型体竞争模型的了解, 更好地理解生物型体竞争模型的意义。

下一节中我们将对生物型体竞争模型的主要数值方法做出一个简要的回顾。

1.2 生物型体竞争模型的数值方法回顾

自从生物型体竞争模型提出以来, 由于方程边界条件和系数中全局约束的存在以及非线性的生长率、繁殖率和死亡率函数等影响, 数学家们发现想要对较为一般的模型方程求出准确解是十分困难的, 从而越来越多的研究学者开始使用数值模拟方法来得到关于方程解的性态信息。

对于形如 (1.1) 的生物型体竞争模型, 我们很自然的想法就是以计算双曲守恒律型方程的格式为基础来构造其数值格式。Lax-Wendroff 方法是最早应用于计算模拟生物型体竞争模型的有限差分方法之一, 例如在 [90] 中给出的一个两步 Lax-Wendroff 格式。尽管 Lax-Wendroff 方法具有二阶精度并且便于计算, 但是在计算含有间断部分的

模型解时会在间断区域出现较大的数值振荡（参见第四章食蚊鱼算例部分的图 4.6），并且据我们所知迄今为止仍没有 Lax-Wendroff 方法对于较一般的生物型体竞争模型方程的收敛性结果，从而 Lax-Wendroff 方法并不是计算一般非线性生物型体竞争模型的可靠方法。

为了增强数值格式的稳定性，一系列针对生物型体竞争模型的隐式有限差分格式相继被构造出来（例如 [9] 中给出的二阶精度 Box 格式和 [5] 中的一阶隐式格式），但是 [9] 中指出对于二阶精度的 Box 格式，想要得到较为一般情形下的生物型体竞争模型的收敛性结果仍然是极为困难的，并且 Box 格式仍然无法避免数值振荡的出现（参见第四章食蚊鱼算例部分图 4.7）。在 [5] 中，作者给出了模型方程 (1.1) 的弱解定义和一个一阶隐式有限差分格式，并通过证明该隐式格式的收敛性的方法首次证明了包含非线性生长率、繁殖率、死亡率函数的生物型体竞争模型 (1.1) 其弱解的存在唯一性。

如上一节我们指出的，[5] 中给出的一阶隐式格式虽然可以收敛到 (1.1) 的弱解，但是其精度只有一阶并且是隐式格式，由此基于与 [5] 中同样的假设条件 H1-H6（参见上一节），我们在 [74] 中构造了可以收敛到模型方程 (1.1) 弱解的一阶显式有限差分格式和二阶高分辨率有限差分格式，首次得到了对于较一般非线性模型 (1.1) 仍能够收敛到其弱解的显式有限差分格式，并且通过数值算例验证了我们构造的格式的精度和高分辨率性质。继 [74] 之后，我们在 [73] 中又针对生物型体竞争模型 (1.1) 构造了五阶高精度的有限差分 WENO 格式，并给出数值算例显示了 WENO 格式在数值模拟生物型体竞争模型的显著优越性。

在有限差分方法之外，常用模拟生物型体竞争模型的数值格式还有基于特征线方法的 AGN (Aggregation Grid Nodes) 和 SGN (Selection Grid Nodes) 等格式（参见 [8][9][10] 等）。需要指出的是，尽管这两种格式也都达到了二阶精度，但是对于较一般的非线性生物型体竞争模型目前为止仅仅证明了 SGN 格式能够收敛到 C^2 连续的模型方程解，并且其模型假设条件较 H1-H6 更为苛刻（参见 [10]）。

第二章 一阶迎风有限差分格式

本章我们主要针对生物型体竞争模型构造了一阶显式迎风差分格式，并证明了该格式的总变差有界性 (TVB)，从而证明了我们构造的一阶格式是稳定且收敛的。考虑如下的生物型体竞争模型

$$\begin{aligned} u_t + (g(x, Q(x, t)) u)_x + m(x, Q(x, t)) u &= 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T] \\ g(0, Q(0, t)) u(0, t) &= C(t) + \int_0^L \beta(x, Q(x, t)) u(x, t) dx, & t \in (0, T] \\ u(x, 0) &= u^0(x), & x \in [0, L] \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 $u(x, t)$ 是在时间 t 时刻个体大小为 x 的生物密度，包含全局积分的环境因子 $Q(x, t)$ 定义如下

$$Q(x, t) = \alpha \int_0^x w(\xi) u(\xi, t) d\xi + \int_x^L w(\xi) u(\xi, t) d\xi, \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (2.2)$$

其中 w 为权函数。

如 [5] 和第一章中所述，我们引入模型方程的假设条件：

- (H1) $g(x, Q)$ 对 x 和 Q 均为二阶连续可导；对所有的 $x \in [0, L]$ 都有 $g(x, Q) > 0$ ； $g(L, Q) = 0$ ； $g_Q(x, Q) \leq 0$ 。
- (H2) $m(x, Q)$ 对 x 和 Q 均非负连续可导。
- (H3) $\beta(x, Q)$ 对 x 和 Q 均非负连续可导，并且存在常数 $\omega_1 > 0$ 满足 $\sup_{(x, Q) \in [0, L] \times [0, \infty)} \beta(x, Q) \leq \omega_1$ 。
- (H4) $w(x)$ 非负连续可导。
- (H5) $C(t)$ 非负连续可导。
- (H6) $u^0 \in BV[0, L]$ 且 $u^0(x) \geq 0$ 。

下面我们针对模型方程 (2.1) 给出了一个一阶迎风有限差分格式，并且将证明格式的稳定性及收敛性，从而为构造二阶高分辨率格式打下基础。

首先我们定义一下本文常用的数学记号。我们假设区间 $[0, L]$ 被 $N + 1$ 个格点 $x_j : 0 \leq j \leq N$ 分割成 N 个小区间，其中 $x_0 = 0, x_N = L$ 。为简便起见我们设定这 N 个小区间都是相等的，区间长度记为 Δx ，这样就有 $x_j = j\Delta x$ 。需要指出的是这种假设并不会对我们数值格式的分析有本质影响，更一般的非均匀网格可以使用类似的分析方法。类似地，我们记时间步长为 Δt ，实际上时间步长 $\Delta t = \Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ 在每

一个时间步都可以根据稳定性条件变化,但在格式的构造当中我们仅需考虑时间上的单步离散(欧拉向前差分或者 Runge-Kutta 方法),由此为简便起见我们这里统一使用没有上标 n 的记号 Δt 。我们分别记 u_j^n 和 Q_j^n 为 $u(x_j, t^n)$ 和 $Q(x_j, t^n)$ 的有限差分近似,类似地,我们记

$$g_j^n = g(x_j, Q_j^n), \quad \beta_j^n = \beta(x_j, Q_j^n), \quad m_j^n = m(x_j, Q_j^n), \quad w_j = w(x_j), \quad C^n = C(t^n).$$

定义常用的有限差分算子如下

$$D^-(u_j^n) = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \quad \Delta_+(u_j^n) = u_{j+1}^n - u_j^n, \quad \Delta_-(u_j^n) = u_j^n - u_{j-1}^n,$$

我们再定义格点函数 u^n 的 L^1 和 L^∞ 模以及 TV 半模

$$\|u^n\|_1 = \sum_{j=1}^N |u_j^n| \Delta x, \quad \|u^n\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} |u_j^n|, \quad TV(u^n) = \sum_{j=0}^{N-1} |u_{j+1}^n - u_j^n|.$$

接下来我们给出本章将要介绍的求解 (2.1) 的一阶显式迎风有限差分格式,构造如下

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{g_j^n u_j^n - g_{j-1}^n u_{j-1}^n}{\Delta x} + m_j^n u_j^n = 0, \quad 1 \leq j \leq N \quad (2.3)$$

其左边界条件的处理方法为

$$g_0^n u_0^n = C^n + \sum_{j=1}^N \beta_j^n u_j^n \Delta x, \quad (2.4)$$

环境影响因子 Q_j 由下面的公式得到

$$Q_j^n = \alpha \sum_{i=1}^j w_i u_i^n \Delta x + \sum_{i=j+1}^N w_i u_i^n \Delta x. \quad (2.5)$$

初值条件为

$$u_j^0 = u^0(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

记 $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, 并改写 (2.3) 为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(g_j^n u_j^n - g_{j-1}^n u_{j-1}^n) - \Delta t m_j^n u_j^n = (1 - \lambda g_j^n - \Delta t m_j^n) u_j^n + \lambda g_{j-1}^n u_{j-1}^n, \quad j \geq 1. \quad (2.6)$$

由于我们只需考虑单步离散格式,而 (2.6) 式右端只含有与时间 t^n 有关的项,这样当不至于引起误解的情况下我们就将上标 n 省略掉。

下面我们证明数值解 u^n 在时间 $t^n \leq T$ 时的 L^1 模有界性。首先我们假设 $u_j^n \geq 0$, 稍后我们会证明这种假设的合理性。

命题 2.1. 如果 $u_j^n \geq 0$, 当 $t^n \leq T$ 时则有 $\|u^n\|_1$ 有界。

证明: 由于 $u_j^n \geq 0$, $m_j^n \geq 0$ (假设 H2) 和 $g_N^n = 0$ (假设 H1), 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\|u^{n+1}\|_1 - \|u^n\|_1}{\Delta t} &= \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \Delta x \\ &= -\sum_{j=1}^N (g_j^n u_j^n - g_{j-1}^n u_{j-1}^n) - \sum_{j=1}^N m_j^n u_j^n \Delta x \\ &\leq -\sum_{j=1}^N (g_j^n u_j^n - g_{j-1}^n u_{j-1}^n) \\ &= g_0^n u_0^n \\ &= C^n + \sum_{j=1}^N \beta_j^n u_j^n \Delta x \\ &\leq C + \omega_1 \|u^n\|_1 \end{aligned}$$

这里 C 为 $C(t)$ 在 $t \in [0, T]$ 上的上界, ω_1 为假设 H3 中的 $\beta(x, Q)$ 上界, 这样当 Δt 为常数时, 我们立刻得到

$$\begin{aligned} \|u^n\|_1 &\leq (1 + \omega_1 \Delta t) \|u^{n-1}\|_1 + C \Delta t \\ &\leq (1 + \omega_1 \Delta t)^n \|u^0\|_1 + \sum_{j=0}^{n-1} (1 + \omega_1 \Delta t)^j C \Delta t \\ &\leq e^{\omega_1 T} \|u^0\|_1 + \frac{C e^{\omega_1 T}}{\omega_1} \equiv \omega_2, \end{aligned}$$

这里的 ω_2 以及后面将要用到的 ω_k 都是只与给定的函数 g 、 m 、 C 、 β 、 w 、最终时间 T 以及初值函数 u^0 有关。当 Δt 非常数的情况, 只需做少量的调整我们的证明仍然能够成立。■

由数值解的 L^1 模有界性, 我们可以容易地得到下面的环境影响因子 Q 的上界

$$\begin{aligned} |Q_j^n| &= \left| \alpha \sum_{i=1}^j w_i u_i^n \Delta x + \sum_{i=j+1}^N w_i u_i^n \Delta x \right| \\ &\leq \|w\|_\infty \max_n \|u^n\|_1 \leq \omega_2 \|w\|_\infty \equiv Q_{\max}. \end{aligned}$$

这样我们得到 x 和 Q 的有界区域 $\mathcal{D} = \{(x, Q) \in [0, L] \times [0, Q_{\max}]\}$, 结合函数 g 、 m 、 β 以及 w 的光滑性假设, 从而得到常数 ω_3 满足

$$\sup_{\mathcal{D}} |f(x, Q)| \leq \omega_3, \quad \sup_{0 \leq x \leq L} |h(x)| \leq \omega_3$$

其中

$$f(x, Q) = g(x, Q), g_x(x, Q), g_Q(x, Q), g_{xx}(x, Q), g_{xQ}(x, Q), g_{QQ}(x, Q),$$

$$m(x, Q), m_x(x, Q), m_Q(x, Q), \beta(x, Q),$$

$$h(x) = w(x), w'(x).$$

当 $\Delta t \leq \Delta t_0 \equiv \frac{1}{2\omega_3}$ 和 $\lambda \leq \lambda_0 \equiv \frac{1}{2\omega_3}$ 的时候, 我们即有

$$1 - \lambda g_j^n - \Delta t m_j^n \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (2.7)$$

这样从 (2.6) 式我们得到 $u_j^n \geq 0$, 由于我们可以自由选择 $\lambda = \lambda_0$ 在时间层 t^n 上为常数或变量, 从而我们在命题 2.1 所做的 u_j^n 非负的假设是合理的。

下面我们将要证明数值解的 L^∞ 有界性。

命题 2.2. $t^n \leq T$ 时, $\|u^n\|_\infty$ 有界。

证明: 首先我们有

$$g_0^n u_0^n = C^n + \sum_{i=1}^N \beta_i^n u_i^n \Delta x \leq C + \omega_1 \|u^n\|_1 \leq C + \omega_1 \omega_2.$$

由于 g 连续且 $g(0, Q) > 0$ (假设 H1), 我们令

$$\mu = \min_{Q \in [0, Q_{max}]} g(0, Q) > 0. \quad (2.8)$$

这样即有

$$|u_0^n| \leq \frac{C + \omega_1 \omega_2}{\mu}. \quad (2.9)$$

对于 $j \geq 1$ 时, 应用式 (2.6)、(2.7) 以及函数 m 的非负性我们得到

$$\begin{aligned} |u_j^n| &\leq (1 - \lambda g_j^{n-1} - \Delta t m_j^{n-1}) \|u^{n-1}\|_\infty + \lambda g_{j-1}^{n-1} \|u^{n-1}\|_\infty \\ &\leq \|u^{n-1}\|_\infty - \lambda (g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1}) \|u^{n-1}\|_\infty. \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1} &= g(x_j, Q_j^{n-1}) - g(x_{j-1}, Q_j^{n-1}) + g(x_{j-1}, Q_j^{n-1}) - g(x_{j-1}, Q_{j-1}^{n-1}) \\ &= g_x(\hat{x}_j, Q_j^{n-1}) \Delta x + g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^{n-1}) (Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}) \\ &= g_x(\hat{x}_j, Q_j^{n-1}) \Delta x + g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^{n-1}) (\alpha - 1) w_j u_j^{n-1} \Delta x. \end{aligned}$$

这里以及下面使用的符号 \hat{z}_j 表示 $z = x$ 或 $z = Q$ 在 z_{j-1} 与 z_j 之间的某个值。由假设有 $\alpha < 1$ 和 $g_Q(x, Q) \leq 0$, 这样我们就得到

$$-\lambda g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^{n-1}) (\alpha - 1) w_j u_j^{n-1} \Delta x \leq 0.$$

对于 $j \geq 1$, 我们立刻得到

$$|u_j^n| \leq \|u^{n-1}\|_\infty + \sup_D |g_x(x, Q)| \|u^{n-1}\|_\infty \Delta t$$

$$\leq (1 + \omega_3 \Delta t) \|u^{n-1}\|_\infty$$

综合上述 (2.9) 式, 显然即有

$$\|u^n\|_\infty \leq \max\{e^{\omega_3 T} \|u^0\|_\infty, \frac{1}{\mu}(C + \omega_1 \omega_2)\} \equiv \omega_4.$$

■

在证明格式的总变差稳定性之前, 我们先证明下面的结果。

引理 2.3. 存在正的常数 ω_5 、 ω_6 及 ω_7 满足

$$\max_{1 \leq j \leq N} |Q_j^n - Q_{j-1}^n| \leq \omega_5 \Delta x, \quad \max_{1 \leq j \leq N} |g_j^n - g_{j-1}^n| \leq \omega_5 \Delta x, \quad \max_{1 \leq j \leq N} |m_j^n - m_{j-1}^n| \leq \omega_5 \Delta x, \quad (2.10)$$

其中 $1 \leq j \leq N$,

$$|g_{j+1}^n - 2g_j^n + g_{j-1}^n| \leq \omega_6 (\Delta x^2 + \Delta x |u_{j+1}^n - u_j^n|), \quad (2.11)$$

其中 $1 \leq j \leq N-1$,

$$\max_{1 \leq j \leq N} |Q_j^{n+1} - Q_j^n| \leq \omega_7 \Delta t (1 + TV(u^n)), \quad \max_{1 \leq j \leq N} |g_j^{n+1} - g_j^n| \leq \omega_7 \Delta t (1 + TV(u^n)), \quad (2.12)$$

$$\max_{1 \leq j \leq N} |\beta_j^{n+1} - \beta_j^n| \leq \omega_7 \Delta t (1 + TV(u^n)),$$

其中 $0 \leq j \leq N$ 。

证明: 对于 $1 \leq j \leq N$, 我们有

$$\begin{aligned} |Q_j^n - Q_{j-1}^n| &= \left| \alpha \sum_{i=1}^j w_i u_i^n + \sum_{i=j+1}^N w_i u_i^n - \alpha \sum_{i=1}^{j-1} w_i u_i^n - \sum_{i=j}^N w_i u_i^n \right| \Delta x \\ &= |(\alpha - 1) w_j u_j^n| \Delta x \leq \|w\|_\infty \|u^n\|_\infty \Delta x \leq \omega_3 \omega_4 \Delta x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |g_j^n - g_{j-1}^n| &= |g(x_j, Q_j^n) - g(x_{j-1}, Q_j^n) + g(x_{j-1}, Q_j^n) - g(x_{j-1}, Q_{j-1}^n)| \\ &\leq |g_x(\hat{x}_j, Q_j^n)| \Delta x + |g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n)| |Q_j^n - Q_{j-1}^n| \\ &\leq \omega_3 \Delta x + \omega_3 (\omega_3 \omega_4 \Delta x) = \omega_3 (1 + \omega_3 \omega_4) \Delta x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |m_j^n - m_{j-1}^n| &= |m(x_j, Q_j^n) - m(x_{j-1}, Q_j^n) + m(x_{j-1}, Q_j^n) - m(x_{j-1}, Q_{j-1}^n)| \\ &\leq |m_x(\hat{x}_j, Q_j^n)| \Delta x + |m_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n)| |Q_j^n - Q_{j-1}^n| \\ &\leq \omega_3 \Delta x + \omega_3 (\omega_3 \omega_4 \Delta x) = \omega_3 (1 + \omega_3 \omega_4) \Delta x. \end{aligned}$$

这样我们就证明了式 (2.10), 其中

$$\omega_5 = \max(\omega_3\omega_4, \omega_3(1 + \omega_3\omega_4)).$$

对于式 (2.11), $1 \leq j \leq N - 1$ 时我们有

$$\begin{aligned} |g_{j+1}^n - 2g_j^n + g_{j-1}^n| &= |(g_{j+1}^n - g_j^n) - (g_j^n - g_{j-1}^n)| \\ &= \left| \Delta_+ \left(g_x(\hat{x}_j, Q_j^n) \Delta x + g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n)(Q_j^n - Q_{j-1}^n) \right) \right| \\ &\leq |g_x(\hat{x}_{j+1}, Q_{j+1}^n) - g_x(\hat{x}_j, Q_j^n)| \Delta x \\ &\quad + |g_Q(x_j, \hat{Q}_{j+1}^n) w_{j+1} u_{j+1}^n - g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n) w_j u_j^n| (1 - \alpha) \Delta x \\ &= I + II \end{aligned}$$

这里 I 和 II 定义如下

$$\begin{aligned} I &= |g_x(\hat{x}_{j+1}, Q_{j+1}^n) - g_x(\hat{x}_j, Q_j^n)| \Delta x \\ &= |g_{xx}(\bar{x}_{j+1}, Q_{j+1}^n)(\hat{x}_{j+1} - \hat{x}_j) + g_{xQ}(\hat{x}_j, \bar{Q}_{j+1}^n)(Q_{j+1}^n - Q_j^n)| \Delta x \\ &\leq 2\omega_3 \Delta x^2 + \omega_3 \omega_5 \Delta x^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II &= \left| g_Q(x_j, \hat{Q}_{j+1}^n) w_{j+1} u_{j+1}^n - g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n) w_j u_j^n \right| (1 - \alpha) \Delta x \\ &= \left| (g_Q(x_j, \hat{Q}_{j+1}^n) - g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n)) w_{j+1} u_{j+1}^n + g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n) u_{j+1}^n (w_{j+1} - w_j) \right. \\ &\quad \left. + g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n) w_j (u_{j+1}^n - u_j^n) \right| (1 - \alpha) \Delta x \\ &\leq \left| g_{Qx}(\hat{x}_j, \hat{Q}_{j+1}^n) \Delta x + g_{QQ}(x_{j-1}, \bar{Q}_{j+1}^n)(\hat{Q}_{j+1}^n - \hat{Q}_j^n) \right| \|w\|_\infty \|u^n\|_\infty \Delta x \\ &\quad + \omega_3 \|u^n\|_\infty \|w_x\|_\infty \Delta x^2 + \omega_3 \|w\|_\infty |u_{j+1}^n - u_j^n| \Delta x \\ &\leq \omega_3^2 \omega_4 \Delta x^2 + \omega_3^2 \omega_4 \Delta x (2\omega_5 \Delta x) + \omega_3^2 \omega_4 \Delta x^2 + \omega_3^2 |u_{j+1}^n - u_j^n| \Delta x \\ &\leq 2\omega_3^2 \omega_4 (1 + \omega_5) \Delta x^2 + \omega_3^2 \Delta x |u_{j+1}^n - u_j^n|. \end{aligned}$$

这样我们就证明了式 (2.11), 其中

$$\omega_6 = \max(\omega_3(2 + \omega_5 + 2\omega_3\omega_4 + 2\omega_3\omega_4\omega_5), \omega_3^2).$$

对于式 (2.12), $0 \leq j \leq N$ 时我们有

$$\begin{aligned} |Q_j^{n+1} - Q_j^n| &= \left| \alpha \sum_{i=1}^j w_i u_i^{n+1} + \sum_{i=j+1}^N w_i u_i^{n+1} - \alpha \sum_{i=1}^j w_i u_i^n - \sum_{i=j+1}^N w_i u_i^n \right| \Delta x \\ &\leq \sum_{i=1}^N |u_i^{n+1} - u_i^n| w_i \Delta x \leq \omega_3 \sum_{i=1}^N |u_i^{n+1} - u_i^n| \Delta x. \end{aligned}$$

这样对于 $i \geq 1$, 均有

$$\begin{aligned} |u_i^{n+1} - u_i^n| &= |\lambda(g_i^n u_i^n - g_{i-1}^n u_{i-1}^n) + m_i^n u_i^n \Delta t| \\ &\leq \lambda g_i^n |u_i^n - u_{i-1}^n| + \lambda |g_i^n - g_{i-1}^n| u_{i-1}^n + \|m^n\|_\infty \|u^n\|_\infty \Delta t \quad (2.13) \\ &\leq \lambda \omega_3 |u_i^n - u_{i-1}^n| + \omega_4 \omega_5 \Delta t + \omega_3 \omega_4 \Delta t, \end{aligned}$$

从而我们得到

$$\begin{aligned} |Q_j^{n+1} - Q_j^n| &\leq \omega_3 \sum_{i=1}^N (\lambda \omega_3 |u_i^n - u_{i-1}^n| + \omega_4 \omega_5 \Delta t + \omega_3 \omega_4 \Delta t) \Delta x \\ &= \omega_3^2 TV(u^n) \Delta t + \omega_3 \omega_4 (\omega_3 + \omega_5) L \Delta t. \end{aligned}$$

同样得到

$$\begin{aligned} |g_j^{n+1} - g_j^n| &= |g(x_j, Q_j^{n+1}) - g(x_j, Q_j^n)| \\ &= |g_Q(x_j, \tilde{Q}_j) |Q_j^{n+1} - Q_j^n| \leq \omega_3 |Q_j^{n+1} - Q_j^n| \\ &\leq \omega_3^3 TV(u^n) \Delta t + \omega_3^2 \omega_4 (\omega_3 + \omega_5) L \Delta t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\beta_j^{n+1} - \beta_j^n| &= |\beta(x_j, Q_j^{n+1}) - \beta(x_j, Q_j^n)| \\ &= |\beta_Q(x_j, \tilde{Q}_j) |Q_j^{n+1} - Q_j^n| \leq \omega_3 |Q_j^{n+1} - Q_j^n| \\ &\leq \omega_3^3 TV(u^n) \Delta t + \omega_3^2 \omega_4 (\omega_3 + \omega_5) L \Delta t. \end{aligned}$$

综上所述得证式 (2.12), 其中

$$\omega_7 = \max(\omega_3^2, \omega_3^3, \omega_3 \omega_4 (\omega_3 + \omega_5) L, \omega_3^2 \omega_4 (\omega_3 + \omega_5) L).$$

■

现在我们开始证明格式的总变差稳定性。

命题 2.4. $t^n \leq T$ 时, $TV(u^n)$ 有界。

证明: 首先我们改写格式 (2.3) 如下

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda g_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n) - \lambda (g_j^n - g_{j-1}^n) u_{j-1}^n - \Delta t m_j^n u_j^n.$$

对于 $1 \leq j \leq N-1$, 我们有

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= ((u_{j+1}^n - u_j^n) - \lambda g_{j+1}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) + \lambda g_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n)) \\ &\quad + (-\lambda u_j^n (g_{j+1}^n - g_j^n) + \lambda u_{j-1}^n (g_j^n - g_{j-1}^n)) + (-\Delta t (m_{j+1}^n u_{j+1}^n - m_j^n u_j^n)) \\ &= A_j^n + B_j^n + C_j^n. \end{aligned}$$

这样

$$TV(u^{n+1}) = \sum_{j=0}^{N-1} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq \sum_{j=1}^{N-1} |A_j^n| + \sum_{j=1}^{N-1} |B_j^n| + \sum_{j=1}^{N-1} |C_j^n| + |u_1^{n+1} - u_0^{n+1}|.$$

现在我们每项分开分析, 首先我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} |A_j^n| &\leq \sum_{j=1}^{N-1} ((1 - \lambda g_{j+1}^n) |u_{j+1}^n - u_j^n| + \lambda g_j^n |u_j^n - u_{j-1}^n|) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + \lambda g_1^n |u_1^n - u_0^n| - \lambda g_N^n |u_N^n - u_{N-1}^n| \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + \lambda g_1^n |u_1^n - u_0^n| \end{aligned}$$

其中第一个不等式我们应用了 (2.7) 式, 最后一个等式我们应用了 $g(x_N, Q) = 0$. 我们改写 B_j^n 项如下

$$\begin{aligned} B_j^n &= -\lambda u_j^n (g_{j+1}^n - g_j^n) + \lambda u_{j-1}^n (g_j^n - g_{j-1}^n) \\ &= \lambda ((g_{j-1}^n - g_j^n)(u_j^n - u_{j-1}^n) - (g_{j+1}^n - 2g_j^n + g_{j-1}^n)u_j^n). \end{aligned}$$

应用引理 2.3, 我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} |B_j^n| &\leq \sum_{j=1}^{N-1} \lambda |g_{j-1}^n - g_j^n| |u_j^n - u_{j-1}^n| + \sum_{j=1}^{N-1} \lambda |g_{j+1}^n - 2g_j^n + g_{j-1}^n| |u_j^n| \\ &\leq \omega_5 \Delta t \sum_{j=1}^{N-1} |u_j^n - u_{j-1}^n| + \omega_4 \omega_6 \Delta t \left(\sum_{j=1}^{N-1} \Delta x + \sum_{j=1}^{N-1} |u_j^n - u_{j-1}^n| \right) \\ &\leq \omega_4 \omega_6 L \Delta t + (\omega_5 + \omega_4 \omega_6) \Delta t TV(u^n). \end{aligned}$$

C_j^n 分析如下

$$\begin{aligned} |C_j^n| &= \Delta t |m_{j+1}^n u_{j+1}^n - m_j^n u_{j+1}^n + m_j^n u_{j+1}^n - m_j^n u_j^n| \\ &\leq \Delta t \omega_3 \Delta x \omega_4 + \omega_3 |u_{j+1}^n - u_j^n| \Delta t \end{aligned}$$

这样我们就得到了

$$\sum_{j=1}^{N-1} |C_j^n| \leq \omega_3 \omega_4 L \Delta t + \omega_3 \Delta t TV(u^n).$$

令

$$\omega_8 = \max((\omega_3 + \omega_6) \omega_4 L, \omega_3 + \omega_5 + \omega_4 \omega_6),$$

我们有

$$TV(u^{n+1}) \leq \omega_8 \Delta t + \omega_8 \Delta t TV(u^n) + \sum_{j=1}^{N-1} |u_j^n - u_{j-1}^n| + \lambda g_1^n |u_1^n - u_0^n| + |u_1^{n+1} - u_0^{n+1}|.$$

现在我们讨论 $|u_1^{n+1} - u_0^{n+1}|$ 项。应用式 (2.3)、(2.4) 和引理 2.3, 我们有

$$\begin{aligned} |u_1^{n+1} - u_0^{n+1}| &= |(1 - \lambda g_1^n - \Delta t m_1^n)u_1^n + \lambda g_0^n u_0^n - u_0^{n+1}| \\ &= |(1 - \lambda g_1^n)(u_1^n - u_0^n) - m_1^n u_1^n \Delta t - \lambda(g_1^n - g_0^n)u_0^n - (u_0^{n+1} - u_0^n)| \\ &\leq (1 - \lambda g_1^n)|u_1^n - u_0^n| + \omega_3 \omega_4 \Delta t + \omega_5 \omega_4 \Delta t + |u_0^{n+1} - u_0^n|. \end{aligned}$$

令 $\omega_9 = \omega_3 + \omega_4(\omega_3 + \omega_5)$, 我们即有

$$TV(u^{n+1}) \leq \omega_9 \Delta t + \omega_9 \Delta t TV(u^n) + TV(u^n) + |u_0^{n+1} - u_0^n|.$$

最后我们分析 $|u_0^{n+1} - u_0^n|$ 项, 由式 (2.4), 我们得到

$$\begin{aligned} g_0^{n+1} u_0^{n+1} - g_0^n u_0^n &= g_0^{n+1}(u_0^{n+1} - u_0^n) + (g_0^{n+1} - g_0^n)u_0^n \\ &= C^{n+1} - C^n + \sum_{j=1}^N (\beta_j^{n+1} u_j^{n+1} - \beta_j^n u_j^n) \Delta x \\ &= C^{n+1} - C^n + \sum_{j=1}^N (\beta_j^{n+1}(u_j^{n+1} - u_j^n) + (\beta_j^{n+1} - \beta_j^n)u_j^n) \Delta x. \end{aligned}$$

由式 (2.8), 注意到 $g_0^{n+1} \geq \mu > 0$, 应用引理 2.3 和 (2.13) 我们得到

$$\begin{aligned} |u_0^{n+1} - u_0^n| &\leq \frac{1}{\mu} |g_0^{n+1} - g_0^n| u_0^n + \frac{1}{\mu} |C^{n+1} - C^n| \\ &\quad + \frac{\omega_3}{\mu} \sum_{j=1}^N |u_j^{n+1} - u_j^n| \Delta x + \frac{\omega_4}{\mu} \sum_{j=1}^N |\beta_j^{n+1} - \beta_j^n| \Delta x \\ &\leq \frac{\omega_4}{\mu} (\omega_7 TV(u^n) \Delta t + \omega_7 \Delta t) + \frac{\omega_3}{\mu} \Delta t + \frac{\omega_3}{\mu} \sum_{j=1}^N (\lambda \omega_3 |u_j^n - u_{j-1}^n| \\ &\quad + \omega_4 (\omega_3 + \omega_5) \Delta t) \Delta x + \frac{\omega_4}{\mu} L (\omega_7 TV(u^n) \Delta t + \omega_7 \Delta t) \\ &\leq \omega_{10} TV(u^n) \Delta t + \omega_{10} \Delta t, \end{aligned}$$

其中

$$\omega_{10} = \max \left(\frac{\omega_4 \omega_7}{\mu} (1 + L) + \frac{\omega_3^2}{\mu}, \frac{\omega_4 \omega_7}{\mu} (1 + L) + \frac{\omega_3}{\mu} + \frac{\omega_3 \omega_4}{\mu} (\omega_3 + \omega_5) L \right).$$

令 $\omega_{11} = \omega_9 + \omega_{10}$, 我们有

$$TV(u^{n+1}) \leq (1 + \omega_{11} \Delta t) TV(u^n) + \omega_{11} \Delta t,$$

从而可以推出在 $t^n \leq T$ 时, $TV(u^n)$ 有界。■

接下来我们证明格式对于时间 t 的 Lipschitz 稳定性。

命题 2.5. 对于任意的 $q > p$, 存在正的常数 M 满足

$$\sum_{j=1}^N \left| \frac{u_j^q - u_j^p}{\Delta t} \right| \Delta x \leq M(q-p).$$

证明: 应用式 (2.3) 和引理 2.3, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right| \Delta x &= \sum_{j=1}^N |D^-(g_j^n u_j^n) + m_j^n u_j^n| \Delta x \\ &= \sum_{j=1}^N \left| \left(\frac{g_j^n - g_{j-1}^n}{\Delta x} + m_j^n \right) u_j^n + g_{j-1}^n D^-(u_j^n) \right| \Delta x \\ &\leq \omega_4 \omega_5 L + \omega_3 \omega_4 L + \omega_3 TV(u^n) \leq M. \end{aligned}$$

这样就有

$$\sum_{j=1}^N \left| \frac{u_j^q - u_j^p}{\Delta t} \right| \Delta x \leq \sum_{n=p}^{q-1} \sum_{j=1}^N \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right| \Delta x \leq M(q-p).$$

■

根据 [87] 我们可以定义如下一族函数 $\{U_{\Delta x, \Delta t}\}$

$$U_{\Delta x, \Delta t}(x, t) = u_j^n$$

其中 $x \in [x_{j-1}, x_j], t \in [t^{n-1}, t^n], j = 1, \dots, N$ 以及 $n = 1, \dots, l$. 这样, 函数集合 $\{U_{\Delta x, \Delta t}\}$ 在拓扑 $\mathcal{L}^1((0, L) \times (0, T))$ 中完备, 从而我们得到了下面的收敛性结果.

命题 2.6. 存在一个函数子列 $\{U_{\Delta x_i, \Delta t_i}\} \subset \{U_{\Delta x, \Delta t}\}$ 当 $i \rightarrow \infty$ 时在下面的意义下收敛到 $BV([0, L] \times [0, T])$ 中的函数 $u(x, t)$

$$\int_0^L |U_{\Delta x_i, \Delta t_i}(x, 0) - u^0(x)| dx \rightarrow 0$$

及

$$\int_0^T \int_0^L |U_{\Delta x_i, \Delta t_i}(x, t) - u(x, t)| dx dt \rightarrow 0,$$

此外满足如下条件的函数 u

$$\|u\|_{BV([0, L] \times [0, T])} \leq E(\|u^0\|_{BV[0, L]}, \|C\|_{C^1[0, T]})$$

是 (4.3) 式在 $BV([0, L] \times [0, T])$ 中的唯一解 $u(x, t)$, 并且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时数值解 $\{U_{\Delta x, \Delta t}\}$ 收敛到这个唯一解.

证明: 综合命题 2.1、2.2、2.4、2.5 以及 [87], 就能够保证了存在收敛函数列收敛到 BV 中的函数 $u(x, t)$ 并且 $u(x, t)$ 就是 (2.1) 在 BV 中的弱解. 由于在 [5] 中已经证明了

这个弱解的唯一性，从而保证了我们的数值解序列在 $\Delta x \rightarrow 0$ 的时候能够收敛到模型方程 (2.1) 的唯一真解。■

这样我们就得到了一个稳定的、收敛的一阶显式迎风有限差分格式，拥有和 [5] 中所构造的一阶隐式格式同样的性质，但由于我们构造的是显示格式，所以更加利于计算模拟模型方程 (2.1)。值得指出的是证明显示格式的上述性质比 [5] 中隐式格式的证明困难得多，同时一阶显式格式的许多证明思路可以应用到下一章二阶高分辨率格式性质的证明当中去。

第三章 二阶高分辨率有限差分格式

在上一章我们针对生物型体竞争模型方程构造了一阶显式迎风有限差分格式, 虽然我们证明了一阶格式的稳定性 and 收敛性, 但就计算而言, 一阶格式还存在很大的不足, 为了达到令人满意的结果, 必须使用大量的格点数。在本章中我们首先在第一节简要介绍了一下双曲守恒律方程的高分辨率方法背景知识, 在第二节我们根据 [40, 58] 中基于 minmod 函数的 MUSCL 格式构造了一个便于计算的高分辨率二阶有限差分格式, 我们同样证明了二阶格式的稳定性 and 收敛性, 不过在此我们要指出的是二阶格式的稳定性 and 收敛性分析由于模型方程中全局约束的存在从而比一阶格式的分析要困难得多, 还需指出的是我们的二阶格式可以很容易地推广为更高精度的一般 MUSCL 格式, 例如 [67] 中的格式和 [76] 中的 TVB (total variation bounded) minmod 格式。本章的第三节我们还给出了一些数值算例来验证二阶格式对比一阶格式的良好性质与优越性。

3.1 双曲守恒律方程的高分辨率方法

本节我们主要简单介绍一下双曲守恒律方程的高分辨率方法 (参见 [40, 58]), 高分辨率方法这个名字首先由 Harten 在其经典文章 [40] 中提出, 高分辨率的含义是指数值方法在解的光滑部分至少可以达到二阶精度同时在解的间断部分仍然能够得到锐利无振荡的激波图像。高分辨率方法的核心思想是以高阶精度的格式为基础, 在激波间断的附近区域调整格式并增加数值耗散。

为了达到上述目的, 最直接的途径就是在一个高阶精度方法 (例如 Lax-Wendroff 方法) 基础上在方程中增加一个人工粘性项, 由相容性条件可知该粘性项的系数在时间步长 $k \rightarrow 0$ 和空间步长 $h \rightarrow 0$ 时应快速地趋于零以保证格式在解的光滑部分保持高阶精度。由于在设计格式的时候只是在解的间断部分需要引入额外的粘性, 从而我们希望人工粘性项的系数能够与解的性质存在某种关联, 使得间断部分的系数要大于光滑区域。下面我们先给出一个简单例子来认识一下加入粘性项的影响。

考虑方程 $u_t + au_x = 0$, 我们调整其 Lax-Wendroff 格式为

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\nu}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\nu^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) + kQ(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (3.1)$$

其中 $\nu = ak/h$ 为 Courant 数, Q 即为我们新加入的人工粘性。我们记 $L(x, t)$ 为格式 (3.1) 的截断误差, $L_{LW}(x, t)$ 为原 Lax-Wendroff 格式的截断误差, 由于 $k \rightarrow 0$ 时有 $h = O(k)$ 、 $L_{LW}(x, t) = O(k^2)$, 则我们有下面的关系式

$$L(x, t) = L_{LW}(x, t) - Q\{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)\}$$

$$\begin{aligned} &= L_{LW}(x, t) - Qh^2 u_{xx}(x, t) + O(h^4) \\ &= O(k^2). \end{aligned}$$

这样对于任意的常数 Q , 格式 (3.1) 仍然是二阶精度的。考虑到格式 (3.1) 实际上是对下面的方程的三阶精度近似

$$u_t + au_x = h^2 Qu_{xx} + \frac{1}{6} h^2 a(v^2 - 1)u_{xxx}. \quad (3.2)$$

由此我们希望当 Q 取适当大小时在原 Lax-Wendroff 格式中引起数值振荡的色散项可以和耗散项相互抵消, 从而消除格式的数值振荡。但是当 Q 为常数时格式 (3.1) 仍然是一个线性格式, Godunov 定理告诉我们线性单调的格式至多只有一阶精度, 从而我们只能考虑取 Q 为与数值解有关的非线性函数。使用人工粘性项限制的办法最大困难就是如何引进适当的非线性函数 Q 从而在保证足够的耗散同时不至于抹平激波, 而直接构造这样的函数是非常困难的, 人工粘性方法的另一个不足之处在于控制人工粘性大小的 Q 与具体问题相关, 例如上面的例子中的色散项系数就包含 a , 当处理另外的问题时又要针对新方程设计 Q 。

为了避开这个难题, 数学家们采取了许多更为直接的办法来得到满足无振荡条件的高分辨率方法, 尽管绝大多数这些方法都可以改写为一个高阶格式加上某个人工粘性项, 但是这样一来得到的人工粘性项将非常复杂。下面介绍一下其中应用最为广泛的两种方法: 流通量限制器方法和斜率限制器方法。更多种类的高分辨率方法请参见 [99][102]。

流通量限制器方法的主要思想是在解的光滑区域使用高阶精度的流通量, 在间断部分使用低阶的流通量 (一般为单调流通量)。通过引入流通量限制器函数 (flux-limiter) 来达到自动调节流通量在光滑与间断区域的转换, 从而达到高分辨率的目的。Boris 和 Book 在 [15] 中给出的 FCT (Flux-Corrected Transport) 的方法是最早的流通量限制器方法之一, 几乎与 [15] 同时 Harten 和 Zwas 在 [45] 中也给出了流通量限制器方法, 更多的此类方法请参见 [68, 71, 101]。

另一种更具有几何直观意义的限制器方法是斜率限制器方法, 其基本思想是在 Godunov 方法中使用更高精度的分段线性函数取代原来的分段常数来重构流通量, 利用斜率限制器函数 (slope-limiter) 来自动调节这些线性函数的斜率, 使得在解的间断部分自动的减小插值线性函数的斜率, 从而在光滑区域上保持高阶精度的同时避免在间断部分出现振荡。为了得到更高精度, 还可以使用二次函数来代替线性函数来进行流通量的重构, 实际上限制器在间断附近的作用是自动降低一阶流通量重构的精度 (例如降低线性插值的斜率或者使用线性插值代替二次插值)。这类方法最早出现在 van Leer 的系列文章 [91, 92, 93, 94, 95] 中, 在这些系列文章中 van Leer 提出了著名的 MUSCL 格式, 之后又涌现了多种类似的方法 (例如 [21, 35]), 1984 年 Colella 和 Woodward 在 [22] 中提出了使用二次函数来代替线性函数来进行流通量的重构的 PPM (Piecewise Parabolic Method) 方法。对于这些方法更多详细的内容请参见 [58] 和 [88]。这里给出

我们在下一节构造二阶高分辨率格式中所使用的一个著名斜率限制器 minmod 函数 [40, 58]

$$mm(a, b) = \frac{\text{sign}(a) + \text{sign}(b)}{2} \min(|a|, |b|).$$

注意到如果我们取 a 和 b 分别为格点左边单元和右边单元上线性重构函数的斜率, 则 minmod 函数将自动选择其中绝对值最小的那个, 并且在解的极值附近取为 0, 从而起到自动降低线性重构函数的斜率并在间断处避免出现振荡的作用。

3.2 格式的构造

如上一章所示, 生物型体竞争模型方程定义为

$$\begin{aligned} u_t + (g(x, Q(x, t)) u)_x + m(x, Q(x, t)) u &= 0, \quad (x, t) \in (0, L] \times (0, T] \\ g(0, Q(0, t)) u(0, t) &= C(t) + \int_0^L \beta(x, Q(x, t)) u(x, t) dx, \quad t \in (0, T] \\ u(x, 0) &= u^0(x), \quad x \in [0, L] \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$Q(x, t) = \alpha \int_0^x w(\xi) u(\xi, t) d\xi + \int_x^L w(\xi) u(\xi, t) d\xi, \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (3.2)$$

同样地, 我们给出的模型方程假设条件:

- (H1) $g(x, Q)$ 对 x 和 Q 均为二阶连续可导; 对所有的 $x \in [0, L]$ 都有 $g(x, Q) > 0$; $g(L, Q) = 0$; $g_Q(x, Q) \leq 0$.
- (H2) $m(x, Q)$ 对 x 和 Q 均非负连续可导。
- (H3) $\beta(x, Q)$ 对 x 和 Q 均非负连续可导, 并且存在常数 $\omega_1 > 0$ 满足 $\sup_{(x, Q) \in [0, L] \times [0, \infty)} \beta(x, Q) \leq \omega_1$ 。
- (H4) $w(x)$ 非负连续可导。
- (H5) $C(t)$ 非负连续可导。
- (H6) $u^0 \in BV[0, L]$ 且 $u^0(x) \geq 0$ 。

沿用上一章的符号设定, 我们假设空间区域 $[0, L]$ 被格点 $x_j: 0 \leq j \leq N$ 划分为 N 个小区间, 其中 $x_0 = 0, x_N = L$ 。设区间为均匀区间, 每个小区间的长度都记为 Δx , 则有 $x_j = j\Delta x$ 。我们记时间步长为 Δt , 记 u_j^n 和 Q_j^n 分别为 $u(x_j, t^n)$ 和 $Q(x_j, t^n)$ 的有限差分近似, 类似地, 我们记

$$g_j^n = g(x_j, Q_j^n), \quad \beta_j^n = \beta(x_j, Q_j^n), \quad m_j^n = m(x_j, Q_j^n), \quad \omega_j = \omega(x_j), \quad C^n = C(t^n)$$

定义格点函数 u^n 的 L^1 与 L^∞ 模为

$$\|u^n\|_1 = \sum_{j=1}^N |u_j^n| \Delta x, \quad \|u^n\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} |u_j^n|.$$

和第一章一样, 在不引起误解的情况下我们省去上标 n 。

下面我们给出本章所要构造的二阶高分辨率有限差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n}{\Delta x} + m_j^n u_j^n = 0, \quad 1 \leq j \leq N \quad (3.3)$$

其中数值流通量 $\hat{f}_{j+1/2}^n$ 定义为

$$\hat{f}_{j+1/2}^n = \begin{cases} g_j^n u_j^n + \frac{1}{2}(g_{j+1}^n - g_j^n) u_j^n + \frac{1}{2} g_j^n mm(\Delta_+ u_j^n, \Delta_- u_j^n) & : j = 2, \dots, N-2 \\ g_j^n u_j^n & : j = 0, 1, N-1, N \end{cases}$$

这里的函数 mm 取自 [40] 中定义的 minmod 函数

$$mm(a, b) = \frac{\text{sign}(a) + \text{sign}(b)}{2} \min(|a|, |b|). \quad (3.4)$$

显然我们看到, 这样所构造的格式除了边界点为一阶精度外都是二阶精度的, 从而保证了数值解在 L^1 模意义下有二阶精度。左边界处的全局边界条件则由下面的复合梯形积分公式得到

$$g_0^n u_0^n = C^n + \sum_{j=0}^N ' \beta_j^n u_j^n \Delta x, \quad (3.5)$$

这里我们的特殊求和符号定义如下

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} ' a_j = \frac{1}{2} a_{j_1} + \frac{1}{2} a_{j_2} + \sum_{j=j_1+1}^{j_2-1} a_j$$

其中 $j_2 - j_1 \geq 1$, 当 $j_2 \leq j_1$ 时显然有

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} ' a_j = 0.$$

环境影响因子 $Q(x, t)$ 同样也由上面的二阶复合积分公式求得, 由于要避免使用边界点 u_0^n , 我们对第一个积分小区间使用右端矩形法则:

$$\begin{aligned} Q_0^n &= \omega_1 u_1^n \Delta x + \sum_{i=1}^N ' w_i u_i^n \Delta x, & Q_1^n &= \alpha \omega_1 u_1^n \Delta x + \sum_{i=1}^N ' w_i u_i^n \Delta x, \\ Q_j^n &= \alpha \omega_1 u_1^n \Delta x + \alpha \sum_{i=1}^j ' w_i u_i^n \Delta x + \sum_{i=j}^N ' w_i u_i^n \Delta x, & 2 \leq j \leq N. \end{aligned} \quad (3.6)$$

这样我们即可保证对 Q_j^n 的近似在 L^1 模下也是二阶精度的。初值条件仍然为

$$u_j^0 = u^0(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

仍然记 $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, 我们改写格式 (3.3) 如下

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n) - \Delta t m_j^n u_j^n, \quad j \geq 1. \quad (3.7)$$

记

$$A_j^n = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(g_{j+1}^n + g_j^n + g_j^n \frac{mm(\Delta_+ u_j^n, \Delta_- u_j^n)}{\Delta_- u_j^n} - g_{j-1}^n \frac{mm(\Delta_- u_j^n, \Delta_- u_{j-1}^n)}{\Delta_- u_j^n} \right) & : j = 3, \dots, N-2 \\ \frac{1}{2} \left(g_{j+1}^n + g_j^n + g_j^n \frac{mm(\Delta_+ u_j^n, \Delta_- u_j^n)}{\Delta_- u_j^n} \right) & : j = 2 \\ \frac{1}{2} \left(2g_j^n - g_{j-1}^n \frac{mm(\Delta_- u_j^n, \Delta_- u_{j-1}^n)}{\Delta_- u_j^n} \right) & : j = N-1 \\ g_j^n & : j = 1, N \end{cases}$$

$$B_j^n = \begin{cases} \frac{1}{2}(\Delta_+ g_j^n + \Delta_- g_j^n) & : j = 3, \dots, N-2 \\ \frac{1}{2}\Delta_+ g_j^n & : j = 2 \\ \frac{1}{2}\Delta_- g_j^n & : j = N-1 \\ \Delta_- g_j^n & : j = 1, N \end{cases}$$

并改写格式 (3.7) 为

$$u_j^{n+1} = (1 - \lambda A_j^n - m_j^n \Delta t) u_j^n + \lambda (A_j^n - B_j^n) u_{j-1}^n, \quad j \geq 1. \quad (3.8)$$

首先我们在假设 $u_j^n \geq 0$ 的基础上证明 $t^n \leq T$ 时数值解 u^n 的 L^1 模有界性, 稍后我们会给出这种假设的合理性。

命题 3.1. 如果 $u_j^n \geq 0$, 则当 $t^n \leq T$ 时 $\|u^n\|_1$ 有界。

证明: 由于 $u_j^n \geq 0$, $m_j^n \geq 0$ 以及 $g_N^n = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\|u^{n+1}\|_1 - \|u^n\|_1}{\Delta t} &= \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \Delta x \\ &= - \sum_{j=1}^N (\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n) - \sum_{j=1}^N m_j^n u_j^n \Delta x \\ &\leq - \sum_{j=1}^N (\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n) \\ &= g_0^n u_0^n \\ &= C^n + \frac{1}{2} \beta_0^n u_0^n \Delta x + \frac{1}{2} \beta_N^n u_N^n \Delta x + \sum_{j=1}^{N-1} \beta_j^n u_j^n \Delta x \end{aligned}$$

$$\leq C^n + \frac{1}{2}\beta_0^n u_0^n \Delta x + \omega_1 \|u^n\|_1.$$

现在我们假设 $u_0^n \leq \theta$, 其中 θ 为正的常数, 稍后我们将验证该假设的合理性. 记 C, ω_1 分别为函数 $C(t), \beta(x, Q)$ 在 $t \in [0, T]$ 上的上界, 则当 $\Delta x \leq 2C/\omega_1\theta$ 时, 我们得到 $\frac{1}{2}\beta_0^n u_0^n \Delta x \leq C$. 当 Δt 为常数时, 我们立刻得到

$$\begin{aligned} \|u^n\|_1 &\leq (1 + \omega_1 \Delta t) \|u^{n-1}\|_1 + 2C \Delta t \\ &\leq (1 + \omega_1 \Delta t)^n \|u^0\|_1 + \sum_{j=0}^{n-1} (1 + \omega_1 \Delta t)^j 2C \Delta t \\ &\leq e^{\omega_1 T} \|u^0\|_1 + \frac{2C e^{\omega_1 T}}{\omega_1} \equiv M_2 \end{aligned}$$

M_2 以及后面的 M_k 都是只和函数 g, m, C, β, w 、最终时间 T 以及初值条件 u^0 有关的常数. 对于 Δt 非常数的情况, 只要对证明稍加改动即可得到同样的结果.

现在我们考虑 Q_j^n 的界, 由 (3.6) 中 Q_j^n 的定义, 对所有的 $0 \leq j \leq N$, 我们有

$$Q_j^n \leq \omega_1 u_1^n \Delta x + \sum_{i=1}^N w_i u_i^n \Delta x \leq \frac{3}{2} \omega_3 M_2 \equiv Q_{\max},$$

从而有

$$g_0^n \geq \min_{0 \leq Q \leq Q_{\max}} g(0, Q) \equiv \mu > 0. \quad (3.9)$$

这样当 $\Delta x \leq \mu/\omega_1$ 时, 我们有 $g_0^n - \frac{1}{2}\beta_0 \Delta x \geq \mu/2$, 从而由 (3.5) 我们得到

$$u_0^n \leq \frac{2}{\mu} (\omega_1 M_2 + C). \quad (3.10)$$

注意到不等式右端的常数都不依赖于 θ , 这样我们关于边界点 $u_0^n \leq \theta$ 的假设是合理的. ■

和上一章一样, 现在我们得到了关于 x 和 Q 的一个有界区域 $\mathcal{D} = \{(x, Q) \in [0, L] \times [0, Q_{\max}]\}$, 结合函数 g, m, β 以及 w 的光滑性条件, 我们得到一个常数 M_3 满足

$$\sup_{\mathcal{D}} |f(x, Q)| \leq M_3, \quad \sup_{0 \leq x \leq L} |h(x)| \leq M_3, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta(t)| \leq M_3$$

其中

$$\begin{aligned} f(x, Q) &= g(x, Q), g_x(x, Q), g_Q(x, Q), g_{xx}(x, Q), g_{xQ}(x, Q), g_{QQ}(x, Q), \\ &\quad m(x, Q), m_x(x, Q), m_Q(x, Q), \beta(x, Q), \\ h(x) &= w(x), w'(x), \quad \eta(t) = C(t), C'(t). \end{aligned}$$

这样显然有

$$|A_j^n| \leq \frac{3}{2} \max_{\mathcal{D}} |g(x, Q)| \leq \frac{3}{2} M_3,$$

当 $\Delta t \leq \Delta t_0 \equiv \frac{1}{2M_3}$ 且 $\lambda \leq \lambda_0 \equiv \frac{1}{3M_3}$ 时, 我们即有

$$1 - \lambda A_j^n - \Delta t m_j^n \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.11)$$

注意到

$$2(A_j^n - B_j^n) = \begin{cases} g_j^n \left(2 + \frac{mm(\Delta + u_j^n, \Delta - u_j^n)}{\Delta - u_j^n} \right) & : j = 2. \\ g_j^n + g_{j-1}^n \left(1 - \frac{mm(\Delta - u_j^n, \Delta - u_{j-1}^n)}{\Delta - u_j^n} \right) & : j = N - 1. \\ 2g_{j-1}^n & : j = 1, N. \\ g_j^n \left(1 + \frac{mm(\Delta + u_j^n, \Delta - u_j^n)}{\Delta - u_j^n} \right) + g_{j-1}^n \left(1 - \frac{mm(\Delta - u_j^n, \Delta - u_{j-1}^n)}{\Delta - u_j^n} \right) & : other\ j \end{cases}$$

通过 minmod 函数的定义 (3.4), 我们得到

$$A_j^n - B_j^n \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.12)$$

结合 (3.8) 和 (3.11), 显然有 $u_j^n \geq 0$. 注意到我们既可以选择 $\lambda \leq \lambda_0$ 为常数也可以在每个时间层 t^n 变化, 这样我们就证明了命题 3.1 中关于 u_j^n 非负性假设的合理性.

下面我们将要证明的是数值解 L^∞ 模有界性.

命题 3.2. 当 $t^n \leq T$ 时, $\|u^n\|_\infty$ 有界.

证明: 首先我们在 (3.10) 中已经证明了 u_0^n 的有界性, 当 $j \geq 1$ 时, 应用 (3.8)、(3.11)、(3.12) 以及函数 m 的非负性, 我们得到

$$\begin{aligned} |u_j^n| &\leq (1 - \lambda A_j^{n-1} - \Delta t m_j^{n-1}) \|u^{n-1}\|_\infty + \lambda (A_j^{n-1} - B_j^{n-1}) \|u^{n-1}\|_\infty \\ &\leq \|u^{n-1}\|_\infty - \lambda B_j^{n-1} \|u^{n-1}\|_\infty. \end{aligned}$$

对于 $2 \leq j \leq N$, 显然有

$$Q_j - Q_{j-1} = \frac{1}{2}(\alpha - 1)(w_j u_j + w_{j-1} u_{j-1}) \Delta x. \quad (3.13)$$

对于 $j = 1$, 我们有相似的结果

$$Q_1 - Q_0 = (\alpha - 1) \omega_1 u_1. \quad (3.14)$$

这样我们就有

$$\begin{aligned} g_j^{n-1} - g_{j-1}^{n-1} &= g(x_j, Q_j^{n-1}) - g(x_{j-1}, Q_j^{n-1}) + g(x_{j-1}, Q_j^{n-1}) - g(x_{j-1}, Q_{j-1}^{n-1}) \\ &= g_x(\hat{x}_j, Q_j^{n-1}) \Delta x + g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^{n-1})(Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}) \end{aligned}$$

这里以及下面使用的记号 \hat{z}_j 表示在 z_{j-1} 和 z_j 之间的某个值, z 代表函数 x 或 Q . 对于 $2 \leq j \leq N$, 由 $\alpha < 1$ 和 $g_Q(x, Q) \leq 0$ 我们得到

$$-g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^{n-1})(Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}) = -\frac{1}{2} g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^{n-1})(\alpha - 1)(w_j u_j^{n-1} + w_{j-1} u_{j-1}^{n-1}) \Delta x \leq 0,$$

以及

$$-g_Q(x_0, \hat{Q}_1^{n-1})(Q_1^{n-1} - Q_0^{n-1}) = -g_Q(x_0, \hat{Q}_1^{n-1})(\alpha - 1)\omega_1 u_1^{n-1} \Delta x \leq 0.$$

注意到 $j \geq 1$ 时有 $-B_j \leq \max_i (g_{i-1} - g_i)$, 我们立刻得到 $j \geq 1$ 时

$$|u_j^n| \leq \|u^{n-1}\|_\infty + \sup_D |g_x(x, Q)| \|u^{n-1}\|_\infty \Delta t \leq (1 + M_3 \Delta t) \|u^{n-1}\|_\infty.$$

综合 (3.10), 即有

$$\|u^n\|_\infty \leq \max\{e^{M_3 T} \|u^0\|_\infty, \frac{2}{\mu}(\omega_1 M_2 + C)\} \equiv M_4.$$

■

在证明格式的总变差稳定性之前, 我们先给出下面的结果。

引理 3.3. 存在正的常数 M_5 、 M_6 和 M_7 满足

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq N} |Q_j^n - Q_{j-1}^n| &\leq M_5 \Delta x, & \max_{1 \leq j \leq N} |g_j^n - g_{j-1}^n| &\leq M_5 \Delta x, \\ \max_{1 \leq j \leq N} |m_j^n - m_{j-1}^n| &\leq M_5 \Delta x, \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中 $1 \leq j \leq N$;

$$\begin{aligned} |g_{j+1}^n - 2g_j^n + g_{j-1}^n| &\leq M_6 \Delta x (\Delta x + |u_j^n - u_{j-1}^n| + |u_{j+1}^n - u_j^n|), & 1 \leq j \leq N-1, \\ |B_j^n - B_{j-1}^n| &\leq M_6 \Delta x (\Delta x + |u_j^n - u_{j-1}^n| + |u_{j+1}^n - u_j^n|), & 4 \leq j \leq N-2; \end{aligned} \quad (3.16)$$

以及

$$\begin{aligned} |Q_j^{n+1} - Q_j^n| &\leq M_7 TV(u^n) \Delta t + M_7 \Delta t, & |g_j^{n+1} - g_j^n| &\leq M_7 TV(u^n) \Delta t + M_7 \Delta t, \\ |\beta_j^{n+1} - \beta_j^n| &\leq M_7 TV(u^n) \Delta t + M_7 \Delta t, \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中 $0 \leq j \leq N$ 。

证明: 对于 $2 \leq j \leq N$, 由 (3.13) 我们有

$$|Q_j^n - Q_{j-1}^n| = \left| \frac{1}{2}(\alpha - 1)(w_j u_j^n + w_{j-1} u_{j-1}^n) \right| \Delta x \leq \|w\|_\infty \|u^n\|_\infty \Delta x \leq M_3 M_4 \Delta x,$$

由 (3.14) 可知当 $j = 1$ 时也同样成立。这样我们就有

$$\begin{aligned} |g_j^n - g_{j-1}^n| &= |g(x_j, Q_j^n) - g(x_{j-1}, Q_j^n) + g(x_{j-1}, Q_j^n) - g(x_{j-1}, Q_{j-1}^n)| \\ &\leq |g_x(\hat{x}_j, Q_j^n)| \Delta x + |g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j)| |Q_j^n - Q_{j-1}^n| \end{aligned}$$

$$\leq M_3\Delta x + M_3(M_3M_4\Delta x) = M_3(1 + M_3M_4)\Delta x,$$

$$\begin{aligned} |m_j^n - m_{j-1}^n| &= |m(x_j, Q_j^n) - m(x_{j-1}, Q_j^n) + m(x_{j-1}, Q_j^n) - m(x_{j-1}, Q_{j-1}^n)| \\ &\leq |m_x(\hat{x}_j, Q_j^n)|\Delta x + |m_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j)| |Q_j^n - Q_{j-1}^n| \\ &\leq M_3\Delta x + M_3(M_3M_4\Delta x) = M_3(1 + M_3M_4)\Delta x, \end{aligned}$$

这样我们就证明了 (3.15), 其中

$$M_5 = \max(M_3M_4, M_3(1 + M_3M_4)).$$

对于 (3.16), 当 $4 \leq j \leq N - 2$ 时容易推得

$$\begin{aligned} |B_j^n - B_{j-1}^n| &= \left| \frac{1}{2}(g_{j+1}^n - 2g_j^n + g_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(g_j^n - 2g_{j-1}^n + g_{j-2}^n) \right| \\ &\leq \max_i |g_{i+1}^n - 2g_i^n + g_{i-1}^n|, \end{aligned}$$

这样我们就只需证明 (3.16) 的第一个不等式, 应用 (3.13), 对于 $1 \leq j \leq N - 1$ 时我们有

$$\begin{aligned} |g_{j+1}^n - 2g_j^n + g_{j-1}^n| &= |(g_{j+1}^n - g_j^n) - (g_j^n - g_{j-1}^n)| \\ &= \left| \Delta_x \left(g_x(\hat{x}_j, Q_j^n)\Delta x + g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n)(Q_j^n - Q_{j-1}^n) \right) \right| \\ &\leq |g_x(\hat{x}_{j+1}, Q_{j+1}^n) - g_x(\hat{x}_j, Q_j^n)|\Delta x \\ &\quad + |g_Q(x_j, \hat{Q}_{j+1}^n)w_{j+1}u_{j+1}^n - g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n)w_ju_j^n| \frac{(1-\alpha)}{2} \Delta x \\ &\quad + |g_Q(x_j, \hat{Q}_{j+1}^n)w_ju_j^n - g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n)w_{j-1}u_{j-1}^n| \frac{(1-\alpha)}{2} \Delta x \\ &= I + II + III, \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} I &= |g_x(\hat{x}_{j+1}, Q_{j+1}^n) - g_x(\hat{x}_j, Q_j^n)|\Delta x \\ &= |g_{xx}(\bar{x}_{j+1}, Q_{j+1}^n)(\hat{x}_{j+1} - \hat{x}_j) + g_{xQ}(\hat{x}_j, \bar{Q}_{j+1}^n)(Q_{j+1}^n - Q_j^n)|\Delta x \\ &\leq 2M_3\Delta x^2 + M_3M_5\Delta x^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II &= \left| g_Q(x_j, \hat{Q}_{j+1}^n)w_{j+1}u_{j+1}^n - g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n)w_ju_j^n \right| \frac{(1-\alpha)}{2} \Delta x \\ &= \left| (g_Q(x_j, \hat{Q}_{j+1}^n) - g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n))w_{j+1}u_{j+1}^n + g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n)u_{j+1}^n(w_{j+1} - w_j) \right. \\ &\quad \left. + g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n)w_j(u_{j+1}^n - u_j^n) \right| \frac{(1-\alpha)}{2} \Delta x \\ &\leq \frac{1}{2} \left| g_{Qx}(\hat{x}_j, \hat{Q}_{j+1}^n)\Delta x + g_{QQ}(x_{j-1}, \bar{Q}_{j+1}^n)(\hat{Q}_{j+1}^n - \hat{Q}_j^n) \right| \|w\|_\infty \|u^n\|_\infty \Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{M_3}{2} \|u^n\|_\infty \|w_x\|_\infty \Delta x^2 + \frac{M_3}{2} \|w\|_\infty |u_{j+1}^n - u_j^n| \Delta x \\
\leq & \frac{M_3^2}{2} M_4 \Delta x^2 + \frac{M_3^2 M_4}{2} \Delta x (2M_5 \Delta x) + \frac{M_3^2 M_4}{2} \Delta x^2 + \frac{M_3^2}{2} |u_{j+1}^n - u_j^n| \Delta x \\
\leq & M_3^2 M_4 (1 + M_5) \Delta x^2 + \frac{M_3^2}{2} \Delta x |u_{j+1}^n - u_j^n|;
\end{aligned}$$

类似地, 我们有

$$\begin{aligned}
III & = \left| g_Q(x_j, \hat{Q}_{j+1}^n) w_j u_j^n - g_Q(x_{j-1}, \hat{Q}_j^n) w_{j-1} u_{j-1}^n \right| \frac{(1-\alpha)}{2} \Delta x \\
& \leq M_3^2 M_4 (1 + M_5) \Delta x^2 + \frac{M_3^2}{2} \Delta x |u_j^n - u_{j-1}^n|.
\end{aligned}$$

这样我们就证明了 (3.16), 其中

$$M_6 = \max \left(M_3 (2 + M_5 + 2M_3 M_4 + 2M_3 M_4 M_5), \frac{M_3^2}{2} \right).$$

对于 (3.17), 当 $0 \leq j \leq N$ 时根据 (3.6) 中 Q_j 定义我们有

$$|Q_j^{n+1} - Q_j^n| \leq \frac{3}{2} \sum_{i=1}^N |u_i^{n+1} - u_i^n| w_i \Delta x \leq \frac{3}{2} M_3 \sum_{i=1}^N |u_i^{n+1} - u_i^n| \Delta x.$$

对 $1 \leq i \leq N$ 时, 由 (3.8) 以及 A_i^n 和 B_i^n 的定义我们得到

$$\begin{aligned}
|u_i^{n+1} - u_i^n| & = \left| -\lambda A_i^n u_i^n + \lambda (A_i^n - B_i^n) u_{i-1}^n - m_i^n u_i^n \Delta t \right| \\
& \leq \lambda |A_i^n| |u_i^n - u_{i-1}^n| + \lambda |B_i^n| |u_{i-1}^n| + \|m^n\|_\infty \|u^n\|_\infty \Delta t \\
& \leq 2\lambda \sup_D |g(x, Q)| |u_i^n - u_{i-1}^n| + \lambda M_4 \max_k |g_k^n - g_{k-1}^n| + M_3 M_4 \Delta t \\
& \leq 2\lambda M_3 |u_i^n - u_{i-1}^n| + M_4 M_5 \Delta t + M_3 M_4 \Delta t. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

这样我们就有

$$\begin{aligned}
|Q_j^{n+1} - Q_j^n| & \leq \frac{3}{2} M_3 \sum_{i=1}^N (2\lambda M_3 |u_i^n - u_{i-1}^n| + M_4 M_5 \Delta t + M_3 M_4 \Delta t) \Delta x \\
& = 3M_3^2 TV(u^n) \Delta t + \frac{3}{2} M_3 M_4 (M_3 + M_5) L \Delta t,
\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
|g_j^{n+1} - g_j^n| & = |g(x_j, Q_j^{n+1}) - g(x_j, Q_j^n)| \\
& = |g_Q(x_j, \hat{Q}_j)| |Q_j^{n+1} - Q_j^n| \leq M_3 |Q_j^{n+1} - Q_j^n| \\
& \leq 3M_3^2 TV(u^n) \Delta t + \frac{3}{2} M_3^2 M_4 (M_3 + M_5) L \Delta t,
\end{aligned}$$

$$|\beta_j^{n+1} - \beta_j^n| = |\beta(x_j, Q_j^{n+1}) - \beta(x_j, Q_j^n)|$$

$$\begin{aligned}
&= |\beta_Q(x_j, \tilde{Q}_j)| |Q_j^{n+1} - Q_j^n| \leq M_3 |Q_j^{n+1} - Q_j^n| \\
&\leq 3M_3^3 TV(u^n) \Delta t + \frac{3}{2} M_3^2 M_4 (M_3 + M_5) L \Delta t.
\end{aligned}$$

于是我们便证明了 (3.17), 其中

$$M_7 = \max \left(3M_3^2, 3M_3^3, \frac{3}{2} M_3 M_4 (M_3 + M_5) L, \frac{3}{2} M_3^2 M_4 (M_3 + M_5) L \right).$$

■

现在我们可以证明二阶格式的总变差稳定性了。

命题 3.4. 当 $t^n \leq T$ 时, $TV(u^n)$ 有界。

证明: 首先我们改写格式 (3.8) 如下

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda A_j^n (u_j^n - u_{j-1}^n) - \lambda B_j^n u_{j-1}^n - \Delta t m_j^n u_j^n, \quad j \geq 1.$$

这样我们便有

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= [(1 - \lambda A_{j+1}^n) (u_{j+1}^n - u_j^n) + \lambda (A_j^n - B_j^n) (u_j^n - u_{j-1}^n)] \\
&\quad + [-\lambda u_j^n (B_{j+1}^n - B_j^n)] + [-\Delta t (m_{j+1}^n u_{j+1}^n - m_j^n u_j^n)] \\
&= D_j^n + E_j^n + F_j^n, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

从而有

$$TV(u^{n+1}) = \sum_{j=0}^{N-1} |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq \sum_{j=1}^{N-1} |D_j^n| + \sum_{j=1}^{N-1} |E_j^n| + \sum_{j=1}^{N-1} |F_j^n| + |u_1^{n+1} - u_0^{n+1}|.$$

现在我们每项分开分析, 首先我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N-1} |D_j^n| &\leq \sum_{j=1}^{N-1} (1 - \lambda A_{j+1}^n) |u_{j+1}^n - u_j^n| + \lambda (A_j^n - B_j^n) |u_j^n - u_{j-1}^n| \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} |u_{j+1}^n - u_j^n| - \lambda \sum_{j=1}^{N-1} B_j^n |u_j^n - u_{j-1}^n| + \lambda g_1^n |u_1^n - u_0^n| - \lambda g_N^n |u_N^n - u_{N-1}^n| \\
&\leq \sum_{j=1}^{N-1} |u_{j+1}^n - u_j^n| + M_5 \Delta t TV(u^n) + \lambda g_1^n |u_1^n - u_0^n|,
\end{aligned}$$

其中第一个不等式我们应用了 (3.11) 和 (3.12), 最后一个不等式我们应用了引理 3.3 中的结论

$$|B_j| \leq \max_i |g_i - g_{i-1}|, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (3.19)$$

和 $g(x_N, Q) = 0$ 。再应用引理 3.3 以及 (3.19)，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} |E_j^n| &\leq \sum_{j=4}^{N-2} \lambda |B_{j+1}^n - B_j^n| |u_j^n| + \sum_{j=1,2,3,N-1} \lambda |B_{j+1}^n - B_j^n| |u_j^n| \\ &\leq M_4 M_6 \Delta t \left(\sum_{j=4}^{N-2} \Delta x + \sum_{j=4}^{N-2} (|u_{j+2}^n - u_{j+1}^n| + |u_{j+1}^n - u_j^n|) \right) + 8\lambda M_4 \|B^n\|_\infty \\ &\leq M_4 M_6 L \Delta t + 2M_4 M_6 \Delta t TV(u^n) + 8M_4 M_5 \Delta t. \end{aligned}$$

其中 F_j^n 项估计如下

$$\begin{aligned} |F_j^n| &= \Delta t |m_{j+1}^n u_{j+1}^n - m_j^n u_{j+1}^n + m_j^n u_{j+1}^n - m_j^n u_j^n| \\ &\leq M_3 M_4 \Delta t \Delta x + M_3 |u_{j+1}^n - u_j^n| \Delta t. \end{aligned}$$

这样我们就有

$$\sum_{j=1}^{N-1} |F_j^n| \leq M_3 M_4 L \Delta t + M_3 \Delta t TV(u^n).$$

令

$$M_8 = \max\{M_4((M_3 + M_6)L + 8M_5), M_3 + M_5 + 2M_4 M_6\},$$

我们有

$$TV(u^{n+1}) \leq M_8 \Delta t + M_8 \Delta t TV(u^n) + \sum_{j=1}^{N-1} |u_j^n - u_{j-1}^n| + \lambda g_1^n |u_1^n - u_0^n| + |u_1^{n+1} - u_0^{n+1}|.$$

接下来我们讨论 $|u_1^{n+1} - u_0^{n+1}|$ ，这个边界项有如下形式

$$\begin{aligned} |u_1^{n+1} - u_0^{n+1}| &= |(1 - \lambda g_1^n - \Delta t m_1^n) u_1^n + \lambda g_0^n u_0^n - u_0^{n+1}| \\ &= |(1 - \lambda g_1^n)(u_1^n - u_0^n) - m_1^n u_1^n \Delta t - \lambda(g_1^n - g_0^n) u_0^n - (u_0^{n+1} - u_0^n)| \\ &\leq (1 - \lambda g_1^n) |u_1^n - u_0^n| + M_3 M_4 \Delta t + M_5 M_4 \Delta t + |u_0^{n+1} - u_0^n|. \end{aligned}$$

这样我们有

$$TV(u^{n+1}) \leq M_9 \Delta t + M_9 \Delta t TV(u^n) + TV(u^n) + |u_0^{n+1} - u_0^n|,$$

其中

$$M_9 = M_8 + M_4(M_3 + M_5).$$

最后我们来估计 $|u_0^{n+1} - u_0^n|$ ，由 (3.5) 我们有

$$\begin{aligned} g_0^{n+1} u_0^{n+1} - g_0^n u_0^n &= g_0^{n+1} (u_0^{n+1} - u_0^n) + (g_0^{n+1} - g_0^n) u_0^n \\ &= C^{n+1} - C^n + \sum_{j=0}^N (\beta_j^{n+1} u_j^{n+1} - \beta_j^n u_j^n) \Delta x \end{aligned}$$

$$= C^{n+1} - C^n + \sum_{j=0}^N (\beta_j^{n+1}(u_j^{n+1} - u_j^n) + (\beta_j^{n+1} - \beta_j^n)u_j^n) \Delta x.$$

应用 (3.18) 与引理 3.2 并改写上面等式, 我们得到

$$\begin{aligned} & \left| \left(g_0^{n+1} - \frac{1}{2} \beta_0^{n+1} \Delta x \right) (u_0^{n+1} - u_0^n) \right| \\ & \leq |C^{n+1} - C^n| + |g_0^{n+1} - g_0^n| u_0^n + \frac{1}{2} u_0^n \Delta x |\beta_0^{n+1} - \beta_0^n| \\ & \quad + \sum_{j=1}^N (\beta_j^{n+1} |u_j^{n+1} - u_j^n| + |\beta_j^{n+1} - \beta_j^n| u_j^n) \Delta x \\ & \leq M_3 \Delta t + M_4 M_7 \Delta t (1 + TV(u^n)) + \frac{1}{2} M_4 M_7 \Delta x \Delta t (1 + TV(u^n)) \\ & \quad + M_3 \sum_{j=1}^N (2\lambda M_3 |u_j^n - u_{j-1}^n| + M_4 (M_3 + M_5) \Delta t) \Delta x + M_4 M_7 L \Delta t (1 + TV(u^n)) \\ & \leq (M_4 M_7 (2 + L) + 2M_3^2) \Delta t TV(u^n) + (M_3 + M_4 M_7 (2 + L) + M_3 M_4 (M_3 + M_5) L) \Delta t, \end{aligned}$$

在最后一个不等式中我们假设了 $\Delta x \leq 2$. 由 (3.9) 有 $g_0^{n+1} \geq \mu > 0$, 从而当 $\Delta x \leq \frac{\mu}{M_3}$ 时, 我们有 $g_0^{n+1} - \frac{1}{2} \beta_0^{n+1} \Delta x \geq \frac{\mu}{2} > 0$, 这样即有

$$|u_0^{n+1} - u_0^n| \leq M_{10} TV(u^n) \Delta t + M_{10} \Delta t,$$

其中

$$M_{10} = \frac{1}{\mu} \max (M_4 M_7 (2 + L) + 2M_3^2, M_3 + M_4 M_7 (2 + L) + M_3 M_4 (M_3 + M_5) L).$$

现在令 $M_{11} = M_9 + M_{10}$, 我们就得到了

$$TV(u^{n+1}) \leq (1 + M_{11} \Delta t) TV(u^n) + M_{11} \Delta t,$$

从而推出 $TV(u^n)$ 为有界的. ■

下面我们证明格式关于时间 t 的 Lipschitz 稳定性.

命题 3.5. 对任意的 $q > p$, 存在一个正的常数 M 满足

$$\sum_{j=1}^N \left| \frac{u_j^q - u_j^p}{\Delta t} \right| \Delta x \leq M(q - p).$$

证明: 应用 (3.8)、(3.19) 以及 A_j^n 和 B_j^n 的定义, 我们有

$$\sum_{j=1}^N \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right| \Delta x = \sum_{j=1}^N \left| \left(\frac{B_j^n}{\Delta x} + m_j^n \right) u_j^n + (A_j^n - B_j^n) D^-(u_j^n) \right| \Delta x$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j=1}^N \max_i |g_i^n - g_{i-1}^n| u_j^n + M_3 \sum_{j=1}^N u_j^n \Delta x + 3M_3 \sum_{j=1}^N |u_j^n - u_{j-1}^n| \\ &\leq M_4 M_5 L + M_3 M_4 L + 3M_3 TV(u^n) \leq M. \end{aligned}$$

从而有

$$\sum_{j=1}^N \left| \frac{u_j^q - u_j^p}{\Delta t} \right| \Delta x \leq \sum_{n=p}^q \sum_{j=1}^N \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right| \Delta x \leq M(q-p).$$

■

类似上一章的证明, 我们构造函数族 $\{U_{\Delta x, \Delta t}\}$ 如下

$$U_{\Delta x, \Delta t}(x, t) = u_j^n$$

其中 $x \in [x_{j-1}, x_j], t \in [t^{n-1}, t^n], j = 1, \dots, N$ 及 $n = 1, \dots, l$, 这样我们就得到了下面的命题, 由于证明与上一章的命题 2.6 相同, 在此略去不提。

命题 3.6. 在保证本章前面各命题成立的时间约束下, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 的时候, 数值解序列收敛到模型方程 (3.1) 在 $BV([0, L] \times [0, T])$ 中的唯一解 $u(x, t)$ 。

最后需要指出的是前面我们给出的格式 (3.3) 在空间上是二阶精度的但在时间上是一阶精度的, 对此我们使用了在计算双曲守恒律型方程上非常有效、应用广泛的非线性稳定 Runge-Kutta 型时间离散方法。该方法首先在 [77] 中由 Shu 于 1988 年提出, 该方法被称为总变差不增 (TVD: Total-Variation-Diminishing) Runge-Kutta 方法。这种方法在 [81, 82] 中由 Shu 和 Osher 在实现双曲型守恒律方程的本质无震荡 (ENO: essentially non-oscillatory) 格式中进一步被研究。Gottlieb 和 Shu 在 1998 年于 [36] 中对 Runge-Kutta 型时间离散方法进行了全面的分析与研究, 在 [37] 中将该方法称为强稳定 Runge-Kutta 型时间离散方法。

TVD Runge-Kutta 型时间离散方法实际上是欧拉前差单步格式的凸线性组合, 如果在某种半模意义下 (例如总变差模、最大模、熵条件等) 欧拉前差格式是稳定的, 则 Runge-Kutta 型方法仍然能够保持这种半模意义下的强稳定性。因此只需证明了欧拉前差格式的非线性稳定性, 即可自动得到 Runge-Kutta 型时间离散方法的非线性稳定性。在此我们使用 [81] 中二阶精度的 TVD Runge-Kutta 时间离散方法以保证格式在时间上的二阶精度。

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t L(u^n); \quad u^{n+1} = \frac{1}{2} (u^n + u^{(1)} + \Delta t L(u^{(1)})) \quad (3.20)$$

其中 L 为空间算子。这就保证了格式在时间和空间上都能够达到二阶精度, 并且仍然能够保持格式 (3.3) 的稳定性和收敛性, 参见 [36, 37]。

3.3 数值算例

本节我们给出了几个数值算例来验证前面所给出的格式的良好性质。首先我们选取 [5] 中的例子来应用我们的格式：选取初值条件 $u^0(x) = -x^2 + x + 1$ ，选取 (3.1) 和 (3.2) 中的各个系数及函数为 $L = 1$ 、 $\alpha = 0.5$ 、 $w(x) = 1$ 、 $g(x, Q) = (1 - x)(5 - x + x^2/2 - Q)$ 、 $m(x, Q) = 4 + 2Q + (1 - x)^2/2$ 以及 $\beta(x, Q) = (1 + x)(2 - Q)$ 。需要指出的是我们选取这个例子是为了较好的验证我们前面所构造格式的精度与高分辨率性质，而由前面我们的证明可以知道，对于所有满足假设 H1-H6 的模型方程 (3.1)，我们的格式都是稳定且收敛的。

基于局部截断误差分析，我们构造的二阶格式在局部小区间做一些微调则更为精确，将第二个小区间 $x_2 - x_1$ 的区间长度从 Δx 改为 $\frac{3}{2}\Delta x$ ，倒数第二个小区间 $x_{N-1} - x_{N-2}$ 的区间长度从 Δx 改为 $\frac{1}{2}\Delta x$ （并不改变实际网格划分，仅仅在应用格式时改写）。由于我们前面命题的证明并不依赖于均匀网格，所以这样的微调并不会影响格式的稳定性与收敛性。

首先通过计算间断解的情况来验证我们的格式不会引起振荡。为了达到这个目的，我们取 $C(t) = 3$ ，这样在原点处边界点值与初值条件不相容，从而导致模型方程的解包含从左向右传播的间断部分，直到该间断部分向右传播至右边界外。在图 3.1 中，我们展示了方程解随着时间演变直至 $t = 2$ 的过程，在这个过程中可以看到间断部分从左至右慢慢传播至右边界外。在图 3.2 中，我们选取 $t = 0.5$ ，此时解仍然包含间断部分，我们在 $N = 100$ 的均匀网格上分别用第二章和本章构造的一阶和二阶格式计算方程数值解并与参照解对比来验证我们格式的良好性质，其中参照解由二阶格式在 $N = 2000$ 的均匀网格计算而得。在时间步长上我们选取 $\Delta t_n = 0.6\Delta x / \|g^n(x, Q) + m^n(x, Q)\Delta x\|_\infty$ 为一阶格式第 n 层时间步长， $\Delta t_n = 0.6\Delta x / \|\frac{3}{2}g^n(x, Q) + m^n(x, Q)\Delta x\|_\infty$ 为二阶格式第 n 层时间步长，以保证格式条件 (2.7) 以及 (3.11) 成立。

通过图 3.2 我们可以清楚地看到，两个格式的数值解在间断部分都没有产生数值振荡，间断部分处二阶格式在不引入虚假数值震荡的同时还可以得到比一阶格式好得多的图形，从而验证了二阶格式的高分辨率性质。当 $t \geq 2$ 时，随着时间的增大解的图像变化地越来越缓慢，在图 3.3 中我们给出了这个例子在较大时间 $t = 20$ 的数值稳定态，可以发现一阶与二阶格式所算出的图形几乎没有区别。

接下来我们验证一阶和二阶格式对于光滑解的情况可以达到设定的精度。我们选取 $\beta(x, Q) = 2 + Q$ 、 $m(x, Q) = 1 + Q$ 、 $g(x, Q, t) = gg(t)e^x + 2 + \frac{Q}{2} + \frac{\alpha - e^{-1}}{2}e^t$ 、 $gg(t) = -2e^{-1} + \frac{\alpha - e^{-2t}}{2} + \frac{1}{2}\alpha e^{-2+t} - \alpha e^{-1+t}$ 、 $L = 1$ 、 $\omega(x) = 1$ 、 $\alpha = 0.5$ 、初值条件 $u^0(x) = e^{-x}$ 以及 $C(t) = 0$ ，这样即可保证方程 (3.1) 有一个光滑的准确解 $u(x, t) = e^{t-x}$ 。在图 3.4 中我们给出了 $T = 0.5$ 时刻准确解的图像与二阶格式算出的数值解对照图，在表 3.1 中，我们给出了 $T = 0.5$ 时刻一阶与二阶格式的 L^1 模误差及精度阶。

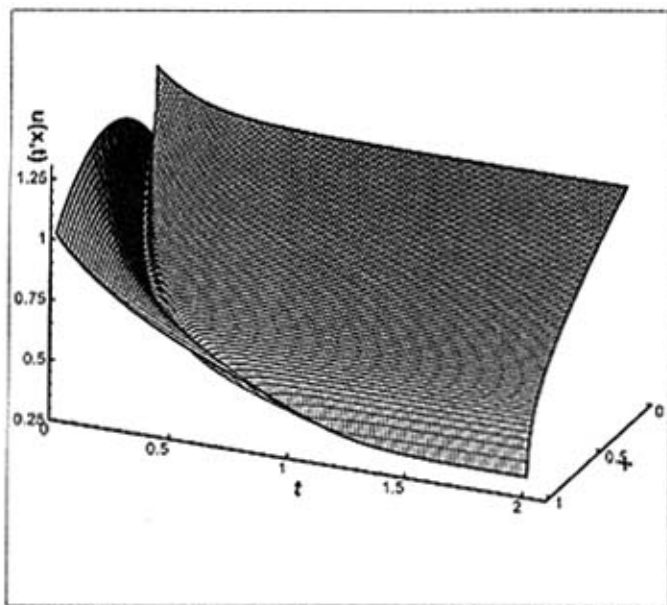


图 3.1: 时间 $t=0$ 至 $t=2$ 时方程解演变图形。

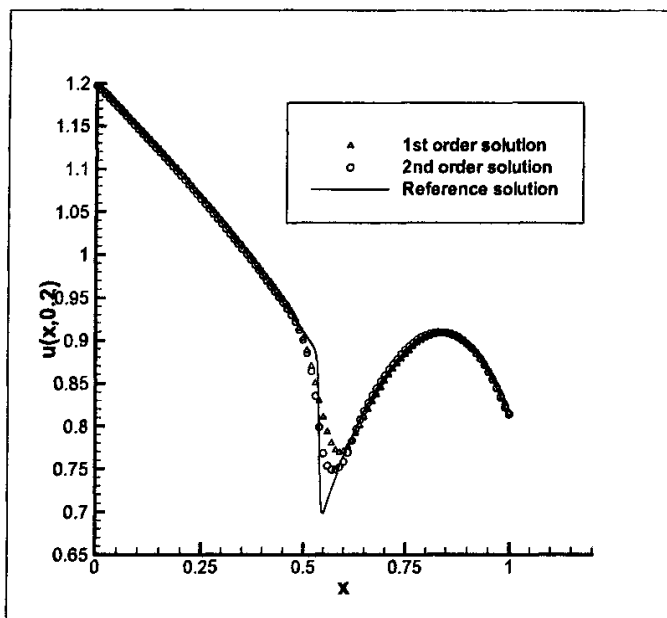


图 3.2: 在 $N=100$ 的均匀网格上一阶格式(三角)与二阶格式(圆)算出的数值解图像与 $N=2,000$ 的均匀网格上二阶格式算出的参照解(实线)对比图。

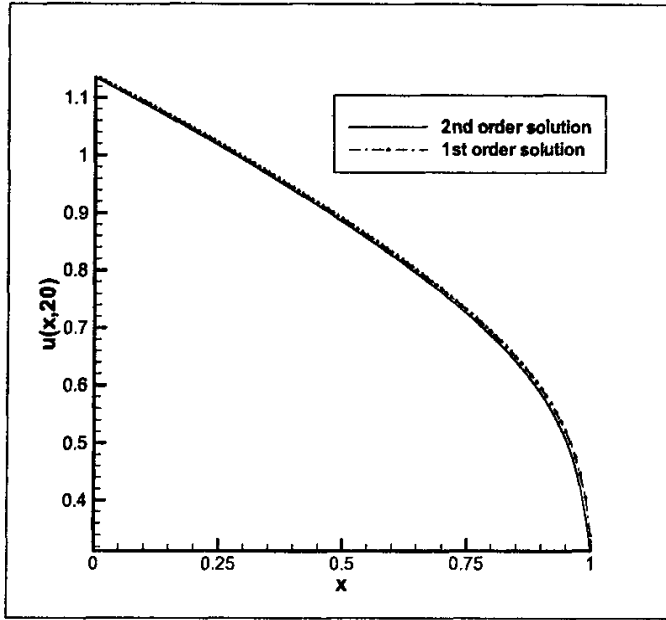


图 3.3: 在 $N = 100$ 的均匀网格上算出的 $t = 20$ 时解的稳定态图形, 其中虚线为一阶格式, 实线为二阶格式。

表 3.1: 一阶与二阶格式在格点数为 N 的均匀网格上数值解的 L^1 模误差与精度阶。

N	一阶格式		二阶格式	
	L^1 误差	精度阶	L^1 误差	精度阶
10	0.49E-01		0.30E-01	
20	0.23E-01	1.07	0.77E-02	1.97
40	0.11E-01	1.03	0.20E-02	1.97
80	0.56E-02	1.02	0.50E-03	1.98
160	0.28E-02	1.01	0.13E-03	1.99
320	0.14E-02	1.01	0.31E-04	1.99

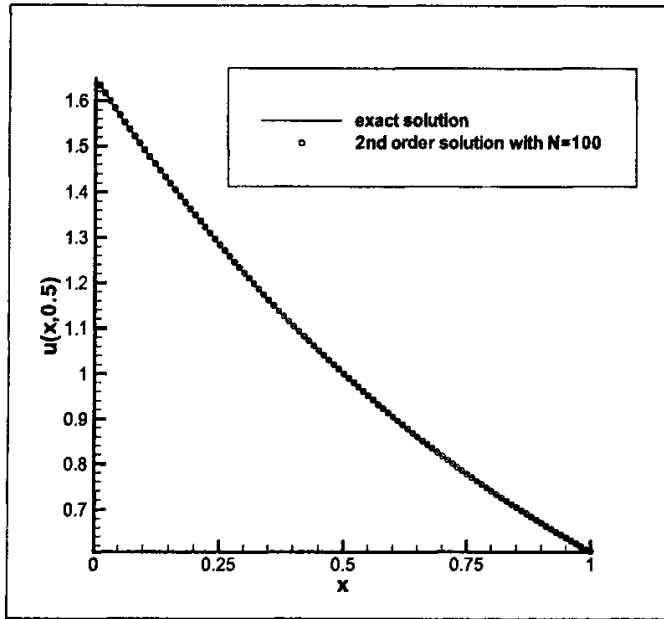


图 3.4: 在 $N = 100$ 的均匀网格上使用二阶高分辨率格式算出的数值解 (圆) 与准确解 (实线) 的对照图。

第四章 高精度 WENO格式

在前两章我们针对生物型体竞争模型方程构造了一阶迎风有限差分格式和二阶高分辨率有限差分格式，我们还分别证明了一阶格式与二阶格式的稳定性 and 收敛性。为了更好地提升格式的计算能力，本章我们将要构造一个五阶精度的有限差分 WENO 格式，首先在第一节我们将简要介绍 ENO (Essentially Non-Oscillatory) 方法 [42, 43, 44, 81, 82] 和 WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) 方法 [53, 64]，第二节将给出我们针对生物型体竞争模型所构造的五阶有限差分 WENO 格式，第三节我们给出了数值算例对比一阶与二阶格式来展示 WENO 格式的优越性质，通过数值算例我们可以看到，无论对于光滑解还是间断解情况 WENO 格式都可以用少得多的点来得到比一阶和二阶格式更好的结果，并且达到了设计的精度。在第三节的最后我们还将给出一个具有生物学意义的算例：食蚊鱼形体竞争模型 (*Gambusia affinis*)，我们将看到 WENO 格式可以在极为粗糙的网格上得到食蚊鱼长时间数量演变的高质量数值模拟解，而低阶格式则需要多得多的网格点来得到相近的结果，从而展现了高阶 WENO 格式在数值模拟此类问题上的优越性。

下面我们先来介绍一下 ENO 和 WENO 方法的背景知识。

4.1 双曲守恒律方程的 ENO 方法和 WENO 方法

ENO 方法首先由 Harten、Engquist、Osher 和 Chakravarthy 于 1987 年在其经典文章 [42] 中提出，ENO 方法是第一个成功做到对于分段光滑函数的插值逼近满足自相似性（格式系数与网格尺寸无关）、一致高阶精度并且本质无振荡（数值振荡的量级为 $O(\Delta x^k)$ ，其中 k 为格式的精度阶）的方法，而双曲守恒律方程的真解正是分段光滑函数。[42] 中的重构方法是 Harten 和 Osher 在 [43] 中二阶版本的自然推广，在 [42] 中 Harten、Engquist、Osher 和 Chakravarthy 研究了不同的度量解的局部光滑性质的方法，并且构造了一个模板选择流程，使得格式从包含一到两个格点单元的模板出发，每次根据两边候选单元上的牛顿差商大小来选择其中一个加入到该模板中去。尽管还有其他依据度量局部光滑性来选择模板的流程，例如比较所有候选模板上的最高阶差商大小然后取其中绝对值最小的那个模板，但是实践显示 [42] 给出的模板选择流程更为有效。

自从 Harten、Engquist、Osher 和 Chakravarthy 的开创性文章 [42] 发表以来，大批的学者对于 ENO 方法做了深入细致的研究并将 ENO 方法应用到多种领域上去。例如 [81][82] 中给出的方法结合了 TVD Runge-Kutta 时间离散方法与基于点值的 ENO 格式，极大地减小了多维空间问题的计算量。稍后在 [32] 和 [78] 中对模板选取流程做了改进，从而增强了格式的稳定性 and 精度；而在 [64] 和 [53] 中取代 ENO 格式中单一模板的选取，使用所有候选模板的凸组合构造了 WENO 格式。在 [49] 和 [20] 中给出了

建立在非多项式函数重构基础上的 ENO格式；在 [1]中给出了一般三角网格上的多维 ENO格式；在 [52][57] [69][70]中设计并应用了针对 Hamilton-Jacobi型方程的 ENO和 WENO格式；[34][47]中给出了二维一般三角网格上的 WENO格式；[11]中给出了非常高阶（7至13阶）的有限差分 WENO格式；[59][60][61]中给出了中心 WENO格式。更多对这两种格式的深入研究请见 [13][17][28][41][53][82][100]。

在具体的应用方面，ENO和 WENO方法在数值模拟激波湍流交互作用 [7][82] [83]；可压缩湍流的模拟 [56][83][96]；相对论流体动力学 [27]；模拟激波涡流交互作用及其他气体动力学问题 [19][30] [53]；混合格式和浅水方程 [62][63]；不可压缩流问题 [29][39]；粘弹性方程 [84]；半导体元件模拟 [32][50][51]；图像处理 [69][72][85]等等许多方面都取得了很大的成功。需要指出的是 ENO和 WENO方法解决的多数问题都是解同时含有激波与复杂光滑区域的问题，而对于此类问题，低阶格式往往会遭遇很大的困难，所以使用 ENO和 WENO等高阶稳定的格式解决这类问题是非常有效的。

至今对于 ENO和 WENO方法的研究与应用仍十分活跃，例如在 [73]中我们成功地将 WENO方法应用于生物型体竞争模型 (1.1)的数值模拟中，取得了极为优异的结果，显示出 ENO、WENO方法经久不衰的生命力。

作为下一节的预备知识，下面我们简要概括一下一般 WENO格式的构造流程，更为具体的介绍请参见舒其望教授编写的 [79]，WENO格式的构造主要包含下列几个步骤。我们先假设给定了一个格点单元 Δ （例如一维问题中的小区间，二维正交网格中的小矩形或者二维无结构网格中的小三角形区域）和在这个格点单元中一个给定的点 X^G 。

- 步骤 1: 我们定义一些格点模板 $S_j, j = 1, \dots, q$, Δ 包含在每一个这样的格点模板之中。我们记 $T = \bigcup_{j=1}^q S_j$ 为包含这些格点模板所含的所有小区间的大模板。
- 步骤 2: 在每一个格点模板 $S_j, j = 1, \dots, q$, 中我们都有一个低阶重构或插值函数 $p_j(x)$ （一般都为多项式），同时我们在大模板 T 中还有一个高阶重构或插值函数 $Q_j(x)$ （一般也是多项式）。重构函数具体的推导办法和公式请参见 [79]，其中 Table 2.1 给出了详细的 1至 7阶的重构系数。
- 步骤 3: 存在一些系数（线性权） $\gamma_1, \dots, \gamma_q$, 使得高阶重构或插值函数 $Q_j(x)$ 对于模板内所有可能给定的点均为相应低阶重构或插值函数 $p_j(x)$ 在该点值的线性组合

$$Q_j(x^G) = \sum_{j=1}^q \gamma_j p_j(x^G).$$

这些线性权取决于网格几何性质、给定点 X^G 以及重构或插值过程的特殊条件，但是与给定的解函数在这些模板上的值无关。

- 步骤 4: 在每一个格点模板 $S_j, j = 1, \dots, q$, 上计算光滑因子 (smoothness indicator) β_j , 光滑因子的作用主要是度量函数 $p_j(x)$ 在目标单元 Δ 上的光滑程度。在现有的 WENO 格式中都使用下面的光滑因子

$$\beta_j = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Delta} |\Delta|^{2|\alpha|-1} (D^\alpha p_j(x))^2 dx,$$

其中 $j = 1, \dots, q$, k 为多项式函数 $p_j(x)$ 的阶, $|\Delta|$ 在一维情况下为格点单元 Δ 的区间长度, $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$, 其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ 为 d 维空间中的的向量。积分因子 $|\Delta|^{2|\alpha|-1}$ 在二维和三维情况下有些不同。如果 $|\Delta|$ 在二维情况下代表格点单元 Δ 的面积, 在三维情况下代表格点单元 Δ 的体积, 则积分因子在二维情况下为 $|\Delta|^{|\alpha|-1}$, 三维情况下为 $|\Delta|^{\frac{3}{2}|\alpha|-1}$ 。积分因子的作用主要是使得光滑因子在空间度量下保持不变。

- 步骤 5: 根据步骤 4 中给出的光滑因子我们现在给出如下的非线性权

$$w_j = \frac{\tilde{w}_j}{\sum_j \tilde{w}_j}, \tag{4.1}$$

其中

$$\tilde{w}_j = \frac{\gamma_j}{(\epsilon + \beta_j)^2},$$

这里的 γ_j 为步骤 3 中给出的线性权, ϵ 为一个小正数以避免分母为零 (一般取作 10^{-6})。最终我们得到了 WENO 格式的数值流通量的近似或重构公式

$$R(x^G) = \sum_{j=1}^q w_j p_j(x^G).$$

需要指出的是上述步骤中的系数都与数值解的值无关, 而仅仅与网格性质有关, 这些系数包括步骤 3 中的线性权 γ_j , 步骤 2 中插值或重构多项式函数 $p_j(x)$ 的线性系数以及步骤 4 中计算光滑因子公式中的二次系数。

下面我们给出一个简单例子来帮助读者更好地理解 WENO 格式的构造流程。假设给定了一个均匀网格 $I_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ 和某函数 $u(x)$ 在这些格点单元上的单元平均值 (cell average) \bar{u}_i 。接下来我们在包含格点 $x_{i+1/2}$ 的单元 $\Delta = I_i$ 上通过包含五个邻近单元 $\{I_{i-2}, I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$ 的模板来构造 $x_{i+1/2}$ 格点上五阶精度的 WENO 流通量。

在上面的步骤 1 中, 我们选取下面的三个小模板

$$S_1 = I_{i-2}, I_{i-1}, I_i, \quad S_2 = I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, \quad S_3 = I_{i-1}, I_i, I_{i+1},$$

并记这三个小模板组成的大模板为

$$T = I_{i-2}, I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, I_{i+2}.$$

根据步骤 2 分别得到三个小模板上的二阶插值多项式 $p_j(x)$ 和大模板上的四阶插值多项式 $Q(x)$, 由 [79] 的重构流程和系数公式, 我们分别得到了关于 $u(x_{i+1/2})$ 在模板 S_1, S_2, S_3 上的三阶精度近似

$$\begin{aligned} p_1(x_{i+1/2}) &= \frac{1}{3}\bar{u}_{i-2} - \frac{7}{6}\bar{u}_{i-1} + \frac{11}{6}\bar{u}_i, \\ p_2(x_{i+1/2}) &= -\frac{1}{6}\bar{u}_{i-1} + \frac{5}{6}\bar{u}_i + \frac{1}{3}\bar{u}_{i+1}, \\ p_3(x_{i+1/2}) &= \frac{1}{3}\bar{u}_i + \frac{5}{6}\bar{u}_{i+1} - \frac{1}{6}\bar{u}_{i+2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

同样在大模板 T 上得到 $u(x_{i+1/2})$ 的五阶精度近似

$$Q(x_{i+1/2}) = \frac{1}{30}\bar{u}_{i-2} - \frac{13}{60}\bar{u}_{i-1} + \frac{47}{60}\bar{u}_i + \frac{9}{20}\bar{u}_{i+1} - \frac{1}{20}\bar{u}_{i+2}.$$

这样我们由步骤 3 得到了下面三个线性权

$$\gamma_1 = \frac{1}{10}, \quad \gamma_2 = \frac{3}{5}, \quad \gamma_3 = \frac{3}{10}.$$

从而我们有

$$Q(x_{i+1/2}) = \gamma_1 p_1(x_{i+1/2}) + \gamma_2 p_2(x_{i+1/2}) + \gamma_3 p_3(x_{i+1/2}).$$

综合上面得到的重构多项式, 再由步骤 4 中光滑因子的公式即可求出对于每个小模板 S_j 的光滑因子

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{13}{12}(\bar{u}_{i-2} - 2\bar{u}_{i-1} + \bar{u}_i)^2 + \frac{1}{4}(\bar{u}_{i-2} - 4\bar{u}_{i-1} + 3\bar{u}_i)^2 \\ \beta_2 &= \frac{13}{12}(\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_{i+1})^2 \\ \beta_3 &= \frac{13}{12}(\bar{u}_i - 2\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3\bar{u}_i - 4\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2})^2 \end{aligned}$$

最后根据以上的线性权和光滑因子即可由 (4.1) 计算出每个小模板上低阶流通量的非线性权 w_j (见步骤 5), 从而即可得到 $u(x_{i+1/2})$ 的五阶精度 WENO 流通量

$$R(x_{i+1/2}) = w_1 p_1(x_{i+1/2}) + w_2 p_2(x_{i+1/2}) + w_3 p_3(x_{i+1/2}).$$

4.2 五阶精度有限差分WENO格式的构造

本节我们针对下面的生物型体竞争模型方程构造了一个五阶精度的有限差分 WENO 格式

$$\begin{aligned} u_t + (g(x, Q(x, t)) u)_x + m(x, Q(x, t)) u &= 0, \quad (x, t) \in (0, L] \times (0, T] \\ g(0, Q(0, t)) u(0, t) &= C(t) + \int_0^L \beta(x, Q(x, t)) u(x, t) dx, \quad t \in (0, T] \quad (4.3) \\ u(x, 0) &= u^0(x), \quad x \in [0, L] \end{aligned}$$

$$Q(x, t) = \alpha \int_0^x \omega(\xi) u(\xi, t) d\xi + \int_x^L \omega(\xi) u(\xi, t) d\xi, \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (4.4)$$

方程中的各个系数及函数的意义都在前面章节中介绍过了, 这里不再赘述。尽管上一章我们构造的二阶高分辨率格式有着良好的性质, 我们仍然希望能够有一个更高性能、非线性稳定的高阶格式, 在解的光滑区域能够保证高精度的同时也能在间断部分得到锐利单调的图像。为此在本节我们根据计算流体力学和一般守恒律方程中取得成功的 WENO 格式 [53, 75, 79, 80] 并针对方程 (4.3) 的具体特点构造了五阶精度的有限差分 WENO 格式, 构造的主要难点在于方程中含有大量包含全局约束的系数及边界条件, 我们仔细地给出这些全局项和边界条件的近似公式以保证格式的精度。

如前面两章, 这里引述一下模型方程假设条件:

- (H1) $g(x, Q)$ 对 x 和 Q 均为二阶连续可导; 对所有的 $x \in [0, L]$ 都有 $g(x, Q) > 0$; $g(L, Q) = 0$; $g_Q(x, Q) \leq 0$ 。
- (H2) $m(x, Q)$ 对 x 和 Q 均非负连续可导。
- (H3) $\beta(x, Q)$ 对 x 和 Q 均非负连续可导, 并且存在常数 $\omega_1 > 0$ 满足 $\sup_{(x, Q) \in [0, L] \times [0, \infty)} \beta(x, Q) \leq \omega_1$ 。
- (H4) $w(x)$ 非负连续可导。
- (H5) $C(t)$ 非负连续可导。
- (H6) $u^0 \in BV[0, L]$ 且 $u^0(x) \geq 0$ 。

这里我们使用和前两章一样的各种数学记号, 假设空间区域 $[0, L]$ 被格点 $x_j: 0 \leq j \leq N$ 划分为 N 个小区间, 其中 $x_0 = 0, x_N = L$ 。设区间为均匀区间, 每个小区间的长度都记为 Δx , 则有 $x_j = j\Delta x$, 而对于光滑变化的非均匀网格我们的格式也可以用相似的办法构造。记时间步长为 Δt , 由于我们只需考虑单步时间离散的格式 (Runge-Kutta 方法), 所以我们仍然统一使用 Δt 代表第 n 个时间层的时间步长。记 u_j^n 和 Q_j^n 分别为 $u(x_j, t^n)$ 和 $Q(x_j, t^n)$ 的有限差分近似, 类似地, 我们记

$$g_j^n = g(x_j, Q_j^n), \quad \beta_j^n = \beta(x_j, Q_j^n), \quad m_j^n = m(x_j, Q_j^n), \quad \omega_j = \omega(x_j), \quad C^n = C(t^n)$$

定义格点函数 u^n 的 L^1 与 L^∞ 模为

$$\|u^n\|_1 = \sum_{j=1}^N |u_j^n| \Delta x, \quad \|u^n\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} |u_j^n|.$$

如前面两章一样, 在不引起误解的情况下我们省去上标 n .

现在我们针对模型方程 (4.3) 开始构造五阶精度的有限差分 WENO格式, 根据 [53, 75, 79] 中构造有限差分 WENO格式的方法, 我们选择了最常用的五阶 WENO格式, 当然其它精度阶的 WENO格式也可以通过类似的方法构造而得 (参见 [11]). 我们的半离散五阶有限差分 WENO格式定义如下

$$\frac{d}{dt} u_j + \frac{1}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}) + m_j u_j = 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (4.5)$$

其中五阶精度的数值流通量 $\hat{f}_{j+1/2}$ 定义为下面三阶精度流通量的加权平均组合

$$\hat{f}_{j+1/2} = w_1 \hat{f}_{j+1/2}^1 + w_2 \hat{f}_{j+1/2}^2 + w_3 \hat{f}_{j+1/2}^3, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

系数 w_1, w_2, w_3 称为非线性权。

上式中三个三阶精度的流通量 $\hat{f}_{j+1/2}^1, \hat{f}_{j+1/2}^2, \hat{f}_{j+1/2}^3$ 由文献 [53, 79] 中阐述的方法得到, 在计算区域中间的格点上其显式表达格式如下

$$\begin{cases} \hat{f}_{j+1/2}^1 = \frac{1}{3} f_{j-2} - \frac{7}{6} f_{j-1} + \frac{11}{6} f_j \\ \hat{f}_{j+1/2}^2 = -\frac{1}{6} f_{j-1} + \frac{5}{6} f_j + \frac{1}{3} f_{j+1} \\ \hat{f}_{j+1/2}^3 = \frac{1}{3} f_j + \frac{5}{6} f_{j+1} - \frac{1}{6} f_{j+2} \end{cases} \quad j = 2, \dots, N-2,$$

而最左边的两个点上的流通量为

$$\begin{cases} \hat{f}_{1/2}^1 = \frac{1}{3} f_0 + \frac{5}{6} f_1 - \frac{1}{6} f_2 \\ \hat{f}_{1/2}^2 = \frac{11}{6} f_1 - \frac{7}{6} f_2 + \frac{1}{3} f_3 \\ \hat{f}_{1/2}^3 = \frac{13}{3} f_2 - \frac{31}{6} f_3 + \frac{11}{6} f_4, \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{f}_{3/2}^1 = -\frac{1}{6} f_0 + \frac{5}{6} f_1 + \frac{1}{3} f_2 \\ \hat{f}_{3/2}^2 = \frac{1}{3} f_1 + \frac{5}{6} f_2 - \frac{1}{6} f_3 \\ \hat{f}_{3/2}^3 = \frac{11}{6} f_2 - \frac{7}{6} f_3 + \frac{1}{3} f_4. \end{cases}$$

类似地得到最右边的两个点上的流通量为

$$\begin{cases} \hat{f}_{N-1/2}^1 = \frac{11}{6} f_{N-4} - \frac{31}{6} f_{N-3} + \frac{13}{3} f_{N-2} \\ \hat{f}_{N-1/2}^2 = \frac{1}{3} f_{N-3} - \frac{7}{6} f_{N-2} + \frac{11}{6} f_{N-1} \\ \hat{f}_{N-1/2}^3 = -\frac{1}{6} f_{N-2} + \frac{5}{6} f_{N-1} + \frac{1}{3} f_N, \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{f}_{N+1/2}^1 = \frac{13}{3} f_{N-4} - \frac{67}{6} f_{N-3} + \frac{47}{6} f_{N-2} \\ \hat{f}_{N+1/2}^2 = \frac{11}{6} f_{N-3} - \frac{31}{6} f_{N-2} + \frac{13}{3} f_{N-1} \\ \hat{f}_{N+1/2}^3 = \frac{1}{3} f_{N-2} - \frac{7}{6} f_{N-1} + \frac{11}{6} f_N. \end{cases}$$

在上述公式中, $f_j = g_j u_j$ 均代表流通量函数 $g(x, Q(x, t)) u$ 在格点上的函数值 $f_j = g_j u_j$.

非线性权定义如下

$$w_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{s=1}^3 \alpha_s}, \quad \alpha_r = \frac{d_r}{(\varepsilon + \beta_r)^2}, \quad r = 1, 2, 3. \quad (4.6)$$

这里的 d_r 为保证格式五阶精度的线性权; ε 为用以保证分母不为零的一个很小的正数, 在我们的数值算例中都取为 $\varepsilon = 10^{-6}$; β_r 被称为光滑因子 (smoothness indicators), 其作用主要用来度量相关格点模板上重构函数的光滑程度。光滑因子在 WENO 格式中所起到的作用至关重要, 当函数 u^n 在格点模板比较光滑时, 光滑因子满足

$$\beta_r = O(\Delta x^2),$$

当函数 u^n 在格点模板上有间断部分时, 光滑因子满足

$$\beta_r = O(1).$$

这样光滑的格点模板上所得到的三阶数值流通量其非线性权就满足

$$w_r = O(1),$$

含有间断部分的格点模板上所得到的三阶数值流通量其非线性权满足

$$w_r = O(\Delta x^4).$$

由此我们可以看出光滑因子实际上起到一个自动放大最为光滑的格点模板权重的作用, 同时大大降低间断部分的模板权重, 从而可以最大程度上避免解的间断部分给格式带来数值震荡。由 [53] 我们给出光滑因子的具体表达式:

$$\beta_r = \sum_{\ell=1}^2 \Delta x^{2\ell-1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left(\frac{d^\ell}{dx^\ell} p_r(x) \right)^2 dx$$

其中 $p_r(x)$ 为得到三阶流通量 $\hat{f}_{j+1/2}^r$ 所用到的二次重构多项式。由于函数 $g(x, Q(x, t))$ 非负, 方程的风向由左向右, 为了计算 $x_{j+1/2}$ 处的数值流通量我们用到了偏左的区间 $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, 我们可以得到光滑因子的显式公式。对于 $1 \leq j \leq N-2$ 的情况, 我们有如下的光滑因子 β_r 和线性权 d_r 的公式

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{13}{12}(f_{j-2} - f_{j-1} + f_j)^2 + \frac{1}{4}(f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j)^2 \\ \beta_2 = \frac{13}{12}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})^2 + \frac{1}{4}(f_{j-1} - f_{j+1})^2 \\ \beta_3 = \frac{13}{12}(f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})^2 + \frac{1}{4}(3f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2 \end{cases}$$

$$d_1 = 1/10, \quad d_2 = 3/5, \quad d_3 = 3/10.$$

对于 $j = N - 1$, 我们有

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{10}{3}f_{N-4}^2 + \frac{61}{3}f_{N-3}^2 + \frac{22}{3}f_{N-2}^2 - \frac{49}{3}f_{N-4}f_{N-3} + \frac{29}{3}f_{N-4}f_{N-2} - \frac{73}{3}f_{N-3}f_{N-2} \\ \beta_2 = \frac{4}{3}f_{N-3}^2 + \frac{25}{3}f_{N-2}^2 + \frac{10}{3}f_{N-1}^2 - \frac{19}{3}f_{N-3}f_{N-2} + \frac{11}{3}f_{N-3}f_{N-1} - \frac{31}{3}f_{N-2}f_{N-1} \\ \beta_3 = \frac{4}{3}f_{N-2}^2 + \frac{13}{3}f_{N-1}^2 + \frac{4}{3}f_N^2 - \frac{13}{3}f_{N-2}f_{N-1} + \frac{5}{3}f_{N-2}f_N - \frac{13}{3}f_{N-1}f_N \end{cases}$$

$$d_1 = -3/110, \quad d_2 = 47/110, \quad d_3 = 3/5.$$

对于 $j = N$, 我们有

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{22}{3}f_{N-4}^2 + \frac{121}{3}f_{N-3}^2 + \frac{40}{3}f_{N-2}^2 - \frac{103}{3}f_{N-4}f_{N-3} + \frac{59}{3}f_{N-4}f_{N-2} - \frac{139}{3}f_{N-3}f_{N-2} \\ \beta_2 = \frac{10}{3}f_{N-3}^2 + \frac{61}{3}f_{N-2}^2 + \frac{22}{3}f_{N-1}^2 - \frac{49}{3}f_{N-3}f_{N-2} + \frac{29}{3}f_{N-3}f_{N-1} - \frac{73}{3}f_{N-2}f_{N-1} \\ \beta_3 = \frac{4}{3}f_{N-2}^2 + \frac{25}{3}f_{N-1}^2 + \frac{10}{3}f_N^2 - \frac{19}{3}f_{N-2}f_{N-1} + \frac{11}{3}f_{N-2}f_N - \frac{31}{3}f_{N-1}f_N \end{cases}$$

$$d_1 = 3/65, \quad d_2 = -417/1430, \quad d_3 = 137/110.$$

注意到 $j = N - 1$ 和 $j = N$ 的时候某些线性权为负数, 若不加处理直接采用将造成格式的不稳定, 对此我们采用 [75] 中所介绍的负权处理方法, 其主要的处理思想请参见附录 II.

对于左边界的两个点, 我们同样可以使用与右边界两个点相类似的光滑因子与非线性权, 但对于间断解的情况, 数值实验告诉我们这两个点上使用线性权的效果更好, 其原因主要是由于间断部分从左边界向右边界传播, 从而导致非线性权抹掉了从左边界传入的信息.

包含全局积分的边界条件由下面的五阶复合积分公式近似得到

$$g_0 u_0 = C + \sum_{j=0}^N \beta_j u_j \Delta x, \quad (4.7)$$

其中特殊积分符号定义如下

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_1}^{j_2} \beta_j &= \frac{251}{720} a_{j_1} + \frac{299}{240} a_{j_1+1} + \frac{211}{240} a_{j_1+2} + \frac{739}{720} a_{j_1+3} + \\ &\quad \frac{739}{720} a_{j_2-3} + \frac{211}{240} a_{j_2-2} + \frac{299}{240} a_{j_2-1} + \frac{251}{720} a_{j_2} + \sum_{j=j_1+4}^{j_2-4} a_j \end{aligned}$$

其中 $j_2 - j_1 \geq 7$. 除了 $j_2 - j_1 \leq 6$ 的区间以及左边第一个积分小区间, 环境影响因子同样也由上面的五阶复合积分公式近似得到, 其中第一个积分小区间由不含 u_0 点的五阶积分公式近似, $j_2 - j_1 \leq 6$ 的区间积分由其中每一个小区间的五阶积分公式相加而得. 记 $A = (\frac{55}{24}\omega_1 u_1 - \frac{59}{24}\omega_2 u_2 + \frac{37}{24}\omega_3 u_3 - \frac{9}{24}\omega_4 u_4)\Delta x$ 为 $\int_{x_0}^{x_1} \omega(x)u(x, t) dx$ 的五阶近似, 我们有

$$Q_j = A + \alpha \sum_{i=1}^j \omega_i u_i \Delta x + \sum_{i=j}^N \omega_i u_i \Delta x, \quad 8 \leq j \leq N - 7,$$

$$\begin{aligned}
Q_0 &= A + \sum_{i=1}^N \omega_i u_i \Delta x, & Q_1 &= \alpha A + \sum_{i=1}^N \omega_i u_i \Delta x, & Q_N &= \alpha Q_0, \\
Q_2 &= \alpha \Delta x \left(\frac{8}{3} \omega_1 u_1 - \frac{5}{3} \omega_2 u_2 + \frac{4}{3} \omega_3 u_3 - \frac{1}{3} \omega_4 u_4 \right) + \sum_{i=2}^N \omega_i u_i \Delta x, \\
Q_3 &= \alpha \Delta x \left(\frac{21}{8} \omega_1 u_1 - \frac{9}{8} \omega_2 u_2 + \frac{15}{8} \omega_3 u_3 - \frac{3}{8} \omega_4 u_4 \right) + \sum_{i=3}^N \omega_i u_i \Delta x, \\
Q_4 &= \alpha \Delta x \left(\frac{21}{8} \omega_1 u_1 - \frac{7}{6} \omega_2 u_2 + \frac{29}{12} \omega_3 u_3 + \frac{1}{6} \omega_4 u_4 - \frac{1}{24} \omega_5 u_5 \right) + \sum_{i=4}^N \omega_i u_i \Delta x, \\
Q_5 &= \alpha \Delta x \left(\frac{21}{8} \omega_1 u_1 - \frac{7}{6} \omega_2 u_2 + \frac{19}{8} \omega_3 u_3 + \frac{17}{24} \omega_4 u_4 + \frac{1}{2} \omega_5 u_5 - \frac{1}{24} \omega_6 u_6 \right) \\
&\quad + \sum_{i=5}^N \omega_i u_i \Delta x, \\
Q_6 &= \alpha \Delta x \left(\frac{21}{8} \omega_1 u_1 - \frac{7}{6} \omega_2 u_2 + \frac{19}{8} \omega_3 u_3 + \frac{2}{3} \omega_4 u_4 + \frac{25}{24} \omega_5 u_5 + \frac{1}{2} \omega_6 u_6 - \frac{1}{24} \omega_7 u_7 \right) \\
&\quad + \sum_{i=6}^N \omega_i u_i \Delta x, \\
Q_7 &= \alpha \Delta x \left(\frac{21}{8} \omega_1 u_1 - \frac{7}{6} \omega_2 u_2 + \frac{19}{8} \omega_3 u_3 + \frac{2}{3} \omega_4 u_4 + \omega_5 u_5 + \frac{25}{24} \omega_6 u_6 + \frac{1}{2} \omega_7 u_7 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{24} \omega_8 u_8 \right) + \sum_{i=7}^N \omega_i u_i \Delta x, \\
Q_{N-1} &= \Delta x \left(\frac{9}{24} \omega_N u_N + \frac{19}{24} \omega_{N-1} u_{N-1} - \frac{5}{24} \omega_{N-2} u_{N-2} + \frac{1}{24} \omega_{N-3} u_{N-3} \right) \\
&\quad + \alpha \left(A + \sum_{i=1}^{N-1} \omega_i u_i \Delta x \right), \\
Q_{N-2} &= \Delta x \left(\frac{1}{3} \omega_N u_N + \frac{4}{3} \omega_{N-1} u_{N-1} + \frac{1}{3} \omega_{N-2} u_{N-2} \right) + \alpha \left(A + \sum_{i=1}^{N-2} \omega_i u_i \Delta x \right), \\
Q_{N-3} &= \Delta x \left(\frac{1}{3} \omega_N u_N + \frac{31}{24} \omega_{N-1} u_{N-1} + \frac{7}{8} \omega_{N-2} u_{N-2} + \frac{13}{24} \omega_{N-3} u_{N-3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{24} \omega_{N-4} u_{N-4} \right) + \alpha \left(A + \sum_{i=1}^{N-3} \omega_i u_i \Delta x \right), \\
Q_{N-4} &= \Delta x \left(\frac{1}{3} \omega_N u_N + \frac{31}{24} \omega_{N-1} u_{N-1} + \frac{5}{6} \omega_{N-2} u_{N-2} + \frac{13}{12} \omega_{N-3} u_{N-3} + \frac{1}{2} \omega_{N-4} u_{N-4} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{24} \omega_{N-5} u_{N-5} \right) + \alpha \left(A + \sum_{i=1}^{N-4} \omega_i u_i \Delta x \right), \\
Q_{N-5} &= \Delta x \left(\frac{1}{3} \omega_N u_N + \frac{31}{24} \omega_{N-1} u_{N-1} + \frac{5}{6} \omega_{N-2} u_{N-2} + \frac{25}{24} \omega_{N-3} u_{N-3} + \frac{25}{24} \omega_{N-4} u_{N-4} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{24} \omega_{N-5} u_{N-5} \right) + \alpha \left(A + \sum_{i=1}^{N-5} \omega_i u_i \Delta x \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}\omega_{N-5}u_{N-5} - \frac{1}{24}\omega_{N-6}u_{N-6} \Big) + \alpha \left(A + \sum_{i=1}^{N-5} \omega_i u_i \Delta x \right), \\
Q_{N-6} = & \Delta x \left(\frac{1}{3}\omega_N u_N + \frac{31}{24}\omega_{N-1}u_{N-1} + \frac{5}{6}\omega_{N-2}u_{N-2} + \frac{25}{24}\omega_{N-3}u_{N-3} + \omega_{N-4}u_{N-4} \right. \\
& \left. + \frac{25}{24}\omega_{N-5}u_{N-5} + \frac{1}{2}\omega_{N-6}u_{N-6} - \frac{1}{24}\omega_{N-7}u_{N-7} \right) + \alpha \left(A + \sum_{i=1}^{N-6} \omega_i u_i \Delta x \right).
\end{aligned}$$

这样对于所有的 Q_j 的近似都能够保证是五阶精度的。初值条件为

$$u_j^0 = u^0(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

记 $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, 我们得到半离散格式 (4.5) 的欧拉向前时间离散形式如下

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n) - \Delta t m_j^n u_j^n, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.8)$$

这样 (4.8) 与边界条件 (4.7) 一起便描述了一个完整的显式的五阶精度有限差分 WENO 格式。为了在保持 WENO 格式非线性稳定性的同时也在时间上也同样得到高阶精度, 我们使用 [81] 以及 [36, 37] 中给出的 TVD (total variation diminishing) 高阶精度 Runge-Kutta 时间离散方法。如果我们记 (4.5) 为如下形式

$$\frac{d}{dt}u_j - L(u, t)_j = 0,$$

则我们在下一节所要使用的三阶 TVD Runge-Kutta 方法如 [81] 所述:

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n, t^n) \\
u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}(u^{(1)} + \Delta t L(u^{(1)}, t^n + \Delta t)) \\
u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}\left(u^{(2)} + \Delta t L\left(u^{(2)}, t^n + \frac{1}{2}\Delta t\right)\right).
\end{aligned} \quad (4.9)$$

显然, 此方法只是三个欧拉向前单步时间离散的凸线性组合, 从而不会给我们的格式增加任何的难度。

4.3 数值算例

本节我们给出一些数值算例来展示上一节构造的五阶 WENO 格式的良好性质, 时间上我们使用 (4.9) 三阶 TVD Runge-Kutta 方法离散, 并满足下面的 CFL 条件

$$\Delta t^n = 0.6\Delta x / \|g(x, Q^n) + m(x, Q^n)\Delta x\|_\infty.$$

在我们的第一个例子中, 我们取初值函数为 $u^0(x) = -x^2 + x + 1$, 取 (4.3) 和 (4.4) 中的系数和函数分别为 $L = 1$, $\alpha = 0.5$, $C(t) = 3$, $\omega(x) = 1$, $g(x, Q) = (1 -$

$x)(5 - x + x^2/2 - Q)$ 、 $m(x, Q) = 4 + 2Q + (1 - x)^2/2$ 以及 $\beta(x, Q) = (1 + x)(2 - Q)$ 。这样在解的左边界处边界点值与初值条件不相容，从而产生了从左边界开始至右边界传播的间断部分。在 $N = 100$ 的均匀网格上我们分别使用前面两章构造的一阶和二阶格式（或参见 [74]）以及本章构造的五阶 WENO格式来计算，其数值解图像参见图 4.1。从图中我们可以清楚地看到，在使用同样的网格点情况下，在解的间断部分五阶 WENO格式可以得到比一阶和二阶格式更为清晰锐利的图像，并且没有虚假数值震荡。

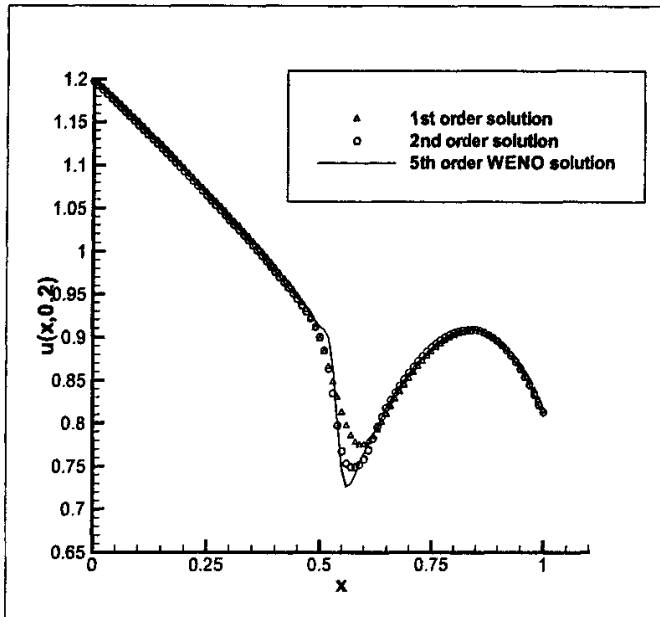


图 4.1: 在 $N = 100$ 的均匀网格上一阶迎风格式（三角）、二阶高分辨率格式（圆）和五阶 WENO格式（实线）所计算出的数值解图像。

第二个例子我们主要验证了五阶 WENO格式对于光滑解情况可以达到设计的五阶精度，为此目的我们选取了一个有光滑准确解的方程，其中各个系数和函数取为 $\beta(x, Q) = 2 + Q$ 、 $m(x, Q) = 1 + Q$ 、 $g(x, Q, t) = gg(t)e^x + 2 + \frac{Q}{2} + \frac{\alpha - e^{-1}}{2}e^t$ 、 $gg(t) = -2e^{-1} + \frac{e^{-2+t}}{2} + \frac{1}{2}\alpha e^{-2+t} - \alpha e^{-1+t}$ 、 $L = 1$ 、 $\omega(x) = 1$ 、 $\alpha = 0.5$ 、初值条件 $u^0(x) = e^{-x}$ 以及 $C(t) = 0$ ，这样方程 (4.3) 就存在一个光滑的准确解 $u(x, t) = e^{-x}$ 。在表 4.1 中我们给出了五阶 WENO格式的 L^∞ 和 L^1 误差及精度阶，由于在边界点处无法同时使用两边的低阶数值流通量来生成更高阶的流通量，从而导致 L^∞ 误差在边界点处会掉一阶。在这个例子中我们进一步减小了时间步长以减少时间上的不必要误差。

表 4.1: 格点数为 N 的均匀网格上 WENO 格式的 L^∞ 与 L^1 误差与精度阶。

N	L^∞ 误差	精度阶	L^1 误差	精度阶
20	0.20E-04		0.20E-05	
40	0.11E-05	4.27	0.62E-07	5.01
80	0.60E-07	4.13	0.19E-08	4.99
160	0.36E-08	4.08	0.60E-10	5.00
320	0.21E-09	4.10	0.18E-11	5.10

我们的第三个例子来自 [8], 主要模拟了食蚊鱼型体竞争模型 (*Gambusia affinis*) 的中食蚊鱼数量随时间的演变规律, 其模型方程与 (4.3) 稍有不同:

$$\begin{aligned}
 u_t + (g(x, t)u)_x + m(x, Q(t), t)u &= 0, & (x, t) \in [9, 63] \times (0, T] \\
 g(9, t)u(9, t) &= \int_9^{63} \beta(x, t)u(x, t)dx, & t \in (0, T] \\
 u(x, 0) &= u^0(x), & x \in [9, 63]
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

含全局积分项的环境影响因子 $Q(t)$ 定义为

$$Q(t) = \int_9^{63} \omega(x)u(x, t)dx \tag{4.11}$$

(4.10) 和 (4.11) 中的初值条件及各函数定义如 [8] 中所示:

$$\beta(x, t) = \beta(x)T_\beta(t), \quad g(x, t) = g(x)T_g(t), \quad m(x, Q(t), t) = m(x, Q(t))T_m(t),$$

其中 $\beta(x)$ (图 4.5) 为使用 MATLAB 函数 *csaps* 拟合 [55] 中的数据而得到的光滑样条函数 (参见 [8] 中的 Fig. 1)。 $T_\beta(t)$ 为周期函数, 其定义如下

$$T_\beta(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{30}\right)^3 \left(1 - \frac{t-30}{10} + \frac{(t-30)^2}{150}\right), & 0 \leq t \leq 30 \\ 1, & 30 \leq t \leq 90 \\ -\left(\frac{t-120}{30}\right)^3 \left(1 + \frac{t-90}{10} + \frac{(t-90)^2}{150}\right), & 90 \leq t \leq 120 \\ 0, & 120 \leq t \leq 365 \end{cases}$$

以及

$$T_\beta(t + 365n) = T_\beta(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

$g(x)$ 定义为

$$g(x) = \frac{63}{80.2} \left(1 - \frac{x}{63}\right), \quad 9 \leq x \leq 63.$$

$T_g(t)$ 定义为

$$T_g(t) = \begin{cases} 0.2 + 0.8\left(\frac{t}{30}\right)^3\left(1 - \frac{t-30}{10} + \frac{(t-30)^2}{150}\right), & 0 \leq t \leq 30 \\ 1, & 30 \leq t \leq 90 \\ 0.2 - 0.8\left(\frac{t-120}{30}\right)^3\left(1 + \frac{t-90}{10} + \frac{(t-90)^2}{150}\right), & 90 \leq t \leq 120 \\ 0.2, & 120 \leq t \leq 365 \end{cases}$$

$$T_g(t + 365n) = T_g(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

$m(x, Q)$ 由下面公式给出

$$m(x, Q) = \begin{cases} 0.1 \exp(-C/Q), & 9 \leq x \leq 31 \\ 0.1 \exp(-C/Q) - (0.023 - 0.1 \exp(-C/Q)) \\ \quad \times (x - 31)^3(1 - 3(x - 32)(65 - 2x)), & 31 \leq x \leq 32 \\ 0.023, & 32 \leq x \leq 63 \end{cases}, \quad (4.12)$$

其中常数 C 的意义稍后给出解释。 $T_m(t)$ 定义为

$$T_m(t) = \begin{cases} 2 - \left(\frac{t}{30}\right)^3\left(1 - \frac{t-30}{10} + \frac{(t-30)^2}{150}\right), & 0 \leq t \leq 30 \\ 1, & 30 \leq t \leq 90 \\ 2 + \left(\frac{t-120}{30}\right)^3\left(1 + \frac{t-90}{10} + \frac{(t-90)^2}{150}\right), & 90 \leq t \leq 120 \\ 2, & 120 \leq t \leq 365 \end{cases},$$

$$T_m(t + 365n) = T_m(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

最后函数 $\omega(x)$ 由下式给出

$$\omega(x) = \begin{cases} 2, & 9 \leq x \leq 30 \\ -2(x - 31)^3(1 + 3(x - 30)(2x - 59)), & 30 < x < 31 \\ 0, & 31 \leq x \leq 63 \end{cases}$$

初值条件为

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 9 \leq x \leq 34 \\ 5\left(1 + \frac{x-38}{4}\right)^3, & 34 < x < 38 \\ 5 + 15\left(\frac{x-38}{4}\right) + 15\left(\frac{x-38}{4}\right)^2 + 30\left(\frac{x-38}{4}\right)^3\left(\frac{x-46}{4}\right), & 38 \leq x \leq 42 \\ 5\left(2 - \frac{x-38}{4}\right)^3, & 42 \leq x \leq 46 \\ 0, & 46 \leq x \leq 63 \end{cases}$$

我们指出第一节中引入的假设 H1-H6 对于这个例子并不完全成立，但是我们的五阶 WENO 格式仍然能够在使用比一阶和二阶格式少得多的网格点情况下得到精确的解。在图 4.2 的算例中，取 $C = 2000$ ，我们画出了在 $N = 135$ 的均匀网格上时间 $t = 365$ 时用五阶 WENO 格式算出的解，同时我们也给出了在 $N = 540$ 的均匀网格上用二阶高

分辨率格式算出的解以作为对比,我们可以清楚地发现,尽管二阶格式使用了四倍于 WENO格式的网格点,但 WENO格式仍然能够得到更为精确的解,我们还给出了在 [8]中的两个二阶格式算例(参见图 4.6和图 4.7),一个是在 $N = 864$ 的均匀网格上使用 Lax-Wendroff 格式算出的解,另一个是 $N = 432$ 的均匀网格上使用 box格式所得到的解图像,通过对比发现五阶 WENO格式全面超越了这些二阶格式,并且我们构造的二阶高分辨率格式在计算这个例子中的表现也大大优于 [8]中所给出的两个二阶格式。(Lax-Wendroff 格式和 box格式具体构造方法请参见 [8]中 Appendix)

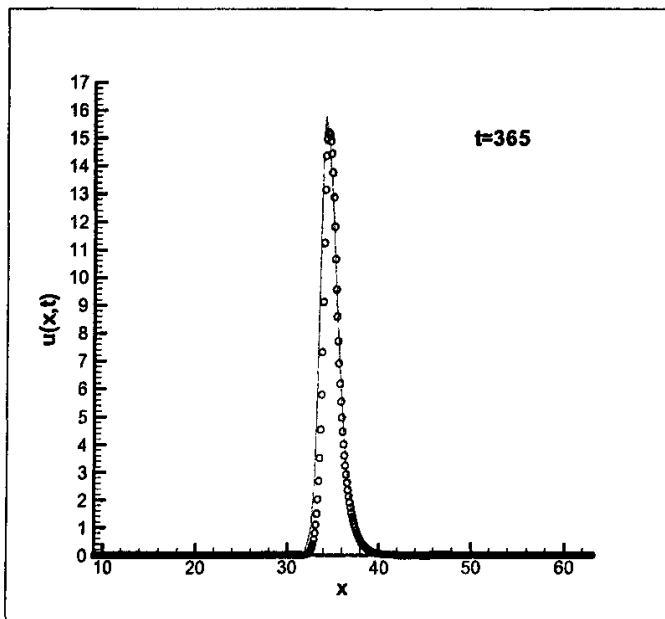


图 4.2: 时间 $t = 365$ 时生物个体密度函数 u 。实线: $N = 135$ 的均匀网格上用五阶WENO格式算出的解;圆: $N = 540$ 的均匀网格上用二阶高分辨率格式算出的解。

为了充分展示高阶WENO格式在稀疏网格上模拟长时间生物数量演变的优势,在图 4.3和图 4.4中我们就两种不同的常数值 C 给出了在稀疏网格上数值模拟食蚊鱼总数量(密度函数 u 在整个空间定义域上的积分)十年的演变情况,其中常数 C 代表食蚊鱼的繁殖能力大小。在两种不同的常数 C ($C = 2000$ 和 $C = 200000$)情况下,对于五阶 WENO格式我们惊异地发现仅需要在 $N = 20$ 的均匀稀疏网格上就可以得到令人满意的结果,而对于二阶高分辨率格式,为了得到相近令人满意的结果需要将格点数提高至 $N = 108$,从而充分展现了高阶 WENO格式的优势。

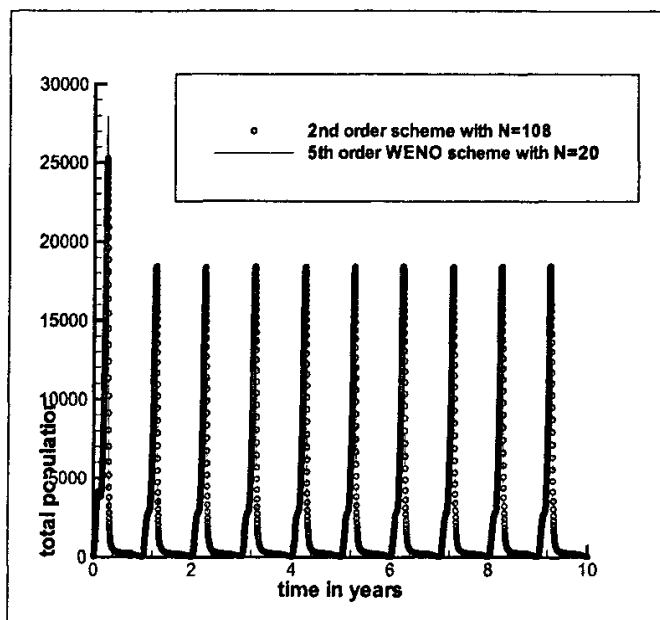


图 4.3: $C = 2000$ 时食蚊鱼数量十年的演变。实线: $N = 20$ 的粗糙均匀网格上使用五阶 WENO 格式算出的解; 圆: $N = 108$ 的均匀网格上使用二阶高分辨率格式算出的解。

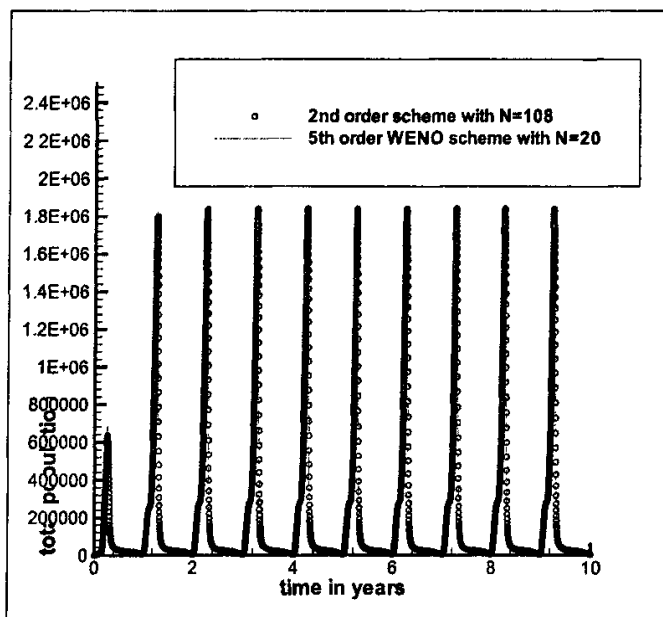


图 4.4: $C = 200000$ 时食蚊鱼数量十年的演变。实线: $N = 20$ 的粗糙均匀网格上使用五阶 WENO 格式算出的解; 圆: $N = 108$ 的均匀网格上使用二阶高分辨率格式算出的解。

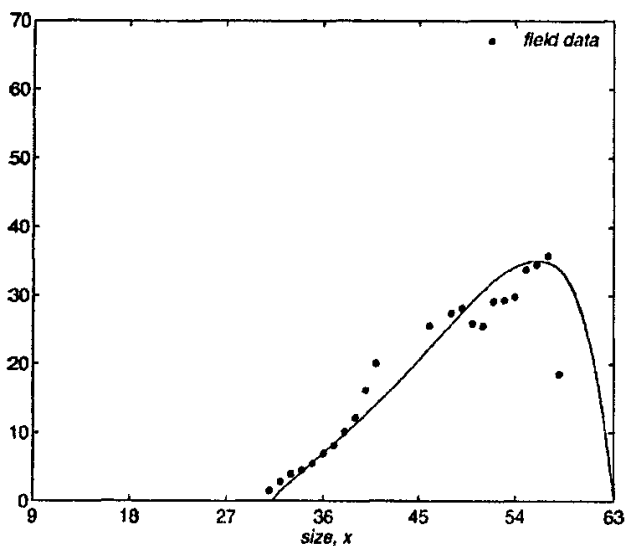


图 4.5: [8]中给出的函数 $\beta(x)$ 的图像。

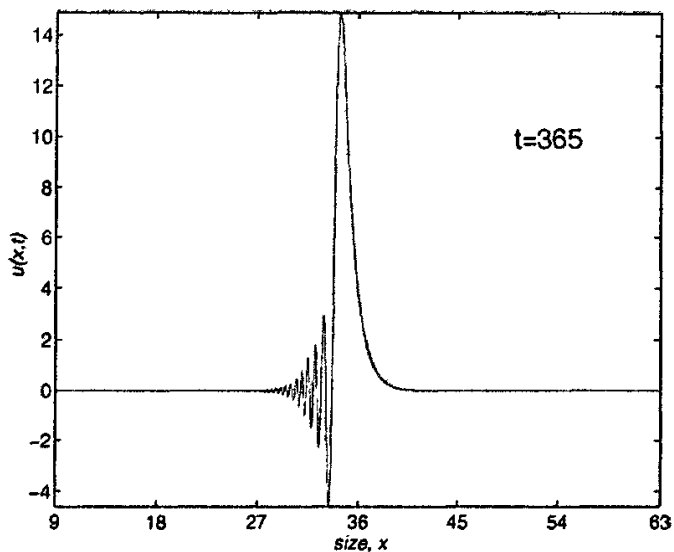


图 4.6: [8]中在 $N = 864$ 的均匀网格上使用 Lax-Wendroff 格式算出的解。($\Delta t = 0.0625$)

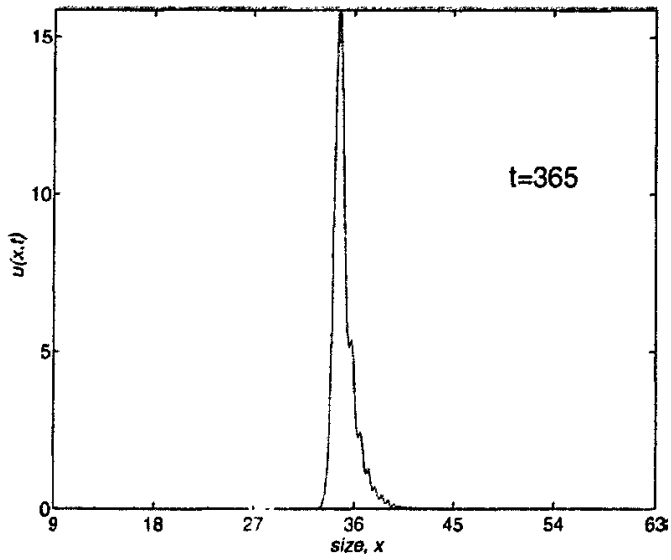


图 4.7: [8]中在 $N = 432$ 的均匀网格上使用 box 格式算出的解。($\Delta t = 0.5$)

第五章 回顾与展望

在本文前面的章节中我们首先介绍了一类包含非线性的生长率、繁殖率和死亡率函数的生物型体竞争模型，其中模型方程的边界条件和各系数都包含全局约束。针对该类模型方程的特点，我们构造了一系列便于计算的数值格式，其中包括一阶显式迎风有限差分格式、二阶显式高分辨率有限差分格式以及五阶高精度的有限差分 WENO 格式。对于一阶和二阶格式，我们分别证明了它们具有总变差有界 (TVB) 的性质，从而进一步证明了这两种格式的稳定性 and 收敛性。我们还给出了大量的数值算例，验证了我们构造的格式对于光滑解都可以达到设计的精度，并且对于间断解情况高分辨率格式和 WENO 格式在解的间断部分都可以得到锐利无振荡的图像。我们的数值算例还指出，WENO 格式在使用比二阶格式少得多的格点数情况下仍然能够得到比二阶格式优异的图像。我们还将构造的格式应用到生物数学中的食蚊鱼型体竞争模型，数值结果告诉我们在模拟长时间的食蚊鱼个体数量演变中，五阶 WENO 格式可以在极为稀疏的网格上得到令人满意的解，从而验证了 WENO 格式在数值模拟此类问题上比低阶格式有效得多。

掌握了这些数值工具的基础上，我们可以使用多种方法对研究数值格式对于模型方程解的渐进性态进行进一步的工作，例如沿着 [33] 一文中的思路使用 upwinding of the source, well-balancedness 等方法。

另一方面，还可以将我们的构造方法应用到更一般的生物型体竞争模型（例如 [90][2]）以及与其类似的生物年龄竞争模型（例如 [89][3]）中去，期望可以得到类似的稳定而收敛的高分辨率格式和有效的 WENO 格式。

附录 I: 食蚊鱼型体竞争模型: *Gambusia Affinis*

对食蚊鱼 (*Gambusia*) 种群的研究历史几乎可以追溯到十九世纪末, 科学家们对影响食蚊鱼种群中个体数量演变的生理特征和结构等方面进行了一系列多方面而仔细的研究, 例如年龄、生长速度、成熟度、繁殖率、型体大小等因素。尽管早期的研究更为偏重于食蚊鱼的生物特性而忽略了这些生物特性之间的联系与相互影响, 但是为后来的研究者们提供了大量宝贵的数据资料。自1938年开始, Krumholtz对一种名为 *Gambusia affinis* 的食蚊鱼进行了为期数年的跟踪研究, 他着重采集了以下几个方面的数据:

- 雌鱼和雄鱼的型体大小及其生长速度。
- 雌鱼首次进入性成熟期的型体大小及其年龄。
- 繁殖期雌鱼和雄鱼的型体大小。
- 每个繁殖季节雌鱼的产卵次数以及每次产卵的个数。
- 食蚊鱼的自然寿命。
- 食蚊鱼年龄和型体大小等因素与性别比例及个体数量的关系。

在其1948年的文章 [55]中, Krumholtz结合前人的工作对其数据进行了细致的整理和分析, 通过大量数据揭示了上述几方面数据之间的潜在关系。他指出在食蚊鱼个体的型体大小在食蚊鱼种群演变中扮演着至关重要的角色, 个体的生长, 繁殖, 死亡均与其型体大小有着紧密的联系。

根据 [55]以及后人的一些研究数据, Sulsky在 [90]中基于 [86]的生物型体竞争模型构造了下面的食蚊鱼型体竞争模型

$$\begin{aligned}u_t + (g(x, t)u)_x + m(x, Q(t), t)u &= 0, & (x, t) \in [9, 63] \times (0, T] \\g(9, t)u(9, t) &= \int_9^{63} \beta(x, t)u(x, t)dx, & t \in (0, T] \\u(x, 0) &= u^0(x), & x \in [9, 63]\end{aligned}$$

含全局积分项的环境影响因子 $Q(t)$ 定义为

$$Q(t) = \int_9^{63} \omega(x)u(x, t)dx.$$

其中 $u(x, t)$ 代表 t 时刻型体大小为 x 的雌鱼个体数量。 $g(x, t)$ 、 $\beta(x, t)$ 、 $m(x, Q(t), t)$ 分别代表型体大小为 x 的雌鱼在 t 时刻的生长率、繁殖率和死亡率, $\omega(x)$ 代表型体大小为 x 的食蚊鱼对环境影响的权重, $u^0(x)$ 代表 $t = 0$ 时刻各型体大小的食蚊鱼分布情况, 而这些函数均为使用 Krumholtz 等人研究数据利用插值等方法所得到, 例如对 [55] 中的数据使用线性拟合来得到 β 函数, 详细的构造方法请参见 [90]。在模型中 Sulsky 假设食蚊鱼的型体变化范围为 $[9, 63]$, 雌鱼与雄鱼具有相同的型体大小分布并且性别比例为 $1:1$, 从而只需考虑雌鱼的个体数量变化。

在 Sulsky 的模型基础上, [8] 对该模型进行了进一步研究, 对于方程中 $g(x, t)$ 、 $\beta(x, t)$ 、 $m(x, Q(t), t)$ 、 $u^0(x)$ 、 $w(x)$ 等函数的构造给予改进, 例如使用 MATLAB 函数 *csaps* 拟合 [55] 中的数据从而得到 β 函数的分段光滑样条插值, 具体构造方法和公式请参见 [8] 或本文第四章的食蚊鱼数值算例。在第四章的食蚊鱼数值算例中我们对 [8] 给出的食蚊鱼型体竞争模型进行了模拟计算, 并对比 [8] 中给出的数值结果展示了我们所构造的高分辨率高精度格式的优越性。

附录 II: WENO方法中负权的处理方法

高阶精度的 WENO 方法已经广泛应用于多种网格上的有限差分方法和有限体积方法之中, 其关键思想是利用低阶的数值流通量通过线性组合或重构来得到高阶精度的数值流通量, 而重构高阶精度数值流通量所需要用到的系数被称之为线性权, 这些线性权取决于格点区间上的局部几何性质以及精度阶, 从而有可能为负数, 例如交错网格上的中心 WENO格式、二维空间网格上的高阶有限体积 WENO格式、包含二阶导数近似的有限差分 WENO格式, 在本文第五章针对生物形体竞争模型方程构造五阶精度的有限差分 WENO格式时, 在边界点附近也出现了负的线性权。在出现负的线性权情况下, 无法直接应用一般的 WENO构造流程来得到稳定的格式。早期的应对策略要么是重组负权附近的区间模板要么降低精度来避免负权的出现, 下面我们介绍由 Shi、Hu及 Shu在 [75] 中给出的一种处理 WENO格式中含有负权情况的方法, 该方法简便而又有效, 无需避免负权的出现, 可以得到稳定的格式。

在给出这个方法之前我们首先回顾一下第四章介绍的一般 WENO方法的重构流程, 主要包含下列几个步骤。我们假设给定了一个格点单元 Δ (例如一维问题中的小区间, 二维正交网格中的小矩形或在二维无结构网格中的小三角形区域) 和在这个格点单元中一个给定的点 X^G 。

- 步骤 1: 我们定义一些格点模板 $S_j, j = 1, \dots, q$, Δ 包含在每一个这样的格点模板之中。我们记 $\mathcal{T} = \bigcup_{j=1}^q S_j$ 为包含这些格点模板所含的所有小区间的大模板。
- 步骤 2: 在每一个格点模板 $S_j, j = 1, \dots, q$, 中我们都有一个低阶重构或插值函数 $p_j(x)$ (一般都为多项式), 同时我们在大模板 \mathcal{T} 中还有一个高阶重构或插值函数 $Q_j(x)$ (一般也是多项式)。
- 步骤 3: 存在一些系数 (线性权) $\gamma_1, \dots, \gamma_q$, 使得高阶重构或插值函数 $Q_j(x)$ 对于模板内所有可能给定的点均为相应低阶重构或插值函数 $p_j(x)$ 在该点值的线性组合

$$Q_j(x^G) = \sum_{j=1}^q \gamma_j p_j(x^G).$$

这些线性权取决于网格几何性质、给定点 X^G 以及重构或插值过程的特殊条件, 但是与给定的解函数在这些模板上的值无关。

- 步骤 4: 在每一个格点模板 $S_j, j = 1, \dots, q$, 上计算光滑因子 (smoothness indicator) β_j , 光滑因子的作用主要是度量函数 $p_j(x)$ 在目标单元 Δ 上的光滑程度。在现有的 WENO格式中都使用下面的光滑因子

$$\beta_j = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Delta} |\Delta|^{2|\alpha|-1} (D^\alpha p_j(x))^2 dx,$$

其中 $j = 1, \dots, q$, k 为多项式函数 $p_j(x)$ 的阶, $|\Delta|$ 在一维情况下为格点单元 Δ 的区间长度, $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$, 其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ 为 d 维空间中的的向量。积分因子 $|\Delta|^{2|\alpha|-1}$ 在二维和三维情况下有些不同。如果 $|\Delta|$ 在二维情况下代表格点单元 Δ 的面积, 在三维情况下代表格点单元 Δ 的体积, 则积分因子在二维情况下为 $|\Delta|^{|\alpha|-1}$, 三维情况下为 $|\Delta|^{\frac{3}{2}|\alpha|-1}$ 。积分因子的作用主要是使得光滑因子在空间度量下保持不变。

- 步骤 5: 根据步骤 4 中给出的光滑因子我们现在给出如下的非线性权

$$w_j = \frac{\tilde{w}_j}{\sum_j \tilde{w}_j},$$

其中

$$\tilde{w}_j = \frac{\gamma_j}{(\epsilon + \beta_j)^2},$$

这里的 γ_j 为步骤 3 中给出的线性权, ϵ 为一个小正数以避免分母为零 (一般取作 10^{-6})。最终我们得到了 WENO 格式的数值流通量的近似或重构公式

$$R(x^G) = \sum_{j=1}^q w_j p_j(x^G).$$

需要指出的是上述步骤中的系数都与数值解的值无关, 而仅仅与网格性质有关, 这些系数包括步骤 3 中的线性权 γ_j , 步骤 2 中插值或重构多项式函数 $p_j(x)$ 的线性系数以及步骤 4 中计算光滑因子公式中的 k 次系数。

下面介绍 [75] 中给出的处理负线性权的分离方法, 这个方法十分的简单但却非常有效, 只需要很少的额外运算量。使用这个方法处理负权只需要对于前面所给出的 WENO 格式构造流程中的步骤 5 做一些改动:

- 步骤 5': 如果 $\min(\gamma_1, \dots, \gamma_q) \geq 0$, 则仍然按照步骤 5 进行。否则我们分离线性权为两部分: 正的部分和负的部分。分离办法为

$$\tilde{\gamma}_i^+ = \frac{1}{2}(\gamma_i + \theta|\gamma_i|), \quad \tilde{\gamma}_i^- = \tilde{\gamma}_i^+ - \gamma_i, \quad i = 1, \dots, q$$

其中取 $\theta = 3$, 然后重新构造正负两部分的线性权

$$\sigma^\pm = \sum_{j=1}^q \tilde{\gamma}_j^\pm; \quad \gamma_j^\pm = \tilde{\gamma}_j^\pm / \sigma^\pm, \quad i = 1, \dots, q.$$

这样我们就得到了两个分离的多项式

$$Q^\pm(x^G) = \sum_{j=1}^q \gamma_j^\pm p_j(x^G),$$

并且其满足

$$Q(x^G) = \sigma^+ Q^+(x^G) - \sigma^- Q^-(x^G).$$

应用与步骤 4 中一样的光滑因子 β_j , 现在我们可以同样定义正的部分和负的部分非线性权了

$$w_j^\pm = \frac{\tilde{w}_j^\pm}{\sum_j \tilde{w}_j^\pm},$$

其中

$$\tilde{w}_j^\pm = \frac{\gamma_j^\pm}{(\epsilon + \beta_j)^2}.$$

定义

$$R(x^G)^\pm = \sum_{j=1}^q w_j^\pm p_j(x^G),$$

我们就得到了最终 WENO 近似公式

$$R(x^G) = \sigma^+ R^+(x^G) - \sigma^- R^-(x^G).$$

这种处理负权的分离方法其核心思想是将一组含有负权的线性权分解为两组均为正的线性权, 从而可以保证以这两组线性权为基础构造的非线性权有界而不至于变化过于剧烈, 如果不进行分离构造, 由于凸性不再满足则步骤 5 所构造的非线性权则可能会变得过大或者过小, 从而导致数值解的振荡。

现在我们将这种分离方法应用到第五章我们所构造的 WENO 格式中去, 看看分离方法是如何进行工作的。如第五章所述, 在构造生物形体竞争模型方程的 WENO 格式时, 对于 $j = N - 1$, 我们有

$$\gamma_1 = -3/110, \quad \gamma_2 = 47/110, \quad \gamma_3 = 3/5.$$

应用前面介绍的分离方法, 我们得到

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1^+ &= 3/110, & \tilde{\gamma}_2^+ &= 47/55, & \tilde{\gamma}_3^+ &= 6/5, \\ \tilde{\gamma}_1^- &= 3/55, & \tilde{\gamma}_2^- &= 47/110, & \tilde{\gamma}_3^- &= 3/5, \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\gamma_1^+ &= 3/229, & \gamma_2^+ &= 94/229, & \gamma_3^+ &= 132/229, \\ \gamma_1^- &= 6/119, & \gamma_2^- &= 47/119, & \gamma_3^- &= 66/119, \\ \sigma^+ &= 229/110, & \sigma^- &= 119/110.\end{aligned}$$

参考文献

- [1] R. Abgrall. On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes: analysis and implementation. *Journal of Computational Physics*, 114:45–58, 1994.
- [2] L. M. Abia, O. Angulo, and J. C. López-Marcos. Size-structured population dynamics models and their numerical solutions. *Discrete and Continuous Dynamical System, Ser. B* 4:1203–1322, 2004.
- [3] L. M. Abia, O. Angulo, and J. C. López-Marcos. Age-structured population dynamics models and their numerical solutions. *Ecological Modeling*, 188:112–136, 2005.
- [4] A. S. Ackleh, H. T. Banks, and K. Deng. A finite difference approximation for a coupled system of nonlinear size-structured populations. *Nonlinear Analysis*, 50:727–748, 2002.
- [5] A. S. Ackleh, K. Deng, and S. Hu. A quasilinear hierarchical size structured model: well-posedness and approximation. *Applied Mathematics and Optimization*, 51:35–59, 2005.
- [6] A. S. Ackleh and K. Ito. An implicit finite difference scheme for the nonlinear size-structured population model. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 18:865–884, 1997.
- [7] N. Adams and K. Shariff. A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 127:27–51, 1996.
- [8] O. Angulo, A. Durán, and J. C. López-Marcos. Numerical study of size-structured population models: A case of gambusia affinis. *Comptes Rendus Biologies*, 328:387–402, 2005.
- [9] O. Angulo and J. C. López-Marcos. Numerical integration of autonomous and nonautonomous nonlinear size-structured population models. *Mathematical Biosciences*, 177:39–71, 2002.
- [10] O. Angulo and J. C. López-Marcos. Numerical integration of fully nonlinear size-structured models. *Applied Numerical Mathematics*, 50:291–327, 2004.
- [11] D. S. Balsara and C.-W. Shu. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy. *Journal of Computational Physics*, 160:405–452, 2000.
- [12] G. I. Bell and E. C. Anderson. Cell growth and division I. A mathematical model with applications to cell volume distribution in mammalian suspension cultures. *Biophysical Journal*, 7:329–351, 1967.
- [13] B. Bihari and A. Harten. Application of generalized wavelets: an adaptive multiresolution Euler equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 61:275–321, 1995.
- [14] K. W. Blayneh. Hierarchical size-structured population model. *Dynamical Systems and Applications*, 9:527–540, 2002.
- [15] J. P. Boris and D. L. Book. Flux corrected transport I, SHASTA, a fluid transport

- algorithm that works. *Journal of Computational Physics*, 11:38–69, 1973.
- [16] L. W. Bostford, B. Vondracck, T. C. Wainwright, A. L. Linden, R. G. Kope, D. E. Reed, and J. J. C. Jr. Population development of the mosquitofish, *Gambusia affinis*, in rice fields. *Environmental Biology of Fishes*, 2:143–154, 1987.
- [17] W. Cai and C.-W. Shu. Uniform high-order spectral methods for one- and two- dimensional euler equations. *Journal of Computational Physics*, 104:427–443, 1993.
- [18] A. Calsina and J. Saldana. Asymptotic behavior of a model of hierarchically structured population dynamics. *Journal of Mathematical Biology*, 35:967–987, 1997.
- [19] J. Casper and H. Atkins. A finite-volume high-order ENO scheme for two dimensional hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 106:62–76, 1993.
- [20] S. Christofi. *The study of building blocks for ENO schemes*. PhD thesis, Brown University, 1995.
- [21] P. Colella. A direct eulerian MUSCL scheme for gas dynamics. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 6:104–117, 1985.
- [22] P. Colella and P. Woodward. The piecewise-parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations. *Journal of Computational Physics*, 54:174–201, 1984.
- [23] M. G. Crandall and A. Majda. Monotone difference approximations for scalar conservation laws. *Mathematics of Computation*, 34:1–21, 1980.
- [24] J. M. Cushing. The dynamics of hierarchical age-structured population. *Journal of Mathematical Biology*, 32:705–729, 1994.
- [25] J. M. Cushing. An introduction to structured populations dynamics. In *CMB-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. SIAM, 1998.
- [26] J. M. Cushing and J. Li. Juvenile versus adult competition. *Journal of Mathematical Biology*, 29:457–473, 1991.
- [27] A. Dolezal and S. Wong. Relativistic hydrodynamics and essentially non-oscillatory shock capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 120:266–277, 1995.
- [28] R. Donat and A. Marquina. Capturing shock reflections: an improved flux formula. *Journal of Computational Physics*, 125:42–58, 1996.
- [29] W. E and C.-W. Shu. A numerical resolution study of high order essentially non-oscillatory schemes applied to incompressible flow. *Journal of Computational Physics*, 110:39–46, 1994.
- [30] G. Erlebacher, Y. Hussaini, and C.-W. Shu. Interaction of a shock with a longitudinal vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 337:192–153, 1997.
- [31] A. J. Fabens. Properties and fitting of the von bertalanffy growth curve. *Growth*, 29:192–153, 1965.
- [32] E. Fatemi, J. Jerome, and S. Osher. Solution of the hydrodynamic device model using high order non-oscillatory shock capturing algorithms. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 10:232–244, 1991.
- [33] F. Filbet and C.-W. Shu. Approximation of hyperbolic models for chemosensitive

- movement. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27:850–872, 2005.
- [34] O. Friedrichs. Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 144:194–212, 1998.
- [35] J. B. Goodman and R. J. LeVeque. A geometric approach to high resolution TVD schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25:268–284, 1988.
- [36] S. Gottlieb and C.-W. Shu. Total variation diminishing runge-kutta schemes. *Mathematics of Computation*, 67:73–85, 1998.
- [37] S. Gottlieb, C.-W. Shu, and E. Tadmor. Strong stability preserving high order time discretization methods. *SIAM Review*, 43:89–112, 2001.
- [38] M. E. Gurtin and R. C. MacCamy. Nonlinear age-dependent population dynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 54:281–300, 1974.
- [39] E. Harabetian, S. Osher, and C.-W. Shu. An eulcrian approach for vortex motion using a level set regularization procedure. *Journal of Computational Physics*, 127:15–26, 1996.
- [40] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49:357–393, 1983.
- [41] A. Harten. ENO schemes with subcell resolution. *Journal of Computational Physics*, 83:148–184, 1989.
- [42] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially schemes, III. *Journal of Computational Physics*, 71:231–303, 1987.
- [43] A. Harten and S. Osher. Uniformly high order accurate essentially schemes, I. *Journal of Computational Physics*, 34:755–772, 1996.
- [44] A. Harten, S. Osher, B. Engquist, and S. Chakravarthy. Some results on uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes. *Applied Numerical Mathematics*, 2:347–377, 1986.
- [45] A. Harten and G. Zwas. Self-adjusting hybrid schemes for shock computations. *Journal of Computational Physics*, 9:568–583, 1972.
- [46] S. M. Henson and J. M. Cushing. Hierarchical models of intra-specific competition: scramble versus contest. *Journal of Mathematical Biology*, 34:755–772, 1996.
- [47] C. Hu and C.-W. Shu. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes. *Journal of Computational Physics*, 150:97–127, 1999.
- [48] M. Ianelli. *Mathematical Theory of Age-Structured Population Dynamics*. Applied Mathematics Monographs. Giardini Editori e Stampatori, Pisa, 1995.
- [49] A. Iske and T. Sonner. On the structure of function spaces in optimal recovery of point functionals for ENO-schemes by radial basis functions. *Numerische Mathematik*, 74:177–201, 1996.
- [50] J. Jerome and C.-W. Shu. Energy models for one-carrier transport in semiconductor devices. In P. L. W. Coughran, J. Cole and J. White, editors, *IMA Volumes in*

- Mathematics and Its Applications*, volume 59, pages 185–207. Springer-Verlag, 1994.
- [51] J. Jerome and C.-W. Shu. Transport effects and characteristic modes in the modeling and simulation of submicron devices. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 14:917–923, 1995.
- [52] G. Jiang and D. Peng. Weighted ENO schemes for hamilton-jacobi equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21:2126–2143, 2000.
- [53] G. Jiang and C.-W. Shu. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics*, 126:202–228, 1996.
- [54] E. A. Kraev. Existence and uniqueness for height structured hierarchical population models. *Natural Resource Modeling*, 14:45–70, 2001.
- [55] L. A. Krumholtz. Reproduction in the western mosquitofish, *gambusia affinis* (baird and girard), and its use in mosquito control. *Ecological Monographs*, 18:1–43, 1948.
- [56] F. Ladeinde, E. O'Brien, X. Cai, and W. Liu. Advection by polytropic compressible turbulence. *Physics of Fluid*, 7:2848–2857, 1995.
- [57] F. Lafon and S. Osher. High-order 2-dimensional nonoscillatory methods for solving hamilton-jacobi scalar equations. *Journal of Computational Physics*, 123:235–253, 1996.
- [58] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhauser Verlag, Basel, 1990.
- [59] D. Levy, G. Puppo, and G. Russo. Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33:547–571, 1999.
- [60] D. Levy, G. Puppo, and G. Russo. compact central WENO schemes for multidimensional conservation laws. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22:656–672, 2000.
- [61] D. Levy, G. Puppo, and G. Russo. A third order central WENO scheme for 2D conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, 33:415–421, 2000.
- [62] R. Liska and B. Wendroff. Composite schemes for conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35:2250–2271, 1998.
- [63] R. Liska and B. Wendroff. Two-dimensional shallow water equations by composite schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 30:461–479, 1999.
- [64] X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 115:200–212, 1994.
- [65] J. A. J. Metz and E. O. Diekmann. *The Dynamics of Physiologically Structured Populations*, volume 68 of *Lecture Notes in Biomathematics*. Springer, Heidelberg, 1986.
- [66] L. F. Murphy. A nonlinear growth mechanism in size-structured population dynamics. *Journal of Theoretical Biology*, 104:493–506, 1983.
- [67] S. Osher. Convergence of generalized MUSCL schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 22:947–961, 1985.
- [68] S. Osher and S. Chakravarthy. High resolution schemes and the entropy condition. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 22:955–984, 1984.

- [69] S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.
- [70] S. Osher and C.-W. Shu. High-order essentially nonoscillatory schemes for hamilton-jacobi equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 28:907–922, 1991.
- [71] P. L. Roe. Numerical algorithms for the linear wave equation. *Royal Aircraft Establishment Technical Report 81047*, 1981.
- [72] J. Sethian. *Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Dynamics, Computer Vision, and material Science*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, New York, 1996.
- [73] J. Shen, C.-W. Shu, and M. Zhang. A high order WENO scheme for a hierarchical size-structured model. *Submitted to Journal of Scientific Computing*.
- [74] J. Shen, C.-W. Shu, and M. Zhang. High resolution schemes for a hierarchical size-structured model. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45:352–370, 2007.
- [75] J. Shi, C. Hu, and C.-W. Shu. A technique of treating negative weights in WENO schemes. *Journal of Computational Physics*, 175:108–127, 2002.
- [76] C.-W. Shu. TVB uniformly high-order schemes for conservation laws. *Mathematics of Computation*, 49:105–121, 1987.
- [77] C.-W. Shu. Total-variation-diminishing time discretizations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 9:1073–1084, 1988.
- [78] C.-W. Shu. Numerical experiments on the accuracy of ENO and modified ENO schemes. *Journal of Scientific Computing*, 5:127–149, 1990.
- [79] C.-W. Shu. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. In A. Quarteroni, editor, *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, volume 1697 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 325–432. Springer, 1998.
- [80] C.-W. Shu. High-order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous galerkin methods for CFD. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 17:107–118, 2003.
- [81] C.-W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77:439–471, 1988.
- [82] C.-W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II. *Journal of Computational Physics*, 83:32–78, 1989.
- [83] C.-W. Shu, Y. Zang, G. Erlebacher, D. Whitaker, and S. Osher. High order ENO schemes applied to two and three dimensional compressible flow. *Applied Numerical Mathematics*, 9:45–71, 1992.
- [84] C.-W. Shu and Y. Zeng. High order essentially non-oscillatory scheme for viscoelasticity with fading memory. *Quarterly of Applied Mathematics*, 55:459–484, 1997.
- [85] K. Siddiqi, B. Kimia, and C.-W. Shu. Geometric shock-capturing ENO schemes for

- subpixel interpolation, computation and curve evolution. *Computer Vision Graphics and Image Processing: Graphical models and Image Processing (CVGIP:GMIP)*, 1997.
- [86] J. W. Sinko and W. Streifer. A new model for age-size structure of a population. *Ecology*, 48:910–918, 1967.
- [87] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer, New York, 1994.
- [88] G. A. Sod. *Numerical Methods in Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge University Press, 1985.
- [89] D. Sulsky. Numerical solution of structured population models I. age structure. *Journal of Mathematical Biology*, 31:817–839, 1993.
- [90] D. Sulsky. Numerical solution of structured population models II. mass structure. *Journal of Mathematical Biology*, 32:491–514, 1994.
- [91] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme I. the quest of monotonicity. *Springer Lecture Notes in Physics*, 18:163–168, 1973.
- [92] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme II. monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14:361–370, 1974.
- [93] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme III. upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. *Journal of Computational Physics*, 23:263–275, 1977.
- [94] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics*, 23:276–299, 1977.
- [95] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to godunov’s method. *Journal of Computational Physics*, 32:101–136, 1979.
- [96] F. Walsteijn. Robust numerical methods for 2d turbulence. *Journal of Computational Physics*, 114:129–145, 1994.
- [97] G. F. Webb. *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*. Marcel Dekker, New York, 1985.
- [98] J. Weiner and S. X. Thomas. Size variability and competition in plant monocultures. *Oikos*, 47:211–222, 1986.
- [99] P. Woodward and P. Colella. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, 54:115–173, 1984.
- [100] H. Yang. An artificial compression method for ENO schemes. *Journal of Computational Physics*, 89:125–160, 1990.
- [101] S. T. Zalesak. Fully multidimensional flux corrected transport algorithms for fluids. *Journal of Computational Physics*, 31:335–362, 1979.
- [102] S. T. Zalesak. A preliminary comparison of modern shock-capturing schemes: linear advection. In R. Vichnevetsky and R. S. Stepleman, editors, *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*, volume VI, pages 15–22. IMACS, 1987.

在学期期间的研究成果及发表的论文

在国际和国内学术刊物上发表的论文

- [1] J. Shen, C.-W. Shu and M. Zhang, *High resolution schemes for a hierarchical size-structured model*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 45 (2007), 352-370.

已完成的文章

- [1] J. Shen, C.-W. Shu and M. Zhang, *A high order WENO scheme for a hierarchical size-structured model*, Submitted to Journal of Scientific Computing.