电子科技大学

2006 年攻读硕士学位研究生入学试题参考解答

考试科目：313　数学分析

一、1. $e^{\frac{1}{2}}$；　　2. 1；　　3. $x-2y=0$；　　4. $\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$；

5. $-\dfrac{1}{4}\ln|1-2e^{x^2}|+C$；　　6. $\dfrac{\pi^2}{4}$；　　7. $4-\dfrac{\pi}{2}$；　　8. π.

二、证：作辅助函数 $F(x)=f(x)\ln x$，$F(x)$ 在 $[1,2]$ 满足 Rolle 定理条件，$\exists\xi\in(1,2)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)\ln\xi+\dfrac{f(\xi)}{\xi}=0$，亦即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)\ln\xi=0$.

三、证：$\forall x_0\in[a,b]$，由已知 $\exists M_{x_0}$，当 $x\in O(x_0,\delta_{x_0})$，有

$|f(x)|\le M_{x_0}$，$\bigcup\limits_{x_0\in[a,b]}O(x_0,\delta_{x_0})\supset[a,b]$，由有限覆盖定理，$\exists$ 有限个区间 $O(x_i,\delta_{x_i}),i=1\sim l$，

覆盖 $[a,b]$ 且 $\forall x\in O(x_i,\delta_{x_i})$ 有 $|f(x)|\le M_{x_i},i=1\sim l$，取 $M=\max\limits_{1\le i\le l}\{M_{x_i}\}$ 则对 $\forall\ x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|\le M$.

注：也可用闭区间套定理或致密性定理反证.

四、解：$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\int_0^{2\pi}2a\sin\dfrac{\theta}{2}d\theta=8a$.

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(2\sin^2\frac{\theta}{2})^2d\theta=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

五、解：（1）平方可积不能保证绝对收敛，例如：$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 不绝对收敛.

绝对收敛不能保证平方可积，例如：$f(x)=\begin{cases}n+1,\ x\in\left[n,n+\dfrac{1}{n(n+1)^2}\right]\\0\ \ ,\ 其他\end{cases}$ $n=1,2,\cdots$.

$\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛于 1，但 $\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$ 发散.

（2）由 $|f(x)|\le\dfrac{1}{2}\ [1+f^2(x)]$，由比较判别法可知 $\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛，保证 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛，但 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛不够保证 $\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛，例如：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，有 $\int_0^1 f(x)dx$ 绝对收

敛，但$\int_0^1 f^2(x)dx$发散.

六、证：记$G(x,y,z)=F(ax-by,cx-bz)$，则$\frac{\partial G}{\partial x}=aF_1+cF_2$，$\frac{\partial G}{\partial y}=-bF_1$，$\frac{\partial G}{\partial Z}=-bF_2$，曲面$\sum$：$G(x,y,z)=0$上任一点法向量$\vec{n}=(aF_1+cF_2,-bF_1,-bF_2)$，$\vec{n}$与某向量$\vec{l}=(l_1,l_2,l_3)$垂直$\Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{l}=0$，取$\vec{l}=(b,a,c)$即可，故$\sum$上任一点切平面与向量$\vec{l}=(b,a,c)$平行.

七、解：收敛域$(-\infty,+\infty)$，和函数记为$S(x)$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n^2}{n!2^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!2^n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!2^n}x^n=S_1(x)+S_2(x).$$

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x}{2})^n=e^{\frac{x}{2}},\ S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}(\frac{x}{2})^n \underline{\underline{\text{记}t=\frac{x}{2}}} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt^n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)t^{n+1}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}t^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}t=t^2e^t+te^t=(t^2+t)e^t.$$

故$S(x)=S_1(x)+S_2(x)=(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1)e^{\frac{x}{2}}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n^2}{n!}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+n^2}{n!2^n}x^n\right)_{|x=2}=3e.$$

八、解：$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\triangleq\int_0^{+\infty}f(x,\alpha)dx$

其中$f(x,\alpha)=\begin{cases}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

显然，$f(x,\alpha)$与$f_\alpha(x,\alpha)=-e^{-\alpha x}\sin x$都在$[0,+\infty)\times[0,+\infty)$上连续，由 Abel 判别法知通$I(\alpha)$关于$\alpha\geq 0$一致收敛，$I(\alpha)$在$[0,+\infty)$连续，所求$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=I(0)=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}I(\alpha)$.

对$\forall\alpha_0>0$由 Weierstrass 判别法$\int_0^{+\infty}f_\alpha(x,\alpha)dx$在$\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$上一致收敛，

$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin xdx=-\frac{1}{1+\alpha^2}$ $\qquad I(\alpha)=-\arctan\alpha+C$

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}I(\alpha)=0$，得$C=\frac{\pi}{2}$，故$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}-\arctan\alpha$

从而$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

九、解：利用广义球坐标代入曲面方程，得曲面参数方程为

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\sin\varphi\sin\theta \\ z = C\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)} = bc\sin^2\varphi\cos\theta \\ \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)} = ac\sin^2\varphi\sin\theta \\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)} = ab\sin\varphi\cos\varphi \end{array}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Sigma x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy \\ &= \iint\limits_{\substack{0\le\theta\le2\pi \\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}} (a^3bc\sin^5\varphi\cos^4\theta + b^3ac\sin^5\varphi\sin^4\theta + c^3ab\sin\varphi\cos^4\varphi)d\varphi d\theta \\ &= abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\pi}(a^2\sin^5\varphi\cos^4\theta + b^2\sin^5\varphi\sin^4\theta + c^2\sin\varphi\cos^4\varphi)d\theta \\ &= \frac{2}{5}\pi abc(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$

十、解：易求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = 0,\ \ x\in[0,+\infty)$，

$\forall n\in N$，令 $S_n'(x) = \dfrac{(\ln n)^{\alpha+1}}{n^x}(\dfrac{1}{\ln n} - x) = 0,\ \ x = \dfrac{1}{\ln n}$

当 $x < \dfrac{1}{\ln n}$ 时，$S_n'(x) > 0,\ S_n(x)\nearrow$；当 $x > \dfrac{1}{\ln n}$ 时，$S_n'(x) < 0,\ S_n(x)\searrow$

函数 $S_n(x)$ 在 $x = \dfrac{1}{\ln n}$ 处取最大值.

$\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} |S_n(x) - S(x)| = S_n(\dfrac{1}{\ln n}) = \dfrac{1}{e}(\ln n)^{\alpha-1}$

当 $\alpha - 1 < 0, \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} |S_n(x) - S(x)| = 0$，

当 $\alpha - 1 \ge 0, \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} |S_n(x) - S(x)| \ne 0$

故当 $\alpha < 1$ 时，函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛，$\alpha \ge 1$ 时，函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 非一致收敛.

十一、解：曲面 $z = e^{-x^2-y^2+2y-1}$ 与平面 $z = \dfrac{1}{e}$ 的交线为：$\begin{cases} z = \dfrac{1}{e} \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

从而所围立体在 xoy 面上的投影 D 为：$x^2 + (y-1)^2 \le 1$，

所求体积

$$V=\iint_D (e^{-x^2-y^2+2y-1}-\frac{1}{e})dxdy\text{，}\qquad \text{令}\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=1+r\sin\theta\end{cases}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}rar-\frac{\pi}{e}=\pi(1-\frac{2}{e})$$

十二、解：$f(x)$在(a,b)一致连续，事实上，可定义函数

$F(x)=\begin{cases}-1, & x=a\\ f(x), & x\in(a,b)\\ 1, & x=b\end{cases}$，则$F(x)$在$[a,b]$连续，从而在$[a,b]$一致连续，故$f(x)$在$(a,b)$一致连续.