A Thesis in Fundamental Mathematics

The Existence of Solutions about Two Classes of Nonlinear Ordinary Differential Equations

By Fan Gehua

Supervisor: Associate Professor Sun Tao

Northeastern University

May 2008

独创性声明

本人声明，所呈交的学位论文是在导师的指导下完成的。论文中取得的研究成果除加以标注和致谢的地方外，不包含其他人己经发表或撰写过的研究成果，也不包括本人为获得其他学位而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均己在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：范栖年

日　期：

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者和指导教师完全了解东北大学有关保留、使用学位论文的规定：即学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人同意东北大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索、交流。

作者和导师同意网上交流的时间为作者获得学位后：

半年 □　　一年 □　　一年半 □　　两年 □

学位论文作者签名：范栖年　　导师签名：

签字日期:　　签字日期: 2008.7.7

两类非线性常微分方程解的存在性

摘　要

自然科学的许多领域都提出了大量的微分方程问题，在解决实际问题时，通常可以根据实际问题建立数学模型，也就是建立反映这个实际问题的微分方程，然后求解这个微分方程，用所得的数学结果来解释问题，以便达到解决实际问题的目的. 本文主要讨论了两类微分方程解的存在性.

第一部分运用泛函分析理论中的不动点指数理论，在与相应线性算子本征值的有关条件下讨论了奇异半正$(k,n-k)$多点边值问题

$$(-1)^{n-k}\varphi^{n}(x)=h(x)f(\varphi(x)),0<x<1,n\geq 2,1\leq k\leq n-1,$$

分别在边值条件

$$\varphi(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i),\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1)=0,1\leq i\leq k-1,0\leq j\leq n-k-1;$$

$$\varphi(1)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i),\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1)=0,0\leq i\leq k-1,1\leq j\leq n-k-1$$

下非平凡解的存在性结果，其中$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$, $a_i\in[0,+\infty)$，并且允许$h(x)$在$x=0$和$x=1$奇异.

第二部分运用非线性泛函分析中半序 Banach 空间的锥理论和不动点指数理论得到了一类多时滞泛函微分方程

$$y'(t)=-a(t,y(t))y(t)+h(t,y(t))f(t,y(t-\tau_1(t)),\cdots,y(t-\tau_m(t)))$$

周期正解存在性的充分条件，其中

$a,\ h\in C(\mathrm{R}\times\mathrm{R},\mathrm{R})$；$a(t+\omega,y)=a(t,y)$；$h(t+\omega,y)=h(t,y)$；$\tau(t+\omega)=\tau(t)$；

$f\in C([0,\infty),[0,\infty))$；$f(u)=0$当且仅当$u=\theta$；$\tau\in C(\mathrm{R},\mathrm{R})$；$\lambda,\omega>0$.

关键词：奇异；时滞；不动点指数；非平凡解；周期正解

The Existence of Solutions about Two Classes of Nonlinear Ordinary Differential Equations

Abstract

Various kinds of problems about differential equation have been mentioned in many fields of nature science. We usually set up mathematical models which depend on actual problems when solving them. In an other word, a differential equation which reflects this actual problem has been formed. Then we interpret the actual problems with the solutions of the equation and solve the actual problems. The main purpose of this article is to study the existence of the solution of two kinds of differential equations.

The first section, by means of the fixed point index theory under some conditions concerning the eigenvalues corresponding to the relevant linear operator, the existence is obtained in this paper for the multi-point boundary value problem of the higher order $(k,n-k)$ differential equation

$$(-1)^{n-k}\varphi^{n}(x)=h(x)f(\varphi(x)),0<x<1,n\geq 2,1\leq k\leq n-1,$$

subject to the boundary value conditions

$$\varphi(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i),\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1)=0,1\leq i\leq k-1,0\leq j\leq n-k-1;$$

$$\varphi(1)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i),\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1)=0,0\leq i\leq k-1,1\leq j\leq n-k-1$$

respectively, where $0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$, $a_i\in[0,+\infty)$, and $h(x)$ is allowed to be singular at $x=0$ and $x=1$.

The second section, by cone theory and fixed point index theory in semi-order Banach space of nonlinear functional analysis, the sufficient and necessary condition of the existence of periodic positive solution is obtained in this paper for one kind of multiple time-delay functional differential equation

$$y'(t)=-a(t,y(t))y(t)+h(t,y(t))f(t,y(t-\tau_1(t)),\cdots,y(t-\tau_m(t)))$$

respectively, where

$$a,\ h \in C(\mathrm{R}\times\mathrm{R},\mathrm{R})\ ;\ \ a(t+\omega,y)=a(t,y)\ ;\ \ h(t+\omega,y)=h(t,y)\ ;\ \ \tau(t+\omega)=\tau(t);$$

$$f \in C([0,\infty),[0,\infty))\ ;\ \ f(u)=0 \text{ only when } u=\theta\ ;\ \ \tau\in C(\mathrm{R},\mathrm{R})\ ;\ \ \lambda,\ \omega>0.$$

Key words: singular; time-delay; fixed point index; nontrivial solution; periodic positive solution

目 录

第 1 章 绪论

1.1 研究的背景和现状

泛函分析是现代数学中的一个重要分支, 它起源于经典数学物理中的变分问题和边值问题, 概括了经典数学分析、函数论中的某些重要概念、问题和成果, 又受到量子物理学、现代工程技术和现代力学的有力刺激. 它综合地运用分析的、代数的和几何的观点和方法, 研究分析数学、现代物理和现代工程技术提出的许多问题. 从上世纪中叶开始, 偏微分方程理论, 概率论(特别是随机过程理论)以及一部分计算数学, 由于运用了泛函分析而得到了大发展. 现在, 泛函分析的概念和方法已经渗透到现代纯粹与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支, 如微分方程、概率论、计算数学、量子场论、统计物理学、抽象调和分析、现代控制理论、大范围微分几何学等方面. 现在泛函分析对纯粹与应用数学的影响, 就好像上世纪初叶集论、点集论对后来数学的影响一样. 同时泛函分析本身也不断地深入发展, 例如算子谱理论以及各种表示理论已经达到相当深入的程度.

20 世纪以来, 泛函分析逐渐成为研究常微分方程边值问题的重要理论基础. 事实上, 常微分运算和积分运算的共同特征是, 它们作用到一个函数后都得出新的函数, 可以将这些运算统一抽象为算子. 泛函分析正是在算子概念的基础上发展起来的. 30 年代中期法国数学家勒雷(J Leray)和绍德尔(J Schauder)建立了 Leray-Schauder 度理论[1,2]. 他们的方法用于研究线性微分、积分、泛函方程时, 取得了巨大成功. 尤其是这种理论对常微分方程边值问题的应用, 形成了常微分方程拓扑方法或泛函分析方法[3,4]. 其核心是各类不动点定理的建立和应用. 在泛函分析理论以及实际问题的推动下, 常微分方程边值问题的研究在近半个世纪里发展十分迅速. 除了传统的二阶常微分方程两点边值问题之外, 开始研究高阶微分方程边值问题[5,6]. 并且随着新问题的出现, 形成了许多新的研究方向.

首先是奇异边值问题.

1927 年托马斯[7] (L H Thomas)和费米[8] (E Fermi)为确定原子中的电动势独立导出了二阶常微分方程的奇性边值问题

$$\begin{cases} x'' - t^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = 0, \\ x(0) = 1,\ x(b) = 0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

这里所说的奇性，是指 $\lim\limits_{t\to 0+} x''(t) = \lim\limits_{t\to 0+} t^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}(t) = \infty$. 之后对这类边值问题的研究形成了有其独特方法的研究方向，即是奇异边值问题[9,10].

其次是无穷区间上的边值问题.

最早的例子是由基德(R E Kider)[11]给出. 设半无穷多孔介质在起始时刻 $t=0$ 时充满压力为 P_0 的气体，此时在流出面上的压力突然由 P_0 减到 P_1 且以后一直保持 P_1 压力，这样气体就在介质中产生非稳态流. 对于从 $x=0$ 延伸至 $x=\infty$ 的一维介质，压力与位置及时间的关系为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial P}{\partial x}\right) = A\frac{\partial P}{\partial t}, \tag{1.1.2}$$

其中 A 是由介质性质确定的常数，压力应满足的初值条件为

$$\begin{cases} P(x,0) = P_0,\ \ 0 < x < \infty, \\ P(0,t) = P_1,\ \ 0 < t < \infty, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

引进度量 $z = \frac{x}{\sqrt{t}}\left(\frac{A}{4P_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ 及量纲一变量

$$W(z) = \alpha^{-1}\left(1 - \frac{P^2(x)}{P_0^2}\right), \tag{1.1.4}$$

其中 $\alpha = 1 - \frac{P_1^2(x)}{P_0^2}$，就得出无穷区间上的边值问题

$$\begin{cases} W'' + \dfrac{2z}{\left(1-\alpha W^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} W' = 0, \\ W(0) = 1, \qquad W(\infty) = 0, \end{cases} \tag{1.1.5}$$

对这类问题的一系列研究，形成了无穷区间上的边值问题[12].

带 P-Laplace 算子或 Laplace-like（拉普拉斯型）算子的微分方程边值问题是二阶微分方程边值问题的推广. 这类问题产生于非牛顿流体理论和多孔介质中气体的湍流理论，

最早提出的模型是

$$\left(\Phi_P\left(u'\right)\right)' = q(t) f\left(t, u, u'\right), \tag{1.1.6}$$

及边界条件

$$u(0) = a, \quad u(1) = b, \tag{1.1.7}$$

或

$$u'(0) = a, \quad u(1) = b, \tag{1.1.8}$$

其中 $\Phi_P(s) = |s|^{p-2}$, $(p > 1)$ 称为 P-拉普拉斯算子(P-Laplacian Operator)或拟线性算子(Quasilinear Operator). 智利数学家较早地研究了此类边值问题, 并很快引起数学界的重视, 取得了一系列研究结果, 成为一个经久不衰的研究热点.

经典的二阶常微分方程边值问题, 无论是周期边界条件还是 Sturm-Liouville 边界条件, 定解条件都是在给定区间的两端施加限制. 鉴于边界条件的离散化, 从 20 世纪 80 年代中期开始研究二阶常微分方程的多点边值问题, 也就是所给的两个定解条件涉及端点间其他点上的函数值, 例如

$$\begin{cases} u'' + f\left(t, u, u'\right) = 0, \\ u(0) = u(1) - \alpha u(\xi) = 0, \end{cases} \tag{1.1.9}$$

就是一个二阶常微分方程的三点边值问题. 以此类推就有四点边值问题, n 点边值问题. 常微分方程多点边值问题也常被称为常微分方程非局部边值问题.

与此同时, 常微分方程的脉冲效应也引起了人们的重视, 这种脉冲效应造成微分方程瞬时改变, 因此可以认为是微分方程和差分方程的相互结合. 保加利亚数学家对此作了大量的研究. 在常微分方程边值问题中结合脉冲效应, 就得到常微分方程脉冲边值问题, 例如

$$\begin{cases} x'' + f\left(t, x, x'\right) = 0, \quad t \neq t_k, k = 1, 2, \cdots, m, \\ \Delta x(t_k) = J_k\left(x\left(t_k, x'(t_k)\right)\right), \\ \Delta x'(t_k) = J_k\left(x\left(t_k, x'(t_k)\right)\right), \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{1.1.10}$$

其中 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < 1$. 在这类边值问题中, 脉冲周期边值问题研究得也比较早也比较充分. 除了以上提到的研究方向外, 在方程中引进时滞边值问题, 边界条件为相关点

上函数的非线性约束情况都有一系列研究工作.

常微分方程作为数学中一个古老而又重要的分支已有悠久的历史, 而且继续保持着进一步发展的活力, 其主要原因是它在自然科学以及现代工程技术科学, 例如物理学、化学、现代力学、生物学、医学、自动控制、电子技术和机械设计等领域中都有着广泛的应用, 同样在社会科学的一些领域里也存在着微分方程的问题. 通常我们可以根据实际问题建立数学模型, 也就是建立反映这个实际问题的微分方程. 然后求解这个微分方程, 用所得的数学结果来解决实际问题, 以便达到能动地改造世界的目的.

1750 年 Euler 提出了一个古典的几何学问题: 是否存在一种曲线, 它经过平移、旋转运动以后能与其渐缩线(对于两条正则对应曲线 C 和 C^*, 若它们在对应点总有垂直的切线, 并且对应切线的交点位于 C^*的对应点之上, 则称曲线 C 为曲线 C^*的一条渐缩线)重合? 1771 年, Condorcet 讨论这个问题, 导出了已知的历史上第一个泛函微分方程. 至今已过去两个多世纪了, 但是系统研究工作却是在二十世纪五十年代才开始的. 近年来, 常微分方程解的存在性问题受到广泛关注, 一些学者应用拓扑度理论、半序方法以及临界点理论获得了常微分方程多个解的存在性以及对各解存在区域的估计; 在方程右端不具有连续性的情况下以及在方程具有反向的上解和下解的情况下, 讨论常微分方程解的存在性问题; 在利用不动点理论以及单调迭代法来研究脉冲微分方程最大解和最小解的存在性以及迭代求解法; 利用跌合度理论求解常微分方程边值问题; 利用非线性泛函分析理论中不动点指数理论、Lyapunov 泛函方法、Lerary-Schauder 不动点方法以及非线性泛函分析理论中的锥拉伸与锥压缩不动点方法研究微分方程多点边值问题的正解的存在性与多解性时, 取得了很好的结果.

自然科学方面提出了大量的滞动力学系统问题, 如核物理学、电路信号系统、生态系统、遗传问题、流行病学等; 社会科学方面主要是各种经济现象时滞的描述, 如商业销售问题、财富分配理论、运输调度等问题.

在动力学系统中, 时滞(时间的延迟, 时间的滞后现象, 可用时滞微分方程、时滞微分一积分方程或差分方程描述, 即使有很小的时滞量, 也会导致与无时滞的情形截然不同的结果) 是不可避免的. 在这个意义下, 常微分方程组

$$\dot{x}(t) = f(t,x),\ x \in R^n,$$

只是动力学系统中一种近似描述. 很多情况下略去滞量便达不到必要的精确度甚至导致结论的错误, 因此这些问题是常微分方程所不能解决的, 这迫切地就需要建立一种新的

模型来讨论它，因而产生了泛函微分方程——Functional Differential Equation，缩写为FDE.

正是由于这些极其广泛的应用课题的推动，使泛函微分方程的研究取得了实质性的、全面的进展.

1.2 泛函微分方程的分型简介

1. 滞后型泛函微分方程：要决定一个状态的未来，不仅要确定这个状态现在瞬间的值，而且要顾及过去的历史情况. 这类动力学系统叫做滞后型泛函微分方程，略记为RFDE (Retarded Functional Differential Equations).

具体形式如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t D_{i,j}(t-s)x_j(s-t)ds=0,\ i=1,2,\cdots n,\ j=1,2,\cdots n, \\ \dot{x}_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t D_{i,j}(t-s)x_j(s-t)ds=f_i,\ i=1,2,\cdots n,\ j=1,2,\cdots n, \end{cases}$$

满足初始条件 $X(s):\Phi(s),\left(s\in[-t,0]\right)$.

2. 超前型泛函微分方程：简单的说就是确定了未来某一时间区间里的计划值，讨论在此之前（从现在的瞬间到这区间的左端点）的状态应如何取值才符合动力系统的规律，这类系统叫做超前型泛函微分方程，略记为AFDE (Advanced Functional Differential Equations).

具体形式如下：$\frac{d}{dt}D(t,x_t)=f(t,x_t)$，$D$在0处不是原子的.

3. 中立型泛函微分方程，因为它的特征根既不象滞后型方程那样散布在某直线的左半平面上，也不象超前型方程那样散布在某直线的右半平面上，而是分布在两平行直线之间，因此叫做中立型泛函微分方程，略记为NFDE（Neutral Functional Differential Equations）.

1.3 本文结果

本文主要对两类非线性常微分方程解的存在性进行研究，结果有两个：

首先，运用泛函分析理论中的不动点指数理论，在与相应线性算子特征值的有关条件下，讨论了奇异半正$(k,n-k)$多点边值问题

$$(-1)^{n-k}\varphi^{n}(x)=h(x)f(\varphi(x)),0<x<1,n\geq 2,1\leq k\leq n-1,$$

分别在边值条件

$$\varphi(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i),\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1)=0,1\leq i\leq k-1,0\leq j\leq n-k-1;$$

$$\varphi(1)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i),\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1)=0,0\leq i\leq k-1,1\leq j\leq n-k-1$$

下非平凡解存在性的充分条件，其中 $0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$, $a_i\in[0,+\infty)$，并且允许 $h(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 奇异.

其次，运用非线性泛函分析中半序 Banach 空间的锥理论和不动点指数理论得到了一类多时滞泛函微分方程

$$y'(t)=-a(t,y(t))y(t)+h(t,y(t))f\left(t,y(t-\tau_1(t)),\cdots,y(t-\tau_m(t))\right),$$

周期正解存在性的充分条件，其中

$a,\ h\in C(\mathrm{R}\times\mathrm{R},\mathrm{R})$；$a(t+\omega,y)=a(t,y)$；$h(t+\omega,y)=h(t,y)$；$\tau(t+\omega)=\tau(t)$；

$f\in C([0,\infty),[0,\infty))$；$f(u)=0$ 当且仅当 $u=\theta$；$\tau\in C(\mathrm{R},\mathrm{R})$；$\lambda,\omega>0$.

第2章 预备知识

首先给出与泛函分析有关的基本概念和结论.

定义 2.1[13] 设 R 是实(或复)数域 F 上的一个线性空间. 如果 R 上的实值函数 $p(\cdot)$ 满足下列条件:

1. $p(x)\geq 0,\ x\in R$;

2. $p(\alpha x)=|\alpha|\,p(x),\ x\in R,\ \alpha\in F$;

3. $p(x+y)\leq p(x)+p(y),\ x,y\in R$;

则称 $p(x)$ 是 x 的半范数或称为拟范数.

如果半范数 $p(x)$ 又满足如下条件:

4. 如果 $p(x)=0$, 那么 $x=0$,

便称 $p(x)$ 是 x 的范数, 通常也记 x 的范数为 $\|x\|$, 而且 R 按这个范数 $\|\cdot\|$ 称为赋范线性空间, 简称为赋范空间.

定义 2.2[13] 如果度量空间 R 中每个基本点列都收敛, 称 R 是完备(度量)空间. 完备赋范线性空间又称为巴拿赫空间(Banach space).

在C[0,1]中，按照通常函数的线性运算定义加法以及数乘, 则 $C[0,1]$ 成为一个线性空间. 对 $\forall\varphi\in C[0,1]$, 定义范数

$$\|\varphi\|=\max_{0\leq x\leq 1}|\varphi(x)|, \tag{2.1}$$

则 $C[0,1]$ 就成为一个Banach空间. 在Banach空间 $C[0,1]$ 中, 一阶连续可微函数的全体记为 $C^1[0,1]$, 二阶连续可微函数的全体记为 $C^2[0,1]$.

定义 2.3[14] 设 E 是实Banach空间, 如果 P 是 E 中某非空凸闭集, 并且满足下面两个条件:

(i) $x\in P, \lambda\geq 0\Rightarrow \lambda x\in P$;

(ii) $x \in P$, $-x \in P \Rightarrow x=\theta$, θ表E中零元素,

则称P是E中的一个锥.

定义 2.4[15] 用$\dot{P}$表示P的内点集, 如果$\dot{P} \neq \Phi$（Φ为空集）, 则称P是一个体锥.

注：给定 E 中一个锥 P 后, 则可在 E 中引入半序, 即对任意的$x,y \in E$, 如果 $y-x \in P$, 则记$x \leq y$; 如果$x \leq y$, 并且$x \neq y$, 则记$x<y$.

定义 2.5[15] 如果存在$\delta>0$, 使得当$\|x_1\|=\|x_2\|=1$, $x_1 \in P$, $x_2 \in P$时, 恒有 $\|x_1+x_2\| \geq \delta$, 则称锥P是正规锥.

定义 2.6[15] 设E_1和E_2是两个 Banach 空间, $D \subset E_1$, 算子$A:D \to E_2$, 若A将D中任何有界集S映成E_2中的列紧集$A(S)$(即$A(S)$是相对紧集, 也就是它的闭包$\overline{A(S)}$是E_2中的紧集), 则称A是映D入E_2的紧算子.

定义 2.7[15] 设E是一个拓扑空间, $X \subset E$, 若存在连续算子$r:E \to X$, 使当$x \in X$时, 恒有$r(x)=x$, 则称X是E的一个收缩核, 算子r称为是一个保核收缩.

定义 2.8[15] 若算子$A:D \to E_2$是连续的, 而且又是紧的, 则称A是映D入E_2的全连续算子.

引理 2.1[15] 若$k(x,y,u)$在$(x,y) \in G \times G, -\infty<u<+\infty$上连续, 那么对于算子 $K:(K\varphi)(x)=\int_G k(x,y,\varphi(y))dy, K:C(G) \to C(G)$全连续.

引理 2.2[15] 设$A_n:D \to E_2$全连续$(n=1,2,\cdots\cdots)$, $A:D \to E_2$, 如果对于 D 中任何有界集S, 当$n \to +\infty$时, $\|A_n x-Ax\|$都一致趋于零(关于$x \in S$), 则$A:D \to E_2$全连续.

引理 2.3[15] 设X是实 Banach 空间E中的一个收缩核, 对于X中的每个有界开集 $U \subset X$, 设$A:\overline{U} \to X$全连续且在∂U上没有不动点(即$Ax \neq x$), 其中$\overline{U}$和∂U分别是相对于X的闭包和边界, 则存在整数$i(A,U,X)$, 称为A在U上关于X的不动点指数.

并且该不动点指数$i(A,U,X)$满足下列条件:

① 正规性：若$A:\overline{U} \to U$是常算子, 则

$$i(A,U,X)=1.$$

② 可加性：若U_1与U_2是 U 的互不相交的子集，关于 X 都是开集，并且 A 在$\bar{U}\setminus(U_1\cup U_2)$上没有不动点，则

$$i(A,U,X)=i(A,U_1,X)+i(A,U_2,X),$$

这里：$i(A,U_K,X)=i\left(A|_{\bar{U}_K},U_K,X\right)$，$k=1,2$.

③ 同伦不变性：设 $H:[0,1]\times\bar{U}\to X$ 全连续，使当$(t,x)\in[0,1]\times\partial U$ 时，恒有$H(t,x)\neq x$，则$i(H(t,\cdot),U,X)$与 t 无关.

④ 保持性：若 Y 是 X 一个收缩核. $A(\bar{U})\subset Y$，则

$$i(A,U,X)=i(A,U\cap Y,Y),$$

这里：$i(A,U\cap Y,X)=i\left(A|_{\bar{U}\cap\bar{Y}},U\cap Y,Y\right)$.

⑤ 切除性：若 V 关于 X 开集，$V\subset U$，且 A 在$\bar{U}\setminus V$ 上没有不动点，则

$$i(A,U,X)=i(A,V,X).$$

⑥ 可解性：若$i(A,U,X)\neq 0$，则 A 在 U 中至少有一个不动点.

引理 2.4[15] (Leray-Schauder 不动点定理)

设 $A:E\to E$ 全连续. 如果集合$\{\|x\|:x\in E,\ x=\lambda Ax,\ 0<\lambda<1\}$是有界的，则 A 在 E 中的闭球T中必有不动点，这里

$$T=\{x\mid x\in E,\ \|x\|<R\},\quad R=\sup\{\|x\|:x=\lambda Ax,\ 0<\lambda<1\}.$$

引理 2.5[15] Krasnosel`skii（范数形式的锥拉伸与压缩不动点定理）

设Ω_1, Ω_2是 Banach 空间E中的有界开集，$\theta\in\Omega_1$, $\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$, $A:P\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to P$是全连续算子，如果满足条件：

(H_1) $\|Ax\|\le\|x\|$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$；$\|Ax\|\ge\|x\|$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$，（即范数锥拉伸）

或

(H_2) $\|Ax\|\le\|x\|$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$；$\|Ax\|\ge\|x\|$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$，（即范数锥压缩）

那么，A 在 $P\cap\left(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1\right)$ 中必具有不动点.

引理 2.6[16]（Lebesgue 控制收敛定理）

设$\left\{f_n(x)\mid n\in N\right\}$，是 E 上的可测函数列，如果

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\overset{a.e.}{=}f(x)$;

(2) 存在可积的函数 F，使得$\left|f_n(x)\right|\overset{a.e.}{\le}F(x)$ $(\forall n\in N)$，则$f(x)$在 E 上可积，则 f 在 E 上可积，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx.$$

第3章 奇异半正$(k,n-k)$多点边值问题非平凡解的存在性

3.1 引言

文献[17]研究非线性奇异$(k,n-k)$多点边值问题

$$(-1)^{n-k}\varphi^{(n)}(x)=h(x)f(\varphi(x)),\ \ 0<x<1,\ \ n>2,\ \ 1\le k\le n-1, \tag{3.1.1}$$

分别在边值条件

$$\varphi(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\Phi(\xi_i),\ \ \varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1),\ \ 1\le i\le k-1, 0\le j\le n-k-1; \tag{3.1.2}$$

$$\varphi(1)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\Phi(\xi_i),\ \ \varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1),\ \ 0\le i\le k-1, 0\le j\le n-k-1 \tag{3.1.3}$$

下正解的存在性，其中$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$, $a_i\in[0,+\infty)$，并且允许$h(x)$在$x=0$和$x=1$奇异. 本章在文献[17]的次线性条件基础上通过添加一个半正条件 $f(u)\ge -b$, $b\ge 0, \forall u\in R$，将文献[17]中的结论推广到非平凡解的存在性.

3.2 准备工作

引理 3.2.1[18,19] 对$\forall\tau\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 存在 $D(\tau)>0$，使得

$$k(x,y)\ge D(\tau)k(z,y),\ \ \tau\le x\le 1-\tau,\ \ y,z\in[0,1].$$

引理 3.2.2[18,19] 设$\varphi\in C^n[0,1]$满足

$$\begin{cases}(-1)^{n-k}\varphi^{(n)}(x)\ge 0,\ \ 0<x<1,\\ \varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1)=0,\ \ 0\le i\le k-1,\ 0\le j\le n-k-1,\end{cases}$$

对任意$\tau\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 存在$D(\tau)>0$，使得

$$\varphi(x)\ge D(\tau)\|\varphi\|,\ \ \tau\le x\le 1-\tau.$$

令

$$\Phi_1(x)=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\int_x^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}dt,$$

$$\Phi_2(x)=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\int_0^x t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}dt,$$

容易证明 $\Phi_i(x)\ge 0,\ x\in[0,1](i=1,2)$，并且根据 Euler 积分的性质可知

$$\Phi_1(0)=1,\ \Phi_1(1)=0,\ \Phi_2(0)=0,\ \Phi_2(1)=1.$$

假设:

(H_1) $\sum_{i=1}^{m-2}a_i\Phi_1(\xi_i)<1$;

$(H_1)'$ $\sum_{i=1}^{m-2}a_i\Phi_2(\xi_i)<1$;

(H_2) $h:(0,1)\to[0,+\infty)$连续，$h(x)\not\equiv 0$，并且$\int_0^1 h(x)dx<+\infty$;

(H_3) $f:(-\infty,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$连续.

设

$$k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(k-1)!(n-k-1)!}\displaystyle\int_0^{x(1-y)}t^{k-1}(t+y-x)^{n-k-1}dt, & 0\le x\le y\le 1,\\ \dfrac{1}{(k-1)!(n-k-1)!}\displaystyle\int_0^{y(1-x)}t^{n-k-1}(t+x-y)^{k-1}dt, & 0\le y\le x\le 1,\end{cases}$$

容易证明 $k(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上连续，且$k(x,y)\ge 0$, $(0\le x,y\le 1)$.

分别在条件(H_1)和$(H_1)'$下，令

$$K(x,y)=k(x,y)+D^{-1}\Phi_1(x)\sum_{i=1}^{m-2}a_ik(\xi_i,y)\text{，其中 }D=1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\Phi_1(\xi_i),$$

$$\tilde{K}(x,y)=k(x,y)+\tilde{D}^{-1}\Phi_2(x)\sum_{i=1}^{m-2}a_ik(\xi_i,y)\text{，其中 }\tilde{D}=1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\Phi_2(\xi_i),$$

$$(A\varphi)(x)=\int_0^1 K(x,y)h(y)f(\varphi(y))dy,\ x\in[0,1], \tag{3.2.1}$$

$$(T\varphi)(x)=\int_0^1 K(x,y)h(y)\varphi(x)dy,\ x\in[0,1], \tag{3.2.2}$$

$$(\tilde{A}\varphi)(x)=\int_0^1 \tilde{K}(x,y)h(y)f(\varphi(y))dy,\ \ x\in[0,1], \tag{3.2.3}$$

$$(\tilde{T}\varphi)(x)=\int_0^1 \tilde{K}(x,y)h(y)\varphi(x)dy,\ \ x\in[0,1]. \tag{3.2.4}$$

取 $\tau\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，记 $\tilde{D}(\tau)=\min\left\{D(\tau),\min\limits_{\tau\le x\le 1-\tau}\Phi_1(x)\right\}$, $\tilde{D}^*(\tau)=\min\left\{D(\tau),\min\limits_{\tau\le x\le 1-\tau}\Phi_2(x)\right\}$, $D=\tilde{D}(\tau)$, $D^*=\tilde{D}(\tau)$, $B=\max\limits_{0\le x\le 1}\beta(x)$ ， $G=\max\limits_{0\le y\le 1}g(y)$. 容易证明 $B>0,\ G>0;$ $\tilde{D}(\tau)>0,\ \tilde{D}^*(\tau)>0;$ $\delta=\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i\Phi_1(\xi_i)<1,\ 0\le\Phi_1(x)\le 1,\ \tilde{\delta}=\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i\Phi_2(\xi_i)<1,\ 0\le\Phi_2(x)\le 1,$ 因此,

$$0\le k(x,y)\le K(x,y)\le BG+\frac{BG}{1-\delta}\sum_{i=1}^{m-2}a_i=M, \tag{3.2.5}$$

$$0\le k(x,y)\le K(x,y)\le BG+\frac{BG}{1-\tilde{\delta}}\sum_{i=1}^{m-2}a_i=\tilde{M}. \tag{3.2.6}$$

引理 3.2.3[17] 假设$(H_1)-(H_3)$满足，则由(3.2.1)所定义的算子$A:C[0,1]\to C[0,1]$全连续；假设$(H_1^{'})-(H_3)$满足，则由(3.2.3)所定义的算子$\tilde{A}:C[0,1]\to C[0,1]$全连续.

引理 3.2.4[17] 假设$(H_1)-(H_3)$满足，如果A有不动点$\varphi\ne 0$, 则φ是边值问题(3.1.1)(3.1.2)的非平凡解；假设$(H_1^{'})-(H_3)$满足，如果$\tilde{A}$有不动点$\varphi\ne 0$，则φ是边值问题(3.1.1)(3.1.3)的非平凡解.

引理 3.2.5[17] 假设$(H_1)(H_2)$满足，则由(3.2.2)所定义的算子T，谱半径$r(T)\ne 0$，并且T存在相应于第一特征值$\lambda_1=(r(T))^{-1}$的正特征函数；假设$(H_1)^{'}(H_2)$满足，则由(3.2.4)所定义的算子$\tilde{T}$，谱半径$r(\tilde{T})\ne 0$，并且$\tilde{T}$存在相应于第一特征值$\tilde{\lambda}_1=(r(\tilde{T}))^{-1}$的正特征函数.

引理 3.2.6[15] 设E为 Banach 空间，Ω为E中非空有界开集，$A:\overline{\Omega}\to E$为一全连续算子，如果存在$u_0\ne\theta$，使得$u-Au\ne\tau u_0,\ \forall u\in\partial\overline{\Omega}(P),\ \tau\ge 0$，则$\deg(I-A,\Omega,\theta)=0$.

引理 3.2.7[15] 设E为 Banach 空间，Ω为E中非空有界开集，且$\theta\in\Omega$，$A:\overline{\Omega}\to E$为一全连续算子，如果$Au\ne\tau u,\ \forall u\in\partial\overline{\Omega}(P),\ \tau\ge 1$，则$\deg(I-A,\Omega,\theta)=1$.

引理 3.2.8[15] 设E为 Banach 空间，$A:E\to E$全连续，如果$A\theta=\theta$，A_θ'存在且1不是A_θ'的特征值，则存在$r>0$使得$\deg(I-A,B_r,\theta)=\deg(I-A_\theta',B_r,\theta)=(-1)^\beta$，其中$\beta$为$A_\theta'$的所有大于1的特征值的代数重数之和.

在 Banach 空间$C[0,1]$中，范数由$\|\varphi\|=\max\limits_{0\le x\le 1}|\varphi(x)|$定义，该范数称为最大值范数，令$P=\{\varphi\in C[0,1]|\varphi(x)\ge 0,x\in[0,1]\}$，则$P$是$C[0,1]$中的正锥. 本文中所提到范数均为最大值范数.

引理 3.2.9[17] 设 $P_1=\{\varphi\in P|\varphi(x)\ge \tilde{D}(\tau)\|\varphi\|,\tau\le x\le 1-\tau\}$,

$$\tilde{D}(\tau)=\min\{D(\tau),\min_{\tau\le x\le 1-\tau}\Phi_1(x)\},$$

其中，$D(\tau)$由引理 3.2.1 给出，则P_1是$C[0,1]$中的锥，且$P_1\subset P$，由(3.2.2)所定义的算子$T:C[0,1]\to C[0,1]$全连续且$T(P)\subset P_1$；由(3.2.4)所定义的算子$\tilde{T}:C[0,1]\to C[0,1]$全连续且$\tilde{T}(P)\subset P_1$.

引理 3.2.10[15]（Leray-Schauder 不动点定理）

设$A:E\to E$全连续. 如果集合$\{\|x\|:x\in E,x=\lambda Ax,0<\lambda<1\}$是有界的，则$A$在$E$中的闭球$T$中必有不动点，这里$T=\{x:x\in E,\|x\|\le R\}$，$R=\sup\{\|x\|:x=\lambda Ax,0<\lambda<1\}$.

证明 令$T_k=\left\{x:x\in E,\|x\|<R+\frac{1}{k}\right\}$，如果$A$在$\partial T_k$上没有不动点,可令$h_t(x)=x-tAx$.

于是$\theta\notin h_t(\partial T_k),\forall 0\le t\le 1$. 根据同伦不变性知

$$\deg(I-A,T_k,\theta)=\deg(h_1,T_k,\theta)=\deg(h_0,T_k,\theta)$$
$$=\deg(I,T_k,\theta)=1\ne 0,$$

因此，A在T_k中具有不动点. 故根据上述可知，在任何情况下，A在$\overline{T}_k$中都必有不动点x_k，即$x_k=Ax_k(k=1,2,3,\cdots),x_k\in\overline{T}_k$. 根据$A$的全连续性知，存在子列$x_{k_i}$，使得$Ax_{k_i}\to x^*\in E$，于是$x_{k_i}=Ax_{k_i}\to x^*$. 由$\|x_k\|\le R+\frac{1}{k}$，得$\|x^*\|\le R$. 根据$A$的连续性得$x^*=Ax^*$，证毕.

3.3 非平凡解存在性定理

定理 3.3.1 设$(H_1)-(H_3)$满足，如果存在常数$b\ge 0$，使得

$$f(u)\ge -b, \forall u\in R, \tag{3.3.1}$$

$$\liminf_{u\to 0}\frac{f(u)}{|u|}>\lambda_1; \tag{3.3.2}$$

$$\limsup_{u\to +\infty}\frac{f(u)}{u}<\lambda_1, \tag{3.3.3}$$

其中λ_1是由(3.2.2)所定义的算子T的第一特征值，则边值问题(3.1.1)(3.1.2)至少存在一个非平凡解.

证明 由(3.3.2)式知，存在$r_1>0$，使得$f(u)\ge\lambda_1|u|,\forall|u|\le r_1$，对于$\forall\varphi\in\overline{B}_{r_1}$，有

$$(A\varphi)(x)\ge\lambda_1\int_0^1 K(x,y)h(y)|\varphi(y)|dy\ge 0,\ x\in[0,1],$$

因此，$A\left(\overline{B}_{r_1}\right)\subset P$. 由$f(u)\ge\lambda_1|u|,\ \forall|u|\le r_1$，有

$$(A\varphi)(x)\ge\lambda_1\int_0^1 K(x,y)h(y)|\varphi(y)|dy=\lambda_1(T\varphi)(x),\ x\in[0,1], \tag{3.3.4}$$

假设A在$\partial\overline{B}_{r_1}$上没有不动点（否则定理得证）．令$\varphi^*$是$T$相应于$\lambda_1$的特征函数，因此$\varphi^*=\lambda_1T\varphi^*$. 现在证明

$$\varphi-A\ \varphi\ne\mu\varphi^*,\ \forall\varphi\in\partial B_{r_1}\cap P,\ \mu\ge 0, \tag{3.3.5}$$

否则，存在$\varphi_1\in\partial B_{r_1}\cap P$且$\tau_0\ge 0$，使得$\varphi_1-A\varphi_1=\tau_0\varphi^*$. 因此$\varphi_1=A\varphi_1+\tau_0\varphi^*\ge\tau_0\varphi^*$，令

$$\tau^*=\sup\left\{\tau\,|\,\varphi_1\ge\tau\varphi^*\right\}, \tag{3.3.6}$$

很容易得到$\tau^*\ge\tau_0>0$，且$\varphi_1\ge\tau^*\varphi^*$. 从$T(P)\subset P$ 可得到

$$\lambda_1T\varphi_1\ge\tau^*\lambda_1T\varphi^*=\tau^*\varphi^*, \tag{3.3.7}$$

因此，由(3.3.4)式和(3.3.7)式有 $\varphi_1=A\varphi_1+\tau_0\varphi^*\ge\lambda_1T\varphi_1+\tau_0\varphi^*\ge\tau^*\varphi^*+\tau_0\varphi^*=\left(\tau^*+\tau_0\right)\varphi^*$，这与$\tau^*$的定义矛盾，因此(3.3.5)式成立.

因为$A\left(\overline{B}_{r_1}\right)\subset P$，由不动点指数同伦不变性和引理3.2.6知，

$$\deg(I-A,B_{r_1},\theta)=i(A,B_{r_1}\cap P,P)=0. \tag{3.3.8}$$

令 $\tilde{\varphi}(x)=b\int_0^1 K(x,y)h(y)dy$, 容易证明 $\tilde{\varphi}\in P$, 并且 $A:C[0,1]\to P-\tilde{\varphi}$, 定义 $\tilde{A}\varphi=A(\varphi-\tilde{\varphi})+\tilde{\varphi}$, $\varphi\in C[0,1]$, 那么 $\tilde{A}:C[0,1]\to P$. 由(3.3.3)得，存在 $r_2>r_1+\|\tilde{\varphi}\|$ 和 $0<\sigma<1$ 使得 $f(u)\le\sigma\lambda_1 u,\forall u\ge r_2$. 定义 $T_1\varphi=\sigma\lambda_1 T\varphi$, $\varphi\in C[0,1]$, 则 $T_1:C[0,1]\to C[0,1]$ 是有界线性算子且 $T_1(P)\subset P$. 令

$$M^*=2\max\left\{\sup_{\varphi\in\bar{B}_{r_2}}\int_0^1 K(x,y)h(y)|f(\varphi(y))|dy,2\|\varphi\|\right\}, \tag{3.3.9}$$

下面证明 $M^*<+\infty$.

由(3.2.5)式知 $K(x,y)\le M$，由 (H_2) 知 $\int_0^1 h(x)dx<+\infty$，由 (H_3) 知 $f(\varphi(y))$ 在 $\bar{B}_{r_2}$ 中有界, 因此, $M^*<+\infty$. 令 $W=\{\varphi\in P\,|\,\varphi=\mu\tilde{A}\varphi,0\le\mu\le1\}$,下面证明 W 是有界的.

对 $\forall\varphi(x)\in W$, 记 $\tilde{\psi}(x)=\min\{\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x),r_2\}$, 并且记

$$e(\varphi)=\{x\in[0,1]\,|\,\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)>r_2\}. \tag{3.3.10}$$

当 $\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)<0$ 时, $\tilde{\psi}(x)=\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)\ge\varphi(x)-r_2\ge-r_2$, 所以 $\|\tilde{\psi}\|\le r_2$, 因此对于对 $\forall\varphi(x)\in W$, 有

$$\begin{aligned}
\varphi(x)&=\mu(\tilde{A}\varphi)(x)=\mu[A(\varphi-\tilde{\varphi})+\tilde{\varphi}]\\
&=\mu\left[\int_0^1 K(x,y)h(y)f(\varphi-\tilde{\varphi})dy+\tilde{\varphi}(x)\right]\\
&\le\int_0^1 K(x,y)h(y)f(\varphi_1-\tilde{\varphi})dy+\tilde{\varphi}(x)\\
&=\int_{e(\varphi)}K(x,y)h(y)f(\varphi-\tilde{\varphi})dy+\int_{[0,1]\setminus e(\varphi)}K(x,y)h(y)f(\tilde{\psi})dy+\tilde{\varphi}(x)\\
&\le\sigma\lambda_1\int_0^1 K(x,y)h(y)(\varphi(y)-\tilde{\varphi}(y))dy+\int_0^1 K(x,y)h(y)f(\tilde{\psi})dy+\tilde{\varphi}(x)\\
&\le\sigma\lambda_1\int_0^1 K(x,y)h(y)\varphi(y)dy-\sigma\lambda_1\int_0^1 K(x,y)h(y)\tilde{\varphi}(y)dy\\
&\quad+\int_0^1 K(x,y)h(y)f(\tilde{\psi})dy+2\tilde{\varphi}(x)\\
&\le\sigma\lambda_1\int_0^1 K(x,y)h(y)\varphi(y)dy+\int_0^1 K(x,y)h(y)f(\tilde{\psi})dy+2\tilde{\varphi}(x)
\end{aligned}$$

$$\le \sigma\lambda_1\int_0^1 K(x,y)h(y)\varphi(y)dy+M^*$$

$$=(T_1\varphi)(x)+M^*, \tag{3.3.11}$$

其中 M^* 由 (3.3.9) 式给出，因此 $0\le\varphi(x)=\mu(\tilde{A}\varphi)(x)\le(T_1\varphi)(x)+M^*$，从而可得 $((I-T_1)\varphi)(x)\le M^*$，$x\in[0,1]$. 因为 λ_1 是 T 的第一特征值且 $0<\sigma<1$，所以 $(r(T_1))^{-1}>1$. 从而逆算子 $(1-T_1)^{-1}$ 存在，并且可得 $(1-T_1)^{-1}=I+T_1+T_1^2+\cdots+T_1^n+\cdots$. 由于 $T_1(P)\subset P$，所以 $(1-T_1)^{-1}(P)\subset P$，从而 $\varphi(x)\le(I-T_1)^{-1}M^*$, $x\in[0,1]$，并且 W 有界.

取 $r_3>\max\{r_2,\sup W+\|\tilde{\varphi}\|\}$,下面证明 $\tilde{A}$ 在上 ∂B_{r_3} 没有不动点.

假设存在 $\varphi_1(x)\in\partial B_{r_3}$，使得 $\tilde{A}\varphi_1=\varphi_1$，则 $\varphi_1\in W$，此时 $\mu=1$，并且 $\|\varphi_1\|=r_3>\sup W$，矛盾，所以 $\tilde{A}$ 在上 ∂B_{r_3} 没有不动点. 因此，由引理 3.2.10 和不动点指数的保持性和同伦不变性可知

$$\deg(I-\tilde{A},B_{r_3},\theta)=i(\tilde{A},B_{r_3}\cap P,P)=i(\theta,B_{r_3}\cap P,P)=1. \tag{3.3.12}$$

设全连续同伦函数 $H(t,\varphi)=A(\varphi-t\tilde{\varphi})+t\tilde{\varphi},(t,\varphi)\in[0,1]\times\bar{B}_{r_3}$，则 $h_t(\varphi)=\varphi-H(t,\varphi)$，下面证 $\theta\notin h_t(\partial B_{r_3})$.

假设存在 $(t_0,\varphi_2)\in[0,1]\times\partial B_{r_3}$，使得 $h_t(\varphi)=\theta$ 即 $H(t_0,\varphi_2)=\varphi_2$，那么 $A(\varphi_2-t_0\tilde{\varphi})=\varphi_2-t_0\tilde{\varphi}$，并且 $\tilde{A}(\varphi_2-t_0\tilde{\varphi}+\tilde{\varphi})=\varphi_2-t_0\tilde{\varphi}+\tilde{\varphi}$，因此 $\varphi_2-t_0\tilde{\varphi}+\tilde{\varphi}\in W$. 又因为 $\|\varphi_2-t_0\tilde{\varphi}+\tilde{\varphi}\|\ge\|\varphi_2\|-(1-t_0)\|\tilde{\varphi}\|\ge r_3-\|\tilde{\varphi}\|>\sup W$，矛盾. 故 $\theta\notin h_t(\partial B_{r_3})$.

由拓扑度的同伦不变性和 (3.3.12) 式可知

$$\deg(I-A,B_{r_3},\theta)=\deg(I-H(0,\cdot),B_{r_3},\theta)$$

$$=\deg(I-H(1,\cdot),B_{r_3},\theta)=\deg(I-\tilde{A},B_{r_3},\theta)=1. \tag{3.3.13}$$

由 (3.3.8) 和 (3.3.13) 知 $\deg(I-A,B_{r_3}\setminus\bar{B}_{r_1},\theta)=\deg(I-A,B_{r_3},\theta)-\deg(I-A,\bar{B}_{r_1},\theta)=1$，所以 A 在 $(B_{r_3}\cap P)\setminus(\bar{B}_{r_1}\cap P)$ 上至少存在一个不动点，即边值问题 (3.1.1) (3.1.2) 至少存在一个非平凡解.

定理 3.3.1' 设 $(H_1')-(H_3)$ 满足，如果存在常数 $b\ge0$，使得 (3.3.1). (3.3.2) 和 (3.3.3) 成

立，那么边值问题(3.1.1) (3.1.3)至少存在一个非平凡解.

证明类似定理 3.3.1.

推论 3.3.1 设$(H_1)-(H_3)$满足，如果存在常数$b^*\ge 0$，使得$f(u)\ge -\dfrac{b^*}{M^*}$，$\forall u\ge -b^*$，其中$M^*=\max\limits_{x\in[0,1]}\int_0^1 K(x,y)h(y)\,dy$. 同时(3.3.2) (3.3.3)满足，则边值问题(3.1.1) (3.1.2)至少存在一个非平凡解.

证明 定义

$$f_1(u)=\begin{cases} f(u),\ u\ge -b^*,\\ f(-b^*),\ u<-b^*,\end{cases} \tag{3.3.14}$$

$$(A_1\varphi)(x)=\int_0^1 K(x,y)h(y)f_1(\varphi(y))dy,\ x\in[0,1], \tag{3.3.15}$$

由定理 3.1.1 知A_1至少存在一个非零不动点$\tilde{\varphi}$，则

$$\tilde{\varphi}(x)=\int_0^1 K(x,y)h(y)f_1(\tilde{\varphi}(y))dy\ge -\frac{b^*}{M^*}\int_0^1 K(x,y)h(y)dy\ge -b^*, \tag{3.3.16}$$

从(3.3.14)有$f_1(\tilde{\varphi}(x))=f(\tilde{\varphi}(x))$，$x\in[0,1]$，则

$$\tilde{\varphi}(x)=\int_0^1 K(x,y)h(y)f_1(\tilde{\varphi}(y))dy=\int_0^1 K(x,y)h(y)f(\tilde{\varphi}(y))dy=(A\tilde{\varphi})(x),$$

因此，$\tilde{\varphi}$是奇异边值问题(3.1.1) (3.1.2)的非平凡解.

推论 3.3.1' 设$(H_1')-(H_3)$满足，如果存在常数$b^*\ge 0$，使得$f(u)\ge -\dfrac{b^*}{M^*}$，$\forall u\ge -b^*$，其中$M^*=\max\limits_{x\in[0,1]}\int_0^1 K(x,y)h(y)dy$，同时(3.3.2) (3.3.3)满足，则边值问题(3.1.1) (3.1.3)至少存在一个非平凡解.

证明类似推论 3.3.1.

定理 3.3.2 假设$(H_1)-(H_3)$满足，如果

$$uf(u)\ge 0,\ \forall u\in(-\infty,+\infty); \tag{3.3.17}$$

$$\lim_{u\to 0}\ \inf\frac{f(u)}{u}>\lambda_1; \tag{3.3.18}$$

$$\lim_{|u|\to+\infty}\sup\frac{f(u)}{u}<\lambda_1; \tag{3.3.19}$$

这里 λ_1 是 T 的第一特征值, T 是由 $(3.2.2)$ 式定义的, 那么边值问题 $(3.1.1)$ $(3.1.2)$ 至少存在一个正解和一个负解.

证明 由 $(3.3.17)$ 可以得到 $A(P)\subset P$, 与定理 3.3.1 的证明相似, 由引理 3.2.6 和引理 3.2.7 知, 存在 $0<r_1<r_2$, 使得

$$i\left(A,B_{r_1}\cap P,\theta\right)=0,\ \ i\left(A,B_{r_2}\cap P,\theta\right)=1, \tag{3.3.20}$$

由切除性可得 $i\left(A,\left(B_{r_2}\cap P\right)\backslash\left(\overline{B}_{r_1}\cap P\right),\theta\right)=i\left(A,B_{r_2}\cap P,\theta\right)-i\left(A,\overline{B}_{r_1}\cap P,\theta\right)=1$. 因此, A 在 $\left(B_{r_2}\cap P\right)\backslash\left(\overline{B}_{r_1}\cap P\right)$ 上有不动点, 则边值问题 $(3.1.1)$ $(3.1.2)$ 至少有一个正解.

定义 $$f_2(u)=-f(-u),\ \ \forall u\in(-\infty,+\infty),$$

$$(A_2\varphi)(x)=\int_0^1 K(x,y)h(y)f_2(\varphi(y))dy,\ x\in[0,1], \tag{3.3.21}$$

那么 $A_2(P)\subset P$ 且 A_2 在 $P\backslash\{\theta\}$ 上有不动点 $\tilde{\psi}$. 因为 $f_2(\tilde{\psi}(x))=-f(-\tilde{\psi}(x)),\forall x\in[0,1]$, 有

$$-\tilde{\psi}(x)=\int_0^1 K(x,y)h(y)f(-\tilde{\psi}(y))dy=\left(A(-\tilde{\psi})\right)(x),\ x\in[0,1], \tag{3.3.22}$$

因此, $-\tilde{\psi}$ 是边值问题 $(3.1.1)$ $(3.1.2)$ 的负解.

定理 3.3.2' 假设 $(H_1')-(H_3)$ 满足, 如果 $(3.3.17)$、$(3.3.18)$ 和 $(3.3.19)$ 成立, 那么边值问题 $(3.1.1)$ $(3.1.3)$ 至少存在一个正解和一个负解.

证明类似定理 3.3.2.

3.4 非奇异情况

这部分考虑 $h(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 非奇异的特殊情况, 即 $(k,n-k)$ 多点边值问题

$$(-1)^{n-k}\varphi^{(n)}(x)=f(x,\varphi(x)),\ \ 0<x<1,\ \ n>2,\ \ 1\le k\le n-1, \tag{3.4.1}$$

分别在边值条件

$$\varphi(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i),\ \ \varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1),\ \ 1\le i\le k-1,0\le j\le n-k-1; \tag{3.4.2}$$

$$\varphi(1)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i),\ \ \varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1),\ \ 0\le i\le k-1,0\le j\le n-k-1 \tag{3.4.3}$$

下非平凡解的存在性，其中$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$, $a_i\in[0,+\infty)$.

定理 3.4.1 假设(H_1)满足，且$f(x,u)$在$[0,1]\times(-\infty,+\infty)$上是连续的，如果存在一个常数$b\ge 0$，使得

$$f(x,u)\ge -b,\ \forall x\in[0,1],\ u\in(-\infty,+\infty); \tag{3.4.4}$$

且关于$x\in[0,1]$一致成立

$$\liminf_{u\to 0}\frac{f(x,u)}{|u|}>\lambda_1,\quad x\in[0,1]; \tag{3.4.5}$$

$$\limsup_{u\to+\infty}\frac{f(x,u)}{u}<\lambda_1,\quad x\in[0,1], \tag{3.4.6}$$

这里λ_1是T的第一特征值，T由$(3.2.2)$定义，且这里 $h(y)\equiv 1$，那么非线性$(k,n-k)$多点边值问题$(3.4.1)$至少有一个非平凡解.

证明 定义

$$(A\varphi)(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y,\varphi(y))\,dy,\ x\in[0,1],$$

$$(T\varphi)(x)=\lambda_1\int_0^1 K(x,y)\ \varphi(y)dy,\ x\in[0,1],$$

由 (3.4.5) 式知，存在 $r_1>0$, 使得 $f(x,u)\ge\lambda_1|u|$, $\forall|u|\le r_1$, 对于 $\forall\varphi\in\bar{B}_{r_1}$, 因此，$(A\varphi)(x)\ge\lambda_1\int_0^1 K(x,y)\ h(y)\varphi(y)dy=\lambda_1(T\varphi)(x)$, $x\in[0,1]$, 类似定理 3.3.1 前半部分的证明可知，$\deg(I-A,B_{r_1},\theta)=i(A,B_{r_1}\cap P,P)=0$.

令

$$\tilde{\varphi}(x)=b\int_0^1 K(x,y)\,dy,\quad \tilde{A}\varphi=A(\varphi-\tilde{\varphi})+\tilde{\varphi},\ \varphi\in C[0,1],$$

$$M^*=2\max\left\{\sup_{\varphi\in\bar{B}_{r_2}}\int_0^1 K(x,y)|f(\varphi(y))|\,dy,2\|\varphi\|\right\}.$$

类似定理 3.3.1 后半部分的证明可知，

$$\deg(I-A,B_{r_3},\theta)=\deg(I-H(0,\cdot),B_{r_3},\theta)$$

$$=\deg(I-H(1,\cdot),B_{r_3},\theta)=\deg(I-\tilde{A},B_{r_3},\theta)=1,$$

由 Leray-Schauder 度切除性$\deg(I-A,B_{r_3}\setminus\bar{B}_{r_1},\theta)=\deg(I-A,B_{r_3},\theta)-\deg(I-A,\bar{B}_{r_1},\theta)=1$,

所以A在$\left(B_{r_3}\cap P\right)\backslash\left(\bar{B}_{r_1}\cap P\right)$上至少存在一个不动点，即边值问题$(3.4.1)$ $(3.4.2)$至少存在一个非平凡解.

定理 3.4.2 假设(H_1)且$f(x,u)$在$[0,1]\times(-\infty,+\infty)$上是连续的，如果存在一个常数$M_1\ge 0$，使得

$$uf(x,u)\ge -M_1u^2,\ 0\le x\le 1,\ -\infty<u<+\infty; \tag{3.4.7}$$

且关于$x\in[0,1]$一致成立

$$\lim_{u\to 0}\ \inf\frac{f(x,u)}{|u|}>\lambda_1,\quad x\in[0,1]; \tag{3.4.8}$$

$$\lim_{|u|\to+\infty}\sup\frac{f(x,u)}{u}<\lambda_1,\quad x\in[0,1], \tag{3.4.9}$$

这里λ_1是T的第一特征值，T是由$(3.2.2)$式定义的，此时$h(y)\equiv 1$，那么非线性$(k,n-k)$多点边值问题$(3.4.1)$ $(3.4.2)$至少有一个正解和一个负解.

证明 令 $f_4(x,u)=f(x,u)+M_1u, 0\le x\le 1,-\infty<u<+\infty$ 且$L_1\varphi=L\varphi-M_1\varphi$，那么$(3.4.1)$等价于

$$\begin{cases} -(L_1\varphi)(x)=f_4(x,\varphi(y)),\ 0<x<1, \\ \varphi(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i),\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1),\ 1\le i\le k-1,\ 0\le j\le n-k-1, \end{cases} \tag{3.4.10}$$

因为T的特征值是正的，所以$-M_1$不是T的特征值. 边值问题$(3.4.10)$相应的齐次方程

$$\begin{cases} -(L_1\varphi)(x)=0,\ 0<x<1, \\ \varphi(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i),\ \varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1),\ 1\le i\le k-1,\ 0\le j\le n-k-1, \end{cases} \tag{3.4.11}$$

只有平凡解. $(3.4.11)$的格林函数为$K_1(x,y)$，且$K_1(x,y)$具备$K(x,y)$的性质. 方程$(3.4.10)$等价于 Hammerstein 型积分方程

$$\varphi(x)=\int_0^1 K_1(x,y)f_4(x,\varphi(y))dy=(A_4\varphi)(x), \tag{3.4.12}$$

容易证明$A_4:C[0,1]\to C[0,1]$ 是全连续算子，由$(3.4.7)$式有

$$uf_4(x,u)\ge 0,0\le x\le 1,-\infty<u<+\infty. \tag{3.4.13}$$

定义

$$(T_1\varphi)(x)=\int_0^1 K_1(x,y)\varphi(y)dy, \tag{3.4.14}$$

容易证明 $T_1:C[0,1]\to C[0,1]$ 是全连续的，且$(T_1P)\subset P$，令$\tilde{\lambda}_1=\lambda_1+M_1$，因为$\lambda_1$是$T$的第一特征值，可得$\tilde{\lambda}_1$是$T_1$的第一特征值，由$(3.4.8)$式和$(3.4.9)$式得

$$\lim_{u\to+\infty}\sup\frac{f_4(x,u)}{u}<\tilde{\lambda}_1,\quad x\in[0,1]; \tag{3.4.15}$$

$$\lim_{u\to 0}\inf\frac{f_4(x,u)}{|u|}>\tilde{\lambda}_1,\quad x\in[0,1]. \tag{3.4.16}$$

证明与定理 3.3.2 类似，得出方程$(3.4.10)$至少有一个正解和一个负解.

推论 3.4.1 假设(H_1)满足，$f(x,u)$在$x\in[0,1]\times(-\infty,+\infty)$上是连续的，若存在$b_1\geq 0$，使得$f(x,u)\geq -\frac{b_1}{M_1}$，$\forall u\geq -b^*$，$x\in[0,1]$，其中$M_1=\max_{x\in[0,1]}\int_0^1 K_1(x,y)dy$，并且$(3.4.5)$式和$(3.4.6)$式都成立，那么奇异$(k,n-k)$边值问题$(3.4.10)$至少存在一个正解和一个负解.

3.5 实际应用

例 3.5.1 令 $h(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$，$n=4$，$k=2$，$m=4$，$a_1=\frac{1}{2}$，$\xi_1=\frac{1}{3}$，$a_2=1$，$\xi_2=\frac{2}{3}$.

$$f(u)=\begin{cases}(b_1+1)e^{-u}|u|,\ u\leq 1,\\(b_1+1)e^{-1},\ u>1,\end{cases}$$

其中b_1由下面$(3.5.1)$式所定义，则$(3.1.1)(3.1.2)$边值问题

$$\begin{cases}\varphi^{(4)}(x)=h(x)f(\varphi(x)),\ 0<x<1,\\\varphi(0)=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1}{3}\right)+\Phi\left(\frac{1}{3}\right),\ \varphi'(0)=\varphi(1)=\varphi'(1)=0,\end{cases}$$

至少存在一非平凡解.

证明 容易证明 $f:(-\infty,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$连续，且$f(u)\geq 0\ \ (\forall u\in R)$，此时，

$$k(x,y)=\begin{cases}\int_0^{x(1-y)}t(t+y-x)dt=\frac{1}{3}x^3(1-y)^3+\frac{1}{2}x^2(1-y)^2(y-x),\ 0\leq x\leq y\leq 1,\\\int_0^{y(1-x)}t(t+x-y)dt=\frac{1}{3}y^3(1-x)^3+\frac{1}{2}y^2(1-x)^2(x-y),\ 0\leq y\leq x\leq 1,\end{cases}$$

$$\Phi_1(x)=3!\int_x^1 t(1-t)dt=2x^3-3x^2+1,$$

由文献[20,21]知,

$$\alpha(x)g(y)\le k(x,y)\le \beta(x)g(y),\forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1],$$

其中$\alpha(x)=\dfrac{x^k(1-x)^{n-k}}{n-1},\beta(x)=\dfrac{x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}}{\min\{k,n-k\}},g(y)=\dfrac{y^{n-k}(1-y)^k}{(k-1)!(n-k-1)!}$，从而当$n=3$，$k=1$时有

$$\alpha(x)=\frac{1}{3}x^2(1-x)^2,\ \beta(x)=\frac{1}{2}x(1-x),\ g(y)=y^2(1-y)^2，那么$$

$$\frac{1}{3}x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2\le k(x,y)\le\frac{1}{2}x(1-x)y^2(1-y)^2,\ \forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1],$$

$$D=1-\frac{1}{2}\Phi_1\left(\frac{1}{3}\right)-\Phi_1\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{15}{27},$$

因此

$$k\left(\frac{1}{3},y\right),\ k\left(\frac{2}{3},y\right)\le\ \frac{1}{9}y^2(1-y)^2,$$

$$K(x,y)=k(x,y)+\frac{27}{15}(2x^3-3x^2+1)\left[\frac{1}{2}k\left(\frac{1}{3},y\right)+k\left(\frac{2}{3},y\right)\right]\le\frac{1}{2}+\frac{27}{15}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{9}\le\frac{4}{5},$$

所以算子T满足

$$\begin{aligned}\|T\|&=\sup_{\|\varphi\|=1}\|T\varphi\|=\sup_{\|\varphi\|=1}\left|\int_0^1K(x,y)h(y)\varphi(y)dy\right|\\&\le\sup_{\|\varphi\|=1}\max_{0\le x\le1}\int_0^1K(x,y)h(y)|\varphi(y)|dy\\&\le\frac{4}{5}\int_0^1h(y)dy\\&=\frac{4}{5}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}dy\\&=\frac{4}{5}\pi\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|T\|&=\sup_{\|\varphi\|=1}\|T\varphi\|=\sup_{\|\varphi\|=1}\left|\int_0^1K(x,y)h(y)\varphi(y)dy\right|\\&\ge\sup_{\substack{\|\varphi\|=1\\ \varphi>0}}\max_{0\le x\le1}\left|\int_0^1K(x,y)h(y)\varphi(y)dy\right|\end{aligned}$$

$$\ge \sup_{\substack{\|\varphi\|=1\\ \varphi>0}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{3}x^2(x-1)^2 y^2(1-y)^2 h(y)\varphi(y)dy$$

$$\ge \frac{1}{48}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} y^{\frac{3}{2}}(1-y)^{\frac{3}{2}}dy \ ,$$

从而有

$$b_1=\frac{48}{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}dx}\ge\lambda_1=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}}\ge\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T\|^n}}\ge\frac{1}{\frac{4}{5}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx}=\frac{5}{4\pi},\quad(3.5.1)$$

由 (3.3.2) 式和 (3.3.3) 式可知

$$\limsup_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=\limsup_{u\to+\infty}\frac{b_1+1}{ue}=0<\lambda_1,$$

$$\liminf_{u\to0}\frac{f(u)}{|u|}=\liminf_{u\to0}(b_1+1)e^{-u}=b_1+1>\lambda_1,$$

由定理 3.3.1 知，边值问题

$$\begin{cases}\varphi^{(4)}(x)=h(x)f(\varphi(x)),\ 0<x<1,\\ \varphi(0)=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1}{3}\right)+\Phi\left(\frac{2}{3}\right),\ \varphi'(0)=\varphi(1)=\varphi'(1)=0,\end{cases}$$

至少存在一个非平凡解.

第 4 章 一类多时滞泛函微分方程周期正解的存在性

4.1 引言

近年来，泛函微分方程周期解的存在性问题受到人们广泛的关注，许多作者对于各类微分方程的周期解的存在性进行研究，如文献[22-26]. 关于泛函微分方程周期解的研究已有许多结果出现，并且发展了解决这类问题的许多有效的方法，如不动点方法、拓扑度方法和固有元方法等. 其中，不动点方法被广泛地应用，并且获得了很好的结果.

文献[22]和[23]对一类单时滞泛函微分方程

$$y'(t)=-a(t)y(t)+\lambda h(t)f\left(y\left(t-\tau(t)\right)\right),$$

周期正解的存在性进行研究，其中 $a=a(t)$, $h=h(t)$, $\tau=\tau(t)$ 是连续的周期函数，$a=a(t)$, $h=h(t)$, $f=f(t)$ 是非负的函数；$\lambda,\omega>0$, $\int_0^T h(s)\,ds>0$, $t\in[0,\omega]$.

本文利用非线性泛函分析中半序 Banach 空间的锥理论和不动点指数方法将上面方程推广为一类多时滞泛函微分方程

$$y'(t)=-a\left(t,y(t)\right)y(t)+\lambda h\left(t,y(t)\right)f\left(t,y\left(t-\tau_1(t)\right),\cdots,y\left(t-\tau_m(t)\right)\right), \qquad (4.1.1)$$

并研究它的周期正解的存在性. 其中,

$$a,\ h\in C(\mathrm{R}\times\mathrm{R},\mathrm{R});\quad a(t+\omega,y)=a(t,y);\quad h(t+\omega,y)=h(t,y);\quad \tau(t+\omega)=\tau(t);$$

$$f\in C\left(R\times[0,\infty)^m,[0,\infty)\right);\ f(u)=0 \text{ 当且仅当 } u=\theta;\ \tau\in C(\mathrm{R},\mathrm{R});\ \lambda,\omega>0.$$

假设 $a(t,y)$, $h(t,y)$ 满足下列条件:

(H_1) 存在连续的 $\omega-$ 周期函数 $a_1(t)$, $a_2(t)$ 满足

$$a_1(t)\le a(t,y)\le a_2(t),\ \int_0^\omega a_1(t)\,dt>0;$$

(H_2) 存在连续的 $\omega-$ 周期函数 $h_1(t)$, $h_2(t)$ 满足

$$h_1(t)\le h(t,y)\le h_2(t),\ \int_0^\omega h_1(t)\,dt>0.$$

4.2 准备工作

定义 $X=\{y \mid y\in C(\mathrm{R},\mathrm{R}), y(t+\omega)=y(t)\}$，$\|y\|=\sup\limits_{\substack{0\le t\le\omega\\ i=1,2,\cdots,m}}|y_i(t)|$，$(y\in X)$，则空间 X 按上述范数构成 Banach 空间.

引理 4.2.1 当 $\int_0^{\omega} a(t,y(t))\,dt>0$ 时，求解方程(4.1.1)的 $\omega-$ 周期解等价于求解积分方程 $(4.2.1)$ 的 $\omega-$ 周期解.

$$y(t)=\lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)h(s,y(s))f(t,y(s-\tau_1(s)),\cdots,y(s-\tau_m(s)))\,ds, \tag{4.2.1}$$

其中
$$G(t,s)=\frac{\exp\left(\int_t^s a(l,y(l))dl\right)}{\exp\left(\int_0^{\omega} a(l,y(l))dl\right)-1}.$$

证明 设 $y(t)$ 是方程(4.2.1)的 $\omega-$ 周期解，两边关于 t 求得

$$\begin{aligned}y'(t)&=\lambda G(t,t+\omega)h(t+\omega,y(t+\omega))f(t,y(t+\omega-\tau_1(t+\omega)),\cdots,y(t+\omega-\tau_m(t+\omega)))\\&\quad-\lambda G(t,t)h(t,y(t))f(t,y(t-\tau_1(t)),\cdots,y(t-\tau_m(t)))\\&\quad+\lambda\int_t^{t+\omega}G_t'(t,s)h(s,y(s))f(t,y(s-\tau_1(s)),\cdots,y(s-\tau_m(s)))ds\\&=\lambda h(t,y(t))f(t,y(t-\tau_1(t)),\cdots,y(t-\tau_m(t)))-a(t,y(t))y(t),\end{aligned}$$

即 $y(t)$ 是方程(4.1.1)的 $\omega-$ 周期解.

反之，设 $y(t)$ 是方程(4.1.1)的 $\omega-$ 周期解，则

$$\lambda h(t,y(t))f(t,y(t-\tau_1(t)),\cdots,y(t-\tau_m(t)))=y'(t)+a(t,y(t))y(t),$$

于是，将上式代入下式得

$$\begin{aligned}&\lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)h(s,y(s))f(t,y(s-\tau_1(s)),\cdots,y(s-\tau_m(s)))\,ds\\&=\int_t^{t+\omega}G(t,s)y'(s)\,ds+\int_t^{t+\omega}G(t,s)a(s,y(s))y(s)\,ds\\&=G(t,s)y(s)|_t^{t+\omega}-\int_t^{t+\omega}G_s'(t,s)y(s)\,ds+\int_t^{t+\omega}G(t,s)a(s,y(s))y(s)\,ds\\&=y(t)-\int_t^{t+\omega}G(t,s)a(s,y(s))y(s)\,ds+\int_t^{t+\omega}G(t,s)a(s,y(s))y(s)\,ds=y(t),\end{aligned}$$

即 $y(t)$ 是方程(4.2.1)的 $\omega-$ 周期解.

定义算子 $A:X\to X$

$$\left(Ay\right)(t)=\lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)h\left(s,y(s)\right)f\left(t,y\left(s-\tau_1(s)\right),\cdots,y\left(s-\tau_m(s)\right)\right)ds, \tag{4.2.2}$$

记

$$M_1=\inf_{0\le t\le s\le\omega}\exp\left(\int_t^s a_1(l)\,dl\right),\quad M_2=\sup_{0\le t\le s\le\omega}\exp\left(\int_t^s a_2(l)\,dl\right),$$

$$k_1=\exp\left(\int_0^\omega a_1(l)\,dl\right),\quad k_2=\exp\left(\int_0^\omega a_2(l)\,dl\right),$$

$$\delta=\frac{M_1(k_1-1)}{M_2(k_2-1)},\quad N_1=\int_0^\omega h_1(l)\,dl,\quad N_2=\int_0^\omega h_2(l)\,dl,$$

根据 δ 定义，可知 $0<\delta\le1$，且

$$0<\frac{M_1}{k_2-1}\le G(t,s)\le\frac{M_2}{k_1-1}\ \ (t\le s\le t+\omega),\ 0<N_1\le\int_0^\omega h\left(s,y(s)\right)ds\le N_2.$$

在 X 中定义锥 $P=\left\{y\in X\mid y(t)\ge0,\ y(t)\ge\delta\|y\|,\ t\in\mathrm{R}\right\}$.

引理 4.2.2 $AP\subset P$.

证明 对任意的 $y\in P$，有

$$\left(Ay\right)(t)\le\frac{M_2}{k_1-1}\lambda\int_t^{t+\omega}h\left(s,y(s)\right)f\left(t,y\left(s-\tau_1(s)\right),\cdots,y\left(s-\tau_m(s)\right)\right)ds,$$

另一方面，有

$$\left(Ay\right)(t)\ge\frac{M_1}{k_2-1}\lambda\int_t^{t+\omega}h\left(s,y(s)\right)f\left(t,y\left(s-\tau_1(s)\right),\cdots,y\left(s-\tau_m(s)\right)\right)ds$$

$$\ge\frac{M_1}{k_2-1}\cdot\frac{k_1-1}{M_2}\|Ay\|=\delta\|Ay\|,$$

即对任意 $y\in P$，有 $\left(Ay\right)(t)\ge\delta\|Ay\|$，所以 $AP\subset P$.

设 η 是正常数，$\Omega_\eta=\left\{y\in X\mid\|y\|<\eta\right\}$.

引理 4.2.3[18]（范数形式的锥拉伸与压缩不动点定理）

设 Ω_1, Ω_2 是 Banach 空间中的有界开集，$\theta\in\Omega_1$, $\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$, $A:P\cap\left(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1\right)\to P$ 是全连续算子，如果满足条件：

$(H_1)'$ $\|Ax\|\le\|x\|$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$; $\|Ax\|\ge\|x\|$, $\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$,（即范数锥拉伸）

或

$(H_2)'$ $\|Ax\| \le \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$; $\|Ax\| \ge \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$，（即范数锥压缩）

那么，A 在 $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 中必具有不动点.

引理 4.2.4[16]（Lebesgue 控制收敛定理）

设$\{f_n(x) \mid n \in N\}$，是 E 上的可测函数列，如果

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{a.e.}{=} f(x)$;

(2) 存在可积的函数 F，使得$|f_n(x)| \overset{a.e.}{\le} F(x)$ $(\forall n \in N)$,

则 $f(x)$ 在 E 上可积，则 f 在 E 上可积，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$.

4.3 周期正解的存在性定理

定理 4.3.1 假设(H_1),(H_2)成立，存在$R > r > 0$. 如果满足如下条件:

(i) $f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m) \le rN_2^{-1}\sigma_2^{-1}\lambda^{-1}$, $\forall\ 0 \le u_i \le r$, $i = 1,2,\cdots,m$, $0 \le t \le \omega$,

(ii) $f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m) \ge RN_1^{-1}\sigma_1^{-1}\lambda^{-1}$, $\forall\ \delta R \le u_i \le R$, $i = 1,2,\cdots,m$, $0 \le t \le \omega$,

或

$(i)'$ $f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m) \le RN_2^{-1}\sigma_2^{-1}\lambda^{-1}$, $\forall\ r \le u_i \le R$, $i = 1,2,\cdots,m$, $0 \le t \le \omega$,

$(ii)'$ $f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m) \ge rN_1^{-1}\sigma_1^{-1}\lambda^{-1}$, $\forall\ \delta r \le u_i \le r$, $i = 1,2,\cdots,m$, $0 \le t \le \omega$,

其中$\sigma_1 = \dfrac{M_1}{k_2 - 1}$, $\sigma_2 = \dfrac{M_2}{k_1 - 1}$，则 A 在 $P \cap (\bar{\Omega}_R \setminus \Omega_r)$ 中必具有不动点.

证明 首先证明 $A: P \cap \bar{\Omega}_R \to P$ 是全连续算子.

设 R 是正常数，$\Omega_R = \{y \in X \mid \|y\| < R\}$，$y_n, y \in P \cap \bar{\Omega}_R$ 且 $\|y_n - y\| \to 0$, $(n \to +\infty)$,

则 $(Ay_n)(t) = \lambda\int_t^{t+\omega} G_n(t,s)h(s,y_n(s))f(t,y_n(s-\tau_1(s)),\cdots,y_n(s-\tau_m(s)))\,ds$,

其中
$$G_n(t,s) = \frac{\exp\left(\int_t^s a(l,y_n(l))dl\right)}{\exp\left(\int_0^\omega a(l,y_n(l))dl\right) - 1}.$$

设 $v_n = Ay_n - Ay$，则

$$
\begin{aligned}
(v_n)'(t) = &\lambda h(t,y_n(t)) f(t,y_n(t-\tau_1(t)),\cdots,y_n(t-\tau_m(t))) \\
&-\lambda h(t,y(t)) f(t,y(t-\tau_1(t)),\cdots,y(t-\tau_m(t))) \\
&-a(t,y_n(t))(Ay_n)(t)+a(t,y(t))(Ay)(t) \\
&=\lambda\big(h(t,y_n(t))-h(t,y(t))\big) f(t,y_n(t-\tau_1(t)),\cdots,y_n(t-\tau_m(t))) \\
&+\lambda h(t,y(t))\big(f(t,y_n(t-\tau_1(t)),\cdots,y_n(t-\tau_m(t))) \\
&-f(t,y(t-\tau_1(t)),\cdots,y(t-\tau_m(t)))\big) \\
&-a(t,y_n(t))v_n(t)+\big(a(t,y(t))-a(t,y_n(t))\big)(Ay)(t),
\end{aligned}
$$

即

$$
(v_n)'(t) = -a(t,y_n(t))v_n(t)+f_n(t), \tag{4.3.1}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
f_n(t)=&\big(a(t,y(t))-a(t,y_n(t))\big)(Ay)(t) \\
&+\lambda\big(h(t,y_n(t))-h(t,y(t))\big) f(t,y_n(t-\tau_1(t)),\cdots,y_n(t-\tau_m(t))) \\
&+\lambda h(t,y(t)) f(t,y_n(t-\tau_1(t)),\cdots,y_n(t-\tau_m(t))) \\
&-\lambda h(t,y(t)) f(t,y(t-\tau_1(t)),\cdots,y(t-\tau_m(t))),
\end{aligned}
$$

因此，$v_n(t)$是微分方程(4.3.1)的$\omega-$周期解，由引理 4.2.1 知

$$
v_n(t)=\int_t^{t+\omega} G_n(t,s) f_n(s)\,ds. \tag{4.3.2}
$$

由$a,\ h\in C(\mathrm{R}\times\mathrm{R},\mathrm{R})$知，$a(t,y)$，$h(t,y)$在$\{(t,y)\,|\,0\le t\le\omega,\ \|y\|\le\eta\}$上一致连续且有界，则$a(t,y_n(t))\to a(t,y(t))$，$h(t,y_n(t))\to h(t,y(t))$，且存在常数$M_3,M_4>0$，使得$|a(t,y)|\le M_3$，$|h(t,y)|\le M_4$.

设$I\subset R$是R上任意闭区间，由$f\in C\big(R\times[0,\infty)^m,[0,\infty)\big)$知，$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)$在$\|u\|\le R$上一致连续且有界，则

$$
f(t,y_n(t-\tau_1(t)),\cdots,y_n(t-\tau_m(t)))\to f(t,y(t-\tau_1(t)),\cdots,y(t-\tau_m(t))),\ (n\to+\infty),
$$

且存在常数$M_5>0$，使得 $|f(t,u_1,u_2\cdots,u_m)|\le M_5$，因此，$f_n(t)\to 0\ \ (n\to\infty)$，且

$$\left|f_n(t)\right| \le 2M_3\left|(Ay)(t)\right| + 2\lambda M_4M_5 + 2\lambda M_4M_5 \le 2\lambda M_3 \cdot \frac{M_2}{k_1-1} \cdot M_4M_5\omega + 4\lambda M_4M_5,$$

由式 (4.3.2), 有 $\|v_n\| \le \frac{M_2}{k_1-1}\int_0^\omega \left|f_n(s)\right| ds$, 再由 Lebesgue 控制收敛定理可知,

$$\|v_n\| = \|Ay_n - Ay\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

于是 $A: P\cap\bar{\Omega}_R \to P$ 是连续的. 下面证明 $A: P\cap\bar{\Omega}_R \to P$ 是紧的.

对任意 $y \in P\cap\bar{\Omega}_R$, 有

$$\|Ay\| \le \frac{M_2}{k_1-1}\lambda\int_t^{t+\omega}\left|h(s,y(s))f\left(t,y\left(s-\tau_1(s)\right),\cdots,y\left(s-\tau_m(s)\right)\right)\right|ds$$

$$\le \frac{\lambda M_2M_4M_5\omega}{k_1-1},$$

$$\left|(Ay)'(t)\right| = \left|-a(t,y(t))(Ay)(t)\right|$$

$$+\left|h(t,y(t))f\left(t,y\left(t-\tau_1(t)\right),\cdots,y\left(t-\tau_m(t)\right)\right)\right|$$

$$\le \frac{\lambda M_3M_2M_4M_5\omega}{k_1-1} + \lambda M_4M_5,$$

因此, $A\left(P\cap\bar{\Omega}_R\right)$ 一致有界且等度连续, 根据 Arzela-Ascoli 定理知, $A\left(P\cap\bar{\Omega}_R\right)$ 是紧的. 由全连续定义知 $A: P\cap\bar{\Omega}_R \to P$ 是全连续算子, 综上, $A: P\cap\left(\bar{\Omega}_R\setminus\Omega_r\right) \to P$ 是全连续算子.

对于 $\forall\, y \in P\cap\partial\Omega_r$, 由定理 4.3.1 中 (i) 可知

$$\| Ay \| = \max_{t\le s\le t+\omega} \lambda\int_t^{t+\omega} G(t,s)h(s,y(s))f\left(t,y\left(s-\tau_1(s)\right),\cdots,y\left(s-\tau_m(s)\right)\right) ds$$

$$\le \frac{M_2}{k_1-1}\lambda\int_t^{t+\omega} h(s,y(s))f\left(t,y\left(s-\tau_1(s)\right),\cdots,y\left(s-\tau_m(s)\right)\right) ds$$

$$\le \frac{M_2}{k_1-1}\lambda\int_t^{t+\omega} h(s,y(s))N_2^{-1}r\sigma_2^{-1}\lambda^{-1}\, ds$$

$$= r = \| y \|; \tag{4.3.3}$$

对于 $\forall\, y \in P\cap\partial\Omega_R$, 由定理 4.3.1 中 (ii) 可知

$$\|Ay\|=\max_{t\le s\le t+\omega}\lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)h(s,y(s))f\left(t,y\left(s-\tau_1(s)\right),\cdots,y\left(s-\tau_m(s)\right)\right)ds$$

$$\ge\frac{M_1}{k_2-1}\lambda\int_t^{t+\omega}G(t,s)h(s,y(s))f\left(t,y\left(s-\tau_1(s)\right),\cdots,y\left(s-\tau_m(s)\right)\right)ds$$

$$\ge\frac{M_1}{k_2-1}\lambda\int_t^{t+\omega}h(s,y(s))RN_1^{-1}\sigma_1^{-1}\lambda^{-1}\,ds$$

$$=R=\|y\|, \tag{4.3.4}$$

因此, 根据引理 4.2.3 可知, A 在 $P\cap\left(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1\right)$ 中必具有不动点,即存在 $y^*\in P\cap\left(\bar{\Omega}_R\setminus\Omega_r\right)$, 满足 $Ay^*=y^*$, 由引理 4.2.1 可知 y^* 即是方程$(4.1.1)$的正解.

定理 4.3.2　假设(H_1),(H_2)成立, 如果满足

$$\lim_{\substack{0\le t\le\omega\\ \|u\|\to0}}\frac{f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}{\|u\|}=\infty, \tag{4.3.5}$$

$$\lim_{\substack{0\le t\le\omega\\ \|u\|\to\infty}}\frac{f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}{\|u\|}=\infty, \tag{4.3.6}$$

那么, 对 $\forall\,\lambda\in\left(0,\lambda^*\right)$, 方程$(4.1.1)$至少有两个正周期解, 其中 $\|u\|=\max\limits_{0\le t\le\omega}\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$,

$$\lambda^*=\frac{1}{\sigma_2N_2}\sup_{r>0}\frac{r}{\max\limits_{\substack{0\le t\le\omega\\ 0\le u_i\le r\\ i=1,2,\cdots,m}}f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}.$$

证明　令 $q(r)=\dfrac{r}{\sigma_2N_2\max\limits_{\substack{0\le t\le\omega\\ 0\le u_i\le r\\ i=1,2,\cdots,m}}f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}$, 容易证明 $q\in C\left((0,\infty),(0,\infty)\right)$.

由 (4.3.5) 式和 (4.3.6) 式知, $\lim\limits_{r\to0}q(r)=\lim\limits_{r\to\infty}q(r)=0$. 因此, 存在 $r_0>0$, 使得 $q(r_0)=\max\limits_{r>0}q(r)=\lambda^*$, 对 $\forall\,\lambda\in\left(0,\lambda^*\right)$, 由中值定理可知, $\exists\,a_1\in(0,r_0)$ 和 $a_2\in(r_0,\infty)$, 使得 $q(a_1)=q(a_2)=\lambda$, 因此,

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\le\frac{a_1}{\lambda\sigma_2N_2},\ \forall\ \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[0,a_1],\ 0\le t\le\omega, \tag{4.3.7}$$

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\le\frac{a_2}{\lambda\sigma_2N_2},\ \ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[0,a_2],\ 0\le t\le\omega. \tag{4.3.8}$$

另一方面，由(4.3.5)式和(4.3.6)式知，$\exists\, b_1\in(0,a_1)$和$\exists\, b_2\in(a_2,\infty)$使得,

$$\frac{f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}{u_i}\ge\frac{1}{\lambda\delta\sigma_1N_1}\ ,\ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in(0,b_1]\cup[b_2\delta,\infty),$$

因此,

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\ge\frac{b_1}{\lambda\sigma_1N_1},\ \ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[\delta b_1,b_1],\ \ 0\le t\le\omega, \tag{4.3.9}$$

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\ge\frac{b_2}{\lambda\sigma_1N_1},\ \ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[\delta b_2,b_2],\ \ 0\le t\le\omega, \tag{4.3.10}$$

由(4.3.8)式和(4.3.10)式可知,

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\le a_2\lambda^{-1}\sigma_2^{-1}N_2^{-1},\ \ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[0,a_2],\ 0\le t\le\omega,$$

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\ge b_2\lambda^{-1}\sigma_1^{-1}N_1^{-1},\ \ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[\delta b_2,b_2],\ 0\le t\le\omega,$$

由(4.3.7)式和(4.3.9)式可知,

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\le a_1\lambda^{-1}\sigma_2^{-1}N_2^{-1},\ \ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[b_1,a_1],\ 0\le t\le\omega,$$

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\ge b_1\lambda^{-1}\sigma_1^{-1}N_1^{-1},\ \ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[\delta b_1,b_1],\ \ 0\le t\le\omega,$$

由定理 4.3.1 可知，方程(4.1.1)分别在$\bar{\Omega}_{b_2}\setminus\Omega_{a_2}$和$\bar{\Omega}_{a_1}\setminus\Omega_{b_1}$中各有一个正周期解，因此方程(4.1.1)至少有两个正周期解.

定理 4.3.3 假设$(H_1),(H_2)$成立，如果满足

$$\lim_{\substack{0\le t\le\omega\\ \|u\|\to 0}}\frac{f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}{\|u\|}=0, \tag{4.3.11}$$

$$\lim_{\substack{0\le t\le\omega\\ \|u\|\to\infty}}\frac{f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}{\|u\|}=0, \tag{4.3.12}$$

那么，对 $\forall\ \lambda>\lambda^{**}$，方程(4.1.1)至少有两个正周期解，其中 $\|u\|=\max\limits_{0\le t\le\omega}\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$，

$$\lambda^{*}=\frac{1}{\sigma_1 N_1}\inf_{r>0}\frac{r}{\min\limits_{\substack{0\le t\le\omega\\ \delta r\le u_i\le r\\ i=1,2,\cdots,m}} f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}.$$

证明　令 $p(r)=\dfrac{r}{\sigma_1 N_1 \min\limits_{\substack{0\le t\le\omega\\ \delta r\le u_i\le r\\ i=1,2,\cdots,m}} f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}$，容易证明 $p\in C((0,\infty),(0,\infty))$.

由(4.3.11)式和(4.3.12)式可得，$\lim\limits_{r\to 0}p(r)=\lim\limits_{r\to\infty}p(r)=\infty$. 因此，存在 $r_0>0$，使得 $p(r_0)=\min\limits_{r>0}p(r)=\lambda^{**}$，对于任意 $\lambda>\lambda^{**}$，存在 $b_1\in(0,r_0)$ 和 $b_2\in(r_0,\infty)$，使得 $p(b_1)=p(b_2)=\lambda$，因此有

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\ge\frac{b_1}{\lambda\sigma_1 N_1},\ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[\delta b_1,b_1],\ 0\le t\le\omega, \tag{4.3.13}$$

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\ge\frac{b_2}{\lambda\sigma_1 N_1},\ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[\delta b_2,b_2],\ 0\le t\le\omega, \tag{4.3.14}$$

另一方面，由(4.3.11)式和 $f(\theta)=0$ 可知，存在 $a_1\in(0,b_1)$，使得

$$\frac{f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}{u_i}\le\frac{1}{\lambda\sigma_2 N_2},\quad \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in(0,a_1],\quad 0\le t\le\omega, \tag{4.3.15}$$

因此，

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\le\frac{a_1}{\lambda\sigma_2 N_2},\ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in(0,a_1],\ 0\le t\le\omega, \tag{4.3.15$'$}$$

由(4.3.12)式可知，存在 $a\in(b_2,\infty)$ 使得 $\dfrac{f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}{u_i}\le\dfrac{1}{\lambda\sigma_2 N_2}$，$\forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in(a,\infty]$，

因此，

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\le\frac{a_2}{\lambda\sigma_2 N_2},\ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[0,a_2],\ 0\le t\le\omega, \tag{4.3.16}$$

其中 $a_2>a$ 且 $a_2>\lambda\eta\sigma_2 N_2$，$\eta=\max\limits_{\substack{0\le t\le w\\ 0\le u_i\le a\\ i=1,2,\cdots,m}} f(t,u_1,\cdots,u_m)$，由(4.3.13)式和(4.3.15)$'$式可知，

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\ge b_1\lambda^{-1}\sigma_1^{-1}N_1^{-1},\ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[\delta b_1,b_1],\ 0\le t\le\omega,$$

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\le a_1\lambda^{-1}\sigma_2^{-1}N_2^{-1},\ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in(0,a_1],\ 0\le t\le\omega,$$

由(4.3.14)式和(4.3.16)式可知,

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\ge b_2\lambda^{-1}\sigma_1^{-1}N_1^{-1},\ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[\delta b_2,b_2],\ 0\le t\le\omega,$$

$$f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)\le a_2\lambda^{-1}\sigma_2^{-1}N_2^{-1},\ \forall \underset{i=1,2,\cdots,m}{u_i}\in[b_2,a_2],\ 0\le t\le\omega,$$

由定理 4.3.1 可知, 方程(4.1.1)分别在$\bar{\Omega}_{b_1}\setminus\Omega_{a_1}$和$\bar{\Omega}_{a_2}\setminus\Omega_{b_2}$中各有一个正周期解, 因此方程(4.1.1)至少有两个正周期解.

定理 4.3.4 假设$(H_1),(H_2)$成立, 如果满足

$$\lim_{\substack{0\le t\le w\\ \|u\|\to 0}}\frac{f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}{\|u\|}=l,\ 0<l<\infty, \tag{4.3.17}$$

$$\lim_{\substack{0\le t\le w\\ \|u\|\to\infty}}\frac{f(t,u_1,u_2,\cdots,u_m)}{\|u\|}=L,\ 0<L<\infty, \tag{4.3.18}$$

且λ满足

$$\frac{1}{\delta\sigma_1N_1L}<\lambda<\frac{1}{\sigma_2N_2l}, \tag{4.3.19}$$

或

$$\frac{1}{\delta\sigma_1N_1l}<\lambda<\frac{1}{\sigma_2N_2L}, \tag{4.3.20}$$

那么方程(4.1.1)有一个正周期解.

证明 若(4.3.19)式成立, 则对任意的$\varepsilon>0$, 有

$$\frac{1}{\delta\sigma_1N_1(L-\varepsilon)}\le\lambda\le\frac{1}{\sigma_2N_2(l+\varepsilon)}, \tag{4.3.21}$$

由(4.3.17)式知, 存在$H_1>0$使得 $f(t,u_1,\cdots,u_m)\le(l+\varepsilon)\|u\|$, $0<\|u\|\le H_1$, $0\le t\le\omega$,

对于$\forall\, y\in\Omega_{H_1}$, 有

$$(Ay)(t) \le (l+\varepsilon)\lambda\int_0^\omega G(t,s)h(s,y(s))y(s-\tau_i(s))ds$$

$$\le (l+\varepsilon)\lambda\int_0^\omega G(t,s)h(s,y(s))\|y\|ds$$

$$\le (l+\varepsilon)\lambda\|y\|\sigma_2 N_2 \le \|y\|,$$

由 (4.3.18) 式可知，存在 $\bar{H}_2>0$ 使得，$f(t,u_1,\cdots,u_m)\ge(L-\varepsilon)\|u\|$, $\|u\|\ge\bar{H}_2$, $0\le t\le\omega$, 令 $H_2=\max\{2H_1,\delta\bar{H}_2\}$, 对于 $\forall\, y\in\Omega_{H_2}$, 有

$$(Ay)(t)\ge(L-\varepsilon)\lambda\int_0^\omega G(t,s)h(s,y(s))y(s-\tau(s))\,ds$$

$$\ge(L-\varepsilon)\lambda\int_0^\omega G(t,s)h(s,y(s))\delta\|y\|ds$$

$$\ge(L-\varepsilon)\lambda\delta\|y\|\sigma_1 N_1\ge\|y\|,$$

由定理 4.3.1 可知, 方程(4.1.1)有一个正周期解.

第5章 总 结

本文主要讨论了两类非线性常微分方程解的存在性问题.

本文第三章运用拓扑度理论和不动点理论对非线性奇异半正$(k,n-k)$多点边值问题, 即

$$(-1)^{n-k}\varphi^{n}(x)=h(x)f(\varphi(x)),0<x<1,n\geq 2,1\leq k\leq n-1, \tag{5.1.1}$$

分别在边值条件

$$\varphi(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i),\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1)=0,1\leq i\leq k-1,0\leq j\leq n-k-1; \tag{5.1.2}$$

$$\varphi(1)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i),\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(j)}(1)=0,0\leq i\leq k-1,1\leq j\leq n-k-1 \tag{5.1.3}$$

其中$\xi_i\in(0,1)$且$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$, $a_i\in[0,+\infty)$, 并且允许$h(x)$在$x=0$和$x=1$奇异, 假设:

(H_1) $\sum_{i=1}^{m-2}a_i\Phi_1(\xi_i)<1$;

$(H_1)'$ $\sum_{i=1}^{m-2}a_i\Phi_2(\xi_i)<1$;

(H_2) $h:(0,1)\to[0,+\infty)$连续, $h(x)\not\equiv 0$, 并且$\int_0^1 h(x)dx<+\infty$;

(H_3) $f:(-\infty,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$连续,

其中

$$\Phi_1(x)=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\int_x^1 t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}dt,$$

$$\Phi_2(x)=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\int_0^x t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}dt,$$

边值问题(5.1.1)、(5.1.2)或(5.1.1)、(5.1.3)在分别满足$(H_1)(H_2)(H_3)$或$(H_1)'(H_2)(H_3)$的条件下, 结合半正条件和线性全连续算子的第一特征值条件, 即

$$f(u)\geq -b, \forall u\in R,$$

$$\liminf_{u\to 0}\frac{f(u)}{|u|}>\lambda_1;\quad \limsup_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}<\lambda_1,$$

并且对 $h(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 非奇异的特殊情况, 即 $h(x)\equiv 1, x\in[0,1]$ 时的一类特殊方程非平凡解的存在性进行了讨论, 将以往结果进行了推广.

本文第四章运用非线性泛函分析中半序 Banach 空间的锥理论和不动点指数理论将一类单时滞泛函微分方程 $y'(t)=-a(t)y(t)+\lambda h(t)f(y(t-\tau(t)))$ 推广成多时滞泛函微分方程

$$y'(t)=-a(t,y(t))y(t)+h(t,y(t))f(t,y(t-\tau_1(t)),\cdots,y(t-\tau_m(t)))$$

并讨论了它的周期正解存在性的充分条件, 其中

$a,\ h\in C(\mathrm{R}\times\mathrm{R},\mathrm{R})$; $a(t+\omega,y)=a(t,y)$; $h(t+\omega,y)=h(t,y)$; $\tau(t+\omega)=\tau(t)$;

$f\in C([0,\infty),[0,\infty))$; $f(u)=0$ 当且仅当 $u=\theta$; $\tau\in C(\mathrm{R},\mathrm{R})$; $\lambda,\ \omega>0$.

参考文献

1. Leray J, Schauder J. Topologie et equations fonctionelles Ann [J], Sci Ecole Norm, 1934 , 3: 45-78.

2. Leray J . Les Problemes non Lineaires [J], L'enseignement Math, 1936, 35:139-151.

3. Mawhin J . Topological degree methods in nonlinear boundary value problems [M], R I : Amer Math Soc, 1979, 67-71.

4. Mawhin J . Topological methods for ordinary differential equations [M], BerlinHeidelberg: Spinger-Verlag, 1993, 89-96.

5. Usmani R A, Taylor P J . Finite difference method for solving $\left(p(x)y'\right)'+q(x)y=r(x)$, Intern [J], J Computer Math , 1983, 14: 277-293.

6. Ravi P Agarwal. Boundary problems for higher order differential equations [M], World Scientific Singapore, 1986, 123-126.

7. Thomas L H . The calculation of atomic fields [J], Proc Camb Phil Soc, 1927, 23: 542-548.

8. Fermi E . Un methodo statistico perla determunazione di alcune propieta dell'atoma [J], Rend Accard Naz Del Linceri Cl sci fis Mat e nat, 1927, 6: 602-607.

9. Donal O'Regan. Singular boundary value problems [M], Singapore: World Scientific Publishing, 1994, 235-251.

10. Aganwal R P, Regan D . Singular differential and integal equations with applications [M], Kluwer Academic Publishing, London, 2003, 137-145.

11. Kider P E . Unsteady flow of gas through a semi-infinite porous medium [J], J Appl Mech, 1957, 27: 329-332.

12. Aganwal R P, Regan D . Integal problems for differential [M], Difference and Integral Equtins [M], London: Kluwer Academic Publishers, 2001, 66-82.

13. 夏道行，吴卓人，严绍宗，舒五昌. 实变函数论与泛函分析下册[M], 北京：高等育出版社, 1985, 104-105.

14. 郭大钧，孙经先，刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法[M], 济南：山东科技出版社, 2005, 1.

15. 郭大钧. 非线性泛函分析[M], 第 2 版, 济南：山东科学技术出版社, 2001, 55-56.

16. 宋叔尼, 张国伟, 王晓敏. 实变函数与泛函分析[M], 北京: 科学出版社, 2006, 55-56.

17. 张国伟, 孙经先. 奇异$(k,n-k)$多点边值问题的正解[J], 数学学报, 2006, 49(2): 391-398.

18. Eloe P W, Henderson J . Inequalities based on a generalization of concavity [J], Proc Amer Math Soc , 1997, 125(7): 2103-2107.

19. Wong P, Agarwal R P , Extension of continuous and discrete inequalities due to Eloe and Henderson [J], Nonlinear Analysis, 1998, 34: 479-487.

20. 蒋达清. 奇异$(k,n-k)$共轭边值问题的正解[J], 数学学报, 2001, 44: 541-548.

21. Kong L B, Wang J Y. The Green's Function for $(k,n-k)$ conjugate boundary value problems and its applications [J], J Math Anal Appl, 2001, 255: 404-422.

22. Xi L L, Wan T L . Existence and uniqueness of positive periodic solutions of functional differential equations [J], J Math Anal Appl, 2004, 293: 28-39.

23. Cheng S S, Zhang G . Existence of positive solutions for non-autonomous functional differential equations [J], J Differential Equations, 2001, 59: 1-8.

24. Li Y K, Zhu L F. Positive periodic solutions of nonlinear functional differential equations [J], Applied Mathematics and Computation, 2004, 156: 329-339.

25. Jiang D Q, Donal O'Regan, Agarwal R P . Optimal existence theory for singule and multiple positive periodic solutions to functional difference equations [J], Applied Mathematics and Computation, 2005, 161: 441-462.

26. Wang H Y. Positive periodic solutions of functional differential equations [J], J Differential equations, 2004, 202:354-366.

致 谢

本文是在导师孙涛副教授的悉心指导下完成的. 从师两年多来, 孙老师渊博的学识, 严谨的治学态度给我留下极为深刻的印象, 使我受益匪浅. 无论是做学问还是做人, 导师都是我一生学习的典范. 从论文的选题到论文的写作无不凝聚着导师辛勤的汗水和心血, 尤其是当我在完成论文的过程中遇到困难时, 导师给与的鼓励将永远激励我. 在此向敬爱的孙老师表示衷心的感谢, 祝福老师身体健康, 生活幸福!

同时还要感谢东北大学理学院的刘会立教授、宋叔尼教授、张国伟副教授、李建华副教授、张薇副教授、以及于延华老师、杨云老师和袁媛老师的帮助.

在学习期间我还有幸结识了吕晓辉、李冰冰等师姐师妹, 感谢她们对我的帮助, 在与她们相处的日子里, 不仅开放式的学术交流和探讨使我受益匪浅, 而且她们的热情帮助也让我感到了友谊的温暖.

最后, 特别感谢我的亲人, 谢谢您们对我的照顾和支持, 使我能够专心研究, 顺利完成论文. 祝福我的亲人身体健康, 永远快乐幸福! 谨以此文献给我最挚爱的父母.