

分类号:

密级:

兰州大学

研究生学位论文

论文题目 (中文)	电磁材料中多场耦合临界态问题的研究
论文题目 (外文)	Investigations on critical-state problems in electromagnetic materials with multi-field couplings
研究生姓名	薛存
学科、专业	力学·固体力学
研究方向	电磁固体力学与智能结构
学位级别	博士
导师姓名、职称	周又和 教授
论文工作 起止年月	2012年9月至2016年6月
论文提交日期	2016年6月
论文答辩日期	2016年6月
学位授予日期	

校址: 甘肃省兰州市

Lanzhou University

Investigations on critical-state problems in electromagnetic materials with multi-field couplings

by

Cun Xue

A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of
Doctor of Philosophy

Ph.D. Candidate: Cun Xue
Supervisor: Prof. Zhou You-He
Major: Solid Mechanics
Research Direction: Electro-Magneto-Solid Mechanics
and Smart Structures

*Department of Mechanics and Engineering Science, College of
Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou*

May, 2016

原创性声明

本人郑重声明：本人所呈交的学位论文，是在导师的指导下独立进行研究所取得的成果。学位论文中凡引用他人已经发表或未发表的成果、数据、观点等，均已明确注明出处。除文中已经注明引用的内容外，不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本文的研究成果做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

本声明的法律责任由本人承担。

论文作者签名：_____

日期：_____

关于学位论文使用授权的声明

本人在导师指导下所完成的论文及相关的职务作品，知识产权归属兰州大学。本人完全了解兰州大学有关保存、使用学位论文的规定，同意学校保存或向国家有关部门或机构送交论文的纸质版和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权兰州大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用任何复制手段保存和汇编本学位论文。本人离校后发表、使用学位论文或与该论文直接相关的学术论文或成果时，第一署名单位仍然为兰州大学。

本学位论文研究内容：

可以公开

不宜公开，已在学位办公室办理保密申请，解密后适用本授权书。

（请在以上选项内选择其中一项打“√”）

论文作者签名：_____

导师签名：_____

日期：_____

日期：_____

电磁材料中多场耦合临界态问题的研究

摘要

随着科技和工业技术的发展，弹塑性材料、压电材料以及 II 类超导材料等在人类生活中发挥越来越重要的作用。而这些材料中都存在着非常相似的非线性效应和临界态效应：例如弹塑性材料应力屈服效应、压电材料电位移饱和效应以及 II 类超导体临界电流密度等。临界态问题对于系统的演化和发展起到非常重要的作用。因此，分析和研究这些物理系统的非线性临界态问题不仅从基础研究角度很有意义，而且对于材料的实际工程应用也非常重要。

本文针对这三类材料中的广受关注的非线性临界态问题，即弹塑性材料裂纹尖端塑性区应力应变场，压电材料裂纹尖端应力塑性区和电位移饱和区力-电场以及实用 II 类超导薄带临界电流密度等问题等作了进一步的理论研究。

首先，对于非线性塑性硬化材料，基于双折线弹塑性模型，提出了适用于塑性硬化材料裂纹的条带硬化模型。通过假设和简化非线性本构方程，并引入了硬化函数来描述裂纹尖端塑性区域的硬化程度，消除了裂纹尖端应力奇异性，推导出了条带硬化区的大小和裂纹尖端张开位移的解析表达式。分析讨论了材料硬化参数对条带硬化区大小和裂纹尖端张开位移的影响。结果表明硬化参数 (E/E_{um} 和 σ_u/σ_y) 越大，对应的条带硬化区域越小。通过条带硬化模型，我们成功解释了根据大量实验总结出的 COD 设计曲线对于屈服应力和极限应力比值超过 75~80% 的材料不再适用这种现象。此外还推导出了裂纹尖端张开位移和标称应变之间的关系，通过和实验区域进行对比，本文的理论结果全部落在实验范围内。

其次，对于压电材料，研究了外加电场对压电材料裂纹扩展的影响。基于非线性理想弹塑性模型和理想电位移饱和模型，假设裂纹尖端存在电极化饱和区和应力屈服区。双条带模型消除了应力和电位移的奇异性，并将压电材料的断裂问题分为两类情形。我们分别推导出了两类情形下的裂纹尖端电张开位移和机械张开位移，并进一步提出了新的压电材料断裂准则，即裂纹尖端机械张开位移。提出造成实验观测上出现常见两种不同实验现象的原因可能是由于裂纹前端不同程度的电畴翻转造成了电极化饱和区和应力屈服区的大小不同。

最后，基于场相关 Kim 模型研究了超导薄带在不同物理环境下的电磁性质以及磁滞伸缩等力学性质。采用保角变换方法得到了 II 类超导薄带在外加电流、外加磁场、以及外加电流和磁场同时加载三种情形下的电流密度和磁场分布，推

导出了适用任意场相关临界态模型的积分方程组。对于小电流和小磁场情形，得到了问题的解析表达式，证明场相关临界态模型的结果和 Bean 模型的结果之间存在简单的比例因子，从而避免求解复杂的积分方程组。分析了磁场和电流同时加载时‘类电流’分布和‘类磁场’分布特点，并给出了它们的分界线。基于 Bean 模型和 Kim 模型，进一步计算了超导带材在外加磁场上升阶段和下降阶段的体力、应力、位移分布，以及在一个周期外加磁场下的磁滞伸缩回线，并对两种模型的结果进行了一一对比。最后，根据场相关 Kim 模型研究了不同横截面形状的超导带材对临界外加电流的影响。给出了任意横截面形状的超导薄带的临界电流的计算方法。在不同外加磁场下，讨论并对比了超导带材横截面形状参数对临界外加电流的影响。

关键词：临界态问题，塑性硬化材料，压电材料，II 类超导带材，应力屈服，应变硬化，电位移饱和，临界电流密度，裂纹尖端张开位移，Bean 模型，Kim 模型，磁滞伸缩。

Investigations on critical-state problems in electromagnetic materials with multi-field couplings

Abstract

With the development of science and technology, the elastoplastic materials, piezoelectric materials and type-II superconductors play more and more important roles in our life. There are similar nonlinear and critical effect among these materials, such as the stress yielding effect in elastoplastic materials, polarization saturation in piezoelectric materials and critical current density in type-II superconductors, etc. The critical problems is important to the evolution of the systems. In this case, it is necessary and important to investigate the nonlinear critical problems of these materials in view of foundational research and engineering applications.

The nonlinear critical problems of stress-strain fields in plastic zone near the crack tips in elastoplastic materials, the stress-electric fields in stress-yielding zone and polarization saturation zone near crack tips in piezoelectric materials and critical current density and flux penetration in type-II superconductors are investigated theoretically in the present thesis.

Firstly, we proposed the strip hardening model to study the crack tip opening displacement in elastoplastic materials based on the piecewise-linear stress-strain relation. The hardening function is introduced to describe the degree of average hardening in plastic zone near the crack tip. The strip hardening model is solved by simplying the nonlinear stress-strain relation. The singularity of stress at the crack tips is also eliminated. The size of strip hardening zone and crack tip opening displacement (CTOD) are derived and the dependence of strip hardening zone size and CTOD on hardening parameters is also discussed. It is found that the larger the hardening parameters (E/E_{tan} and σ_u/σ_Y) are, the smaller the strip hardening size is. The strip hardening model is also successfully used to interpret the experimental results, which suggest the COD design curve is not valid for the materials with the ratio of yield stress and ultimate stress beyond 75~80%. Thereafter, the relationship between CTOD and overall strain is also derived. By comparison, the theoretical results are in agreement with the experiments.

Secondly, the effect of applied electric field on crack propagation in piezoelectric materials is investigated. It is assumed that both polarization saturation strip and stress-yielding strip appears near crack tips based on the ideal stress yielding model and polarization saturation model, which is used to eliminate the singularity of stress and electric displacement at crack tips. The electric crack tip opening displacement (ECTOD) and mechanical crack tip opening displacement (MCTOD) are derived in two cases based on the size of polarization saturation strip and stress-yielding strip.

A new fracture criterion, i.e., MCTOD is proposed for the piezoelectric materials. The MCTOD fracture criterion predicts that the existing contrary experiments may be induced by the different size of polarization saturation strip and stress-yielding strip because of different electric domain switching.

Finally, the electromagnetic properties and magneto-elastic behaviors of Type-II superconducting strip in different physical fields are considered based on field-dependent critical state model. The current density and magnetic field distributions in superconducting strip is derived by conformal mapping in three different cases, i.e., transport current, applied magnetic field, and in the simultaneous presence of applied field and transport current. The advantage of the method is that the integral equations are valid for arbitrary field-dependent critical state models. For the special cases with small transport current or applied field, analytical results are obtained rather than solving the complicated integral equations. It is demonstrated that the current density and magnetic field distributions, and penetration depth of field-dependent critical state model can be derived from the results of Bean model by a scaling factor. The characteristic of ‘current-like’ and ‘field-like’ current density and magnetic field distributions is discussed. The body force, strain, displacement at field ascent and descent branches and magnetostriction loops are obtained based on Kim model and Bean model. In the last, the influence of geometry on critical current in thin high-T_c superconducting tape is also studied based on Kim model. The numerical procedure to calculate the critical transport current of superconducting strip with arbitrary geometry is presented. The development of critical current in different types of superconducting strip is also discussed in the thesis.

Keywords: critical-state problems, elastoplastic materials, piezoelectric materials, type-II superconductors, stress yielding, strain hardening, polarization saturation, critical current density, crack tip opening displacement, Bean model, Kim model, magnetostriction.

目录

摘要.....	I
Abstract.....	III
第一章 绪论	1
1.1 研究背景.....	1
1.1.1 塑性材料的应力屈服现象.....	1
1.1.2 压电材料的电位移饱和现象.....	1
1.1.3 超导材料的基本特性和临界态模型.....	3
1.1.4 系统中的临界态效应和非线性效应.....	6
1.2 研究现状及进展	7
1.2.1 塑性材料和压电材料的断裂力学.....	7
1.2.2 实用 II 类超导体的电磁性质	10
1.2.3 实用 II 类的力学性质	13
1.3 本文主要工作.....	14
第二章 非线性塑性材料硬化效应对裂纹扩展的影响	16
2.1 非线性弹塑性本构模型和基本断裂准则.....	16
2.1.1 弹塑性应力应变模型.....	17
2.1.2 常见断裂准则.....	18
2.1.3 Dugdale 模型与裂纹尖端张开位移	21
2.2 条带硬化模型.....	24
2.2.1 线性硬化材料的简化本构方程.....	24
2.2.2 条带硬化模型和裂纹尖端张开位移.....	27
2.2.3 应变硬化对裂纹尖端张开位移的影响.....	30
2.3 本章小结.....	36
第三章 电场对压电材料裂纹扩展的影响	38
3.1 压电材料断裂在实验和理论方面的研究现状.....	38
3.1.1 电场对断裂韧性的影响实验结果.....	38
3.1.2 几种压电材料断裂准则.....	41
3.2 压电材料断裂准则——裂纹尖端机械张开位移.....	44
3.2.1 应力条带屈服-电极化条带饱和模型	45
3.2.2 压电材料裂纹尖端机械张开位移断裂准则.....	50
3.3 压电材料反平面断裂问题.....	51

3.3.1 压电材料力学反平面条带电极化饱和模型.....	52
3.3.2 电位移松弛模型求解电极化饱和区.....	55
3.4 本章小结.....	56
第四章 场相关临界态模型下超导薄带电磁响应及力学变形.....	57
4.1 实用 II 类超导体基本问题.....	57
4.1.1 平行磁场和垂直磁场下超导薄带问题.....	57
4.1.2 超导体场相关临界态模型.....	59
4.2 场相关临界态模型下超导薄带的解.....	60
4.2.1 垂直磁场下的超导薄带.....	61
4.2.2 外加电流下的超导薄带.....	68
4.2.3 外加磁场和电流同时加载下超导薄带.....	73
4.3 基于场相关临界态模型超导薄带磁弹性问题.....	79
4.3.1 物理模型和基本方程.....	79
4.3.2 超导薄带在垂直磁场下磁弹性结果讨论.....	81
4.4 本章小结.....	86
第五章 横截面形状对超导带材临界电流的影响.....	87
5.1 超导薄带厚度对临界外加电流的影响.....	87
5.2 不同横截面形状超导带材的电流密度分布和临界外加电流.....	90
5.2.1 物理模型和基本方程.....	90
5.2.2 结果和讨论.....	92
5.3 本章小结.....	97
第六章 结束语.....	98
附录.....	101
参考文献.....	114
在学期间的研究成果.....	126
致谢.....	128

第一章 绪论

材料在制备过程和实际工程应用中,内部不可避免出现裂纹等缺陷,对于像低碳钢等塑性材料来说,由应力集中造成裂纹尖端出现一定范围的塑性区,而非线性塑性变形对于裂纹的扩展有很大影响。而对于像压电、铁电材料来说,由于力-电耦合效应以及非线性电位移饱和等效应,复杂的物理环境对于材料内裂纹的扩展值得去深入考虑。另外,超导材料由于其具有不同于常规导电材料的特殊物理性质一直是研究的热点。伴随对超导基本物理问题的研究和各种超导材料的制备与发展,尤其是高温超导材料的发现,极大地推动了超导在电能输送、磁流体发电、超导强磁体等多个领域的应用[1, 2]。因此,研究实用 II 类超导体在外加电流、外加磁场等复杂物理环境下的电磁场分布以及力学变形对于超导的实际工程应用非常重要。

1.1 研究背景

1.1.1 塑性材料的应力屈服现象

对于像低碳钢这样的塑性材料,如图 1.1 (a) 所示,其单轴拉伸曲线可以分为线弹性阶段,塑性屈服阶段、强化阶段和局部颈缩阶段[3]。在外加力比较小的时候,材料处于线弹性阶段,服从胡克定律,当外加力卸载时,材料的应力应变关系可以原路返回到无应力状态。但是当外加力超过比例极限后,材料发生一定的塑性变形,应力应变关系不再满足胡克定律。因此,当材料内部含有裂纹时,即使外加载荷比较小,但是由于裂纹尖端存在应力集中现象,所以裂纹前端的应力首先达到屈服应力,形成一定范围的塑性区域;随着外加载荷的不断变大,达到屈服应力的范围越来越大。当假设理想弹塑性关系时,塑性区域的应力始终等于屈服应力,处于临界状态。随着外加应力的增加,由于塑性区所有点的应力已经达到临界状态,不可能再增加,因此应力屈服范围不断扩大。由于塑性区应力处于临界状态,所以如果塑性区内部的应力分布发生变化,会影响到整个塑性区范围的改变。如果不是理想弹塑性模型,例如考虑材料硬化,即塑性区的应力和应变有关,此时裂纹尖端的塑性区的应力同样处于一种临界状态,只是临界值不再是一个常数(屈服应力)。

1.1.2 压电材料的电位移饱和现象

压电材料作为一种特殊的智能材料,广泛地应用于传感器,转化器、制动器

和智能机器人等现代科学技术中[4-7]。除了压电效应，压电铁电材料还有一个重要的物理特性---电极化特性。电介质在外加电场作用下，内部质点的正负电荷的中心会发生分裂，转变成偶极子，这种极化叫做位移极化。如果电介质本身就有极化分子，没有外加电场，极化相互抵消；但是在外加电场作用下，极化分子取向发生转动，使极化轴趋向于电场方向，这种极化称为取向极化。对于铁电材料来说，其内部自发极化取向相同的微小区域称为电畴。而且在没有外电场的情况下，这些电畴都有自己的极化方向，由于电畴取向杂乱无章，所以总体上相互抵消，没有极化强度。但是在外加电场的作用下，有些电畴的方向开始发生改变，称为电畴翻转。随着外加电场的增大，铁电材料内部的电畴的取向越来越趋向于电场方向，从而导致宏观的极化强度[7]，如图 1.2 (a) 所示。

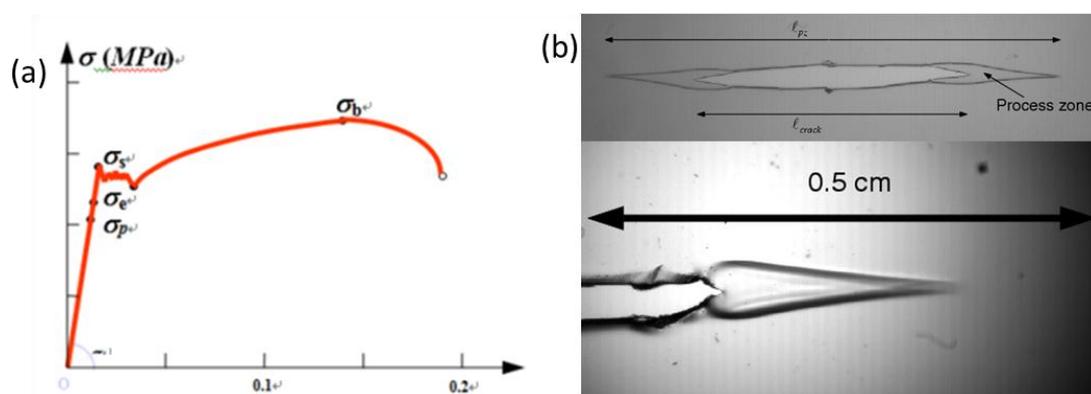


图 1.1 (a) 塑性材料的单轴拉伸曲线和 (b) 裂纹尖端塑性区[8]

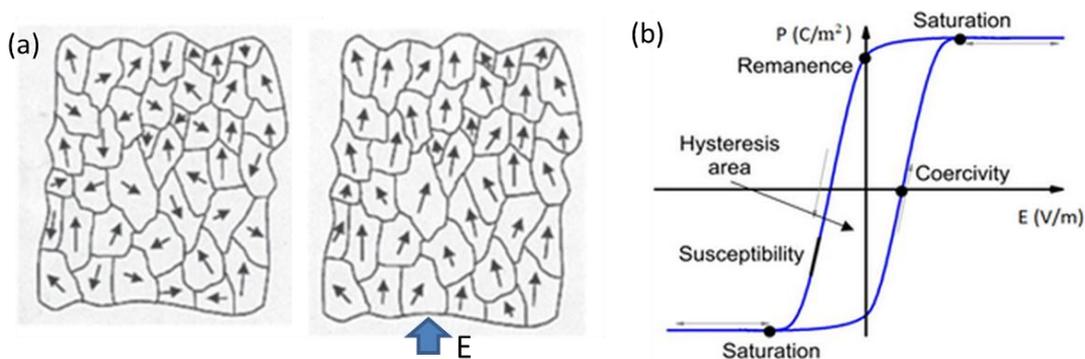


图 1.2 无外加电场和有外加电场下铁电材料的电畴示意图；典型铁电陶瓷的电滞回线[7]

图 1.2 (b) 给出了铁电材料在外加电场下的电极化曲线。我们可以看到，电滞回线和磁滞回线很类似，如图所示，当外加电场超过一定强度以后，所有的电畴都发生了翻转，而且取向和外加电场基本一致，此时的极化已经接近饱和，整个铁电材料成为一个单畴，宏观上表现出饱和极化强度，对应的电位移为饱和电位移。在电极化曲线上就表现出电位移在一定的电场强度之后逐渐趋向于水平直线，不会随着外加电场而变化。由于电位移饱和现象，本构方程不再是简单的

线性关系，电位移和电场之间是非线性的关系，这种现象与理想弹塑性本构模型类似。

1.1.3 超导材料的基本特性和临界态模型

1911年，Onnes[9]采用液氮作为低温源在研究汞等材料的电阻随着温度的变化规律时，发现随着温度下降到4.2K后汞的电阻突然消失，由此开启了凝聚态物理的一个新篇章——超导电性。随后发现金属铅也是超导材料，如图1.3所示，采用传统四接线法测得的金属铅的临界温度为7.2K左右。由于超导体具有零电阻特性，因此在超导体内部的电流就不会产生损耗而衰减。1956年Collins通过实验证明了超导线圈内的电流经过两年半后依旧和初始电流相同。

除了超导的零电阻特性之外，Meissner和Ochsenfeld[10]还发现超导体的另一个重要的特性——完全抗磁性（内部 $\mathbf{B}=0$ ）。即当外加磁场低于临界磁场时，磁场被完全排斥在超导体以外，而且他们发现这个现象与外加磁场的加载历史没有关系。当超导体零场冷却后，给超导体施加磁场，会在超导的边缘诱导出了迈斯纳电流，产生了和外加磁场大小相同方向相反的磁场，从而产生了完全抗磁性。当超导体在一定的外加磁场冷却后，超导体表面同样会即刻产生迈斯纳电流，从而完全排斥磁场。而且随着磁场的降低，迈斯纳电流也会随之减小，最后随着外加磁场的消失而减小到零。我们可以看到，超导零电阻性质并不能推出超导体的Meissner效应。因此，超导的零电阻特性和Meissner效应是超导体两个相互独立的性质。

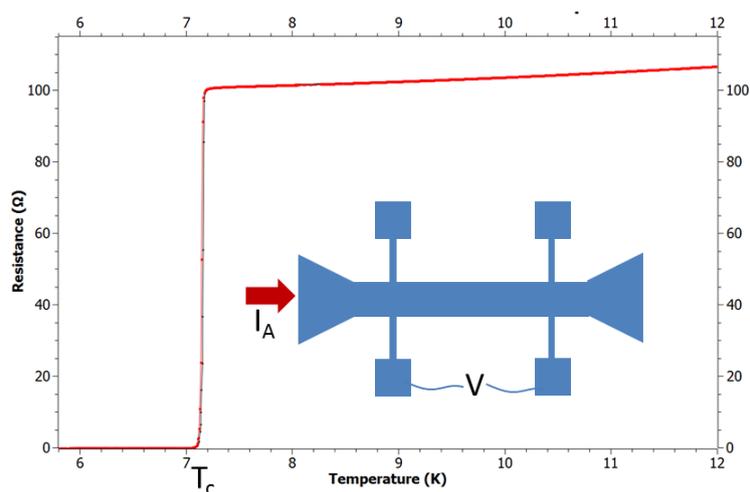


图 1.3 采用四接线方法测得金属铅的电阻随着温度的变化曲线和临界温度

1935年，London兄弟[11]给出了第一个描述超导现象的理论，即London方程。根据London方程，磁场在超导体表面有一定的穿透深度（ λ_L ），而且在超导体内磁场时按照指数衰减的。一般来说，磁场的穿透深度相对于超导体的宏观

尺寸来说很小。1950年，金兹堡和朗道[12]根据朗道二级相变理论提出了唯象的金兹堡-朗道方程（GL方程），用来描述超导体的物理性质。GL方程中序参量的模表示超导电子的密度，当完全超导态时，序参量模等于1；当变成正常态时，序参量为零。Abrikosov[13]根据GL方程，从理论上预测存在完全不同的两类超导体。当 $\kappa < 1/\sqrt{2}$ （ $\kappa = \lambda/\xi$ ，其中 λ 和 ξ 分别为磁场穿透深度和相干长度）时，超导界面能是正的，此时超导体称为I类超导体。如图1.4（a）所示，此类超导体只有两种态，即迈斯纳态和正常态。当 $\kappa > 1/\sqrt{2}$ 的超导体称为II类超导体，此时的界面能为负的。如图1.4（b）所示，II类超导体分成三种态，当外加磁场小于下临界场 H_{c1} 时，超导体处于迈斯纳态，此时磁场被完全排斥在超导体外；当外加磁场介于下临界场 H_{c1} 和上临界场 H_{c2} 时，超导体处于混合态，此时磁通以量子化的涡旋（ Φ_0 ）形式进入超导体，磁通涡旋之间的相互作用是排斥的，而且在超导体内部排列成规则的晶格结构。随着磁场的升高，进入超导体的涡旋磁通越来越多。如果磁场超过上临界磁场，超导体变成正常态。

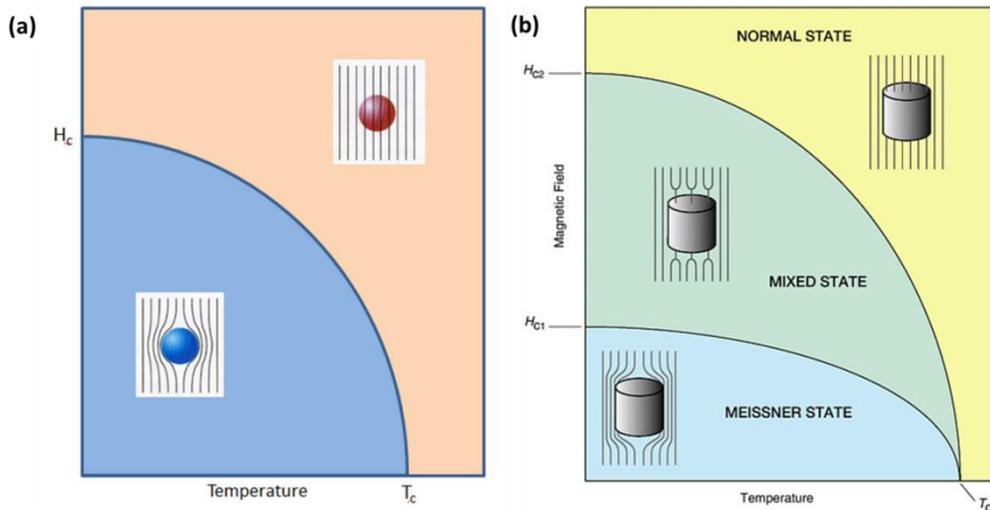


图 1.4 Type-I 和 Type-II 超导体的 H-T 相图

1957年，Bardeen, Cooper 和 Shrieffer[14]以近自由电子模型为基础发现了解释超导现象的微观机理（BCS理论），即在超导态，金属中自旋和动量相反的电子可以配对结合成 Cooper 电子对，Cooper 电子对通过交换声子相互作用。在晶格当中可以无损耗的运动，形成超导电流。1959年，Gor'kov[15]证明 BCS 理论在接近临界温度附近可以推导出 GL 理论。1986年，Bednorz 和 Muller[16]发现了镧钡铜氧体系超导体，其临界温度达到了 35K，随后掀起了研究高温超导体的热潮，更多的高温超导体（如 YBCO 和 BSCCO）随后被发现，不仅改变了人们对高温超导的认识，而且将超导体的临界温度提高到了液氮温区，从而改变了只能用昂贵的液氦来研究超导性质的局面。2006年以来，日本科学家首先发

现了铁基超导体[17]，随后中国学者对对铁基超导体进行了广泛地研究，不断刷新铁基超导体的临界温度。2015年，研究人员发现硫化氢在高压下出现了超导电性，而且其临界温度高达 203K[18]。

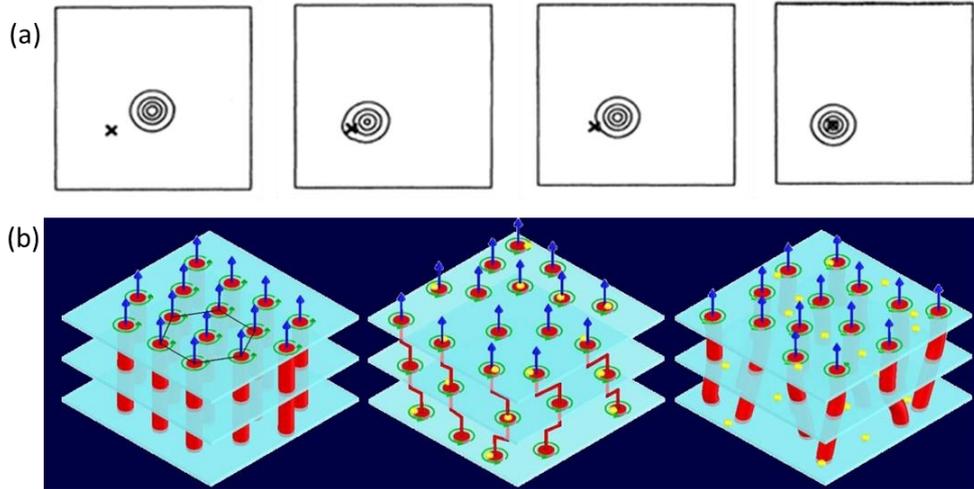


图 1.5 (a) 钉扎中心钉扎涡旋过程[19]; (b) 理想和非理想 II 类超导体涡旋排布示意图[20]

对于理想 II 类超导体，由于洛伦兹力作用，很小的外加电流就可以驱使涡旋运动，所以其临界电流和临界磁场很小，很难在实际工程中应用。但是如果对超导体进行急速淬火、用快中子进行辐照或者掺入杂质，从而在超导体内部引入缺陷等钉扎中心，如图 1.5 (a) 所示，这些缺陷会对涡旋有一定的钉扎作用（钉扎效应），此类超导体称为非理想 II 类超导体。如图 1.5 (b) 所示，在理想 II 类超导体内的磁通涡旋会排列成理想的涡旋晶格结构，但是在非理想 II 类超导体内，绝大多数涡旋会在会被钉扎在缺陷内。因此在外加电流下，由于这些缺陷对涡旋有一定的钉扎力，从而平衡电流对涡旋产生的洛伦兹力。一般需要很大的电流才能驱使涡旋脱离钉扎，因此，一般非理想 II 类超导体具有很高的临界电流和临界磁场。实验上发现，当退去外加磁场或者外加电流时，超导体内部会有剩余磁场，这是因为涡旋被钉扎在超导内部，因此出现了稳定的磁通俘获现象。而且实验上观测到非理想 II 类超导体的磁化曲线不再是可逆的，而是出现了磁滞回线现象，从而伴随有交流损耗出现。钉扎中心越多，对涡旋运动的阻力就越大，在磁化曲线上造成的滞后就越大。

为了解释非理想 II 类超导体的磁化现象，Bean[21, 22]提出了宏观的临界态模型用来描述实用超导体在磁场或者外加电流下的磁通穿透过程。当外加磁场超过下临界磁场后，磁场会以磁通量子涡旋的形式一个一个地进入到超导体内部。但是刚进去的磁通涡旋碰到缺陷后就被钉扎住了，不能继续往超导体内部运动。但是随着磁场的增加，作用在磁通涡旋上的洛伦兹力越来越大，当洛伦兹力超过钉扎力后，涡旋脱离钉扎继续运动，在碰到更里面的缺陷后又被钉扎住，而新穿

透进来的磁通涡旋也会被钉扎在后面的区域。如图 1.6 所示, 随着外加磁场的增加, 磁通涡旋不断脱离当地的钉扎往超导内部运动, 而且越靠近超导边缘, 磁通涡旋的密度越大, 远离超导边界磁通涡旋的密度越小。在超过一定深度的超导体内部区域, 还没有磁通涡旋进入, 这个区域仍旧保持完全抗磁状态, 磁场等于零, 而磁通涡旋穿透的区域的深度称为磁场的穿透深度。当外加磁场给定之后, 磁通涡旋在超导内部有一个分布规律, 不再随着时间而变化。此时被钉扎住的涡旋都处于一种临界状态, 主要稍微增加一点磁场, 磁通涡旋就会脱离钉扎继续往内部运动。Bean 提出了涡旋分布不随时间变化的临界条件, 即作用在每个磁通涡旋上的驱动力和阻力相等。例如, 在磁场穿透区域, 作用在涡旋上的最大钉扎力密度和实际超导体的材料以及内部缺陷密度等相关, 一旦给定超导材料, 那么相当于最大阻力分布形式就确定了。

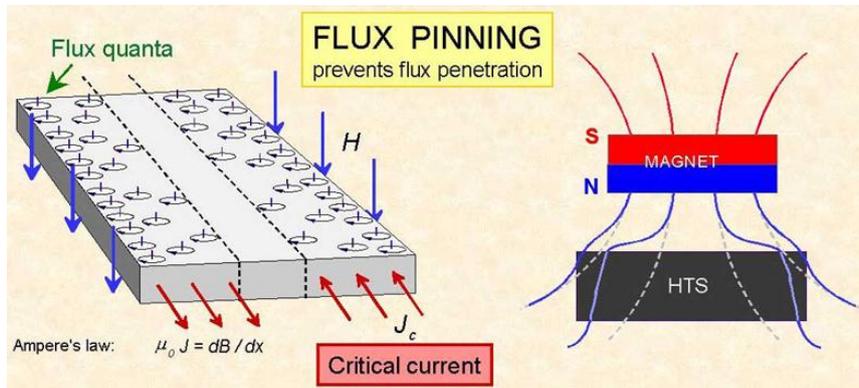


图 1.6 非理想 II 类超导体在磁场下的涡旋分布示意图[23]

由于缺陷分布的随机性, 一般很难确切给出最大钉扎力的分布形式, 另一方面, 目前没有实验方法能够直接测出超导体内的临界电流密度分布, 只能通过间接实验方法 (如测磁场分布) 推导出电流密度分布。因此 Bean 首先假设在磁场穿透区域, 临界电流密度是一个常数 ($j_c = constant$), 那么在作用在涡旋线上的洛伦兹力密度为 $F_L = Bj_c$, 一般可以通过临界态模型计算的结果与实验磁化曲线对比来确定超导临界电流密度。后来发现, Bean 假设的常数形式的临界电流密度分布只能定性的解释实验现象, 很不精确。因此, 在 Bean 模型之后, 出现了很多类型的临界电流形式, 如 Kim 模型[24, 25], 指数模型[26, 27], 线性形式[28]和幂函数形式[29, 30]等等。有了这些临界态模型, 理论上可以计算出任意形式的超导体在外加磁场和外加电流下的电流和磁场分布。精确计算超导体的电流和磁场分布是进一步计算超导体交流损耗, 磁化曲线, 磁致伸缩行为的基础, 从而为超导体的实际应用提供理论依据。

1.1.4 系统中的临界态效应和非线性效应

<临界态效应> 将超导体的临界态模型与前面的弹塑性本构模型与电位移饱

和模型对比分析,我们可以看到,尽管它们是属于不同的物理系统,但是其中的数学问题确实非常相似的,都是属于一个区域内临界态问题。对于弹塑性材料来说,塑性区域内的应力等于屈服应力(或者某种形式的应力形式);对于铁电材料来说,饱和区域内电位移等于饱和电位移值;对于超导材料来说,磁通穿透区域内的电流密度等于临界电流密度。因此,从数学上看,这些现象都是物理系统在某个区域内某物理量(应力,电位移,电流密度)达到了一个临界值,该区域处于临界物理状态,由于临界状态的限定,该区域的这些物理量不能超过临界值,而是临界区域的扩张问题。

当物理系统发展到特定状态时,相关的物理量将随之发生突变,我们将此物理量的值叫做临界值,对应的特定物理状态称为临界状态。因此,临界状态可以看做物理系统发生状态质变的转折点。一个系统里不同物理量之间一般存在相互制约的关系,其中当某个或者某些物理量的变化达到极限状态或极值时,就会伴随临界现象的产生。临界问题对于系统的演化和发展起到非常重要的作用。

<非线性效应> 上面介绍的这些物理现象不仅具有相似的临界值效应,而且这些物理系统还表现出了很强的非线性效应。具体来说,对于弹塑性材料,随着外加载荷增大,裂纹尖端便会出现塑性区域,塑性区域内的应力-应变关系不再满足线性胡克定律,而是具有非线性效应。对于压电材料,当电位移区域饱和时,电位移与外加电场不再是线性关系,而随着外加电场增加会趋于饱和值。对于实用 II 类超导材料来说,一个倾斜磁场下的超导体电流和磁场分布问题不能采用叠加原理将倾斜磁场分解为水平磁场和垂直磁场再叠加进行求解。因此,分析和研究这些物理系统的非线性临界态问题不仅从基础研究角度很有意义,而且对于材料的实际工程应用也非常重要。

1.2 研究现状及进展

Prigozhin[31]从数学角度研究分析了沙堆、河流网、II 类超导体、弹塑性材料等不同物理系统的临界态问题存在着相似性。下面我们介绍塑性材料、压电材料中断裂问题和 II 类超导材料与临界态问题相关的力电磁方面的研究进展。

1.2.1 塑性材料和压电材料的断裂力学

由于材料制备工艺和实际应用过程中材料疲劳都会导致材料内部出现不同大小的裂纹。我们知道在缺陷附近会存在明显的应力集中现象,根据材料线性本构方程,可以得出应力在裂纹尖端会有奇异性(应力无限大)。为了描述和刻画不同几何形状的材料和不同外加载荷下不同的应力奇异性, Irwin 提出了应力强度因子, $K = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma(r)$, 并证明了在线弹性情况下,应力强度因子 K 和裂纹

尖端能量释放率 G 是等价的。根据应力强度因子 K 和能量释放率 G 建立了裂纹是否扩展的判据, 即当应力强度因子 K (或能量释放率 G) 大于材料的临界应力强度因子或断裂韧性 K_c (或 G_c) 时, 裂纹就开始扩展。但是, 以应力强度因子为标志建立的线弹性断裂力学只能适用于脆性材料和低外加载荷下的塑性材料, 即当裂纹尖端的塑性区域相对于裂纹长度来说很小才能成立。

材料的极限应力不可能无限大, 实际上裂纹尖端应力超过屈服应力后, 随着外加载荷的增加, 在裂纹扩展之前裂纹前端的塑性区域会不断扩大。Irwin 等人 [32] 最早考虑了一个简单的塑性模型, 提供了第一个定量描述裂纹尖端塑性区理论。因此, 他们假设裂纹尖端的应力分布不再是根据线弹性模型计算出来的那种奇异性的分布形式, 而是由于在较小的范围内塑性变形的存在使得材料出现了一定的应力松弛。

Rice 和 Cherepanov [33, 34] 提出的 J 积分, 理论上 J 积分适用于没有卸载的任意弹塑性材料, 本构方程可以是线性的也可以是非线性的。因此 J 积分奠定了弹塑性断裂力学的基础。 J 积分描述了流向裂纹尖端区域的能量多少。因此, 裂纹尖端的应力和应变奇异性也可以用 J 来表达, 尤其是对于线弹性材料, J 积分和能量释放率是等价的。Hutchinson [35] 与 Rice 和 Rosengren [36] 根据幂次本构方程建立了著名的非线性 HRR 场, 结果表明裂纹尖端还是存在应力奇异性, 只是应力奇异性的规律和本构方程中的幂指数有关系。从此开始, 在这方面不少学者在实验和理论两方面做出了很多有意义的工作。Begley 和 Landes [37-39] 基于 J 积分建立了弹塑性力学的基本判据。Rice 等人 [40] 根据含有深裂纹的弯曲试样, 提出了采用单试样测量临界 J 积分方法。Tunner [41] 引入了与几个形状有关的参数 (η 因子)。Larsson 和 Carlsson [42] 采用有限元方法研究了非奇异应变项和试件尺寸对弹塑性裂纹尖端屈服区域的影响。Rice [43] 进一步研究阐释了裂纹尖端形变的非奇异应力。McMeeking 和 Parks [44], Shih 和 German [45] 的研究表明, 对于应变硬化材料裂纹尖端的弹塑性应力应变场与材料的几何形状和加载速率相关。对于裂纹尖端塑性区域比较大情形时, O'Dowd 和 Shih [46] 提出了裂纹尖端双参数断裂准则, 即 J 和 Q 准则。根据 HRR 场的分析方法, 在随后的研究中, 李尧臣和王自强建立了裂纹顶端弹塑性高阶场的基本方程, 求得了平面应变问题的二阶场, 证实了二阶场的幅值系数在中心裂纹顶端弹塑性场起着非常重要的作用 [47]。Xia、Wang 和 Shih [48] 以及 Yang 等人 [49] 进一步研究了裂纹尖端高阶场, 即将应力势函数展开为五项, 得到了前五项的完整结果, 证明了本征级数前五项展开式只含有 3 个独立的参数。基于高阶场的分析结果, 魏悦广和王自强提出了 $J-k_2$ 双参数断裂准则 [50], 该准则给出了断裂韧性上、下限曲线, 能够很好的预示 Kirk 等人 [51] 的实验结果。

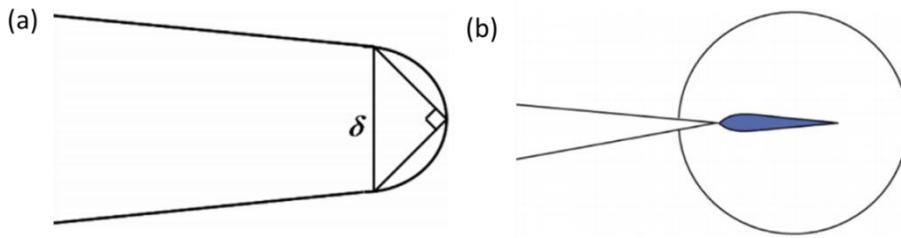


图 1.7 裂纹张开位移和裂纹尖端颈缩区域示意图

在弹塑性断裂力学里面，另一个为人所熟知的理论就是 Dugdale 提出的条带应力屈服模型[52]，以及根据条带屈服模型提出的裂纹尖端张开位移作为断裂判据[53-55]。但是条带塑性模型一般忽略了材料的硬化作用，尤其是当外加力超过半个屈服应力时，条带屈服模型基本失去了意义。根据 HRR 奇异性场并采用幂次应变硬化模型，Shih[56]数值计算了裂纹张开位移（COD，如图 1.7a 所示）并研究了 COD 和 J 积分之间的关系。当薄板在拉伸应力作用下，Schaeffer 等人[57]实验上观察到了裂纹前端存在一个条状的颈缩区域（如图 1.7b 所示）。因为存在着材料的硬化作用，所以颈缩区的大小要比根据 Dugdale 计算出来的条带屈服区域小很多。

由于压电材料力电耦合特性，外加电场会影响裂纹尖端的应力场分布，从而会影响到裂纹扩展。上个世纪 70 年代，Kudriavtsev、Parton、Cherepanov 等人开始研究压电材料断裂问题[58-61]。到了 80 年代，Deeg 建立了含共线型位错和电荷偶极线模型，采用 Green 函数方法研究了压电材料含一般缺陷的力学问题[62]。Sosa 和 Pak 利用本征函数展开法研究了无限大压电裂纹问题，得到裂纹尖端电场和应力有相同的 $r^{-1/2}$ 奇异性[63]。Pak 求解了反平面的 III 型裂纹问题，将守恒积分推广到压电材料的断裂问题中，并且提出了电位移强度因子和电场强度因子[64]。Zhang 和 Tong[65]通过复电势计算得到了椭圆孔附近的应力应变场和电场的解。1992 年，Suo 等人对前人做的压电断裂问题进行了总结[66]，通过分析发现了一类新的奇异性，从而在裂纹尖端有两类奇异性，即 $r^{-1/2+i\epsilon}$ 和 $r^{-1/2+\kappa}$ 奇异性。这一结论被 Ou 等人的数值和理论结果验证[67, 68]，他们并且发现横观各项同性压电介质，两类奇异性不能同时存在。为了解释已有的理论与 Pak 和 Sun 的实验[69]不符，Gao 等人[6]将 Dugdale 模型[12]推广到压电断裂中，提出了条带电极化饱和模型(PS 模型)，通过简化方程求解了无限大压电体平面裂纹问题。2000 年，Wang 采用 PS 模型求解了各向异性压电体同样的裂纹问题[70]。在 Gao 之后不少研究者采用 PS 模型通过傅里叶变换方法和积分变化方法求解了不同的裂纹问题[71-78]。Zhang 等人对压电材料的断裂行为和破坏模型进行了研究和总结[79, 80]。陈增涛和余寿文采用积分变换技术，得到不同压电介质界面上的反平面运动裂纹问题的分析解[81]。

对于电场是如何影响压电材料扩展的,目前实验上主要报道了两种截然不同的实验结果[7],(i)正电场降低断裂韧性,而负电场增加断裂韧性[69, 82, 83];(ii)正负电场都是降低压电材料的断裂韧性[84, 85]。对于压电材料断裂来说,目前研究人员提出了很多种断裂判据,例如机械能释放率[69]、局部 J 积分或局部能量释放率[6]、修正的应力强度因子准则[70, 86, 87]、能量密度[88-90]、COD 准则等等[87]。但是目前已有的这些理论判据只能解释其中一种实验结果,并不能同时解释两种以上的实验现象。

1.2.2 实用 II 类超导体的电磁性质

由于 Bean 临界态模型简单,在实际中方便计算超导体处于外加磁场时的电流密度和磁场分布,以及相应的交流损耗和交流磁化规律,因此得到了广泛地应用。当外加磁场平行于无限长的超导圆柱或者无限大的超导厚板的侧面时,由于磁场或者磁场线沿着磁场方向没有变化,因此,对于这些结构来说,不需要考虑退磁效应,沿着圆柱径向或者沿着超导平板厚度方向的磁场穿透分布和电流密度的分布可以直接通过 Bean 临界态模型计算得到。磁场的梯度等于临界电流密度大小,而超导体内的电流密度分布要么等于临界电流 J_{c0} 要么等于 0。关于这些结构在平行磁场下的磁场穿透,电流分布和磁化规律已经得到了广泛的研究[91-95]。

但是当外加磁场垂直于超导圆盘或者垂直于超导薄带时,由于这种情况下的超导体具有很强的退磁效应,超导圆盘或者超导薄带磁场和电流密度分布不能再根据简单的微分关系进行求解。Schuster 等人[96]采用 Bean 模型给出了当磁通全部穿透超导体时的结果,此时整个超导体全部是临界电流密度。在磁场部分穿透超导圆盘和超导薄带时,为了保持内部区域完全抗磁性,超导体内部电流密度不再是平行磁场下那种要么是临界电流密度要么是零的简单分布,而是在整个超导圆盘或者超导薄带都会有电流分布;磁场分布也变得非常复杂,不再是平行磁场下通过简单的积分就能得到。为了方便区分,对于垂直磁场下临界态模型里面假设临界电流密度是常数的情形,我们仍然称为 Bean 模型。Norris 采用 Bean 临界态模型通过保角变化方法计算得到了超导薄膜在外加电流下的磁场和电流密度分布公式,并进一步计算得到了超导薄膜交流损耗的公式。Swan[97]通过计算得到了和 Norris 相同的磁场和电流密度分布公式。Brandt 等人[98]根据 Bean 模型研究了外加磁场垂直于 II 类超导薄膜时电流密度和磁场分布。Brandt[99]还研究了超导薄圆盘在垂直外加磁场下的磁场和电流的分布,并且和超导薄带在垂直磁场下,超导圆柱和超导板在平行外加磁场下的结果进行了对比。Clem 和 Sanchez[100]进一步计算了超导薄盘的磁滞交流损耗和交流磁化系数。Brandt 和 Indenbom[101]研究了更复杂的加载情形,即当外加电流和外加垂直磁场同时线

性加载时,在不考虑磁场退出的情况下,他们计算得到了电流密度和磁场的分布的解析表达式,电流和磁场分布打破了对称性分布,而且将电流和磁场的分布形式分为两类,‘类电流’分布和‘类磁场’分布;并指出即使电流和磁场同时增加,也有可能对应一侧的穿透深度会减小,此时数学结果并不会对应任何实际物理现象。Zeldov 等人[102]研究总结了超导薄带在各种电流和磁场加载情形下电流密度分布和磁化性质,并且和超导薄板在平行磁场下进行了对比。

Mikheenko 和 Kuzovlev[103]采用 Bean 模型研究了无限长的超导圆柱在垂直磁场下的电流和磁场分布,得到了精确的解析结果。Brandt[104]采用 Bean 模型给出了有限长的超导圆柱磁场穿透规律和磁化曲线,当圆柱体高度无限薄或者无限长两种极限情况下,可以退化到相应的解析结果。Mikitik 和 Brandt[105]同样采用 Bean 模型给出了计算横截面是扁椭圆形状的薄超导薄带在垂直磁场下的电流和磁场分布的近似解析结果。在横截面是圆形或者薄带情形时,结果可以退化到相应的精确解析结果。Mawatari 和 Clem[106]研究了无限大超导薄膜附近放一无限长且与超导薄膜表面平行的通电导线情形时,超导薄膜的磁场和电流密度分布等问题,此外还进一步考虑了超导薄膜上面放置两根平行的导线的情形。Clem[107]研究了纵向排列的超导薄带在外加电流时的磁场、电流分布和交流损耗等问题。Mawatari 和 Kajikawa[108]计算得到了放射状排列的超导薄带的交流损耗公式,讨论了交流损耗随着排列形式的变化规律。Mawatari[109]考虑了在外加磁场下无限多超导薄带排列成水平阵列和垂直阵列时磁场和电流分布问题,得到了解析结果,后来将结果进一步推广到了二维超导阵列结构[110]。对于外加电流圆弧型超导薄膜和垂直外加磁场下的超导薄壁筒两种情形, Mawatari[111, 112]进一步采用保角变换方法得到了电流和磁场分布公式以及交流损耗规律,并进一步得到了圆弧超导膜排列成圆形阵列时的交流损耗等问题。He 等人[113]考虑了铁磁基底对圆形阵列的超导线缆交流损耗的影响。

对于有限尺寸的超导体,例如正方形,长方形等,目前还没有求解这些问题的精确解法。对于横截面具有一定宽度和厚度的长方形,椭圆以及介于两者之间的任意几何形状的超导材料在外加电流情形下, Clem[114]给出了计算磁场、电流密度分布以及交流损耗等问题的解析方法和数值方法。Brandt[115]研究了如何采用 E-J 模型数值求解正方形或者长方形超导薄板在随时间变化的垂直外加磁场下的磁场分布等问题。Brandt[116]还根据 E-J 模型采用类似的数值计算方法研究了正方形超导薄板或者超导薄圆盘中间含有正方形或者圆形孔的问题。另外一种数值计算方法是 Johansen 小组采用类似 Brandt 的数值分析框架,并改进了计算方法,采用快速傅里叶变化,求解了很多有限尺寸的超导体的在随时间变化的外加磁场下磁通穿透等物理问题。Vestgarden 等人考虑了边缘含有半个圆缺口对超导带材在垂直外加磁场下的电流分布和磁场穿透的影响[117],并进一步分析了当

靠近超导边缘存在圆形洞时对超导电流和磁场分布的影响,他们的研究表明理论计算结果和采用磁光方法观测结果能够很好的吻合[118]。2012年,他们还考虑了从超导边缘放置一排洞对磁通穿透超导体的影响[119]。还有一种比较流行的数值计算方法是 Prigozhin[120-123]和 Sanchez 等人[124, 125]采用最小能量泛函方法得到各种形状的超导体的电流和磁场分布。Xue 等人[126, 127]采用复变保角变化方法求得了电流密度在裂纹尖端以 r^{-1} 分布,由此看出电流密度在裂纹尖端存在奇异性。Adami 等人[128]通过对超导材料 Al 进行实验,证实在超导拐角处确实存在电流密度集中现象。

Brandt[129]给出了如何根据实验测得的垂直磁场分量来计算超导内部的电流分布。Schuster 等人[130]讨论了如何利用法拉第磁光效应测量磁场穿透超导体(如铌, YBCO 和 BSCCO)现象,他们讨论了测试实验装置和磁光膜厚度等实验条件问题;此外,他们根据磁光方法和 E-J 关系模型从实验和理论上研究了 II 类超导体磁场穿透和退出超导薄膜的过程[131],并对比了长方形横截面(二维问题)和圆盘或者长带(一维问题)之间的磁场分布。随后,根据各向异性的临界电流密度, Schuster 等人[132]计算得到在磁场穿过程中磁场分布的各项异性性质。Theuss 等人[133]采用磁光方法测量了高温超导体 YBCO 的磁场的分布,然后根据测到的垂直磁场的分布,计算得到电流密度分布和体钉扎力大小。Dorosinskii 等人[134]同样采用磁光方法测试了高温超导体 YBCO 的磁场分布,并通过磁感应强度的梯度计算得到了临界电流密度 J_c ,他们还进一步研究了温度,磁场方向对临界电流密度的影响。Johansen 等人[135]采用磁光方法从实验上观测并计算出超导薄带在外加磁场下的电流密度分布,发现和临界态模型理论计算结果能够很好的吻合。Gaevski 等人[136]用磁光方法从实验上观测了高温超导薄带在外加电流时的磁场和去除外加电流后俘获场分布图,并且和理论计算结果进行了对比。

但是上面都是基于临界电流与磁场无关的 Bean 临界态模型得到的结果,对于临界电流和磁场相关的临界态模型(如 Kim 模型和指数模型等),在无限大超导平板或者超导圆柱处于平行磁场情形下已经得到很好地研究[137-139]。Hetland[140]等人采用 Kim 类型的临界态模型计算了超导平板在平行外加磁场下的磁滞回线和磁化系数等物理问题。然而对于垂直磁场下,尽管已经有了很多数值求解方法来求解任意场相关临界态模型问题[104, 141-144],但是得到精确的解析结果可以让我们更加深入的了解其中的物理意义。对于精确解方面的研究目前还不多见,只有 McDonald 和 Clem 采用权函数方法给出了超导薄膜在垂直磁场下电流密度和磁场的分布,并且发现磁滞回线的峰值恰好出现在外加磁场下降到零时候[145]。随后 Shantsev 等[146]通过实验证明了这个现象,由此也说明场相关临界态模型的准确性。Shantsev 等人得到了超导圆盘在垂直磁场下的电流和磁

场分布[147]，并计算了磁化曲线和交流磁化系数等磁性行为[148, 149]。另外 Mikitik 和 Brandt 给出了临界电流是各项异性，且和磁场是分段线性函数(图 1.8)时的精确解[150]。Brojeny 和 Clem[151]根据场相关临界态模型 (Kim 模型) 研究了超导薄带自场对临界电流密度的影响。

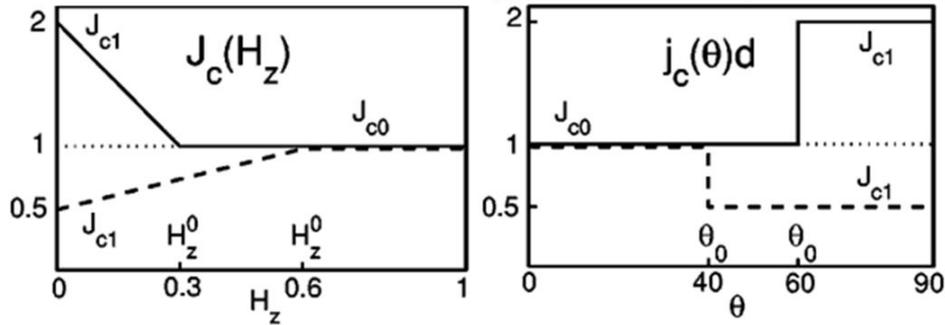


图 1.8 Mikitik 和 Brandt 采用的分段线性场相关临界电流模型[150]

1.2.3 实用 II 类的力学性质

由于超导涡旋被钉扎在超导体内部的缺陷上，根据临界态模型，为了平衡洛伦兹力，钉扎力大小等于洛伦兹力。反过来，超导体也会受到反作用力，因此超导体在外加磁场下会发生力学变形[152]。Ikuta 等人[153]在实验观测到超导体 BSCCO 在几个特斯拉外加磁场下的力学变形可以达到 10^{-4} 。Ren 等人[154]从实验上观测到了超导体在俘获磁场的同时，随着磁场的下降，超导体内部出现了裂纹。他们通过临界态模型理论计算表明，在磁场下降时，会出现拉应力，正是由于一般超导材料抗压不抗拉，所以才导致下降场时超导体内部出现了裂纹。因此，研究分析各种形状超导结构的变形等力学问题对于超导体的实际应用非常重要。Johansen 等人[155]研究了超导圆盘在外加磁场下的磁致伸缩性质。Eremenko 等人根据 Bean 模型研究了超导薄带磁致伸缩回线[156]。Nabialek 等人[157]计算了超导薄带钉扎引起的磁致伸缩。Johansen 等人[155, 158, 159]采用 Bean 模型和场相关临界态模型计算了在平行外加磁场下的无限长四方柱和圆柱超导体，超导平板以及在垂直外加磁场下超导薄圆盘的钉扎力、应力应变和磁致伸缩现象。Johansen 等人[160, 161]进一步采用 Bean 模型在极坐标下详细讨论了无限长超导圆柱体在平行外加磁场下的应力应变和磁致伸缩现象，并计算得到了一个循环外加磁场下的磁致伸缩回线，通过计算分析表明，在磁场下降，超导体内部出现了拉应力，因此采用临界态模型计算超导体的力学变形等性质可以更好的预测和分析危险应力出现的位置和对应的下降磁场大小。对于无限长超导圆柱体中间带有圆洞情形在外加磁场下的力学行为，Johansen 等人[162]研究发现在洞附近存在拉伸应力增强现象。Jing 等人[163]研究了超导薄膜和基底之间的力学作用问题，考虑了材料参数和几何因素以及界面处缺陷等对超导薄膜内正应力以及界面剪切应力的影响，结果表明界面处缺陷两端剪切应力存在很强的奇异性。Huang 等

人[164]采用 Bean 模型和最小磁能方法数值计算了超导薄膜内裂纹位置和尺寸对电流分布的影响,并进一步研究了垂直外加磁场下高温超导薄膜及复杂超导结构的磁化现象和力学性质。随着磁悬浮列车的应用,研究高温超导体磁悬浮系统静、动力学分析也是非常重要的课题[165-167],例如从理论和实验研究手段研究磁体的漂移和不同条件下电磁力等。

由于超导体在制备和实际应用过程中,不可避免的出现微裂纹等缺陷。因此,研究分析超导体内部裂纹尖端的应力集中现象,对于预测裂纹在很强的电磁力作用下是否扩展导致失效是一个非常重要的问题。Yong 等人[168-171]研究分析了多种情况下的超导平板在平行磁场下和超导带材在垂直外加磁场下的应力分布等力学问题,由于在下降场过程中会出现拉应力,他们还研究了超导体裂纹尖端应力强度因子等断裂问题。例如超导平板中含有中心裂纹时,裂纹应力强度因子随着磁场从不同值下降的过程中的变化规律,从而为判断实际超导体裂纹是否开裂提供了理论依据。Gao 等人[172, 173]研究了超导平板和超导带材内部存在两条共线裂纹、两条平行裂纹等断裂问题,并讨论了应力强度因子随着裂纹长度、裂纹之间距离变化下的规律。He 等人[174]根据场相关临界态模型研究了超导薄带单条裂纹、两条共线裂纹断裂问题,得到了不同磁场下裂纹能量释放率和应力强度因子,并讨论了和裂纹长度、裂纹间距之间的关系。Zeng 等人[175, 176]根据不同的临界态模型考虑了超导圆柱含有中心裂纹、边缘裂纹对电流密度分布的影响,并进一步通过有限元数值方法计算了裂纹尖端应力强度因子随着磁场下降和裂纹大小的变化规律。由于超导薄带临界电流密度与厚度相关, Yong 等人[177]进一步考虑了超导带材厚度对裂纹断裂的影响。对于超导平板内部含有倾斜裂纹问题, Wang 等人[178]研究了场冷和零场冷情况下裂纹尖端应力强度因子随着裂纹角度的变化规律。

1.3 本文主要工作

根据上面对塑性材料、压电材料以及 II 类超导体的介绍,可以看到这些材料中含有相似的非线性效应和临界态效应,本文从理论上对塑性材料硬化对裂纹扩展的影响,电场对压电材料裂纹扩展的影响,场相关临界态下的超导薄带的电磁场分布、力学变形以及临界电流等问题进行了研究,各章的安排如下:

第二章,根据双折线弹塑性本构模型研究了塑性硬化材料的断裂问题,提出了裂纹尖端条带硬化模型。从硬化材料非线性本构方程出发,通过合理的假设和简化并引入硬化函数,计算得到了裂纹尖端应力和张开位移的解析表达式。详细讨论了材料硬化参数对裂纹尖端张开位移的影响,扩展了裂纹尖端张开位移作为断裂判据的可用范围。进一步给出了裂纹尖端张开位移与标称应变之间的关系,

并和实验进行了对比说明了理论结果和实验吻合的很好。另外，我们提出的条带硬化模型解释了之前学者根据大量实验提出的 COD 设计曲线的应用范围为屈服应力和极限应力比值(σ_Y/σ_u)不能超过 75~80% 的原因。

第三章，对于压电材料，考虑了裂纹尖端应力屈服和电位移饱和双重非线性效应。根据理想弹塑性模型和理想电位移饱和模型，假设裂纹尖端不仅存在电位移饱和条带区，而且存在应力屈服条带区。通过这种双条带模型，消除了裂纹尖端应力场和电位移的奇异性分布，并计算得到了裂纹尖端机械张开位移和电张开位移的表达式。在此基础上，进一步提出了新的压电材料断裂准则，即裂纹尖端机械张开位移，根据这个新的断裂准则，解释了实验上出现两类现象的原因。最后考虑了压电材料力学反平面断裂问题，根据电极化条带饱和模型，得到了裂纹尖端应力-电场的分布和电极化饱和区的大小，并和采用类似 Irwin 的修正方法得到的电极化饱和区的大小进行了对比。

第四章，对于任意场相关临界态模型 $J_c(B)$ ，研究了多种加载情况下超导带材的电流密度和磁场分布。当超导薄带在外加电流、外加磁场、外加电流和磁场同时加载三种情况下，采用保角变换方法推导出了计算电流密度和磁场分布的积分方程组。而且在小电流和小磁场下，给出了磁场和电流密度分布以及穿透深度的近似解析表达式。在外加电流和磁场同时加载情形下，给出了‘类电流’和‘类磁场’分布的分界线并讨论了两种类型下的磁场和电流分布特点。分析了在‘类磁场’区域某些加载路径上电流密度和磁场分布不具有实际物理意义。在此基础上，采用 Bean 模型和 Kim 模型研究了超导薄带在垂直外磁场下的体力、应变、位移分布，根据两种模型分析了在一个周期外加磁场下磁致伸缩回线，并和实验进行了对比。

第五章，根据场相关 Kim 临界态模型研究了不同横截面形状对超导带材临界外加电流的影响。首先给出了计算任意横截面形状超导带材临界电流密度和磁场分布的数值方法，根据场相关临界态模型，由于自场会影响临界电流密度，通过选择几种不同的横截面形状，在不同的外加磁场下，得到了临界电流密度分布，并给出了临界外加电流随着横截面几何参数的变化规律。

第六章，对本文的工作进行了总结。

第二章 非线性塑性材料硬化效应对裂纹扩展的影响

在实际工程材料加工制备过程中, 尽管人们采取了各种办法, 但是很难完全消除裂纹等缺陷[179]。因此, 不管缺陷多么微小, 在复杂的外界环境下 (例如外加载荷, 高温等) 准确预测这些裂纹扩展对应的临界载荷非常重要, 尤其是一些大型仪器和航空航天设备[54]。线弹性断裂理论能够很好的描述脆性材料的裂纹问题, 此时裂纹尖端塑性区域的尺寸相对较小。但是对于塑性材料, 由于应力屈服和应变硬化作用, 裂纹尖端塑性区域的范围较大, 因此线弹性断裂力学对于有屈服和硬化现象的塑性材料就明显就失去了作用, 需要采用非线性断裂力学去研究材料硬化等因素对裂纹扩展的影响。

本章我们根据双折线弹塑性模型 (双折线应力应变关系) [35, 180], 考虑了材料的硬化效应, 提出了条带硬化模型。通过合理的假设和简化, 推导出了裂纹尖端张开位移表达式, 从而明确给出了塑性材料的硬化参数对裂纹张开位移的影响。通过与已有的一些实验结果比较, 结果表明条带硬化模型能够非常好地解释这些实验现象并能给出一些新的规律。因此, 对于塑性材料实际工程应用中出现了裂纹问题, 条带硬化模型提供了很好的理论基础。

2.1 非线性弹塑性本构模型和基本断裂准则

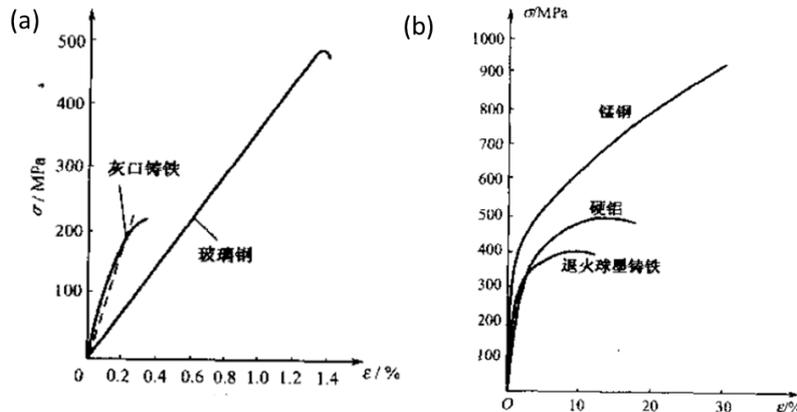


图 2.1 典型脆性材料 (a) 和塑性材料 (b) 拉伸曲线[181]

一般来说, 人们以光滑试件的拉伸试验将材料分为脆性材料和韧性材料两大类。这种分类比较简单, 就是以材料拉伸时延伸率 $\delta < 5\%$ 或 $\delta > 5\%$ 作为划分的标准。例如灰口铸铁和玻璃钢等脆性材料 (图 2.1a 所示), 其延伸率 $\delta < 5\%$, 这些材料的拉伸曲线一般不存在明显的屈服极限, 工程上常以 $\sigma_{0.2}$ 作为名义屈服极限[181]。脆性材料塑性变形能力较差, 通常可以近似地用弹性理论来进行分

析直至破坏[180]。对于像低碳钢（图 1.1a）、锰钢、硬铝（图 2.1b）等材料，在应力应变相对比较小的时候，材料的应力和应变满足线性规律，也就是服从胡克定律，即 $\sigma = E\varepsilon$ 。但是当材料处于大变形的時候，由于材料内部不仅有弹性变形，而且会有很大程度的塑性变形，例如低碳钢会出现明显的屈服阶段和硬化阶段，此时的应力-应变关系具有很强的非线性，不能再采用线性本构方程去分析。而一般材料的单轴拉伸或者压缩的实验曲线很难直接用于实际的分析计算。因此，人们往往根据不同材料在不同条件下的简单拉伸曲线的特点，将这些应力应变关系简化为几类便于实际分析应用的弹塑性本构模型。

2.1.1 弹塑性应力应变模型

在简单应力状态下，一般只考虑外加载荷从零开始不断增加的阶段，不考虑材料的卸载阶段，在这种情况下，一般常见的典型弹塑性模型有下面几种[180]，

(1) 理想弹塑性模型

对于像低碳钢这样存在明显屈服阶段或者较低强化率的材料，一般在应变不是很大的时候，可以忽略硬化效应，将应力应变关系简化为如图 2.2 (a) 所示的理想弹塑性模型。当材料由弹性阶段进入到塑性阶段后，随着应变的增加，材料的应变一直维持不变，等于材料的屈服应变。没有卸载时的应力应变关系可以写为：

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon, & \text{if } \varepsilon \leq \varepsilon_Y; \\ \sigma = \sigma_Y, & \text{if } \varepsilon > \varepsilon_Y, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

其中 $\varepsilon_Y = \sigma_Y/E$ 对应的是屈服应变。

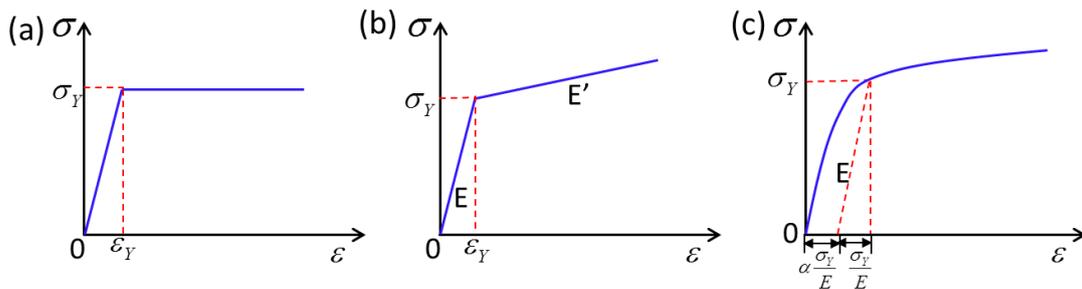


图 2.2 三种典型的简化弹塑性模型示意图[180]，(a) 理想弹塑性模型；(b) 线性硬化弹塑性模型；(c) Ramberg-Osgood 模型

(2) 线性硬化弹塑性模型

在简单拉伸实验里，对于大多数材料而言，当应力超出材料的屈服应力之后，材料会有一定程度的硬化或者强化阶段，如果材料硬化率比较大而且在一定的范围内变化不大时，可以将这种应力应变关系简化为两条直线，如图 2.2 (b) 所示，一条代表弹性变形阶段，一条代表硬化变形阶段。此时，应力应变关系可以写为如下形式，

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon, & \text{if } \varepsilon \leq \varepsilon_Y; \\ \sigma = \sigma_Y + E'(\varepsilon - \varepsilon_Y), & \text{if } \varepsilon > \varepsilon_Y. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

(3) Ramberg-Osgood 模型

在上面的理想弹塑性模型和线性硬化弹塑性模型里面，我们可以看到，在材料的屈服点（ $\varepsilon = \varepsilon_Y$ ），应力应变曲线不是光滑的。Ramberg-Osgood 模型就是为了描述非直线的应力应变关系而提出的，尤其是在还有较强的应变硬化的塑性变形，如图 2.2 (c) 所示，Ramberg-Osgood 方程给出了一个由弹性阶段到塑性阶段光滑过渡的本构关系[182]，

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n, \quad (2.1.3)$$

其中 K 和 n 是与硬化有关的材料常数。其中方程右边第一项代表材料的弹性变形，第二项代表材料的塑性变形。如果我们选择材料的屈服应力作为参考，可以将上面的方程改写成如下的形式，

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} \right)^{n-1}, \quad (2.1.4)$$

其中材料常数 $\alpha = K(\sigma_Y/E)^{n-1}$ ， α 和 n 分别表示材料的硬化系数和硬化指数。

从方程(2.1.4)可以看出，当应力小于屈服应力 σ_Y 时，由于硬化指数 n 比较大，方程右边第二项很小，材料变形主要是第一项的弹性变形；但是当总的应变比较大时（总应变明显大于 ε_Y ），第一项的弹性变形相对于第二项的塑性变形来说很小，根据实际计算方便，可以忽略第一项的弹性变形，此时的本构模型一般称为刚塑性模型。采用 Ramberg-Osgood 方程，Hutchinson 与 Rice 和 Rosengren 分别研究了 I 型裂纹在全量塑性理论下的渐进解[35, 36]，给出了应力应变场在裂纹尖端的奇异性，被称为 HRR 场，开启了研究弹塑性断裂力学的基础[183]。

2.1.2 常见断裂准则

当材料内部出现裂纹时，在外加载荷情况下，材料沿着裂纹什么时候开裂一直是断裂力学关心的中心问题。对于传统材料，随着断裂力学的发展和研究，目前主要有四种断裂判据，即应力强度因子准则（K），能量释放率准则（G），裂纹张开位移准则（ δ ）以及 J 积分准则。

(1) 应力强度因子 K

根据线弹性本构模型，许多力学家和应用数学家都相继发下了裂纹尖端附近应力存在奇异性，若在裂纹尖端建立极坐标系，则可以求得裂纹尖端附近的区域内，应力具有如下的渐进规律，

$$\sigma_{ij}(r,0) \propto \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad (r \rightarrow 0), \quad (2.1.5)$$

Irwin 分析了应力在裂纹尖端的这种分布性质 ($r^{-1/2}$ 奇异性), 并在 1957 年提出了新的物理量, 即应力强度因子 K , 其基本定义为

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, 0), \quad (2.1.6)$$

上面应力强度因子的定义可以看出, K 是一个仅与裂纹尖端局部相关联的量, 裂纹尖端附近的应力状态完全由应力强度因子参量来决定。一旦这些参量确定下来, 裂纹尖端附近的应力场就完全确定了。为了描述裂纹临界断裂, Irwin 用石墨做实验, 测出了裂纹扩展时的 K 值, 称为材料的断裂韧性。对于每一种材料, 在一定的条件下, 这个临界值是一个常数。于是 Irwin 提出了应力强度因子断裂准则:

$$K = K_c \quad (2.1.7)$$

上面基于应力强度因子建立的断裂盘踞, 标志着线性断裂力学的诞生。因此, 线性断裂力学的中心问题之一就是求解各种情形下的裂纹尖端应力强度因子。一般来说, 应力强度因子 K_I (K_{II} , K_{III}) 可以概括为

$$K_I = Y\sqrt{\pi a} p \quad (2.1.8)$$

其中 a 代表裂纹的特征尺寸, p 代表描写外场 (机械外应力, 或温度激发的外应力, 或者电磁场引起的外应力, 等等) 的作用。Y 描写裂纹几何和材料的几何形状的作用 (作为几何构型因素)。而断裂韧性 $K_{IC}(T, f(s))$ 一般与环境温度以及材料材质和热处理状态有关, 一般由实验测定给出, 而目前只有 I 型裂纹的标准测试规范[181]。

(2) 能量释放率 G

Irwin 认为 Griffith 判据左端的 $\partial(W-U)/\partial a$ 是有意义的, 并且将其称为裂纹能量释放率, 即

$$\partial(W-U)/\partial a = G \quad (2.1.9)$$

将 Griffith 判据右边的量设为临界值 G_c , 若对理想脆性体, 则 $G_c = 2\gamma$, 其中 γ 为材料的表面能。

为了克服能量释放率的计算上的困难, Irwin 发明了一种计算 G 的局部化方法, 即

$$\lim_{\delta a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta a} \int_a^{a+\delta a} \sigma_{yy}(x,0) u_y(x,0) dx \right) = G \quad (2.1.10)$$

根据这个定义, 数值计算能量释放率出现了虚拟裂纹扩展法和虚拟裂纹闭合法。对于 I 型裂纹, 能量释放率和应力强度因子的关系为

$$G_I = \frac{1+\kappa}{8\mu} K_I^2 \quad (2.1.11)$$

相应地，根据能量释放率的断裂判据为

$$G_I = G_{IC} \quad (2.1.12)$$

由于上面的应力强度因子准则和能量释放率准则都是建立在线弹性本构方程的基础上，因此，应力强度因子准则和能量释放率只适用于脆性材料断裂，也就是说适用裂纹尖端塑性区域较小的情形，所谓塑性区较小是指塑性区域与裂纹大小相比较小，此时裂纹尖端的应力应变场主要由 K 场控制[183]。当裂纹尖端塑性区域较大时，上面的两种断裂准则就已经失效，需要考虑非线性本构方程，因此需要采用新的断裂准则去分析。

考虑材料的非线性效应后，主要是揭示裂纹顶端较大范围内塑性变形的效应，这种塑性区可以很大，甚至扩展至整个裂纹所在截面。在塑性区，由于塑性变形和硬化效应等，裂纹尖端的应力分布不再是根据线弹性本构方程得到的应力具有奇异性，而是保持一个有限值。目前非线性断裂力学里，主要有两种断裂判据，即裂纹尖端张开位移和 J 积分。

(3) 裂纹尖端张开位移 δ

Wells 提出裂纹尖端张开位移是裂纹尖端塑性变形的一种度量，当裂纹尖端张开位移 δ 超过某一临界值 (δ_c) 后，就发生断裂。可以依据这个裂纹尖端张开位移作为断裂判据。关于裂纹尖端张开位移的定义有几种，例如基于 Irwin 应力松弛方法得到计算裂纹尖端张开位移[181]，Rice 采用在裂纹尖端的等腰直角三角形的斜边定义裂纹尖端张开位移(图 1.7a)，以及 Burdekin 和 Stone 基于 Dugdale 模型计算得到的裂纹尖端张开位移[54]。目前比较流行采用后面两种定义方式去计算裂纹尖端张开位移。基于 Dugdale 模型计算裂纹尖端张开位移方法以及裂纹尖端张开位移判据等将在下一节 (2.1.3 节) 详细讨论。

(4) J 积分

1968 年 Rice 和 Cherepanov 独立提出了 J 积分。首先定义如下应变能密度：

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (2.1.13)$$

那么应力应变的本构关系为

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (2.1.14)$$

上面的方程可以描述一类非线性弹塑性本构方程，也可以作为塑性全量理论，表征单调加载情况下常用工程材料的塑性行为，在这种情况下，应力应变仍有一一对应关系。如图 2.3 所示， J 积分的定义为

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds \right) \quad (2.1.15)$$

其中 \mathbf{T} 代表作用在曲线 Γ 微元 ds 上的外应力矢量, \mathbf{u} 为该处的位移矢量, Γ 为任意一条从裂纹下表面开始按逆时针方向到裂纹上表面的曲线。 J 积分提出之后, Begley 和 Landes 等人[37-39]用实验方法测出 J 的临界值, 并且建议

$$J = J_c \quad (2.1.16)$$

作为韧性材料断裂判据。

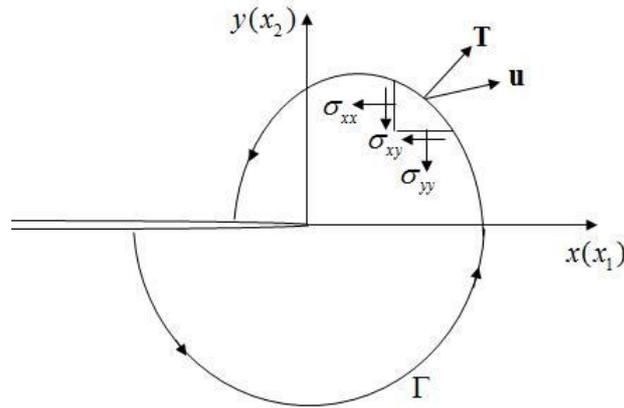


图 2.3 J 积分路径示意图[181]

J 积分的优点是适用于非线性材料和满足全量塑性理论的弹塑性材料, J 积分与积分路径无关, 而且在线弹性情况下和能量释放率相等。但是 J 积分的定义限于二维情况, 只适用平面问题, 而且 J 积分理论建立在塑性形变理论基础之上, 并不能用于卸载情况, 这就要求整个材料始终处在加载并且是单调加载状态下。这四种断裂判据是分析裂纹的基础, 随着断裂的发展, 其他的各种断裂判据基本都是基于这四种断裂判据的推广和发展。不仅如此, 以这四种断裂判据为基础, 还可以分析和研究其它材料, 例如压电、压磁等智能材料中的断裂问题 (见下一章的讨论)。

2.1.3 Dugdale 模型与裂纹尖端张开位移

在非线性弹塑性断裂力学中, 其中一个著名的工作就是 Dugdale 于 1960 年提出的条带塑性模型, 以及随后发展的裂纹尖端张开位移 (CTOD), 成为小塑性条件下的一个新的裂纹扩展判据。

对于含有穿透裂纹的薄板, 通过对大量的拉伸试验, Dugdale 发现在裂纹前端延长线上, 会存在一定长度的屈服区域, 而且注意到与薄板前后表面呈 $\pm 45^\circ$ 方向的倾斜面上出现了交叉的剪切带[181, 183]。由此, 如图 2.4 所示, Dugdale[52] 假设在裂纹前端延长线上的应力等于材料的屈服应力, 从而将原始旧的裂纹加上两端的条带屈服区域形成了一条新的等效裂纹, 等效裂纹的尖端也就是屈服区域

的边界点。Dugdale 模型的关键就是考虑了应力屈服效应，将应力在裂纹尖端塑性区域与非塑性区域分开，由于裂纹前端塑性区域比较薄，所以将裂纹前端的塑性区域简化为没有厚度的条带区域，在条带塑性区域，材料不再满足线性本构方程，而是根据理想弹塑性模型将条带塑性区域内应力分布假设为屈服应力；而在非塑性区域，材料还是线弹性的应力应变本构关系。从而通过这种方式将非线性本构方程（理想弹塑性模型，图 2.4a）转化为裂纹尖端的条带上的屈服应力分布问题，通过这种模型，就可以求解理想弹塑性本构方程下的裂纹问题，从而方便计算和求解，避免了直接求解和分析非线性方程。

当薄板处于一定的外加力下，外加力在裂纹尖端起到促进裂纹扩展的作用，而屈服区域内的屈服应力分布起到阻碍裂纹扩展的作用，从而达到一个平衡状态，此时，两种力在等效裂纹尖端的应力强度因子之和应该等于 0，因为等效裂纹尖端的应力分布不再存在奇异性，从而根据这个条件可以求得裂纹前端的塑性屈服区域的大小。

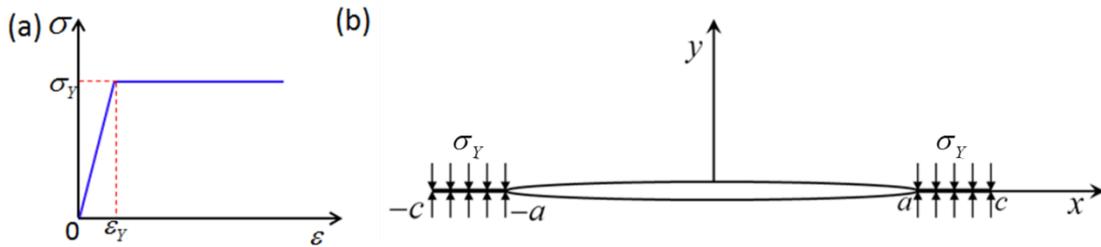


图 2.4 Dugdale 条带塑性屈服模型示意图[52]

在裂纹塑性区域内，在裂纹上下表面 $x=t$ 处作用一对楔力 P ，那么复势函数可以求得[183]

$$\Phi(z) = \Psi(z) = -\frac{P}{2\pi} \frac{\sqrt{c^2 - t^2}}{\sqrt{z^2 - c^2} (t - z)} \quad (2.1.17)$$

考虑到等效裂纹的左右对称的塑性区域相当于均匀分布着屈服应力，因此，左右屈服区域的屈服应力对应的复势函数可以由下面的积分公式得到，

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \Psi(z) &= \frac{\sigma_Y}{2\pi} \int_a^c \frac{2z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{(x^2 - z^2)} dx \\ &= \frac{\sigma_Y}{\pi} \left[\operatorname{arccot} \left(\frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{c^2 - a^2}} \right) - \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \operatorname{arccos} \left(\frac{a}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

在无穷远处的外加载荷 σ_∞ 对应的复势函数为

$$\Phi(z) = \Psi(z) = \frac{\sigma_\infty z}{2\sqrt{z^2 - c^2}}, \quad (2.1.19)$$

将裂纹附近的屈服应力和外加应力对应的复势函数叠加，然后代入附录公式 A(9)，

然后考虑到两种力在等效裂纹尖端的应力强度因子应该等于零，因此可以求得裂纹前端塑性屈服区的大小为

$$c = a \sec\left(\frac{\pi\sigma_\infty}{2\sigma_Y}\right) \quad (2.1.20)$$

进一步，将复势函数(2.1.17)和(2.1.18)代入到附录 A 的位移公式，可以求得裂纹尖端张开位移为

$$\begin{aligned} \delta &= 2 \lim_{x \rightarrow a} u_y = \frac{\kappa+1}{\mu} \lim_{x \rightarrow a} [\text{Im}\phi(z)] \\ &= \frac{\kappa+1}{\mu} \frac{\sigma_Y}{2\pi} 2aln \frac{c}{a} \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

其中对于平面应变问题， $\kappa=3-4\nu$ ；对于平面应力， $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ 。因此，在平面应力下，裂纹尖端张开位移为

$$\delta = \frac{8\sigma_Y}{\pi E} aln \frac{c}{a} = \frac{8\sigma_Y}{\pi E} aln \sec\left(\frac{\pi\sigma_\infty}{2\sigma_Y}\right) \quad (2.1.22)$$

上面的对于预测压力容器的半脆性和脆性断裂方面，得到了后来的实验验证，因此在压力容器的断裂分析中，该公式得到了广泛应用[183, 184]。为了进一步方便应用，根据 Dugdale 模型，Budekin 和 Stone 建立了大范围屈服和全面屈服情况下的标称应变的表达式，

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} = \frac{2}{\pi} \left[2n \coth^{-1}\left(\frac{m}{n}\right) + (1-\nu) \cot^{-1}(m) + \nu \cos^{-1}(k) \right] \quad (2.1.23)$$

其中，参数 m ， n 和 k 的表达式为

$$n = \frac{a}{y}, \quad k = \cos\left(\frac{\pi a}{2\sigma_Y}\right), \quad m = \sqrt{\frac{k^2 + n^2}{1 - k^2}} \quad (2.1.24)$$

根据上面的方程(2.1.22)-(2.1.24)，对于给定的标距 y ，就可以求出不同外加载荷下所对应的标称应变和裂纹尖端张开位移的关系。

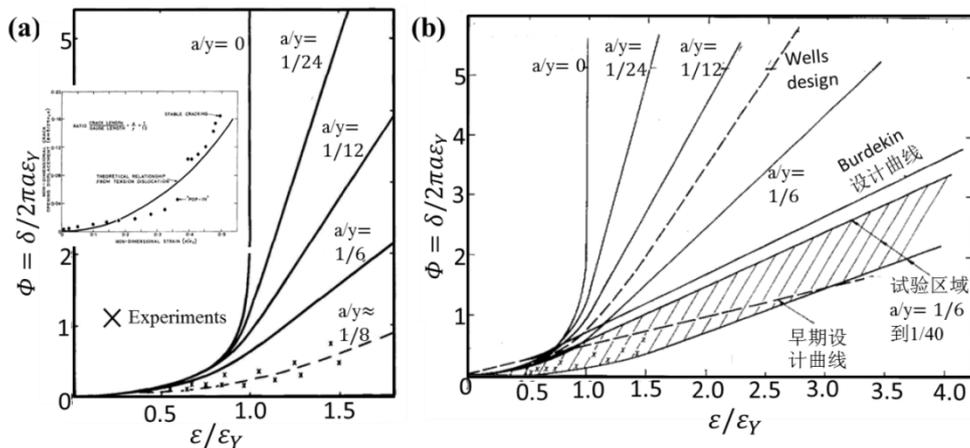


图 2.5 裂纹尖端张开位移与标称应变的关系图[53, 54], 其中×代表实验测试结果, 实线代表根据 Dugdale 模型理论计算结果。

Dugdale 模型对于不同的材料只能给出相同的张开位移曲线 ($\Phi = \delta/2\pi a \varepsilon_Y$), 并不能区分具体材料之间的不同形状的拉伸曲线, 没有考虑实际材料具有不同的硬化效应。根据图 2.5 可以看出, 根据 Dugdale 模型计算得到的结果, 在小的应变下, 得到的结果和实验结果吻合的很好。但是当外加载荷超过一半屈服应力 ($0.5\sigma_Y$) 的时候, 理论曲线明显偏离了实验曲线。这是因为, 当外加应变比较大的时候, 在裂纹前端塑性区域, 会有不同程度的硬化, 因此, 给定外加载荷, 不仅裂纹尖端张开位移由于硬化的原因不会张开那么大; 另一方面, 标称应变也会随着变大, 因此, 最后的曲线不会像根据 Dugdale 模型得到的理论曲线那么陡, 因此, 在大范围屈服条件下, 需要考虑材料硬化等因素对裂纹张开位移的影响。

为了方便实际应用分析, Burdekin 和 Dawes[53]根据大量的实验结果, 在 Wells 经验公式的基础上加以改进, 给出了 COD 设计曲线[详见第二节的讨论]。尽管有了这些经验性的设计公式, 但是后来 Turner 根据大量实验结果指出, COD 设计曲线的应用范围为屈服应力和极限应力比值(σ_Y/σ_u)不能超过 75~80%。这也就说明, 实际材料不同的硬化效应明显会影响裂纹张开位移。很显然我们会有下面两个疑问:

(i) 为什么 COD 设计曲线对一些特殊的材料不再适用?

(ii) 实际工程材料不同的硬化曲线如何影响裂纹尖端张开位移, 具体是材料哪些硬化参数, 又是如何影响裂纹张开位移的呢?

要回答这些问题, 就需要对硬化材料中裂纹问题作进一步的分析和研究。

2.2 条带硬化模型

本节我们将发展硬化材料的裂纹尖端张开位移理论, 提出了一个新的有意思的条带硬化模型来研究硬化对裂纹断裂行为的影响。对于线性硬化材料, 通过合理的简化和假设, 将应力应变本构关系简化为方便分析计算的有效简单形式, 从而得到了裂纹尖端张开位移和标称应变之间的关系。条带硬化模型为过去的硬化实验提供了很好的理论解释。

2.2.1 线性硬化材料的简化本构方程

根据线弹性理论, 应力应变的本构关系服从线性形式, 即

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = (1+\nu)\bar{\sigma}_{ij} - \nu\bar{\sigma}_{pp}\delta_{ij}, \quad (2.2.1)$$

其中, 应力应变 $\bar{\sigma}_{ij}$ 和 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ 是经过屈服应力 σ_Y 和屈服应变 $\varepsilon_Y = \sigma_Y/E$ 无量纲后的量,

ν 是泊松比， δ_{ij} 是克罗内克符号。当应力进一步增大，材料就会出现不同程度的应变硬化效应，如图 2.6 (a) 所示，这里我们选择线性硬化本构关系来分析硬化对裂纹尖端张开位移的影响。

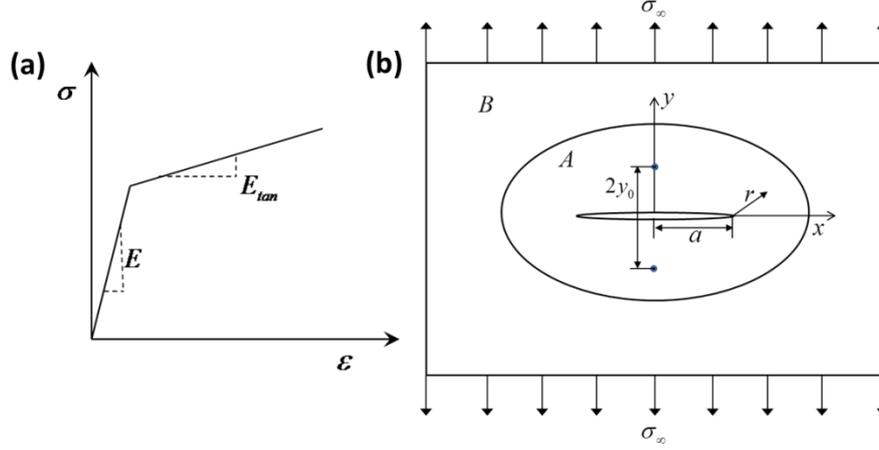


图 2.6 双线性应变硬化本构关系和含有裂纹硬化材料的示意图

根据塑性形变理论，上面成双线性简单拉伸的本构关系可以写为[35]：

$$\bar{\epsilon}_{ij} = (1 + \nu) \bar{\sigma}_{ij} - \nu \bar{\sigma}_{pp} \delta_{ij} + \lambda (1 - \bar{\sigma}_e^{-1}) \bar{s}_{ij}, \quad (2.2.2)$$

其中 \bar{s}_{ij} 是应力偏量张量， $\bar{\sigma}_e$ 是等效应力，

$$\bar{s}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{kk} \delta_{ij}, \quad (2.2.3)$$

$$\bar{\sigma}_e^2 = \frac{3}{2} \bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij}, \quad (2.2.4)$$

而参数 λ 的表达式可以通过如下的公式得到，

$$\lambda = \frac{3}{2} \left(\frac{E}{E_{tan}} - 1 \right), \quad \bar{\sigma}_e > 1; \quad (2.2.5)$$

$$\lambda = 0, \quad \bar{\sigma}_e < 1.$$

通过上面的参数表达式可以看到， λ 也会随着弹性阶段和塑性变形阶段分成了两段。尽管简单拉伸下应力应变的关系看起来很简单，其实当材料进入塑性阶段后，即 $\bar{\sigma}_e > 1$ ，最后类似 HRR 场的控制方程非常的复杂，很难通过数学手段直接得到它的解析表达式。Hutchinson[35]根据主要的双调和控制方程，得到了裂纹尖端主要的奇异性的形式。其实这里，我们看到，最后控制方程的强非线性主要来源于 $1 - \bar{\sigma}_e^{-1}$ 项，而 $1 - \bar{\sigma}_e^{-1}$ 很显然最后是变量 $\bar{r} (r/a)$ ， θ 和 $\bar{\sigma}_\infty$ 的函数。为了考虑裂纹附近应力应变的有限值性质，我们假设 $1 - \bar{\sigma}_e^{-1}$ 只与外加载荷相关，即 $1 - \bar{\sigma}_e^{-1} = w(\bar{\sigma}_\infty)$ 。也就是说，我们假设材料在一个包含裂纹的相当大区域内（如图 2.6b 所示）应力应变关系都服从下面的本构方程形式，即

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = (1 + \nu) \bar{\sigma}_{ij} - \nu \bar{\sigma}_{pp} \delta_{ij} + \lambda w(\bar{\sigma}_{\infty}) \bar{\delta}_{ij}, \quad (2.2.6)$$

除非特别表明外，在下文中参数 λ 都一直取 $3(E/E_{\tan} - 1)/2$ 。在给定的外加载荷下，函数 $w(\bar{\sigma}_{\infty})$ 描述了材料硬化区域内平均的硬化程度，这里称为硬化函数，但是需要注意的是，应力应变的本构方程随着外加载荷的大小而进行变化，但是给定外加载荷从零开始加载到某个值的过程中，我们认为在硬化区域内的质点一直服从最后外加载荷对应的本构方程，因为函数 $w(\bar{\sigma}_{\infty})$ 已经描述了这个过程中的平均硬化性。

根据弹性理论，应力可以通过求解对应的应力函数得到，即

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \bar{r}^{-1} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{r}} + \bar{r}^{-2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \theta^2} \\ \bar{\sigma}_{\theta} &= \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{r}^2} \\ \bar{\sigma}_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r}^{-1} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \theta} \right) \end{aligned}, \quad (2.2.7)$$

其中应力函数 \bar{U} 可以通过 $\bar{\sigma}_y a^2$ 进行了无量纲。极坐标下的应变协调方程为

$$\bar{r}^{-1} \frac{\partial^2 (\bar{r} \bar{\varepsilon}_{\theta\theta})}{\partial \bar{r}^2} + \bar{r}^{-2} \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_{rr}}{\partial \theta^2} - \bar{r}^{-1} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{rr}}{\partial \bar{r}} - 2\bar{r}^{-2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.2.8)$$

将方程(2.2.6)和(2.2.7)代入方程(2.2.8)后，经过合并整理，可以得到如下的控制方程，

$$\left(1 + \left(\frac{E}{E_{\tan}} - 1 \right) w(\bar{\sigma}_{\infty}) \right) \nabla^4 \bar{U} = 0, \quad (2.2.9)$$

对于裂纹上下表面是自由边界，即没有应力作用在裂纹上下表面，并且考虑到应力分布的对称性，应力函数和有效应力可以写成如下形式，

$$\bar{U} = k\bar{r}^{\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{3} \cos \frac{3}{2} \theta \right), \quad (2.2.10)$$

$$\bar{\sigma}_e = k\bar{r}^{-\frac{1}{2}} \left(\cos^2 \frac{1}{2} \theta + \frac{3}{4} \sin^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.11)$$

根据与路径无关的 J 积分的定义[34]，我们可以得到 J 的表达式为

$$J = \int_{\Gamma} (\bar{W} dy - \bar{\sigma}_{ij} n_j \bar{u}_{i,x} ds) = 2\pi k^2 \left(1 + w(\bar{\sigma}_{\infty}) \left(\frac{E}{E_{\tan}} - 1 \right) \right) \quad (2.2.12)$$

其中 \bar{W} 是无卸载下线性或者非线性应变能密度，即

$$\bar{W} = \int_0^{\bar{\varepsilon}_{ij}} \bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}, \quad (2.2.13)$$

显然, 如果 $w(\bar{\sigma}_\infty)=0$, 我们可以得到纯粹的弹性结果; 当 $w(\bar{\sigma}_\infty)=1$ 时, 上面的 J 积分的表达式(2.2.12)就能退回到 Hutchinson 的结果[35]。另外, 取无限大的边界作为积分路径, 我们可以得到 J 积分等于 $\pi\bar{\sigma}_\infty^2$ 。因此, 我们可以得到塑性应力以及应力函数中系数的表达式为

$$k = \frac{\bar{\sigma}_\infty}{\sqrt{2} \left(1 + w(\bar{\sigma}_\infty) \left(\frac{E}{E_{\tan}} - 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.2.14)$$

2.2.2 条带硬化模型和裂纹尖端张开位移

对于应变硬化材料, 不管它服从幂次硬化规律 (如图 2.1c) 还是线性硬化规律 (图 2.1b), 如同线弹性本构得到的结果一样, 如果我们在裂纹尖端对应力不加限制的话, 裂纹尖端应力应变一定还会存在应力奇异性。如图 2.7 所示, 在长度为 $2a$ 的裂纹中心建立笛卡尔坐标系, 裂纹沿着 x 轴方向。类似 Dugdale 根据理想弹塑性模型提出的条带塑性模型, 这里我们假设裂纹前端存在一定大小的硬化条带, 在硬化条带区域, 应力在等效扩展裂纹上下表面的分布是均匀的, 大小等于 σ_s , 等效裂纹长度为 $2c$, 条带硬化区域为 $a < |x| < c$, 实际上, 硬化区域的大小可以根据裂纹尖端应力无奇异性确定。

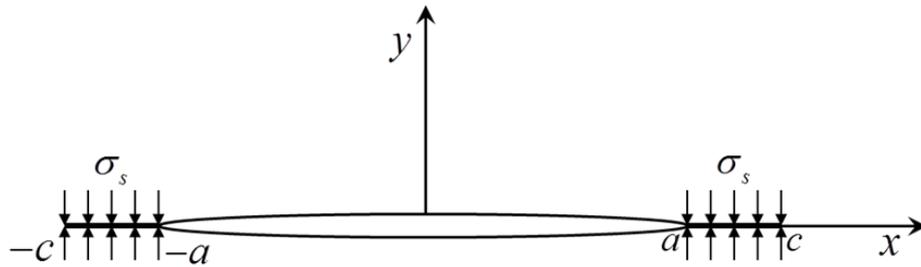


图 2.7 条带硬化模型示意图

一般来说, σ_s 是外加载荷 $\bar{\sigma}_\infty$ 的函数, 假设为下面的形式

$$\sigma_s = (1-w)\sigma_y + w\sigma_u, \quad (2.2.15)$$

其中 σ_u 是材料常数, 对应着极限应力, 可以通过简单拉伸确定出来, 而 $w(\bar{\sigma}_\infty)$ 是上面引入的硬化函数。根据上面的假设方程, 很明显看到裂纹前端的硬化区域内的分布应力与材料的屈服应力和极限应力都有关系。当外加应力比较小的时候, 相应的硬化函数 $w(\bar{\sigma}_\infty)$ 很小, 这时候裂纹前端的硬化区域内的应力非常接近屈服应力 σ_y ; 但是当材料的变形很大的时候, 硬化函数 $w(\bar{\sigma}_\infty)$ 比较大, 此时裂纹前端的条带硬化区域的应力也会随着增加。由于 σ_s 不可能超过极限应力, 通过方

程(2.2.15)可以得出, 硬化函数 $w(\bar{\sigma}_\infty)$ 取值范围应该介于 0 和 1 之间。

根据上一节的分析, 我们可以得到无穷远处外加载荷在裂纹尖端引起的应力强度因子为

$$K_1 = \frac{\sqrt{\pi c} \sigma_\infty}{(1 + w(\bar{\sigma}_\infty)(E/E_{\tan} - 1))^{\frac{1}{2}}} \quad (2.2.16)$$

下面我们根据简化的本构方程来计算等效裂纹扩展部分的分布应力 $\sigma_s(\bar{\sigma}_\infty)$ 在裂纹尖端引起的强度因子。一些基本的求解这个问题的方程参见附录 A。对于在 $\pm x$ 处裂纹(长度为 $2c$)上下表面作用的一对楔力 P , 应力函数为

$$\Phi(z) = \Psi(z) = \frac{P}{2\pi} \frac{2z\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{z^2 - c^2}(x^2 - z^2)}, \quad (2.2.17)$$

所以, 对于我们这里条带硬化区域 ($a \leq |x| \leq c$) 内分布的应力 σ_s , 其对应的应力函数可以通过积分求得, 即

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \Psi(z) &= \frac{\sigma_s}{2\pi} \int_a^c \frac{2z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{(x^2 - z^2)} dx \\ &= \frac{\sigma_s}{\pi} \left[\operatorname{arccot} \left(\frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{c^2 - a^2}} \right) - \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \arccos \left(\frac{a}{c} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

将上面的公式代入附录 A 里面的应力公式, 我们可以求得 $\sigma_s(\bar{\sigma}_\infty)$ 引起的应力强度因子 K_2 为

$$\begin{aligned} K_2 &= \lim_{x \rightarrow c^+} \sqrt{2\pi(x-c)} \sigma_{yy} \\ &= - \lim_{x \rightarrow c^+} \sqrt{2\pi(x-c)} \frac{\sigma_s}{\pi} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - c^2}} \arccos \frac{a}{c}, \\ &= -2\sqrt{\frac{c}{\pi}} \sigma_s \arccos \frac{a}{c} \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

根据等效裂纹尖端 $|x|=c$ 应力没有奇异性, 我们可以得到总的应力强度因子 ($K_1 + K_2$) 应该等于 0, 即

$$\frac{\sqrt{\pi c} \sigma_\infty}{(1 + w(E/E_{\tan} - 1))^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{\frac{c}{\pi}} \sigma_s \arccos \frac{a}{c}, \quad (2.2.20)$$

然后我们可以求得条带硬化区域的大小为

$$r_d = c - a = a \operatorname{sec} \left[\frac{\pi}{2(1 + w(E/E_{\tan} - 1))^{\frac{1}{2}}} \frac{\sigma_\infty}{(1 - w)\sigma_Y + w\sigma_u} \right] - a \quad (2.2.21)$$

消去应力奇异性后，复势函数 $\Phi(z)$ ， $\Omega(z)$ ， $\phi(z)$ 和 $\omega(z)$ 可以写成

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{\sigma_s}{\pi} \operatorname{arccot} \left(\frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{c^2 - a^2}} \right), \quad (2.2.22)$$

$$\phi(z) = \omega(z) = \frac{\sigma_s}{2\pi} \left[\pi z - (z+a) \arcsin \frac{c^2 + za}{c(z+a)} + (z-a) \arcsin \frac{c^2 - za}{c(z-a)} \right] \quad (2.2.23)$$

根据附录 A 的位移公式，我们可以得到裂纹尖端 $x = \pm a$ 张开位移 δ 为

$$\begin{aligned} \delta &= 2 \lim_{x \rightarrow a} u_y = \frac{\kappa + 1 + \frac{\lambda w}{1 + \nu}}{\mu} \lim_{x \rightarrow a} [\operatorname{Im} \phi(z)] \\ &= \frac{1 + w(E/E_{\tan} - 1)}{\pi E} [(1-w)\sigma_Y + w\sigma_u] 8a \ln \frac{c}{a} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

为了和实验结果进行对比，我们可以求得无量纲后的裂纹硬化区域的大小和裂纹尖端张开位移为

$$\frac{r_d}{a} = \frac{c-a}{a} = \operatorname{sec} \left[\frac{\pi}{2(1+w(E/E_{\tan} - 1))^{1/2}} \frac{\sigma_\infty}{(1-w)\sigma_Y + w\sigma_u} \right] - 1, \quad (2.2.25)$$

$$\Phi = \frac{\delta}{2\pi a \varepsilon_Y} = \frac{4[1+w(E/E_{\tan} - 1)]}{\pi^2} \left[1 - w + w \frac{\sigma_u}{\sigma_Y} \right] \ln \frac{c}{a} \quad (2.2.26)$$

进一步，我们来研究裂纹尖端张开位移（CTOD）和标称应变之间的关系。如图 2.6 (b) 所示，我们假设标称应变的测试点在区域 A 内部，内部所有的质点都满足线性硬化方程。因此，根据附录 A 的公式，对于平面应力问题，标称点 $(0, y_0)$ 在 y 方向上的位移为

$$\begin{aligned} 2\mu u_y(0, y_0) &= \frac{4[1+w(E/E_{\tan} - 1)]}{1+\nu} \operatorname{Im}[\phi(iy_0)] \\ &\quad - \frac{1+\nu+3w(E/E_{\tan} - 1)/2}{1+\nu} 2y_0 \operatorname{Re}[\Phi(iy_0)] \end{aligned}, \quad (2.2.27)$$

将复势函数方程(2.2.22)和(2.2.23)代入上面的方程(2.2.27)，并且考虑为单轴外加力的条件，在 x 方向由 $-\sigma_\infty$ 给出的弹性分量 $\nu y_0 \sigma_\infty / E$ ，可以得到

$$\begin{aligned} u_y &= 4[1+w(E/E_{\tan} - 1)] \frac{[(1-w)\sigma_Y + w\sigma_u]a}{\pi E} \operatorname{arc} \operatorname{coth} \left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{n^2 + m^2}{1 - m^2}} \right) \\ &\quad + \frac{2 - 2\nu + w(E/E_{\tan} - 1)}{\pi E} [(1-w)\sigma_Y + w\sigma_u] y_0 \operatorname{arc} \operatorname{cot} \sqrt{\frac{n^2 + m^2}{1 - m^2}} + \nu y_0 \frac{\sigma_\infty}{E} \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

其中式中的参数

$$n = \frac{a}{y_0}, m = \frac{a}{c} = \cos \left[\frac{\pi}{2(1+w(E/E_{\tan}-1))^{1/2}} \frac{\sigma_{\infty}}{(1-w)\sigma_Y + w\sigma_u} \right] \quad (2.2.29)$$

然后, 我们可以求得在标称距离 $2y_0$ 上的应变为

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} = & \frac{1-w+w\frac{\sigma_u}{\sigma_Y}}{\pi} \left[4+4w\left(\frac{E}{E_{\tan}}-1\right) \right] \operatorname{arc} \operatorname{coth} \left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{n^2+m^2}{1-m^2}} \right) \\ & + \frac{1-w+w\frac{\sigma_u}{\sigma_Y}}{\pi} \left[2-2\nu+w\left(\frac{E}{E_{\tan}}-1\right) \right] \operatorname{arc} \operatorname{cot} \sqrt{\frac{n^2+m^2}{1-m^2}} + \nu \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_Y} \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

从方程(2.2.26)和方程(2.2.30), 我们可以得到裂纹尖端张开位移 CTOD 和标称应变之间的关系, 下面我们将详细讨论。

2.2.3 应变硬化对裂纹尖端张开位移的影响

从上面的分析可以看到, 在我们的条带硬化模型中, 硬化函数起着非常重要的作用。由于裂纹的存在, 我们想选择适当的硬化函数形式, 通过和实验对比, 来描述包含裂纹的区域 A 内部的平均的硬化作用。下面我们选择不同形式的硬化函数, 看看裂纹尖端张开位移和无穷远处的外加应力之间的关系。

首先, 如果忽略应变硬化, 即 $w(\bar{\sigma}_{\infty})=0$, 将其代入上面的方程, 结果可以退化到带应力屈服模型的结果。此时屈服区域的大小和裂纹尖端张开位移为

$$\frac{r_s}{a} = \sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_Y} \right) - 1 \quad (2.2.31)$$

$$\Phi = \frac{\delta}{2\pi a \varepsilon_Y} = \frac{4}{\pi^2} \ln \left[\sec \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma_Y} \right] \quad (2.2.32)$$

上面的公式可以看出, 无量纲后的塑性区的大小和裂纹尖端张开位移只和外加应力一个量有关系, 对于不同的材料硬化参数, 通过条带屈服模型, 计算得到的裂纹尖端张开位移是相同的。

对于外加力比较小的时候, 裂纹尖端的塑性区相对来说比较小, 因此为了研究裂纹尖端应力主要的奇异性, Hutchinson[35]采用了忽略等效力项 $\bar{\sigma}_e^{-1}$ 的办法。根据这种主奇异性, 我们可以计算裂纹尖端张开位移和外加力之间的关系。事实上, 在我们这个模型里面, 我们可以取 $w(\bar{\sigma}_{\infty})=1$, 此时相当于在裂纹前端存在一个颈缩区, 里面的分布应力等于材料的极限应力, 将硬化函数代入上面给出的方程, 我们可以得到同样的结果。如图 2.8 和 2.8 所示的裂纹前端颈缩区的大小和裂纹尖端张开位移, 我们可以看到当外加应力超过半个屈服应力 ($0.5\sigma_Y$) 时,

Dugdale 模型的结果明显偏离实验的结果,这个现象从图 2.5 也可以明显看出来。而根据 $w(\bar{\sigma}_\infty)=1$ 计算得到的结果,相对来说和实验[53]比较接近。实际上,我们想象出裂纹附近的硬化应该随着外加载荷而变化,因此硬化函数应该也会随着外加载荷而变化,而不应该取固定的常数。我们希望能够取适当的硬化函数形式,使得结果和实验吻合得更好。

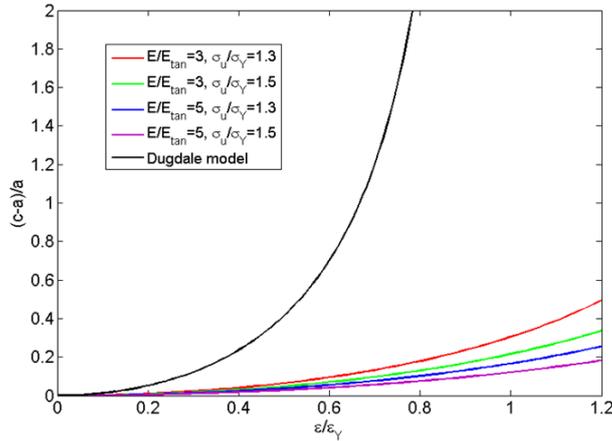


图 2.8 裂纹前端颈缩区的大小和外加载荷之间的关系图,此时 $w(\bar{\sigma}_\infty)=1$ 。

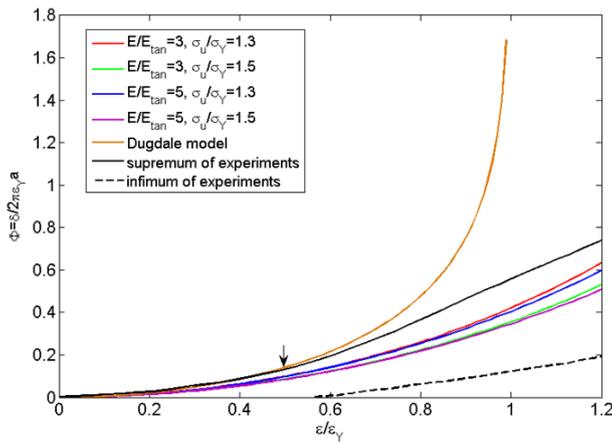


图 2.9 裂纹尖端张开位移和外加载荷之间的关系图, $w(\bar{\sigma}_\infty)=1$ 。

首先我们选择硬化函数和外加载荷成正比关系,即 $w(\bar{\sigma}_\infty)=\bar{\sigma}_\infty/4$ 。此时,裂纹前端硬化区域和裂纹尖端张开位移如图 2.10 所示,图中我们给出了不同硬化参数 (E/E_{tan} 和 σ_u/σ_Y) 下的情形。从中我们可以看出,裂纹前端硬化区的大小不仅和外加应力有关系,而且还与材料的硬化参数有关系。和 Dugdale 条带屈服模型相比,当外加载荷比较小的时候 ($<0.5\sigma_Y$),条带硬化模型和条带屈服模型得到的结果相差很小;但是在外加载荷比较大的时候 ($>0.5\sigma_Y$),条带硬化模型得到的硬化区的尺寸比条带屈服模型得到的屈服区域要小很多。进一步分析我

们发现，硬化参数 (E/E_{tan} 和 σ_u/σ_Y) 越大，对应的条带硬化区域越小。原因是因为对于较大的硬化参数，裂纹前端塑性硬化过程会消耗更多的能量，然而外加载荷比较小的时候，裂纹前端塑性变形消耗的能量很小，可以忽略。和前面硬化函数取常数情形相比，根据 $w(\bar{\sigma}_\infty) = \bar{\sigma}_\infty/4$ 得到的结果和实验 (图中黑实线) 吻合的更好 (见图 2.10 和 2.11)。

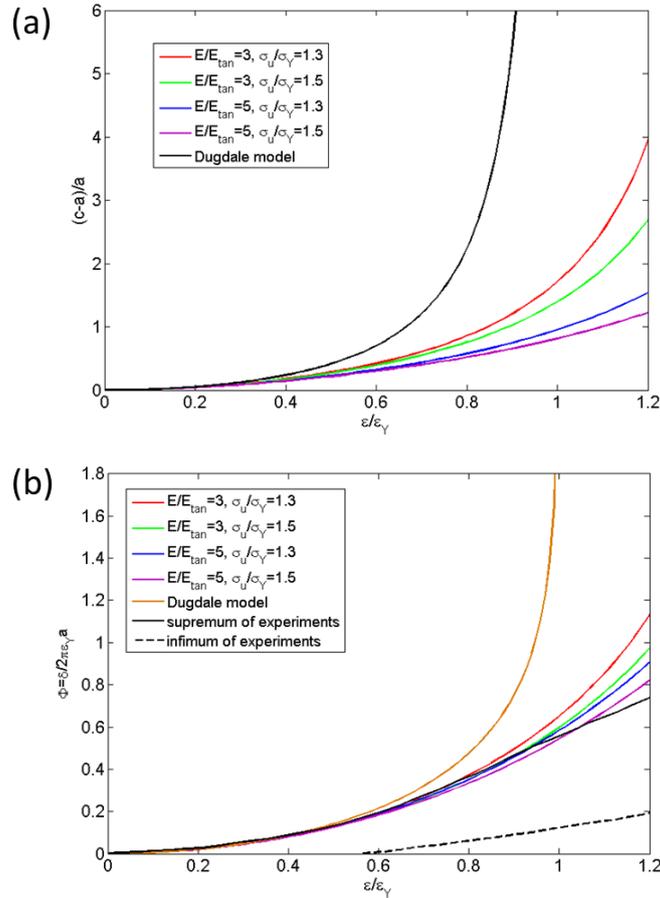


图 2.10 $w(\bar{\sigma}_\infty) = \bar{\sigma}_\infty/4$ 时，裂纹前端条带硬化区的大小 (a) 和裂纹尖端张开位移 (b) 与外加载荷之间的关系

现在我们将硬化函数取成与外加应力成二次方的形式，即 $w(\bar{\sigma}_\infty) = \bar{\sigma}_\infty^2/4$ 。在这种情况下，当外加载荷小于 $0.5\sigma_Y$ 的时候，裂纹前端硬化效应的影响很小。通过计算我们看到，在外加力等于 $0.5\sigma_Y$ 时，硬化函数的大小只有 6% 左右；但是当外加载荷增加到 σ_Y 时，硬化函数的值变成了 25%，此时硬化作用很大，实际中不能再忽略硬化作用。图 2.12 给出了 $w(\bar{\sigma}_\infty) = \bar{\sigma}_\infty^2/4$ 时，裂纹前端硬化区的大小 (a) 和裂纹尖端张开位移 (b) 与外加载荷之间的关系。从图中可以看到，此时裂纹硬化区域和裂纹尖端张开位移仍然依赖于材料的硬化参数。更有趣的是，我们看到在外加力比较小时，裂纹前端硬化区域大小增加的很快；但是当外加载

荷比较大时，硬化区的大小增加速度很缓慢。这是因为在外加载荷比较小时，裂纹前端硬化作用很不明显，但是随着外加载荷的增加，裂纹前端硬化作用越来越明显。通过和之前硬化函数情形对比，我们看到根据 $w(\bar{\sigma}_\infty) = \bar{\sigma}_\infty^2/4$ 得到的结果与实验吻合的非常好。

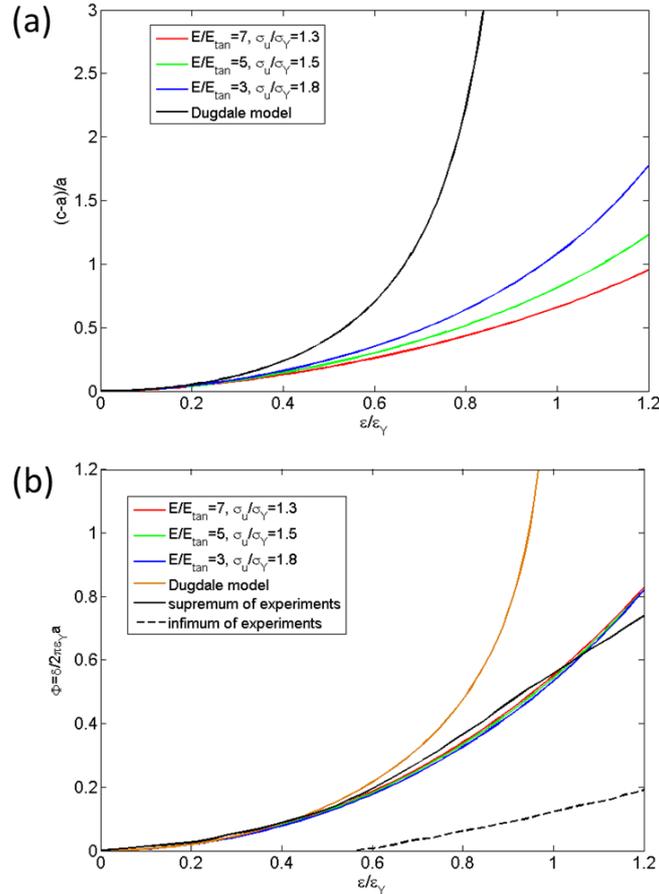


图 2.11 在 $w(\bar{\sigma}_\infty) = \bar{\sigma}_\infty/4$ 和更多的硬化参数下，裂纹前端条带硬化大小 (a) 和裂纹尖端张开位移 (b) 与外加载荷之间的关系。

实际上对于不同的材料，例如低碳钢和铝合金等，材料的硬化参数也会千差万别。因此，对于不同的材料，我们可以通过改变硬化参数来预测裂纹尖端张开位移的情况。图 2.13 给出了不同的硬化参数下，裂纹尖端张开位移与外加载荷之间的关系。为了方面对比，图中我们也画出了 Dawes 提出的 COD 设计曲线，即

$$\Phi = \begin{cases} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y}\right)^2, & \frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} \leq 0.5; \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} - 0.25, & \frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} \geq 0.5. \end{cases} \quad (2.2.33)$$

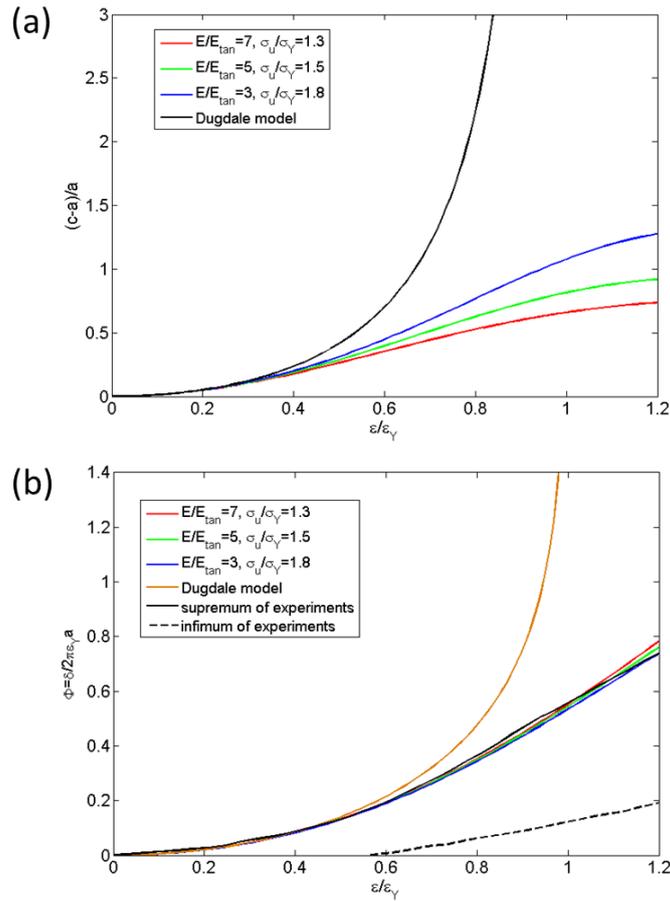


图 2.12 $w(\bar{\sigma}_\infty) = \bar{\sigma}_\infty^2/4$ 时，裂纹前端硬化区的大小 (a) 和裂纹尖端张开位移 (b) 与外加载荷之间的关系。

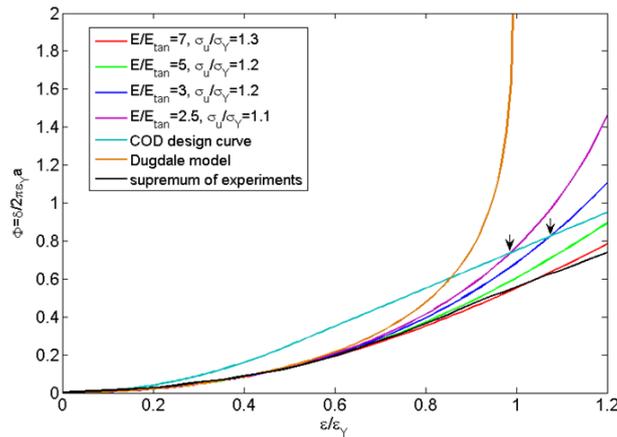


图 2.13 不同硬化参数材料下，裂纹尖端张开位移

有趣的是，我们发现对于大多数硬化参数下的材料，根据条带硬化模型计算得到的裂纹尖端张开位移都在 COD 设计曲线下面，但是对于少数硬化参数下的材料，在外加载荷超过一定值之后裂纹尖端张开位移曲线超过了 COD 设计曲线。例如铝合金 7075-T6 这种材料，它的极限应力和屈服应力的比值(σ_u/σ_Y)大约在

1.1 左右[185, 186]。对于具有较高屈服应力和极限应力比值(σ_Y/σ_u)的材料, Turner 和 Burdekin[187]根据大量的实验指出, 仅仅根据低碳钢做出的 COD 设计曲线可能不再安全。因此, 他们建议 COD 设计曲线的应用范围为屈服应力和极限应力比值(σ_Y/σ_u)不能超过 75~80%。从图 2.13 我们可以看出, 条带硬化模型可以为这一现象提供一个很好的理论解释。

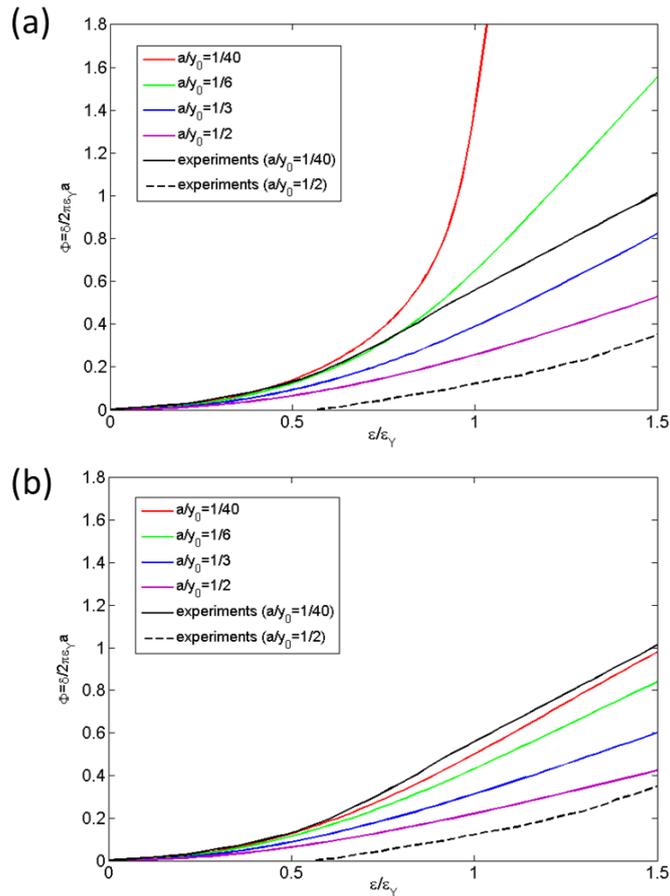


图 2.14 不同标称距离下, 裂纹尖端张开位移和标称应变之间的关系。(a) Dugdale 条带屈服模型的结果[54], (b) 条带硬化模型得到的结果。

现在我们来讨论一下条带硬化模型的应用范围。由于裂纹附近应力存在集中, 裂纹前端硬化区的均匀分布的应力应该要比无限远处的外加应力要大, 即 $\sigma_s > \sigma_\infty$ 。在这种情况下, 外加应力不能超过一定的阈值, 例如对于 $\sigma_u = 1.5\sigma_Y$ 和 $w(\bar{\sigma}_\infty) = \bar{\sigma}_\infty^2/4$, 外加载荷不能超过 $1.2\sigma_Y$ 。另一方面, 塑性区域 A (图 2.6) 不能扩展到无限远处, 因此, 外加应力应该比塑性应力要小。但是作为一个很好的工程近似模型, 在外加载荷超过了屈服应力一定范围内, 条带硬化模型还是具有很好的参考性, 综合考虑, 我们建议条带硬化模型应用范围为外加载荷不要超过 $1.2\sigma_Y$ 。

最后我们讨论一下裂纹尖端张开位移和标称应变之间的关系。Burdekin 和

Stone[54]根据 Dugdale 条带屈服模型建立了裂纹尖端张开位移和标称应变之间的关系。然而,在较大外加载荷下,理论结果和实验结果相差甚远。我们采用条带硬化模型重新考虑这个问题。图 2.14 给出了不同标称距离下,采用 Dugdale 条带屈服模型 (a) 和我们提出的条带硬化模型 (b) 得到的结果。尽管对于标称点 $a/y_0 = 1/40$ 可能已经不在塑性区域 A 内,但是作为很好的近似模型,我们仍然画出了这种参数情况下的条带硬化模型的结果。从图中可以看出,条带硬化模型得到的结果与实验吻合的非常好。图 2.15 给出了在标称距离 $a/y_0 = 1/8$ 的时候的不同硬化参数下的裂纹尖端张开位移和标称应变之间的关系,作为对比,图中也画出了条带屈服模型的结果(橙色)。由于实验是不同材料的结果,因此通过将不同硬化参数下的理论结果和实验结果进行对比,我们看到,条带硬化模型基本和实验相符。所以条带硬化模型能够为实验和工程应用提供很好的理论依据。

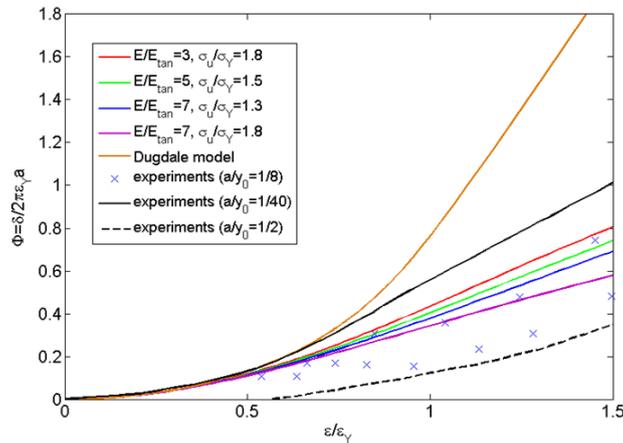


图 2.15 不同硬化参数下裂纹尖端张开位移和标称应变之间的关系,其中×号代表实验结果[54],黑实线和黑虚线代表实验结果的上、下界[53]。

2.3 本章小结

本章考虑了材料的应变硬化对裂纹尖端附近应力场和裂纹尖端张开位移的影响,给出了双折线硬化本构模型下的裂纹尖端张开位移计算方法。首先通过合理的分析简化,将复杂的非线性应力应变本构关系简化为方便分析计算的简单形式,提出了硬化函数用来描述裂纹尖端塑性区域材料的平均硬化程度。

其次,提出了裂纹条带硬化模型,在等效裂纹硬化区域,假设应力分布与材料的屈服应力,极限应力和硬化函数有关,通过计算确定了条带硬化区域的大小。另外,条带硬化模型给出的条带硬化区的大小和裂纹尖端张开位移不仅与外加载荷之间有关系,而且和相应材料的硬化参数有关系。当外加载荷比较小的时候 ($< 0.5\sigma_y$),条带硬化模型和条带屈服模型得到的结果相差很小;但是在外加载荷比较大的时候 ($> 0.5\sigma_y$),条带硬化模型得到的硬化区的尺寸比条带屈服模型

得到的屈服区域要小很多。而且发现，硬化参数 (E/E_{tan} 和 σ_u/σ_y) 越大，对应的条带硬化区域越小。原因是因为对于较大的硬化参数，裂纹前端塑性硬化过程会消耗更多的能量，然而外加载荷比较小的时候，裂纹前端塑性变形消耗的能量很小，可以忽略。

最后，我们提出的条带硬化模型解释了之前学者根据大量实验提出的 COD 设计曲线的应用范围为屈服应力和极限应力比值 (σ_y/σ_u) 不能超过 75~80% 的原因。根据条带硬化模型，可以方便预测哪些材料在 COD 设计曲线下不再适用。我们还给出了裂纹尖端张开位移与标称应变之间的关系。同样的，我们发现具有不同硬化参数的材料裂纹尖端张开位移也不相同。在不同的标称距离下，条带硬化模型基本落在了实验带里面。在较大外加载荷下，采用 Dugdale 条带屈服模型得到的理论结果和实验结果相差甚远；但是采用条带硬化模型，通过在不同的硬化参数下和实验对比，条带硬化模型能够很好地吻合实验。

第三章 电场对压电材料裂纹扩展的影响

压电材料作为一种特殊的智能材料,被广泛应用传感器、转化器和制动器等现代科学技术中。一方面,由于压电材料具有压电效应,所以其本构方程具有力-电耦合效应;另一方面,由于电饱和现象的出现,使得电位移不可能随着外加电场无限变大,所以其本构方程具有非线性效应。在这种情况下,当压电材料内部出现裂纹时,压电材料的断裂问题变得更加复杂,吸引了很多学者从理论[60-62, 64-66, 188-198]和实验[69, 82-85, 199-208]两个方面去研究这个课题。

本章从理论方面研究了外加电场对压电材料裂纹扩展的影响。在 Gao 等人[6]将经典 Dugdale 模型推广到压电断裂提出了电位移饱和模型的基础上,我们考虑了裂纹尖端应力屈服和电位移饱和双重非线性效应。根据理想电位移饱和模型和理想弹塑性模型,假设裂纹尖端存在双条带区,即不仅存在着电极化饱和区,而且存在条带应力屈服区。我们根据这种条带应力屈服-条带电位移饱和模型,提出了新的压电材料断裂判据准则,即裂纹尖端机械张开位移准则(MCOD),从而成功解释了造成目前最常见两类实验现象的原因。

3.1 压电材料断裂在实验和理论方面的研究现状

关于用未知函数表示弹性场和电场称为压电材料问题的一般解,是解决很多压电边值问题的基础[7],一些基本的公式和结论参见附录 B。我们这里从实验和理论两个方面简单介绍压电材料断裂问题的研究现状。

3.1.1 电场对断裂韧性的影响实验结果

实验上观测压电材料中断裂问题,有云纹干涉方法,数字散斑相关方法和偏正光显微镜方法。但是对于电场对断裂韧性的影响,目前实验方面主要有两种截然不同的结果[7],即(1)正电场降低断裂韧性,而负电场增加断裂韧性;(2)正负电场都是降低压电材料的断裂韧性。虽然还有另外一种实验结果,即正电场阻碍裂纹扩展,而负电场促进裂纹的扩展,但是这种实验结果目前只有一篇文献报道,因此,下面简单介绍前面常见的两种实验结果。

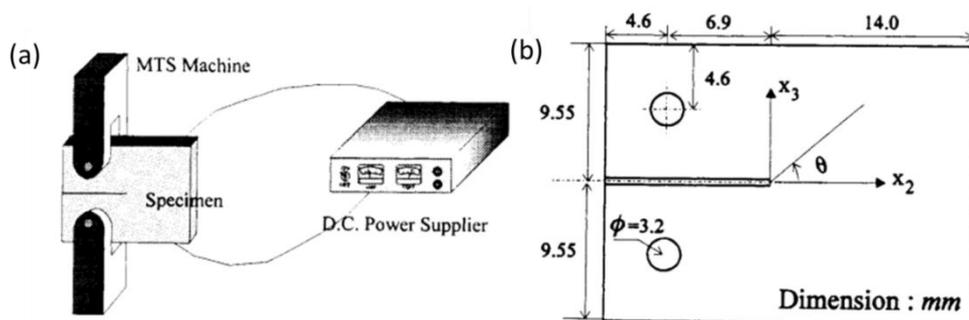


图 3.1 紧凑型试件拉伸实验的实验装置 (a) 和试件示意图 (b) [69]。

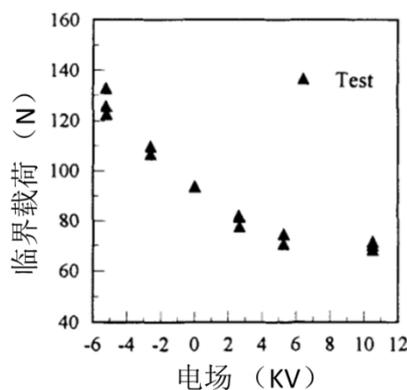


图 3.2 紧凑拉伸实验下裂纹断裂临界载荷和外加电场之间的关系图[69]。

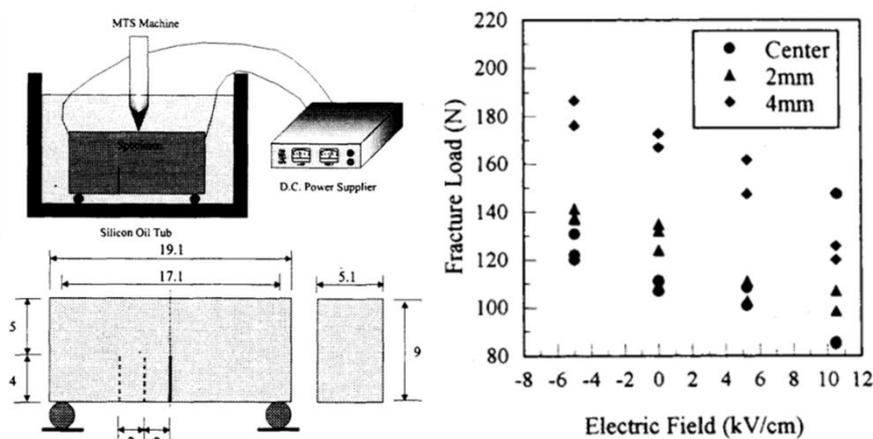


图 3.3 (a) 三点弯实验对混合型边缘裂纹的加载实验装置和加载试件示意图；(b) 不同位置的边缘裂纹的实验结果[69]

Tobin 和 Pak 采用维氏压痕实验研究了电场作用下 PZT-8 的断裂行为，结果发现正电场降低断裂韧性，负电场增加断裂韧性[82]。Park 和 Sun[69]实验上采用 PZT-4 紧凑拉伸试件观测到了相同的实验结果。实验装置和压电试件的示意图如图 3.1 所示。实验中通过拉伸机进行力的加载，通过试件两端的电极进行加载电场，电场的正负可以通过直流电源控制。如图 3.2 所示，可以看到通过给试件

施加正电场，明显会降低试件的临界断裂载荷，而负电场会增加裂纹临界载荷，从而说明正电场促进裂纹扩展，而负电场会阻碍裂纹扩展。此外，他们采用三点弯加载方式对混合型的不同位置的边缘裂纹进行了实验（如图 3.3 (a) 所示）。结果发现，对于不同位置的边缘裂纹，正电场都是促进裂纹扩展，而负电场起到相反的作用。如图 3.4 所示，Soh 等人[83]对含有中心裂纹的 PZT-5H 试件进行了拉伸实验，在不同的裂纹长度下，都得到了和 Park 与 Sun 相同的实验结果。

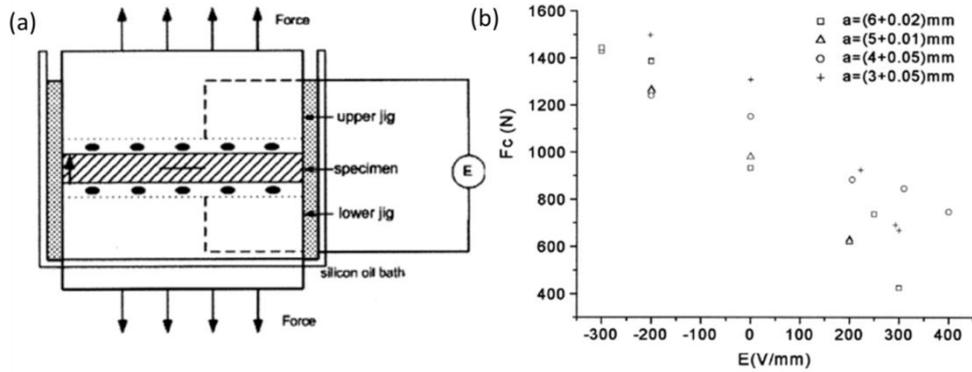


图 3.4 Soh 等人[83]采用的实验装置示意图 (a) 和中心裂纹的实验结果 (b)。

Fu 和 Zhang[84]对电场影响裂纹扩展给出了第二类不同的实验结果。他们采用了紧凑拉伸试验方法和维氏压痕实验，分别给出了不同外加电场作用下裂纹的扩展情况。如图 3.5 所示，不管是紧凑拉伸 (CT) 还是维氏压痕 (IF) 实验，都得到了相同的实验结果，即正负电场都是促进裂纹扩展，而且负电场的影响大于正电场。王毅等人[85]采用单边缺口试件对 PZT-5 陶瓷材料进行了实验，结果得到了和 Fu 和 Zhang 一致的实验结果(如图 3.6 所示)，但是他们的实验结果显示，正负电场对断裂韧性的影响基本是对称的。

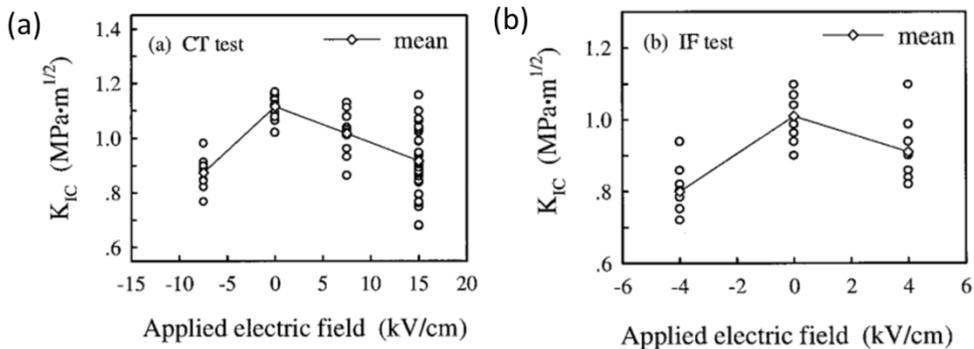


图 3.5 紧凑拉伸 (a) 和维氏压痕实验 (b) 下电场对裂纹断裂韧性的影响[84]。

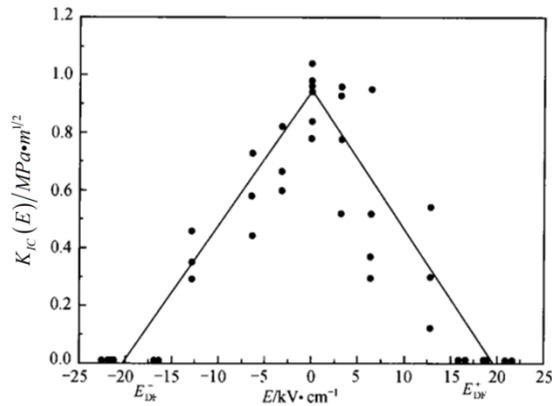


图 3.6 PZT-5 实验裂纹断裂韧性随着外加电场的变化图[85]。

2.3.2 几种压电材料断裂准则

如同传统的材料断裂一样，研究和确定压电材料断裂准则成为压电材料断裂的中心问题之一。随着压电材料断裂的发展，传统材料的断裂准则也被推广到压电材料裂纹问题中。但是由于压电材料的力-电耦合效应，适用传统材料的断裂准则不一定能在压电材料中适用。因此，研究学者针对压电材料的特性，提出了一系列的断裂准则。下面，我们简要介绍一下常见的压电断裂准则。

(1) 应力强度因子准则

压电材料在裂纹尖端的应力场和电场都存在着奇异性，即以 $r^{-1/2}$ 形式分布。因此，有了裂纹尖端应力场的分布之后，根据应力强度因子的定义，可以得到压电材料的应力强度因子为

$$K_I = \sqrt{\pi a} \sigma_{22}^\infty, \quad K_{II} = \sqrt{\pi a} \sigma_{21}^\infty, \quad K_{III} = \sqrt{\pi a} \sigma_{23}^\infty \quad (3.1.1)$$

根据上面的公式可以看到，应力强度因子只和外加载荷有关，与外加电场没有关系，因此，这和前面的任何一种实验都是矛盾的。因此，应力强度因子不能作为压电材料的断裂准则。

(2) 总能量释放率和机械能释放率

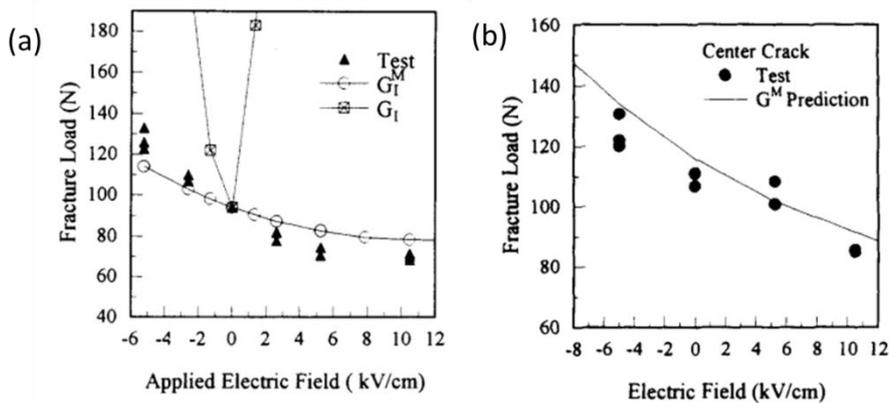


图 3.7 总能量释放率和机械能释放率作为判定准则预测的结果和实验对比[69]。

能量释放率是指裂纹扩展单位长度时能量释放量。对于压电材料，人们提出了几种基于能量的判定准则，如总能量释放率、机械能释放率[69]和基于 PS 模型提出的局部能量释放率（或者局部 J 积分）准则[6]。压电材料总的能量释放的定义为[188]

$$G_t = J = \int_{\Gamma} (hn_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,1} + D_i E_1 n_i) d\Gamma \quad (3.1.2)$$

其中 Γ 代表积分路径， n_i 是积分区域边界的方向向量（向外）分量， h 为电焓密度。但是根据 Park 和 Sun 的研究结果[69]，如果根据总能量释放率作为判定准则，那么得到的结果是无论是正电场还是负电场，都是阻碍裂纹扩展，如图 3.7 (a) 所示，显然这不能解释他们的实验结果。为了解释他们的实验结果，他们提出了机械能释放率准则。他们认为压电材料的断裂是一个机械过程，因此，应该去掉上面总能量里面的电学能量，只需要考虑其中的机械部分能量，即

$$G_m = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\delta} \sigma_{i3} \Delta u_i (\delta - r) dr \quad (3.1.3)$$

根据机械能释放率准则，他们计算得到了电场和临界载荷之间的关系，如图 3.7 (b) 所示，理论预测结果和实验结果吻合得很好。因此，机械能释放率可以作为压电断裂准则，能够解释其中一种实验现象。

(3) 局部 J 积分准则或局部能量释放率准则

1997 年，Gao 等人[6]将传统 Dugdale 经典模型（见 2.1.3 节）推广到压电材料的断裂问题中，提出了电极化饱和模型（PS），即认为压电材料是一种机械脆性和电塑性的材料。他们认为，裂纹尖端存在着电极化饱和区，当电场达到一定程度后，电位移存在饱和现象，不可能随着电场无限增大（如图 3.8 所示），这有点类似力学上的理想弹塑性模型。Gao 等人认为，压电陶瓷一般都是脆性材料，所以力学上可以当做脆性材料来处理。

类似经典的 Dugdale 模型一样，PS 模型属于非线性压电断裂理论，其优点就是考虑了电位移饱和性，将电位移在裂纹尖端达到饱和的区域与非饱和区域分开，将裂纹前端电位移饱和区域简化为没有厚度的条带。在条带饱和区域，电位移和电场之间的关系不在满足线性规律，而是根据理想电位移饱和模型假设条带饱和区域的电位移等于饱和电位移值；而在非饱和区域，电位移和电场仍旧满足线性规律。从而将本构非线性转化为裂纹尖端条带内饱和电位移的分布问题，这样就解决了直接根据线性本构得出的裂纹尖端电位移存在奇异性这个问题。根据绪论中的介绍，电位移饱和模型的物理机理是材料存在着微小的电畴，当外加电场很大时，电畴方向基本指向相同，产生的电位移不可能无限变大。Gao 等人的 PS 模型之后，经过 Fan 等人[209, 210]的推广，成功将其应用在磁弹性材料中。

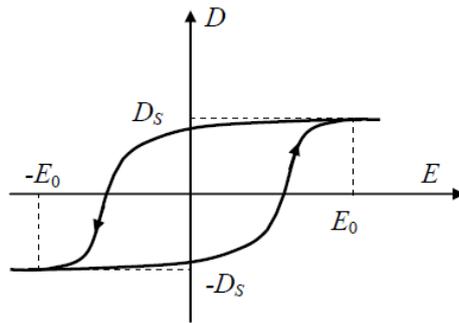


图 3.8 压电材料电位移饱和模型示意图[6]

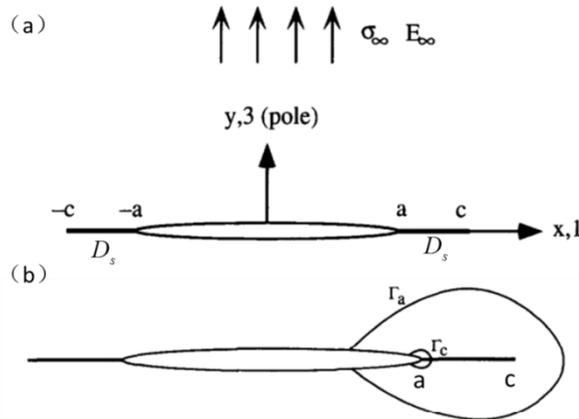


图 3.9 (a) 电极化饱和模型; (b) 整体 J 积分和局部 J 示意图[6]

如图 3.9 所示，Gao 等人根据电极化饱和模型，得到了裂纹尖端塑性区的大小表达式，同时得到了裂纹尖端附近的应力应变场和电场分布。最后他们计算了两种 J 积分，其中一种积分路径包含整个电极化饱和区，称为整体 (global) J 积分；另外一种积分路径穿过电极化饱和区，称为局部 (local) J 积分。通过和 Park 和 Sun 等人的实验进行对比发现，如同整体能量释放率一样，整体 J 积分不能作为断裂准则。而局部 J 积分预测得到的临界断裂载荷和电场之间的关系为：

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_{f0}^2 + e^2 E^2 / 4} - eE / 2 \tag{3.1.4}$$

这个理论结果与 Park 和 Sun 的实验结果定性一致。

(4) 修正的的应力强度因子准则和能量密度准则

根据 Gao 等人的工作，Wang[70]将条带电极化饱和模型进一步推广到一般各向异性压电材料，重新得到了裂纹尖端附近应力应变场和电场分布。根据其计算得到的结果，Wang 进一步计算了裂纹尖端的应力强度因子。如果以基于条带电极化饱和模型得到的应力强度因子作为断裂判据，发现预测的结果与 Park 和 Sun 的等式结果一致。因此，基于条带电极化饱和模型得到的应力强度因子可以作为一种压电断裂准则。同时，Ru[86]采用 PS 模型和 Fang 等人[87]采用介电椭圆模型退化为裂纹方法，也都各自提出了等效应力强度因子准则，得到的结果和

Wang 一致。

Shen 和 Nishioka[88], Soh 等人[89]以及 Zuo 和 Sih[90]将能量密度因子准则推广到压电断裂问题中。他们研究了电场对压电材料裂纹扩展的影响, 结果发现, 在一定电场范围内, 正电场促进裂纹扩展; 而负电场阻碍裂纹扩展。而且对于给定的外加电场, 裂纹内介质介电常数越大, 对应的临界断裂载荷越大。

(5) COD 准则

Fang 等人采用介电椭圆模型, 然后将模型退化为裂纹情形, 如图 3.10 (a) 所示, 他们采用 Rice 对裂纹张开位移的定义, 计算了裂纹张开位移 COD, 并根据裂纹张开位移作为断裂准则, 预测了电场对压电材料裂纹扩展的影响。如图 3.10 (b) 所示, 理论预测结果能够很好的符合实验结果。

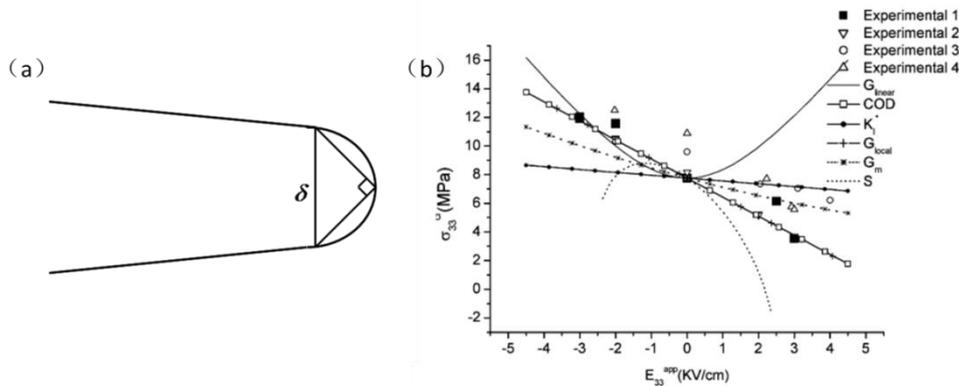


图 3.10 (a) 裂纹张开位移定义示意图; 各种压电断裂准则预测电场对断裂韧性的影响和实验结果对比[87]。

3.2 压电材料断裂准则——裂纹尖端机械张开位移

综合对比和分析上一节介绍的各种压电材料断裂准则, 我们可以看到, 大多数压电断裂准则都是建立在线弹性本构模型基础上: 例如机械能释放率准则、修正的应力强度因子准则以及 COD 准则等, 其计算结果表明电位移在裂纹尖端都会存在奇异性。因此, 这些线性结果只能适用于裂纹尖端电位移饱和和区域很小的情形。最值得注意的是 Gao 等人提出的和 Dugdale 模型对应的 PS 模型, 该模型考虑了裂纹尖端会出现一定范围的电位移饱和区, 消除了裂纹尖端电位移奇异性, 从而在电学上实现了压电材料裂纹的非线性处理。

尽管压电陶瓷是脆性材料, 但是当裂纹接近临界扩展时或者裂纹扩展一小部分后, 会释放大量的热能, Zhang 等人实验发现裂纹扩展时在裂纹扩展面上甚至观测到了材料融化现象[211], 因此裂纹尖端材料的属性也会发生变化, 裂纹尖端区域在力学上不能再认为是脆性的。再考虑到试验中各种可能的原因, 裂纹尖端应力塑性区范围可能较大, 甚至可能超过电位移饱和区。另外, Gao 等人提出的 PS 模型只解释了目前一种实验现象, 而目前至少在实验上观测到了两种实验现

象。综合以上原因，PS 模型结果中应力在裂纹尖端还是存在奇异性可能在某些情况下就不再适用。因此，不仅需要考虑电学上的非线性问题，而且需要考虑力学上的非线性效应，也就是需要综合考虑应力屈服和电位移饱和效应。

这里，我们综合考虑应力屈服和电位移饱和两种非线性效应，假设裂纹尖端不仅存在条带电位移饱和区，而且存在条带应力屈服区。根据这种力-电双条带模型，提出了新的压电材料断裂准则，根据我们提出的裂纹尖端机械张开位移断裂准则，可以同时解释目前常见的两种实验现象，并结合新模型，对造成两种以上实验现象的原因进行了分析。

3.2.1 应力条带屈服-电极化条带饱和模型

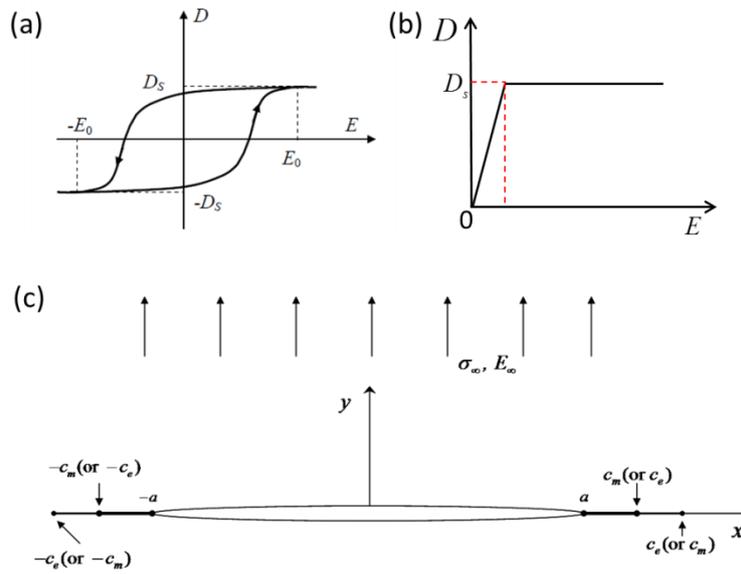


图 3.11 理想弹塑性模型 (a) 和理想电位移饱和模型 (b) 以及条带应力屈服-条带电位移饱和模型示意图

假设一个长度为 $2a$ 的裂纹在一无限大的二维压电材料中，我们可以建立如图 3.11 (c) 所示的笛卡尔坐标系 (x, y) ，裂纹表面沿着 x 轴。在无穷远处，压电材料受到沿着极化方向的外加应力 σ_∞ 和电场 E_∞ 的作用。这里，我们假设材料质点只能沿着 y 方向移动，即

$$u_x = 0, \quad u_y = u(x, y), \quad (3.2.1)$$

因此，应力、电位移和电场可以通过解析函数重新写成如下的形式，

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} + i\sigma_{yx} &= MU'(z) + e\Phi'(z) \\ D_y + iD_x &= eU'(z) - \kappa\Phi'(z) \quad , \\ E_y + iE_x &= -\Phi'(z) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

和 Gao 等人的条带电位移饱和模型不同，这里我们裂纹前端存在着双条带区：即条带电极化饱和区和条带应力屈服区，根据理想弹塑性本构模型（图 3.11a）

和理想弹塑性本构模型（图 3.11b），假设在力屈服区（ $a < |x| < c_m$ ），应力分布等于材料的屈服应力 σ_s ；在条带电极化饱和区（ $a < |x| < c_e$ ），电位移大小等于材料的饱和电位移 D_s 。类似的模型也被 Loboda 等人[212]采用并计算了各向异性压电裂纹应力应变和电场的分布，Fan 等人[213]也采用类似的模型分析压磁材料中的断裂问题。这里，为了方便分析计算，我们采用 Gao 等人给出的简化的本构方程（见附录 B），好处是可以方便求出解析解，而且能够定性给出压电断裂的基本性质。

根据上面的分析，在裂纹尖端存在两种条带区，根据应力屈服区（ $a \leq |x| \leq c_m$ ）和电极化饱和区（ $a \leq |x| \leq c_e$ ）的大小将问题分成两种情况进行考虑，即 $a \leq c_m \leq c_e$ 和 $a \leq c_e \leq c_m$ 。

Case-I: 电极化饱和区大于力屈服区（ $a \leq c_m \leq c_e$ ）

为了解决这个问题，我们假设问题对应的解析函数有下面的形式，

$$U'(z) = \frac{b_1 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{b_2 z}{\sqrt{z^2 - c_m^2}} + \frac{b_3 z}{\sqrt{z^2 - c_e^2}} + b_4 g(z, c_m) + b_5 g(z, c_e) + b_6, \quad (3.2.3)$$

$$\Phi'(z) = \frac{c_1 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{c_2 z}{\sqrt{z^2 - c_m^2}} + \frac{c_3 z}{\sqrt{z^2 - c_e^2}} + c_4 g(z, c_m) + c_5 g(z, c_e) + c_6 \quad (3.2.4)$$

其中 b_i 和 c_i 是待定系数，可以根据边界条件求出来。 $g(z, t)$ 函数为

$$g(z, t) = \frac{2}{\pi} \left[\operatorname{arccot} \left(\frac{a \sqrt{z^2 - t^2}}{z \sqrt{t^2 - a^2}} \right) - \frac{z}{\sqrt{z^2 - t^2}} \operatorname{arccos} \left(\frac{a}{t} \right) \right], \quad (3.2.5)$$

在无穷远处对应的应力和电场的边界条件为

$$\sigma_{yy} + i\sigma_{yx} = \sigma_\infty, \quad E_y + iE_x = E_\infty, \quad (3.2.6)$$

然后将公式(3.2.3)和(3.2.4)代入公式(3.2.2)，并考虑到无穷远处的边界条件可以得到

$$M(b_1 + b_2 + b_3 + b_6) + e(c_1 + c_2 + c_3 + c_6) = \sigma_\infty, \quad (3.2.7)$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_6 = -E_\infty, \quad (3.2.8)$$

一般来说，裂纹上的电学边界条件很复杂，一般认为存在四种边界条件[213]，即（1）电不可穿透边界条件[62, 64]，此时认为裂纹表面上方向电位移为 0；（2）电可穿透边界条件[60]，认为裂纹上下表面的法向电位移相等；（3）电半可穿透边界条件[214]，认为裂纹表面法向电位移介于上面两种情况之间；（4）将裂纹内的介质（如空气或其他夹杂介质）和压电材料之间的边界满足高斯边界条件进行精确处理[215]。这里，我们采用的边界条件是在原始裂纹表面应力和电位移为 0（电不可穿透边界条件），即

$$Mb_6 + ec_6 = 0, \quad (3.2.9)$$

$$eb_6 - \kappa c_6 = 0, \quad (3.2.10)$$

根据初始裂纹尖端($|x|=a$)应力和电位移没有奇异性, 可以得到

$$Mb_1 + ec_1 = 0, \quad (3.2.11)$$

$$eb_1 - \kappa c_1 = 0, \quad (3.2.12)$$

在条带应力屈服区 $a < |x| < c_m$, 应力分布等于屈服应力(σ_s); 在条带电极化饱和区 $a < |x| < c_e$, 电位移等于饱和电位移, 即

$$M(b_4 + b_5) + e(c_4 + c_5) = \sigma_s, \quad (3.2.13)$$

$$e(b_4 + b_5) - \kappa(c_4 + c_5) = D_s, \quad (3.2.14)$$

在电极化饱和区非力屈服区 $c_m < |x| < c_e$, 机械位移是连续的, 而电位移等于 D_s , 可以得到

$$b_3 = 0, \quad (3.2.15)$$

$$b_5 = 0, \quad (3.2.16)$$

$$eb_4 - \kappa c_4 = 0, \quad (3.2.17)$$

$$eb_5 - \kappa c_5 = D_s, \quad (3.2.18)$$

进一步, 根据电位移在 $|x|=c_m$ 和 $|x|=c_e$ 处没有奇异性, 我们可以得到

$$M \left(b_2 - b_4 \cdot \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{c_m} \right) + e \left(c_2 - c_4 \cdot \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{c_m} \right) = 0, \quad (3.2.19)$$

$$e \left(b_2 - b_4 \cdot \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{c_m} \right) - \kappa \left(c_2 - c_4 \cdot \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{c_m} \right) = 0, \quad (3.2.20)$$

$$M \left(b_3 - b_5 \cdot \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{c_e} \right) + e \left(c_3 - c_5 \cdot \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{c_e} \right) = 0, \quad (3.2.21)$$

$$e \left(b_3 - b_5 \cdot \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{c_e} \right) - \kappa \left(c_3 - c_5 \cdot \frac{2}{\pi} \arccos \frac{a}{c_e} \right) = 0, \quad (3.2.22)$$

从方程(3.2.7)到方程(3.2.22), 有 16 个方程, 然而只有 14 个未知数, 实际上上面的 16 个方程不是独立的, 方程(3.2.17), (3.2.18)和方程(3.2.14)是等价的方程, 方程(3.2.15), (3.2.16)使得(3.2.21), (3.2.22)中只有一个独立方程, 因此, 最后是 14 个未知数, 有 14 个独立方程, 可以通过求解这些方程得到系数,

$$b_1 = 0, b_2 = \frac{\sigma_s + eE_\infty}{M}, b_3 = 0, b_4 = \frac{\kappa\sigma_s + eD_s}{M\kappa + e^2}, b_5 = 0, b_6 = 0, \quad (3.2.23)$$

$$c_1 = 0, c_2 = \frac{e\sigma_s + eE_\infty}{\kappa M}, c_3 = -\frac{D_s}{\kappa}, c_4 = \frac{e\kappa\sigma_s + eD_s}{\kappa M\kappa + e^2}, c_5 = -\frac{D_s}{\kappa}, c_6 = 0, \quad (3.2.24)$$

$$c_e = a \sec \left[\frac{\pi D_\infty}{2 D_s} \right], \quad c_m = a \sec \left[\frac{\pi D_\infty^*}{2 D_s^*} \right], \quad (3.2.25)$$

其中 D_∞^* 和 D_s^* 为

$$D_\infty^* = D_\infty + \frac{\kappa}{e} \sigma_\infty, \quad (3.2.26)$$

$$D_s^* = D_s + \frac{\kappa}{e} \sigma_s \quad (3.2.27)$$

需要注意的是上面这个解是在电极化饱和区大于力屈服区 ($a \leq c_m \leq c_e$) 的条件下得到的, 因此有

$$\frac{\sigma_\infty}{D_\infty} \leq \frac{\sigma_s}{D_s}, \quad (3.2.28)$$

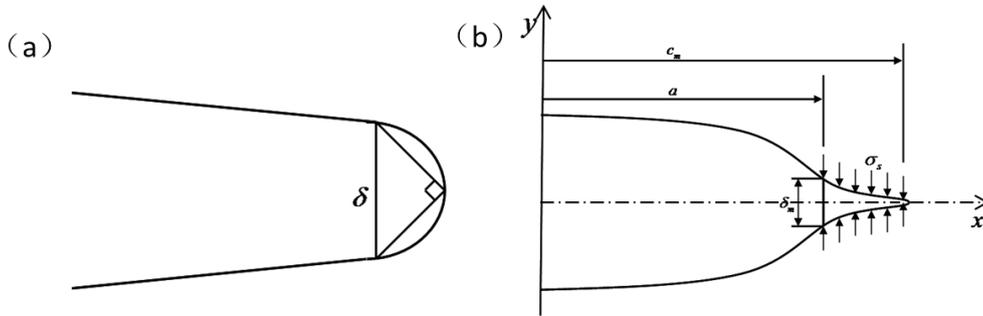


图 3.12 两种裂纹张开位移, 裂纹张开位移和裂纹尖端张开位移 (COD[87]和 CTOD) 的定义示意图。

如图 3.12 所示, 和 Rice 定义的裂纹张开位移不同, 这里我们关注的是基于条带模型计算得到的裂纹尖端张开位移。另一方面和传统材料断裂力学不同, 对于压电材料来说, 根据条带模型, 有两个等效裂纹, 那么就对应着有两种裂纹尖端张开位移, 其中对应的应力屈服区得到的张开位移称为裂纹尖端机械张开位移 (MCTOD), 通过计算可以得到

$$\delta_m = \frac{4a}{\pi} \frac{\kappa \sigma_s + e D_s}{M \kappa + e^2} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi (M \kappa + e^2) (e E_\infty + \sigma_\infty)}{2 M (\kappa \sigma_s + e D_s)} \right) \right], \quad (3.2.29)$$

另一个张开位移可以根据电极化饱和区计算得出, 我们称为裂纹尖端电张开位移 (ECTOD),

$$\delta_e = \frac{4a}{\pi} \frac{e}{\kappa} \frac{\kappa \sigma_s + e D_s}{M \kappa + e^2} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi (M \kappa + e^2) (e E_\infty + \sigma_\infty)}{2 M (\kappa \sigma_s + e D_s)} \right) \right] - \frac{4a}{\pi} \frac{D_s}{\kappa} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi D_\infty}{2 D_s} \right) \right], \quad (3.2.30)$$

如果外加电场比较小的时候, 上面的方程可以简化为

$$\delta_e = \frac{\pi a}{2M^2\kappa} \frac{\left[\begin{array}{l} e(M\kappa + e^2)D_s(eE_\infty + \sigma_\infty)^2 \\ -(\kappa\sigma_s + eD_s)\left[(M\kappa + e^2)E_\infty + e\sigma_\infty\right]^2 \end{array} \right]}{D_s(\kappa\sigma_s + eD_s)} \quad (3.2.31)$$

Case-II: 力屈服区大于电极化饱和区 ($a \leq c_e \leq c_m$)

采用和上面 case-I 类似的分析过程, 我们可以求得当应力屈服区大于电极化饱和区时的解。与上面的方程(3.2.15)-(3.2.18)不同的是, 在应力屈服区非电极化饱和区 $c_e < |x| < c_m$, 应力的分布是一个常数, 等于屈服应力, 即

$$c_2 = 0, \quad (3.2.32)$$

$$c_4 = 0, \quad (3.2.33)$$

$$Mb_5 + ec_5 = 0, \quad (3.2.34)$$

$$Mb_4 + ec_4 = \sigma_s. \quad (3.2.35)$$

其他边界条件和 case-I 的方程相同, 通过求解这些方程, 我们可以得到这种情况下的待定系数为

$$b_1 = 0, b_2 = \frac{\sigma_\infty}{M}, b_3 = \frac{e}{M} E_\infty, b_4 = \frac{\sigma_s}{M}, b_5 = \frac{e}{M} \frac{MD_s - e\sigma_s}{M\kappa + e^2}, b_6 = 0, \quad (3.2.36)$$

$$c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = -E_\infty, c_4 = 0, c_5 = -\frac{MD_s - e\sigma_s}{M\kappa + e^2}, c_6 = 0, \quad (3.2.37)$$

$$c_e = a \operatorname{asec} \left[\frac{\pi (M\kappa + e^2) E_\infty}{2 MD_s - e\sigma_s} \right], c_m = a \operatorname{asec} \left[\frac{\pi \sigma_\infty}{2 \sigma_s} \right], \quad (3.2.38)$$

上面的解是在力屈服区大于电极化饱和区这个条件下得到的, 因此, 需要加上下面的约束条件,

$$\frac{\sigma_\infty}{D_\infty} \geq \frac{\sigma_s}{D_s} \quad (3.2.39)$$

将上面的系数重新代回方程, 可以计算得到裂纹尖端机械张开位移 (MCTOD) 为

$$\delta_m = \frac{4a\sigma_s}{\pi M} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma_\infty}{2 \sigma_s} \right) \right] + \frac{4ea}{\pi M} \frac{MD_s - e\sigma_s}{M\kappa + e^2} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi (M\kappa + e^2) E_\infty}{2 MD_s - e\sigma_s} \right) \right] \quad (3.2.40)$$

当外加应力和电场相对于屈服应力 σ_s 和饱和电位移 D_s 比较小的时候, 此时上面的机械张开位移可以简化为

$$\delta_m = \frac{\pi a}{2M} \left(\frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_s} + \frac{(M\kappa + e^2) E_\infty^2}{MD_s - e\sigma_s} \right) \quad (3.2.41)$$

很显然, 这种情况得到的裂纹尖端机械张开位移和 case-I 不同。此时对应的裂纹

尖端电张开位移 (ECTOD) 为

$$\delta_e = -\frac{4a}{\pi} \frac{MD_s - e\sigma_s}{M\kappa + e^2} \ln \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{(M\kappa + e^2) E_\infty}{MD_s - e\sigma_s} \right) \right] \quad (3.2.42)$$

3.2.2 压电材料裂纹尖端机械张开位移断裂准则

由上一节的介绍可以看到, 对于实验方面, 目前存在三种不同的实验结果。目前大多数理论只能解释其中一种实验现象, 不能给出造成两种以上实验现象的原因。另一方面, 对于压电材料断裂问题, 关于裂纹张开位移方面的研究还是很少有文献报导。目前能够查到的只有 Fang 等人[87]根据 Rice 的定义提出的裂纹张开位移, 并以此为基础提出了压电断裂 COD 判据。但是他们的理论只能解释正电场促进裂纹扩展, 而负电场阻碍裂纹扩展, 并不能给出出现其他实验现象的原因。上面, 我们根据条带应力屈服-电极化饱和模型计算得到了裂纹尖端机械张开位移 (MCTOD) 和电张开位移 (ECTOD)。下面, 我们讨论一下根据此模型计算得到两种裂纹尖端张开位移作为压电断裂判据的可能性。

首先看 case-I, 此时电极化饱和区大于力屈服区。假如采用电张开位移 (ECTOD) 作为压电断裂判据, 即

$$\delta_e = \delta_{cr}, \quad (3.2.43)$$

很明显, 这种判据得到的预测结果不能解释任何实验现象。但是假设采用裂纹尖端机械张开位移作为压电断裂判据, 即

$$\delta_m = \delta_{cr}, \quad (3.2.44)$$

其中 δ_{cr} 是压电材料裂纹扩展对应的临界值。根据上面的断裂判据和 case-I 得到的 MCTOD 公式(3.2.29), 可以得到理论预测电场对临界载荷的影响为

$$\sigma_f = \sigma_{f0} - eE_\infty, \quad (3.2.45)$$

其中 σ_{f0} 为没有外加电场时对应的外加临界载荷。上面的理论结果表明, 正电场降低压电材料临界载荷, 而负电场增加临界载荷。这个结果和 Gao 等人[6]得到的理论结果进行比较, 我们发现根据 MCTOD 判据得到的结果和他们根据局部能量释放率得到的结果一致。和上一节介绍的实验进行对比, 我们可以看到这个结果可以解释 Park 和 Sun[69], Fang 等人[87], Liu 等人[202]的实验结果。另外, 在电极化饱和区大于力屈服区这种情况下, 实际上根据应力屈服-电极化饱和双条带模型得到的裂纹尖端机械张开位移 (MCTOD) 和 Fang 等人[87]计算得到的 COD 结果是相同的。因此, 我们认为, 在这类实验里面, 实际上是电极化饱和区大于力屈服区造成的实验现象。实验中, 裂纹尖端电畴翻转较少, 单位体积内造成的能量损耗较小, 因此, 需要较大范围的电极化饱和区来阻碍裂纹的继续扩展。

然后我们再来分析 case-II 的情况。很显然,如果根据 ECTOD(公式(3.2.42))作为断裂判据得到的理论结果和外加载荷没有关系,因此,这种情况 ECTOD 也不能作为断裂判据。如果采用 MCTOD 作为断裂准则,那么可以得到理论预测得到结果为

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_{f0}^2 - \frac{(M\kappa + e^2)\sigma_s}{MD_s - e\sigma_s} E_\infty^2}, \quad (3.2.46)$$

根据上面的公式,我们很容易发现,不管是正电场还是负电场,都是降低压电材料临界断裂载荷。换句话说,正负电场都是促进压电材料裂纹扩展。这可以解释上一节介绍的第二类实验现象,即 Fu 和 Fang 等人用 PZT-841 材料做的实验[84]和王毅等人采用 PZT-5 铁电材料做的实验[85]。因此,我们认为,在这类实验里面会造成和别的实验不同的原因是因为实验里面压电材料裂纹尖端力屈服区大于电极化饱和区造成的。Fu 等人[216]也发现电断裂韧性要比机械断裂韧性大很多。原因是由于在这类实验里面,裂纹尖端的电畴翻转很明显,单位体积内造成的能量损耗很多,从而导致电断裂韧性很大。由于电断裂韧性很大,因此对应的电极化饱和区比较小,这正好和我们的这种情况一致。

不同情形	Case I ($a \leq c_m \leq c_e$)	Case II ($a \leq c_e \leq c_m$)
结果	正电场促进裂纹扩展,负电场阻碍裂纹扩展。	正电场、负电场都促进裂纹扩展。
实验对比	与park和Sun(1995),Liu和Fang(2004)等人的实验结果一致。	与Fu和Zhang(2000)和王毅(2004)等人的实验结果一致。
理论对比	与Gao等(1997),Wang(2000)和Fang等(2004)的理论结果相同。	与Fu和Zhang(2000)结果定性一致。但他们给出的结果在零电场时不光滑,我们的结果是光滑的。
解释	裂纹尖端区域如果没有发生电畴反转或比较小,使得电塑性区大于力塑性区。	裂纹尖端区域发生了很大的电畴翻转时,造成在电塑性区产生了能量损耗,使得电塑性区小于力塑性区。

表 3.1 两种情形下根据裂纹尖端机械张开位移作为压电断裂准则总结表

最后,我们可以看到,不管是哪种情形,裂纹尖端电张开位移都不能作为断裂准则,不能解释任何一种实验现象。而根据应力屈服-电极化饱和双条带模型得到的裂纹尖端张开位移是可以作为压电材料断裂准则的,而且 MCTOD 准则的优势是可以解释两种实验现象。我们可以根据本节的理论结果来分析造成这两种不同的实验现象的原因。为了方便查看和分析,我们将两种情形下的理论结果汇总到表 3.1 中。

3.3 压电材料反平面断裂问题

Pak[64]研究了含有中心裂纹的压电材料反平面问题,他采用半逆解法,假

设复势函数为

$$\begin{aligned} U(z) &= A(z^2 - a^2)^{1/2} \\ \Phi(z) &= B(z^2 - a^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

根据上面的复势函数，最后可以得出裂纹尖端应力和电场分布存在着相同的奇异性，即 $r^{-1/2}$ 。而根据上一节的理论分析，我们知道，裂纹尖端电位移存在着饱和条带区。因此，在本节，我们假设这种力学反平面问题的裂纹尖端同样存在电极化饱和条带区，即力学 III 型反平面问题的条带电极化饱和模型，然后给出了裂纹尖端应力应变场和电场的分布，确定了电极化饱和区的大小，通过与仿照 Irwin 松弛方法修正的电位移塑性区进行比较，发现两者相差比较小。

3.3.1 压电材料力学反平面条带电极化饱和模型

对于一 6mm 晶体材料，考虑一个无限大压电材料板含有长为 $2a$ 的中心裂纹。实际工程应用中，压电材料不仅会受到拉应力作用，而且可能受到剪力作用。如图 2.28 所示，在无穷远处，压电材料受到剪切力 τ_∞ 和电位移 D_∞ （或电场 E_∞ ）共同作用。为了方便分析，建立笛卡尔直角坐标系，其中 y 轴为压电材料的极化方向。这是一个电学平面-力学反平面剪切 III 型裂纹问题。这里我们采用电位移条带饱和模型求解这个问题。如图 2.29 所示，假设裂纹扩展后的长度为 $2c$ ，饱和电位移大小为 D_s 。在裂纹扩展区采用机械位移连续性边界条件。

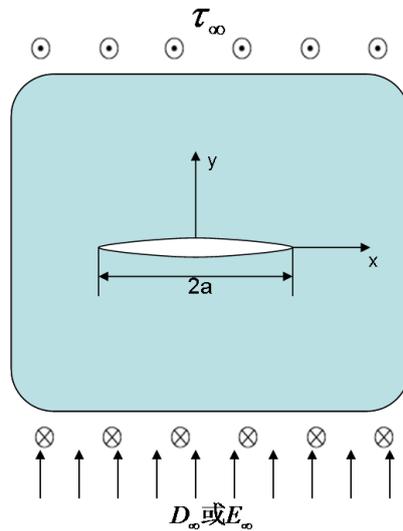


图 2.28 力学 III 型裂纹反平面压电断裂问题示意图

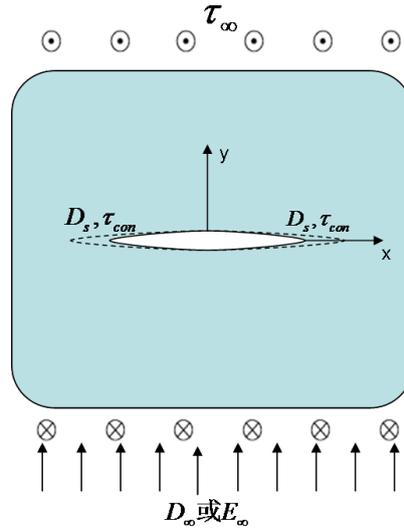


图 2.29 条带电极化饱和模型

采用位移连续性条件进行求解时，边界条件为：

$$(i) \quad \sigma_{zy} = \tau_{\infty}, \quad E_y = E_{\infty}, \quad z \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (3.3.2)$$

$$(ii) \quad \sigma_{zy} = 0, \quad D_y = 0, \quad |x| < a, \quad y = 0 \text{ 时} \quad (3.3.3)$$

$$(iii) \quad u_z^+ - u_z^- = 0, \quad D_y = D_s, \quad a < |x| < c, \quad y = 0 \text{ 时} \quad (3.3.4)$$

基于半逆解法，类比 Gao 等人[6]的假设，这里我们假设 $U'(z)$ 和 $\Phi'(z)$ 形式为：

$$U'(z) = \frac{b_1 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{b_2 z}{\sqrt{z^2 - c^2}} + b_3 g(z) + b_4 \quad (3.3.5)$$

$$\Phi'(z) = \frac{c_1 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{c_2 z}{\sqrt{z^2 - c^2}} + c_3 g(z) + c_4$$

其中

$$g(z) = \frac{2}{\pi} \left[\text{arc cot} \left(\frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - c^2}{c^2 - a^2}} \right) - \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} \arccos \left(\frac{a}{c} \right) \right] \quad (3.3.6)$$

结合边界条件(3.3.2)-(3.3.4)，可以得到如下的线性代数方程组：

$$c_{44}(b_1 + b_2 + b_4) + e_{15}(c_1 + c_2 + c_4) = \tau_{\infty}, \quad (3.3.7)$$

$$c_1 + c_2 + c_4 = -E_{\infty}, \quad (3.3.8)$$

$$c_{44}b_4 + e_{15}c_4 = 0, \quad (3.3.9)$$

$$e_{15}b_4 - \kappa_{11}c_4 = 0, \quad (3.3.10)$$

$$b_2 = 0, \quad (3.3.11)$$

$$b_3 = 0, \quad (3.3.12)$$

$$e_{15}b_1 - \kappa_{11}c_1 = 0, \quad (3.3.13)$$

$$e_{15}b_3 - \kappa_{11}c_3 = D_s, \quad (3.3.14)$$

$$e_{15}b_2 - \kappa_{11}c_2 = \frac{2D_s}{\pi} \arccos\left(\frac{a}{c}\right), \quad (3.3.15)$$

其中最后一个方程表示电位移在 $|x|=c$ 处没有奇异性。通过求解上面这些代数方程组，可以得到：

$$b_1 = \frac{e_{15}E_\infty + \tau_\infty}{c_{44}}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = 0, \quad (3.3.16)$$

$$c_1 = \frac{e_{15}(e_{15}E_\infty + \tau_\infty)}{c_{44}\kappa_{11}}, \quad c_2 = -\frac{(e_{15}^2 + c_{44}\kappa_{11})E_\infty + e_{15}\tau_\infty}{c_{44}\kappa_{11}}, \quad c_3 = -\frac{D_s}{\kappa_{11}}, \quad c_4 = 0 \quad (3.3.17)$$

从而就可以得到裂纹尖端电位移场、电场和应力场的表达式。结果可以看出，电位移在 $|x|=c$ 处没有奇异性，但是电场与应力在 $|x|=c$ 处都存在着奇异性，这是采用位移连续性边界条件出现的结果，这种现象在 Gao 等人[6]分析平面问题的结果中同样存在。但是这种处理方式是基于陶瓷为脆性材料的假设，已经应用与分析在平面 I 型裂纹问题，并且与实验吻合得比较好。

进一步，可以求得电极化饱和区的大小为：

$$r_s = c - a = a \sec\left[\frac{\pi}{2} \frac{(e_{15}^2 + c_{44}\kappa_{11})E_\infty + e_{15}\tau_\infty}{c_{44}D_s}\right] - a = a \sec\left(\frac{\pi D_\infty}{2D_s}\right) - a \quad (3.3.18)$$

假设

$$U(z) \sim A\sqrt{z - z_c}, \quad \Phi(z) \sim B\sqrt{z - z_c} \quad (3.3.19)$$

其中 z_c 为裂纹尖端的位置， A 和 B 是实常数。根据 Gao 等人[6]的计算结果，能量释放率（ J 积分）可以表达成

$$J = \frac{\pi}{4} (c_{44}A^2 + 2e_{15}AB - \kappa_{11}B^2) \quad (3.3.20)$$

根据上面的计算得到的结果，在裂纹尖端附近有

$$A = \frac{e_{15}E_\infty + \tau_\infty}{c_{44}} \sqrt{2a}, \quad B = \frac{e_{15}(e_{15}E_\infty + \tau_\infty)}{c_{44}\kappa_{11}} \sqrt{2a} \quad (3.3.21)$$

将 A 和 B 代入方程(3.3.20)，则局部能量释放率为：

$$J_c = \frac{\pi a}{2c_{44}} \left(1 + \frac{e_{15}^2}{c_{44}\kappa_{11}}\right) (e_{15}E_\infty + \tau_\infty)^2 \quad (3.3.22)$$

整体能量释放率为：

$$\begin{aligned}
J_a &= J_c + D_s (\phi_+ - \phi_-)|_{x=a} \\
&= \frac{\pi a}{2c_{44}} \left(1 + \frac{e_{15}^2}{c_{44}\kappa_{11}}\right) (e_{15}E_\infty + \tau_\infty)^2 \\
&\quad - \frac{4D_s^2 a}{\pi\kappa_{11}} \operatorname{Im} \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{(e_{15}^2 + c_{44}\kappa_{11})E_\infty + e_{15}\tau_\infty}{c_{44}D_s} \right) \right] \\
&\approx \frac{\pi a}{2c_{44}} [\tau_\infty^2 - (c_{44}\kappa_{11} + e_{15}^2)E_\infty^2]
\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

3.3.2 电位移松弛模型求解电极化饱和区

对于这个问题，Pak[64]根据线弹性本构方程给出的裂纹尖端电位移的表达式为：

$$D_y = D_\infty \sqrt{\frac{a}{2r_l}}, \tag{3.3.24}$$

其中 r_l 为裂纹尖端附近任意一点到裂纹尖端的距离。类比 Irwin 的应力松弛模型 [217]，现在我们采用电位移松弛模型来估计电极化饱和区的大小，如图 2.30 所示。

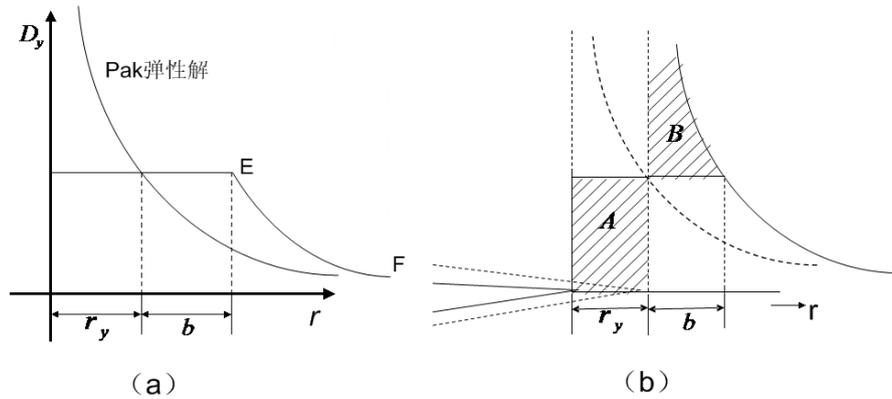


图 2.30 电位移松弛模型

通过证明可知，电位移松弛后的塑性区的大小为：

$$R_{Irwin} = r_y + b \approx 2r_0 \tag{3.3.25}$$

根据 $D_y = D_s$ 可以确定 r_0 的大小为：

$$R_{Irwin} = 2r_0 = \frac{D_\infty^2}{D_s^2} a \tag{3.3.26}$$

将采用条带模型得到的结果与采用电位移松弛模型（类比 Irwin 应力松弛模型）得到的结果进行比较，即

$$\frac{R_{Irwin}}{r_s} = \frac{8}{\pi^2} = 0.81 \tag{3.3.27}$$

通过对比发现,两种方法的结果相差约 19%。考虑到它们是从完全不同的角度得到的结果,在小范围屈服条件下,能达到这样的接近,应该是令人满意的!

由此可以看到,在小范围屈服条件下,由 Dugdale 模型推广出来的电极化饱和模型同样是相当有效的,至少在小范围屈服条件下,为人们提供了一种估计裂纹尖端电极化饱和区大小的方法。在理想电极化饱和模型下,采用条带电极化饱和模型计算的裂纹尖端塑性区的大小只与在无穷远处的电位移大小有直接关系,即当无穷远处的电位移确定后,电极化饱和区的大小也就随之确定,而与无穷远处受到的力和电场的加载没有直接关系。

按照平面模型得到的结论,整体能量释放率和总能量释放率并不能预测电场对临界载荷的影响。对于这种反平面的问题,哪种能量释放率作为判定标准合适,需要进一步的实验与分析。

3.4 本章小结

本章我们重点研究了电场对压电材料裂纹临界扩展的影响。根据非线性的理想弹塑性模型和理想电极化饱和模型,从而假设裂纹尖端不仅存在电极化饱和条带区,而且还存在着应力屈服区。进一步根据这种双条带模型,我们计算得到了裂纹尖端机械张开位移和电张开位移的表达式,结果发现裂纹尖端电张开位移不能作为裂纹扩展准则,而机械张开位移可以作为压电材料裂纹是否扩展的判定准则。根据机械张开位移准则,我们可以看到造成两种实验现象的原因是因为裂纹尖端力屈服区和电极化饱和条带区的大小不同造成的:

(i) 当电极化饱和区小于力屈服区时,裂纹尖端发生机械塑性变形造成的能量损耗很大,裂纹尖端电畴翻转较少,因此,需要较大范围的电极化饱和区来阻碍裂纹的继续扩展,实验上对应着正电场促进裂纹扩展,而负电场阻碍裂纹扩展;

(ii) 力屈服区小于电极化饱和区时,裂纹尖端存在很明显的电畴翻转时,裂纹扩展单位长度造成的能量损耗很大,结果电断裂韧性很大,从而导致电极化饱和区比较小,实验上或观察到正负电场都促进裂纹扩展。

最后我们分析了压电材料力学反平面 III 型裂纹问题,采用电位移条带饱和模型,给出了裂纹尖端力-电场的分布和电极化饱和区的大小。另外,我们采用类似 Irwin 应力松弛修正方法也得到了电极化饱和区的大小。通过对比两种方法得到的结果,我们发现尽管是从不同角度进行分析和计算的,两种方式得到的结果比较接近,因此当裂纹尖端电极化饱和区比较小时,两种方法都是很有有效的求解电极化饱和区的途径。

第四章 场相关临界态模型下超导薄带电磁响应及力学变形

随着高温超导体的发现和应用,精确计算超导体在外加电流和磁场下的电磁响应变得越来越重要。临界态模型是分析求解实用超导体电磁性质的有力工具。由于 Bean 模型简单,方便计算,所以几十年来,有很多基于 Bean 模型超导薄膜方面的理论研究[98, 100-103, 218-220]。然而,很多实验表明,尤其是在外加磁场比较高的时候,实际超导体的临界电流密度强烈依赖于局部磁场[24, 25]。因此采用 Bean 模型只能定性地解释一些实验现象,并不能精确解释可观测的物理量,例如磁滞回线和交流磁化系数等[220, 221]。因此,想要得到更加精确的结果,需要采用场相关的临界态模型来分析和计算。另外,超导体(如热核反应装置)一般处在复杂的环境下(强磁场和大电流),由于很强的洛伦兹力作用,超导体会发生力学变形甚至破坏。因此,精确计算超导体在磁场和电流作用下的力学行为对于超导体的实际应用非常重要。

本章采用场相关临界态模型,当超导薄带处在外加电流、外加磁场、以及外加磁场和电流共同作用三种情形下时,推导出了计算磁场和电流分布的积分方程组,该方法好处是适用于任意的场相关临界态模型。进一步根据 Kim 模型,计算分析了超导薄带在外加磁场上升阶段和下降阶段的磁弹性行为。

4.1 实用 II 类超导体基本问题

4.1.1 平行磁场和垂直磁场下超导薄带问题

对于无限长的超导薄板,如图 4.1 (a) 所示,如果外加磁场平行于超导薄板时,由于磁场沿着 y 方向不会变化,因此磁场的分布很方便求解,根据 Maxwell 方程,磁场的分布可以通过求解下面的方程得到

$$-\frac{dB(x)}{dx} = \mu_0 J_c(x) \quad (4.1.1)$$

其中 μ_0 是真空磁导率, J_c 是超导临界电流密度。如图所示,随着外加磁场的增加,磁场会沿着厚度方向穿透整个超导薄板,然后随着磁场的进一步增加,超导薄板内部的磁场整体增加。

但是对于外加磁场垂直于超导薄膜时,由于这种情况下超导薄膜具有很强的退磁效应,求解这个问题不再像平行磁场那么简单。另外,根据下面方程可以看出

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla B \times \hat{\mathbf{B}} + B(\nabla \times \hat{\mathbf{B}}) \quad (4.1.2)$$

其中 $B = |\mathbf{B}|$ 表示磁场的大小， $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}/B$ 表示磁场的方向。上面的方程说明了磁场的变化等于大小和方向的变化。对于平行场来说，由于各处磁场方向都是沿着 y 轴，所以磁场的变化只有沿着 x 方向大小的变化，如方程(4.1.1)所示。但是对于超导薄带垂直于磁场情形，其不仅有大小的变化，而且有方向的变化。如图 4.1 所示，由于退磁效应，对比平行磁场和垂直磁场下电流密度和磁场分布结果，可以看到超导薄板在平行磁场和垂直磁场下的磁场分布形式完全不同。Norris 首先通过保交变换方法得到了外加电流下的超导薄膜的磁场和电流密度分布结果[218]。随后 Brandt 等人给出了垂直外加磁场下的超导薄板的电流和磁场分布公式[98]。在超导薄膜两边穿透深度不能减小的情况下，通过巧妙的叠加原理，Brandt 和 Indenbom[101]进一步给出了电流和磁场同时增加的情况下的磁场和电流密度的分布结果。

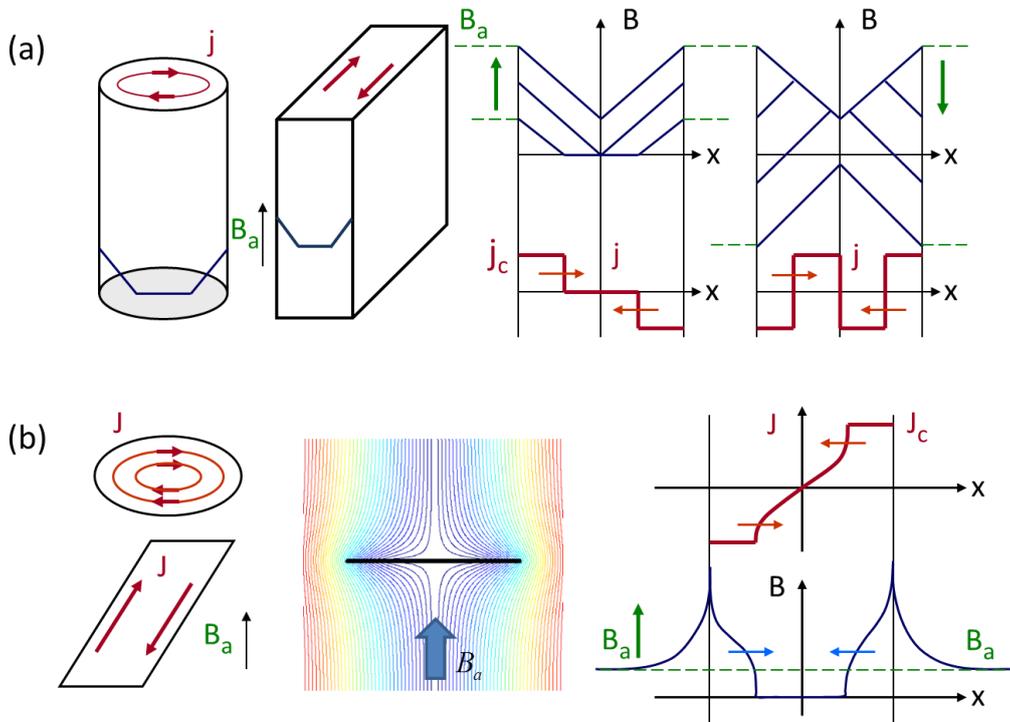


图 4.1 (a) 平行磁场下超导薄板磁场电流分布，(b) 垂直磁场下超导薄膜磁力线，磁场和电流分布图（部分图片节选自 Brandt）

Brandt 和 Indenbom[101]分析对比了平行磁场和垂直磁场下的各物理量变化规律：

- (a) 在开始穿透阶段，磁通穿透深度和外加电流或者垂直磁场成二次方关系，但是和平行磁场成线性关系；
- (b) 在小穿透范围内，超导薄带的交流损耗和垂直磁场或者外加电流成四次方关系，但是和平行磁场成三次方关系；
- (c) 在磁场穿透前沿处，在垂直磁场下的磁场分布曲线垂直向上，斜率为无限

大，但是平行磁场下的磁场分布曲线的斜率为有限值；

- (d) 当磁通穿透部分超导薄带时，垂直磁场情形下，超导薄带外部穿透区域为临界电流，中间未穿透区域同样有非临界电流流过，但是对于平行磁场时，在中间完全抗磁区域没有任何电流流过；
- (e) 垂直磁场情形下的超导薄带电流分布是连续的，并在穿透深度处分布曲线是垂直的，斜率无限大，但是平行磁场的电流分布有跳跃，是分段函数形式；
- (f) 只要外加电流或者垂直磁场减小时，磁通冻结区域不再是临界电流，而平行磁场下磁通冻结区域仍为临界电流分布；

从上面的对比分析中，我们看到，平行磁场下和垂直磁场下的超导薄带的物理规律完全不同。

4.1.2 超导体场相关临界态模型

我们知道一般常规导体都满足欧姆定律，因此欧姆定律描述了具体常规导体电流密度和电场之间的关系，它们之间的系数（电导率）依据具体导体而不同，所以欧姆定律相当于常规导体的本构方程。超导体作为一种特殊的导体，由于零电阻效应，不能再用欧姆定律来描述超导体。对于适用 II 类超导体，临界态模型从宏观唯象层面上描述了超导内部钉扎中心对涡旋的钉扎强度，因此临界态模型相当于超导材料的电磁本构方程。所以，临界态模型对于超导体的作用相当于欧姆定律对于常规导体的作用。原则上来说，根据 Maxwell 方程和临界态模型，就可以求解任何超导电磁响应问题。目前的临界态模型主要有以下几种：

$$J_c = J_{c0} \quad (\text{Bean 模型}) \quad (4.1.3)$$

$$\frac{J_c(B)}{J_{c0}} = \frac{B_0}{B_0 + |B|} \quad (\text{Kim 模型}) \quad (4.1.4)$$

$$J_c(B) = J_{c0} \exp(-B/B_0) \quad (\text{指数模型}) \quad (4.1.5)$$

其中 Bean 模型给出了一个最基本形式的本构形式，Bean 模型指出磁场穿透区域内的临界电流是一个常数，与当地磁场没有关系。但是 Kim 模型和指数模型指出磁场穿透区域内的临界电流不是一个常数，而是会受到当地磁场的抑制，因此后面的两种模型又称为场相关临界态模型。尽管临界态模型形式简单，但却表明实用 II 类超导体的非线性本构关系（参见绪论），例如一个倾斜磁场不可能通过分解为水平磁场和垂直磁场再将结果叠加来求解问题。

另一方面，很多实验表明场相关临界态模型（如 Kim 模型和指数模型）比 Bean 模型能更加准确描述实际超导体的物理性质[222]。而由于临界电流和当地磁场是相关的，所以采用场相关临界态模型在计算上要比 Bean 模型复杂很多。但是由于场相关临界态模型的精确性优点，吸引了不少学者去研究，但是目前大

多数的研究都是集中在平行磁场下, 此时由于没有退磁效应, 所以相对来说比较方便求解。而对于垂直磁场下场相关临界态模型的解主要存在两个难点, 一是垂直磁场下超导薄带或者薄盘具有很强的退磁效应, 如上面提到的, 磁场不仅有大小的变化, 而且磁场方向也会发生变化; 二是由于临界电流与当地磁场有关, 不再是一个常数, 因此而目前采用场相关临界态模型求解在垂直外加磁场下的电流和磁场分布还不多见, 只有 McDonald 和 Clem 采用权函数方法给出了超导薄膜在垂直磁场下电流密度和磁场的分布, 并且发现磁滞回线的峰值恰好出现在外加磁场下降到零时候[145]。随后 Shantsev 等[146]通过实验证明了这个现象, 反过来也说明场相关临界态模型的准确性。在 McDonald 和 Clem 的基础上, Shantsev 等人得到了超导圆盘在垂直磁场下的电流和磁场分布[147], 并计算了磁化曲线和交流磁化系数等磁性行为[148, 149]。但是这些研究仅仅给出了超导带材或薄盘在垂直磁场下的电流与磁场分布问题, 并没有研究超导带材在外加电流、外加电流和外加磁场同时加载两类情况下的电流和磁场分布问题。因此, 很有必要根据场相关临界态模型对超导薄带在垂直磁场、外加电流、外加磁场和电流同时存在三种情形下作进一步的分析研究。

4.2 场相关临界态模型下超导薄带的解

上面我们提到, McDonald 和 Clem 采用权函数方法给出了在垂直外加磁场下超导薄膜的电流密度和磁场的分布, 并计算了磁化曲线。但是他们仅考虑了超导薄带在外加磁场下这一种情况。这一节, 我们通过复变函数方法(附录 C), 考虑了超导薄带在垂直磁场、外加电流、磁场和电流同时加载三种情况下的问题, 推导出了求解超导薄带在这三种情况下的电流密度和磁场的分布一系列耦合的积分方程组。此方法好处是适用于任意的场相关临界态模型, 只要将临界电流表达式代入积分方程进行数值求解, 就可以得到电流和磁场分布的精确解。需要说明的是对于外加磁场情形, 我们采用保角变化得到了和 McDonald 和 Clem 相同的结果[145]。但是这里我们对于一些特殊的外加磁场、外加电流情形, 根据积分中值定理给出了显式表达式, 通过和数值求解积分方程组进行对比, 验证了这些特殊情况下求解电流和磁场分布的近似公式的有效性, 从而在这些特殊情况下给出了避免求解复杂的积分方程组的方法。

如图 4.2 所示, 一无限长的超导薄板的厚度为 d , 宽度为 $2w$, 这里我们假设超导薄板的厚度远小于宽度, 即 $d \ll w$ 。建立如图所示直角坐标系, 外加电流 I_a 沿着 $-z$ 方向, 外加磁场 B_a 垂直于超导薄带。为了计算方便, 这里将电流密度沿着超导厚度进行积分定义为面电流, 即 $J(y) = \int_{-d/2}^{d/2} j(x, y) dx$ 。下面我们分别给出三种情形下的磁场和电流的分布结果。

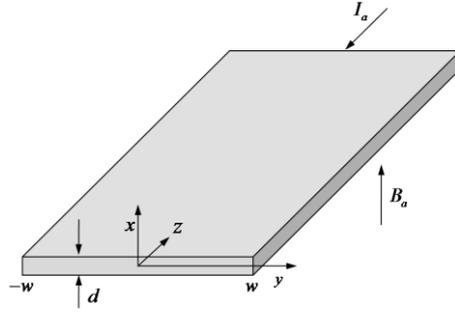


图 4.2 超导薄带在垂直外加磁场和外加电流下的示意图

4.2.1 垂直磁场下的超导薄带

首先考虑超导薄板处零场冷却后，只有外加磁场的情况，此时假设外加磁场从 0 增加到 B_a ，根据临界态模型，磁通首先从边界开始穿透超导薄板，外部区域 $a \leq |y| \leq w$ 内是超导临界电流 $|J(y)| = J_c$ ；但是超导内部区域 $|x| \leq a$ 仍旧是完全抗磁状态，即没有任何磁通。这个问题 McDonald 和 Clem[145]已经根据权函数方法得到了磁场和电场的分布，实际上根据保角变换方法，很容易得到和 McDonald 和 Clem 相同的结果，即

$$J_y(y) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} y \sqrt{a^2 - y^2} \int_a^w \frac{J_c(B_z(x')) dx'}{(x'^2 - y^2) \sqrt{x'^2 - a^2}}, & |y| < a \\ -\frac{y}{|y|} J_c(B_z(y)), & a < |y| < w \end{cases}, \quad (4.2.1)$$

$$B_z(y) = B_f |y| \sqrt{y^2 - a^2} \int_a^w \frac{J_c(B_z(x'))}{J_{c0}} \frac{dx'}{(y^2 - x'^2) \sqrt{x'^2 - b^2}}, \quad a < |y| \neq w \quad (4.2.2)$$

$$B_a = B_f \int_a^w \frac{J_c(B_z(x'))}{J_{c0}} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 - a^2}}, \quad (4.2.3)$$

其中标度场 B_f 定义为

$$B_f = \frac{\mu_0 J_{c0} d}{\pi}, \quad (4.2.4)$$

μ_0 和 J_{c0} 分别是真空磁导率和零场下的临界电流密度。从上面的方程可以看到，对于任意形式的场相关临界态模型，都可以将临界电流与磁场的关系代入上面的积分方程进行求解。将 Bean 模型 ($J_c = \text{constant}$) 代入上面的方程，通过积分，可以得到和 Brandt 等人[101]相同的结果。但是对于一般形式的场相关临界态模型来说，上面的积分方程组是耦合的，很难得到显式结果，所以需要数值求解上面的方程得到磁场和电流的分布。关于如何采用数值方法求解这些耦合的积分方程组，以及相关数值方法的准确性的验证等问题，参见附录 C。Kim 模型在

高外加磁场下可以很好地与实验吻合，而且实验上采用 Kim 模型可以很好地吻合 YBCO 超导薄膜的交流损耗结果[222]。因此本章我们统一选用 Kim 模型计算求解，计算参数为 $B_0/B_f = 5$ ，结果如图 4.3 所示。

$$\frac{J_c(B_z(x))}{J_{c0}} = \frac{B_0}{B_0 + |B_z(x)|}, \tag{4.2.5}$$

其中 B_0 是一个与材料有关的常数，用来描述临界电流与磁场相关的程度。

从图 4.3 可以看到，磁场分布形式和 Bean 模型得到的结果很像，都是在超导薄带两端有奇异性，只是数值大小不同，在相同的外加磁场下，两种模型计算得到的穿透深度不同。而且不同于 Bean 模型，在磁场穿透区域，由于临界电流密度和磁场有关，因此不再是常数分布形式，而是随着磁场的磁场在超导边界变大而减小，因此，Kim 模型得到的穿透深度比 Bean 模型得到的结果要大。由于外加磁场下，超导薄带两侧的电流分布形式是反对称的，因此，为了保证电流的连续性，在中心线 $y=0$ 上的电流大小肯定为 0，这样就造成磁通不可能完全穿透整个超导薄带，这与外加电流情形完全不同（见下文）。外加磁场比较小的时候，磁场的穿透深度随着外加磁场增加很快，但是随着穿透深度的增加，穿透深度随着外加磁场增加的速度越来越慢。

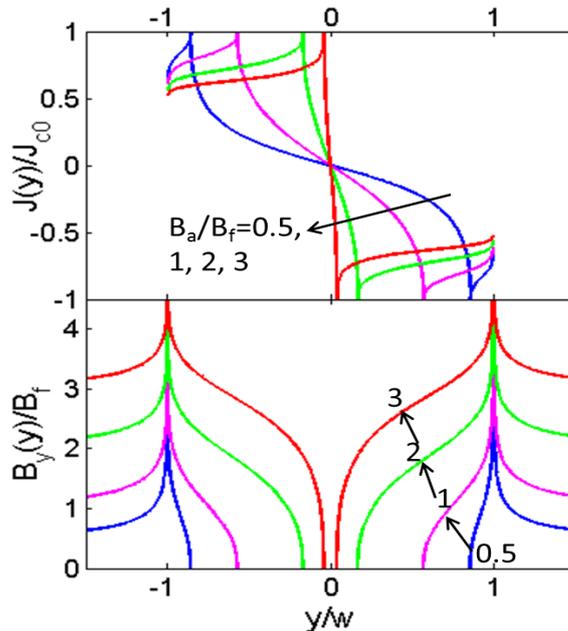


图 4.3 超导薄板在外加磁场上升情形下的电流和磁场分布，采用 Kim 模型计算，参数为 $B_0/B_f = 5$

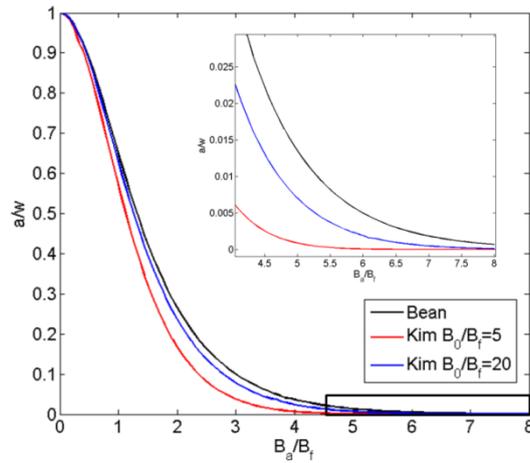


图 4.4 Bean 模型和不同参数下的 Kim 模型磁场穿透深度随着外加磁场的变化，其中插图表示黑框放大后的图

图 4.4 所示为 Bean 模型和 Kim 模型下的磁场穿透深度和外加磁场之间的关系，其中 Kim 模型给出了两种参数下的结果。从图中明显可以看出，Kim 模型的穿透深度要比 Bean 要大，而且随着材料参数 B_0/B_f 的变小，同样外加磁场下的穿透深度大一些。不管是哪种模型，当外加磁场比较大的时候，磁场穿透深度随着外加磁场明显越来越慢，从插图可以看出，不管外加磁场有多大，磁场不可能完全穿透整个超导带，磁场只能是无限接近中心线。

下面我们重点分析两种特殊情形，即弱外加磁场和强外加场情形，在若外加磁场下，我们可以得到显式的解析结果，然后讨论强磁场下的一些有意思的结果。

(i) 弱外加场情形 ($B_a \ll B_f$) 当外加磁场比较小的时候，磁场的穿透深度相对于薄带宽度很小，即 $a \rightarrow w$ 。利用积分中值定理，我们可以将方程(4.2.1)写成

$$J(y) \approx J_{Bean}(y) / \left(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N\right), \quad |y| < a, \quad (4.2.6)$$

其中 $J_{Bean}(y)$ 是根据 Bean 模型计算得到的超导薄带在垂直外加磁场下电流分布公式[98, 101]。对于磁场，可以将方程(4.2.2)简化为

$$\tilde{B}(y) \approx \tilde{B}_{Bean}(y) / \left(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N\right), \quad a < |y| \neq w, \quad (4.2.7)$$

$$\tilde{B}_{Bean}(y) = \begin{cases} \operatorname{arctanh} \left[\frac{w \sqrt{y^2 - a^2}}{y \sqrt{w^2 - a^2}} \right], & a < |y| < w, \\ \operatorname{arctanh} \left[\frac{y \sqrt{w^2 - a^2}}{w \sqrt{y^2 - a^2}} \right], & |y| > w. \end{cases} \quad (4.2.8)$$

经过代数运算，我们可以得到穿透深度的近似表达式为

$$(w-a)/w \approx (B_a/B_f)^2 (1 + |\tilde{B}(y^*)|/N)^2 / 2, \quad (4.2.9)$$

对于弱磁场情形，Kim 模型的结果与 Bean 模型结果之间存在一个简单的关系，Kim 模型下的磁场和电流分布可以通过 Bean 模型的结果除以一个因子得到，比例因子为 $(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N)$ 。Kim 模型下的穿透深度要在 Bean 模型结果的基础上增加 $(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N)^2$ 倍。对于某一个外加磁场和材料常数 N ，我们可以通过和精确解进行对比来选择一个合适的参数， $y^* = w - 0.64(w-a)$ 。然后将其代入(4.2.8)和(4.2.7)并令 $y = y^*$ 可以求得 $\tilde{B}_{Bean}(y^*) = \operatorname{arctanh}(0.6) \approx 0.69$ 和 $\tilde{B}(y^*)$ ，那么比例因子为

$$(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N) = (1 + (1 + 2.76/N)^{1/2}) / 2, \quad (4.2.10)$$

很明显，上面的比例因子会随着 $N \rightarrow \infty$ 趋近于 1，即 $(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N) \rightarrow 1$ 。这说明弱磁场下 $N \rightarrow \infty$ 时电流和磁场的分布和 Bean 模型得到的结果是相同的。对于指数临界态模型，这个比例因子为 $\exp(-|B(y^*)|/N)$ 。因此，这个近似方法的好处是在弱磁场下可以避免求解上面繁琐的积分方程，直接可以通过 Bean 模型的显式结果得到 Kim 模型的结果，图 4.5 和 4.6 给出了采用近似公式得到的电流分布和求解积分方程得到的精确解的对比情况，可以看出除了穿透区域的磁场外，近似的显式结果和精确解非常吻合。图 4.7 给出了不同材料参数下，磁场穿透深度随着外加磁场的变化，可以发现近似的结果和精确解吻合的很好。在弱磁场下，磁场的穿透深度和外加磁场成二次抛物线关系。

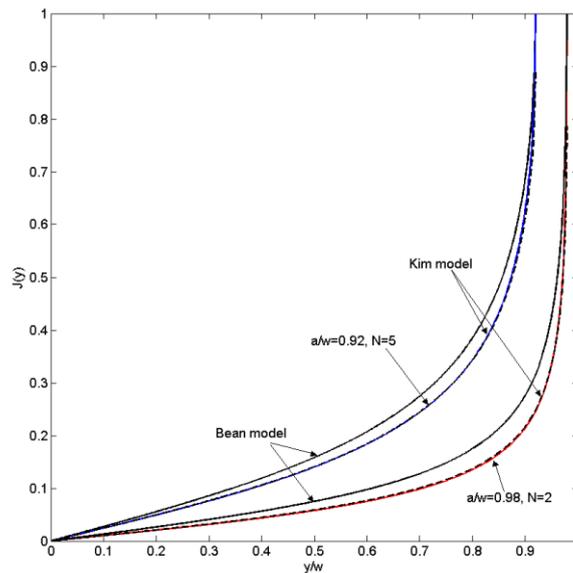


图 4.5 不同参数和弱外加磁场下采用近似公式得到的电流分布和求解积分方程得到的精确解的对比图

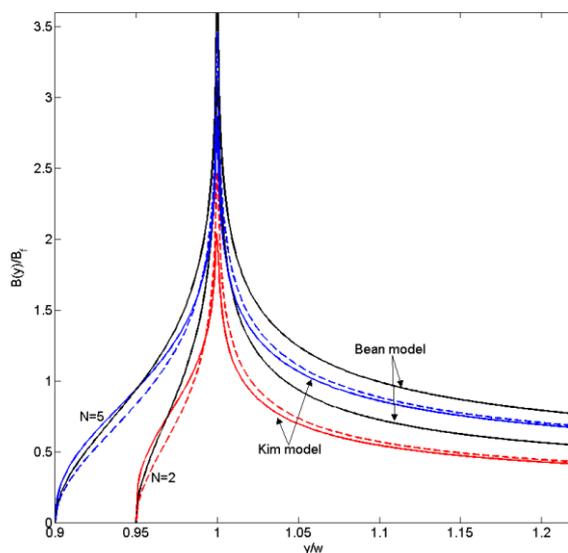


图 4.6 不同参数和弱外加磁场下采用近似公式得到的磁场分布和求解积分方程得到的精确解的对比图

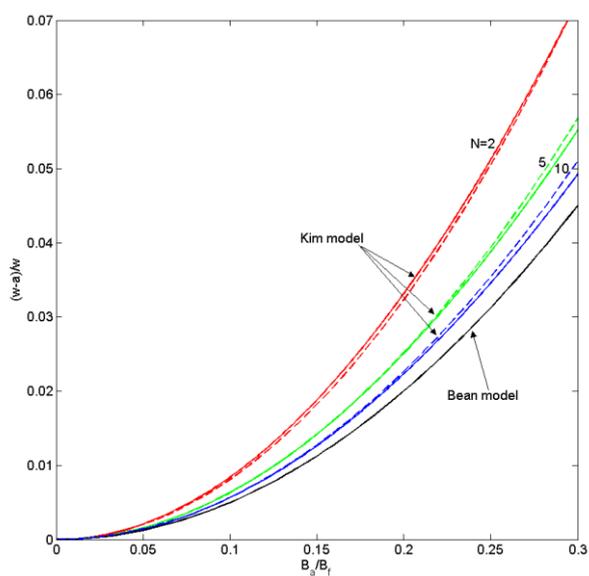


图 4.7 不同材料参数和弱外加磁场下的穿透深度随着外加磁场的变化，其中实线为求解积分方程得到的精确解，虚线为近似公式的结果

(ii) 强磁场情形 ($B_a \gg B_f$) 现在我们来考虑强外加磁场的情形，尽管外加磁场不可能完全穿透整个超导薄带，但是此时磁场已经非常接近中心线，即 $a \rightarrow 0$ 。

根据强外加场下电流和磁场的分布特点, 我们知道磁场的分布已经基本等于外加磁场, 即 $B(y) \approx B_a$, 那么我们发现如下的关系特点,

$$\frac{\tilde{B}(y)}{\tilde{B}'(y)} = \frac{\tilde{B}_a}{\tilde{B}'_a}, \quad (4.2.11)$$

$$\frac{\tilde{J}(y)}{\tilde{J}'(y)} = \frac{1 + \tilde{B}'_a/N}{1 + \tilde{B}_a/N}, \quad (4.2.12)$$

其中 $\tilde{B}(y)$, $\tilde{B}'(y)$ 和 $\tilde{J}(y)$, $\tilde{J}'(y)$ 表示 Kim 模型下两个不同外加场 \tilde{B}_a 和 \tilde{B}'_a 下磁场和电流分布公式。对于指数模型, 通过分析, 公式(4.2.12)的形式变成如下形式

$$J(y)/J'(y) = \exp\left(\frac{\tilde{B}'_a - \tilde{B}_a}{N}\right) \quad (4.2.13)$$

图 4.8 给出了不同高磁场下电流和磁场的分布关系, 图中虚线和点划线是根据上面关系方程(4.2.11)和(4.2.12)得到的结果, 我们可以看到和精确解吻合的挺好。在高磁场下的简单关系不仅可以用来分析磁场和电流的分布关系, 实际上可以进一步应用这个关系分析高磁场下的交流损耗和磁化性质。

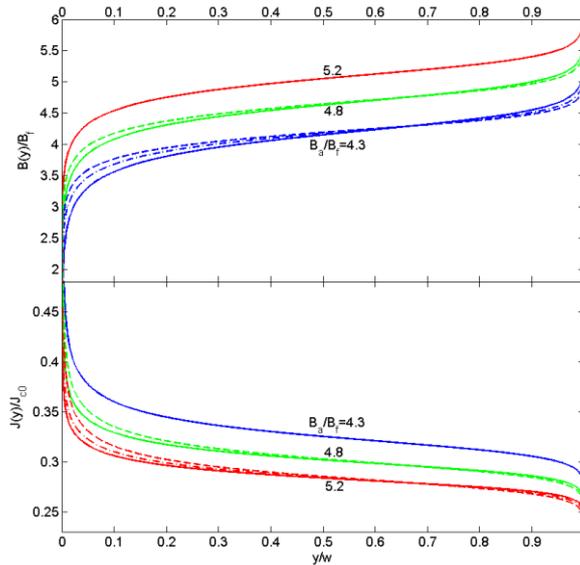


图 4.8 高磁场下电流密度和磁场的分布图, 其中实线表示精确结果, 虚线为近似解析关系得到的结果

当外加磁场从 B_{a0} 减小到 B_a ($|B_a| < B_{a0}$) 时, 根据临界态模型, 磁通变化首先从超导薄带外部 $a' < |y| < w$ 开始, 外部的临界电流反向; 但是内部区域 $a < |y| < d$ 由于磁通被冻结, 磁场不会变化。最中心的区域 $|x| < a$ 仍旧是完全抗磁状态。此时的磁场和电流密度分布可以通过求解下面的积分方程得到

$$J_{\downarrow}(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} y \sqrt{a'^2 - y^2} \left[\int_{a'}^w \frac{J_c(B_z(x'))}{(x'^2 - y^2) \sqrt{x'^2 - a'^2}} dx' \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} J_{c0} \int_a^{a'} \frac{B_z(x')}{B_f (x'^2 - y^2) \sqrt{a'^2 - x'^2}} dx' \right], & |y| < a' \\ \frac{y}{|y|} J_c(B_z(y)), & a' < |y| < w \end{cases}, \quad (4.2.14)$$

$$B_{\downarrow}(y) = |y| \sqrt{y^2 - a'^2} \left[-B_f \int_{a'}^w \frac{J_c(B_z(x'))}{J_{c0} (y^2 - x'^2) \sqrt{x'^2 - a'^2}} dx' \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \int_a^{a'} \frac{B_z(x')}{(y^2 - x'^2) \sqrt{a'^2 - x'^2}} dx' \right], \quad a' < |y| \neq w \quad (4.2.15)$$

$$B_a = -B_f \int_{a'}^w \frac{J_c(B_z(x'))}{J_{c0} \sqrt{x'^2 - a'^2}} dx' + \frac{2}{\pi} \int_a^{a'} \frac{B_z(x')}{\sqrt{a'^2 - x'^2}} dx', \quad (4.2.16)$$

同样采用数值方法求解上面的积分方程组,可以得到下降场情形下的电流和磁场分布图。结果如图 4.9 所示,超导薄带零场冷却后,外加磁场首先增加到 $B_a/B_f = 3$ (黑线),然后降低磁场分别到 2, 1, 0。如图所示,在下降场阶段,磁场的分布图很像海浪的样子,随着磁场的下降,磁场的尖峰逐步向中心移动,电流分布曲线在下降场过程中变得非常复杂,外部区域的临界电流峰值正好对应着磁场分布等于 0 的地方,而且随着磁场下降向中心移动。

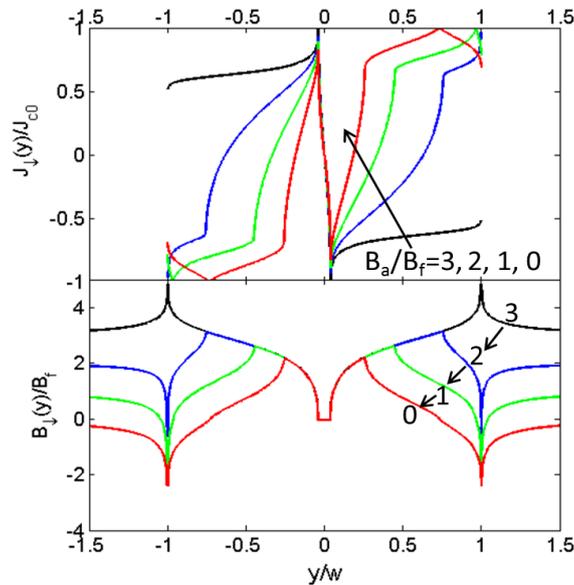


图 4.9 外加磁场从 $B_a/B_f = 3$ 下降到 2,1,0 时电流和磁场分布图, Kim 模型中的参数同样取 $B_0/B_f = 5$

当外加磁场下降到 $-B_{a0}$ 时，磁场和电流的分布完全反向。如果进一步降低磁场，则中心完全排磁进一步缩小，这个结果同将磁场直接从0反向增加到高于 B_{a0} 的情形时是等价的。总结上升场和下降场的结果可以看到，整个超导薄带的磁场和电流分布同外加磁场的增加路径有关系，举例来说，将磁场直接增加到 $B_a/B_f = 2$ 和将磁场先增加到3然后下降到2是完全不同的，因此会存在磁滞回线和交流损耗。有一个非常有意思的现象是，对于 Kim 模型，磁化曲线的最高值正好出现在磁场下降到0的时候，而 Bean 理论结果不是这样，这个 Kim 模型的理论结果已经得到 Shantsev 等人的实验证实[146]，由此也说明，Kim 模型要比 Bean 模型准确很多，更能和实际材料相吻合。

4.2.2 外加电流下的超导薄带

现在我们来考虑超导薄带只处在外加电流作用下，如何得到场临界态模型下磁场和电流的分布公式。我们采用保角变换并消除 $y = \pm a$ 处的临界电流和磁场的奇异性（参见附录 B），可以得到在外加电流从0上升到 I_a 阶段的积分方程组，即

$$J(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{a^2 - y^2} \int_a^w \frac{u J_c(B(u))}{\sqrt{u^2 - a^2} (u^2 - y^2)} du, & |y| < a, \\ J_c(B(y)), & a < |y| < w, \end{cases} \quad (4.2.17)$$

$$B(y) = \begin{cases} B_f \frac{y}{|y|} \sqrt{y^2 - a^2} \int_a^w \frac{udu}{\sqrt{u^2 - a^2} (y^2 - u^2)} \frac{J_c(B(u))}{J_{c0}}, & a < |y| \neq w, \\ 0, & |y| < a. \end{cases} \quad (4.2.18)$$

然后整体外加电流可以通过积分得到，即

$$I_a = 2 \int_0^w J(u) du \quad (4.2.19)$$

对于 Bean 模型，将 $J_c = J_{c0}$ 代入到上面的方程，我们很容易得到 Norris 的结果。然而，对于任意场相关临界态模型，一般只能通过数值方法得到上面积分方程的解。不失一般性，我们同样采用 Kim 模型求解这个问题。图 4.6 给出了 Kim 模型下的外加电流从0开始增加到 $I_a/I_{c0} = 0.3, 0.6, 0.75$ 和 0.85 时的电流密度和磁场分布图。从图中可以看到电流分布成左右对称，磁场分布成左右反对称。不同于 Bean 模型，由于外部区域 $a \leq |y| \leq w$ 内的磁场越靠近边界磁场越大，所以根据 Kim 模型得到的临界电流得到了很大的抑制。由于临界电流和当地磁场相关，由于自场的存在，超导薄带的载流能力不可能达到 I_{c0} 。最大载流能力与材料参数 B_0/B_f 有关。从下一章我们可以看到，超导薄带的载流能力不仅与材料有

关，而且还与薄膜的厚度和薄膜的几何形状有关系。

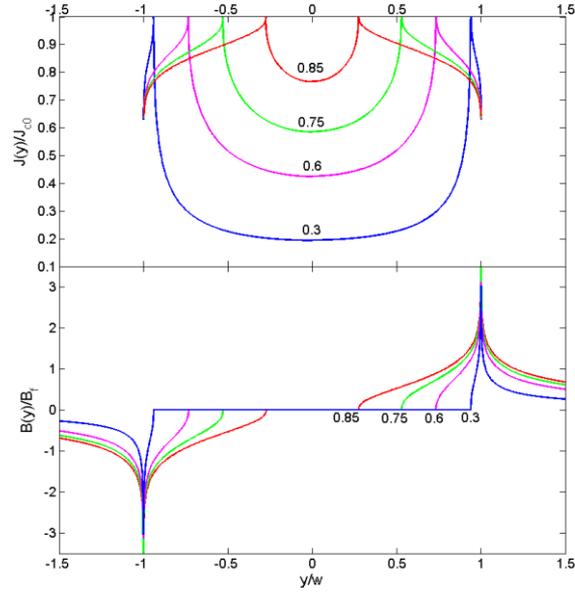


图 4.10 根据 Kim 模型计算得到的外加电流增加情况下超导薄带磁场和电流密度的分布，Kim 模型的参数为 $B_0/B_f = 5$

类似外加磁场情形，下面我们考虑外加电流时的两种特殊情形，即

(i) 弱穿透情形（小电流 $I_a \ll I_{c0}$ ）如果外加电流比较小时，使得磁场穿透深度远小于薄带宽度，即 $a \rightarrow w$ ，此时根据积分中值定理，我们可以将方程(4.2.17)写成如下的形式，即

$$J(y) \approx J_{Bean}(y) / \left(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N\right), |y| < a \quad (4.2.20)$$

其中 $\tilde{B}(y^*) = B(y^*)/B_f$ ， $N = B_0/B_f$ ， $a < y^* < w$ ， $J_{Bean}(y)$ 是根据 Bean 模型得到的电流分布形式（见 Brandt 等人结果[101]）。另一方面，磁场可以根据方程(4.2.18)重新写成如下的形式

$$\tilde{B}(y) \approx \tilde{B}_{Bean}(y) / \left(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N\right), a < |y| \neq w, \quad (4.2.21)$$

$$\tilde{B}_{Bean}(y) = \begin{cases} \frac{y}{|y|} \operatorname{arctanh} \left[\frac{y^2 - a^2}{w^2 - a^2} \right]^{1/2}, & a < |y| < w, \\ \frac{y}{|y|} \operatorname{arctanh} \left[\frac{w^2 - a^2}{y^2 - a^2} \right]^{1/2}, & |y| > w. \end{cases}, \quad (4.2.22)$$

然后我们得到磁场穿透深度为

$$(w-a)/w \approx (I_a/I_{c0})^2 \left(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N\right)^2 / 2, \quad (4.2.23)$$

其中 $I_{c0} = 2J_{c0}wd$ 。对于这种弱穿透情形，采用 Kim 模型计算得到的磁场和电流密度分布比根据 Bean 模型得到的结果要小，比例因子为 $(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N)$ 。然而穿透深度比 Bean 模型要增加 $(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N)^2$ 倍。在某一个材料参数下经过尝试，我们可以选用一个合适的值 $y^* = w - 0.53(w - a)$ 来吻合求解积分方程得到的精确解。然后通过方程(4.2.22)可以求得 $\tilde{B}_{Bean}(y^*) = \operatorname{arctanh}(0.686) \approx 0.84$ ， $\tilde{B}(y^*)$ 可以通过方程(4.2.21)得到。因此，比例因子可以写成

$$(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N) = (1 + (1 + 3.36/N)^{1/2})/2, \quad (4.2.24)$$

从上面的比例因子可以明显看到，当 $N \rightarrow \infty$ 时， $(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N) \rightarrow 1$ 。由此说明当 $N \rightarrow \infty$ 可以退化为 Bean 模型的结果。图 4.11 和 4.12 分别给出了小电流下通过上面的近似公式和求解积分方程得到的电流和磁场精确解进行对比图。尽管是在一个参数下确定的 y^* ，通过图我们可以看到，在不同的材料参数下和不同的电流下，近似解和精确解吻合的很好。

图 4.13 说明了 Bean 模型和不同参数的 Kim 模型下的磁场穿透深度随着外加电流的变化。同外加磁场情形类似，在弱外加电流下，穿透深度和外加电流成二次方关系。上面的近似关系式根据 Kim 模型得到的，对于指数模型，比例因子的形式为 $\exp(-|B(y^*)|/N)$ 。

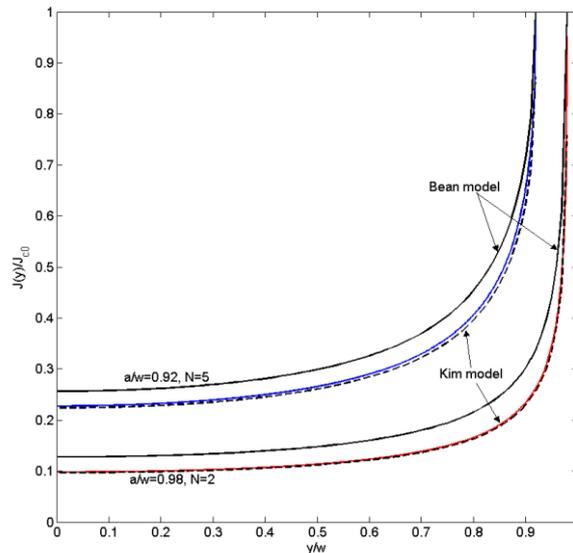


图 4.11 小电流下根据近似公式和求解积分方程（精确解）得到的电流密度分布进行对比

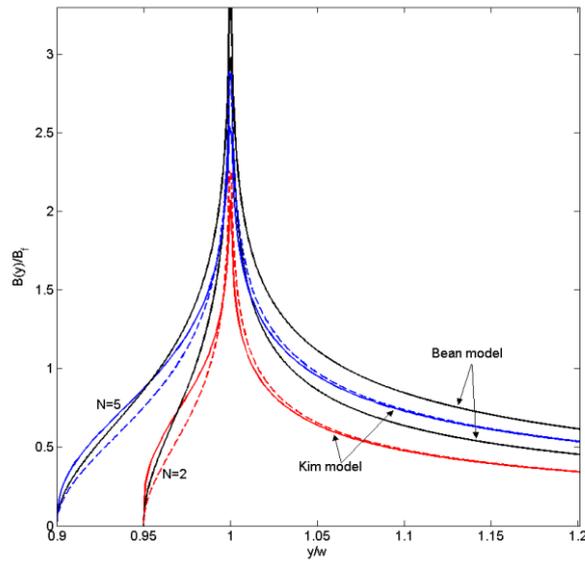


图 4.12 小电流下根据近似公式和求解积分方程（精确解）得到的磁场进行对比

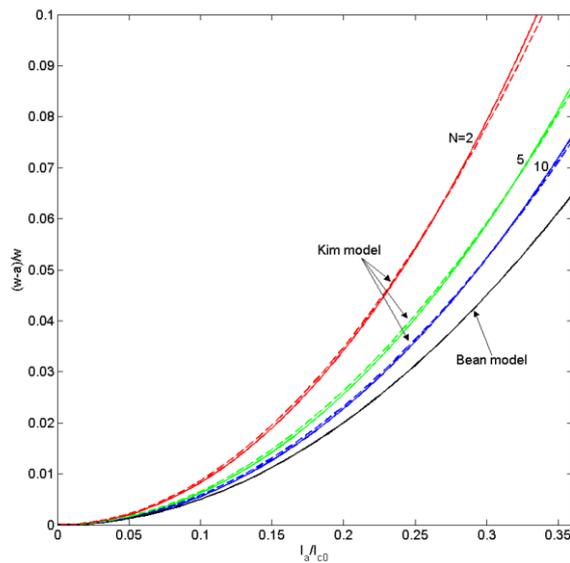


图 4.13 不同材料参数下采用近似公式（虚线）和求解积分方程得到的精确（实线）磁场穿透深度随着外加电流的变化

(ii) 完全穿透情形 ($I_a \approx I_{\max}$) 当外加电流增加到足够大时，以至于磁场基本完全穿透超导薄带，即 $a \rightarrow 0$ 。此时的磁场分布可以通过一个方程确定，即

$$B(y) = B_f y \int_0^w \frac{du}{(y^2 - u^2)} \frac{J_c(B(u))}{J_{c0}}, |y| \neq w, \quad (4.2.25)$$

那么超导薄带能够承载的最大外加电流为

$$I_a = 2 \int_0^w J_c(B(u)) du, \quad (4.2.26)$$

图 4.14 给出了不同模型下的理论最大载流与材料参数 B_0/B_f 之间的关系，从图中可以看出，不同于 Bean 模型，场相关临界态模型下的临界电流不能达到 $I_{c0} = 2J_{c0}wd$ 。从图中可以看出，超导薄带的最大载流能力随着材料参数 B_0/B_f 增加而增加，而且相同材料参数下的指数模型得到的临界电流要比 Kim 小一点。对于完全穿透情形下的电流分布图，请参见下一章关于不同几何形状的超导薄带下的临界电流问题的分析。

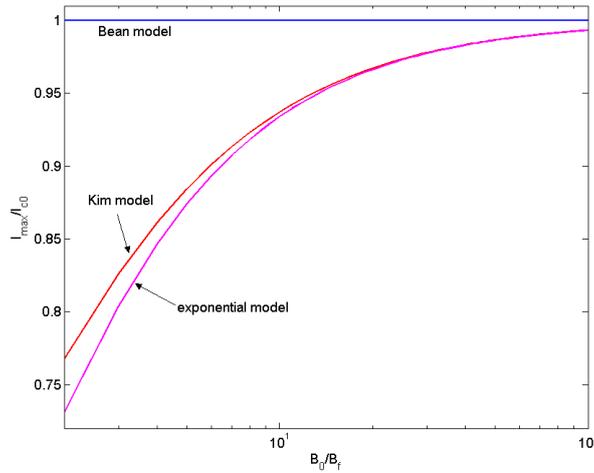


图 4.14 不同模型（Bean 模型，Kim 模型和指数模型）下计算得到的最大载流能力随着材料参数变化图

下面我们来考虑外加电流从初始值 I_{a0} 减小到较小的值 I_a 后的磁场和电流密度分布问题。如果 $|I_a| < I_{a0}$ ，根据临界态模型，中心区域 $|y| < a_0$ 仍旧保持完全排磁状态，磁通被冻结在区域 $a_0 < |y| < a$ ，此区域的磁场不会随着外加电流减小而变化，但是外部区域 $a < |y| < w$ 的临界电流密度会改变方向，磁场在此区域会变化。根据这些条件，在 $|y| < a$ 区域的电流和磁通可以分成两部分（计算中分为两部分）：其中一部分是由于 $a < |y| < w$ 内的临界电流引起的；另一部分是由 $a_0 < |y| < a$ 区域内的冻结磁通引起的。实际上，电流引起的磁场和冻结磁通引起的磁场服从广义的毕奥-萨伐尔定律。然后根据附录计算方法，我们可以得到确定磁场和电流分布的积分方程组，即

$$J_{\downarrow}(y) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \sqrt{a^2 - y^2} \left[\int_a^w \frac{u J_c(B_{\downarrow}(u))}{\sqrt{u^2 - a^2} (u^2 - y^2)} du \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} J_{c0} \int_{a_0}^a \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2} (u^2 - y^2)} \frac{B(u)}{B_f} du \right], & |y| < a, \\ -J_c(B), & a < |y| < w, \end{cases} \quad (4.2.27)$$

$$B_{\downarrow}(y) = -\frac{y}{|y|} \sqrt{y^2 - a^2} \left[B_f \int_a^w \frac{u du}{\sqrt{u^2 - a^2} (y^2 - u^2)} \frac{J_c(B_{\downarrow}(u))}{J_{c0}} \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \int_{a_0}^a \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2} (y^2 - u^2)} B(u) du \right], \quad a < |y| \neq w \quad (4.2.28)$$

$$I_a = 2 \int_0^w J_{\downarrow}(u) du, \quad (4.2.29)$$

图 4.15 给出了电流从 $0.85I_{c0}$ 减小到不同值 (0.5, 0, -0.5, -0.85) 后的磁场和电流分布图。从图中可以看出, 随着电流下降到 -0.85, 磁场穿透深度 a 逐步减小到 a_0 , 当外加电流等于 -0.85 后, 磁场和电流分布都完全反向, 和电流直接反向增加到 -0.85 结果相同。磁场在超导薄带左右两边存在奇异性, 但是随着离边界越来越远, 可以看到, 自场的大小很快减小到 0; 但对于外加磁场情况, 磁场在远离超导薄带的地方等于外加磁场。

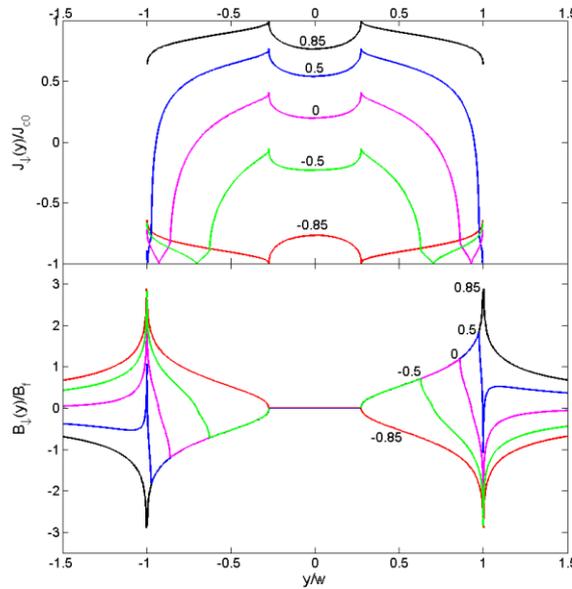


图 4.15 外加电流从 $0.85I_{c0}$ 下降到 0.5, 0, -0.5, 直到 $-0.85I_{c0}$ 下的电流密度和磁场分布图 (Kim 模型, 参数为 $B_0/B_f = 5$)

4.2.3 外加磁场和电流同时加载下超导薄带

实际中, 一般超导体不会处在单一外加场下。对于外加磁场和外加电流同时

作用于超导薄带，Brandt 等人已经采用巧妙的叠加方法得到了 Bean 模型下的结果。在这一部分，我们将给出如何基于场相关临界态模型（Kim 模型）计算外加电流和外加磁场同时作用于超导薄带时的磁场和电流的分布。对于外加电流和外加磁场同时作用，超导薄带内的电流和磁场分布非常复杂，即使两者都单调增加，问题都不会像单一场情形下那么简单。这里，我们只考虑一种相对简单的情形，即随着磁场和外加电流的增加的过程中，超导薄带左右两端的穿透深度不能减小。实际上，根据我们附录的计算方法，其他复杂情况也可以求出来，只是计算过程会非常繁琐，因此我们这里只考虑这种相对简单一些的情形。

这里我们首先考虑一种特殊数学情形，只有一边（如右边， $a < y < w$ ）存在临界电流 $J_c(B)$ ，另一边 $-w < y < -a$ 的临界电流为 0。中间区域 $|y| < a$ 内的保持完全的排磁状态。根据附录中的复变函数方法，我们可以得到这种特殊情形下的解为

$$B_0(y) = B_f \frac{y}{2|y|} \int_a^w \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{\sqrt{u^2 - a^2}(y - u)} \frac{J_c(B_0(u))}{J_{c0}} du, \quad a < |y| \neq w \quad (4.2.30)$$

$$J_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_a^w \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{u^2 - a^2}(u - y)} J_c(B_0(u)) du, \quad |y| < a \quad (4.2.31)$$

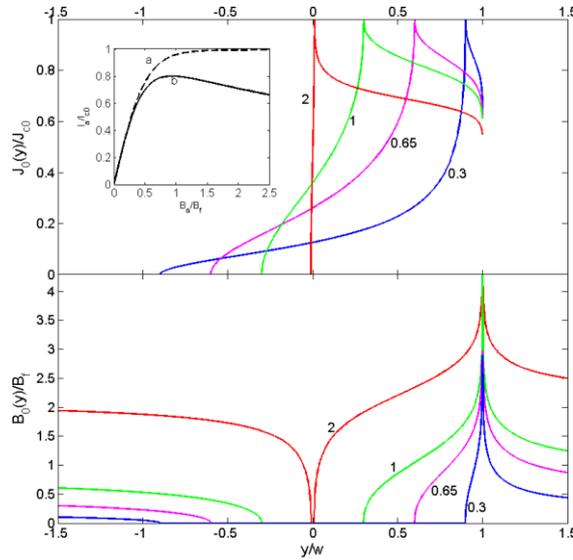


图 4.16 根据方程(4.2.30)和(4.2.31)计算得到的电流 $J_0(y)$ 和磁场 $B_0(y)$ 分布图，计算参数为 $B_0/B_f = 5$ ，外加磁场和外加电流 ($B_a/B_f, I_a/I_{c0}$) 分别为(0.3, 0.261), (0.65, 0.386), (1, 0.402), (2, 0.357)。插图给出了 Bean 模型和 Kim 模型下的满足这种特殊情形的 I_a 和 B_a 的关系图。

外加磁场可以通过方程(4.2.30)在极限 $|y| \rightarrow \infty$ 下得到，而外加电流可以通过对电流密度进行积分得到，即

$$B_a = \frac{B_f}{2} \int_a^w \frac{J_c(B_0(u))}{J_{c0}} \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}, \quad (4.2.32)$$

$$I_a = \int_{-w}^w J_0(u) du \quad (4.2.33)$$

图 4.16 给出了通过求解上面积分方程组得到不同电流和磁场的分布。图中的曲线分别对应着外加磁场和外加电流(B_a/B_f , I_a/I_{c0})分别为(0.3, 0.261), (0.65, 0.386), (1, 0.402), (2, 0.357)时的结果。插图说明当 B_a 超过 $0.94B_f$ 后, I_a 不再随着增加, 而是会减小, 这个与 Bean 模型的单调递增现象完全不同。

需要指出的是上面的方程并不能描述任何实际物理情况, 因为根据临界态模型, 任何磁场穿透区域, 电流都应该达到临界值, 但是左边区域 $y < -a$ 的电流 $J(y) = 0$ 。幸运的是, 我们可以通过上面的方程得到真实情况下外加电流和外加磁场同时存在下的场的分布。

当外加电流和外加磁场同时存在时, 电流和磁场的分布不再是单一场下的对称分布形式, 而是会打破对称性分布。左边区域 $w - a_1$ 的大小和右边的 $w - a_2$ 大小不同, 中间区域 $-a_1 < y < a_2$ 还是保持完全排磁状态。为了能够方便求解这个问题, 我们将超导薄带进行平移, 使得中间区域 $-a_1 < y < a_2$ 的中点正好处在坐标原点。此时, 左边界在坐标系中的位置为 $w_L = -w + (a_1 - a_2)/2$, 右边界的位置变成了 $w_R = w + (a_1 - a_2)/2$, 中间区域 $|y| < a' = (a_1 + a_2)/2$ 为完全抗磁区域。通过方程 (4.2.30)-(4.2.33), 我们可以得到求解真实外加电流和外加磁场作用下的磁场和电流分布的积分方程组, 即

$$B(y) = \frac{B_f y}{2|y|} \left(\begin{array}{l} \int_{a'}^{w_R} \frac{\sqrt{y^2 - a'^2}}{\sqrt{u^2 - a'^2}(y-u)} \frac{J_c(B(u))}{J_{c0}} du \\ -g \int_{w_L}^{-a'} \frac{\sqrt{y^2 - a'^2}}{\sqrt{u^2 - a'^2}(y-u)} \frac{J_c(B(u))}{J_{c0}} du \end{array} \right), \quad a' < |y| \neq w_L, w_R \quad (4.2.34)$$

$$J(y) = \frac{1}{\pi} \left(\begin{array}{l} \int_{a'}^{w_R} \frac{\sqrt{a'^2 - y^2}}{\sqrt{u^2 - a'^2}(u-y)} J_c(B(u)) du \\ -g \int_{w_L}^{-a'} \frac{\sqrt{a'^2 - y^2}}{\sqrt{u^2 - a'^2}(u-y)} J_c(B(u)) du \end{array} \right), \quad |y| < a' \quad (4.2.35)$$

$$B_a = \frac{B_f}{2} \left(\int_{a'}^{w_R} \frac{J_c(B(u))}{J_{c0}} \frac{du}{\sqrt{u^2 - a'^2}} - g \int_{w_L}^{-a'} \frac{J_c(B(u))}{J_{c0}} \frac{du}{\sqrt{u^2 - a'^2}} \right), \quad (4.2.36)$$

$$I_a = \int_{w_L}^{w_R} J(u) du \quad (4.2.37)$$

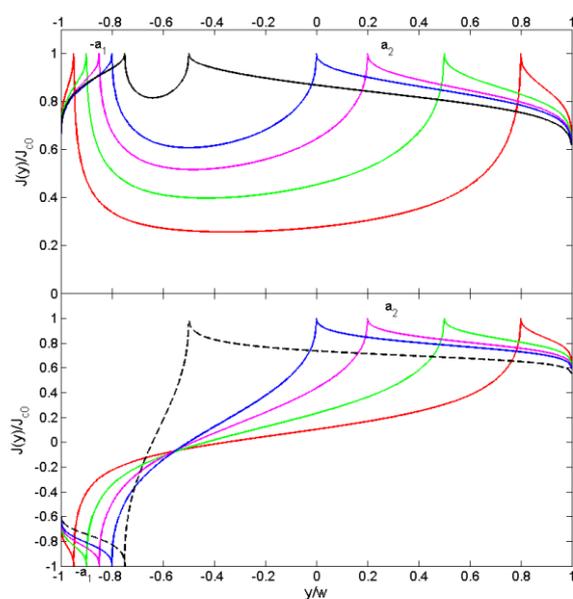


图 4.17 根据方程(4.2.34)-(4.2.37)计算得到的‘类电流’和‘类磁场’情形下的电流分布图，计算参数为 $B_0/B_f = 5$ ，图中对应的左右两侧的穿透深度 $((w-a_1)/w, (w-a_2)/w)$ 分别为 $(0.05, 0.2)$ ， $(0.1, 0.5)$ ， $(0.15, 0.8)$ ， $(0.2, 1)$ ， $(0.25, 1.5)$ 。图中虚线表明不是对应着真实的物理情况。

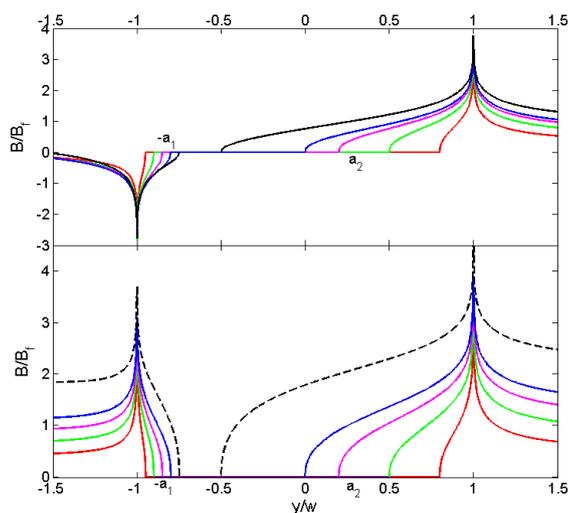


图 4.18 根据方程(4.2.34)-(4.2.37)计算得到的‘类电流’和‘类磁场’情形下的磁场分布图，计算参数同图 4.17。

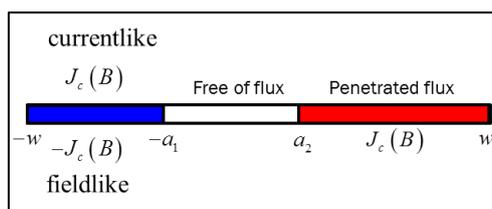


图 4.19 ‘类电流态’和‘类磁场态’示意图

当 $g=1$ 时, 左右两端的区域 ($w_L < y < -a'$ 和 $a' < y < w_R$) 内的临界电流方向相同, 此时电流和磁场分布如图 4.17 和 4.18 的上图所示, 从图中可以看出, 整体电流和磁场的分布和单加电流时有些类似, 只是左右不再对称, 所以我们称这种情形为‘类电流’分布。如果 $g=-1$, 左右两端的区域内临界电流方向相反, 此时的电流和磁场的分布形式如图 4.17 和 4.18 的下图所示, 同样地, 我们看到分布形式和外加磁场情形相像, 分布形式不再是对称性的, 因此我们称这种情形为‘类磁场’分布。

在‘类电流’情形, 随着外加电流和磁场的线性增加, 左右两侧的穿透深度单调递增; 但是在‘类磁场’情形, 随着外加电流和磁场的线性增加, 左右两侧的穿透深度并不会持续增加, 例如图中虚线所示, 当外加磁场和电流超过一定值之后, 左边的穿透深度会减小, 然后再增加, 因此, 尽管从数学上得到了此时的分布形式, 但是它并不代表实际存在这种态, 因为在电流和磁场增加过程中, 出现了违背临界态模型的阶段, 此阶段的结果不对应实际存在这种物理现象。由此也可以看出, 外加电流和磁场同时存在时, 尽管二者在单调线性增加, 但是有些阶段的结果并不对应实际物理现象, 具体分析需要借助于 I_a-B_a 图。

在‘类磁场’情形下, 如图中黑线所示, 外加磁场和电流线性增加, 刚开始左右两端的穿透深度会随着磁场和电流的增加而增加, 但是达到一定的值 (图中黑线上的圆点) 之后, 左侧的穿透深度反而会减小, 因此过了这个点之后并不对应实际物理态。但是并不能说明虚线部分的态没办法达到, 只是不能通过磁场和电流都线性增加来实现, 实际上可以通过其他的加载路径实验, 只要能避免加载过程中穿透深度的减小, 实现的路径有无限多种可能。在‘类电流’区域, 只要外加磁场和电流成线性增加, 并不会出现上面的非物理态情形。对比 Bean 模型的结果[101], 我们发现最大的不同就是 Kim 模型得到的 $a_1 = const$ 曲线上有峰值出现, 而 Bean 模型没有。这表示过了这个峰值点之后, 尽管外加电流在减小, 但是磁场的穿透深度却在持续增加, 直到 $a_2 = -a_1$ 。

如图 4.19 所示, 对于给定的外加电流和磁场, 怎样才能确定对应的是‘类电流’分布还是‘类磁场’分布呢? 怎么能确定在外加电流和磁场线性增加过程中或者其他加载路径下会不会出现非物理态呢? 这些问题可以通过 I_a-B_a 图来解释说明。图 4.20 给出了根据 Kim 模型计算得到的不同外加电流和磁场下的左侧和右侧的穿透深度三维立体图。图中的蓝色线条和绿色线条给出了 $a_1 = const$ 和 $a_2 = const$ 对应的外加磁场和外加电流关系。如果我们将这些蓝色线条和绿色线条画到一张图上, 如图 4.21 所示, 就得到了 I_a-B_a 平面内 $a_1 = const$ 和 $a_2 = const$ 交错形成的网格图。图 4.21 中蓝色点划线表示左侧穿透深度为 0, 对应于图 4.20 左图的山脊, 这条曲线非常重要, 因为它将整个平面分成了‘类电流’和‘类磁场’

两种不同的分布情形。实际上，我们可以将图 4.21 经过对称和旋转得到二三四象限的 $a_1 = const$ 和 $a_2 = const$ 图，这样就可以分析外加电流和磁场反向时的问题，但这里我们只关注第一象限内的问题，即外加电流和磁场都是正的。

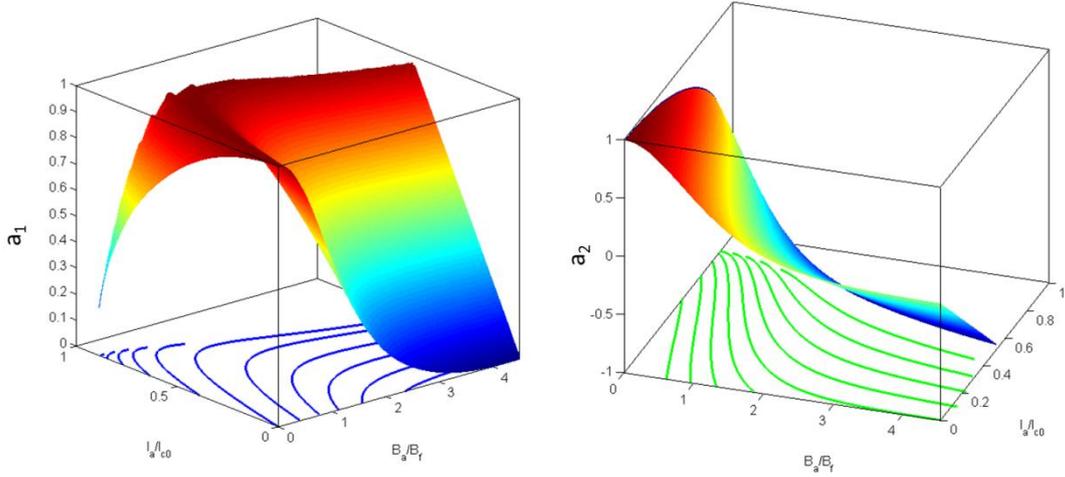


图 4.20 Kim 模型下不同外加电流和磁场下的左侧穿透深度(左图)和右侧穿透深度(右图)，图中蓝色的和绿色的线条表示 $a_1 = const$ 和 $a_2 = const$ 对应的外加电流和磁场之间的关系。

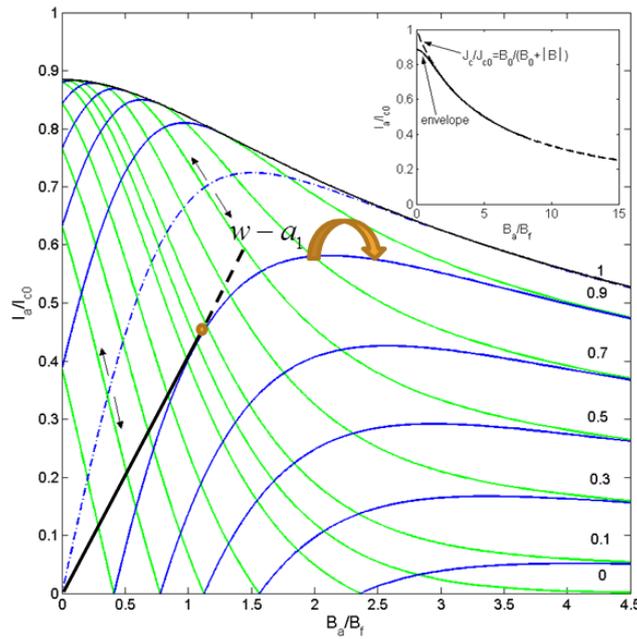


图 4.21 $a_1 = const$ (蓝线) 和 $a_2 = const$ (绿线) 构成的 I_a - B_a 图，计算参数为 $B_0/B_f = 5$ 。蓝色点划线表示 $a_1 = w$ 将整个平面分成‘类电流’和‘类磁场’类型。插图给出了 Kim 模型 I_a - B_a 图的包络线和 Kim 模型的临界电流和磁场关系曲线

另一个重要的问题就是图 4.21 中的包络线，这些包络线对应着 $a_2 = -a_1$ 的结果。表示磁场已经全部穿透整个超导薄带，因此包络线对应的电流就是不同外加磁场下的临界电流。插图给出了临界电流在不同的外加磁场下的变化规律，除了

磁场比较小的时候以外，临界电流和外加磁场的关系和直接根据 Kim 模型 $J/J_{c0} = B_0/(B_0 + |B|)$ 曲线非常接近。

4.3 基于场相关临界态模型超导薄带磁弹性问题

上一节，我们分析了场相关临界态模型下超导薄带处于外加磁场，外加电流，外加磁场和电流同时存在三种情况下的电流密度和磁场的分布。这些分析对于进一步求解超导薄带的交流损耗和交流磁化性质非常重要。由于超导体在混合态会受到很强的洛伦兹力作用，因此本节，我们将根据上一节得到的 Kim 模型的结果，来分析超导薄带在垂直外加磁场下的力学变形等磁弹性问题。

4.3.1 物理模型和基本方程

如图 4.22 所示，超导薄带在 $x-y$ 平面内且沿着 y 方向无限大。假设一均匀外加磁场 B_a 垂直作用于超导薄带，根据上一节，我们可以计算得到超导薄带内的电流和磁场的分布。涡旋受到的钉扎力和洛伦兹力相等，因此，超导薄带的体力为

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (4.3.1)$$

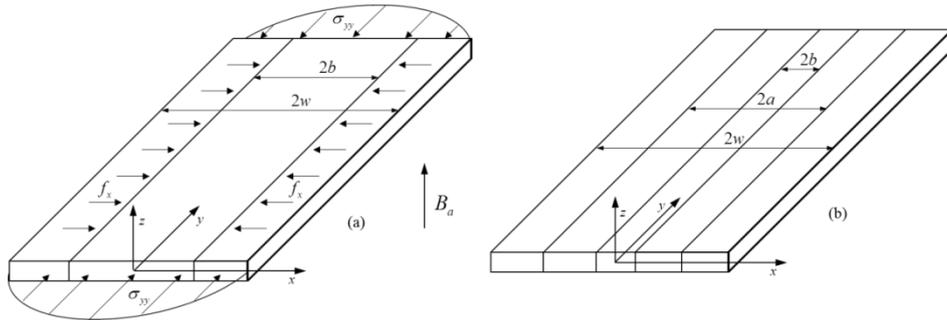


图 4.22 超导薄带在垂直外加磁场上升 (a) 时的受力示意图，(b) 外加磁场下降时三种不同的区域：完全排磁区，磁通冻结区和临界电流反向区

根据弹性力学理论，系统的平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0, \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0, \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0, \quad (4.3.4)$$

其中 σ_{ij} ($i, j = x, y, z$) 是应力分量， f_i ($i = x, y, z$) 是体力分量。对于这个无限长的超导薄带，临界电流只有一个分量，即 $J_y(x)$ ，因此沿着 x 方向的体力分量

大小为

$$f_x(x) = J_y(x) B_z(x), \quad (4.3.5)$$

沿着 y 和 z 方向超导薄带体力为 0, 即 $f_y = f_z = 0$ 。由于超导薄带上下表面没有应力, 而且厚度很小, 所以应力分量满足

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (4.3.6)$$

因此, 通过对方程(4.3.2)进行积分并考虑到边界条件 $\sigma_{xx}(w) = 0$, 我们可以得到

$$\sigma_{xx}(x) = \int_x^w f_x(x') dx' \quad (4.3.7)$$

材料的本构方程为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}), \quad (4.3.8)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}), \quad (4.3.9)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}), \quad (4.3.10)$$

其中 ε_{ii} ($i = x, y, z$) 表示应变分量, E 是材料的杨氏模量, ν 是材料的泊松比。由于薄带沿着 y 方向是无限长的, 因此可以得到 $\varepsilon_{yy} = 0$ 。根据方程(4.3.9)我们可以得到应力分量 σ_{xx} 和 σ_{yy} 存在下面的关系

$$\sigma_{yy} = \nu \sigma_{xx}, \quad (4.3.11)$$

将上面的关系代入(4.3.8)和(4.3.10)可以得到,

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{xx}, \quad (4.3.12)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_{xx} \quad (4.3.13)$$

进一步, x 方向的位移在 $x=0$ 为 $u(x)=0$ 。根据变形方程 $\varepsilon_{xx} = \partial u(x)/\partial x$, 从而我们可以通过积分得到薄带沿着 x 方向的位移

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon_{xx}(x') dx' \quad (4.3.14)$$

超导薄带的厚度的变化为

$$\frac{\Delta d(x)}{d} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_{xx} \quad (4.3.15)$$

根据上面这些方程, 一旦知道超导薄带的磁场和电流的分布, 我们就可以求出薄带的体力、应力、应变、厚度变化、位移等。下面我们就选择具体一些参数进行求解。这里, 我们选择 Kim 模型和 Bean 模型, 来比较两种模型下超导薄带的磁弹性的结果。

4.3.2 超导薄带在垂直磁场下磁弹性结果讨论

这一部分，我们分析外加磁场从 0 增加到不同值 B_{a0} 的上升场过程中和磁场从 B_{a0} 下降到 0 下降场过程中的超导薄带的力学变形。最后我们给出超导薄带的磁致伸缩回线。所有的计算都会采用两种模型（Bean 模型和 Kim 模型），并进行对比。

由于这个这个问题左右对称，所以我们只需要考虑右半边 $x \geq 0$ 的超导薄带的变形即可。在我们所有的具体计算中，我们选择材料的杨氏模量为 $E = 1.25 \times 10^{11} Pa$ [139, 153, 223]，材料的泊松比为 $\nu = 0.3$ 。另外，对于 Kim 模型里面的参数，我们选择 $B_0/B_f = 5$ [145]。

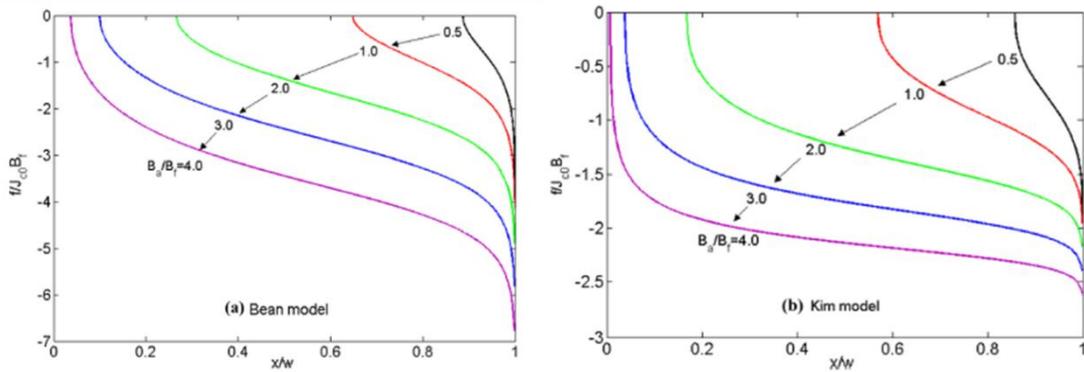


图 4.23 根据 Bean 模型 (a) 和 Kim 模型 (b) 计算得到的超导薄带体力分布，磁场从 0 上升到 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0

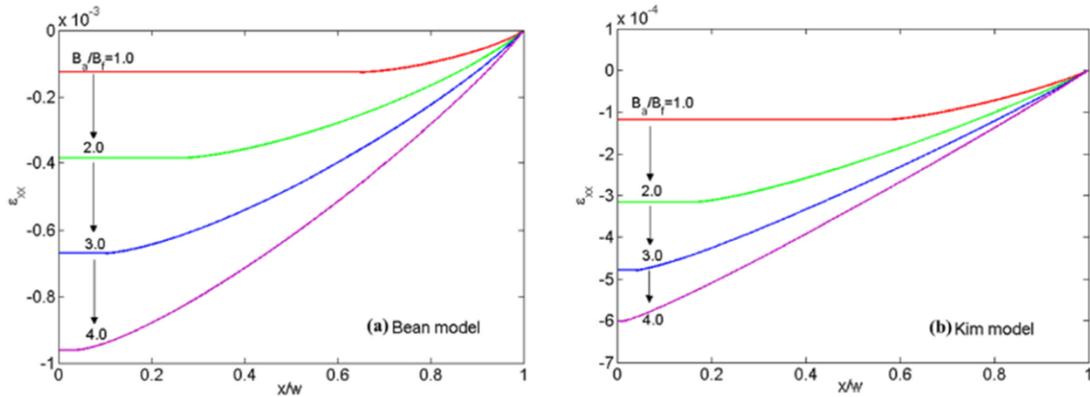


图 4.24 基于 Bean 模型 (a) 和 Kim 模型 (b) 计算得到的超导薄带应变分布，磁场从 0 上升到 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 的结果

超导薄带零场冷却后，图 4.23 给出了采用 Bean 和 Kim 两种模型计算得到的磁场从 0 上升到 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 时超导薄带的体力分布。从图中可以看出，对于中心区域，由于没有磁通，所以体力分布为 0。而且体力分布越靠近边界越大，最后在边界处由于磁场存在奇异性，所以体力也存在奇异性，体力和磁场的奇异性形式为 $\ln_{x \rightarrow w^-}(w-x)$ 。通过对比，我们看到 Bean 模型和 Kim 模型下的

体力分布形式比较像，然而两种模型下的体力数值大小和分布范围完全不同。Bean 模型的体力比 Kim 要大，但 Kim 模型体力分布范围要比 Bean 模型要广。

图 4.24 给出了两种模型下磁场从 0 上升到 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 的超导薄带应变分布结果。从图中可以看出，尽管体力在边界处存在奇异性，但是应变在超导薄带内分布是有限值，这是因为 $\int_{x \rightarrow w^-} \ln(w-x)$ 的积分是有限值，由于是自由边界条件，所以应变在边界 $x = w$ 处等于 0，越靠近中心应变越大，最后的完全排磁的中心区域内应变为常数。

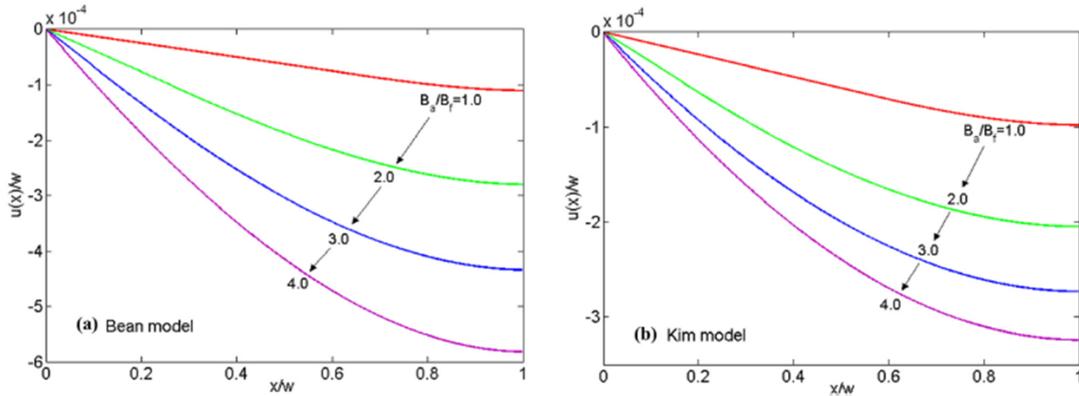


图 4.25 采用 Bean 模型 (a) 和 Kim 模型 (b) 计算得到的外加磁场从 0 上升到 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 时超导薄带不同位置的位移大小分布

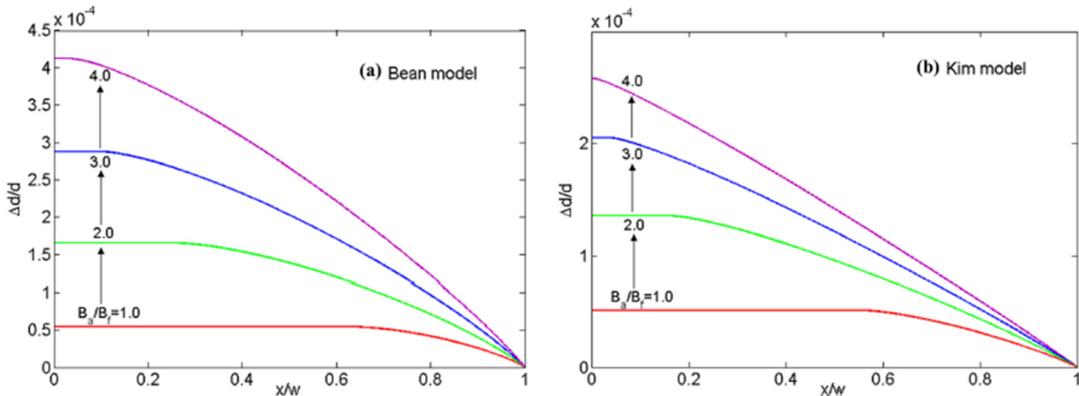


图 4.26 Bean 模型 (a) 和 Kim 模型 (b) 下得到的外加磁场从 0 上升到 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 时超导薄带厚度的变化

图 4.25 和图 4.26 分别给出了采用 Bean 模型 (a) 和 Kim 模型 (b) 计算得到的外加磁场从 0 上升到 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 时超导薄带不同位置的位移大小和相对厚度变化分布。从图中可以看到，位移在中心线上为 0，由于是压缩应变，所以位移是负的。越靠近边界越大，最大值出现在边界 $x = w$ 。相对厚度的变化和应变的分布很像，只是图形上下反过来而已。相对厚度变化最大的地方出现在中心完全排磁区域。对于上升场阶段，我们看到整个超导薄带内部都是压缩应变，而材料抗压性能比较好，所以上升场阶段一般不会出现材料破坏。

图 4.27 给出了基于 Bean 模型和 Kim 模型得到的超导薄带在下降场时的体力分布，图中画出了磁场从 4.0 逐步下降到 3.5, 3.0, 2.0, 1.0, 0。从图中可以看到，同上升场情形一样，体力在边界存在奇异性。但是不同于上升场阶段，超导薄带在下降场时的体力既有正的，也有负的。体力也会出现如同磁场分布类似的尖峰，尖峰位置会随着磁场的下降向中心线移动，而且尖峰数值也会随之慢慢变小。更重要的是对比 Bean 模型和 Kim 模型的结果，我们看以看出 Bean 模型给出的正的体力数值要比 Kim 模型略大，但是 Kim 模型的正的体力分布范围明显比 Bean 模型大，这是 Kim 模型一个重要特征。

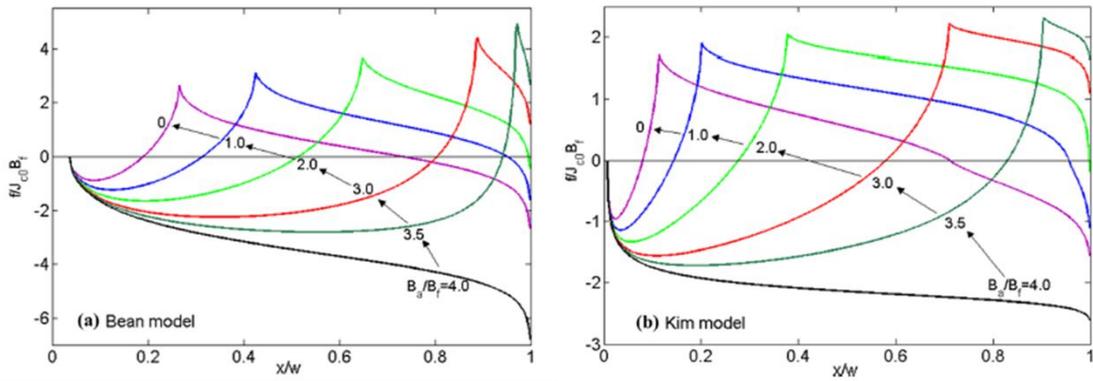


图 4.27 根据 Bean 模型 (a) 和 Kim 模型 (b) 计算得到的超导薄带体力分布，磁场从 4.0 逐步下降到 3.5, 3.0, 2.0, 1.0, 0

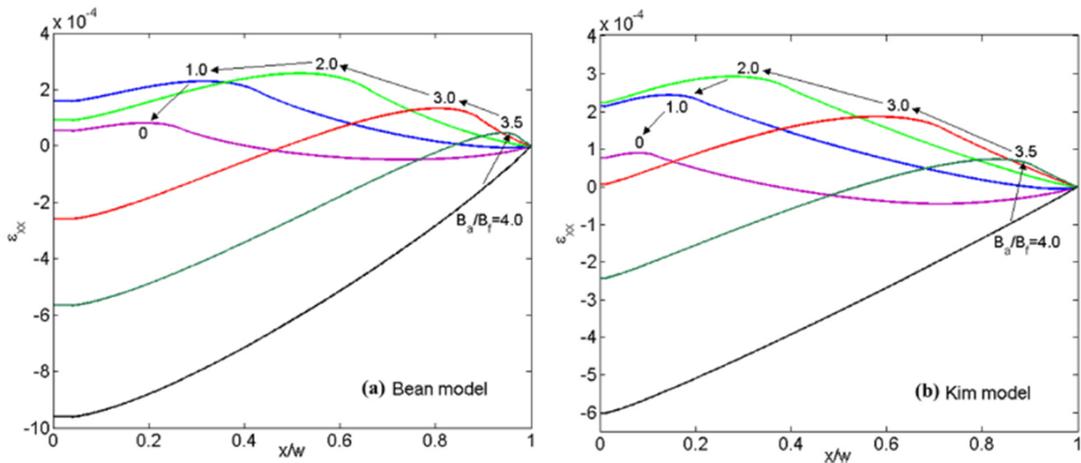


图 4.28 基于 Bean 模型 (a) 和 Kim 模型 (b) 计算得到的磁场从 4.0 逐步下降到 3.5, 3.0, 2.0, 1.0, 0 时超导薄带应变分布

如图 4.28 所示，两种模型下在下降场时的超导薄带应变分布变得更加复杂，随着磁场下降，超导薄带外部区域的应变首先变成正的，正应变区域变得越来越大，直到整个超导薄带内部全是正应变。在磁场下降过程中，正应变峰值位置随着外加磁场的下降向中间移动。有意思的是正应变的数值在磁场开始下降阶段变大，但是当磁场下降到一定数值后，应变数值又开始慢慢变小。对比 Bean 模型

和 Kim 模型的结果，我们知道，在磁场从 $4B_f$ 下降过程中，正应变峰值出现的时候不同，对于 Bean 模型，最大值出现在 $B_a = 1.7B_f$ 。但是对于 Kim 模型，最大正应变出现在 $B_a = 1.9B_f$ ，比 Bean 模型略大。这表明根据 Kim 模型计算得到超导薄带最危险对应的磁场和 Bean 模型不同。而且 Kim 模型计算得到的正应变峰值要比 Bean 模型大，上面我们也提到，这表明 Kim 模型计算得到的结果偏向于安全。Ren 等人[154]利用 $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ (Y123)带材在磁场从不用数值上升到 14T 的实验中，他们在磁场下降过程中观测到了裂纹出现。同时，他们指出原因是由于磁场下降过程中带材局部区域出现了很大的正应力或正应变导致。因此出现正应变需要我们重点关注，如果应力大小超过了材料的应力极限，很容易导致超导薄带的断裂或剥离。

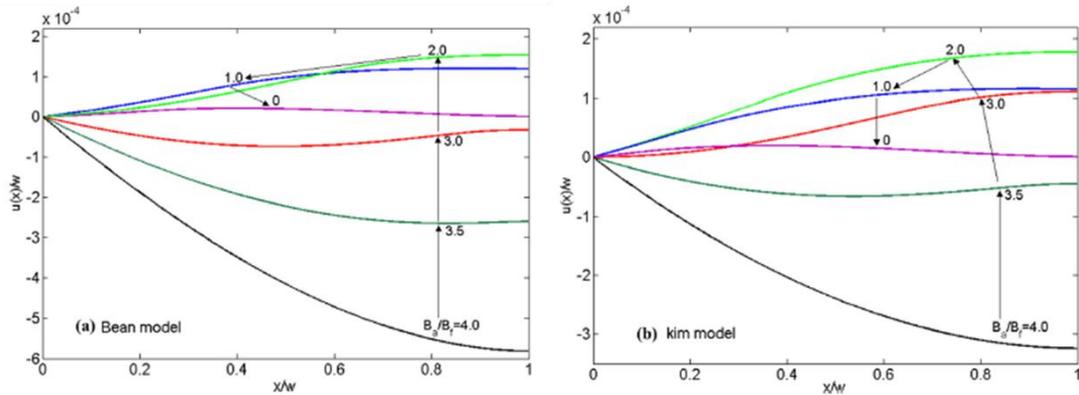


图 4.29 采用 Bean 模型 (a) 和 Kim 模型 (b) 计算得到的外加磁场从 4.0 逐步下降到 3.5, 3.0, 2.0, 1.0, 0 时超导薄带不同位置的位移大小分布

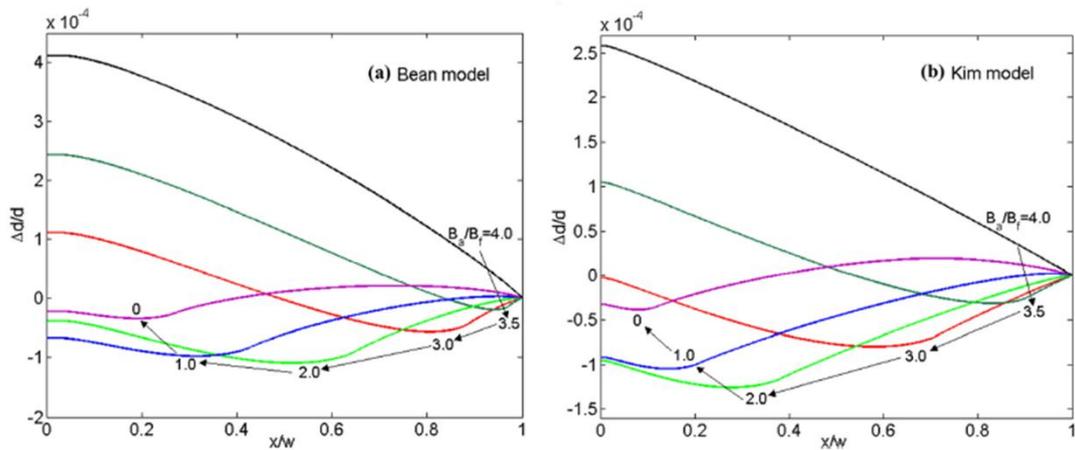


图 4.30 Bean 模型 (a) 和 Kim 模型 (b) 下得到的外加磁场从 4.0 逐步下降到 3.5, 3.0, 2.0, 1.0, 0 时超导薄带厚度的变化

图 4.29 给出了 Bean 模型和 Kim 模型计算得到的超导薄带不同位置的位移大小分布，图中给出了外加磁场从 4.0 逐步下降到 3.5, 3.0, 2.0, 1.0, 0 时的结果。

可以看到，沿着 x 方向的位移在磁场下降过程中，首先会慢慢变成正的，然后当磁场下降到一定数值后，位移又会变小。对于 Bean 模型，最大位移出现在磁场从 $4B_f$ 下降到 $1.8B_f$ 时候，但对于 Kim 模型，最大位移出现在 $4B_f$ 下降到 $2.2B_f$ 。图 4.30 给出了下降场过程中的两种模型下超导薄带厚度的变化分布。同上升场规律类似，在下降场时，超导薄带厚度的分布形式正好对应着反过来的应变分布。

上面我们给出了 Bean 和 Kim 两种模型下的上升场和下降场情形下的超导薄带的体力、应变、位移和厚度变化规律。最后，我们计算给出两种模型下的超导薄带在一个周期的磁场变化时的磁致伸缩回线。一个周期的磁场指磁场从 0 开始增加到某一个幅值 B_{a0} ，然后下降到 0，再反向增加到 $-B_{a0}$ 然后下降到 0，如此循环下去。磁致伸缩量可以从方程(4.3.14)得到，即

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\int_0^w \varepsilon_{xx}(x') dx'}{w} \tag{4.3.16}$$

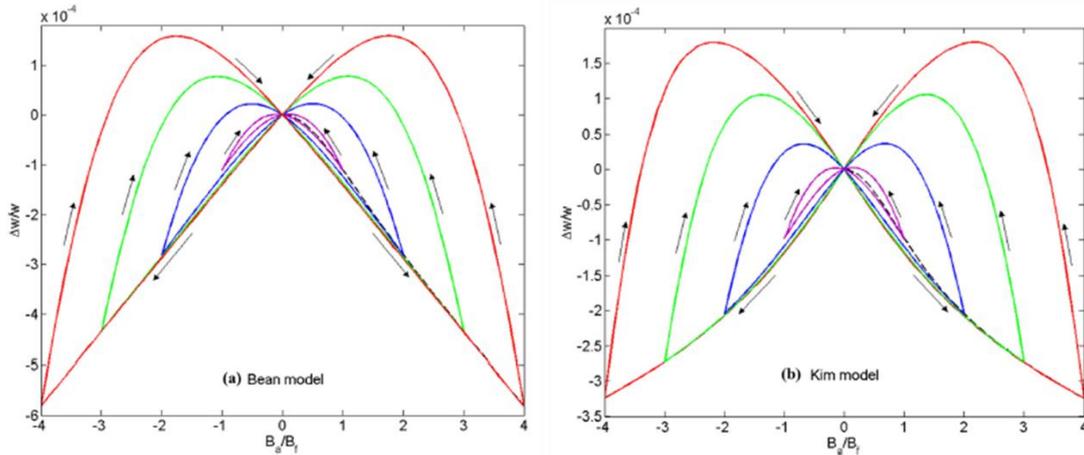


图 4.31 Bean 模型和 Kim 模型下随着一个周期内的外加磁场磁致伸缩回线，图中分别画出了外加磁场幅值为 B_f ， $2B_f$ ， $3B_f$ ， $4B_f$ 下的结果

图 4.31 给出了基于 Bean 模型和 Kim 模型得到的四种不同磁场幅值下的磁致伸缩回线规律。从图中可以看到 Bean 模型和 Kim 模型下的磁致伸缩回线很不一样。通过和 Ikuta 等人[153]的实验进行对比，我们看到 Kim 模型的结果和低温下的实验很吻合，而 Bean 模型的结果形状都不符合实验结果。对于 Bean 模型来说，当磁场超过 B_f 时，磁滞伸缩回线很大一部分可以用两条交叉于 $B_a = 0$ 的直线代替，而 Kim 模型是两条曲线。另外，两种模型得到的具体数值也不一样。当磁场从 $B_{a0} = 4B_f$ 下降过程中，两种模型出现最大伸缩位移时候不同，对于 Bean 模型，最大位移出现在 $B_a = 1.8B_f$ ，而 Kim 模型在磁场下降到 $2.2B_f$ 时出现。对于超导薄带来说，当外加磁场下降到 0 时，磁致伸缩也基本变成 0，这是由于我们考虑

的超导薄带时无限长的情形, 对于有限的超导薄带, 由于电流形成封闭回路, 所以会出现剩余磁致伸缩变形。

4.4 本章小结

对于任意场相关临界态模型, 本章考虑了超导薄带在外加磁场、外加电流、外加磁场和电流同时存在三种情形下电流密度和磁场分布问题。采用复变函数方法, 通过推导得到了三种情形下确定超导薄带的电流和磁场分布的积分方程组。由于场相关临界态模型的结果比 Bean 模型结果更复杂, 所以在一些特殊情形下, 给出了近似的显式结果从而避免求解复杂的积分方程组。主要的结论如下:

(i) 对于小电流和小磁场情形, 给出了场相关临界态模型下的显式结果, 这样就避免去求解那些繁琐的积分方程组。实际上在这种特殊情形下, 场相关临界态模型的结果和 Bean 模型存在一定的关系, Kim 模型的磁场和电流分布要在 Bean 模型得到结果的基础上除以一个比例因子 $(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N)$, 而穿透深度要在 Bean 模型结果的基础上乘以因子 $(1 + |\tilde{B}(y^*)|/N)^2$ 。对于指数模型, 这个比例因子的形式为 $\exp(-|B(y^*)|/N)$ 。

(ii) 对于近乎完全穿透情形, 在高场下的磁场和电流分布存在一定的比例关系, 通过这些比例关系, 我们可以用来分析高场下的交流损耗和交流磁化性质。

(iii) 在外加磁场和外加电流同时存在情形时, 磁场和电流的分布都打破了对称性。磁场和电流分布可以分为‘类磁场’和‘类电流’两种情形。在‘类磁场’情形时, 当外加磁场和电流线性增加超过一定数值时的数学解不再对应实际物理现象。因此尽管外加电流和磁场是增加情况, 只知道最后的外加磁场和电流是远远不够的, 需要知道整个加载路径才能确定最终状态。而且 Kim 模型时 $I_a - B_a$ 平面内的 $a_1 = const$ 有峰值出现, 不再是 Bean 模型下的单调递增情形。 $a_1 = const$ 和 $a_2 = const$ 的包络线对应着超导薄带在不同磁场下的临界电流, 包络线和 Kim 模型曲线基本重合。

磁场和电流分布的精确计算是进一步分析超导薄带其他物理性质的基础, 根据本章的 Kim 模型的结果, 进一步考虑了超导薄带在垂直磁场下的磁弹性行为, 包括体力、应变、厚度变化、位移和磁致伸缩回线。同时将 Bean 模型和 Kim 模型得到的结果进行对比, 在磁场下降过程中, Kim 得到的最大应变出现的位置和磁场和 Bean 模型不同, Kim 模型得到的峰值也要比 Bean 模型大, 因此, 采用 Kim 模型计算会更安全。通过和实验对比, 我们发现 Kim 得到的磁滞伸缩回线能够和实验很好地吻合。

第五章 横截面形状对超导带材临界电流的影响

随着高温超导体在磁悬浮、核磁共振成像、强磁场约束系统（国际热核聚变约束系统）等领域的广泛应用，提高超导体的临界电流变得越来越重要。实验上广泛地观测到超导带材的临界电流密度和厚度有密切的关系[224-234]。随着超导厚度的增加，其临界电流密度迅速降低。2010年，Sanchez 等人[235]和 Hengstberger 等人[236]根据场相关临界态模型（Kim 模型）成功解释了临界电流密度随着超导厚度衰减的现象。

场相关临界态模型指出临界电流大小和当地的磁场相关，因此超导体内部的临界电流密度分布与外加磁场和自场有关。尽管给定的外加磁场不变，但是超导的自场不仅会随着厚度发生变化，而且会随着超导带材的横截面几何形状而变化，受到 Sanchez 等人 and Hengstberger 等人结果的启发，本章我们将根据 Kim 模型进一步研究不同外加磁场和不同横截面形状下超导带材内电流密度分布以及临界电流密度随着横截面几何参数的变化规律。

5.1 超导薄带厚度对临界外加电流的影响

自从超导现象发现以来，超导体的临界温度和临界电流等性质一直是人们关心的中心问题。一方面，超导体相对于传统的铜、铝导电材料具有零电阻和零损耗等方面的优势驱使人们一直梦想能够实现室温超导现象；另一方面，随着强磁场等大型设备实际的需要，研究如何提高超导材料的临界电流密度成为另一个中心课题。涂层超导带材具有很强的载流能力，是构成目前超导线缆的主要部分。但是，实验上却发现超导薄带的临界电流密度会随着超导薄带厚度的增加而减小（如图 5.1a），而且这种现象在各种超导制备技术中普遍存在[224-234]。因此，考虑实际加工和材料结构的稳定性等方面的原因，目前的超导带材厚度普遍在 $1\mu\text{m}$ 左右。对于这种现象，人们提出了很多解释，例如 YBCO 超导层和基底或者过渡层直接存在磁通钉扎增强现象[237]，不同厚度的薄膜晶格间耦合不同[238]，沿着厚度方向钉扎分布不均匀[239]等。如图 5.2 (b) 所示，Foltyn 等人根据实验假设了一种临界电流密度和厚度之间的关系，并根据实验确定出最佳的参数 Z_c [240]。他们采用这种假设解释了临界电流密度随着厚度的变化趋势（图 5.2a）。

由于临界电流密度随着厚度减小这种现象普遍存在于各种基底和各种超导沉积技术中，因此 Sanchez 等人[235]和 Hengstberger 等人[236]认为是由于超导薄带的自场造成了这种电流减小现象。如图 5.3 所示，超导的临界电流密度随着磁

场大小而变化。实际上，根据场相关临界态模型（如 Kim 模型），计算得到的临界电流密度（虚线）和直接通过临界电流和磁场的关系式（虚线）在磁场比较大的时候基本吻合。但是在磁场小于 0.03T 的时候，由于自场对临界电流密度分布的影响，计算得到的平均临界电流密度和直接根据均匀外加磁场代入到 Kim 型临界电流密度公式明显不同。

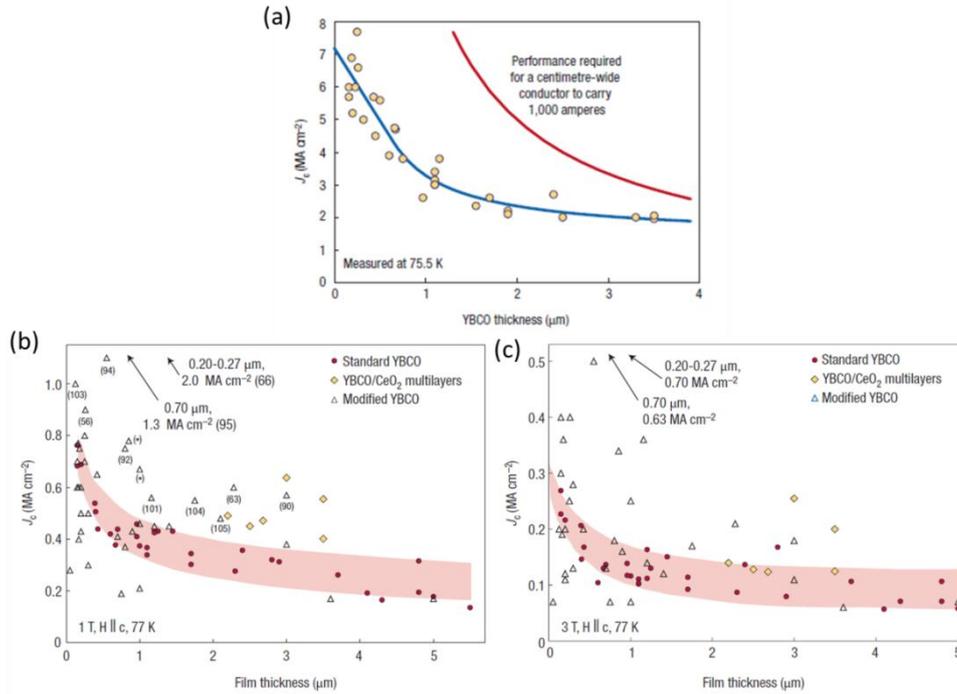


图 5.1 自场和外加磁场 $B_a = 1T$ 和 $3T$ 时超导薄带临界电流密度随着厚度的变化规律[225]

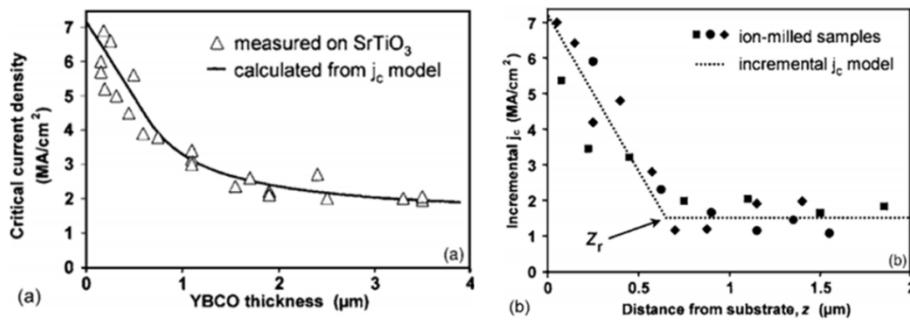


图 5.2 (a) 实验和理论计算得到的临界电流密度随着厚度的变化规律；(b) 理论计算根据的临界电流密度随着厚度变化的模型[240]

Sanchez 等人将厚度为 t 宽度为 w 的无限长的超导薄带的横截面离散成 $N \times M$ 个无限长的超导单元，每个单元的尺寸为 $w/N \times t/M$ 。首先假设每个单元内的初始临界电流密度为 J_{c0} ，然后可以根据毕奥萨伐尔定律计算出这些初始电流在每个超导单元位置产生的磁场，根据求出的磁场分布代入到 Kim 模型的临界电流公式，对每个超导单元内的电流进行更新。通过不断重复这种迭代过程，

当达到一定的精度（如相邻两步之间的电流密度只差小于 $10^{-6} J_{c0}$ ）时，就得到了临界电流密度分布和磁场的分布。图 5.4 给出了不同外加磁场下临界电流密度和磁场沿着超导薄带横截面的中间层的分布规律。

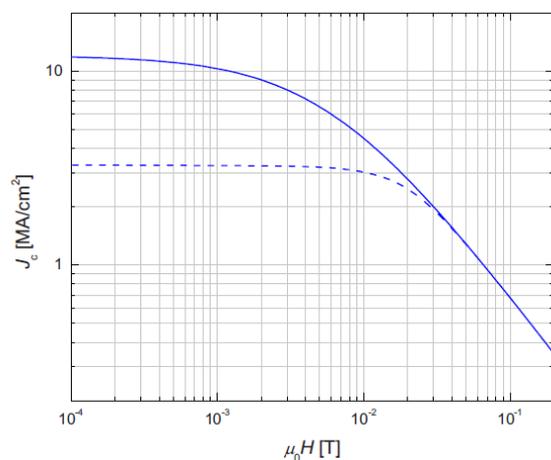


图 5.3 涂层 YBCO 超导薄带（厚 1 μm 宽 0.2mm）的临界电流密度随着外加磁场的变化规律 [235]

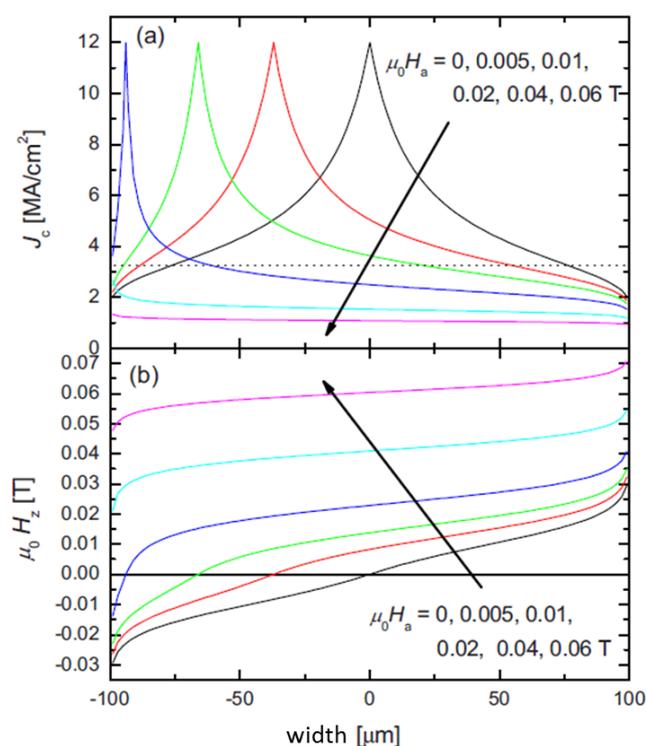


图 5.4 不同外加磁场下超导带材临界电流密度和磁场分布图[235]

根据上面的结果我们可以看到，超导带材产生的自场不仅会改变临界电流密度分布，而且会影响超导带材总的临界外加电流大小。根据这个理论，我们想到超导薄带横截面形状的改变同样会影响超导薄带的自场和临界电流密度的分布，

从而会导致不同横截面下超导带材具有不同的载流能力。因此，我们接下来就针对这个想法，来研究几种不同的横截面几何形状下的临界外加电流问题。

5.2 不同横截面形状超导带材的电流密度分布和临界外加电流

5.2.1 物理模型和基本方程

超导薄带可以有多种不同几何形状的横截面，如图 5.5 所示，这里我们考虑四种不同的横截面形状，即 (a) 平面薄带，(b) 圆弧薄带，(c) V 型薄带，(d) U 型薄带。一般来说，为了提高临界电流密度，超导带材的厚度很薄，因此，我们这里假设带材厚度远远小于宽度，即 $d \ll 2w$ 。另外，圆弧薄带、V 型薄带、U 型薄带横截面的面积 ($2w \times d$) 不会随着相关的几何参数而变化。

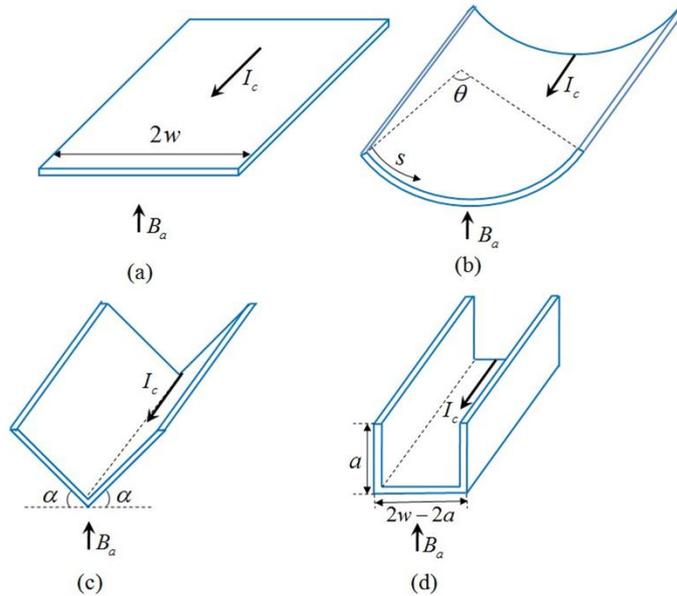


图 5.5 几种不同的超导带材横截面示意图，(a) 平面薄带，(b) 圆弧薄带，(c) V 型薄带，(d) U 型薄带

如同上一章提到的，Kim 模型已经被实验广泛证实更能准确地解释实际超导材料的磁致伸缩现象[153]、磁滞回线和交流磁化系数[220, 221]、交流损耗[241]等问题。根据一般性的 Kim 模型，临界电流密度和当地的磁场大小和方向有关。局部磁场分解成平行分量 B_{\parallel} 和垂直分量 B_{\perp} ，那么临界电流密度可以写成如下形式[242-246]

$$\frac{J_c}{J_{c0}} = \frac{B_0}{\left(B_0 + \sqrt{k^2 B_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2} \right)^{\beta}}, \quad (5.2.1)$$

其中 J_{c0} 是零磁场下的临界电流密度， B_0 是和具体超导材料有关的参数， k 是各

向异性系数。根据超导材料（如 BiSCCO）的固有性质和制备材料的技术，垂直磁场分量 B_{\perp} 对临界电流 J_c 的影响很大。实际上，根据文献[242, 243]给出的参数，如果垂直磁场和平行磁场在同一量级时（ $B_{\parallel} \sim B_{\perp}$ ），平行磁场分量对于临界电流的影响不会超过1%。因此，这里我们忽略平行磁场分量的影响，则临界电流密度可以简化为

$$\frac{J_c}{J_{c0}} = \frac{B_0}{B_0 + |B_{\perp}|}, \quad (5.2.2)$$

上面的方程也被用来计算超导线缆的交流损耗[247]。从方程可以看出，超导临界电流密度分布和磁场是耦合的。在平面带材情况下，我们可以通过上一章场相关临界态模型下在全部穿透时的结果，通过数值求解下面的积分方程得到临界电流密度和磁场的分布，即

$$B(s) = B_f y \int_0^w \frac{du}{(y^2 - u^2)} \frac{J_c(B(u))}{J_{c0}}, |s| \neq w, \quad (5.2.3)$$

$$I_c = 2 \int_0^w J_c(B(u)) du \quad (5.2.4)$$

然而在更一般的几何形状下，我们很难给出类似上面积分方程形式的半解析解。采用与 Sanchez 等人[235]和 Hengstberger 等人[236]类似的数值方法，我们可以计算不同外加磁场和不同几何形状的超导带材的临界电流密度分布以及临界电流密度随着几何参数的变化情况。由于厚度非常薄，所以我们将带材横截面离散成 N 个横截面为 $w/N \times d$ 的无限长超导单元。当所有超导单元内都达到临界电流密度 J_c 时，整个超导带材的载流就是临界电流。当超导条带处在均匀外加磁场下 B_a 时，编号为 n 的超导单元的临界电流密度为 $J_c^n = J_c(B_{self}^n + B_a^n)$ 。而编号为 n 的超导单元处的自场是所有超导单元内的电流共同产生的。因此，超导内自场的分布和临界电流密度分布相互影响，成为一个耦合的系统。当自场变化时，超导的临界电流密度分布就会受到影响，从而进一步影响超导带材的整体载流大小。在给定横截面的几何形状和外加磁场大小后，临界电流密度和磁场的分布可以通过迭代方法求解得到。实验上测到的超导带材的外加临界电流大小可以通过对电流密度进行积分得到。这里我们以圆弧超导薄带为例说明如何具体计算临界电流。

如图 5.5 (b) 所示的直角笛卡尔坐标系，圆弧对应的中心角 θ 和半径之间的关系为 $R = 2w/\theta$ 。编号为 i ($i=1, 2, \dots, N$) 的单元坐标位置 (x_i, y_i) 可以表示为

$$s_i = (i - (N+1)/2)h, \quad (5.2.5)$$

$$x_i = R \sin \frac{s_i}{R}, y_i = R \left(1 - \cos \frac{s_i}{R} \right) \quad (5.2.6)$$

其中 $h = 2w/N$ 是单元网络的宽度。根据毕奥萨伐尔定律可以求得单元 i

($i=1, 2, \dots, N$)处磁场的 x 和 y 分量为

$$B_x^i = -\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{j=1, \neq i}^N \frac{(y_i - y_j) J_c^j h d}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad (5.2.7)$$

$$B_y^i = B_a + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{j=1, \neq i}^N \frac{(x_i - x_j) J_c^j h d}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad (5.2.8)$$

根据磁场的 x 和 y 分量，我们可以求得磁场的垂直分量 B_{\perp}^i 和临界电流密度 J_c^i 为

$$B_{\perp}^i = -B_x^i \sin \frac{s_i}{R} + B_y^i \cos \frac{s_i}{R}, \quad (5.2.9)$$

$$\frac{J_c^i}{J_{c0}} = \frac{B_0}{B_0 + |B_{\perp}^i|}, \quad (5.2.10)$$

在单元 i 处的自场大小等于所有单元的临界电流在 i 处产生的磁场之和。通过对方程(5.2.9)和(5.2.10)进行迭代求解，我们可以得到临界电流密度和磁场的分布，从而通过对电流密度进行积分得到实验上可测到的外加临界电流。在我们的计算里面，我们假设超导带材的宽度为 $2w = 4\text{mm}$ ，厚度为 $d = 1\mu\text{m}$ 。零磁场下的临界电流密度大小为 $J_{c0} = 3\text{MA}/\text{cm}^2$ ，Kim 模型里面的材料相关常数 $B_0 = 20\text{mT}$ 。

5.2.2 结果和讨论

A. 圆弧超导薄带临界电流

我们首先讨论对应不同中心角 θ 的超导圆弧的临界电流问题。中心角 θ 反应了超导薄带的弯曲程度，当 $\theta = 0$ 时，超导圆弧对应的是平面超导薄带；当 $\theta = 2\pi$ 时超导圆弧变成了超导圆筒。图 5.6 给出了几种不同中心角的超导圆弧型薄带在三种不同外加磁场（自场 $B_a = 0\text{mT}$ ， $B_a = 6\text{mT}$ 和 $B_a = 12\text{mT}$ ）下临界电流密度分布图。从图中我们可以看到，不同中心角对于临界电流密度的分布影响很大。在自场情况下，平面超导薄带（ $\theta = 0$ ）和圆弧形超导薄带（ $\theta < 2\pi$ ）的临界电流密度会在带材中点处形成尖峰，而超导薄带变成圆筒（ $\theta = 2\pi$ ）后，临界电流密度分布是一条水平直线，因为此时磁场没有垂直分量。除中心线以外，超导薄带临界电流密度随着中心角度的增加而整体变大。当超导带材处于外加磁场 $B_a = 6\text{mT}$ 下时，随着中心角度的增加，临界电流密度左边的峰值首先往中心线方向移动。但是随着中心角的进一步增加，临界电流峰值反向移动到 $s = -1\text{mm}$ 位置。然而，当外加磁场足够大（ $B_a = 12\text{mT}$ ）时，图 5.6 (c) 看出 J_c 的峰值随着中心角的增大逐步移动到 $s = -1\text{mm}$ 处。在超导带材的右半区域，当临界电流密度达到 J_{c0} 后会出现两个峰值，这两个峰值分别向左右移动，最终当超导薄带变成圆筒（ $\theta = 2\pi$ ）时，左边的峰值移动到 $s = 1$ 处而右边的峰值电流超出边界消

失。当超导薄带弯曲变成圆筒时，圆筒左半部分 ($s < 0$) 和右半部分 ($s > 0$) 内的临界电流密度分别关于 $s = -1$ 和 $s = 1$ 成对称分布。但是左半部分和右半部分的临界电流密度分布形状并不相同，左边成尖峰形式而右边成类似抛物线形式的分布。需要指出的是 Mawatari[111, 112]采用 Bean 模型已经从理论上研究了外加电流下的圆弧超导薄带和超导圆筒下的电流密度和磁场分布，只是因为采用的是 Bean 模型，在整个超导薄带横截面上得到的临界电流密度为零场电流密度(J_{c0})。

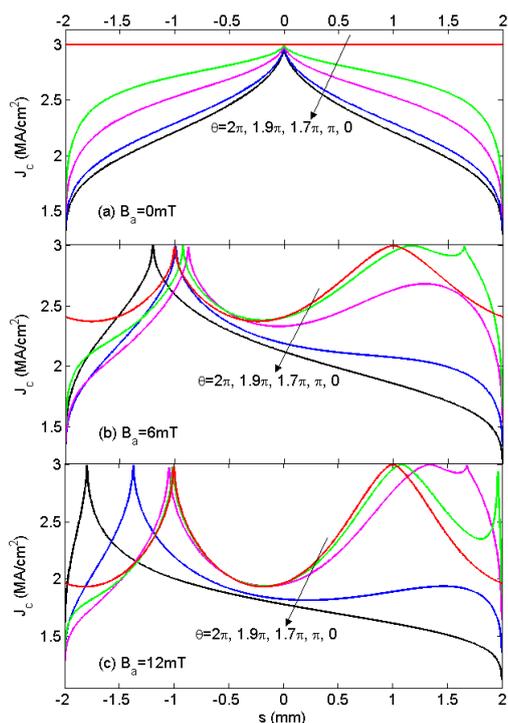


图 5.6 不同中心角的超导圆弧在不同外加磁场下的临界电流密度分布图, (a) $B_a = 0mT$, (b) $B_a = 6mT$, (c) $B_a = 12mT$

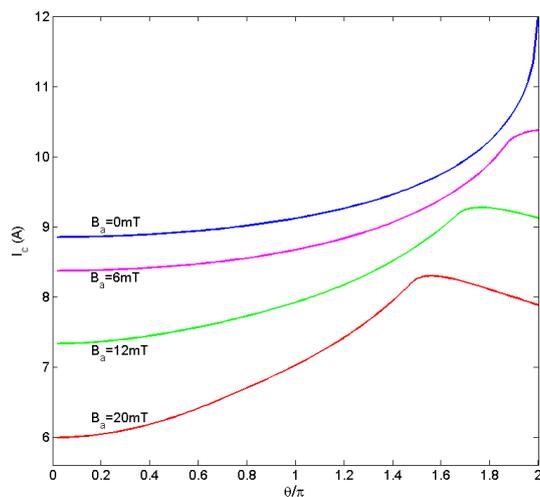


图 5.7 不同外加磁场下超导圆弧的外加临界电流随着形状（中心角度）的变化

图 5.7 给出了不同外加磁场下 ($B_a = 0mT$, $6mT$, $12mT$ 和 $20mT$) 超导薄带临界外加电流随着中心角的变化, 其中中心角 θ 采用弧度制。在自场情况下, 临界外加电流随着中心角度的增加单调增加, 当超导薄带变成圆筒时增加到 I_{c0} 。与自场情况不同, 当存在外加磁场时, 临界外加电流不再是中心角的单调函数。而是随着中心角增加到 $\theta = \theta^*$ 时达到峰值, 然后变小。对应出现最大外加临界电流的 θ^* 随着外加磁场的增加而减小。整体上看, 外加临界电流随着外加磁场的增加而减小, 但相比平面薄带, 有一定中心角的圆弧形超导薄带可以明显增加承载外加电流的能力。

B. V 型超导薄带临界电流

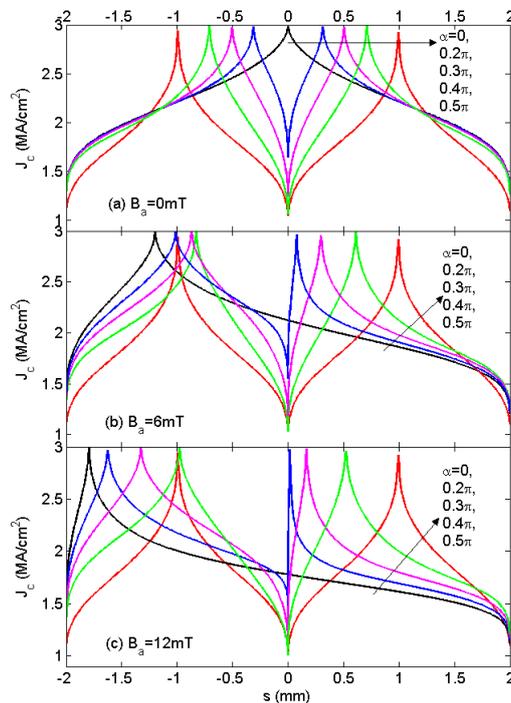


图 5.8 不同外加磁场下 V 型超导薄带临界电流密度分布

下面我们来讨论 V 型横截面超导带材的临界电流密度分布问题。图 5.8 给出了不同参数的 V 型超导带材在不同外加磁场下的临界电流密度分布图。从图中我们可以看到, 相对于平面超导带材 ($\alpha = 0$), V 型超导带材中的临界电流密度分布变得很复杂。有趣的是我们可以看到 V 型超导薄带在自场 ($B_a = 0mT$) 中的临界电流密度分布出现左右对称的双峰分布, 而且随着角度的增加, 双峰的位置逐渐移动到 $s = \pm 1 mm$ 。在小的外加磁场 ($B_a = 6 mT$) 情形下, 右边的电流密度的峰值随着对折角度的增加逐渐移动到 $s = 1 mm$, 但是左边电流峰值位置并不会随着角度 α 单调变化。但在更大的外加磁场下, 随着对折角度的增加, 左右两边电流密度的峰值会单调地移动到 $s = \pm 1 mm$ 位置。这种现象和圆弧型的带材类似。另外, 在自场和外加磁场下, 临界电流密度的局部最小值会随着角度 α 的增加而

减小。当对折角度 $\alpha = \pi/2$ 时，左右两半超导带材折叠成新的平面超导带材，厚度为之前两倍宽度为之前一半。此时两半超导带材内的临界电流密度分布相同，而且和平面超导带材一样成对称分布。

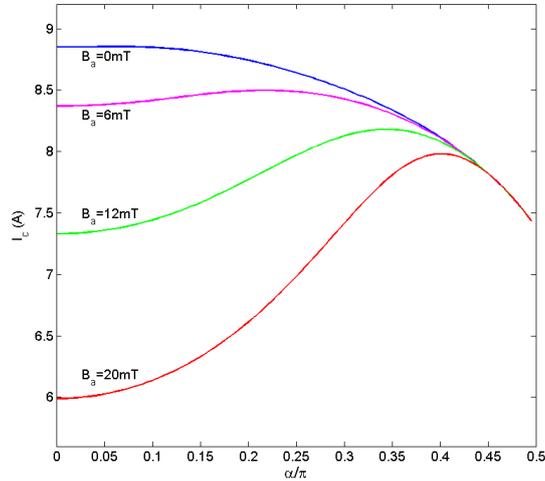


图 5.9 不同外加磁场下 V 型超导薄带的外加临界电流随着形状的变化

图 5.9 给出了不同外加磁场下 V 型超导薄带的外加临界电流随着对折角度 α 的变化。没有外加磁场时，临界外加电流随着角度的增加一直减小。但是当一定的外加场存在时，首先随着角度增加到一定值 α^* 的过程中外加临界电流增加到峰值，之后外加临界电流开始减小。这个规律随着外加磁场的增加变得更加明显。对于 $\alpha = \pi/2$ 的特殊情况，前面我们提到此时超导薄带变成厚度为 $2d$ 的平面超导薄带，显然此时的临界外加电流比之前厚度为 d 的薄带要小很多，这就是前面我们提到在实验上观测到的厚度增加导致临界外加电流减小的现象。

C. U 型超导薄带临界电流

最后我们考虑超导薄带折成 U 型时的临界电流问题。图 5.10 画出了 U 型横截面超导薄带的临界电流密度分布图。对比圆弧形和 V 型横截面超导薄带，U 型超导薄带的临界电流密度分布出现了更多的峰值，形状更加复杂。实际上，由于超导薄带分成三段，所以临界电流密度分布也会出现三部分，每一部分都会出现峰值临界电流密度。类似的现象在 V 型里面也会看到。随着外加磁场的增加，中间段的临界电流密度的峰值会向左移动，而左右两侧的电密度峰值位置保持不变，因为外加磁场平行于左右两侧的超导薄带对临界电流密度没有影响。

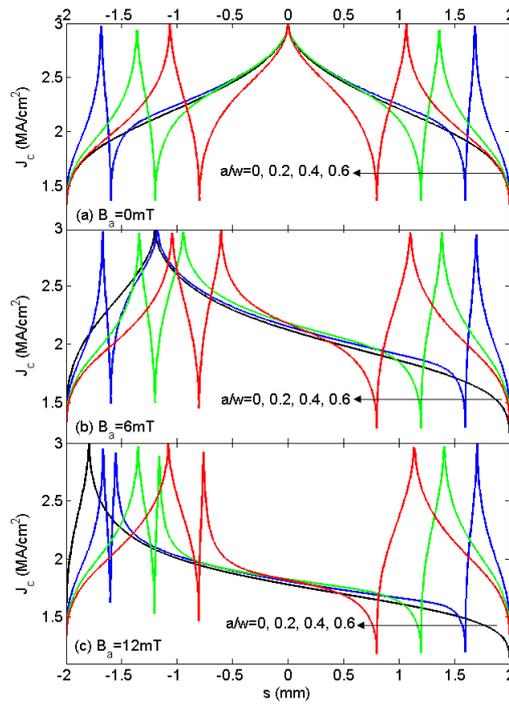


图 5.10 U 型超导薄带在不同外加磁场下的临界电流密度分布

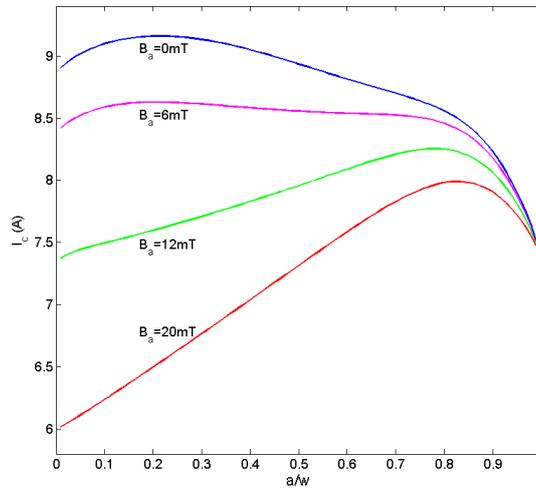


图 5.11 不同外加磁场下 U 型超导薄带的外加临界电流随着形状的变化

图 5.11 给出了 U 型超导薄带的临界外加电流在不同外加磁场下随着左右两侧的对折长度的变化规律，其中横坐标用 w 进行无量纲。从图中我们可以看出临界外加电流首先随着对折长度 a 增加，随后减小。最大的临界外加电流对应的对折长度 a^* 随着外加磁场的增加而变大。当外加磁场 $B_a = 6mT$ 时，外加临界电流基本不会随着对折长度而发生很大的变化，但是在外加磁场很大时 ($B_a > 12 mT$)，外加临界电流 I_c 基本随着对折长度 a ($< a^*$) 而线性增加。但是当对折长度很大以致于左右两侧的超导带材很靠近时，此时左右两侧的磁场会相互叠加造成自场

很大，从而导致临界外加电流会有显著的下降。

对比三种横截面下的超导带材，我们看到圆弧型超导带材的临界电流比 V 型和 U 型带材的临界电流要大。当 V 型和 U 型超导带材对折形成厚度为 $2d$ 的平面超导带材时，会导致临界电流密度显著减小（厚度相关性）。当圆弧型超导带材弯曲形成超导圆筒时，其临界外加电流同样会受到外加磁场的影响。最大临界外加电流对应的弯曲角度 θ^* 随着外加磁场减小，而 V 型和 U 型最大临界外加电流对应的几何参数 (α^* 和 a^*) 会随着外加磁场而增加。

5.3 本章小结

本章我们根据场相关临界态模型，考虑了不同横截面对超导薄带的临界外加电流的影响。通过采用离散和有限单元方法，我们给出了如何求解任意几何形状横截面的超导薄带临界电流密度分布的方法。由于不同横截面下超导薄带的自场分布不同，从而会影响到临界电流密度分布，进一步会导致不同横截面几何形状的超导薄带具有不同的临界外加电流。本章我们通过选取平面超导薄带、圆弧形、V 型和 U 型四种不同形状作为分析例子，给出了超导薄带在不同外加磁场下的临界电流密度和磁场分布。同时，我们给出了超导薄带临界外加电流随着相关几何形状参数的变化规律。

当超导带材的横截面分成几段后，临界电流密度分布也会随之分成几段，在每段超导带材分布类似于在平面超导带材内的分布。对比几种不同横截面形状的超导带材，对于 U 型超导薄带的临界电流密度分布相对于圆弧形和 V 型来说更加复杂。整体来说，圆弧形超导带材的外加临界电流比 V 型和 U 型的大。当 V 型和 U 型超导带材折成两倍厚度的超导带材后，载流能力明显下降。因此，为了提高超导电缆的临界电流，在设计中应该尽量避免产生较集中或者较大的自场现象。

第六章 结束语

塑性材料中应力屈服效应，压电材料中电位移饱和效应以及 II 类超导体中临界电流密度都存在着相似的非线性临界态现象。因此，不能再根据简单的线性本构来描述这些临界态系统。而如何采用非线性理论来分析和计算这些临界态问题对于材料的实际工程应用非常重要。本文针对塑性硬化材料、压电材料中断裂问题以及 II 类超导体的临界电流密度等问题展开了理论研究。主要研究结果和创新点如下：

1、针对塑性硬化材料，理论研究了应变硬化效应对裂纹尖端张开位移影响。根据双折线弹塑性本构模型，提出了条带硬化模型。通过简化和假设，并采用硬化函数来描述裂纹尖端附近的材料的平均硬化程度，将复杂的非线性控制方程简化为简单便于计算的形式。通过分析计算，得到了裂纹尖端不含奇异性的应力场以及条带硬化区的大小，推导出了裂纹尖端张开位移的表达式。在外加载荷小于屈服应力一半的时候，条带硬化模型得到的裂纹尖端张开位移和 Dugdale 模型基本一样；但是当外加载荷超过屈服应力一半后，两种模型相差很大，条带硬化模型得到的结果和实验基本吻合。从理论上证明了条带硬化区的大小和裂纹尖端张开位移不仅与外加应力有关，而且和材料硬化参数（ E/E_{tan} 和 σ_u/σ_y ）有关。硬化参数越大，对应的条带硬化区越小。进一步根据条带硬化模型，成功解释了之前学者根据大量实验提出的 COD 设计曲线在屈服应力和极限应力比值（ σ_y/σ_u ）超过了 75~80% 不再适用的现象。最后推导出了裂纹尖端张开位移和标称应变之间的关系，通过和实验区域进行对比，理论结果全部落在实验范围内。所以本文提出的条带硬化模型以及硬化对裂纹扩展方面的研究对于硬化材料的实际工程应用具有非常重要的理论指导意义。

2、针对压电材料的裂纹问题，研究了电场对压电材料中裂纹临界扩展的影响。在 Gao 等人提出的裂纹尖端条带电位移饱和模型的基础上，通过考虑非线性的电位移饱和和应力屈服双重效应，假设裂纹尖端存在双条带区，即不仅存在条带电极化饱和区，而且存在条带应力屈服区。双条带模型消除了应力和电位移在裂纹尖端的奇异性。根据条带电极化饱和区和条带应力屈服区的大小关系，将压电断裂分成两种情况，分别推导出了两种情形下的裂纹尖端机械张开位移（MCTOD）和电张开位移（ECTOD）。根据计算结果，进一步提出了新的压电材料断裂准则，即裂纹尖端机械张开位移准则（MCTOD）。结果表明，两种情形下的结果正好对应两种最常见的实验观测结果。从而说明造成两种以上的实验结果的原因可能是由于裂纹尖端电极化饱和区和力屈服区的大小不同。当电极化饱和区小于力屈服区时，裂纹尖端发生机械塑性变形造成的能量损耗很大，裂纹尖

端电畴翻转较少, 实验上对应着正电场促进裂纹扩展, 而负电场阻碍裂纹扩展; 当裂纹尖端存在很明显的电畴翻时, 裂纹扩展单位长度造成的能量损耗很大, 结果电断裂韧性很大, 从而导致电极化饱和区比较小, 实验上观察到正负电场都促进裂纹扩展。最后考虑了压电 III 型裂纹问题, 通过条带电极化饱和模型得到了电极化饱和区的大小, 并和 Irwin 松弛方法得到的电极化饱和的大小进行了对比, 两者相差比较小。

3、针对多种加载情形下的 II 类超导带材, 给出了任意场相关临界态模型下如何计算电流密度和磁场分布的方法。采用保角变化, 推导出了超导薄带在外加磁场 (包括增加和下降阶段)、外加电流 (包括增加和减小阶段) 以及外加电流和磁场同时加载三种情况下计算电流密度和磁场分布的一系列的积分方程组。并给出了数值求解这些耦合的积分方程组的方法。在一些特殊情况下, 例如在小电流和小磁场情况下, 分别推导出了电流密度、磁场分布和磁场穿透深度的解析表达式, 从而避免了求解复杂的积分方程组。结果分析表明, 这些特殊情况下的场相关临界态模型与 Bean 模型的结果之间相差一个比例因子。对另一特殊情形, 即超导薄带处于临界外加电流或强磁场时 (磁通几乎全部穿透整个超导薄带) 也进行讨论和分析, 得到了一些有意思的结果。在外加电流和磁场同时加载的情况下, 将超导薄带的磁场和电流分布分为 ‘类电流’ 和 ‘类磁场’ 两种形式, 并给出了分界线。画出了 $I_a - B_a$ 平面内等穿透深度对应的 $I_a(B_a)$ 曲线, 通过这个图, 可以说明在 ‘类磁场’ 情况下, 会出现数学结果不对应实际物理结果的现象。通过与 Bean 模型进行对比, 分析讨论了两种模型得到的结果的相同点和不同之处。最后, 采用 Bean 模型和 Kim 模型分别计算得到了超导薄带在外加磁场上升和下降阶段的体力、应变、位移分布以及在一个周期外加磁场下超导薄带的磁致伸缩回线。将 Bean 模型和 Kim 模型的结果进行了一一对比和分析, 与相关实验也进行了比较, 发现在下降场阶段, Kim 模型得到的最大应力比 Bean 模型得到的结果要大, 因此 Bean 模型偏向不安全, 采用 Kim 模型计算更准确, 对实际工程应用更有理论指导意义。

4、针对不同外加磁场下超导薄带横截面形状对临界外加电流的影响, 提出了计算临界电流密度和磁场分布的数值方法。根据场相关临界态模型, 超导体的自场会影响临界电流密度。因此本章基于 Kim 模型, 通过选择几种不同横截面形状的超导薄带, 在不同外加磁场下分析了不同横截面形状超导薄带内临界电流密度分布特点, 并得到了不同磁场下临界外加电流随着横截面几何形状参数变化的规律。通过对比分析, 发现圆弧形超导带材的外加临界电流比 V 型和 U 型的大。当 V 型和 U 型超导带材折成两倍厚度的超导带材后, 载流能力明显下降。因此, 为了提高超导线缆的载流能力, 应该避免产生较大的自场。

本文对于硬化材料、压电材料断裂问题以及 II 类超导临界态问题的方面的

研究,为这些材料实际工程应用提供了比较精确的理论分析基础。针对本文存在的问题和不足之处,建议在以下几个方面进行进一步的研究:

1、在塑性硬化材料断裂问题,本文倾向于研究应变硬化对裂纹尖端张开位移的影响,目的是想拓展裂纹尖端张开位移在硬化材料中的应用。但是并没有对各种裂纹问题进行分析,如边缘裂纹和界面裂纹问题;另外,本文没有和最近的断裂准则(如 J-Q 准则等)进行对比分析。因此,针对这两个方面的问题,有必要用条带硬化模型求解其他的裂纹问题,并和已有的研究结果进行比较。

2、本文根据双条带模型并提出新的压电材料断裂准则时,采用的是 Gao 等人提出的简化本构关系(各项同性材料),这个结果只能给出定性解释,并不能给出定量的分析。因此,有必要采用各项异性的本构关系求解裂纹尖端机械张开位移和电张开位移,然后讨论机械张开位移作为压电材料断裂准则会有什么定量结果,并和相关实验进行对比。另一方面,电场对压电裂纹扩展的影响在实验中观测到了截然不同的结果,本文条带应力屈服-条带电极化饱和模型给出了理论解释,因此,有必要通过相关实验手段来验证本文的理论解释。

3、对于 II 类超导薄膜场相关临界态问题,目前本文只给出了外加电流和外加磁场同时增加的情形,并没有考虑外加电流或磁场下降的情形,对于下降场情形,有必要选择一些特殊的情形进行分析和讨论,通过分类归纳出一些规律,这样能更好地为实际超导带材的所处的复杂物理环境提供理论分析。另外,由于场相关临界态模型更准确一些,因此有必要根据场相关临界态模型求得的磁场和电流密度分布,进一步计算其他物理量,例如交流损耗,磁化曲线等。

附录

A 二维弹性力学问题基本公式

对于二维平面力学问题，Muskhelishvili[248]给出了现代弹性力学的基本理论框架。根据方程(2.2.9)是双调和函数形式，因此应力函数 U 可以写成下面复变函数的形式

$$U = \operatorname{Re}[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)], \quad (\text{A.1})$$

其中 $\phi(z)$ 和 $\chi(z)$ 是解析函数。应力可以通过下面的方程得到

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\phi' + \bar{\phi}' = 4\operatorname{Re}[\phi(z)], \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{z}\phi'(z) + \Psi'(z)], \quad (\text{A.3})$$

其中

$$\Phi(z) = \phi'(z), \quad \Psi(z) = \chi'(z) \quad (\text{A.4})$$

然后位移可以写成如下形式，

$$\frac{E}{1+\nu}(u_x + iu_y) = \frac{3-\nu + \frac{5}{3}\lambda w}{1+\nu}\phi(z) - \frac{1+\nu + \lambda w}{1+\nu}[z\bar{\Phi}(z) + \bar{\Psi}(z)], \quad (\text{A.5})$$

为了求解和表达方便，我们进一步引入函数 $\Omega(z)$ 和 $\omega(z)$ ，

$$\omega(z) = z\bar{\Phi}(z) + \bar{\chi}(z), \quad (\text{A.6})$$

$$\Omega(z) = \omega'(z) = \bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z), \quad (\text{A.7})$$

其中

$$\bar{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}, \quad \bar{\Psi}(z) = \overline{\Psi(\bar{z})} \quad (\text{A.8})$$

最后，应力和位移可以写成如下的形式，

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4\operatorname{Re}[\phi(z)] \\ \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(z) \\ 2\mu(u_x + iu_y) &= \kappa\phi(z) - \left(1 + \frac{\lambda w}{1+\nu}\right)\omega(\bar{z}) - \left(1 + \frac{\lambda w}{1+\nu}\right)(z - \bar{z})\bar{\Phi}(z) \end{aligned}, \quad (\text{A.9})$$

其中

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \frac{3-\nu + \frac{5}{3}\lambda w}{1+\nu} \quad (\text{A.10})$$

B 压电材料基本方程

对于一个力学问题，在不考虑边界条件问题时，我们希望能够找到一个问题的通解。一般来说，根据弹性力学的经典做法，就是将问题的基本未知变量用一个未知函数（如应力势函数）来表示，然后再根据实际问题确定未知函数。用未知函数表示弹性场和电场称为压电材料问题的一般解，这是解决很多压电边值问题的基础[7]。目前，有两种形式的方法成为解决二维的压电材料问题有力工具，即 Stroh 型一般解和 Lekhnitskii 型一般解。这里，我们简要介绍 Stroh 主要公式和结论。

B1 压电材料问题 Stroh 型一般解

Esheky 等人[249]提出了将矩阵运算来求解各项异性弹性问题的方法。在其基础上，Stroh[250]提出了六维本征理论。该方法数学上优美，成为解决各种弹性问题的基础工具，如夹杂，断裂，压电材料，电磁材料问题等。Barnett 和 Lothe[251]采用 Stroh 方法研究了含有位错的压电材料的力-电场问题。Suo 等人[66]研究了压电材料的断裂问题。

在直角坐标系 $x_i (i=1,2,3)$ 或者 x, y, z 下，压电材料满足下面的线性本构方程，

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad D_i = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \kappa_{im} E_m, \quad (\text{B1})$$

其中 σ_{ij} , ε_{ij} , D_i , E_i 分别为应力、应变、电位移矢量和电场， c_{ijkl} , e_{ijk} , κ_{ij} 分别为对应的系数。在没有自由电荷和体力的情况下，力学平衡方程和电学高斯定律为：

$$\sigma_{i,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0 \quad (\text{B2})$$

其中下标中逗号表示对后面的进行求导。如果考虑压电材料是服从线性变形方程，则

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad (\text{B3})$$

其中 u_i 和 ϕ 分别表示位移分量和电势函数，假设 u_i 和 ϕ 是 x_1 和 x_2 的函数，那么方程(B2)的解可以假设为：

$$u_\alpha = a_\alpha f(z), \quad z = x_1 + px_2, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{B4})$$

其中 $[u_\alpha] = [u, v, w, \phi]$, $f(z)$ 是任意函数， a_α 和 p 是待定参数。把方程(B4)代入到方程(B1)和方程(B3)，可以得到

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (c_{ijkl} a_k + e_{ij} a_4) (\delta_{l1} + p\delta_{l2}) f'(z) \\ D_i &= (e_{ikl} a_k + \kappa_{il} a_4) (\delta_{l1} + p\delta_{l2}) f'(z) \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

式中 δ_{ij} 是克罗内克符号。将方程(B5)代入平衡方程(B2)，经过整理可以得到

$$\begin{aligned} (c_{ijkl}a_k + e_{lij}a_4)(\delta_{j1} + p\delta_{j2})(\delta_{i1} + p\delta_{i2}) &= 0 \\ (e_{ikl}a_k + \kappa_{il}a_4)(\delta_{i1} + p\delta_{i2})(\delta_{l1} + p\delta_{l2}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

我们引进下面矩阵和向量形式,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^e & \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{11}^T & \kappa_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^e & \mathbf{e}_{21} \\ \mathbf{e}_{21}^T & \kappa_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^e & \mathbf{e}_{22} \\ \mathbf{e}_{22}^T & \kappa_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B7})$$

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4], \quad (\text{B8})$$

其中矩阵和向量 \mathbf{Q}^e , \mathbf{R}^e , \mathbf{T}^e 和 \mathbf{e}_{ij} 的元素与方程(B1)的系数对应关系为:

$$Q_{ik}^e = c_{ilk1}, \quad R_{ik}^e = c_{ilk2}, \quad T_{ik}^e = c_{i2k2}, \quad (e_{ij})_l = e_{ij} \quad (\text{B9})$$

在这种情况下, 方程(B6)可以表示成关于 p 的二次本征方程形式, 即

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T}]\mathbf{a} = 0 \quad (\text{B10})$$

相应地, \mathbf{a} 为本征值 p 的对应的本征向量。根据材料常数的对称性和正定性, 可以得出矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{T} 是对称的和非奇异的。如果要求方程(B10)有非零的解, 根据线性代数理论, 那么就需要前面的矩阵对应的行列式等于 0, 即

$$\det[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T}] = 0 \quad (\text{B11})$$

上面的方程是一个关于 p 的八次代数方程形式。根据材料常数的对称性和正定性, 可以证明 p 肯定是一个虚数, 即对应的虚部不为 0, $\text{Im}(p_\alpha) > 0$ [7].

在本征值互不相等的情况下, 可以根据叠加形式得到压电材料的一般形式的解为:

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^4 \{ \mathbf{a}_\alpha f_\alpha(z_\alpha) + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{f}_\alpha(z_\alpha) \} \quad (\text{B12})$$

将上式代入本构关系式(B1)和(B3), 可以得到应力和电位移的表达式如下

$$\mathbf{t}_1 = [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, D_1] = - \sum_{\alpha=1}^4 \{ \mathbf{b}_\alpha p_\alpha f'_\alpha(z_\alpha) + \bar{\mathbf{b}}_\alpha \bar{p}_\alpha \bar{f}'_\alpha(z_\alpha) \} \quad (\text{B13})$$

$$\mathbf{t}_2 = [\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, D_2] = \sum_{\alpha=1}^4 \{ \mathbf{b}_\alpha f'_\alpha(z_\alpha) + \bar{\mathbf{b}}_\alpha \bar{f}'_\alpha(z_\alpha) \} \quad (\text{B14})$$

其中

$$\mathbf{b}_\alpha = (\mathbf{R} + p_\alpha \mathbf{T}) \mathbf{a}_\alpha = - \frac{1}{p_\alpha} (\mathbf{Q} + p_\alpha \mathbf{R}) \mathbf{a}_\alpha \quad (\text{B15})$$

通过引进广义应力函数向量[7],

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4] = \sum_{\alpha=1}^4 \{ \mathbf{b}_\alpha f_\alpha(z_\alpha) + \bar{\mathbf{b}}_\alpha \bar{f}_\alpha(z_\alpha) \} \quad (\text{B16})$$

那么方程(B13)和(B14)可以写成

$$\mathbf{t}_1 = -\Phi_{,2}; \quad \mathbf{t}_2 = \Phi_{,1} \quad (\text{B17})$$

压电材料的一般解 \mathbf{u} 和 Φ 可以表示为

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}f(z) + \bar{\mathbf{A}}\bar{f}(z) = 2\operatorname{Re}[\mathbf{A}f(z)], \quad (\text{B18})$$

$$\Phi = \mathbf{B}f(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{f}(z) = 2\operatorname{Re}[\mathbf{B}f(z)], \quad (\text{B19})$$

上式中 4×4 的矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 和向量 $\mathbf{f}(z)$ 定义为

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2, a_3, a_4], \quad \mathbf{B} = [b_1, b_2, b_3, b_4] \quad (\text{B20})$$

$$\mathbf{f}(z) = [f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)] \quad (\text{B21})$$

压电材料的一般解 \mathbf{u} 和 Φ 最后的问题就是根据边值条件确定未知函数 $\mathbf{f}(z)$ 。矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 有正交关系和封闭关系。即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{A}^T \\ \bar{\mathbf{B}}^T & \bar{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

或者 $\mathbf{A}^T\mathbf{B} + \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \mathbf{I} = \bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T\bar{\mathbf{A}}$ 和 $\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}^T\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0} = \bar{\mathbf{A}}^T\mathbf{B} + \bar{\mathbf{B}}^T\mathbf{A}$ 称为正交关系, 而

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{A}^T \\ \bar{\mathbf{B}}^T & \bar{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

或者 $\bar{\mathbf{B}}\mathbf{A}^T + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{B}^T = \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T + \mathbf{A}\bar{\mathbf{B}}^T$ 和 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{A}}^T = \mathbf{0} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}^T$ 称为矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的封闭关系。

B2 横观各向同性压电材料反平面问题

对一种特殊具有 6mm 晶体结构的横观各向同性压电材料, 那么其对应的本构方程为[64, 252]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{32} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{B22})$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{32} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{B23})$$

这里值得提及的是对于横观各向同性压电陶瓷, 在 Gao 等人提出的 PS 模型中, 为了方便分析和计算, 将上面的本构方程简化为如下的形式[6],

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = M \begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} - e \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}, \quad (\text{B24})$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}, \quad (\text{B25})$$

其中*表示在后面的模型和计算过程中不会出现。这种简化形式虽然数值上不精确，但是这个简化的方程抓住了问题的本质，可以定性地研究压电断裂问题。

由于是横观各向同性材料，因此假设位移和电势只是坐标 x_1 和 x_2 的函数，对于一个压电材料的反平面问题[64]，即

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u_3(x, y), \quad (\text{B26})$$

$$E_1 = E_1(x, y), \quad E_2 = E_2(x, y), \quad E_3 = 0 \quad (\text{B27})$$

在这种情况下，压电材料的本构方程可以简化为：

$$\sigma_{13} = c_{44}u_{3,1} + e_{15}\phi_{,1}, \quad D_1 = e_{15}u_{3,1} + \kappa_{11}\phi_{,1}, \quad (\text{B28})$$

$$\sigma_{23} = c_{44}u_{3,2} + e_{15}\phi_{,2}, \quad D_2 = e_{15}u_{3,2} + \kappa_{11}\phi_{,2}, \quad (\text{B29})$$

从上面的方程可以看到，这是一个平面内电学问题，而平面外（ z 方向）的力学问题。此时将方程(B28)和(B29)代入到平衡方程

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} = 0, \quad D_{1,1} + D_{2,2} = 0 \quad (\text{B30})$$

可以得到如下的控制方程，

$$c_{44}\nabla^2 u_3 + e_{15}\nabla^2 \phi = 0, \quad e_{15}\nabla^2 u_3 - \kappa_{11}\nabla^2 \phi = 0, \quad (\text{B31})$$

其中 ∇^2 为二维的拉普拉斯算子，即

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{B32})$$

根据方程(B31)，可以得到解耦后的方程为

$$\nabla^2 u_3 = 0, \quad \nabla^2 \phi = 0, \quad (\text{B33})$$

上面的方程可以看到，位移和电势都是调和函数，因此，根据复变函数，位移和电势可以取作某一个解析函数的实部和虚部，这里，我们取

$$\begin{aligned} u_z &= \text{Im}U(z) \\ \phi &= \text{Im}\Phi(z) \end{aligned} \quad (\text{B34})$$

那么应力和电位移表达式为

$$\begin{aligned} \sigma_{zy} + i\sigma_{zx} &= c_{44}U'(z) + e_{15}\Phi'(z) \\ D_y + iD_x &= e_{15}U'(z) + \kappa_{11}\Phi'(z) \\ E_y + iE_x &= -\Phi'(z) \end{aligned} \quad (\text{B35})$$

采用半逆解法，可以假设[64]

$$\begin{aligned} U(z) &= A(z^2 - a^2)^{1/2} \\ \Phi(z) &= B(z^2 - a^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{B36})$$

然后将其代替上面的方程，可以得到裂纹尖端的应力应变场，电场和电位移都存在的奇异性，即 $r^{-1/2}$ 形式。

B3 横观各向同性压电材料平面问题

对于平面情形，压电材料的本构方程为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{33} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{13} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{32} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31} & 0 \\ 0 & e_{33} & 0 \\ 0 & e_{31} & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{B37})$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{32} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{B38})$$

假设位移和电势函数只是平面内坐标 x_1 和 x_2 的函数，即 $\varepsilon_{33} = 0$ ， $E_3 = 0$ 。此时，本构方程可以简化为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e_{31} \\ 0 & e_{33} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{,1} \\ \phi_{,2} \end{bmatrix}, \quad (\text{B39})$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 \\ 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{,1} \\ \phi_{,2} \end{bmatrix}, \quad (\text{B40})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{66} & 0 \\ 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{bmatrix} \quad (\text{B41})$$

将上面的简化后的本构方程代入平衡方程,

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0, \quad D_{1,1} + D_{2,2} = 0 \quad (\text{B42})$$

可以得到关于 u_1 , u_2 和 ϕ 的控制方程为

$$c_{11}u_{1,11} + c_{44}u_{1,22} + (c_{13} + c_{44})u_{2,12} + (e_{15} + e_{31})\phi_{,12} = 0 \quad (\text{B43})$$

$$(c_{13} + c_{44})u_{1,12} + c_{44}u_{2,11} + c_{33}u_{2,22} + e_{15}\phi_{,11} + e_{33}\phi_{,22} = 0 \quad (\text{B44})$$

$$(e_{15} + e_{31})u_{1,12} + e_{15}u_{2,11} + e_{33}u_{2,22} - \kappa_{11}\phi_{,11} - \kappa_{33}\phi_{,22} = 0 \quad (\text{B45})$$

根据前面提到的压电材料的一般解, 可以将未知数假设为

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \phi]^T = 2 \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) \quad (\text{B46})$$

$$\mathbf{\Phi} = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3]^T = 2 \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) \quad (\text{B47})$$

$$\mathbf{t}_1 = [\sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad D_1]^T = -2 \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} p_{\alpha} f'_{\alpha}(z_{\alpha}) \quad (\text{B48})$$

$$\mathbf{t}_2 = [\sigma_{12} \quad \sigma_{22} \quad D_2]^T = 2 \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} f'_{\alpha}(z_{\alpha}) \quad (\text{B49})$$

其对应的本征方程为

$$\begin{pmatrix} c_{11} + c_{44}p^2 & (c_{13} + c_{44})p & (e_{15} + e_{31})p \\ (c_{13} + c_{44})p & c_{44} + c_{33}p^2 & e_{15} + e_{33}p^2 \\ (e_{15} + e_{31})p & e_{15} + e_{33}p^2 & -(\kappa_{11} + \kappa_{33}p^2) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B50})$$

上面矩阵对应的行列式等于 0, 这个方程是 p 的六次方的代数方程。相应的每一个本征根 p_{α} 对应的本征向量为

$$a_1(p_{\alpha}) = \begin{vmatrix} c_{44} + c_{33}p_{\alpha}^2 & e_{15} + e_{33}p_{\alpha}^2 \\ e_{15} + e_{33}p_{\alpha}^2 & -(\kappa_{11} + \kappa_{33}p_{\alpha}^2) \end{vmatrix}, \quad (\text{B51})$$

$$a_2(p_{\alpha}) = - \begin{vmatrix} (c_{13} + c_{44})p_{\alpha} & (e_{15} + e_{31})p_{\alpha} \\ e_{15} + e_{33}p_{\alpha}^2 & -(\kappa_{11} + \kappa_{33}p_{\alpha}^2) \end{vmatrix}, \quad (\text{B52})$$

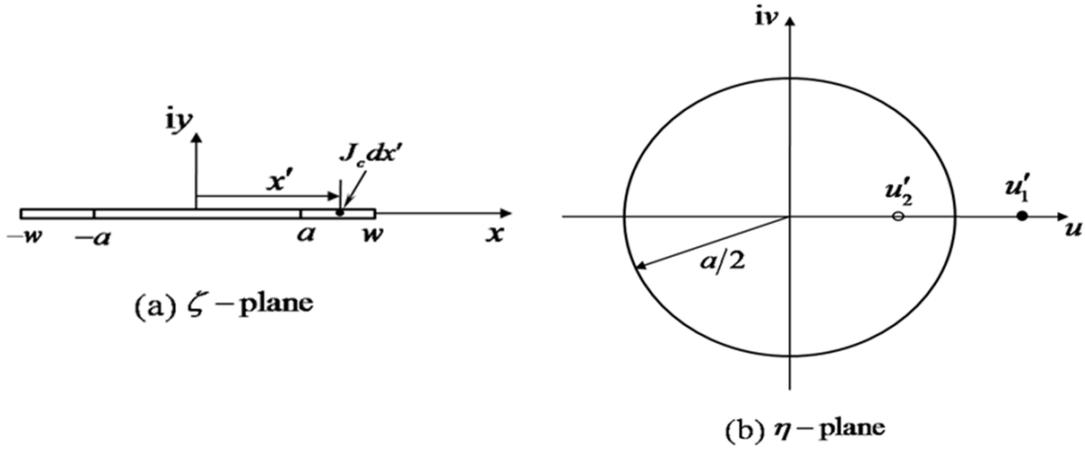
$$a_3(p_{\alpha}) = \begin{vmatrix} (c_{13} + c_{44})p_{\alpha} & (e_{15} + e_{31})p_{\alpha} \\ c_{44} + c_{33}p_{\alpha}^2 & e_{15} + e_{33}p_{\alpha}^2 \end{vmatrix}, \quad (\text{B53})$$

向量 \mathbf{b}_{α} 可以根据公式(B15)进行计算, 此时的矩阵

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & e_{15} \\ 0 & e_{15} & -\kappa_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & c_{13} & e_{31} \\ c_{44} & 0 & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{33} & e_{33} \\ 0 & e_{33} & -\kappa_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B54})$$

C 场相关临界态模型下超导薄带的积分方程组及其数值解法

在这个附录里面,我们首先给出如何用复变函数方法求解场相关临界态模型超导薄带在垂直磁场、外加电流、外加磁场和外加电流同时存在时的磁场和电流分布。对于超导薄带在垂直磁场下的场相关临界态问题,McDonald 和 Clem 已经采用权函数方法得到了问题的解[145]。采用这里的保角变换方法同样可以得到相同的结果。



附录 C.1 保角变换方法示意图

如图附录 C.1 所示, ζ 平面的超导薄带中间完全抗磁区域 $-a < x < a$ ($\zeta = x + iy$) 可以通过 $\zeta = \eta + a^2/4\eta$ 映射成 η 平面 ($\eta = u + iv$) 的圆形[218]。在 x' 处的临界电流 $J_c(B(x'))dx'$ 在 η 平面处于

$$u'_1 = \frac{1}{2} \left(x' + \sqrt{x'^2 - a^2} \right) \quad (C1)$$

根据镜像原理,如果我们想要圆上只有切向磁场,没有法向磁场,那么需要在 u'_1 的镜像点 u'_2 处放置一个反向但大小相同的电流,镜像点 u'_2

$$u'_2 = \frac{1}{2} \left(x' - \sqrt{x'^2 - a^2} \right) \quad (C2)$$

ζ 平面超导薄带上表面 x 点被映射成 η 平面内的 $u_1 = \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) / 2$ 。为了方便计算,我们在 ζ 和 η 平面引入复场 $H(\zeta) = H_y + iH_x$ 和 $\tilde{H}(\zeta) = H_v + iH_u$ [253, 254]。根据毕奥萨伐尔定律, η 平面 u'_1 和其镜像点 u'_2 电流在 u_1 处引起的磁场的磁场大小为

$$\begin{aligned}\tilde{H}(u_1) &= \frac{J_c(B(x'))dx'}{2\pi(u_1 - u_1')} - \frac{J_c(B(x'))dx'}{2\pi(u_1 - u_2')} \\ &= \frac{\sqrt{x'^2 - a^2} J_c(B(x'))dx'}{2\pi u_1(x - x')}\end{aligned}\quad (C3)$$

在 ζ 平面 x' 处的电流 $J_c(B(x'))dx'$ 在 x 引起的磁场为

$$H(x) = \frac{\tilde{H}(u_1)}{d\zeta/d\eta} = \frac{\sqrt{x'^2 - a^2} J_c(B(x'))dx'}{2\pi(x - x')\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad (C4)$$

根据对称性, 在 $-x'$ 处的电流为 $J_c(B(x'))$ 。因此, 我们可以将上式中的 x' 换成 $-x'$, 得到

$$H(x) = -\frac{\sqrt{x'^2 - a^2} J_c(B(x'))dx'}{2\pi(x + x')\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad (C5)$$

将上面两个方程进行叠加, 我们可以得到

$$H(x) = \frac{x'\sqrt{x'^2 - a^2} J_c(B(x'))dx'}{\pi\sqrt{x^2 - a^2}(x^2 - x'^2)}, \quad (C6)$$

在 $-w \leq x' \leq -a$ 和 $a \leq x' \leq w$ 区域内的电流引起的磁场为

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \int_a^w \frac{x'\sqrt{x'^2 - a^2}}{\pi(x^2 - x'^2)} J_c(B(x'))dx', \quad (C7)$$

我们可以看到方程(B7)在 $x = \pm a$ 处是奇异的。奇异性因子 F 为

$$F = \int_a^w \frac{x'\sqrt{x'^2 - a^2}}{\pi(a^2 - x'^2)} J_c(B(x'))dx', \quad (C8)$$

为了保证在 $x = \pm a$ 处复场的连续性, 我们可以去掉奇异项部分 $F/\sqrt{x^2 - a^2}$, 从而有

$$H(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\pi} \int_a^w \frac{x' J_c(B(x'))dx'}{(x^2 - x'^2)\sqrt{x'^2 - a^2}} \quad (C9)$$

显然上面的方程在中间区域 $-a < x < a$ 只有平行分量 H_x 。根据 $H_x = -J(x)/2$ [101], 可以得到在中间区域的电流分布为

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \int_a^w \frac{x' J_c(B(x'))dx'}{(x'^2 - x^2)\sqrt{x'^2 - a^2}} \quad (C10)$$

由于采用不同的坐标, 只要将 x 换成 y 就可以得到第 4 章的公式。根据反对称性我们可以得到在 $a < |x| \leq w$ 区域内的磁场分布为

$$B(x) = B_f \frac{x}{|x|} \sqrt{x^2 - a^2} \int_a^w \frac{x' dx'}{(x^2 - x'^2) \sqrt{x'^2 - a^2}} \frac{J_c(B(x'))}{J_{c0}} \quad (\text{C11})$$

下面我们来推导下降场的情形。根据铁磁基底的广义毕奥萨伐尔定律[254]，

$$H(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w}^w \frac{K(x') + i\sigma(x')}{\zeta - x'} dx' \quad (\text{C12})$$

其中 $K(x)$ 和 $\sigma(x)$ 分别为

$$K(x) = H_x(x, -d/2) - H_x(x, d/2) \quad (\text{C13})$$

$$\sigma(x) = H_y(x, d/2) - H_y(x, -d/2) \quad (\text{C14})$$

如第四章提到的，此时区域 $|x| < a$ 内电流和 $a < |x| \leq w$ 内的磁场分成两部分，一部分是由 $a < |x| < w$ 内的临界电流引起，另一部分是由 $a_0 < |x| < a$ 内冻结磁通引起的（或非临界电流）。从而可以在 $a < |x| < w$ 内得到 $K(x) = J_c(x)$ ，在 $a_0 < |x| < a$ 内得到 $\sigma(x) = 2B(x)/\mu_0$ 。将 $K(x)$ 和 $\sigma(x)$ 代入方程 (C12)，我们发现 $i2B(x)/\mu_0$ 和 $J_c(x)$ 服从同样的方程，所以我们可以将方程 (C9) 中的 $J_c(B(x'))$ 替换成 $i2B(x')/\mu_0$ ，得到冻结磁通引起的磁场为

$$H(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\mu_0 \pi} \int_{a_0}^a \frac{i2x'B(x') dx'}{(x^2 - x'^2) \sqrt{x'^2 - a^2}} \quad (\text{C15})$$

在 $a < |x| < w$ 区域内的临界电流 $-J_c(B_\downarrow(x'))$ 引起的磁场可以通过 $-J_c(B_\downarrow(x'))$ 替换 $J_c(B(x'))$ 得到。将两部分叠加起来，我们得到下降场时的复场分布为

$$H_\downarrow(x) = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\pi} \left[\int_a^w \frac{x' J_c(B_\downarrow(x')) dx'}{(x^2 - x'^2) \sqrt{x'^2 - a^2}} - \frac{i2}{\mu_0} \int_{a_0}^a \frac{x'B(x') dx'}{(x^2 - x'^2) \sqrt{x'^2 - a^2}} \right] \quad (\text{C16})$$

然后可以根据 $H_x = -J(x)/2$ 和 $B(x) = \mu_0 H(x)$ 得到和第四章相同的结果。其它情形下复场的分布很容易根据类似的方法得到。

耦合积分方程组的数值解法

下面我们说明如何数值求解第四章中给出的一系列耦合的积分方程组。这里我们以超导薄带在垂直磁场上阶段对应的积分方程组（即方程 4.2.1-4.2.3）为例进行说明。因为 McDonald 和 Clem 也得到了相同的积分方程组，文章中给出了一些磁场下的电流密度和磁场分布，所以我们选择这个方程组，在相同的参数下，通过将我们的数值结果和 McDonald 和 Clem 文章中的数值结果进行对比，可以检验我们的数值方法的准确性。下面我们重新列出这组积分方程组：

$$J_y(y) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} y \sqrt{a^2 - y^2} \int_a^w \frac{J_c(B_z(x')) dx'}{(x'^2 - y^2) \sqrt{x'^2 - a^2}}, & |y| < a \\ -\frac{y}{|y|} J_c(B_z(y)), & a < |y| < w \end{cases}, \quad (C17)$$

$$B_z(y) = B_f |y| \sqrt{y^2 - a^2} \int_a^w \frac{J_c(B_z(x'))}{J_{c0}} \frac{dx'}{(y^2 - x'^2) \sqrt{x'^2 - b^2}}, \quad a < |y| \neq w \quad (C18)$$

$$B_a = B_f \int_a^w \frac{J_c(B_z(x'))}{J_{c0}} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 - a^2}}, \quad (C19)$$

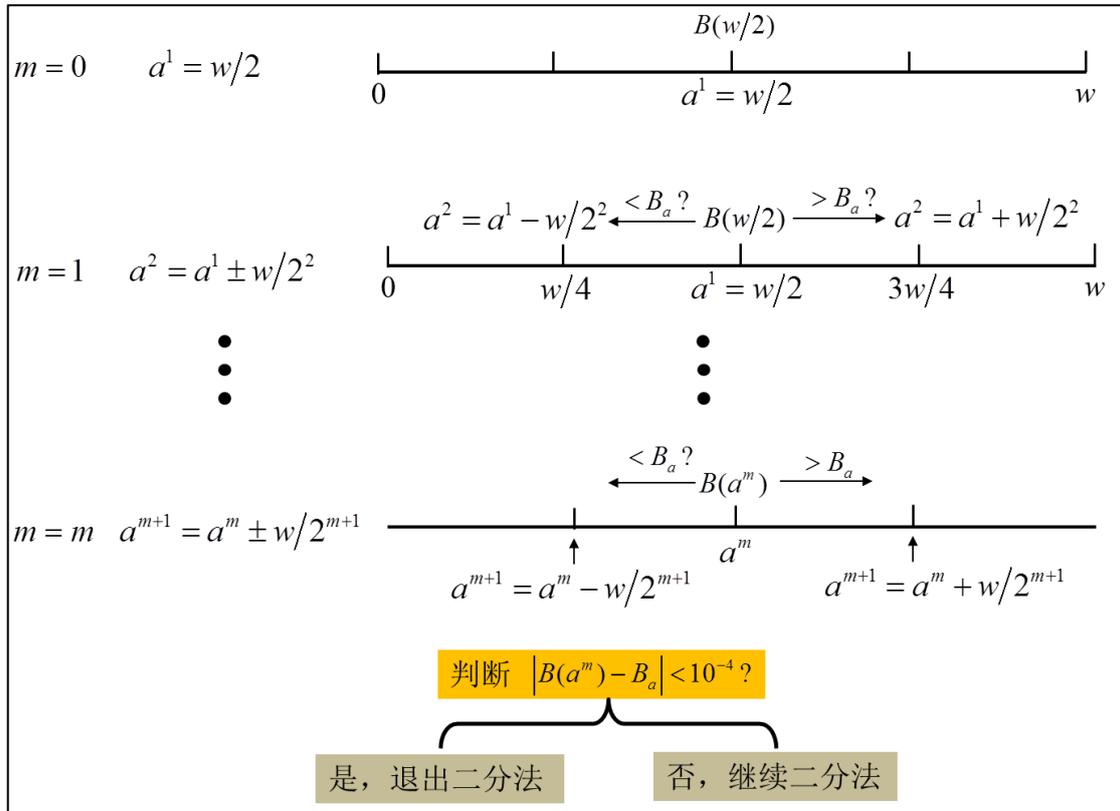


图 C.2 二分法思路示意图

显然，上面的积分方程是电流和磁场耦合的积分方程组，其求解过程分为两个关键部分，一是磁通穿透深度，二是迭代求解耦合的积分。下面我们首先介绍怎么确定磁通穿透深度的计算思路，主要利用的算法就是二分法(或称打靶法)。首先选择初始穿透深度 $a^1 = w/2$ ，其中参数 a 的上标代表第几次二分。那么在穿透深度 $a^1 = w/2$ 的情况下对应的外加磁场是多大呢？这个问题可以通过求解方程 (C19) 确定出来，但是穿透区域内的临界电流分布未知，所以问题就变成了求解穿透深度 $a^1 = w/2$ 的情况下的临界电流和磁场分布问题。因此需要求解耦合方程 (C17) (C18)，求解这两个耦合的积分方程采用的是迭代求解，具体方法

我们放到后面介绍,这里假设给定穿透深度的情况下通过迭代方法已经求解出了电流和磁场的分布。从而可以将电流分布代入 (C19) 就可以得出该穿透深度下对应的外加磁场,通过和实际外加磁场进行对比,并考虑到磁通穿透深度和外加磁场是单调递增关系,因此,如果 $a^1 = w/2$ 对应的外加磁场 $B(w/2)$ 大于真实外加磁场 B_a , 那么下一步 $a^2 = a^1 + w/2$; 如果 $B(w/2) < B_a$, 那么下一步 $a^2 = a^1 - w/2$ 。如图 C.2 所示,不断采用这种分析方法,直到求得的 $B(a^m)$ 与真实外加磁场相差很小。

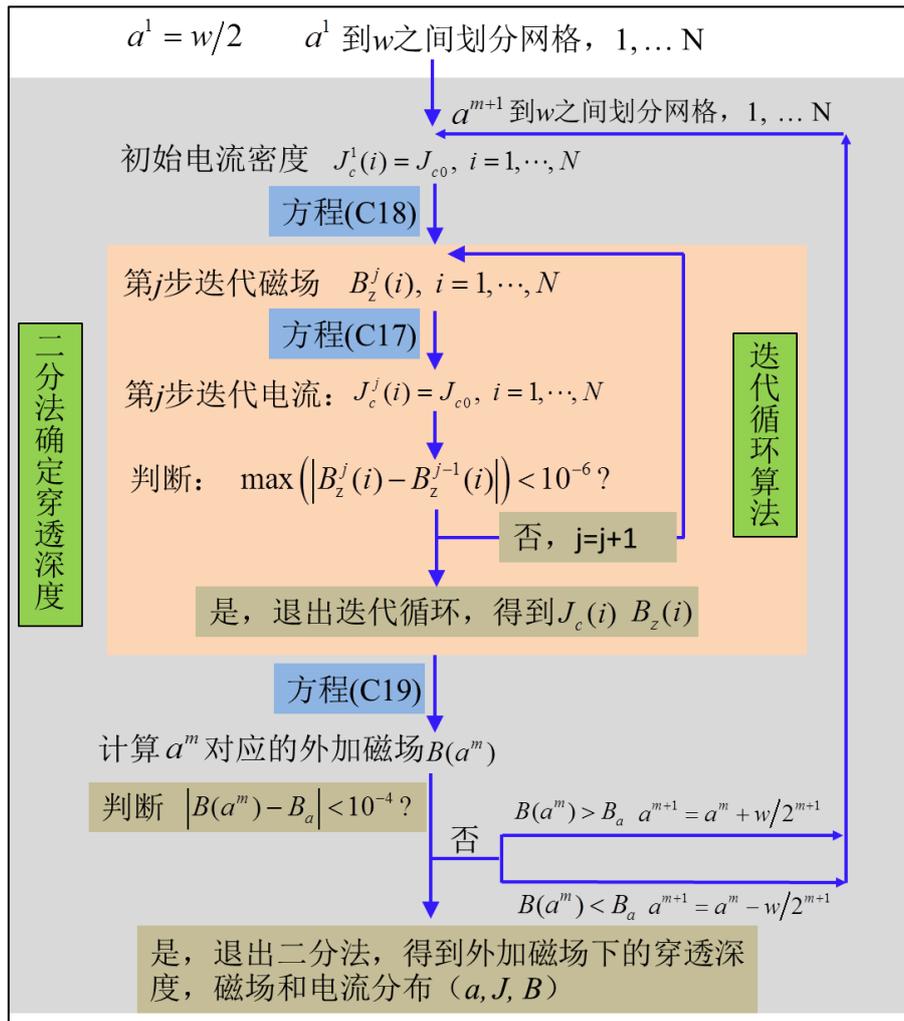


图 C.3 数值求解积分方程组的流程图

上面我们介绍了如何确定磁场的穿透深度的计算思路,我们看到其中的计算也需要计算给定的穿透深度下磁场和电流的分布,这就需要联合求解耦合的方程 (C17) (C18), 主要的思路就是迭代求解, 首先将穿透区域 a 到 w 之间划分网格, $1, 2, \dots, N$, 而且给定在这些节点上的初始的电流密度 $J_c^0(i) = J_{c0}, i = 1, \dots, N$, 代入方程 (C18) 右边进行数值积分, 可以得到穿透区域 $a < x < w$ 之间的第一步迭代磁场 $B_z^1(i), i = 1, \dots, N$, 然后将第一步迭代出来的 $B_z^1(i)$ 代入方程 (C17) 的第二

个方程，可以得到穿透区域 $a < x < w$ 内第一步的电流密度 $J_c^1(i)$ ，从而完成第一步的循环，然后将 $J_c^1(i)$ 再代入方程 C(18) 右边进行数值积分可以得到第二步的磁场 $B_z^2(i)$ ，依照这个迭代步骤不断进行下去，直到前后两个迭代步之间的磁场（或者电流）相差很小（如 $< 10^{-6}$ ）就说明收敛到了精确解。具体的数值计算流程图参见图 C.3。为了验证这种数值求解思路的精确性，我们和 McDonald 和 Clem 的结果进行了对比（图 C.4），可以看到我们的数值结果和他们的结果相差很小，说明了我们这种算法的有效性和精确性。

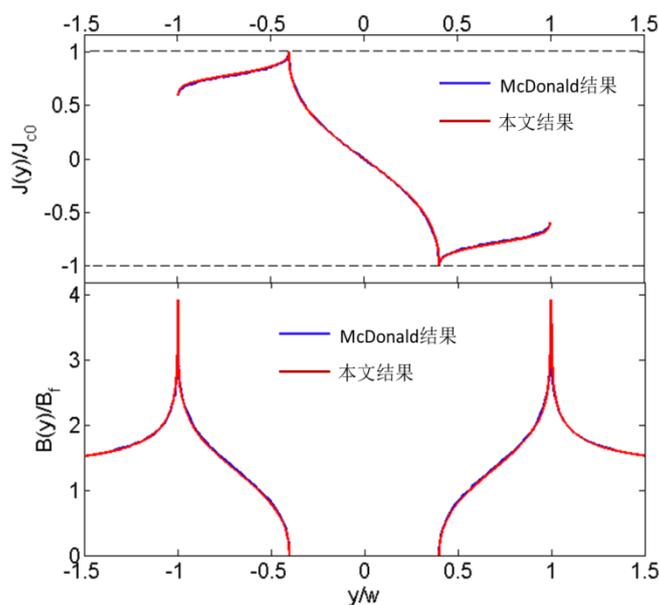


图 C.4 本文数值计算方法和 McDonald 和 Clem 的结果的对比， $B_a = 1.3B_f$ 。

参考文献

- [1] 章立源, 张金龙, 崔广霁, 超导物理. 北京: 电子工业出版社, 1987.
- [2] 张裕恒, 超导物理. 合肥: 中国科学技术出版社, 2009.
- [3] 孙训方, 方孝淑, 关来泰, 材料力学 (I), 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [4] J. Herbert, *Ferroelectric Transducers and Sensors*. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1982.
- [5] I. Chopra, Smart structures and integrated systems, in *SPIE Proceedings*, Bellingham, Washington, 1995.
- [6] H. J. Gao, T. Y. Zhang, and P. Tong, Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic. *J Mech Phys Solids*, **45**, 491, 1997.
- [7] 方岱宁, 刘金喜, 压电与铁电体的断裂力学. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [8] P. P. Cortet, S. Santucci, L. Vanel, and S. Ciliberto, Slow crack growth in polycarbonate films. *Europhys Lett*, **71**, 242, 2005.
- [9] H. K. Onnes, The resistance of pure mercury at helium temperatures. *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden* **12**, 120, 1911.
- [10] W. Meissner and R. Ochsenfeld, Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit. *Naturwissenschaften*, **21**, 787, 1933.
- [11] F. London and H. London, The electromagnetic equations of the supraconductor. *Proc. Roy. Soc. A*, **149**, 71, 1935.
- [12] L. D. Landau and V. L. Ginzburg, On the theory of superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **20**, 1064, 1950.
- [13] A. A. Abrikosov, Magnetic properties of superconductors of the second group. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **32**, 1442, 1957.
- [14] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Theory of Superconductivity. *Physical Review*, **108**, 1175, 1957.
- [15] L. P. Gor'kov, Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP*, **9**, 1364, 1959.
- [16] J. G. Bednorz and K. A. Muller, Possible High-Tc Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System. *Z Phys B Con Mat*, **64**, 189, 1986.
- [17] Y. Kamihara, H. Hiramatsu, M. Hirano, R. Kawamura, H. Yanagi, T. Kamiya, *et al.*, Iron-based layered superconductor: LaOFeP. *Journal of the American Chemical Society*, **128**, 10012, 2006.
- [18] E. Cartlidge, Superconductivity record sparks wave of follow-up physics. *Nature*, **524**, 277, 2015.
- [19] R. Kato, Y. Enomoto, and S. Maekawa, Computer simulations of dynamics of flux lines in type-II superconductors. *Phys Rev B*, **44**, 6916, 1991.
- [20] http://hoffman.physics.harvard.edu/research/STMresearch_replaced_2012_02_18.php.
- [21] C. P. Bean, Magnetization of hard superconductors. *Physical review letters*, **8**, 250, 1962.
- [22] C. P. Bean, Magnetization of high-field superconductors. *Reviews of Modern Physics*, **36**, 31, 1964.
- [23] <http://www.mn.uio.no/fysikk/english/research/groups/amks/superconductivity/mo/>.
- [24] Y. B. Kim, C. F. Hempstead, and A. R. Strnad, Magnetization and critical supercurrents. *Physical Review*, **129**, 528, 1963.

- [25] Y. B. Kim, C. F. Hempstead, and A. R. Strnad, Critical persistent currents in hard superconductors. *Physical Review Letters*, **9**, 306, 1962.
- [26] W. A. Fietz, M. R. Beasley, J. Silcox, and W. W. Webb, Magnetization of superconducting Nb-25% Zr wire. *Physical Review*, **136**, A335, 1964.
- [27] V. R. Karasik, N. G. Vasil'Ev, and V. G. Ershov, Magnetization of Superconducting Alloy Ti-22 at.% Nb. *SOVIET PHYSICS JETP*, **32**, 433, 1971.
- [28] J. H. P. Watson, Magnetization of synthetic filamentary superconductors. B. The dependence of the critical current density on temperature and magnetic field. *J Appl Phys*, **39**, 3406, 1968.
- [29] F. Irie and K. Yamafuji, Theory of flux motion in non-ideal type-II superconductors. *Journal of the Physical Society of Japan*, **23**, 255, 1967.
- [30] I. M. Green and P. Hlawiczka, Pinning forces and hysteresis in type II superconductors. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, **114**, 1329, 1967.
- [31] L. Prigozhin, Variational inequalities in critical-state problems. *Physica D*, **197**, 197, 2004.
- [32] G. R. Irwin, J. A. Kies, and H. L. Smith, Fracture strengths relative to onset and arrest of crack propagation. *Proc. ASTM*, **58**, 640, 1958.
- [33] G. P. Cherepanov, On crack propagation in solids. *Int. J. Solids Structures*, 1969.
- [34] J. R. Rice, A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.*, **35**, 379, 1968.
- [35] J. W. Hutchinson, Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *J. Mech. Phys. Solids* **16**, 13, 1968.
- [36] J. R. Rice and G. F. Rosengren, Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *J. Mech. Phys. Solids*, **16**, 1, 1968.
- [37] J. A. Begley and J. D. Landes, The J-integral as a fracture criterion 514. Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 1972.
- [38] J. A. Begley and J. D. Landes, Serendipity and the J-integral. *Int J Fracture*, **12**, 764, 1976.
- [39] J. D. Landes and J. A. Begley, The effect of specimen geometry on J_{1c}. In: Fracture Toughness 514. Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 1972.
- [40] J. R. Rice, P. C. Paris, and J. G. Merkle, Some further results of J-integral analysis and estimates 536. Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 1973.
- [41] C. E. Turner, "The ubiquitous η factor," in *Fracture Mechanics*, A. STP, Ed., ed Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 1980.
- [42] S. G. Larsson and A. J. Carlsson, Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **21**, 263, 1973.
- [43] J. R. Rice, Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, **22**, 17, 1974.
- [44] R. M. McMeeking and D. M. Parks, On criteria for J-dominance of cracktip fields in large-scale yielding 668. Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 1979.
- [45] C. F. Shih and M. D. German, Requirements for a one parameter characterization of crack tip fields by the HRR singularity. *Int. J. Fract.*, **17**, 27, 1981.
- [46] N. P. O'Dowd and C. F. Shih, Two parameter fracture mechanics: theory and applications 24. Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 1995.
- [47] 李尧臣, 王自强, 平面应变 I 型非线性裂纹问题的高阶渐进解. *中国科学 A*, **2**, 182, 1986.
- [48] L. Xia, T. C. Wang, and C. F. Shih, Higher-order analysis of crack tip fields in elastic power-law hardening materials. *J Mech Phys Solids*, **41**, 665, 1993.
- [49] S. Yang, Y. J. Chao, and M. A. Sutton, Complete Theoretical-Analysis for Higher-Order Asymptotic Terms and the Hrr Zone at a Crack Tip for Mode-I and Mode-II Loading of a

- Hardening Material. *Acta Mech*, **98**, 79, 1993.
- [50] Y. G. Wei and T. C. Wang, Fracture criterion based on the higher-order asymptotic fields. *Int J Fracture*, **73**, 39, 1995.
- [51] M. T. Kirk, K. C. Koppenhoefer, and C. F. Shih, Effect of constraint on specimen dimensions needed to obtain structurally relevant toughness measures. *ASTM SPEC TECH PUBL, ASTM, PHILADELPHIA, PA(USA)*, **1171**, 79, 1993.
- [52] D. S. Dugdale, Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, **8**, 100, 1960.
- [53] F. M. Burdekin and M. G. Dawes, Practical use of linear elastic and yielding fracture mechanics with particular reference to pressure vessels. *Inst. Mech. Eng. Conf.*, **28**, 1971.
- [54] F. M. Burdekin and D. E. W. Stone, The crack opening displacement approach to fracture mechanics in yielding materials. *J. Strain Anal. Eng.*, **1**, 145, 1966.
- [55] M. G. Dawes, Fracture control in high yield strength weldments. *Weld. J. Res.*, **53**, 369s, 1974.
- [56] C. F. Shih, Relationships between the J-Integral and the Crack Opening Displacement for Stationary and Extending Cracks. *J Mech Phys Solids*, **29**, 305, 1981.
- [57] B. J. Schaeffer, H. W. Liu, and J. S. Ke, Deformation and the strip necking zone in a cracked steel sheet. *Exp. Mech.*, **11**, 172, 1971.
- [58] B. A. Kudriavtsev, V. Z. Parton, and V. I. Rakin, Fracture mechanics of piezoelectric materials. Axisymmetric crack on the boundary with a conductor. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **39**, 328, 1975.
- [59] B. A. Kudriavtsev, V. Z. Parton, and V. I. Rakin, Fracture mechanics of piezoelectric materials. Rectilinear tunnel crack on the boundary with a conductor. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **39**, 136, 1975.
- [60] V. Z. Parton, Fracture mechanics of piezoelectric materials. *Acta Astronautica*, **3**, 671, 1976.
- [61] G. P. Cherepanov, Mechanics of Brittle Fracture. New York: McGraw-Hill, 1979.
- [62] W. F. Deeg, The analysis of dislocations, crack and inclusion problems in piezoelectric solids. Stanford University Ph.D. thesis, California, 1980.
- [63] H. A. Sosa and Y. E. Pak, Three-dimensional eigenfunction analysis of a crack in a piezoelectric material. *International Journal of Solids and Structures*, **26**, 1, 1990.
- [64] Y. E. Pak, Crack Extension Force in a Piezoelectric Material. *J Appl Mech-T Asme*, **57**, 647, 1990.
- [65] T. Y. Zhang and P. Tong, Fracture mechanics for a mode III crack in a piezoelectric material. *International Journal of Solids and Structures*, **33**, 343, 1996.
- [66] Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, and J. R. Willis, Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. *J. Mech. Phys. Solids*, **40**, 739, 1992.
- [67] Z. C. Ou and X. J. Wu, On the crack-tip stress singularity of interfacial cracks in transversely isotropic piezoelectric bimetals. *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 7499, 2003.
- [68] Z. C. Ou and Y. H. Chen, Interface crack-tip generalized stress field and stress intensity factors in transversely isotropic piezoelectric bimetals. *Mech Res Commun*, **31**, 421, 2004.
- [69] S. Park and C. T. Sun, Fracture criteria for piezoelectric ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*, **78**, 1475, 1995.
- [70] T. C. Wang, Analysis of strip electric saturation model of crack problem in piezoelectric materials. *International Journal of Solids and Structures*, **37**, 6031, 2000.
- [71] F. Q. Yang and I. Kao, Crack problem in piezoelectric materials: general anti-plane mechanical loading. *Mech Mater*, **31**, 395, 1999.
- [72] S. M. Kwon and K. Y. Lee, Analysis of stress and electric fields in a rectangular piezoelectric body with a center crack under anti-plane shear loading. *International Journal of Solids and*

- Structures*, **37**, 4859, 2000.
- [73] X. F. Li and T. Y. Fan, Transient analysis of a piezoelectric strip with a permeable crack under anti-plane impact loads. *Int J Eng Sci*, **40**, 131, 2002.
- [74] X. F. Li and G. J. Tang, Antiplane interface crack between two bonded dissimilar piezoelectric layers. *European Journal of Mechanics and Solids*, **22**, 231, 2003.
- [75] S. M. Kwon, Electrical nonlinear anti-plane shear crack in a functionally graded piezoelectric strip. *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 5649, 2003.
- [76] S. M. Kwon and J. H. Shin, An electrically saturated anti-plane shear crack in a piezoelectric layer constrained between two elastic layers. *Int J Mech Sci*, **48**, 707, 2006.
- [77] R. R. Bhargava and A. Setia, Crack arrest saturation model under combined electrical and mechanical loadings. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, **37**, 544, 2009.
- [78] B. L. Wang and Y. W. Mai, Accumulation damage mode for ferroelectric ceramics subjected to mode III fatigue loading conditions. *Int J Damage Mech*, **17**, 29, 2008.
- [79] T. Y. Zhang and C. F. Gao, Fracture behaviors of piezoelectric materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **41**, 339, 2004.
- [80] T. Y. Zhang, M. H. Zhao, and C. F. Gao, The strip dielectric breakdown model. *Int J Fracture*, **132**, 311, 2005.
- [81] 陈增涛, 余寿文, 不同压电介质界面上的反平面运动裂纹. *固体力学学报*, **20**, 77, 1999.
- [82] A. G. Tobin and E. Pak, Effect of electric fields on fracture behavior of PZT ceramics. presented at the 1993 North American Conference on Smart Structures and Materials, 1993.
- [83] A. K. Soh, K. L. Lee, and D. N. Fang, On the effects of an electric field on the fracture toughness of poled piezoelectric ceramics. *Mat Sci Eng a-Struct*, **360**, 306, 2003.
- [84] R. Fu and T. Y. Zhang, Effects of an electric field on the fracture toughness of poled lead zirconate titanate ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*, **83**, 1215, 2000.
- [85] 王毅, 褚武扬, 宿彦京, 高克玮, 乔利杰, 电场、应力和环境对 PZT-95 铁电陶瓷断裂的耦合作用. *中国科学 G 辑*, **34**, 628, 2004.
- [86] C. Q. Ru, Effect of electrical polarization saturation on stress intensity factors in a piezoelectric ceramic. *International Journal of Solids and Structures*, **36**, 869, 1999.
- [87] D. N. Fang, Z. K. Zhang, A. K. Soh, and K. L. Lee, Fracture criteria of piezoelectric ceramics with defects. *Mech Mater*, **36**, 917, 2004.
- [88] S. Shen and T. Nishioka, Fracture of piezoelectric materials: energy density criterion. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **33**, 57, 2000.
- [89] A. K. Soh, D. N. Fang, and K. L. Lee, Fracture analysis of piezoelectric materials with defects using energy density theory. *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 8331, 2001.
- [90] J. Z. Zuo and G. C. Sih, Energy density theory formulation and interpretation of cracking behavior for piezoelectric ceramics. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **34**, 17, 2000.
- [91] A. M. Campbell and J. E. Evetts, Critical currents in superconductors. . London: Taylor & Francis Limited, 1972.
- [92] V. M. Krasnov, V. A. Larkin, and V. V. Ryazanov, The extended Bean critical state model for superconducting 3-axes ellipsoid and its application for obtaining the bulk critical field H_{c1} and the pinning current J_c in high-Tc superconducting single crystals. *Physica C*, **174**, 440, 1991.
- [93] S. Senoussi, Review of the critical current densities and magnetic irreversibilities in high Tc superconductors. *J. Phys. III France*, **2**, 1041, 1992.
- [94] M. E. McHenry and R. A. Sutton, Flux pinning and dissipation in high temperature oxide superconductors, in *Progress in materials science*, 1994, pp. 159.
- [95] K. V. Bhagwat and P. Chaddah, Flux-Penetration in Spheroid Samples - Critical-State Model

- with Field-Dependent Critical-Current Density. *Physica C*, **224**, 155, 1994.
- [96] T. Schuster, M. V. Indenbom, M. R. Koblischka, H. Kuhn, and H. Kronmuller, Observation of current-discontinuity lines in type-II superconductors. *Phys Rev B*, **49**, 3443, 1994.
- [97] G. W. Swan, Current Distribution in a Thin Superconducting Strip. *J. Math. Phys.*, **9**, 1308, 1968.
- [98] E. H. Brandt, M. V. Indenbom, and A. Forkl, Type-II Superconducting Strip in Perpendicular Magnetic-Field. *Europhys Lett*, **22**, 735, 1993.
- [99] E. H. Brandt, Thin superconductors in a perpendicular magnetic ac field. II. Circular disk. *Phys Rev B*, **50**, 4034, 1994.
- [100] J. R. Clem and A. Sanchez, Hysteretic ac losses and susceptibility of thin superconducting disks. *Phys Rev B*, **50**, 9355, 1994.
- [101] E. H. Brandt and M. Indenbom, Type-II-superconductor strip with current in a perpendicular magnetic field. *Phys Rev B*, **48**, 12893, 1993.
- [102] E. Zeldov, J. R. Clem, M. McElfresh, and M. Darwin, Magnetization and transport currents in thin superconducting films. *Phys Rev B*, **49**, 9802, 1994.
- [103] P. N. Mikheenko and Y. E. Kuzovlev, Inductance Measurements of Htsc Films with High Critical Currents. *Physica C*, **204**, 229, 1993.
- [104] E. H. Brandt, Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves. *Phys Rev B*, **58**, 6506, 1998.
- [105] G. P. Mikitik and E. H. Brandt, Analytic solution for the critical state in superconducting elliptic films. *Phys Rev B*, **60**, 592, 1999.
- [106] Y. Mawatari and J. R. Clem, Analytical model of the response of a superconducting film to line currents. *Phys Rev B*, **74**, 2006.
- [107] J. R. Clem, Field and current distributions and ac losses in a bifilar stack of superconducting strips. *Phys Rev B*, **77**, 2008.
- [108] Y. Mawatari and K. Kajikawa, Alternating current loss in radially arranged superconducting strips. *Appl Phys Lett*, **88**, 2006.
- [109] Y. Mawatari, Critical state of periodically arranged superconducting-strip lines in perpendicular fields. *Phys Rev B*, **54**, 13215, 1996.
- [110] Y. Mawatari, C. Navau, and A. Sanchez, Two-dimensional arrays of superconducting strips as dc magnetic metamaterials. *Phys Rev B*, **85**, 134524, 2012.
- [111] Y. Mawatari, Field distributions in curved superconducting tapes conforming to a cylinder carrying transport currents. *Phys Rev B*, **80**, 2009.
- [112] Y. Mawatari, Superconducting tubular wires in transverse magnetic fields. *Phys Rev B*, **83**, 2011.
- [113] A. He, C. Xue, H. D. Yong, and Y. H. Zhou, Effect of soft ferromagnetic substrate on ac loss in 2G HTS power transmission cables consisting of coated conductors. *Superconductor Science and Technology*, **27**, 2014.
- [114] C. J. R., Field and current distributions and ac losses in superconducting strips. *Phys Rev B*, **80**, 184517, 2009.
- [115] E. H. Brandt, Square and rectangular thin superconductors in a transverse magnetic field. *Physical review letters*, **74**, 3025, 1995.
- [116] E. H. Brandt, Thin superconductors and SQUIDs in perpendicular magnetic field. *Phys Rev B*, **72**, 2005.
- [117] J. I. Vestgarden, D. V. Shantsev, Y. M. Galperin, and T. H. Johansen, Flux penetration in a superconducting strip with an edge indentation. *Phys Rev B*, **76**, 2007.
- [118] J. I. Vestgarden, D. V. Shantsev, Y. M. Galperin, and T. H. Johansen, Flux distribution in superconducting films with holes. *Phys Rev B*, **77**, 2008.

- [119] J. I. Vestgarden, V. V. Yurchenko, R. Wordenweber, and T. H. Johansen, Mechanism for flux guidance by micrometric antidot arrays in superconducting films. *Phys Rev B*, **85**, 2012.
- [120] L. Prigozhin, Analysis of critical-state problems in type-II superconductivity. *Ieee T Appl Supercon*, **7**, 3866, 1997.
- [121] L. Prigozhin, On the Bean critical-state model in superconductivity. *European Journal of Applied Mathematics*, **7**, 237, 1996.
- [122] J. W. Barrett and L. Prigozhin, Sandpiles and superconductors: Dual variational formulations for critical-state problems. *Int Fed Info Proc*, **202**, 25, 2006.
- [123] L. Prigozhin, The Bean model in superconductivity: Variational formulation and numerical solution. *J Comput Phys*, **129**, 190, 1996.
- [124] C. Navau, A. Sanchez, N. Del-Valle, and D. X. Chen, Alternating current susceptibility calculations for thin-film superconductors with regions of different critical-current densities. *J Appl Phys*, **103**, 2008.
- [125] G. Via, N. Del-Valle, A. Sanchez, and C. Navau, Simultaneous magnetic and transport currents in thin film superconductors within the critical-state approximation. *Superconductor Science and Technology*, **28**, 2015.
- [126] 薛峰, 第二类超导体力-磁耦合基本特性的理论研究. 兰州大学博士学位论文, 兰州, 2012.
- [127] F. Xue and Y. H. Zhou, An analytical investigation on singularity of current distribution around a crack in a long cylindrical superconductor. *J Appl Phys*, **107**, 2010.
- [128] O. A. Adami, D. Cerbu, D. Cabosart, M. Motta, J. Cuppens, W. A. Ortiz, *et al.*, Current crowding effects in superconducting corner-shaped Al microstrips. *Appl Phys Lett*, **102**, 2013.
- [129] E. H. Brandt, Determination of currents in flat superconductors. *Phys Rev B*, **46**, 8628, 1992.
- [130] T. Schuster, M. R. Koblishka, B. Ludescher, N. Moser, and H. Kronmüller, EuSe as magneto-optical active coating for use with the high resolution Faraday effect. *Cryogenics*, **31**, 811, 1991.
- [131] T. Schuster, H. Kuhn, E. H. Brandt, M. V. Indenbom, M. Klaser, G. Muller-Vogt, *et al.*, Current and field pattern in rectangular and inhomogeneous superconductors. *Phys Rev B*, **52**, 10375, 1995.
- [132] T. Schuster, H. Kuhn, E. H. Brandt, and S. Klaumunzer, Flux penetration into flat rectangular superconductors with anisotropic critical current. *Phys Rev B*, **56**, 3413, 1997.
- [133] H. Theuss, A. Forkl, and H. Kronmüller, Current-Density and Magnetic-Field Distribution in Hard Thin-Film Superconductors. *Physica C*, **190**, 345, 1992.
- [134] L. A. Dorosinskii, M. V. Indenbom, V. I. Nikitenko, Y. A. Ossip'yan, A. A. Polyanskii, and V. K. Vlasko-Vlasov, Studies of HTSC crystal magnetization features using indicator magneto-optic films with in-plane anisotropy. *Physica C*, **203**, 149, 1992.
- [135] T. H. Johansen, M. Baziljevich, H. Bratsberg, Y. Galperin, P. E. Lindelof, Y. Shen, *et al.*, Direct observation of the current distribution in thin superconducting strips using magneto-optic imaging. *Phys Rev B*, **54**, 16264, 1996.
- [136] M. E. Gaevski, A. V. Bobyl, D. V. Shantsev, Y. M. Galperin, T. H. Johansen, M. Baziljevich, *et al.*, Magneto-optical study of magnetic-flux penetration into a current-carrying high-temperature-superconductor strip. *Phys Rev B*, **59**, 9655, 1999.
- [137] J. R. Clem, Theory of ac losses in type-II superconductors with a field-dependent surface barrier. *J Appl Phys*, **50**, 3518, 1979.
- [138] D. X. Chen and R. B. Goldfarb, Kim Model for Magnetization of Type-II Superconductors. *J Appl Phys*, **66**, 2489, 1989.
- [139] H. Ikuta, K. Kishio, and K. Kitazawa, Critical-State Models for Flux-Pinning-Induced Magnetostriction in Type-II Superconductors. *J Appl Phys*, **76**, 4776, 1994.

- [140] P. O. Hetland, T. H. Johansen, and H. Bratsberg, Magnetization in a generalized critical-state model for type-II superconductors. *Cryogenics*, **36**, 41, 1996.
- [141] E. H. Brandt, Superconductors of finite thickness in a perpendicular magnetic field: Strips and slabs. *Phys Rev B*, **54**, 4246, 1996.
- [142] E. H. Brandt, Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field: II. Nonlinear and linear ac susceptibilities. *Phys Rev B*, **58**, 6523, 1998.
- [143] E. H. Brandt, The flux-line lattice in superconductors. *Reports on Progress in Physics*, **58**, 1465, 1995.
- [144] E. H. Brandt, Electrodynamics of Superconducting Disks. *Physica C*, **235-40**, 2939, 1994.
- [145] J. McDonald and J. R. Clem, Theory of flux penetration into thin films with field-dependent critical current. *Phys Rev B*, **53**, 8643, 1996.
- [146] D. V. Shantsev, M. R. Koblishka, Y. M. Galperin, T. H. Johansen, L. Pust, and M. Jirsa, Central peak position in magnetization loops of high-T-c superconductors. *Physical review letters*, **82**, 2947, 1999.
- [147] D. V. Shantsev, Y. M. Galperin, and T. H. Johansen, Thin superconducting disk with B-dependent $J(c)$: Flux and current distributions. *Phys Rev B*, **60**, 13112, 1999.
- [148] D. V. Shantsev, Y. M. Galperin, and T. H. Johansen, Thin superconducting disk with field-dependent critical current: Magnetization and ac susceptibilities. *Phys Rev B*, **61**, 9699, 2000.
- [149] D. V. Shantsev, Y. M. Galperin, and T. H. Johansen, Magnetic behavior of thin superconducting disks with B-dependent $J(c)$. *Physica C*, **341**, 2045, 2000.
- [150] G. P. Mikitik and E. H. Brandt, Exact solution for the critical state in thin superconductor strips with field-dependent or anisotropic pinning. *Phys Rev B*, **62**, 6812, 2000.
- [151] A. A. B. Brojeny and J. R. Clem, Self-field effects upon the critical current density of flat superconducting strips. *Superconductor Science and Technology*, **18**, 888, 2005.
- [152] 周又和, 郑晓静, 电磁固体结构力学. 北京: 科学出版社, 1999.
- [153] H. Ikuta, N. Hirota, Y. Nakayama, K. Kishio, and K. Kitazawa, Giant magnetostriction in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ single crystal in the superconducting state and its mechanism. *Physical review letters*, **70**, 2166, 1993.
- [154] Y. Ren, R. Weinstein, J. Liu, R. P. Sawh, and C. Foster, Damage caused by magnetic pressure at high trapped field in quasi-permanent magnets composed of melt-textured $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ superconductor. *Physica C*, **251**, 15, 1995.
- [155] T. H. Johansen and D. V. Shantsev, Magnetostrictive behaviour of thin superconducting disks. *Superconductor Science and Technology*, **16**, 1109, 2003.
- [156] V. V. Eremenko, V. A. Sirenko, H. Szymczak, A. Nabialek, and M. A. Balbashov, Magnetostriction of thin flat superconductor in a transverse magnetic field. *Superlattice Microst*, **24**, 221, 1998.
- [157] A. Nabialek, H. Szymczak, V. A. Sirenko, and A. I. D'yachenko, Influence of the real shape of a sample on the pinning induced magnetostriction. *J Appl Phys*, **84**, 3770, 1998.
- [158] T. H. Johansen, J. Lothe, and H. Bratsberg, Shape distortion by irreversible flux-pinning-induced magnetostriction. *Physical review letters*, **80**, 4757, 1998.
- [159] T. H. Johansen, Flux-pinning-induced stress and strain in superconductors: Long rectangular slab. *Phys Rev B*, **59**, 11187, 1999.
- [160] T. H. Johansen, H. Bratsberg, and J. Lothe, Flux-pinning-induced magnetostriction in cylindrical superconductors. *Superconductor Science and Technology*, **11**, 1186, 1998.
- [161] T. H. Johansen, Flux-pinning-induced stress and strain in superconductors: Case of a long circular cylinder. *Phys Rev B*, **60**, 9690, 1999.

- [162] T. H. Johansen, C. Wang, Q. Y. Chen, and W. K. Chu, Enhancement of tensile stress near a hole in superconducting trapped-field magnets. *J Appl Phys*, **88**, 2730, 2000.
- [163] 景泽, 超导材料力-热-电-磁多场环境下的性能分析. 兰州大学博士学位论文, 兰州, 2015.
- [164] 黄晨光, 复杂高温超导结构的交流损耗和力学特性. 兰州大学博士学位论文, 兰州, 2015.
- [165] 苟晓凡, 高温超导悬浮体的静、动力学特性分析. 兰州大学博士学位论文, 兰州, 2004.
- [166] 张兴义, 高温超导悬浮系统在不同条件下的电磁力实验研究. 兰州大学博士学位论文, 兰州, 2008.
- [167] 周军, 高温超导悬浮系统在温度循环和横向移动速度下的电磁力实验研究. 兰州大学博士学位论文, 兰州, 2010.
- [168] H. D. Yong and Y. H. Zhou, Crack Problem for Thin Superconducting Strip in a Perpendicular Magnetic Field. *Ieee T Appl Supercon*, **22**, 2012.
- [169] H. D. Yong and Y. H. Zhou, Stress distribution in a flat superconducting strip with transport current. *J Appl Phys*, **109**, 2011.
- [170] Y. H. Zhou and H. D. Yong, Crack problem for a long rectangular slab of superconductor under an electromagnetic force. *Phys Rev B*, **76**, 094523, 2007.
- [171] 雍华东, 若干先进电磁材料结构的断裂与稳定性等力学特性的理论研究. 兰州大学博士学位论文, 兰州, 2010.
- [172] Z. W. Gao, K. Y. Lee, and Y. H. Zhou, Crack tip shielding and anti-shielding effects of parallel cracks for a superconductor slab under an electromagnetic force. *J Mech Sci Technol*, **26**, 353, 2012.
- [173] 高志文, 高温超导块材在电磁力作用下的断裂特性理论研究. 兰州大学博士学位论文, 兰州, 2008.
- [174] A. He, C. Xue, H. D. Yong, and Y. H. Zhou, Fracture behaviors of thin superconducting films with field-dependent critical current density. *Physica C*, **492**, 25, 2013.
- [175] J. Zeng, H. D. Yong, and Y. H. Zhou, Edge-crack problem in a long cylindrical superconductor. *J Appl Phys*, **109**, 2011.
- [176] 曾军, 高温超导体断裂及磁致伸缩特性理论研究. 兰州大学博士学位论文, 兰州, 2012.
- [177] H. D. Yong, C. Xue, and Y. H. Zhou, Thickness dependence of fracture behaviour in a superconducting strip. *Superconductor Science and Technology*, **26**, 2013.
- [178] X. Wang, H. D. Yong, C. Xue, and Y. H. Zhou, Inclined crack problem in a rectangular slab of superconductor under an electromagnetic force. *J Appl Phys*, **114**, 2013.
- [179] M. F. Kanninen and C. H. Popelar, *Advanced Fracture Mechanics*. New York: Oxford University Press, 1985.
- [180] 王仁, 黄文彬, 黄筑平, 塑性力学引论. 北京: 北京大学出版社, 1992.
- [181] 范天佑, 断裂力学基础. 北京: 科学出版社, 2003.
- [182] W. Ramberg and W. R. Osgood, Description of stress-strain curves by three parameters. *NACA-TN.*, **902**, 1943.
- [183] 王自强, 陈少华, 高等断裂力学. 北京: 科学出版社, 2009.
- [184] E. S. Folias, Fracture in pressure vessels. *Thin shell structures*, **21**, 48, 1974.
- [185] J. M. T. Holt, Uniaxial tension testing. *ASM*, 124, 2000.
- [186] N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue*. Prentice Hall: Upper Sadle River, 1999.
- [187] C. E. Turner and F. M. Burdekin, Review of current status of yielding fracture mechanics. *Atom. Energy Rev.*, **12**, 439, 1974.
- [188] Y. E. Pak and G. Herrmann, Conservation-Laws and the Material Momentum Tensor for the

- Elastic Dielectric. *Int J Eng Sci*, **24**, 1365, 1986.
- [189] R. M. McMeeking, A J-Integral for the Analysis of Electrically Induced Mechanical-Stress at Cracks in Elastic Dielectrics. *Int J Eng Sci*, **28**, 605, 1990.
- [190] R. M. McMeeking, Electrostrictive forces near crack-like flaws. *J. Appl. Math. Phys.*, **40**, 615, 1989.
- [191] S. Li, W. Cao, and L. E. Cross, Stress and electric displacement distribution near Griffith's type III crack tips in piezoceramics. *Mater. Lett.*, **10**, 219, 1990.
- [192] Y. Shindo, E. Ozawa, and J. P. Nowacki, Singular stress and electric fields of a cracked piezoelectric strip. *Appl. Electromag. Mater.*, **1**, 77, 1990.
- [193] H. Sosa, On the fracture mechanics of piezoelectric solids. *Int J Solids Struct*, **29**, 2613, 1992.
- [194] Z. Suo, Models for Breakdown-Resistant Dielectric and Ferroelectric Ceramics. *J Mech Phys Solids*, **41**, 1155, 1993.
- [195] T. Y. Zhang and J. E. Hack, Mode-III Cracks in Piezoelectric Materials. *J Appl Phys*, **71**, 5865, 1992.
- [196] B. Wang, Three-dimensional analysis of a flat elliptical crack in a piezoelectric material. *Int. J. Engng sci.*, **30**, 781, 1992.
- [197] M. L. Dunn, The Effects of Crack Face Boundary-Conditions on the Fracture-Mechanics of Piezoelectric Solids. *Eng Fract Mech*, **48**, 25, 1994.
- [198] S. Kumar and R. N. Singh, Crack propagation in piezoelectric materials under combined mechanical and electrical loadings. *Acta Mater*, **44**, 173, 1996.
- [199] S. R. Winzer, N. Shankar, and A. P. Ritter, Designing cofired multilayer electrostrictive actuators for reliability. *Journal of the American Ceramic Society*, **72**, 2246, 1989.
- [200] A. Furuta and K. Uchino, Dynamic Observation of Crack-Propagation in Piezoelectric Multilayer Actuators. *Journal of the American Ceramic Society*, **76**, 1615, 1993.
- [201] H. T. Chung, B. C. Shin, and H. G. Kim, Grain-Size Dependence of Electrically Induced Microcracking in Ferroelectric Ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*, **72**, 327, 1989.
- [202] B. Liu, D. N. Fang, and K. C. Hwang, Electric-field-induced fatigue crack growth in ferroelectric ceramics. *Materials Letters*, **54**, 442, 2002.
- [203] 毛贯中, 铁电材料的疲劳研究. 清华大学硕士学位论文, 北京, 2005.
- [204] H. Y. Wang and R. N. Singh, Crack propagation in piezoelectric ceramics: Effects of applied electric fields. *J Appl Phys*, **81**, 7471, 1997.
- [205] K. Mehta and A. V. Virkar, Fracture Mechanisms in Ferroelectric - Ferroelastic Lead Zirconate Titanate (Zr: Ti= 0.54: 0.46) Ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*, **73**, 567, 1990.
- [206] J. M. CalderonMoreno, F. Guiu, M. Meredith, and M. J. Reece, Fracture toughness anisotropy of PZT. *Materials Science and Engineering*, **234**, 1062, 1997.
- [207] E. T. Park, J. L. Routbort, Z. Li, and P. Nash, Anisotropic microhardness in single-crystal and polycrystalline BaTiO₃. *J Mater Sci*, **33**, 669, 1998.
- [208] F. Fang and W. Yang, Poling-enhanced fracture resistance of lead zirconate titanate ferroelectric ceramics. *Materials Letters*, **46**, 131, 2000.
- [209] M. H. Zhao and C. Y. Fan, Strip electric-magnetic breakdown model in magnetoelectroelastic medium. *J Mech Phys Solids*, **56**, 3441, 2008.
- [210] C. Y. Fan, M. H. Zhao, and Y. H. Zhou, Numerical solution of polarization saturation/dielectric breakdown model in 2D finite piezoelectric media. *J Mech Phys Solids*, **57**, 1527, 2009.
- [211] T. Y. Zhang, G. N. Liu, and Y. Wang, Failure behavior and failure criterion of conductive cracks (deep notches) in piezoelectric ceramics II: experimental verification. *Acta Mater*, **52**, 2025, 2004.

- [212] V. Loboda, Y. Lapusta, and V. Govorukha, Mechanical and electrical yielding for an electrically insulated crack in an interlayer between piezoelectric materials. *Int J Eng Sci*, **46**, 260, 2008.
- [213] 范翠英, 压电压磁固体断裂理论及数值方法研究. 兰州大学博士学位论文, 兰州, 2010.
- [214] T. H. Hao and Z. Y. Shen, A New Electric Boundary-Condition of Electric Fracture-Mechanics and Its Applications. *Eng Fract Mech*, **47**, 793, 1994.
- [215] T. Y. Zhang, C. F. Qian, and P. Tong, Linear electro-elastic analysis of a cavity or a crack in a piezoelectric material. *International Journal of Solids and Structures*, **35**, 2121, 1998.
- [216] R. Fu, C. F. Qian, and T. Y. Zhang, Electrical fracture toughness for conductive cracks driven by electric fields in piezoelectric materials. *Appl Phys Lett*, **76**, 126, 2000.
- [217] G. R. Irwin, Plastic zone near a crack tip and fracture toughness, in *Proceedings of the Seventh Sagamore Ordnance Material Conference*, 1960, pp. 63.
- [218] W. T. Norris, Calculation of hysteresis losses in hard superconductors carrying ac: isolated conductors and edges of thin sheets. *Journal of Physics D: Applied Physics*, **3**, 489, 1970.
- [219] J. Zhu, J. Mester, J. Lockhart, and J. Turneaure, Critical States in 2d Disk-Shaped Type-II Superconductors in Periodic External Magnetic-Field. *Physica C*, **212**, 216, 1993.
- [220] F. Gomory, Characterization of high-temperature superconductors by AC susceptibility measurements. *Superconductor Science and Technology*, **10**, 523, 1997.
- [221] B. J. Jonsson, K. V. Rao, S. H. Yun, and U. O. Karlsson, Method to extract the critical current density and the flux-creep exponent in high-T-c thin films using ac susceptibility measurements. *Phys Rev B*, **58**, 5862, 1998.
- [222] M. Suenaga, Q. Li, Z. Ye, M. Iwakuma, K. Toyota, F. Funaki, *et al.*, Thickness dependence of ac losses in circular disks of YBa₂Cu₃O₇YBa₂Cu₃O₇ films in perpendicular magnetic fields. *J. Appl. Phys.*, **95**, 208, 2004.
- [223] M. Boekholt, J. V. Harzer, B. Hillebrands, and G. Guntherodt, Determination of the Sound Velocities and the Complete Set of Elastic-Constants for Bi₂Sr₂CaCu₂O_{8+δ} Single-Crystals Using Brillouin Light-Scattering. *Physica C*, **179**, 101, 1991.
- [224] D. Larbalestier, A. Gurevich, D. M. Feldmann, and A. Polyanskii, High-Tc superconducting materials for electric power applications. *Nature*, **414**, 368, 2001.
- [225] S. R. Foltyn, L. Civale, J. L. Macmanus-Driscoll, Q. X. Jia, B. Maiorov, H. Wang, *et al.*, Materials science challenges for high-temperature superconducting wire. *Nature materials*, **6**, 631, 2007.
- [226] A. V. Pan, S. V. Pysarenko, D. Wexler, S. Rubanov, and S. X. Dou, Multilayering and ag-doping for properties and performance enhancement in YBa₂Cu₃O₇ films. *Ieee T Appl Supercon*, **17**, 3585, 2007.
- [227] F. E. Luborsky, R. F. Kwasnick, K. Borst, M. F. Garbaskas, E. L. Hall, and M. J. Curran, Reproducible sputtering and properties of YBaCuO films of various thicknesses. *J. Appl. Phys.*, **64**, 6388, 1988.
- [228] S. R. Foltyn, P. Tiwari, R. C. Dye, M. Q. Le, and X. D. Wu, Pulsed laser deposition of thick YBa₂Cu₃O_{7-δ} films with $J_c \geq 1$ MA/cm². *Appl. Phys. Lett.*, **63**, 1848, 1993.
- [229] S. R. Foltyn, Q. X. Jia, P. N. Arendt, L. Kinder, Y. Fan, and J. F. Smith, Relationship between film thickness and the critical current of YBa₂Cu₃O_{7-δ}-coated conductors. *Appl. Phys. Lett.*, **75**, 3692, 1999.
- [230] W. Jo, T. Ohnishi, J. U. Huh, R. H. Hammond, and M. R. Beasley, Thickness dependence of critical currents and depth-profiling of transport properties in high rate in-situ grown YBa₂Cu₃O_{7-x} films. *Ieee T Appl Supercon*, **13**, 2817, 2003.
- [231] S. I. Kim, A. Gurevich, X. Song, X. Li, W. Zhang, T. Kodenkandath, *et al.*, Mechanisms of weak thickness dependence of the critical current density in strong-pinning ex situ

- metal-organic-deposition-route $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ coated conductors. *Superconductor Science and Technology*, **19**, 968, 2006.
- [232] R. L. S. Emergo, J. Z. Wu, T. Aytug, and D. K. Christen, Thickness dependence of superconducting critical current density in vicinal $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ thick films. *Appl. Phys. Lett.*, **85**, 618, 2004.
- [233] A. O. Ijaduola, J. R. Thompson, R. Feenstra, D. K. Christen, A. A. Gapud, and X. Song, Critical currents of ex situ $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ thin films on rolling assisted biaxially textured substrates: Thickness, field, and temperature dependencies. *Phys Rev B*, **73**, 134502, 2006.
- [234] X. Wang and J. Z. Wu, Effect of temperature and magnetic field on the thickness dependence of the critical current density of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ films. *Phys. Rev. B*, **76**, 184508, 2007.
- [235] A. Sanchez, C. Navau, N. Del-Valle, D. X. Chen, and J. R. Clem, Self-fields in thin superconducting tapes: Implications for the thickness effect in coated conductors. *Appl Phys Lett*, **96**, 2010.
- [236] F. Hengstberger, M. Eisterer, and H. W. Weber, Thickness dependence of the critical current density in superconducting films: A geometrical approach. *Appl Phys Lett*, **96**, 2010.
- [237] S. R. Foltyn, H. Wang, L. Civale, B. Maiorov, and Q. X. Jia, The role of interfacial defects in enhancing the critical current density of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ coatings. *Supercond. Sci. Technol.*, **22**, 125002, 2009.
- [238] V. F. Solovyov, H. J. Wiesmann, and M. Suenaga, Nucleation of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ from precursor films using the barium fluoride process. *Ieee T Appl Supercon*, **15**, 2739, 2005.
- [239] D. M. Feldmann, D. C. Larbalestier, R. Feenstra, A. A. Gapud, J. D. Budai, T. G. Holesinger, *et al.*, Through-thickness superconducting and normal-state transport properties revealed by thinning of thick film ex situ $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ coated conductors. *Appl Phys Lett*, **83**, 3951, 2003.
- [240] S. R. Foltyn, H. Wang, L. Civale, Q. X. Jia, P. N. Arendt, B. Maiorov, *et al.*, Overcoming the barrier to 1000 A/cm width superconducting coatings. *Appl Phys Lett*, **87**, 2005.
- [241] F. Gomory, J. Souc, M. Vojenciak, E. Seiler, B. Klincok, J. M. Ceballos, *et al.*, Predicting AC loss in practical superconductors. *Superconductor Science and Technology*, **19**, S60, 2006.
- [242] F. Gomory, J. Souc, M. Vojenciak, A. K. M. Alamgir, Z. Han, and C. Gu, Reduction of ac transport and magnetization loss of a high- T_c superconducting tape by placing soft ferromagnetic materials at the edges. *Appl Phys Lett*, **90**, 2007.
- [243] F. Gomory and B. Klincok, Self-field critical current of a conductor with an elliptical cross-section. *Superconductor Science and Technology*, **19**, 732, 2006.
- [244] F. Gomory, Improvement of the self-field critical current of a high- T_c superconducting tape by the edge cover from soft ferromagnetic material. *Appl Phys Lett*, **89**, 2006.
- [245] F. Gömöry, M. Vojenčiak, E. Pardo, M. Solovyov, and J. Šouc, AC losses in coated conductors. *Supercond. Sci. Technol.*, **23**, 034012, 2010.
- [246] J. Souc, E. Pardo, M. Vojenciak, and F. Gomory, Theoretical and experimental study of AC loss in high temperature superconductor single pancake coils. *Superconductor Science and Technology*, **22**, 2009.
- [247] M. D. Ainslie, V. M. Rodriguez-Zermeno, Z. Y. Hong, W. J. Yuan, T. J. Flack, and T. A. Coombs, An improved FEM model for computing transport AC loss in coils made of RABiTS YBCO coated conductors for electric machines. *Superconductor Science and Technology*, **24**, 2011.
- [248] N. I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Groningen: P. Noordhoff Ltd., 1963.
- [249] J. D. Eshelby, W. T. Read, and W. Shockley, Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory. *Acta metallurgica*, **1**, 251, 1953.
- [250] A. N. Stroh, Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. *Philosophical magazine*, **3**, 625,

1958.

- [251] D. M. Barnett and J. Lothe, Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators. *Physica Status Solidi*, **67**, 105, 1975.
- [252] D. A. Berlincourt, D. R. Curran, and H. Jaffe, Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers. *Physical Acoustics: Principles and Methods*, **1A**, 247, 1964.
- [253] Y. Mawatari and J. R. Clem, Magnetic-flux penetration and critical currents in superconducting strips with slits. *Physical review letters*, **86**, 2870, 2001.
- [254] Y. Mawatari, Magnetic field distributions around superconducting strips on ferromagnetic substrates. *Phys Rev B*, **77**, 2008.

在学期间的研究成果

一、 发表论文

1. **Cun Xue**, Huadong Yong, and Youhe Zhou. Crack tip field in a linear elastic–plastic strain-hardening material. *International Journal of Solids and Structures*, **49**, 21, 2012.
2. **Cun Xue**, Huadong Yong, and Youhe Zhou. The mechanical crack tip opening displacement fracture criterion in piezoelectric ceramics. *Engineering Fracture Mechanics*, **96**, 606, 2012.
3. **Cun Xue**, An He, Huadong Yong, and Youhe Zhou. Crack tip opening displacement in a linear strain hardening material. *Mechanics of Materials*, **66**, 21, 2013.
4. **Cun Xue**, An He, Huadong Yong, and Youhe Zhou. Magneto-elastic behavior of thin type-II superconducting strip with field dependent critical current. *Journal of Applied Physics*, **113**, 023901, 2013.
5. **Cun Xue**, An He, Huadong Yong, and Youhe Zhou. Field-dependent critical state of high-T_c superconducting strip simultaneously exposed to transport current and perpendicular magnetic field. *AIP Advances*, **3**, 122110, 2013.
6. **Cun Xue**, and Youhe Zhou. The Influence of Geometry on Critical Current in Thin High-T_c superconducting Tape. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, **24**, 8000406, 2014.
7. An He, **Cun Xue**, Huadong Yong, and Youhe Zhou. The guidance of kinematic phase-slip lines in a mesoscopic superconducting strip with artificial defects. *Superconductor Science and Technology* **29**, 065014 (2016) .
8. Huadong Yong, **Cun Xue**, and Youhe Zhou. Thickness dependence of fracture behavior in a superconducting strip. *Superconductor Science and Technology*, **26**, 055003, 2013.
9. An He, **Cun Xue**, Huadong Yong, and Youhe Zhou. Effect of strain on critical magnetic field in type II superconductors. *Journal of Applied Physics*, **112**, 053913, 2012.
10. An He, **Cun Xue**, Huadong Yong, and Youhe Zhou. Influence of soft ferromagnetic substrate on magneto-elastic behavior in a superconducting coated conductor strip. *Journal of Applied Physics*, **114**, 203905, 2013.
11. Xin Wang, Huadong Yong, **Cun Xue**, and Youhe Zhou. Inclined crack problem in a rectangular slab of superconductor under an electromagnetic force. *Journal of Applied Physics*, **114**, 083901, 2013.
12. An He, **Cun Xue**, Huadong Yong, and Youhe Zhou. Fracture behaviors of thin superconducting films with field-dependent critical current density. *Physica C*, **492**, 25, 2013.
13. An He, **Cun Xue**, Huadong Yong, and Youhe Zhou. Effect of soft ferromagnetic substrate on ac loss in 2G HTS power transmission cables consisting of coated conductors. *Superconductor Science and Technology*, **27**, 025004, 2014.
14. Huadong Yong, Penglei Yang, **Cun Xue**, and Youhe Zhou. Fracture behavior of filament in Nb3Sn strands with crack-bridging model. *Fusion Engineering and Design*, **102**, 66, 2016.

15. O. A. Adami, Z. L. Jelic, **Cun Xue**, M. Abdel-Hafiez, B. Hackens, V. V. Moshchalkov, M. V. Milosevic, J. Van de Vondel, and A. V. Silhanek. Onset, evolution, and magnetic braking of vortex lattice instabilities in nanostructured superconducting films. *Physical Review B*, **92**, 134506, 2015.
16. Jun-Yi Ge, V. N. Gladilin, **Cun Xue**, Jacques Tempere, Jozef T. Devreese, Joris Van de Vondel, Youhe Zhou, and Victor V. Moshchalkov. Magnetic Dipoles at Topological Defects in the Meissner state of a Nanostructured Superconductor. *Physical Review B*, **93**, 224502, 2016.
17. **Cun Xue**, An He, Huadong Yong, and Youhe Zhou. Fracture problem of the thin superconducting strip with transverse crack. *13th International Conference on Fracture*, June 16–21, 2013, Beijing.
18. 薛存, 周又和, 雍华东. 压电材料反平面 III 型裂纹电塑性区的分析. *固体力学学报*, **33**, 1, 2012.
19. 薛存, 王记增, 周又和. 外加电场对声波穿透压电固体介质的影响. *中国科技论文在线*
20. 薛存, 雍华东, 周又和. 压电材料断裂准则—机械张开位移. *第十六届全国疲劳与断裂学术会议*, 11 月 2-5, 2012, 厦门.

二、参与课题

1. 国家自然科学基金重点项目 超导电-磁-热-力多场耦合非线性力学的基础理论与实验研究 11032006
2. 国家自然科学基金创新研究群体 复杂环境与介质相互作用的非线性力学: 11121202
3. 国家磁约束核聚变能发展重点工程项目 (ITER 专项): 2013GB110002
4. 国家自然科学基金 超导薄膜基底结构中关键力学问题的基础研究: 11202087
5. 高等学校博士学科点专项科研基金: 20110211120027

致 谢

时光荏苒，六年的研究生学习和生活马上就快结束。在邻近毕业之时，回想过去这六年的学习和生活，脑海总会浮想曾经的点点滴滴。相比六年前大学毕业，少了一些年少轻狂，多了一些成熟稳重。经过几年的科研训练，心里更加坚定，知识的积累和科研的收获那是经过一番努力后的水到渠成，是熬过寒冬见花开，而不是‘忽如一夜春风来’。一路走来，很多人给了我指点和帮助，在博士论文完成之际，在此向他们表达衷心的感谢。

首先最需要感谢的是我的导师周又和教授，感谢他多年来在研究和学习上给我的悉心指导，感谢他多年来在生活上的帮助。周老师精心营造的科研平台和学术氛围为我们的研究探索提供了保障。当我在学术研究上遇到困难停滞不前时，想到周老师多年如一日，在中国西部较偏僻的地方取得这么好的学术成就，在无形之中给了我前进的力量。多年来周老师在学术上孜孜不倦的精神和在研究上一丝不苟的态度也一直影响着我的学习和研究，是我一生学习的榜样，必将在今后的学术研究上不断激励着我前进。祝周老师身体健康，全家幸福！

其次，特别感谢兰州大学力学系郑晓静教授，王省哲教授、高原文教授、王记增教授、武建军教授、张兴义教授、武生智教授以及谢莉教授和周俊副教授，在求学和科研训练的道路上，他们精彩的学术报告和对基本知识的讲解让我受益匪浅。另外，特别感谢雍华东师兄在学术研究上的指引和帮助，他广泛的科研视角、对相关科学问题的精准把握以及高效率的研究方式一直引领我们不断前行。

我要感谢梁永永、张永飞、王天忠、薛峰、曾军、赵沛、朱纪跃、王晓敏、何新振等各位师兄师姐曾经在学习和研究上给我的帮助。感谢黄晨光、景泽、李桂宣、刘墨宇等大学同学的帮助和陪伴。感谢黄毅、张磊、夏劲、高世卿、王新、刘伟、岳动华、黄维和 515 室各位师弟丰富多彩的讨论。

另外，我还要感谢国家公派留学期间我的指导老师 Joris Van de Vondel 教授和 A.V. Silhanek 教授在学术上的指导，让我获益良多。感谢葛军饴、陈先梅、高鹏等人在学习和生活上的帮助。感谢 Vyacheslav、Jeroen、Matias 和 Obaid 等人的热情讨论。感谢在比利时度过的难忘岁月。

最后，特别感谢我的爷爷、父母、姐姐、妹妹等家人和女友何安一路的陪伴和支持，感谢他们背后默默的付出和鼓励。

薛存

2015 年 5 月 14 日