高一数学必修 1知识网络

集合

- 集合
  - 集合与元素
    - (1) 元素与集合的关系：属于（ $\in$ ）和不属于（ $\notin$ ）
    - (2) 集合中元素的特性：确定性、互异性、无序性
    - (3) 集合的分类：按集合中元素的个数多少分为：有限集、无限集、空集
    - (4) 集合的表示方法：列举法、描述法（自然语言描述、特征性质描述）、图示法、区间法
  - 集合与集合
    - 关系
      - 子集：若 $x\in A \Rightarrow x\in B$，则 $A\subseteq B$，即A是B的子集。
      - 注
        - 1、若集合 A中有 n个元素，则集合 A的子集有 2^n 个，真子集有 (2^n-1) 个。
        - 2、任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$
        - 3、对于集合 A,B,C，如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.
        - 4、空集是任何集合的（真）子集。
      - 真子集：若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$（即至少存在 $x_0\in B$ 但 $x_0\notin A$），则A是B的真子集。
      - 集合相等：$A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B \Leftrightarrow A=B$
    - 运算
      - 交集
        - 定义：$A\cap B=\{x/x\in A且x\in B\}$
        - 性质：$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$
      - 并集
        - 定义：$A\cup B=\{x/x\in A或x\in B\}$
        - 性质：$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$，$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$
      - $Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cap B)$
      - 补集
        - 定义：$C_U A=\{x/x\in U且x\notin A\}=\bar{A}$
        - 性质：$(C_U A)\cap A=\varnothing$，$(C_U A)\cup A=U$，$C_U(C_U A)=A$，$C_U(A\cap B)=(C_U A)\cup(C_U B)$，$C_U(A\cup B)=(C_U A)\cap(C_U B)$

函数

函数

函数及其表示

映射定义：设 A，B 是两个非空的集合，如果按某一个确定的对应关系，使对于集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，那么就称对应 $f: \to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个映射

定义
- 传统定义：如果在某变化中有两个变量 x，y，并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应关系 f，y 都有唯一确定的值和它对应。那么 y 就是 x 的函数。记作 $y=f(x)$.
- 近代定义：函数是从一个数集到另一个数集的映射。

函数的三要素
- 定义域
- 值域
- 对应法则

函数的表示方法
- 解析法
- 列表法
- 图象法

函数的基本性质

单调性
- 传统定义：在区间 $[a,b]$ 上，若 $a\le x_1<x_2\le b$，如 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，$[a,b]$ 是递增区间；如 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递减，$[a,b]$ 是的递减区间。
- 导数定义：在区间 $[a,b]$ 上，若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，$[a,b]$ 是递增区间；如 $f'(x)<0$ 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递减，$[a,b]$ 是的递减区间。

最值
- 最大值：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：（1）对于任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\le M$；（2）存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$。则称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值
- 最小值：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 N 满足：（1）对于任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\ge N$；（2）存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=N$。则称 N 是函数 $y=f(x)$ 的最小值

奇偶性
- (1) $f(-x)=-f(x)$，$x\in$ 定义域 D，则 $f(x)$ 叫做奇函数，其图象关于原点对称。
- (2) $f(-x)=f(x)$，$x\in$ 定义域 D，则 $f(x)$ 叫做偶函数，其图象关于 y 轴对称。
- 奇偶函数的定义域关于原点对称

周期性：在函数 $f(x)$ 的定义域上恒有 $f(x+T)=f(x)(T\ne0$ 的常数$)$ 则 $f(x)$ 叫做周期函数，T 为周期；T 的最小正值叫做 $f(x)$ 的最小正周期，简称周期

函数图象的画法

（1）描点连线法：列表、描点、连线

（2）变换法

平移变换
- 向左平移 a 个单位：$y_1=y, x_1-a=x \Rightarrow y=f(x+a)$
- 向右平移 a 个单位：$y_1=y, x_1+a=x \Rightarrow y=f(x-a)$
- 向上平移 b 个单位：$x_1=x, y_1+b=y \Rightarrow y-b=f(x)$
- 向下平移 b 个单位：$x_1=x, y_1-b=y \Rightarrow y+b=f(x)$

伸缩变换
- 横坐标变换：把各点的横坐标 x_1 缩短（当 $w>1$ 时）或伸长（当 $0<w<1$ 时）到原来的 $1/w$ 倍（纵坐标不变），即 $x_1=wx \Rightarrow y=f(wx)$
- 纵坐标变换：把各点的纵坐标 y_1 伸长（$A>1$）或缩短（$0<A<1$）到原来的 A 倍（横坐标不变），即 $y_1=y/A \Rightarrow y=f(x)$

对称变换
- 关于点 (x_0,y_0) 对称：$\begin{cases}x+x_1=2x_0\\ y+y_1=2y_0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=2x_0-x\\ y_1=2y_0-y\end{cases} \Rightarrow 2y_0-y=f(2x_0-x)$
- 关于直线 $x=x_0$ 对称：$\begin{cases}x+x_1=2x_0\\ y=y_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=2x_0-x\\ y_1=y\end{cases} \Rightarrow y=f(2x_0-x)$
- 关于直线 $y=y_0$ 对称：$\begin{cases}x=x_1\\ y_1+y=2y_0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=x\\ y_1=2y_0-y\end{cases} \Rightarrow 2y_0-y=f(x)$
- 关于直线 $y=x$ 对称：$\begin{cases}x=x_1\\ y=y_1\end{cases} \Rightarrow y=f^{-1}(x)$

附：

一、函数的定义域的常用求法：

1、分式的分母不等于零； 2、偶次方根的被开方数大于等于零； 3、对数的真数大于零； 4、指数函数和对数函数的底数大于零且不等于 1；5、三角函数正切函数 $y=\tan x$ 中 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$；余切函数 $y=\cot x$ 中；6、如果函数是由实际意义确定的解析式，应依据自变量的实际意义确定其取值范围。

二、函数的解析式的常用求法：

1、定义法； 2、换元法； 3、待定系数法； 4、函数方程法； 5、参数法； 6、配方法

三、函数的值域的常用求法：

1、换元法； 2、配方法； 3、判别式法； 4、几何法； 5、不等式法； 6、单调性法； 7、直接法

四、函数的最值的常用求法：

1、配方法； 2、换元法； 3、不等式法； 4、几何法； 5、单调性法

五、函数单调性的常用结论：

1、若 $f(x),g(x)$ 均为某区间上的增（减）函数，则 $f(x)+g(x)$ 在这个区间上也为增（减）函数

2、若 $f(x)$ 为增（减）函数，则 $-f(x)$ 为减（增）函数

3、若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的单调性相同，则 $y=f[g(x)]$ 是增函数；若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的单调性不同，则 $y=f[g(x)]$ 是减函数。

4、奇函数在对称区间上的单调性相同，偶函数在对称区间上的单调性相反。

5、常用函数的单调性解答：比较大小、求值域、求最值、解不等式、证不等式、作函数图象。

六、函数奇偶性的常用结论：

1、如果一个奇函数在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$，如果一个函数 $y=f(x)$ 既是奇函数又是偶函数，则 $f(x)=0$（反之不成立）

2、两个奇（偶）函数之和（差）为奇（偶）函数；之积（商）为偶函数。

3、一个奇函数与一个偶函数的积（商）为奇函数。

4、两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的函数，只要其中有一个是偶函数，那么该复合函数就是偶函数；当两个函数都是奇函数时，该复合函数是奇函数。

5、若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，则 $f(x)$ 可以表示为 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，该式的特点是：右端为一个奇函数和一个偶函数的和。

- 函数的应用
  - 函数与方程
    - 零点与根的关系
      - 零点：对于函数 $y=f(x)$，我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$ 的零点。
      - 定理：如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有零点。即存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$，这个 c 也是方程 $f(x)=0$ 的根。（反之不成立）
      - 关系：方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点
    - 二分法求方程的近似解
      - (1) 确定区间 $[a,b]$，验证 $f(a)\cdot f(b)<0$，给定精确度 ε；
      - (2) 求区间 (a,b) 的中点 c；
      - (3) 计算 $f(c)$；
        - ①若 $f(c)=0$，则 c 就是函数的零点；
        - ②若 $f(a)\cdot f(c)<0$，则令 $b=c$（此时零点 $x_0\in(a,b)$）；
        - ③若 $f(c)\cdot f(b)<0$，则令 $a=c$（此时零点 $x_0\in(c,b)$）；
      - (4) 判断是否达到精确度 ε：即若 $|a-b|<\varepsilon$ 则得到零点的近似值 a（或 b）；否则重复 2～4。
  - 函数模型及其应用
    - 几类不同的增长函数模型
    - 用已知函数模型解决问题
    - 建立实际问题的函数模型

- 基本初等函数
  - 指数函数
    - 指数的运算
      - 根式：$\sqrt[n]{a}$，n 为根指数，a 为被开方数
      - 分数指数幂：$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$
      - 性质
        - $a^r a^s=a^{r+s}\ (a>0,\ r,s\in Q)$
        - $(a^r)^s=a^{rs}\ (a>0,\ r,s\in Q)$
        - $(ab)^r=a^r b^s\ (a>0,\ b>0,\ r\in Q)$
    - 指数函数
      - 定义：一般地把函数 $y=a^x\ (a>0$ 且 $a\neq1)$ 叫做指数函数。
      - 性质：见表 1
  - 对数函数
    - 对数的运算
      - 对数：$x=\log_a N$，a 为底数，N 为真数
      - 性质
        - $\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$；
        - $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；
        - $\log_a M^n=n\log_a M$；$(a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0)$
        - 换底公式：$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}\ (a,c>0$ 且 $a,c\neq1,\ b>0)$
    - 对数函数
      - 定义：一般地把函数 $y=\log_a x\ (a>0$ 且 $a\neq1)$ 叫做对数函数
      - 性质：见表 1
  - 幂函数
    - 定义：一般地，函数 $y=x^{\alpha}$ 叫做幂函数，x 是自变量，α 是常数。
    - 性质：见表 2

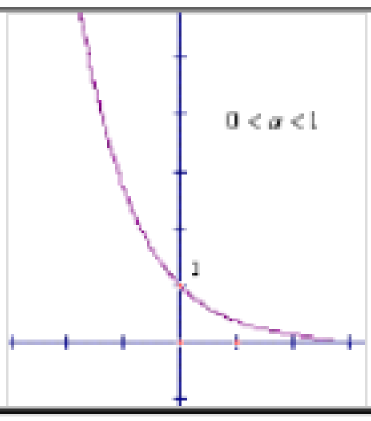
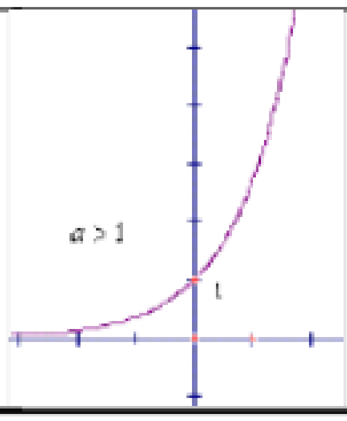
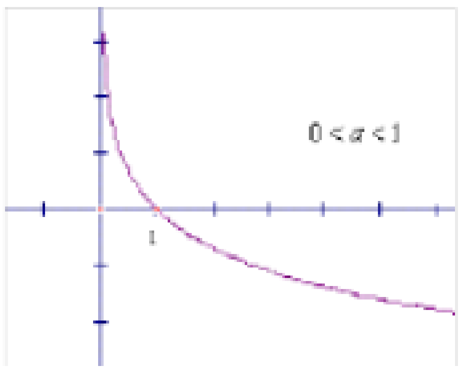
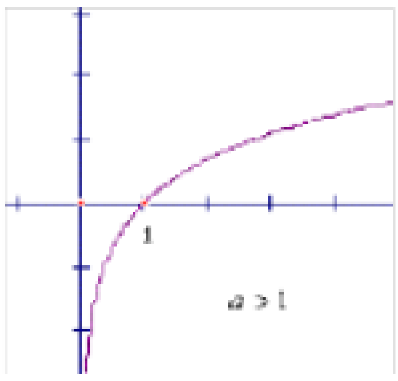
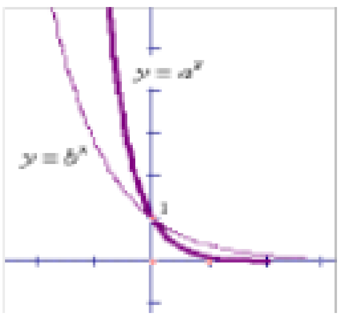
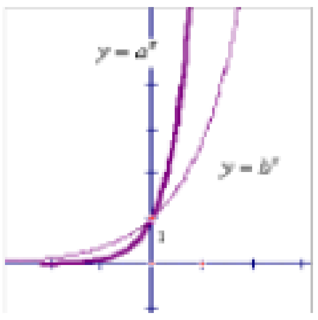
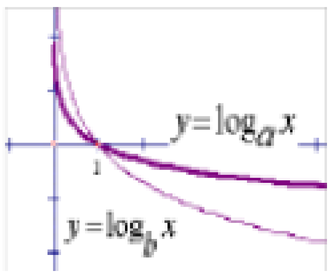
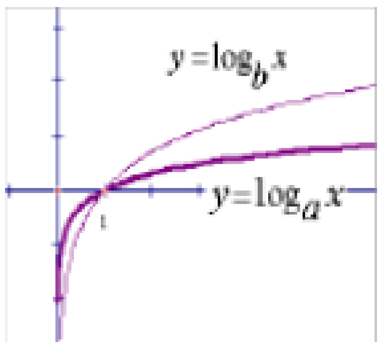
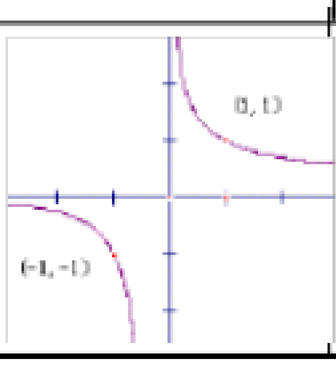
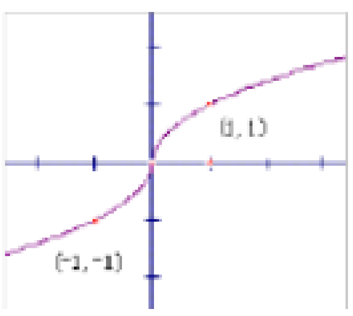
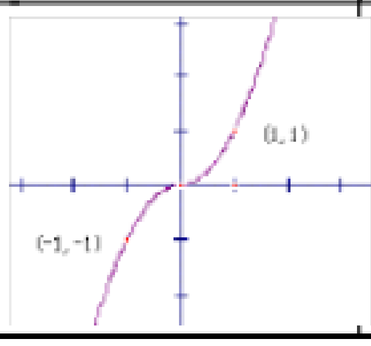
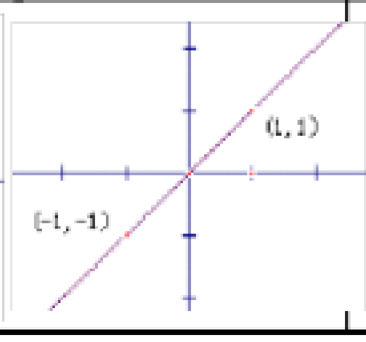
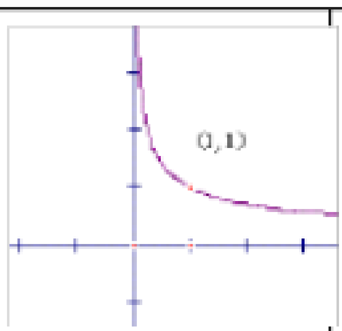
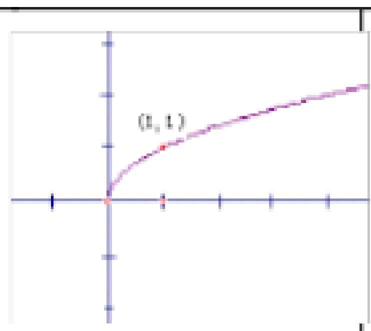
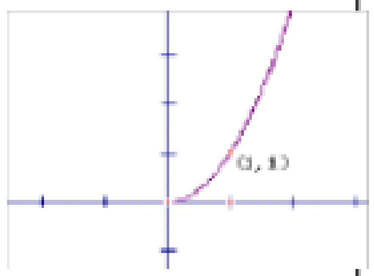
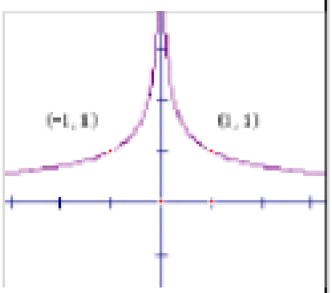
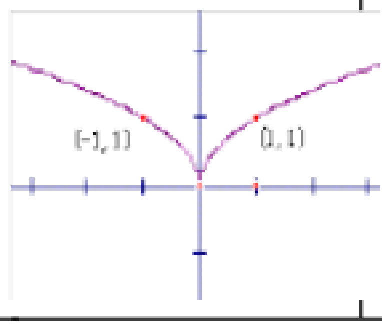
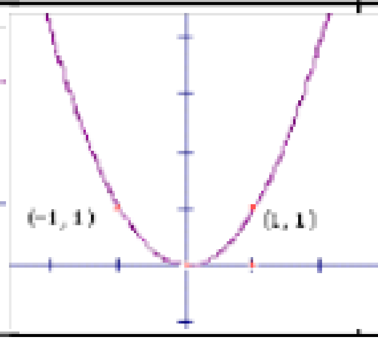
表1	指数函数 $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$		对数数函数 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$	
定义域	$x\in R$		$x\in(0,+\infty)$	
值域	$y\in(0,+\infty)$		$y\in R$	
图象				
性质	过定点 (0,1)		过定点 (1,0)	
	减函数	增函数	减函数	增函数
	$x\in(-\infty,0)$时，$y\in(1,+\infty)$ $x\in(0,+\infty)$时，$y\in(0,1)$	$x\in(-\infty,0)$时，$y\in(0,1)$ $x\in(0,+\infty)$时，$y\in(1,+\infty)$	$x\in(0,1)$时，$y\in(0,+\infty)$ $x\in(1,+\infty)$时，$y\in(-\infty,0)$	$x\in(0,1)$时，$y\in(-\infty,0)$ $x\in(1,+\infty)$时，$y\in(0,+\infty)$
	 a < b	 a > b	 a < b	 a > b

表 2	幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in R)$				
$\alpha=\frac{p}{q}$	$\alpha<0$	$0<\alpha<1$	$\alpha>1$	$\alpha=1$	
p为奇数 q为奇数					奇函数

p为奇数 q为偶数					
p为偶数 q为奇数					偶函数
第一象限性质	减函数	增函数			过定点（0,1)

高中数学必修 2 知识点

一、直线与方程

（1）直线的倾斜角

定义：x 轴正向与直线向上方向之间所成的角叫直线的倾斜角。特别地，当直线与 x 轴平行或重合时，我们规定它的倾斜角为 0 度。因此，倾斜角的取值范围是 $0°\le\alpha<180°$

（2）直线的斜率

①定义：倾斜角不是 90°的直线，它的倾斜角的正切叫做这条直线的斜率。直线的斜率常用 k 表示。即 $k=\tan\alpha$。斜率反映直线与轴的倾斜程度。

当 $\alpha\in\left[0°,90°\right)$时，$k\ge 0$；当 $\alpha\in\left(90°,180°\right)$时，$k<0$；当 $\alpha=90°$时，k 不存在。

②过两点的直线的斜率公式：$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\ne x_2)$

注意下面四点：(1) 当 $x_1=x_2$ 时，公式右边无意义，直线的斜率不存在，倾斜角为 90°；
(2) k 与 P_1、P_2 的顺序无关；(3) 以后求斜率可不通过倾斜角而由直线上两点的坐标直接求得；
(4) 求直线的倾斜角可由直线上两点的坐标先求斜率得到。

（3）直线方程

①点斜式：$y-y_1=k(x-x_1)$ 直线斜率 k，且过点 (x_1,y_1)

注意：当直线的斜率为 0°时，k=0，直线的方程是 $y=y_1$。

当直线的斜率为 90°时，直线的斜率不存在，它的方程不能用点斜式表示．但因 l 上每一点的横坐标都等于 x_1，所以它的方程是 $x=x_1$。

②斜截式：$y=kx+b$，直线斜率为 k，直线在 y 轴上的截距为 b

③两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$（$x_1\ne x_2,y_1\ne y_2$）直线两点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)

④截矩式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

其中直线 l 与 x 轴交于点 $(a,0)$，与 y 轴交于点 $(0,b)$，即 l 与 x 轴、y 轴的截距分别为 a,b。

⑤一般式：$Ax+By+C=0$（A，B 不全为 **0**）

注意：①各式的适用范围②特殊的方程如：

平行于 x 轴的直线：$y=b$（b 为常数）；平行于 y 轴的直线：$x=a$（a 为常数）；

（5）直线系方程：即具有某一共同性质的直线

（一）平行直线系

平行于已知直线 $A_0x+B_0y+C_0=0$（A_0,B_0 是不全为 0 的常数）的直线系：$A_0x+B_0y+C=0$（C 为常数）

（二）过定点的直线系

（ⅰ）斜率为 k 的直线系：$y-y_0=k(x-x_0)$，直线过定点 (x_0,y_0)；

（ⅱ）过两条直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方程为

$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（$\lambda$ 为参数），其中直线 l_2 不在直线系中。

（6）两直线平行与垂直

当 $l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$ 时，

$l_1\,//\,l_2\Leftrightarrow k_1=k_2,b_1\ne b_2$；$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$

注意：利用斜率判断直线的平行与垂直时，要注意斜率的存在与否。

（7）两条直线的交点

$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交

交点坐标即方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 的一组解。

方程组无解 $\Leftrightarrow l_1 // l_2$；方程组有无数解 $\Leftrightarrow l_1$ 与 l_2 重合

（8）两点间距离公式： 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是平面直角坐标系中的两个点，

则 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

（9）点到直线距离公式： 一点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l_1: Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

（10）两平行直线距离公式

在任一直线上任取一点，再转化为点到直线的距离进行求解。

二、圆的方程

1、圆的定义： 平面内到一定点的距离等于定长的点的集合叫圆，定点为圆心，定长为圆的半径。

2、圆的方程

（1）标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心 (a,b)，半径为 r；

（2）一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程表示圆，此时圆心为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径为 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，表示一个点；当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程不表示任何图形。

（3）求圆方程的方法：

一般都采用待定系数法：先设后求。 确定一个圆需要三个独立条件，若利用圆的标准方程，需求出 a，b，r；若利用一般方程，需要求出 D，E，F；

另外要注意多利用圆的几何性质：如弦的中垂线必经过原点，以此来确定圆心的位置。

3、直线与圆的位置关系：

直线与圆的位置关系有相离，相切，相交三种情况，基本上由下列两种方法判断：

（1）设直线 $l: Ax+By+C=0$，圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心 $C(a,b)$ 到 l 的距离为 $d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，则有 $d>r \Leftrightarrow l$ 与 C 相离；$d=r\Leftrightarrow l$ 与 C 相切；$d<r\Leftrightarrow l$ 与 C 相交

（2）设直线 $l: Ax+By+C=0$，圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，先将方程联立消元，得到一个一元二次方程之后，令其中的判别式为 Δ，则有

$\Delta<0\Leftrightarrow l$ 与 C 相离；$\Delta=0\Leftrightarrow l$ 与 C 相切；$\Delta>0\Leftrightarrow l$ 与 C 相交

注：如果圆心的位置在原点，可使用公式 $xx_0+yy_0=r^2$ 去解直线与圆相切的问题，其中 (x_0,y_0) 表示切点坐标， r 表示半径。

(3) 过圆上一点的切线方程：

①圆 $x^2+y^2=r^2$，圆上一点为 (x_0, y_0)，则过此点的切线方程为 $xx_0+yy_0=r^2$ （课本命题）.

②圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆上一点为 (x_0, y_0)，则过此点的切线方程为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$（课本命题的推广）.

4、圆与圆的位置关系： 通过两圆半径的和（差），与圆心距（ d）之间的大小比较来确定。

设圆 $C_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r^2$，$C_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=R^2$

两圆的位置关系常通过两圆半径的和（差），与圆心距（ d）之间的大小比较来确定。

当 $d>R+r$ 时两圆外离，此时有公切线四条；

当 $d=R+r$ 时两圆外切，连心线过切点，有外公切线两条，内公切线一条；

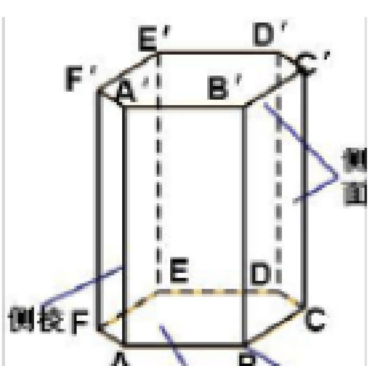
当 $R-r<d<R+r$ 时两圆相交，连心线垂直平分公共弦，有两条外公切线；

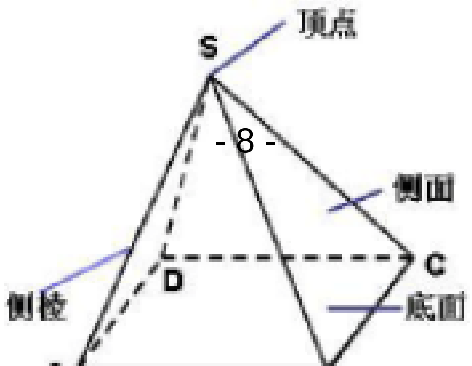
当 $d=|R-r|$ 时，两圆内切，连心线经过切点，只有一条公切线；

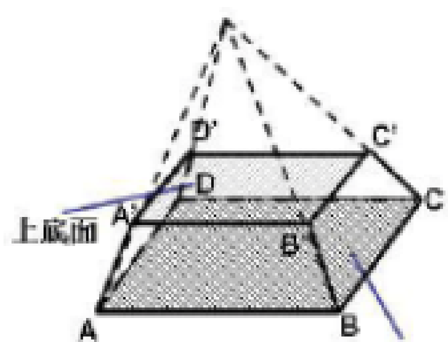
当 $d<|R-r|$ 时，两圆内含；当 $d=0$ 时，为同心圆。

三、立体几何初步

1、柱、锥、台、球的结构特征







（1）棱柱：定义 ：有两个面互相平行，其余各面都是四边形，且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体。

分类 ：以底面多边形的边数作为分类的标准分为三棱柱、四棱柱、五棱柱等。

表示 ：用各顶点字母，如五棱柱 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ 或用对角线的端点字母，如五棱柱 AD'

几何特征 ：两底面是对应边平行的全等多边形；侧面、对角面都是平行四边形；侧棱平行且相等；平行于底面的截面是与底面全等的多边形。

（2）棱锥

定义 ：有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体

分类 ：以底面多边形的边数作为分类的标准分为三棱锥、四棱锥、五棱锥等

表示 ：用各顶点字母，如五棱锥 $P-A'B'C'D'E'$

几何特征 ：侧面、对角面都是三角形；平行于底面的截面与底面相似，其相似比等于顶点到截面距离与高的比的平方。

（3）棱台：定义 ：用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，截面和底面之间的部分

分类 ：以底面多边形的边数作为分类的标准分为三棱态、四棱台、五棱台等

表示 ：用各顶点字母，如五棱台 $P-A'B'C'D'E'$

几何特征 ：①上下底面是相似的平行多边形 ②侧面是梯形 ③侧棱交于原棱锥的顶点

（4）圆柱：定义 ：以矩形的一边所在的直线为轴旋转 ,其余三边旋转所成的曲面所围成的几何体

几何特征 ：①底面是全等的圆；②母线与轴平行；③轴与底面圆的半径垂直；④侧面展开图是一个矩形。

（5）圆锥：定义 ：以直角三角形的一条直角边为旋转轴 ,旋转一周所成的曲面所围成的几何体

几何特征 ：①底面是一个圆；②母线交于圆锥的顶点；③侧面展开图是一个扇形。

（6）圆台：定义： 用一个平行于圆锥底面的平面去截圆锥，截面和底面之间的部分

几何特征： ①上下底面是两个圆；②侧面母线交于原圆锥的顶点；③侧面展开图是一个弓形。

（7）球体：定义： 以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的几何体

几何特征： ①球的截面是圆；②球面上任意一点到球心的距离等于半径。

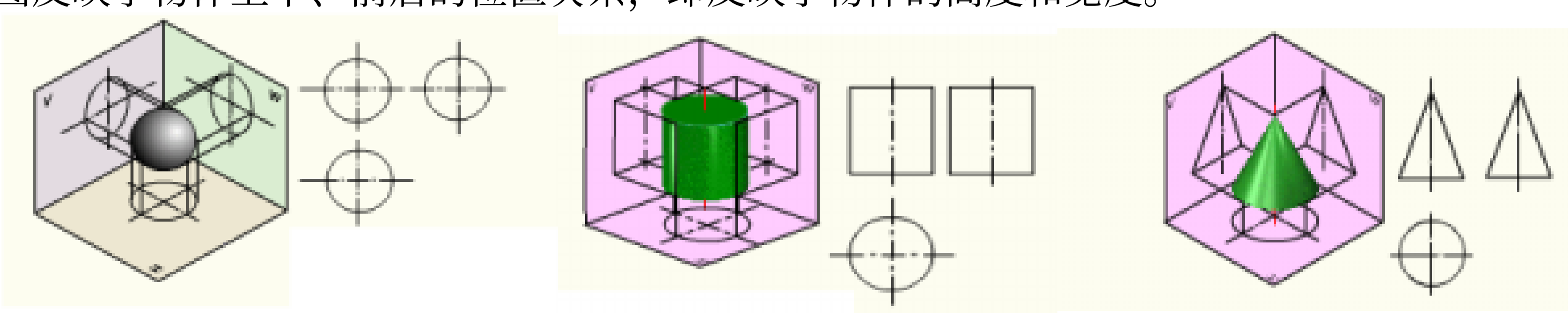
2、空间几何体的三视图

定义三视图：正视图（光线从几何体的前面向后面正投影） ；侧视图（从左向右） 、俯视图（从上向下）

注：正视图反映了物体上下、左右的位置关系，即反映了物体的高度和长度；

俯视图反映了物体左右、前后的位置关系，即反映了物体的长度和宽度；

侧视图反映了物体上下、前后的位置关系，即反映了物体的高度和宽度。



3、空间几何体的直观图——斜二测画法

斜二测画法特点： ①原来与 x 轴平行的线段仍然与 x 平行且长度不变；

②原来与 y 轴平行的线段仍然与 y 平行，长度为原来的一半。

4、柱体、锥体、台体的表面积与体积

（1）几何体的表面积为几何体各个面的面积的和。

（2）特殊几何体表面积公式（ **c** 为底面周长， **h** 为高， h' 为斜高， **l** 为母线）

$$S_{直棱柱侧面积}=ch \quad S_{圆柱侧}=2\pi rh \quad S_{正棱锥侧面积}=\frac{1}{2}ch' \quad S_{圆锥侧面积}=\pi rl$$

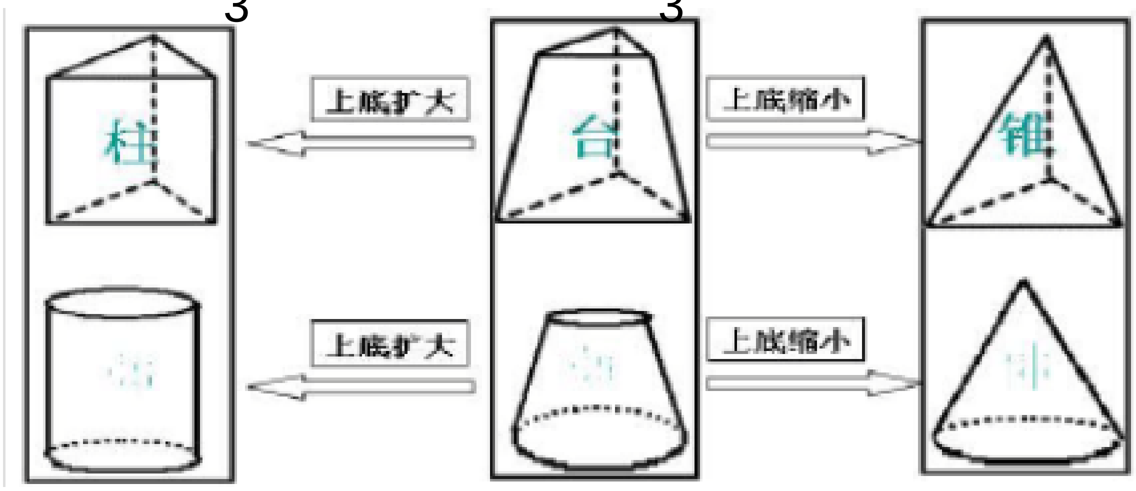
$$S_{正棱台侧面积}=\frac{1}{2}(c_1+c_2)h' \quad S_{圆台侧面积}=(r+R)\pi l$$

$$S_{圆柱表}=2\pi r(r+l) \quad S_{圆锥表}=\pi r(r+l) \quad S_{圆台表}=\pi(r^2+rl+Rl+R^2)$$

（3）柱体、锥体、台体的体积公式

$V_{柱}=Sh$ $V_{圆柱}=Sh=\pi r^2h$ $V_{锥}=\frac{1}{3}Sh$ $V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$

$V_{台}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$ $V_{圆台}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h=\frac{1}{3}\pi(r^2+rR+R^2)h$



（4）球体的表面积和体积公式： $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$ ； $S_{球面}=4\pi R^2$

4、空间点、直线、平面的位置关系

（1）平面

①平面的概念： A.描述性说明； B.平面是无限伸展的；

②平面的表示： 通常用希腊字母 α、β、γ 表示，如平面 α（通常写在一个锐角内）；

也可以用两个相对顶点的字母来表示，如平面 BC。

③点与平面的关系： 点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 A 不在平面 α 内，记作 $A\notin\alpha$

点与直线的关系： 点 A 的直线 l 上，记作： $A\in l$；点 A 在直线 l 外，记作 $A\notin l$；

直线与平面的关系 ：直线 l 在平面 α 内，记作 $l\subset\alpha$；直线 l 不在平面 α 内，记作 $l\not\subset\alpha$。

（2）公理 1：如果一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线是所有的点都在这个平面内。

（即直线在平面内，或者平面经过直线）

应用： 检验桌面是否平；判断直线是否在平面内

用符号语言表示公理 1： $A\in l, B\in l, A\in\alpha, B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$

（3）公理 2：经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面。

推论： 一直线和直线外一点确定一平面；两相交直线确定一平面；两平行直线确定一平面。

公理 2 及其推论作用： ①它是空间内确定平面的依据②它是证明平面重合的依据

（4）公理 3：如果两个不重合的平面有一个公共点 ,那么它们有且只有一条过该点的公共直线

符号： 平面 α 和 β 相交，交线是 a，记作 $\alpha\cap\beta=a$。

符号语言： $P\in A\cap B\Rightarrow A\cap B=l, P\in l$

公理 3 的作用：

①它是判定两个平面相交的方法。

②它说明两个平面的交线与两个平面公共点之间的关系：交线必过公共点。

③它可以判断点在直线上，即证若干个点共线的重要依据。

（5）公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行

（6）空间直线与直线之间的位置关系

①异面直线定义： 不同在任何一个平面内的两条直线

②异面直线性质 ：既不平行，又不相交。

③异面直线判定： 过平面外一点与平面内一点的直线与平面内不过该店的直线是异面直线

④异面直线所成角 ：直线 a、b 是异面直线，经过空间任意一点 O，分别引直线 $a'\parallel a$，$b'\parallel b$，则把直线 a 和 b 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a和 b所成的角。两条异面直线所成角的范围是 （0°，90°]，若两条异面直线所成的角是直角，我们就说这 两条异面直线互相垂直。

说明 ：（1）判定空间直线是异面直线方法：①根据异面直线的定义；②异面直线的判定定理

（2）在异面直线所成角定义中，空间一点 O 是任取的，而和点 O 的位置无关。

②求异面直线所成角步骤：

A、利用定义构造角，可固定一条，平移另一条，或两条同时平移到某个特殊的位置，顶点选在特殊的位置上。 B、证明作出的角即为所求角 C、利用三角形来求角

（7）等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，那么这两角相等或互补。

（8）空间直线与平面之间的位置关系

直线在平面内 —— 有无数个公共点.

直线不在平面内（或直线在平面外）$\begin{cases}\text{相交——只有一个公共点.}\\ \text{平行——没有公共点.}\end{cases}$

三种位置关系的符号表示： $a\subset\alpha$ $a\cap\alpha=A$ $a\parallel\alpha$

（9）平面与平面之间的位置关系： 平行——没有公共点； $\alpha\parallel\beta$

相交——有一条公共直线。 $\alpha\cap\beta=b$

5、空间中的平行问题

（1）直线与平面平行的判定及其性质

线面平行的判定定理：平面外一条直线与此平面内一条直线平行，则该直线与此平面平行。

线线平行 $\Rightarrow$ 线面平行

线面平行的性质定理： 如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行。线面平行 $\Rightarrow$ 线线平行

（2）平面与平面平行的判定及其性质

两个平面平行的判定定理

（1）如果一个平面内的两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行

（线面平行→面面平行），

（2）如果在两个平面内，各有两组相交直线对应平行，那么这两个平面平行。

（线线平行→面面平行），

（3）垂直于同一条直线的两个平面平行，

两个平面平行的性质定理

（1）如果两个平面平行，那么某一个平面内的直线与另一个平面平行。 （面面平行→线面平行）

（2）如果两个平行平面都和第三个平面相交，那么它们的交线平行。 （面面平行→线线平行）

7、空间中的垂直问题

（1）线线、面面、线面垂直的定义

①两条异面直线的垂直：如果两条异面直线所成的角是直角，就说这两条异面直线互相垂直。

②线面垂直：如果一条直线和一个平面内的任何一条直线垂直，就说这条直线和这个平面垂直。

③平面和平面垂直：如果两个平面相交，所成的二面角（从一条直线出发的两个半平面所组成的图形）是直二面角（平面角是直角），就说这两个平面垂直。

（2）垂直关系的判定和性质定理

①线面垂直判定定理和性质定理

判定定理：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直这个平面。

性质定理：如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行。

②面面垂直的判定定理和性质定理

判定定理：如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直。

性质定理：如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于他们的交线的直线垂直于另一个平面。

9、空间角问题

（1）直线与直线所成的角

①两平行直线所成的角：规定为 0°。

②两条相交直线所成的角：两条直线相交其中不大于直角的角，叫这两条直线所成的角。

③两条异面直线所成的角：过空间任意一点 O，分别作与两条异面直线 a，b 平行的直线 a'，b'，形成两条相交直线，这两条相交直线所成的不大于直角的角叫做两条异面直线所成的角。

（2）直线和平面所成的角

①平面的平行线与平面所成的角：规定为 0°。②平面的垂线与平面所成的角：规定为 90°。

③平面的斜线与平面所成的角：平面的一条斜线和它在平面内的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角。

求斜线与平面所成角的思路类似于求异面直线所成角：“一作，二证，三计算”。

在“作角”时依定义关键作射影，由射影定义知关键在于斜线上一点到面的垂线，

在解题时，注意挖掘题设中两个主要信息：（1）斜线上一点到面的垂线；（2）过斜线上的一点或过斜线的平面与已知面垂直，由面面垂直性质易得垂线。

（3）二面角和二面角的平面角

①二面角的定义：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面。

②二面角的平面角：以二面角的棱上任意一点为顶点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫二面角的平面角。

③直二面角：平面角是直角的二面角叫直二面角。

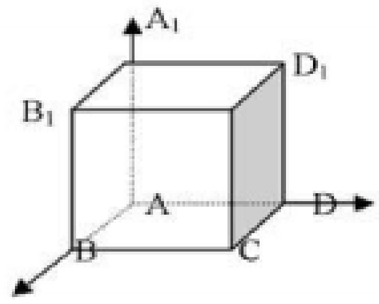
两相交平面如果所组成的二面角是直二面角，那么这两个平面垂直；反过来，如果两个平面垂直，那么所成的二面角为直二面角

④求二面角的方法

定义法：在棱上选择有关点，过这个点分别在两个面内作垂直于棱的射线得到平面角

垂面法：已知二面角内一点到两个面的垂线时，过两垂线作平面与两个面的交线所成的角为二面角的平面角

7、空间直角坐标系



（**1**）定义：如图，$OBCD-D'A'B'C'$ 是单位正方体．以 A 为原点，分别以 OD, OA', OB 的方向为正方向，建立三条数轴 x轴.y 轴.z 轴。这时建立了一个空间直角坐标系 Oxyz.

1）O叫做坐标原点 2）x 轴，y 轴，z 轴叫做坐标轴．3）过每两个坐标轴的平面叫做坐标面。

（**2**）右手表示法：令右手大拇指、食指和中指相互垂直时，可能形成的位置。大拇指指向为 x 轴正方向，食指指向为 y 轴正向，中指指向则为 z 轴正向，这样也可以决定三轴间的相位置。

（**3**）任意点坐标表示：空间一点 M的坐标可以用有序实数组 (x, y, z) 来表示，有序实数组 (x, y, z) 叫做点 M在此空间直角坐标系中的坐标，记作 $M(x, y, z)$（x 叫做点 M的横坐标，y 叫做点 M的纵坐标，z 叫做点 M的竖坐标）

（**4**）空间两点距离坐标公式：$\mathbf{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$

高一数学必修 3公式总结以及例题

§1 算法初步

秦九韶算法：通过一次式的反复计算逐步得出高次多项式的值，对于一个 **n** 次多项式，只要作 **n** 次乘法和 **n** 次加法即可。表达式如下：

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 = ((((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + ...)x + a_2)x + a_1$$

例题：秦九韶算法计算多项式 $3x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 8x + 1$，当 $x = 0.4$ 时，

需要做几次加法和乘法运算？答案： 6 ， 6

即：$(((((3x+4)x+5)x+6)x+7)x+8)x+1$

理解算法的含义：一般而言，对于一类问题的机械的、统一的求解方法称为算法，其意义具有广泛的含义，如：广播操图解是广播操的算法，歌谱是一首歌的算法，空调说明书是空调使用的算法… (**algorithm**)

1. 描述算法有三种方式：自然语言，流程图，程序设计语言（本书指伪代码）.
2. 算法的特征：
   ①有限性：算法执行的步骤总是有限的，不能无休止的进行下去
   ②确定性：算法的每一步操作内容和顺序必须含义确切，而且必须有输出，输出可以是一个或多个。没有输出的算法是无意义的。
   ③可行性：算法的每一步都必须是可执行的，即每一步都可以通过手工或者机器在一定时间内可以完成，在时间上有一个合理的限度
3. 算法含有两大要素：①操作：算术运算，逻辑运算，函数运算，关系运算等②控制结构：顺序结构，选择结构，循环结构

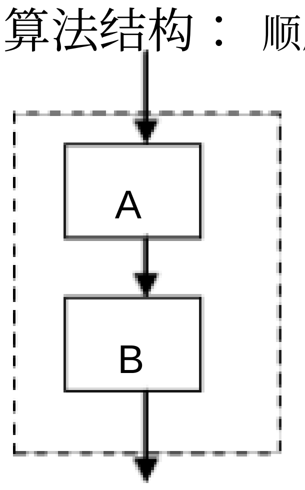
流程图：（**flow chart**）**：** 是用一些规定的图形、连线及简单的文字说明表示算法及程序结构的一种图形程序，它直观、清晰、易懂，便于检查及修改。

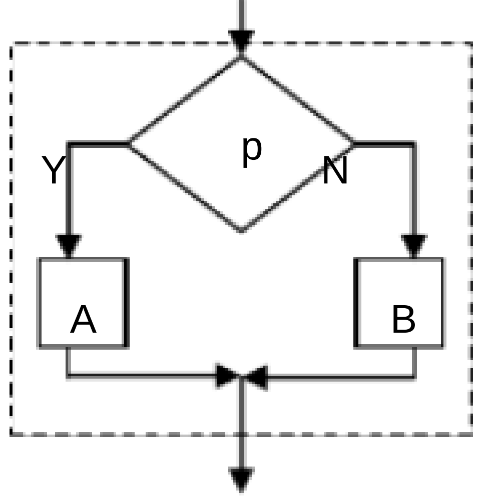
注意：**1.** 画流程图的时候一定要清晰，用铅笔和直尺画，要养成有开始和结束的好习惯

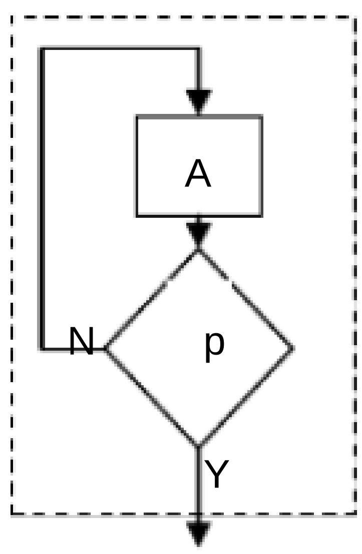
2. 拿不准的时候可以先根据结构特点画出大致的流程，反过来再检查，比如：遇到判断框时，往往临界的范围或者条件不好确定，就先给出一个临界条件，画好大致流程，然后检查这个条件是否正确，再考虑是否取等号的问题，这时候也就可以有几种书写方法了。

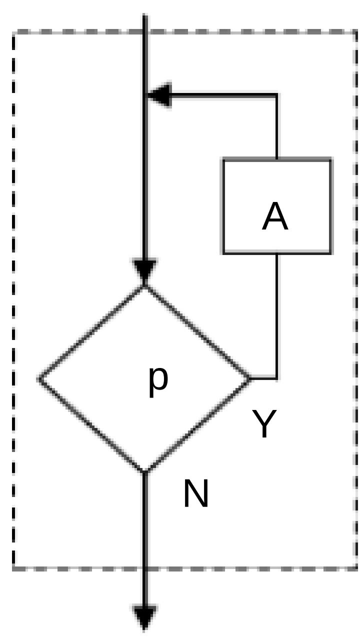
3. 在输出结果时，如果有多个输出，一定要用流程线把所有的输出总结到一起，一起终结到结束框。

算法结构：顺序结构，选择结构，循环结构









直到型循环当型循环

Ⅰ. 顺序结构（ sequence structure ）：是一种最简单最基本的结构它不存在条件判断、控制转移和重复执行的操作，一个顺序结构的各部分是按照语句出现的先后顺序执行的。

Ⅱ. 选择结构（ selection structure ）：或者称为分支结构。其中的判断框，书写时主要是注意临界条件的确定。它有一个入口，两个出口，执行时只能执行一个语句，不能同时执行，其中的 A,B 两语句可以有一个为空，既不执行任何操作，只是表明在某条件成立时，执行某语句，至于不成立时，不执行该语句，也不执行其它语句。

Ⅲ. 循环结构（ cycle structure ）：它用来解决现实生活中的重复操作问题，分直到型（ until ）和当型 (while) 两种结构（见上图）。当事先不知道是否至少执行一次循环体时（即不知道循环次数时）用当型循环。

基本算法语句：本书中指的是伪代码（**pseudo code**），且是使用 BASIC 语言编写的,是介于自然语言和机器语言之间的文字和符号，是表达算法的简单而实用的好方法。伪代码没有统一的格式，只要书写清楚，易于理解即可，但也要注意符号要相对统一，避免引起混淆。如 :赋值语句中可以用 $x = y$，也可以用 $x \leftarrow y$；表示两变量相乘时可以用“ * ”，也可以用“ × ”

Ⅰ. 赋值语句（ assignment statement ）：用 ← 表示，如：$x \leftarrow y$，表示将 y 的值赋给 x，其中 x 是一个变量，y 是一个与 x 同类型的变量或者表达式 .

一般格式 :“ 变量 ← 表达式 ”，有时在伪代码的书写时也可以用“ $x = y$ ”，但此时的“ = ”不是数学运算中的等号，而应理解为一个赋值号。

注：1. 赋值号左边只能是变量，不能是常数或者表达式，右边可以是常数或者表达式。“ = ”具有计算功能。如：$3 = a$, $b + 6 = a$ ，都是错误的，而 $a = 3*5 - 1$, $a = 2a + 3$ 都是正确的。2. 一个赋值语句一次只能给一个变量赋值。如：$a = b = c = 2$, $a , b , c =2$ 都是错误的，而 $a = 3$ 是正确的 .

例题：将 x 和 y 的值交换

$p \leftarrow x$
$x \leftarrow y$ ，同样的如果交换三个变量 x,y,z 的值：
$y \leftarrow p$

$p \leftarrow x$
$x \leftarrow y$
$y \leftarrow z$
$z \leftarrow p$

Ⅱ. 输入语句（ input statement ）：Read a ,b 表示输入的数一次送给 a ,b

输出语句（ out statement ）：Print x ,y 表示一次输出 运算结果 x ,y

注：1. 支持多个输入和输出，但是中间要用 逗号 隔开！2. Read 语句输入的只能是变量而不是表达式 3. Print 语句不能起赋值语句，意旨不能在 Print 语句中用“ = ”4. Print 语句可以输出常量和表达式的值 . 5. 有多个语句在一行书写时用“ ; ”隔开 .

例题：当 x 等于 5 时，Print “ x = ”; x 在屏幕上输出的结果是 $x = 5$

Ⅲ. 条件语句（ conditional statement ）：

1. 行 If 语句：If A Then B 注：没有 End If

2. 块 If 语句： 注：①不要忘记结束语句 End If ，当有 If 语句嵌套使用时， 有几个 If，就必须要有几个 End If②. **ElseIf** 是对上一个条件的否定，即已经不属于上面的条件，另外 **ElseIf** 后面也要有 End If ③ 注意每个条件的临界性，即某个值是属于上一个条件里，还是属于下一个条件。④ 为了使得书写清晰易懂，应缩进书写。格式如下：

```
If    A   Then
      B
  Else
      C
End   If
```

```
If    A   Then
      B
  ElseIfCThen
      D
End   If
```

例题：用条件语句写出求三个数种最大数的一个算法 .

```
Read  a , b , c
If  a≥b Then
If  a≥c Then
Print  a
Else
     Print  c
End  If
Else
   If  b≥c Then
     Print  b
   Else
     Print  c
   End  If
 End  If
```

或者

```
Read  a , b , c
If  a≥b  and  a≥c  Then
    Print  a
Else If  b≥c Then
    Print  b
Else
    Print  c
End  If
```

注： **1.** 同样的你可以写出求三个数中最小的数。

2. 也可以类似的求出四个数中最小、大的数

Ⅳ. 循环语句（ cycle statement ）： 当事先知道循环次数时用 **For** 循环，即使是 N 次也是已知次数的循环 当循环次数不确定时用 **While** 循环 **Do** 循环有两种表达形式， 与循环结构的两种循环相对应 .

```
For I From  初值  to  终值  Step  步长
…
End  For
```

For 循环

```
While  A
…
End While
```

While 循环

```
Do  While  p
…
Loop
```

当型 **Do** 循环

```
Do
…
Loop Until  p
```

直到型 **Do** 循环

说明：1. **While** 循环是前测试型的，即满足什么条件才进入循环，其实质是当型循环，一般在解决有关问题时， 可以写成 **While** 循环， 较为简单， 因为它的条件相对好判断 . 2. 凡是能用 **While** 循环书写的循环都能用 **For** 循环书写 3. **While** 循环和 **Do** 循环可以相互转化 4. **Do** 循环的两种形

式也可以相互转化，转化时条件要相应变化　　**5.**注意临界条件的判定　.

例题：　设计计算　$1\times3\times5\times...\times99$　的一个算法．（见课本　P_{21}）

```
S← 1
For  I  From  3  To  99  Step  2
    S← S×I
End  For
Print  S
```

```
S← 1
I ← 1
While  I  ≤  97
    I ← I +2
    S← S×I
End  While
Print  S
```

```
S← 1
I ← 1
While  I  ≤  99
    S← S×I
    I ← I +2
End  While
Print  S
```

```
S← 1
I ← 1
Do
    S← S×I
    I ← I +2
Loop  Until  I ≥100  (或者 I >99 )
Print  S
```

```
S← 1
I ← 1
Do
    I ← I +2
    S← S×I
Loop  Until  I ≥ 99
Print  S
```

```
S← 1
I ← 1
Do While  I ≤99 (或者 I <100  )
    S← S×I
    I ← I +2
Loop
Print  S
```

```
S← 1
I ← 1
Do While  I ≤97 (或者 I <99  )
    I ← I +2
    S← S×I
Loop
Print  S
```

颜老师友情提醒：　**1.**一定要看清题意，看题目让你干什么，有的只要写出算法，有的只要求写出伪代码，而有的题目则是既写出算法画出流程还要写出伪代码。

2.在具体做题时，可能好多的同学感觉先画流程图较为简单，　但也有的算法伪代码比较好写，你也可以在草稿纸上按照你自己的思路先做出来，然后根据题目要求作答。一般是先写算法，后画流程图，最后写伪代码。

3.书写程序时一定要规范化，使用统一的符号，最好与教材一致，由于是新教材的原因，再加上各种版本，可能同学会看到各种参考书上的书写格式不一样，　而且有时还会碰到我们没有见过的语言，希望大家能以课本为依据，不要被铺天盖地的资料所淹没！

高中数学必修　4 知识点

1、任意角 $\begin{cases}\text{正角：按逆时针方向旋转形成的角}\\ \text{负角：按顺时针方向旋转形成的角}\\ \text{零角：不作任何旋转形成的角}\end{cases}$

2、角 α 的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边落在第几象限，则称 α 为第几象限角.

第一象限角的集合为 $\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ < \alpha < k\cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in Z\}$

第二象限角的集合为 $\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k\cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in Z\}$

第三象限角的集合为 $\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k\cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in Z\}$

第四象限角的集合为 $\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k\cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in Z\}$

终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k\cdot 180^\circ, k \in Z\}$

终边在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k\cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in Z\}$

终边在坐标轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k\cdot 90^\circ, k \in Z\}$

3、与角 α 终边相同的角的集合为 $\{\beta \mid \beta = k\cdot 360^\circ + \alpha, k \in Z\}$

4、已知 α 是第几象限角，确定 $\frac{\alpha}{n}(n \in N^*)$ 所在象限的方法：先把各象限均分 n 等份，再从 x 轴的正半轴的上方起，依次将各区域标上一、二、三、四，则 α 原来是第几象限对应的标号即为 $\frac{\alpha}{n}$ 终边所落在的区域.

5、长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度.

6、半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l，则角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha| = \frac{l}{r}$.

7、弧度制与角度制的换算公式：$2\pi = 360^\circ$，$1^\circ = \frac{\pi}{180}$，$1 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ$.

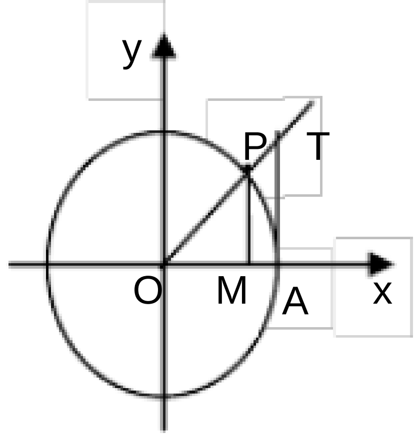
8、若扇形的圆心角为 α (α 为弧度制)，半径为 r，弧长为 l，周长为 C，面积为 S，则 $l = r|\alpha|$，

$C = 2r + l$，$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha| r^2$.

9、设 α 是一个任意大小的角，α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x, y)，它与原点的距离是 r ($r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$)，则 $\sin\alpha = \frac{y}{r}$，$\cos\alpha = \frac{x}{r}$，$\tan\alpha = \frac{y}{x}(x \neq 0)$.

10、三角函数在各象限的符号：第一象限全为正，第二象限正弦为正，第三象限正切为正，第四象限余弦为正.

11、三角函数线： $\sin\alpha = MP$， $\cos\alpha = OM$， $\tan\alpha = AT$．



12、同角三角函数的基本关系： $(1)\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$(\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha,\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha)$；$(2)\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

$\left(\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha,\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\right)$.

13、三角函数的诱导公式：

$(1)\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$， $\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$， $\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha\ (k\in Z)$．

$(2)\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$， $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$， $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$．

$(3)\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$， $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$， $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$．

$(4)\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$， $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$， $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$．

口诀：函数名称不变，符号看象限.

$(5)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$， $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$．

$(6)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$， $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$．

口诀：正弦与余弦互换，符号看象限.

14、函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左（右）平移 $|\varphi|$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象；再将函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象上所有点的横坐标伸长（缩短）到原来的 $\dfrac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象；再将函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象上所有点的纵坐标伸长（缩短）到原来的 A 倍（横坐标不变），得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标伸长（缩短）到原来的 $\dfrac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变），得到函数

$y=\sin\omega x$ 的图象；再将函数 $y=\sin\omega x$ 的图象上所有点向左（右）平移 $\dfrac{|\varphi|}{\omega}$ 个单位长度，

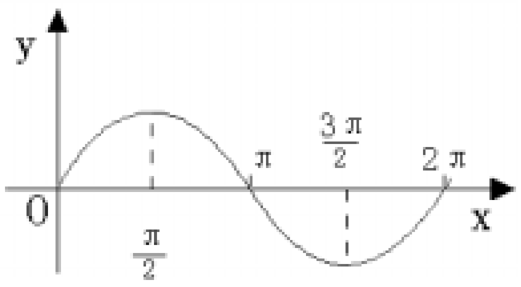
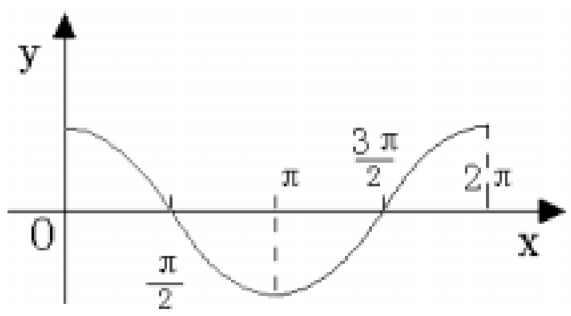
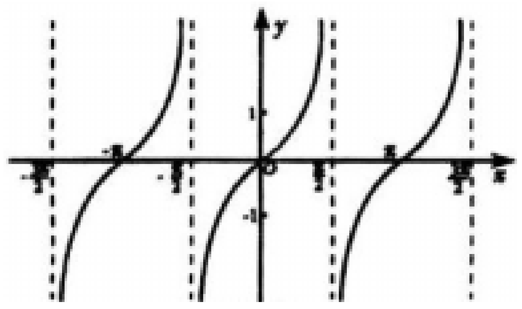
得到函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象；再将函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象上所有点的纵坐标伸长（缩短）到原来的 A 倍（横坐标不变），得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的性质：

①振幅：A；②周期：$T=\frac{2\pi}{\omega}$；③频率：$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$；④相位：$\omega x+\varphi$；⑤初相：$\varphi$.

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$，当 $x=x_1$ 时，取得最小值为 y_{min}；当 $x=x_2$ 时，取得最大值为 y_{max}，则 $A=\frac{1}{2}(y_{max}-y_{min})$，$B=\frac{1}{2}(y_{max}+y_{min})$，$\frac{T}{2}=x_2-x_1(x_1<x_2)$.

15、正弦函数、余弦函数和正切函数的图象与性质：

性质＼函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
定义域	R	R	$\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
最值	当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ 时，$y_{max}=1$；当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$ 时，$y_{min}=-1$.	当 $x=2k\pi$ $(k\in Z)$ 时，$y_{max}=1$；当 $x=2k\pi+\pi$ $(k\in Z)$ 时，$y_{min}=-1$.	既无最大值也无最小值
周期性	2π	2π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性	在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in Z)$ 上是增函数；在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in Z)$ 上是减函数.	在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ $(k\in Z)$ 上是增函数；在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ $(k\in Z)$ 上是减函数.	在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in Z)$ 上是增函数.
对称性	对称中心 $(k\pi,0)(k\in Z)$	对称中心	对称中心

对称轴 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}\,(k\in Z)$ $\quad\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)(k\in Z)\quad\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in Z)$

对称轴 $x=k\pi\ (k\in Z)$ 无对称轴

16、向量：既有大小，又有方向的量.

数量：只有大小，没有方向的量.

有向线段的三要素：起点、方向、长度.

零向量：长度为 0 的向量.

单位向量：长度等于 1个单位的向量.

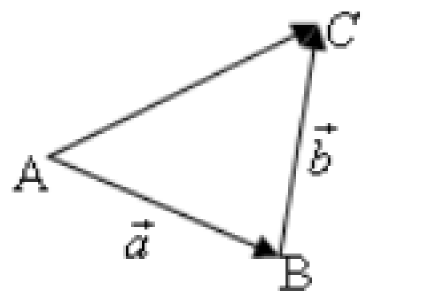
平行向量（共线向量）：方向相同或相反的 非零 向量．零向量与任一向量平行.

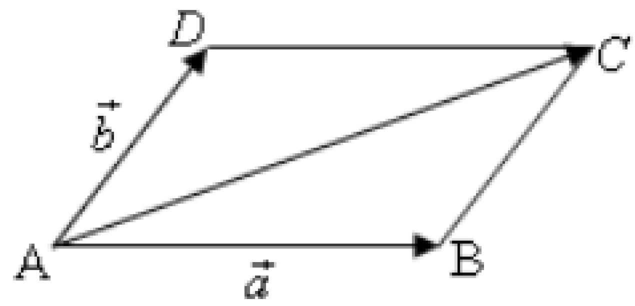
相等向量：长度相等且 方向相同 的向量.

17、向量加法运算：

⑴三角形法则的特点：首尾相连.

⑵平行四边形法则的特点：共起点.





$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ $\quad\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

⑶三角形不等式：$\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|\le|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

⑷运算性质：①交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；②结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$；③ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

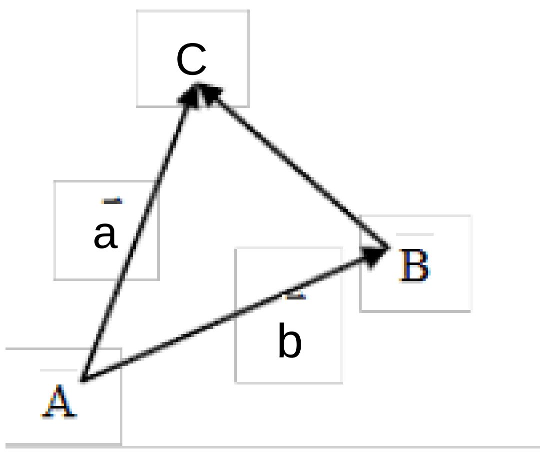
⑸坐标运算：设 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$.

18、向量减法运算：

⑴三角形法则的特点：共起点，连终点，方向指向被减向量.

⑵坐标运算：设 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$.

设 A、B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则 $\overrightarrow{AB}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$.



$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

19、向量数乘运算：

⑴实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量的运算叫做向量的数乘，记作 $\lambda\vec{a}$.

① $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；

②当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

⑵运算律：① $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$；② $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；③ $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

⑶坐标运算：设 $\vec{a}=(x,y)$，则 $\lambda\vec{a}=\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$.

20、向量共线定理：向量 $\vec{a}(\vec{a}\ne\vec{0})$ 与 $\vec{b}$ 共线，当且仅当有唯一一个实数 λ，使 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

设 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，其中 $\vec{b}\neq\vec{0}$，则当且仅当 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 时，向量 $\vec{a}$、$\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$ 共线.

21、平面向量基本定理：如果 $\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量 $\vec{a}$，有且只有一对实数 λ_1、λ_2，使 $\vec{a}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$.（不共线 的向量 $\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$ 作为这一平面内所有向量的一组基底）

22、分点坐标公式：设点 P 是线段 P_1P_2 上的一点，P_1、P_2 的坐标分别是 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，当 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ 时，点 P 的坐标是 $\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

23、平面向量的数量积：

⑴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\ (\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},0^\circ\leq\theta\leq180^\circ)$. 零向量与任一向量的数量积为 0.

⑵性质：设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是非零向量，则① $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. ②当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$；当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$；$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ 或 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$. ③ $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$.

⑶运算律：① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；② $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$；③ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

⑷坐标运算：设两个非零向量 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

若 $\vec{a}=(x,y)$，则 $|\vec{a}|^2=x^2+y^2$，或 $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

设 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 都是非零向量，$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，θ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

24、两角和与差的正弦、余弦和正切公式：

⑴ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

⑵ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；

⑶ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$；

⑷ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$；

⑸ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ （$\tan\alpha-\tan\beta=\tan(\alpha-\beta)(1+\tan\alpha\tan\beta)$）；

⑹ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ （$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$）.

25、二倍角的正弦、余弦和正切公式：

⑴ $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

⑵ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$（$\cos^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha+1}{2}$，$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$）.

⑶ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

26、 $A\sin\alpha+B\cos\alpha=\sqrt{A^2+B^2}\sin(\alpha+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{B}{A}$.

高中数学必修 5 知识点

1、正弦定理：在 ΔABC 中，a、b、c 分别为角 A、B、C 的对边，R 为 ΔABC 的外接圆的半径，则有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

2、正弦定理的变形公式：① $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$ ；

② $\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$ ；

③ $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ ；

④ $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

3、三角形面积公式： $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B$.

4、余弦定理：在 $\triangle ABC$ 中，有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

5、余弦定理的推论： $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$， $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$， $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

6、设 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的角 A、B、C 的对边，则：①若 $a^2+b^2=c^2$，则 $C=90^\circ$；

②若 $a^2+b^2>c^2$，则 $C<90^\circ$；③若 $a^2+b^2<c^2$，则 $C>90^\circ$.

7、数列：按照一定顺序排列着的一列数.

8、数列的项：数列中的每一个数.

9、有穷数列：项数有限的数列.

10、无穷数列：项数无限的数列.

11、递增数列：从第 2 项起，每一项都不小于它的前一项的数列.

12、递减数列：从第 2 项起，每一项都不大于它的前一项的数列.

13、常数列：各项相等的数列.

14、摆动数列：从第 2 项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项的数列.

15、数列的通项公式：表示数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与序号 n 之间的关系的公式.

16、数列的递推公式：表示任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}（或前几项）间的关系的公式.

17、如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，则这个数列称为等差数列，这个常数称为等差数列的公差.

18、由三个数 a，A，b 组成的等差数列可以看成最简单的等差数列，则 A 称为 a 与 b 的等差中项．若 $b=\frac{a+c}{2}$，则称 b 为 a 与 c 的等差中项.

19、若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1，公差是 d，则 $a_n=a_1+(n-1)d$.

20、通项公式的变形：① $a_n=a_m+(n-m)d$；② $a_1=a_n-(n-1)d$；③ $d=\frac{a_n-a_1}{n-1}$；

④ $n=\frac{a_n-a_1}{d}+1$；⑤ $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$.

21、若 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $m+n=p+q$（m、n、p、$q\in\mathbb{N}^*$），则 $a_m+a_n=a_p+a_q$；若 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $2n=p+q$（n、p、$q\in\mathbb{N}^*$），则 $2a_n=a_p+a_q$.

22、等差数列的前 n 项和的公式：① $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$；② $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

23、等差数列的前 n 项和的性质：①若项数为 $2n(n\in N^*)$，则 $S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$，且 $S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

②若项数为 $2n-1(n\in N^*)$，则 $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$，且 $S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n}{n-1}$（其中 $S_{奇}=na_n$，$S_{偶}=(n-1)a_n$）.

24、如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，则这个数列称为等比数列，这个常数称为等比数列的公比.

25、在 a 与 b 中间插入一个数 G，使 a，G，b 成等比数列，则 G 称为 a 与 b 的等比中项．若 $G^2=ab$，则称 G 为 a 与 b 的等比中项.

26、若等比数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1，公比是 q，则 $a_n=a_1q^{n-1}$.

27、通项公式的变形：① $a_n=a_mq^{n-m}$；② $a_1=a_nq^{-(n-1)}$；③ $q^{n-1}=\frac{a_n}{a_1}$；④ $q^{n-m}=\frac{a_n}{a_m}$.

28、若 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $m+n=p+q$（m、n、p、$q\in N^*$），则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；若 $\{a_n\}$ 是等比数列，且 $2n=p+q$（n、p、$q\in N^*$），则 $a_n^2=a_p\cdot a_q$.

29、等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式：$S_n=\begin{cases}na_1\ (q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}\ (q\neq1)\end{cases}$.

30、等比数列的前 n 项和的性质：①若项数为 $2n(n\in N^*)$，则 $\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$.

② $S_{n+m}=S_n+q^n\cdot S_m$.

③ S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 成等比数列.

31、$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

32、不等式的性质：① $a>b\Leftrightarrow b<a$；② $a>b,b>c\Rightarrow a>c$；③ $a>b\Rightarrow a+c>b+c$；

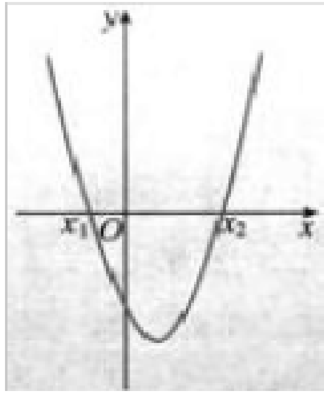
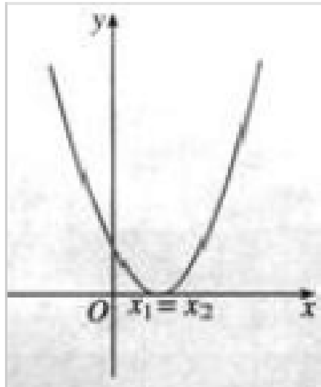
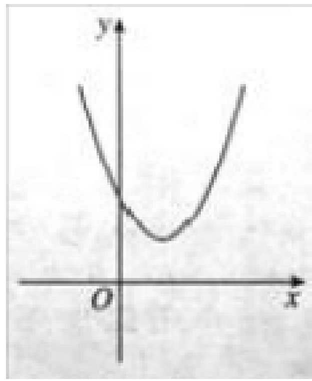
④ $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$，$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$；⑤ $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

⑥ $a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$；⑦ $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n\left(n\in\mathbb{N}, n>1\right)$；

⑧ $a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\left(n\in\mathbb{N}, n>1\right)$.

33、一元二次不等式：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式.

34、二次函数的图象、一元二次方程的根、一元二次不等式的解集间的关系：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $\left(a>0\right)$的图象				
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $\left(a>0\right)$的根		有两个相异实数根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\left(x_1<x_2\right)$	有两个相等实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
一元二次不等式的解集	$ax^2+bx+c>0$ $\left(a>0\right)$	$\left\{x\mid x<x_1 或 x>x_2\right\}$	$\left\{x \mid x\neq -\dfrac{b}{2a}\right\}$	R
	$ax^2+bx+c<0$ $\left(a>0\right)$	$\left\{x\mid x_1<x<x_2\right\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

35、二元一次不等式：含有两个未知数，并且未知数的次数是 1的不等式.

36、二元一次不等式组：由几个二元一次不等式组成的不等式组.

37、二元一次不等式（组）的解集：满足二元一次不等式组的 x 和 y 的取值构成有序数对 $\left(x, y\right)$，所有这样的有序数对 $\left(x, y\right)$构成的集合.

38、在平面直角坐标系中，已知直线 $Ax+By+C=0$，坐标平面内的点 $P\left(x_0, y_0\right)$.

①若 $B>0$，$Ax_0+By_0+C>0$，则点 $P\left(x_0, y_0\right)$在直线 $Ax+By+C=0$的上方.

②若 $B>0$，$Ax_0+By_0+C<0$，则点 $P\left(x_0, y_0\right)$在直线 $Ax+By+C=0$的下方.

39、在平面直角坐标系中，已知直线 $Ax+By+C=0$.

①若 $B>0$，则 $Ax+By+C>0$表示直线 $Ax+By+C=0$上方的区域；$Ax+By+C<0$表示直线

$Ax+By+C=0$下方的区域.

②若 $B<0$，则 $Ax+By+C>0$表示直线 $Ax+By+C=0$下方的区域； $Ax+By+C<0$表示直线

$Ax+By+C=0$上方的区域.

40、线性约束条件：由 x，y 的不等式（或方程）组成的不等式组，是 x，y 的线性约束条件.

目标函数：欲达到最大值或最小值所涉及的变量 x，y 的解析式.

线性目标函数：目标函数为 x，y 的一次解析式.

线性规划问题：求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值问题.

可行解：满足线性约束条件的解 (x,y).

可行域：所有可行解组成的集合.

最优解：使目标函数取得最大值或最小值的可行解.

41、设 a、b 是两个正数，则 $\frac{a+b}{2}$称为正数 a、b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$称为正数 a、b 的几何平均数.

42、均值不等式定理：若 $a>0$，$b>0$，则 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$，即 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

43、常用的基本不等式：① $a^2+b^2\geq 2ab(a,b\in R)$；② $ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}(a,b\in R)$；

③ $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a>0,b>0)$；④ $\frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a,b\in R)$.

44、极值定理：设 x、y 都为正数，则有

⑴若 $x+y=s$（和为定值），则当 $x=y$ 时，积 xy 取得最大值 $\frac{s^2}{4}$.

⑵若 $xy=p$（积为定值），则当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 取得最小值 $2\sqrt{p}$.

高中数学常用公式及常用结论

1.元素与集合的关系

$x \in A \Leftrightarrow x \notin C_U A$, $x \in C_U A \Leftrightarrow x \notin A$.

2. 德摩根公式

$C_U(A \cap B) = C_U A \cup C_U B; C_U(A \cup B) = C_U A \cap C_U B$.

3. 包含关系

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow C_U B \subseteq C_U A$

$\Leftrightarrow A \cap C_U B = \Phi \Leftrightarrow C_U A \cup B = R$

4. 容斥原理

$card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$

$card(A \cup B \cup C) = cardA + cardB + cardC - card(A \cap B)$

$- card(A \cap B) - card(B \cap C) - card(C \cap A) + card(A \cap B \cap C)$.

5 . 集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的子集个数共有 2^n 个；真子集有 $2^n - 1$ 个；非空子集有 $2^n - 1$ 个；非空的真子集有 $2^n - 2$ 个.

6. 二次函数的解析式的三种形式

(1) 一般式 $f(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$;

(2) 顶点式 $f(x) = a(x - h)^2 + k(a \neq 0)$;

(3) 零点式 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$.

7.解连不等式 $N<f(x)<M$ 常有以下转化形式

$$N<f(x)<M \Leftrightarrow [f(x)-M][f(x)-N]<0$$

$$\Leftrightarrow |f(x)-\frac{M+N}{2}|<\frac{M-N}{2} \Leftrightarrow \frac{f(x)-N}{M-f(x)}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-N}>\frac{1}{M-N}.$$

8. 方程 $f(x)=0$ 在 (k_1,k_2) 上有且只有一个实根，与 $f(k_1)f(k_2)<0$ 不等价，前者是后者的一个必要而不是充分条件。特别地，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有且只有一个实根在 (k_1,k_2) 内，等价于 $f(k_1)f(k_2)<0$，或 $f(k_1)=0$ 且 $k_1<-\frac{b}{2a}<\frac{k_1+k_2}{2}$，或 $f(k_2)=0$ 且 $\frac{k_1+k_2}{2}<-\frac{b}{2a}<k_2$.

9. 闭区间上的二次函数的最值

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在闭区间 $[p,q]$ 上的最值只能在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处及区间的两端点处取得，具体如下：

(1) 当 a>0 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则 $f(x)_{min}=f(-\frac{b}{2a}), f(x)_{max}=\max\{f(p),f(q)\}$；

$x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，$f(x)_{max}=\max\{f(p),f(q)\}$，$f(x)_{min}=\min\{f(p),f(q)\}$.

(2) 当 a<0 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则 $f(x)_{min}=\min\{f(p),f(q)\}$，若 $x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，则 $f(x)_{max}=\max\{f(p),f(q)\}$，$f(x)_{min}=\min\{f(p),f(q)\}$.

10. 一元二次方程的实根分布

依据：若 $f(m)f(n)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内至少有一个实根.

设 $f(x)=x_2+px+q$，则

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(m,+\infty)$ 内有根的充要条件为 $f(m)=0$ 或 $\begin{cases}p^2-4q\geq 0\\ -\frac{p}{2}>m\end{cases}$；

(2) 方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内有根的充要条件为 $f(m)f(n)<0$ 或 $\begin{cases}f(m)>0\\ f(n)>0\\ p^2-4q\geq 0\\ m<-\frac{p}{2}<n\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)=0\\ af(n)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(n)=0\\ af(m)>0\end{cases}$；

(3) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-\infty,n)$ 内有根的充要条件为 $f(m)<0$ 或 $\begin{cases}p^2-4q\geq 0\\ -\frac{p}{2}<m\end{cases}$.

11. 定区间上含参数的二次不等式恒成立的条件依据

(1) 在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间 L（形如 $[\alpha,\beta]$，$(-\infty,\beta]$，$[\alpha,+\infty)$ 不同）上含参数的二次不等式 $f(x,t)\geq 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{min}\geq 0(x\notin L)$.

(2) 在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间上含参数的二次不等式 $f(x,t)\geq 0$（t 为参数）恒成立的充要

条件是 $f(x,t)_{man} \le 0 (x \notin L)$.

(3) $f(x)=ax^4+bx^2+c>0$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases}a\ge 0\\ b\ge 0\\ c>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\ b^2-4ac<0\end{cases}$.

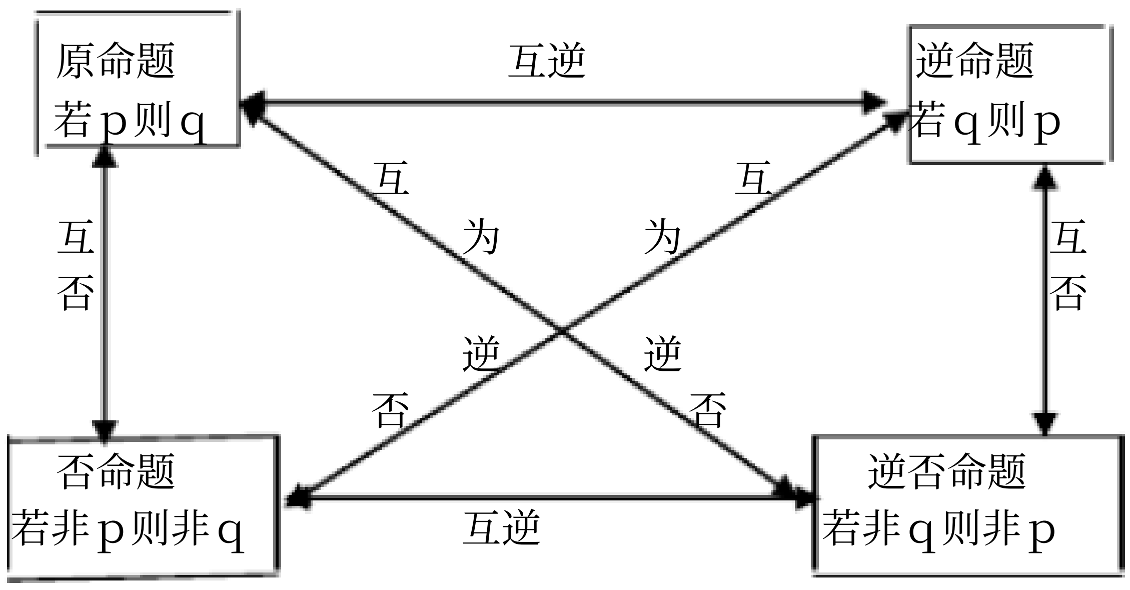
12. 真值表

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

13. 常见结论的否定形式

原结论	反设词	原结论	反设词
是	不是	至少有一个	一个也没有
都是	不都是	至多有一个	至少有两个
大于	不大于	至少有 n 个	至多有（$n-1$）个
小于	不小于	至多有 n 个	至少有（$n+1$）个
对所有 x，成立	存在某 x，不成立	p 或 q	$\neg p$ 且 $\neg q$
对任何 x，不成立	存在某 x，成立	p 且 q	$\neg p$ 或 $\neg q$

14. 四种命题的相互关系



15.充要条件

（1）充分条件：若 $p \Rightarrow q$，则 p 是 q 充分条件 .

（2）必要条件：若 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 必要条件 .

（3）充要条件：若 $p \Rightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 充要条件 .

注：如果甲是乙的充分条件，则乙是甲的必要条件；反之亦然 .

16. 函数的单调性

(1) 设 $x_1 \cdot x_2 \in [a,b], x_1 \ne x_2$ 那么

$$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0 \Leftrightarrow f(x)\text{在}[a,b]\text{上是增函数；}$$

$$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0 \Leftrightarrow f(x)\text{在}[a,b]\text{上是减函数 .}$$

(2) 设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内可导，如果 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 为增函数；如果 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 为减函数 .

17. 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是减函数，则在公共定义域内，和函数 $f(x)+g(x)$ 也是减函数；如果函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 在其对应的定义域上都是减函数，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 是增函数．

18. 奇偶函数的图象特征

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称；反过来，如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数是奇函数；如果一个函数的图象关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数.

19. 若函数 $y=f(x)$ 是偶函数，则 $f(x+a)=f(-x-a)$；若函数 $y=f(x+a)$ 是偶函数，则 $f(x+a)=f(-x+a)$．

20. 对于函数 $y=f(x)$（$x\in R$），$f(x+a)=f(b-x)$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 的对称轴是函数 $x=\frac{a+b}{2}$；两个函数 $y=f(x+a)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称．

21. 若 $f(x)=-f(-x+a)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{a}{2},0)$ 对称；若 $f(x)=-f(x+a)$，则函数 $y=f(x)$ 为周期为 $2a$ 的周期函数．

22. 多项式函数 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的奇偶性

多项式函数 $P(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的偶次项（即奇数项）的系数全为零．

多项式函数 $P(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的奇次项（即偶数项）的系数全为零．

23. 函数 $y=f(x)$ 的图象的对称性

(1) 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow$ $f(a+x)=f(a-x)$ $\Leftrightarrow$ $f(2a-x)=f(x)$．

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称 $\Leftrightarrow$ $f(a+mx)=f(b-mx)$ $\Leftrightarrow$ $f(a+b-mx)=f(mx)$．

24. 两个函数图象的对称性

(1) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于直线 $x=0$（即 y 轴）对称．

(2) 函数 $y=f(mx-a)$ 与函数 $y=f(b-mx)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2m}$ 对称．

(3) 函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 y=x 对称．

25. 若将函数 $y=f(x)$ 的图象右移 a、上移 b 个单位，得到函数 $y=f(x-a)+b$ 的图象；若将曲线 $f(x,y)=0$ 的图象右移 a、上移 b 个单位，得到曲线 $f(x-a,y-b)=0$ 的图象．

26. 互为反函数的两个函数的关系

$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$．

27. 若函数 $y=f(kx+b)$ 存在反函数，则其反函数为 $y=\frac{1}{k}[f^{-1}(x)-b]$，并不是 $y=[f^{-1}(kx+b)$，而函数 $y=[f^{-1}(kx+b)$ 是 $y=\frac{1}{k}[f(x)-b]$ 的反函数．

28. 几个常见的函数方程

(1) 正比例函数 $f(x)=cx$，$f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(1)=c$．

(2) 指数函数 $f(x)=a^x$，$f(x+y)=f(x)f(y)$, $f(1)=a\neq 0$．

(3) 对数函数 $f(x)=\log_a x$，$f(xy)=f(x)+f(y)$, $f(a)=1(a>0,a\neq 1)$．

(4) 幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$，$f(xy)=f(x)f(y)$, $f'(1)=\alpha$．

(5) 余弦函数 $f(x)=\cos x$，正弦函数 $g(x)=\sin x$，$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$，$f(0)=1,\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=1$．

29. 几个函数方程的周期（约定 a>0）

（1） $f(x)=f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=a；

（2） $f(x)=f(x+a)=0$，

或 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，

或 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，

或 $\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}=f(x+a),(f(x)\in[0,1])$，则 $f(x)$ 的周期 T=2a；

(3) $f(x)=1-\dfrac{1}{f(x+a)}(f(x)\neq 0)$，则 $f(x)$ 的周期 T=3a；

(4) $f(x_1+x_2)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)f(x_2)}$ 且 $f(a)=1(f(x_1)\cdot f(x_2)\neq 1, 0<|x_1-x_2|<2a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=4a；

(5) $f(x)+f(x+a)+f(x+2a)f(x+3a)+f(x+4a)$

$=f(x)f(x+a)f(x+2a)f(x+3a)f(x+4a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=5a；

(6) $f(x+a)=f(x)-f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=6a.

30. 分数指数幂

(1) $a^{\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$（$a>0,m,n\in N^*$，且 $n>1$）.

(2) $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$（$a>0,m,n\in N^*$，且 $n>1$）.

31．根式的性质

（1） $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

（2）当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geq 0\\ -a, & a<0\end{cases}$.

32．有理指数幂的运算性质

(1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in Q)$.

(2) $(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in Q)$.

(3) $(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in Q)$.

注： 若 a＞0，p 是一个无理数，则 a^p 表示一个确定的实数．上述有理指数幂的运算性质，对于无理数指数幂都适用 .

33. 指数式与对数式的互化式

$\log_a N=b\Leftrightarrow a^b=N\ (a>0,a\neq 1,N>0)$.

34. 对数的换底公式

$\log_a N=\dfrac{\log_m N}{\log_m a}$（$a>0$，且 $a\neq 1$，$m>0$，且 $m\neq 1$，$N>0$）.

推论 $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$（$a>0$，且 $a>1$，$m,n>0$，且 $m\neq 1$，$n\neq 1$，$N>0$）.

35．对数的四则运算法则

若 a＞0，a≠1，M＞0，N＞0，则

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;

(3) $\log_a M^n = n\log_a M\ (n \in R)$.

36. 设函数 $f(x) = \log_m(ax^2 + bx + c)(a \neq 0)$，记 $\Delta = b^2 - 4ac$. 若 $f(x)$ 的定义域为 R，则 $a > 0$，且 $\Delta < 0$；若 $f(x)$ 的值域为 R，则 $a > 0$，且 $\Delta \geq 0$. 对于 $a = 0$ 的情形，需要单独检验.

37. 对数换底不等式及其推广

若 $a > 0$，$b > 0$，$x > 0$，$x \neq \frac{1}{a}$，则函数 $y = \log_{ax}(bx)$

(1) 当 $a > b$ 时，在 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上 $y = \log_{ax}(bx)$ 为增函数.

(2) 当 $a < b$ 时，在 $(0, \frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上 $y = \log_{ax}(bx)$ 为减函数.

推论：设 $n > m > 1$，$p > 0$，$a > 0$，且 $a \neq 1$，则

（1）$\log_{m+p}(n + p) < \log_m n$.

（2）$\log_a m \log_a n < \log_a^2 \frac{m + n}{2}$.

38. 平均增长率的问题

如果原来产值的基础数为 N，平均增长率为 p，则对于时间 x 的总产值 y，有 $y = N(1 + p)^x$.

39. 数列的同项公式与前 n 项的和的关系

$a_n = \begin{cases} s_1, & n = 1 \\ s_n - s_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$（数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$）.

40. 等差数列的通项公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + a_1 - d\ (n \in N^*);$$

其前 n 项和公式为

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

$$= \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{1}{2}d)n.$$

41. 等比数列的通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{q} \cdot q^n\ (n \in N^*);$$

其前 n 项的和公式为

$$s_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \\ na_1, & q = 1 \end{cases}$$

或 $s_n = \begin{cases} \frac{a_1 - a_n q}{1-q}, & q \neq 1 \\ na_1, & q = 1 \end{cases}$.

42. 等比差数列 $\{a_n\}$：$a_{n+1} = qa_n + d$，$a_1 = b(q \neq 0)$ 的通项公式为

$$a_n=\begin{cases} b+(n-1)d, q=1 \\ \dfrac{bq^n+(d-b)q^{n-1}-d}{q-1}, q\neq 1 \end{cases};$$

其前 n 项和公式为

$$s_n=\begin{cases} nb+n(n-1)d,(q=1) \\ (b-\dfrac{d}{1-q})\dfrac{1-q^n}{q-1}+\dfrac{d}{1-q}n,(q\neq 1) \end{cases}.$$

43.分期付款 (按揭贷款)

每次还款 $x=\dfrac{ab(1+b)^n}{(1+b)^n-1}$ 元(贷款 a 元, n 次还清 ,每期利率为 b).

44．常见三角不等式

（1）若 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\sin x<x<\tan x$.

(2)若 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $1<\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$.

(3) $|\sin x|+|\cos x|\ge 1$.

45. 同角三角函数的基本关系式

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$， $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$， $\tan\theta\cdot\cot\theta=1$.

46. 正弦、余弦的诱导公式

$$\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin\alpha, & (n\ 为偶数) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha, & (n\ 为奇数) \end{cases}$$

$$\cos(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\cos\alpha, & (n\ 为偶数) \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\alpha, & (n\ 为奇数) \end{cases}$$

47. 和角与差角公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$;

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ (平方正弦公式);

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$ (辅 助 角 φ 所 在 象 限 由 点 (a,b) 的 象 限 决 定 , $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$).

48. 二倍角公式

$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$.

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

49. 三倍角公式

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 4\sin\theta\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)$.

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4\cos\theta\cos(\frac{\pi}{3}-\theta)\cos(\frac{\pi}{3}+\theta)$.

$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta} = \tan\theta\tan(\frac{\pi}{3}-\theta)\tan(\frac{\pi}{3}+\theta)$.

50. 三角函数的周期公式

函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in R$ 及函数 $y=\cos(\omega x+\varphi)$，$x\in R$(A,ω,φ 为常数，且 $A\neq 0$，$\omega>0$) 的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$；函数 $y=\tan(\omega x+\varphi)$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$ (A,ω,φ 为常数，且 $A\neq 0$，$\omega>0$) 的周期 $T=\frac{\pi}{\omega}$.

51. 正弦定理

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

52. 余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$;

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

53. 面积定理

（1） $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$（$h_a$、$h_b$、$h_c$ 分别表示 a、b、c 边上的高）.

（2） $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$.

(3) $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|)^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$.

54. 三角形内角和定理

在△ABC中，有 $A+B+C=\pi \Leftrightarrow C=\pi-(A+B)$

$\Leftrightarrow \frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2} \Leftrightarrow 2C=2\pi-2(A+B)$.

55. 简单的三角方程的通解

$\sin x=a \Leftrightarrow x=k\pi+(-1)^k\arcsin a(k\in Z,|a|\le 1)$.

$\cos x=a \Leftrightarrow x=2k\pi\pm\arccos a(k\in Z,|a|\le 1)$.

$\tan x=a \Rightarrow x=k\pi+\arctan a(k\in Z,a\in R)$.

特别地，有

$\sin\alpha=\sin\beta \Leftrightarrow \alpha=k\pi+(-1)^k\beta(k\in Z)$.

$\cos\alpha=\cos\beta \Leftrightarrow \alpha=2k\pi\pm\beta(k\in Z)$.

$\tan\alpha=\tan\beta \Rightarrow \alpha=k\pi+\beta(k\in Z)$.

56. 最简单的三角不等式及其解集

$\sin x>a(|a|\le 1) \Leftrightarrow x\in(2k\pi+\arcsin a,2k\pi+\pi-\arcsin a),k\in Z$.

$\sin x<a(|a|\le 1) \Leftrightarrow x\in(2k\pi-\pi-\arcsin a,2k\pi+\arcsin a),k\in Z$.

$\cos x>a(|a|\le 1) \Leftrightarrow x\in(2k\pi-\arccos a,2k\pi+\arccos a),k\in Z$.

$\cos x<a(|a|\le 1) \Leftrightarrow x\in(2k\pi+\arccos a,2k\pi+2\pi-\arccos a),k\in Z$.

$\tan x > a(a\in R)\Rightarrow x\in(k\pi+\arctan a,k\pi+\frac{\pi}{2}),k\in Z$.

$\tan x < a(a\in R)\Rightarrow x\in(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\arctan a),k\in Z$.

57. 实数与向量的积的运算律

设 λ 、 μ 为实数，那么

(1) 结合律： λ (μ a)=(λ μ) a;

(2) 第一分配律： (λ + μ)a=λ a+ μ a;

(3) 第二分配律： λ (a+b)= λ a+λ b.

58. 向量的数量积的运算律：

(1) a · b= b · a（交换律）；

(2) （ λ a）· b= λ （a · b）=λ a · b= a ·（ λ b）；

(3) （a+b）· c= a · c +b · c.

59. 平面向量基本定理

如果 e_1、e_2是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量，有且只有一对实数 λ_1、λ_2，使得 $a=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$.

不共线的向量 e_1、e_2叫做表示这一平面内所有向量的一组基底 .

60. 向量平行的坐标表示

设 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$，且 $b\neq 0$，则 $a \parallel b(b\neq 0)\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

53. a 与 b 的数量积 (或内积)

$a\cdot b=|a||b|\cos\theta$.

61. **a · b** 的几何意义

数量积 **a · b** 等于 **a** 的长度 **|a|**与 **b** 在 **a** 的方向上的投影 **|b|**$\cos\theta$ 的乘积.

62. 平面向量的坐标运算

(1) 设 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$，则 $a+b=(x_1+x_2,y_1+y_2)$.

(2) 设 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$，则 $a-b=(x_1-x_2,y_1-y_2)$.

(3) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

(4) 设 $a=(x,y)$，$\lambda\in R$，则 $\lambda a=(\lambda x,\lambda y)$.

(5) 设 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$，则 $a\cdot b=(x_1x_2+y_1y_2)$.

63. 两向量的夹角公式

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\ (a=(x_1,y_1),\ b=(x_2,y_2)).$$

64. 平面两点间的距离公式

$$d_{A,B}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ (A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)).$$

65. 向量的平行与垂直

设 $a=(x_1,y_1)$，$b=(x_2,y_2)$，且 $b\neq 0$，则

$a\parallel b\Leftrightarrow b=\lambda a\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

$a\perp b(a\neq 0)\Leftrightarrow a\cdot b=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

66. 线段的定比分公式

设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P(x,y)$ 是线段 P_1P_2 的分点，λ 是实数，且 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}$$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OP_1}+(1-t)\overrightarrow{OP_2}$ （$t=\dfrac{1}{1+\lambda}$）.

67. 三角形的重心坐标公式

△ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，则△ABC 的重心的坐标是 $G(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3})$.

68. 点的平移公式

$$\begin{cases} x'=x+h \\ y'=y+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-h \\ y=y'-k \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}.$$

注：图形 F 上的任意一点 $P(x,y)$ 在平移后图形 F' 上的对应点为 $P'(x',y')$，且 $\overrightarrow{PP'}$ 的坐标为 (h,k).

69. “按向量平移”的几个结论

（1）点 $P(x,y)$ 按向量 $a=(h,k)$ 平移后得到点 $P'(x+h,y+k)$.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象 C 按向量 $a=(h,k)$ 平移后得到图象 C'，则 C' 的函数解析式为 $y=f(x-h)+k$.

(3) 图象 C' 按向量 $a=(h,k)$ 平移后得到图象 C，若 C 的解析式 $y=f(x)$，则 C' 的函数解析式为 $y=f(x+h)-k$.

(4) 曲线 C：$f(x,y)=0$ 按向量 $a=(h,k)$ 平移后得到图象 C'，则 C' 的方程为 $f(x-h,y-k)=0$.

(5) 向量 $m=(x,y)$ 按向量 $a=(h,k)$ 平移后得到的向量仍然为 $m=(x,y)$.

70. 三角形五“心”向量形式的充要条件

设 O 为 ΔABC 所在平面上一点，角 A,B,C 所对边长分别为 a,b,c，则

（1）O 为 ΔABC 的外心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$.

（2）O 为 ΔABC 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

（3）O 为 ΔABC 的垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$.

（4）O 为 ΔABC 的内心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

（5）O 为 ΔABC 的 $\angle A$ 的旁心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}=b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$.

71. 常用不等式：

（1）$a,b\in R \Rightarrow a^2+b^2\ge 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”号）.

（2）$a,b\in R^+ \Rightarrow \dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”号）.

（3）$a^3+b^3+c^3\ge 3abc(a>0,b>0,c>0)$.

（4）柯西不等式

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2,a,b,c,d\in R.$

（5）$|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$.

72. 极值定理

已知 x,y 都是正数，则有

（1）若积 xy 是定值 p，则当 $x=y$ 时和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$；

（2）若和 $x+y$ 是定值 s，则当 $x=y$ 时积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}s^2$.

推广 已知 $x,y\in R$，则有 $(x+y)^2=(x-y)^2+2xy$

（1）若积 xy 是定值，则当 $|x-y|$ 最大时，$|x+y|$ 最大；

当 $|x-y|$ 最小时，$|x+y|$ 最小.

（2）若和 $|x+y|$ 是定值，则当 $|x-y|$ 最大时，$|xy|$ 最小；

当 $|x-y|$ 最小时，$|xy|$ 最大.

73. 一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(或<0)$ $(a\neq 0,\Delta=b^2-4ac>0)$，如果 a 与 ax^2+bx+c 同号，则其解集在两根之外；如果 a 与 ax^2+bx+c 异号，则其解集在两根之间. 简言之：同号两根之外，异号两根之间.

$x_1<x<x_2 \Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)<0(x_1<x_2)$；

$x<x_1,或x>x_2 \Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)>0(x_1<x_2)$.

74. 含有绝对值的不等式

当 a> 0 时，有

$|x|<a \Leftrightarrow x^2<a^2 \Leftrightarrow -a<x<a$.

$|x|>a \Leftrightarrow x^2>a^2 \Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$.

75. 无理不等式

（1） $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$.

（2） $\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)>[g(x)]^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$.

（3） $\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<[g(x)]^2 \end{cases}$.

76. 指数不等式与对数不等式

(1) 当 $a>1$ 时，

$a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$；

$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$.

(2) 当 $0<a<1$ 时，

$a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$；

$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$

77.斜率公式

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$）.

78.直线的五种方程

（1）点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$ (直线 l 过点 $P_1(x_1,y_1)$，且斜率为 k).

（2）斜截式 $y=kx+b$ (b 为直线 l 在 y 轴上的截距).

（3）两点式 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ ($y_1\neq y_2$)($P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ ($x_1\neq x_2$)).

(4) 截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (a、b 分别为直线的横、纵截距，a、$b\neq 0$)

（5）一般式 $Ax+By+C=0$ (其中 A、B 不同时为 0).

79.两条直线的平行和垂直

(1)若 $l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$

① $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2, b_1\neq b_2$；

② $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

(2)若 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，且 A_1、A_2、B_1、B_2 都不为零，

① $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$；

② $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$；

80.夹角公式

(1) $\tan\alpha=|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}|$.

($l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，$k_1k_2\neq -1$)

(2) $\tan\alpha=|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}|$.

($l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_1A_2+B_1B_2\neq 0$).

直线 $l_1\perp l_2$ 时，直线 l_1 与 l_2 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$.

81.l_1 到 l_2 的角公式

(1) $\tan\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$.

($l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，$k_1k_2\neq -1$)

(2) $\tan\alpha=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$.

($l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_1A_2+B_1B_2\neq 0$).

直线 $l_1\perp l_2$ 时，直线 l_1 到 l_2 的角是 $\frac{\pi}{2}$.

82．四种常用直线系方程

(1) 定点直线系方程：经过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线系方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$ (除直线 $x=x_0$)，其中 k 是待定的系数；经过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线系方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$，其中 A,B 是待定的系数.

(2) 共点直线系方程：经过两直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方程为 $(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ (除 l_2)，其中 λ 是待定的系数.

(3) 平行直线系方程：直线 $y=kx+b$ 中当斜率 k 一定而 b 变动时，表示平行直线系方程. 与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线系方程是 $Ax+By+\lambda=0$ ($\lambda\neq 0$)，λ 是参变量.

(4) 垂直直线系方程：与直线 $Ax+By+C=0$ $(A\neq 0,\ B\neq 0)$ 垂直的直线系方程是 $Bx-Ay+\lambda=0$，λ 是参变量.

83.点到直线的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ (点 $P(x_0,y_0)$，直线 l：$Ax+By+C=0$).

84. $Ax+By+C>0$ 或 <0 所表示的平面区域

设直线 $l: Ax+By+C=0$，则 $Ax+By+C>0$ 或 <0 所表示的平面区域是：

若 $B\neq 0$，当 B 与 $Ax+By+C$ 同号时，表示直线 l 的上方的区域；当 B 与 $Ax+By+C$ 异号时，表示直线 l 的下方的区域.简言之，同号在上，异号在下.

若 $B=0$，当 A 与 $Ax+By+C$ 同号时，表示直线 l 的右方的区域；当 A 与 $Ax+By+C$ 异号时，表示直线 l 的左方的区域.简言之，同号在右，异号在左.

85. $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$ 或 <0 所表示的平面区域

设曲线 $C:(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$（$A_1A_2B_1B_2\neq 0$），则

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$ 或 <0 所表示的平面区域是：

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$ 所表示的平面区域上下两部分；

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)<0$ 所表示的平面区域上下两部分.

86. 圆的四种方程

（1）圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

（2）圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$.

（3）圆的参数方程 $\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$.

（4）圆的直径式方程 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$（圆的直径的端点是 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$).

87. 圆系方程

(1) 过点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的圆系方程是

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda[(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)]=0$

$\Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda(ax+by+c)=0$，其中 $ax+by+c=0$ 是直线 AB 的方程，λ 是待定的系数.

(2) 过直线 l：$Ax+By+C=0$ 与圆 C：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的交点的圆系方程是 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$，$\lambda$ 是待定的系数.

(3) 过圆 C_1：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆系方程是 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$，$\lambda$ 是待定的系数.

88. 点与圆的位置关系

点 $P(x_0,y_0)$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系有三种

若 $d=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2}$，则

$d>r\Leftrightarrow$ 点 P 在圆外；$d=r\Leftrightarrow$ 点 P 在圆上；$d<r\Leftrightarrow$ 点 P 在圆内.

89. 直线与圆的位置关系

直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系有三种：

$d>r\Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow \Delta<0$；

$d=r\Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow \Delta=0$；

$d<r\Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow \Delta>0$.

其中 $d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

90. 两圆位置关系的判定方法

设两圆圆心分别为 O_1，O_2，半径分别为 r_1，r_2，$|O_1O_2|=d$

$d>r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外离 $\Leftrightarrow$ 4条公切线；

$d=r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外切 $\Leftrightarrow$ 3条公切线；

$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow$ 2条公切线；

$d=|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow$ 1条公切线；

$0<d<|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内含 $\Leftrightarrow$ 无公切线．

91. 圆的切线方程

(1) 已知圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

①若已知切点 (x_0,y_0) 在圆上，则切线只有一条，其方程是

$x_0x+y_0y+\frac{D(x_0+x)}{2}+\frac{E(y_0+y)}{2}+F=0$.

当 (x_0,y_0) 圆外时，$x_0x+y_0y+\frac{D(x_0+x)}{2}+\frac{E(y_0+y)}{2}+F=0$ 表示过两个切点的切点弦方程.

②过圆外一点的切线方程可设为 $y-y_0=k(x-x_0)$，再利用相切条件求 k，这时必有两条切线，注意不要漏掉平行于 y 轴的切线.

③斜率为 k 的切线方程可设为 $y=kx+b$，再利用相切条件求 b，必有两条切线.

(2) 已知圆 $x^2+y^2=r^2$.

①过圆上的 $P_0(x_0,y_0)$ 点的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$；

②斜率为 k 的圆的切线方程为 $y=kx\pm r\sqrt{1+k^2}$.

92. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的参数方程是 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$.

93. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 焦半径公式

$|PF_1|=e(x+\frac{a^2}{c})$，$|PF_2|=e(\frac{a^2}{c}-x)$.

94．椭圆的的内外部

（1）点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$.

（2）点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$.

95．椭圆的切线方程

(1) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（2）过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（3）椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $A^2a^2+B^2b^2=c^2$.

96. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦半径公式

$|PF_1|=|e(x+\frac{a^2}{c})|$，$|PF_2|=|e(\frac{a^2}{c}-x)|$.

97. 双曲线的内外部

(1) 点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}>1$.

(2) 点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$.

98. 双曲线的方程与渐近线方程的关系

(1）若双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow$ 渐近线方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$.

(2) 若渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x\Leftrightarrow \frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0\Rightarrow$ 双曲线可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$.

(3) 若双曲线与 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 有公共渐近线，可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$（$\lambda>0$，焦点在 x 轴上，$\lambda<0$，焦点在 y 轴上）.

99. 双曲线的切线方程

(1) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（2）过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（3）双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $A^2a^2-B^2b^2=c^2$.

100. 抛物线 $y^2=2px$ 的焦半径公式

抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦半径 $|CF|=x_0+\frac{p}{2}$.

过焦点弦长 $|CD|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=x_1+x_2+p$.

101. 抛物线 $y^2=2px$ 上的动点可设为 $P(\frac{y_\circ^2}{2p},y_\circ)$ 或 $P(2pt^2,2pt)$或 $P(x_\circ,y_\circ)$，其中 $y_\circ^2=2px_\circ$

102. 二次函数 $y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}(a\neq 0)$ 的图象是抛物线：（1）顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$；（2）焦点的坐标为 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2+1}{4a})$；（3）准线方程是 $y=\frac{4ac-b^2-1}{4a}$.

103. 抛物线的内外部

(1) 点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow y^2<2px(p>0)$.

点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow$ $y^2>2px(p>0)$.

(2) 点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=-2px(p>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow$ $y^2<-2px(p>0)$.

点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=-2px(p>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow$ $y^2>-2px(p>0)$.

(3) 点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow$ $x^2<2py(p>0)$.

点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow$ $x^2>2py(p>0)$.

(4) 点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow$ $x^2<2py(p>0)$.

点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $x^2=-2py(p>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow$ $x^2>-2py(p>0)$.

104. 抛物线的切线方程

(1) 抛物线 $y^2=2px$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $y_0y=p(x+x_0)$.

（2）过抛物线 $y^2=2px$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $y_0y=p(x+x_0)$.

（3）抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $pB^2=2AC$.

105. 两个常见的曲线系方程

(1) 过曲线 $f_1(x,y)=0$，$f_2(x,y)=0$ 的交点的曲线系方程是

$f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$ (λ 为参数).

(2) 共焦点的有心圆锥曲线系方程 $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}=1$，其中 $k<\max\{a^2,b^2\}$. 当 $k>\min\{a^2,b^2\}$ 时，表示椭圆； 当 $\min\{a^2,b^2\}<k<\max\{a^2,b^2\}$ 时，表示双曲线 .

106. 直线与圆锥曲线相交的弦长公式 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 或

$|AB|=\sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2}=|x_1-x_2|\sqrt{1+\tan^2\alpha}=|y_1-y_2|\sqrt{1+\cot^2\alpha}$ （弦端点 A $(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由方程 $\begin{cases}y=kx+b\\F(x,y)=0\end{cases}$ 消去 y 得到 $ax^2+bx+c=0$，$\Delta>0$，α 为直线 AB 的倾斜角， k 为直线的斜率） .

107. 圆锥曲线的两类对称问题

（1）曲线 $F(x,y)=0$ 关于点 $P(x_0,y_0)$ 成中心对称的曲线是 $F(2x_0-x,2y_0-y)=0$.

（2）曲线 $F(x,y)=0$ 关于直线 $Ax+By+C=0$ 成轴对称的曲线是

$$F\left(x-\frac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2},\ y-\frac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\right)=0.$$

108. “四线”一方程

对于一般的二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，用 x_0x 代 x^2，用 y_0y 代 y^2，用 $\frac{x_0y+xy_0}{2}$ 代 xy，用 $\frac{x_0+x}{2}$ 代 x，用 $\frac{y_0+y}{2}$ 代 y 即得方程

$Ax_0x+B\cdot\frac{x_0y+xy_0}{2}+Cy_0y+D\cdot\frac{x_0+x}{2}+E\cdot\frac{y_0+y}{2}+F=0$，曲线的切线，切点弦，中点弦，弦中点方程均是此方程得到 .

109. 证明直线与直线的平行的思考途径

（1）转化为判定共面二直线无交点；

（2）转化为二直线同与第三条直线平行；

（3）转化为线面平行；

（4）转化为线面垂直；

（5）转化为面面平行 .

110. 证明直线与平面的平行的思考途径

（1）转化为直线与平面无公共点；

（2）转化为线线平行；
（3）转化为面面平行．

111. 证明平面与平面平行的思考途径
（1）转化为判定二平面无公共点；
（2）转化为线面平行；
（3）转化为线面垂直．

112. 证明直线与直线的垂直的思考途径
（1）转化为相交垂直；
（2）转化为线面垂直；
（3）转化为线与另一线的射影垂直；
（4）转化为线与形成射影的斜线垂直．

113. 证明直线与平面垂直的思考途径
（1）转化为该直线与平面内任一直线垂直；
（2）转化为该直线与平面内相交二直线垂直；
（3）转化为该直线与平面的一条垂线平行；
（4）转化为该直线垂直于另一个平行平面；
（5）转化为该直线与两个垂直平面的交线垂直．

114. 证明平面与平面的垂直的思考途径
（1）转化为判断二面角是直二面角；
（2）转化为线面垂直．

115. 空间向量的加法与数乘向量运算的运算律
(1) 加法交换律： a＋b=b＋a.
(2) 加法结合律： (a＋b)＋c=a＋(b＋c).
(3) 数乘分配律： λ(a＋b)=λa＋λb.

116. 平面向量加法的平行四边形法则向空间的推广
始点相同且不在同一个平面内的三个向量之和，等于以这三个向量为棱的平行六面体的以公共始点为始点的对角线所表示的向量．

117.共线向量定理
对空间任意两个向量 **a**、**b**(**b**≠**0**)，**a**∥**b**⇔ 存在实数 λ 使 **a**=λ**b**.

$P、A、B$ 三点共线 $\Leftrightarrow AP \parallel AB \Leftrightarrow AP = tAB \Leftrightarrow OP = (1-t)OA + tOB$.

$AB \parallel CD \Leftrightarrow AB$、$CD$ 共线且 AB、CD 不共线 $\Leftrightarrow AB = tCD$ 且 AB、CD 不共线.

118. 共面向量定理
向量 p 与两个不共线的向量 a、b 共面的 ⇔ 存在实数对 x, y，使 $p = ax + by$.

推论空间一点 P 位于平面 MAB 内的 ⇔ 存在有序实数对 x, y，使 $MP = xMA + yMB$，或对空间任一定点 O，有序实数对 x, y，使 $OP = OM + xMA + yMB$.

119. 对空间任一点 O 和不共线的三点 A、B、C，满足 $OP = xOA + yOB + zOC$（$x + y + z = k$），则当 $k = 1$ 时，对于空间任一点 O，总有 P、A、B、C 四点共面；当 $k \neq 1$ 时，若 $O \in$ 平面 ABC，则 P、A、B、C 四点共面；若 $O \notin$ 平面 ABC，则 P、A、B、C 四点不共面.

A、B、C、D 四点共面 $\Leftrightarrow AD$ 与 AB、AC 共面 $\Leftrightarrow AD = xAB + yAC \Leftrightarrow OD = (1-x-y)OA + xOB + yOC$（$O \notin$ 平面 ABC）.

120. 空间向量基本定理
如果三个向量 a、b、c 不共面，那么对空间任一向量 p，存在一个唯一的有序实数组 x，y，z，使 p＝xa＋yb＋zc.

推论设 O、A、B、C 是不共面的四点，则对空间任一点 P，都存在唯一的三个有序实数 x，y，z，使 $OP = xOA + yOB + zOC$.

121. 射影公式
已知向量 AB=a 和轴 l，e 是 l 上与 l 同方向的单位向量．作 A 点在 l 上的射影 A'，作 B 点在 l 上

的射影 B'，则

$A'B'=|AB|\cos\langle a, e\rangle = a\cdot e$

122. 向量的直角坐标运算

设 $a=(a_1,a_2,a_3)$，$b=(b_1,b_2,b_3)$ 则

(1) $a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$；

(2) $a-b=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$；

(3) $\lambda a=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$ $(\lambda\in R)$；

(4) $a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

123. 设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

124. 空间的线线平行或垂直

设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\lambda x_2\\ y_1=\lambda y_2\\ z_1=\lambda z_2\end{cases};$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

125. 夹角公式

设 $a=(a_1,a_2,a_3)$，$b=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\cos\langle a, b\rangle=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

推论 $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$，此即三维柯西不等式 .

126. 四面体的对棱所成的角

四面体 $ABCD$ 中，AC 与 BD 所成的角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|(AB^2+CD^2)-(BC^2+DA^2)|}{2AC\cdot BD}.$$

127．异面直线所成角

$$\cos\theta=|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|$$

$$=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

（其中 θ（$0^\circ<\theta\le 90^\circ$）为异面直线 a,b 所成角，$\vec{a},\vec{b}$ 分别表示异面直线 a,b 的方向向量）

128.直线 AB 与平面所成角

$$\beta=\arcsin\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{m}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{m}|}$$ （$\vec{m}$ 为平面 α 的法向量).

129. 若 ΔABC 所在平面若 β 与过若 AB 的平面 α 成的角 θ，另两边 AC，BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1、θ_2，A、B 为 ΔABC 的两个内角，则

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=(\sin^2A+\sin^2B)\sin^2\theta.$$

特别地，当 $\angle ACB=90^\circ$ 时，有

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\sin^2\theta.$$

130. 若 ΔABC 所在平面若 β 与过若 AB 的平面 α 成的角 θ，另两边 AC，BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1、θ_2，A'、B' 为 ΔABO 的两个内角，则

$$\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2=(\sin^2A'+\sin^2B')\tan^2\theta.$$

特别地，当 $\angle AOB=90^\circ$ 时，有

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\sin^2\theta.$$

131.二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角

$$\theta=\arccos\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}\text{ 或 }\pi-\arccos\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$$（$\vec{m}$，$\vec{n}$ 为平面 α，β 的法向量）.

132. 三余弦定理

设 AC 是 α 内的任一条直线，且 BC⊥AC，垂足为 C，又设 AO 与 AB 所成的角为 θ_1，AB 与 AC 所成的角为 θ_2，AO 与 AC 所成的角为 θ．则 $\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$.

133. 三射线定理

若夹在平面角为 φ 的二面角间的线段与二面角的两个半平面所成的角是 θ_1，θ_2，与二面角的棱所成的角是 θ，则有 $\sin^2\varphi\sin^2\theta=\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2-2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi$；

$|\theta_1-\theta_2|\le\varphi\le180^\circ-(\theta_1+\theta_2)$（当且仅当 $\theta=90^\circ$ 时等号成立）.

134. 空间两点间的距离公式

若 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$$d_{A,B}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

135. 点 Q 到直线 l 距离

$$h=\frac{1}{|a|}\sqrt{(|a||b|)^2-(a\cdot b)^2}$$（点 P 在直线 l 上，直线 l 的方向向量 $a=\overrightarrow{PA}$，向量 $b=\overrightarrow{PQ}$）.

136.异面直线间的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$（l_1,l_2 是两异面直线，其公垂向量为 $\vec{n}$，C、D 分别是 l_1,l_2 上任一点，d 为 l_1,l_2 间的距离）.

137.点 B 到平面 α 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$（$\vec{n}$ 为平面 α 的法向量，AB 是经过面 α 的一条斜线，$A\in\alpha$）.

138.异面直线上两点距离公式

$$d=\sqrt{h^2+m^2+n^2\mp2mn\cos\theta}.$$

$$d=\sqrt{h^2+m^2+n^2-2mn\cos\langle\overrightarrow{EA'},\overrightarrow{AF}\rangle}.$$

$$d=\sqrt{h^2+m^2+n^2-2mn\cos\varphi}\quad(\varphi=E-AA'-F).$$

（两条异面直线 a、b 所成的角为 θ，其公垂线段 AA' 的长度为 h. 在直线 a、b 上分别取两点 E、F，$A'E=m$，$AF=n$，$EF=d$）.

139. 三个向量和的平方公式

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\langle\vec{b},\vec{c}\rangle+2|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cos\langle\vec{c},\vec{a}\rangle$$

140. 长度为 l 的线段在三条两两互相垂直的直线上的射影长分别为 l_1、l_2、l_3，夹角分别为 θ_1、θ_2、θ_3，则有

$l^2=l_1^2+l_2^2+l_3^2 \Leftrightarrow \cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1 \Leftrightarrow \sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3=2$.

（立体几何中长方体对角线长的公式是其特例）.

141. 面积射影定理

$$S=\frac{S'}{\cos\theta}.$$

(平面多边形及其射影的面积分别是 S、S'，它们所在平面所成锐二面角的为 θ).

142. 斜棱柱的直截面

已知斜棱柱的侧棱长是 l，侧面积和体积分别是 $S_{斜棱柱侧}$ 和 $V_{斜棱柱}$，它的直截面的周长和面积分别是 c_1 和 S_1，则

① $S_{斜棱柱侧}=c_1 l$.

② $V_{斜棱柱}=S_1 l$.

143. 作截面的依据

三个平面两两相交，有三条交线，则这三条交线交于一点或互相平行.

144. 棱锥的平行截面的性质

如果棱锥被平行于底面的平面所截，那么所得的截面与底面相似，截面面积与底面面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比（对应角相等，对应边对应成比例的多边形是相似多边形，相似多边形面积的比等于对应边的比的平方）；相应小棱锥与小棱锥的侧面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比.

145. 欧拉定理（欧拉公式）

$V+F-E=2$（简单多面体的顶点数 V、棱数 E 和面数 F).

（1）E=各面多边形边数和的一半. 特别地，若每个面的边数为 n 的多边形，则面数 F 与棱数 E 的关系：$E=\frac{1}{2}nF$；

（2）若每个顶点引出的棱数为 m，则顶点数 V 与棱数 E 的关系：$E=\frac{1}{2}mV$.

146. 球的半径是 R，则

其体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，

其表面积 $S=4\pi R^2$.

147. 球的组合体

(1) 球与长方体的组合体：

长方体的外接球的直径是长方体的体对角线长.

(2) 球与正方体的组合体：

正方体的内切球的直径是正方体的棱长，正方体的棱切球的直径是正方体的面对角线长，正方体的外接球的直径是正方体的体对角线长.

(3) 球与正四面体的组合体：

棱长为 a 的正四面体的内切球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$，外接球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

148. 柱体、锥体的体积

$V_{柱体}=\frac{1}{3}Sh$（S 是柱体的底面积、h 是柱体的高）.

$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$（S 是锥体的底面积、h 是锥体的高）.

149. 分类计数原理（加法原理）

$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$.

150. 分步计数原理（乘法原理）

$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$.

151. 排列数公式

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.\ (n,\ m \in N^*,\ 且\ m \le n).$$

注: 规定 $0! = 1$.

152. 排列恒等式

(1) $A_n^m = (n-m+1)A_n^{m-1}$;

(2) $A_n^m = \dfrac{n}{n-m}A_{n-1}^m$;

(3) $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$;

(4) $nA_n^n = A_{n+1}^{n+1} - A_n^n$;

(5) $A_{n+1}^m = A_n^m + mA_n^{m-1}$.

(6) $1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$.

153. 组合数公式

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\times 2\times\cdots\times m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\ (n \in N^*,\ m \in N,\ 且\ m \le n).$$

154. 组合数的两个性质

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

(2) $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$.

注: 规定 $C_n^0 = 1$.

155. 组合恒等式

(1) $C_n^m = \dfrac{n-m+1}{m}C_n^{m-1}$;

(2) $C_n^m = \dfrac{n}{n-m}C_{n-1}^m$;

(3) $C_n^m = \dfrac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$;

(4) $\sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$;

(5) $C_r^r + C_{r+1}^r + C_{r+2}^r + \cdots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$.

(6) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^r + \cdots + C_n^n = 2^n$.

(7) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots 2^{n-1}$.

(8) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$.

(9) $C_m^r C_n^0 + C_m^{r-1}C_n^1 + \cdots + C_m^0 C_n^r = C_{m+n}^r$.

(10) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

156. 排列数与组合数的关系

$A_n^m = m!\cdot C_n^m$.

157. 单条件排列

以下各条的大前提是从 n 个元素中取 m 个元素的排列.

（1）“在位”与“不在位”

①某（特）元必在某位有 A_{n-1}^{m-1} 种；②某（特）元不在某位有 $A_n^m - A_{n-1}^{m-1}$（补集思想）$= A_{n-1}^1 A_{n-1}^{m-1}$（着眼位置）$= A_{n-1}^m + A_{m-1}^1 A_{n-1}^{m-1}$（着眼元素）种.

（2）紧贴与插空（即相邻与不相邻）

①定位紧贴：$k(k \le m \le n)$ 个元在固定位的排列有 $A_k^k A_{n-k}^{m-k}$ 种.

②浮动紧贴：n 个元素的全排列把 k 个元排在一起的排法有 $A_{n-k+1}^{n-k+1} A_k^k$ 种.注：此类问题常用捆绑法；

③插空：两组元素分别有 k、h 个（$k \le h+1$），把它们合在一起来作全排列，k 个的一组互不能挨近的所有排列数有 $A_h^h A_{h+1}^k$ 种.

（3）两组元素各相同的插空

m 个大球 n 个小球排成一列，小球必分开，问有多少种排法？

当 $n > m+1$ 时，无解；当 $n \le m+1$ 时，有 $\dfrac{A_{m+1}^n}{A_n^n} = C_{m+1}^n$ 种排法.

（4）两组相同元素的排列：两组元素有 m 个和 n 个，各组元素分别相同的排列数为 C_{m+n}^n.

158. 分配问题

（1）(平均分组有归属问题)将相异的 m、n 个物件等分给 m 个人，各得 n 件，其分配方法数共有 $N = C_{mn}^n \cdot C_{mn-n}^n \cdot C_{mn-2n}^n \cdots C_{2n}^n \cdot C_n^n = \dfrac{(mn)!}{(n!)^m}$.

（2）(平均分组无归属问题)将相异的 $m \cdot n$ 个物体等分为无记号或无顺序的 m 堆，其分配方法数共有

$$N = \frac{C_{mn}^n \cdot C_{mn-n}^n \cdot C_{mn-2n}^n \ldots C_{2n}^n \cdot C_n^n}{m!} = \frac{(mn)!}{m!(n!)^m}.$$

（3）(非平均分组有归属问题)将相异的 $P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分给 m 个人，物件必须被分完，分别得到 n_1，n_2，,，n_m 件，且 n_1，n_2，,，n_m 这 m 个数彼此不相等，则其分配方法数共有 $N = C_p^{n_1} \cdot C_{p-n_1}^{n_2} \ldots C_{n_m}^{n_m} \cdot m! = \dfrac{p!m!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$.

（4）(非完全平均分组有归属问题)将相异的 $P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分给 m 个人，物件必须被分完，分别得到 n_1，n_2，,，n_m 件，且 n_1，n_2，,，n_m 这 m 个数中分别有 a、b、c、,个相等，则其分配方法数有 $N = \dfrac{C_p^{n_1} \cdot C_{p-n_1}^{n_2} \ldots C_{n_m}^{n_m} \cdot m!}{a!b!c!\ldots} = \dfrac{p!m!}{n_1!n_2!\ldots n_m!(a!b!c!\ldots)}$.

（5）(非平均分组无归属问题)将相异的 $P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分为任意的 n_1，n_2，,，n_m 件无记号的 m 堆，且 n_1，n_2，,，n_m 这 m 个数彼此不相等，则其分配方法数有 $N = \dfrac{p!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$.

（6）(非完全平均分组无归属问题)将相异的 $P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$ 个物体分为任意的 n_1，n_2，,，n_m 件无记号的 m 堆，且 n_1，n_2，,，n_m 这 m 个数中分别有 a、b、c、,个相等，则其分配方法数有 $N = \dfrac{p!}{n_1!n_2!\ldots n_m!(a!b!c!\ldots)}$.

（7）(限定分组有归属问题)将相异的 p（$p = n_1+n_2+\cdots+n_m$）个物体分给甲、乙、丙，,，等 m 个人，物体必须被分完，如果指定甲得 n_1 件，乙得 n_2 件，丙得 n_3 件，,时，则无论 n_1，n_2，,，n_m 等 m 个数是否全相异或不全相异其分配方法数恒有

$$N=C_p^{n_1}\cdot C_{p-n_1}^{n_2}\ldots C_{n_m}^{n_m}=\frac{p!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}.$$

159. “错位问题”及其推广

贝努利装错笺问题：信 n 封信与 n 个信封全部错位的组合数为

$$f(n)=n![\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}].$$

推广: n 个元素与 n 个位置，其中至少有 m 个元素错位的不同组合总数为

$$f(n,m)=n!-C_m^1(n-1)!+C_m^2(n-2)!-C_m^3(n-3)!+C_m^4(n-4)!$$
$$-\cdots+(-1)^pC_m^p(n-p)!+\cdots+(-1)^mC_m^m(n-m)!$$
$$=n![1-\frac{C_m^1}{A_n^1}+\frac{C_m^2}{A_n^2}-\frac{C_m^3}{A_n^3}+\frac{C_m^4}{A_n^4}-\cdots+(-1)^p\frac{C_m^p}{A_n^p}+\cdots+(-1)^m\frac{C_m^m}{A_n^m}].$$

160. 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的解的个数

(1)方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）的正整数解有 C_{m-1}^{n-1} 个.

(2)方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）的非负整数解有 C_{n+m-1}^{n-1} 个.

(3)方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）满足条件 $x_i\ge k$ $(k\in N^*, 2\le i\le n-1)$ 的非负整数解有 $C_{m+1-(n-2)(k-1)}^{n-1}$ 个.

(4)方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）满足条件 $x_i\le k$ $(k\in N^*, 2\le i\le n-1)$ 的正整数解有 $C_{n+m-1}^{n-1}-C_{n-2}^1C_{m+n-k-2}^{n-1}+C_{n-2}^2C_{m+n-2k-3}^{n-1}-\cdots+(-1)^{n-2}C_{n-2}^{n-2}C_{m+1-(n-2)k}^{n-1}$ 个.

161. 二项式定理 $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$；

二项展开式的通项公式

$$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r\ (r=0,1,2\cdots,n).$$

162. 等可能性事件的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

163. 互斥事件 A，B 分别发生的概率的和

P(A＋B)=P(A)＋P(B).

164. n 个互斥事件分别发生的概率的和

$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

165. 独立事件 A，B 同时发生的概率

P(A·B)= P(A)·P(B).

166.n 个独立事件同时发生的概率

$P(A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n)$.

167.n 次独立重复试验中某事件恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}.$$

168. 离散型随机变量的分布列的两个性质

（1）$P_i\ge 0(i=1,2,\cdots)$；

（2）$P_1+P_2+\cdots=1$.

169. 数学期望

$$E\xi=x_1P_1+x_2P_2+\cdots+x_nP_n+\cdots$$

170. 数学期望的性质

(1) $E(a\xi+b)=aE(\xi)+b$.

(2) 若 $\xi \sim B(n,p)$，则 $E\xi=np$.

(3) 若 ξ 服从几何分布，且 $P(\xi=k)=g(k,p)=q^{k-1}p$，则 $E\xi=\frac{1}{p}$.

171. 方差

$$D\xi=(x_1-E\xi)^2\cdot p_1+(x_2-E\xi)^2\cdot p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2\cdot p_n+\cdots$$

172. 标准差

$$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}.$$

173. 方差的性质

(1) $D(a\xi+b)=a^2D\xi$；

(2) 若 $\xi \sim B(n,p)$，则 $D\xi=np(1-p)$.

(3) 若 ξ 服从几何分布，且 $P(\xi=k)=g(k,p)=q^{k-1}p$，则 $D\xi=\frac{q}{p^2}$.

174. 方差与期望的关系

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2.$$

175. 正态分布密度函数

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}6}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{26^2}}, x\in(-\infty,+\infty)$，式中的实数 μ，σ（$\sigma>0$）是参数，分别表示个体的平均数与标准差.

176. 标准正态分布密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}6}e^{-\frac{x^2}{2}}, x\in(-\infty,+\infty).$$

177. 对于 $N(\mu,\sigma^2)$，取值小于 x 的概率

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

$$\begin{aligned}P(x_1<x_0<x_2)&=P(x<x_2)-P(x<x_1)\\&=F(x_2)-F(x_1)\\&=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

178. 回归直线方程

$$\hat{y}=a+bx，其中\begin{cases}b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\\a=\bar{y}-b\bar{x}\end{cases}.$$

179. 相关系数

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2)(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2)}}.$$

$|r|\le 1$，且 $|r|$ 越接近于 1，相关程度越大；$|r|$ 越接近于 0，相关程度越小.

180. 特殊数列的极限

（1）$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q|<1 \\ 1 & q=1 \\ \text{不存在} & |q|>1 \text{或} q=-1 \end{cases}$.

（2）$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} 0 & (k<t) \\ \frac{a_t}{b_k} & (k=t) \\ \text{不存在} & (k>t) \end{cases}$.

（3）$S = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$（S 无穷等比数列 $\{a_1 q^{n-1}\}$（$|q|<1$）的和）.

181.函数的极限定理

$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = a$.

182.函数的夹逼性定理

如果函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 的附近满足：

（1）$g(x) \le f(x) \le h(x)$；

（2）$\lim_{x\to x_0} g(x) = a, \lim_{x\to x_0} h(x) = a$（常数），

则 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

本定理对于单侧极限和 $x\to\infty$ 的情况仍然成立 .

183.几个常用极限

（1）$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$（$|a|<1$）；

（2）$\lim_{x\to x_0} x = x_0$，$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$.

184.两个重要的极限

（1）$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$；

（2）$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (e=2.718281845，).

185.函数极限的四则运算法则

若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$，$\lim_{x\to x_0} g(x) = b$，则

(1) $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$；

(2) $\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$；

(3) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} (b \ne 0)$.

186.数列极限的四则运算法则

若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$，则

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$；

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}\,(b\neq 0)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c\cdot a$ (c 是常数).

187. $f(x)$ 在 x_0 处的导数（或变化率或微商）

$$f'(x_0)=y'\big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

188. 瞬时速度

$$\upsilon=s'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

189. 瞬时加速度

$$a=v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}.$$

190. $f(x)$ 在 (a,b) 的导数

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

191. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数是曲线 $y=f(x)$ 在 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率 $f'(x_0)$，相应的切线方程是 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

192. 几种常见函数的导数

(1) $C'=0$（C 为常数）.

(2) $(x^n)'=nx^{n-1}(n\in Q)$.

(3) $(\sin x)'=\cos x$.

(4) $(\cos x)'=-\sin x$.

(5) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$； $(\log a^{x})'=\frac{1}{x}\log_a{}^{e}$.

(6) $(e^x)'=e^x$; $(a^x)'=a^x\ln a$.

193. 导数的运算法则

（1） $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

（2） $(uv)'=u'v+uv'$.

（3） $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

194. 复合函数的求导法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $u_x'=\varphi'(x)$，函数 $y=f(u)$ 在点 x 处的对应点 U 处有导数 $y_u'=f'(u)$，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处有导数，且 $y_x'=y_u'\cdot u_x'$，或写作 $f_x'(\varphi(x))=f'(u)\varphi'(x)$.

195. 常用的近似计算公式（当 $|x|$ 充小时）

(1) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$; $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$；

(2) $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x(\alpha\in R)$； $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$；

(3) $e^x\approx 1+x$；

(4) $l_n(1+x)\approx x$；

(5) $\sin x\approx x$（x为弧度）；

(6) $\tan x\approx x$（x为弧度）；

(7) $\arctan x\approx x$（x为弧度）

196. 判别 $f(x_0)$ 是极大（小）值的方法

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续时,

（1）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 是极大值；

（2）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 是极小值．

197. 复数的相等

$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c,b=d$．（$a,b,c,d\in R$）

198. 复数 $z=a+bi$ 的模（或绝对值）

$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$．

199. 复数的四则运算法则

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$；

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$；

(3) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$；

(4) $(a+bi)\div(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i(c+di\neq 0)$．

200. 复数的乘法的运算律

对于任何 $z_1,z_2,z_3\in C$，有

交换律：$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$．

结合律：$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$．

分配律：$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$．

201. 复平面上的两点间的距离公式

$d=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$（$z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$）．

202. 向量的垂直

非零复数 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，则

$\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}\Leftrightarrow \overline{z_1}\cdot z_2$ 的实部为零 $\Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1}$ 为纯虚数 $\Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$

$\Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\Leftrightarrow |z_1+z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow ac+bd=0\Leftrightarrow z_1=\lambda iz_2$ (λ 为非零实数).

203. 实系数一元二次方程的解

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$,

①若 $\Delta=b^2-4ac>0$, 则 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

②若 $\Delta=b^2-4ac=0$, 则 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$；

③若 $\Delta=b^2-4ac<0$，它在实数集 R 内没有实数根；在复数集 C 内有且仅有两个共轭复数根 $x=\frac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}i}{2a}(b^2-4ac<0)$．

高中数学高考知识练习

1. 对于集合，一定要抓住集合的代表元素，及元素的“确定性、互异性、无序性”。

如：集合 $A=\{x|y=\lg x\}$，$B=\{y|y=\lg x\}$，$C=\{(x,y)|y=\lg x\}$，A、B、C中元素各表示什么？

2. 进行集合的交、并、补运算时，不要忘记集合本身和空集 $\varnothing$的特殊情况。

注重借助于数轴和文氏图解集合问题。

空集是一切集合的子集，是一切非空集合的真子集。

如：集合 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x|ax=1\}$

若$B\subset A$，则实数 a的值构成的集合为 ________

（答：$\left\{-1，0，\frac{1}{3}\right\}$）

3. 注意下列性质：

（1）集合 $\{a_1，a_2，\ldots，a_n\}$的所有子集的个数是 2^n；

（2）若$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$，$A\cup B=B$；

（3）德摩根定律：

$C_U(A\cup B)=(C_UA)\cap(C_UB)$，$C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB)$

4. 你会用补集思想解决问题吗？（排除法、间接法）

如：已知关于 x的不等式 $\frac{ax-5}{x^2-a}<0$的解集为 M，若 $3\in M$且$5\notin M$，求实数 a

的取值范围。

$$\left.\begin{array}{l}（\because 3\in M，\therefore \dfrac{a\cdot 3-5}{3^2-a}<0 \\ \because 5\notin M，\therefore \dfrac{a\cdot 5-5}{5^2-a}\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow a\in\left[1,\ \dfrac{5}{3}\right)\cup(9,\ 25)）$$

5. 可以判断真假的语句叫做命题，逻辑连接词有“或”($\vee$)，“且”($\wedge$) 和“非”($\neg$).

若 $p\wedge q$ 为真，当且仅当 p、q均为真

若 $p\vee q$ 为真，当且仅当 p、q至少有一个为真

若 $\neg p$ 为真，当且仅当 p为假

6. 命题的四种形式及其相互关系是什么？

（互为逆否关系的命题是等价命题。）

原命题与逆否命题同真、同假；逆命题与否命题同真同假。

7. 对映射的概念了解吗？映射 $f:A\to B$，是否注意到 A 中元素的任意性和 B 中与之对应元素的唯一性，哪几种对应能构成映射？

（一对一，多对一，允许 B 中有元素无原象。）

8. 函数的三要素是什么？如何比较两个函数是否相同？

（定义域、对应法则、值域）

9. 求函数的定义域有哪些常见类型？

例：函数 $y=\dfrac{\sqrt{x(4-x)}}{\lg(x-3)^2}$ 的定义域是 ______

（答：$(0,\ 2)\cup(2,\ 3)\cup(3,\ 4)$）

10. 如何求复合函数的定义域？

如：函数 $f(x)$ 的定义域是 $[a,\ b]$，$b>-a>0$，则函数 $F(x)=f(x)+f(-x)$ 的定义域是 _。

（答：$[a,\ -a]$）

11. 求一个函数的解析式或一个函数的反函数时，注明函数的定义域了吗？

如：$f(\sqrt{x}+1)=e^x+x$，求 $f(x)$.

令 $t=\sqrt{x}+1$，则 $t\geq 0$

$\therefore x=t^2-1$

$\therefore f(t)=e^{t^2-1}+t^2-1$

$\therefore f(x)=e^{x^2-1}+x^2-1\ (x\geq 0)$

12. 反函数存在的条件是什么？

（一一对应函数）

求反函数的步骤掌握了吗？

（①反解 x；②互换 x、y；③注明定义域）

如：求函数 $f(x)=\begin{cases}1+x & (x\geq 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$ 的反函数

（答：$f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1 & (x>1)\\ -\sqrt{-x} & (x<0)\end{cases}$）

13. 反函数的性质有哪些？

①互为反函数的图象关于直线 y＝x 对称；

②保存了原来函数的单调性、奇函数性；

③设 $y=f(x)$ 的定义域为 A，值域为 C，$a\in A$，$b\in C$，则 $f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$\therefore f^{-1}[f(a)]=f^{-1}(b)=a$，$f[f^{-1}(b)]=f(a)=b$

14. 如何用定义证明函数的单调性？

（取值、作差、判正负）

如何判断复合函数的单调性？

（$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则 $y=f[\varphi(x)]$

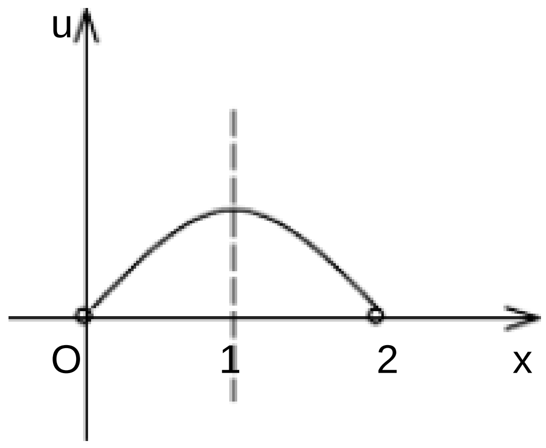
（外层） （内层）

当内、外层函数单调性相同时 $f[\varphi(x)]$ 为增函数，否则 $f[\varphi(x)]$ 为减函数。）

如：求 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x)$ 的单调区间

（设 $u=-x^2+2x$，由 $u>0$ 则 $0<x<2$

且 $\log_{\frac{1}{2}}u\downarrow$，$u=-(x-1)^2+1$，如图：



当$x\in(0,1]$时，u ，又 $\log_{\frac{1}{2}}u\downarrow$，$\therefore y\downarrow$

当$x\in[1,2)$时，$u\downarrow$，又 $\log_{\frac{1}{2}}u\downarrow$，$\therefore y$

∴,, ）

15. 如何利用导数判断函数的单调性？

在区间(a, b)内，若总有 $f'(x)\geq 0$则$f(x)$为增函数。（在个别点上导数等于零，不影响函数的单调性），反之也对，若 $f'(x)\leq 0$呢？

如：已知$a>0$，函数$f(x)=x^3-ax$在$[1,+\infty)$上是单调增函数，则 a的最大值是（）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

（令$f'(x)=3x^2-a=3\left(x+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\geq 0$

则$x\leq-\sqrt{\frac{a}{3}}$或$x\geq\sqrt{\frac{a}{3}}$

由已知$f(x)$在$[1,+\infty)$上为增函数，则 $\sqrt{\frac{a}{3}}\leq 1$，即$a\leq 3$

$\therefore a$的最大值为 3）

16. 函数 $f(x)$具有奇偶性的必要（非充分）条件是什么？

（$f(x)$ 定义域关于原点对称）

若$f(-x)=-f(x)$总成立 $\Leftrightarrow$ $f(x)$为奇函数 $\Leftrightarrow$ 函数图象关于原点对称

若$f(-x)=f(x)$总成立 $\Leftrightarrow$ $f(x)$为偶函数 $\Leftrightarrow$ 函数图象关于 y轴对称

注意如下结论：

（1）在公共定义域内：两个奇函数的乘积是偶函数；两个偶函数的乘积是偶函数；一个偶函数与奇

函数的乘积是奇函数。

（2）若f(x) 是奇函数且定义域中有原点，则 $f(0)=0$。

如：若 $f(x)=\dfrac{a\cdot 2^{x}+a-2}{2^{x}+1}$ 为奇函数，则实数 $a=$ ________

（∵ $f(x)$ 为奇函数，$x\in R$，又 $0\in R$，∴ $f(0)=0$

即 $\dfrac{a\cdot 2^{0}+a-2}{2^{0}+1}=0$，∴ $a=1$）

又如：$f(x)$ 为定义在 $(-1,\ 1)$ 上的奇函数，当 $x\in(0,\ 1)$ 时，$f(x)=\dfrac{2^{x}}{4^{x}+1}$，

求 $f(x)$ 在 $(-1,\ 1)$ 上的解析式。

（令 $x\in(-1,\ 0)$，则 $-x\in(0,\ 1)$，$f(-x)=\dfrac{2^{-x}}{4^{-x}+1}$

又 $f(x)$ 为奇函数，∴ $f(x)=-\dfrac{2^{-x}}{4^{-x}+1}=-\dfrac{2^{x}}{1+4^{x}}$

又 $f(0)=0$，∴ $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2^{x}}{4^{x}+1} & x\in(-1,\ 0)\\ 0 & x=0\\ \dfrac{2^{x}}{4^{x}+1} & x\in(0,\ 1)\end{cases}$）

17. 你熟悉周期函数的定义吗？

（若存在实数 T（$T\neq 0$），在定义域内总有 $f(x+T)=f(x)$，则 $f(x)$ 为周期函数，T 是一个周期。）

如：若 $f(x+a)=-f(x)$，则 ____________

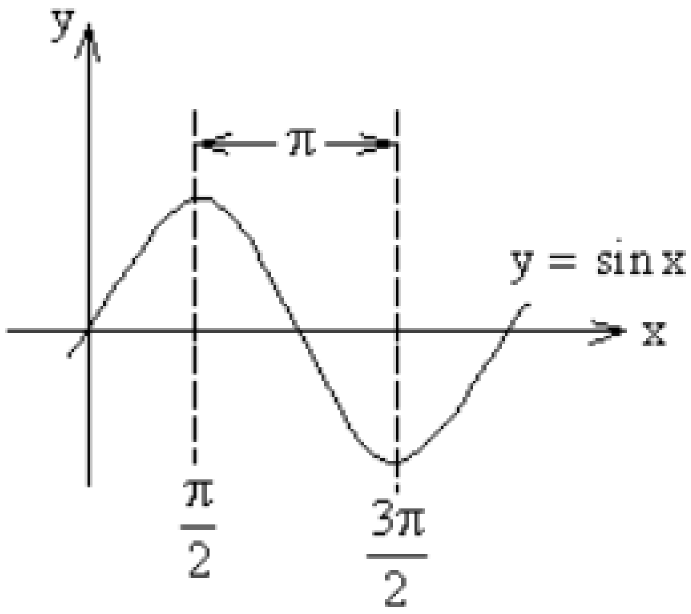
（答：$f(x)$ 是周期函数，$T=2a$ 为 $f(x)$ 的一个周期）

又如：若 $f(x)$ 图象有两条对称轴 $x=a$，$x=b$（⇔ ）

即 $f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$

则 $f(x)$ 是周期函数，$2|a-b|$ 为一个周期

如：



18. 你掌握常用的图象变换了吗？

$f(x)$ 与 $f(-x)$ 的图象关于 <u>y轴</u> 对称

$f(x)$ 与 $-f(x)$ 的图象关于 <u>x轴</u> 对称

$f(x)$ 与 $-f(-x)$ 的图象关于 <u>原点</u> 对称

$f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的图象关于 <u>直线 $y=x$</u> 对称

$f(x)$ 与 $f(2a-x)$ 的图象关于 <u>直线 $x=a$</u> 对称

$f(x)$ 与 $-f(2a-x)$ 的图象关于 点 $(a,\ 0)$ 对称

将 $y=f(x)$ 图象 $\xrightarrow[\text{右移 } a(a>0) \text{ 个单位}]{\text{左移 } a(a>0) \text{ 个单位}}$ $\begin{array}{l} y=f(x+a) \\ y=f(x-a) \end{array}$

$\xrightarrow[\text{下移 } b(b>0) \text{ 个单位}]{\text{上移 } b(b>0) \text{ 个单位}}$ $\begin{array}{l} y=f(x+a)+b \\ y=f(x+a)-b \end{array}$

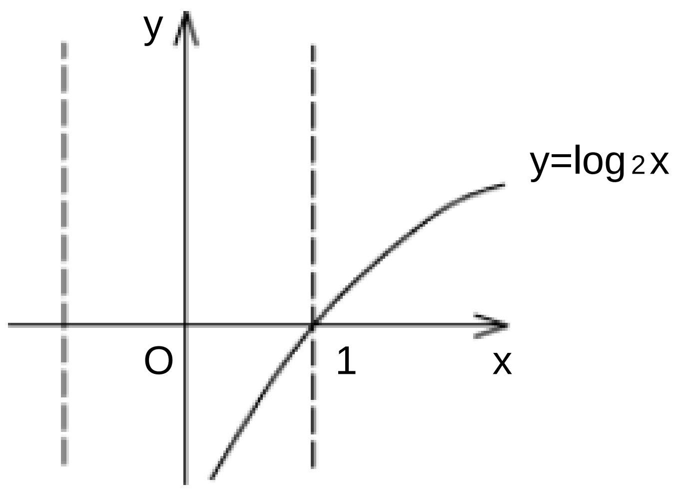
注意如下“翻折”变换：

$f(x) \longrightarrow |f(x)|$

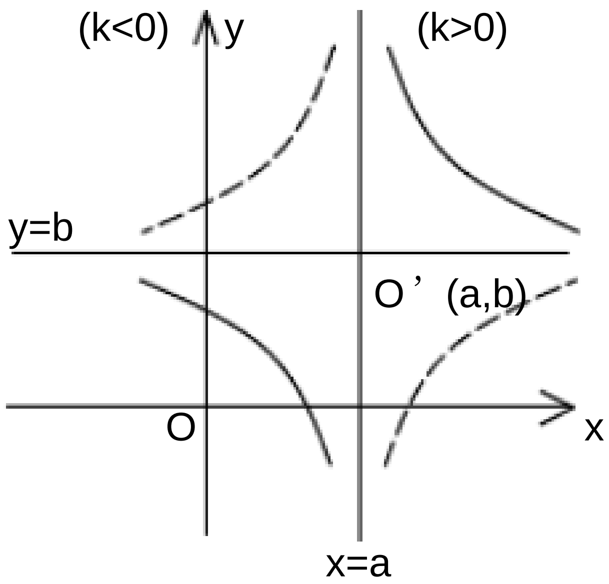
$f(x) \longrightarrow f(|x|)$

如：$f(x)=\log_2(x+1)$

作出 $y=|\log_2(x+1)|$ 及 $y=\log_2|x+1|$ 的图象



19. 你熟练掌握常用函数的图象和性质了吗？



（1）一次函数： $y=kx+b\ (k\neq 0)$

（2）反比例函数： $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$ 推广为 $y=b+\dfrac{k}{x-a}\ (k\neq 0)$ 是中心 $O'(a,\ b)$ 的双曲线。

（3）二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 图象为抛物线

顶点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$

开口方向： $a>0$，向上，函数 $y_{min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

$a<0$，向下， $y_{max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

应用：①“三个二次”（二次函数、二次方程、二次不等式）的关系——二次方程

$ax^2+bx+c=0$，$\Delta>0$时，两根 x_1、x_2为二次函数 $y=ax^2+bx+c$的图象与 x轴

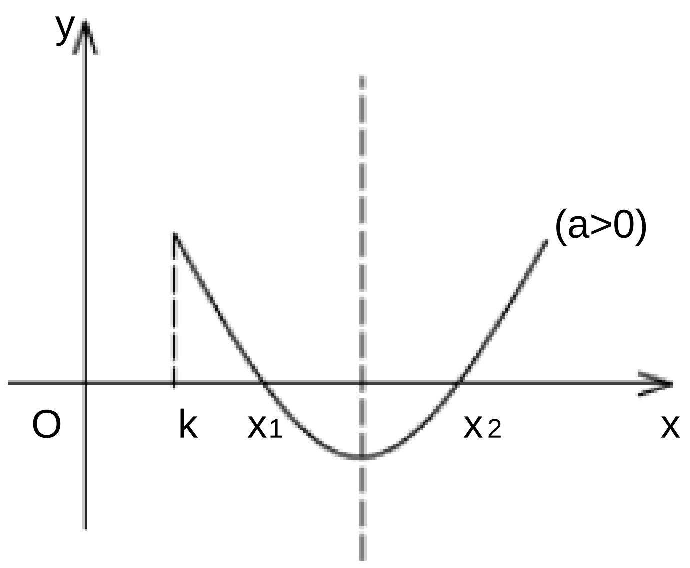
的两个交点，也是二次不等式 $ax^2+bx+c>0\ (<0)$解集的端点值。

②求闭区间［ m， n］上的最值。

③求区间定（动），对称轴动（定）的最值问题。

④一元二次方程根的分布问题。

如：二次方程 $ax^2+bx+c=0$的两根都大于 $k\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geq 0\\ -\dfrac{b}{2a}>k\\ f(k)>0\end{cases}$

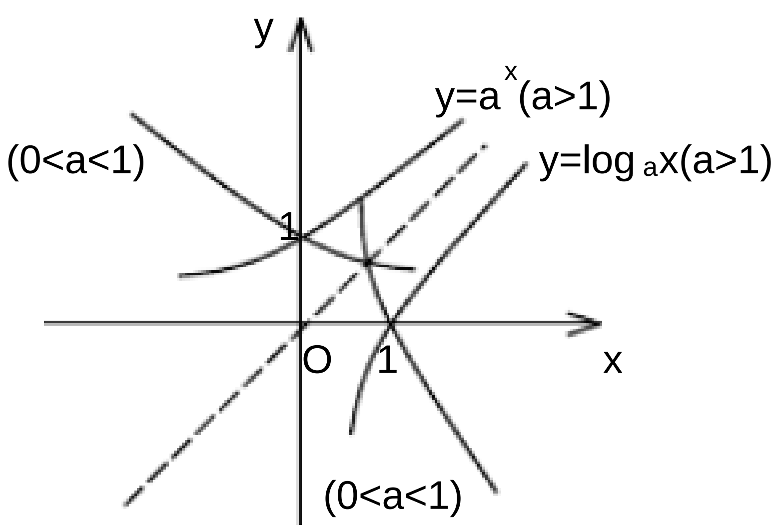


一根大于k，一根小于 $k\Leftrightarrow f(k)<0$

（4）指数函数：$y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$

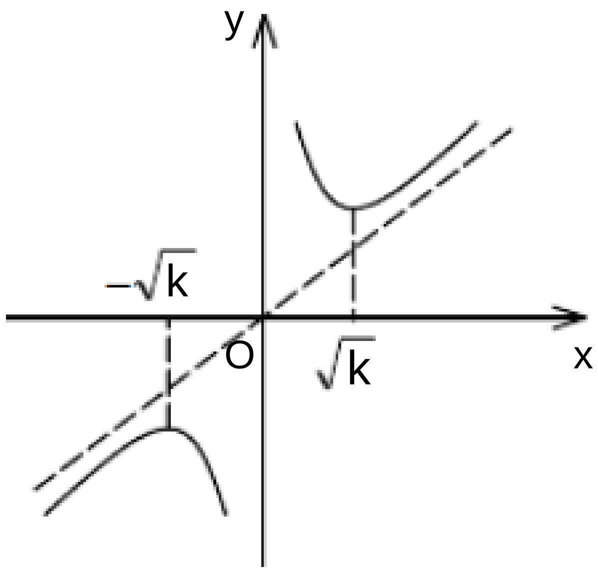
（5）对数函数 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$

由图象记性质！（注意底数的限定！）



（6）“对勾函数” $y=x+\dfrac{k}{x}\ (k>0)$

利用它的单调性求最值与利用均值不等式求最值的区别是什么？



20. 你在基本运算上常出现错误吗？

指数运算： $a^0 = 1\ (a \neq 0)$，$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}\ (a \neq 0)$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ (a \geq 0)$，$a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\ (a > 0)$

对数运算： $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N\ (M > 0,\ N > 0)$

$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$，$\log_a \sqrt[n]{M} = \dfrac{1}{n}\log_a M$

对数恒等式： $a^{\log_a x} = x$

对数换底公式： $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$

21. 如何解抽象函数问题？

（赋值法、结构变换法）

如：（1）$x \in R$，$f(x)$满足$f(x+y) = f(x) + f(y)$，证明$f(x)$为奇函数。

（先令$x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$再令$y = -x$，,, ）

（2）$x \in R$，$f(x)$满足$f(xy) = f(x) + f(y)$，证明$f(x)$是偶函数。

（先令$x = y = -t \Rightarrow f[(-t)(-t)] = f(t \cdot t)$

$\therefore f(-t) + f(-t) = f(t) + f(t)$

$\therefore f(-t) = f(t)$,, ）

（3）证明单调性： $f(x_2) = f[(x_2 - x_1) + x_2] =$,,

22. 掌握求函数值域的常用方法了吗？

（二次函数法（配方法），反函数法，换元法，均值定理法，判别式法，利用函数单调性法，导数法等。）

如求下列函数的最值：

（1）$y=2x-3+\sqrt{13-4x}$

（2）$y=\dfrac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}$

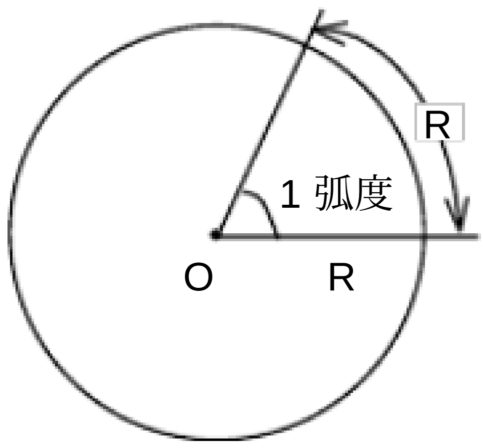
（3）$x>3$，$y=\dfrac{2x^2}{x-3}$

（4）$y=x+4+\sqrt{9-x^2}$ （设 $x=3\cos\theta$，$\theta\in[0,\pi]$）

（5）$y=4x+\dfrac{9}{x}$，$x\in(0,1]$

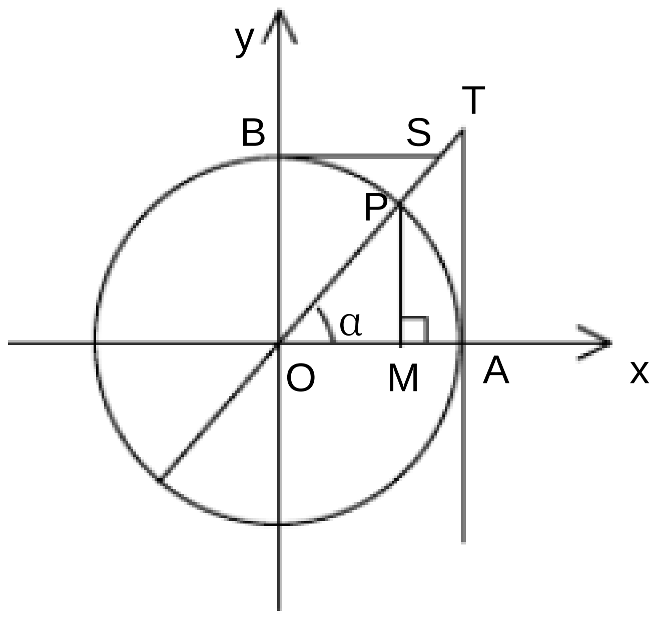
23. 你记得弧度的定义吗？能写出圆心角为 α，半径为 R 的弧长公式和扇形面积公式吗？

（$l=|\alpha|\cdot R$，$S_{扇}=\dfrac{1}{2}l\cdot R=\dfrac{1}{2}|\alpha|\cdot R^2$）



24. 熟记三角函数的定义，单位圆中三角函数线的定义

$\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$，$\tan\alpha=AT$

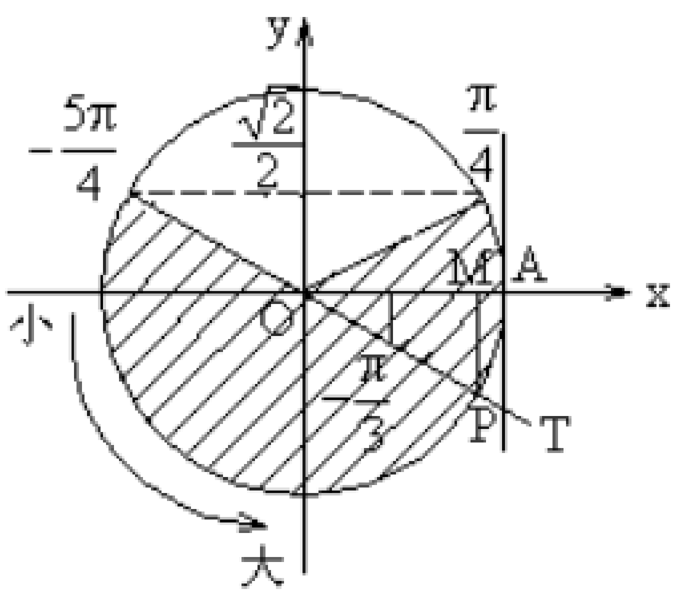


如：若 $-\dfrac{\pi}{8}<\theta<0$，则 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 的大小顺序是 ________

又如：求函数 $y=\sqrt{1-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$的定义域和值域。

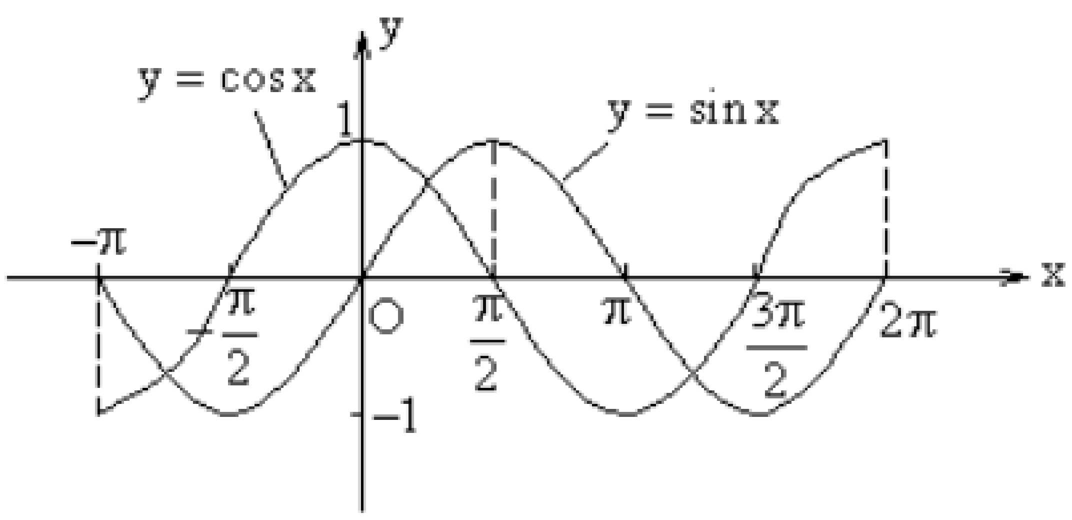
（$\because 1-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1-\sqrt{2}\sin x\geq 0$

$\therefore \sin x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$，如图：

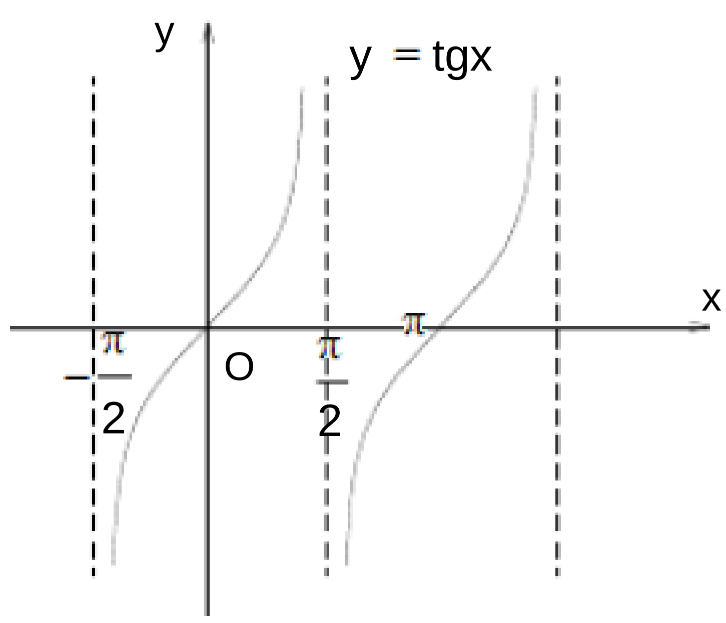


$\therefore 2k\pi-\frac{5\pi}{4}\leq x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$， $0\leq y\leq\sqrt{1+\sqrt{2}}$

25. 你能迅速画出正弦、 余弦、 正切函数的图象吗？并由图象写出单调区间、 对称点、 对称轴吗？



$|\sin x|\leq 1$， $|\cos x|\leq 1$



对称点为 $\left(k\frac{\pi}{2}, 0\right)$， $k\in Z$

$y=\sin x$的增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in Z)$

减区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in Z)$

图象的对称点为 $(k\pi,\ 0)$ 对称轴为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

$y=\cos x$的增区间为 $[2k\pi,\ 2k\pi+\pi](k\in Z)$

减区间为 $[2k\pi+\pi,\ 2k\pi+2\pi](k\in Z)$

图象的对称点为 $\left(k\pi+\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ 对称轴为 $x=k\pi(k\in Z)$

$y=\tan x$的增区间为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)k\in Z$

26. 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象和性质要熟记。 $[$或$y=A\cos(\omega x+\varphi)]$

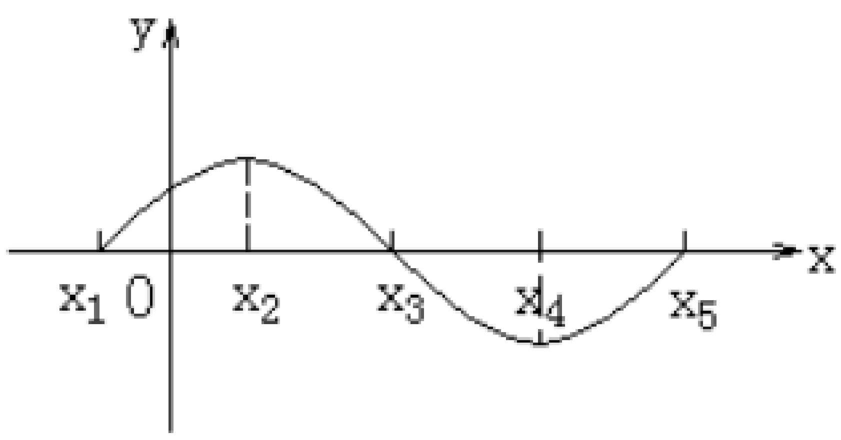
（1）振幅 $|A|$，周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$

若$f(x_0)=\pm A$，则 $x=x_0$为对称轴。

若$f(x_0)=0$，则$(x_0,\ 0)$为对称点，反之也对。

（2）五点作图：令 $\omega x+\varphi$依次为 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π，求出 x与y，依点 （x，y）作图象。

（3）根据图象求解析式。（求 A、ω、φ值）



如图列出 $\begin{cases}\omega(x_1)+\varphi=0\\ \omega(x_2)+\varphi=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

解条件组求 ω、φ值

Δ正切型函数　$y=A\tan(\omega x+\varphi)$　$T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$

27. 在三角函数中求一个角时要注意两个方面——先求出某一个三角函数值，再判定角的范围。

如：$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x\in\left[\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$，求 x值。

（$\because\ \pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$，$\therefore\ \dfrac{7\pi}{6}<x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{3}$，$\therefore\ x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{4}$，$\therefore\ x=\dfrac{13}{12}\pi$）

28. 在解含有正、余弦函数的问题时，你注意（到）运用函数的有界性了吗？

如：函数 $y=\sin x+\sin|x|$的值域是 ________

（$x\geq 0$时，$y=2\sin x\in[-2,\ 2]$，$x<0$时，$y=0$，$\therefore y\in[-2,\ 2]$）

29. 熟练掌握三角函数图象变换了吗？

（平移变换、伸缩变换）

平移公式：

（1）点 P（x，y）$\xrightarrow[\text{平移至}]{\vec{a}=(h,\ k)}$ P'（x'，y'），则 $\begin{cases}x'=x+h\\y'=y+k\end{cases}$

（2）曲线 $f(x,\ y)=0$沿向量 $\vec{a}=(h,\ k)$平移后的方程为 $f(x-h,\ y-k)=0$

如：函数　$y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1$ 的图象经过怎样的变换才能得到　　$y=\sin x$ 的 图象？

$$\left(y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1\xrightarrow{\text{横坐标伸长到原来的 }2\text{倍}}y=2\sin\left[2\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{\pi}{4}\right]-1\right.$$

$$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\xrightarrow{\text{左平移}\frac{\pi}{4}\text{个单位}}y=2\sin x-1\xrightarrow{\text{上平移 }1\text{个单位}}y=2\sin x$$

$$\left.\xrightarrow{\text{纵坐标缩短到原来的 }\frac{1}{2}\text{倍}}y=\sin x\right)$$

30. 熟练掌握同角三角函数关系和诱导公式了吗？

如：$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\cos\alpha\cdot\sec\alpha=\tan\dfrac{\pi}{4}$

$=\sin\dfrac{\pi}{2}=\cos 0=$,, 称为　1的代换。

“$k\cdot\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$”化为 α 的三角函数——“奇变，偶不变，符号看象限”，　　“奇”、“偶”指 k 取奇、偶数。

如： $\cos\frac{9\pi}{4}+\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+\sin(21\pi)=$ ________

又如：函数 $y=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$，则 y的值为 ________

A. 正值或负值　　B. 负值　　C. 非负值　　D. 正值

（$y=\frac{\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)}>0$，$\because\ \alpha\neq0$）

31. 熟练掌握两角和、差、倍、 降幂公式 及其逆向应用了吗？

理解公式之间的联系：

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\xrightarrow{\text{令}\alpha=\beta}\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\xrightarrow{\text{令}\alpha=\beta}\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\downarrow$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}\qquad=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\Rightarrow$$

$$\downarrow$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\qquad\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$$

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),\quad\tan\varphi=\frac{b}{a}$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$$

应用以上公式对三角函数式化简。 （化简要求：项数最少、函数种类最少，分母中不含三角函数，能求值，尽可能求值。 ）

具体方法：

（1）角的变换：如 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，$\frac{\alpha+\beta}{2}=\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$，，

（2）名的变换：化弦或化切

（3）次数的变换：升、降幂公式

（4）形的变换：统一函数形式，注意运用代数运算。

如：已知 $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos 2\alpha}=1$, $\tan(\alpha-\beta)=-\dfrac{2}{3}$，求 $\tan(\beta-2\alpha)$的值。

（由已知得：$\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}=1$, ∴ $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$

又 $\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{2}{3}$

$$\therefore \tan(\beta-2\alpha)=\tan[(\beta-\alpha)-\alpha]=\frac{\tan(\beta-\alpha)-\tan\alpha}{1+\tan(\beta-\alpha)\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}\text{）}$$

32. 正、余弦定理的各种表达形式你还记得吗？如何实现边、角转化，而解斜三角形？

余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

（应用：已知两边一夹角求第三边；已知三边求角。）

正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R\Leftrightarrow\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\\ c=2R\sin C\end{cases}$

$S_\Delta=\dfrac{1}{2}a\cdot b\sin C$

$\because A+B+C=\pi$, $\therefore A+B=\pi-C$

$\therefore \sin(A+B)=\sin C$, $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$

如 ΔABC 中，$2\sin^2\dfrac{A+B}{2}+\cos 2C=1$

（1）求角 C；

（2）若 $a^2=b^2+\dfrac{c^2}{2}$，求 $\cos 2A-\cos 2B$的值。

（（1）由已知式得：$1-\cos(A+B)+2\cos^2C-1=1$

又 $A+B=\pi-C$, $\therefore 2\cos^2C+\cos C-1=0$

$\therefore \cos C=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos C=-1$（舍）

又 $0<C<\pi$, $\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$

（2）由正弦定理及 $a^2=b^2+\dfrac{1}{2}c^2$得：

$2\sin^2A-2\sin^2B=\sin^2C=\sin^2\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{4}$

$1-\cos 2A-1+\cos 2B=\frac{3}{4}$

$\therefore \cos 2A-\cos 2B=-\frac{3}{4}$)

33. 用反三角函数表示角时要注意角的范围。

反正弦：$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right],\ x\in[-1,\ 1]$

反余弦：$\arccos x\in[0,\ \pi],\ x\in[-1,\ 1]$

反正切：$\arctan x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\ (x\in R)$

34. 不等式的性质有哪些？

（1）$a>b,\ \begin{matrix} c>0\Rightarrow ac>bc \\ c<0\Rightarrow ac<bc \end{matrix}$

（2）$a>b,\ c>d\Rightarrow a+c>b+d$

（3）$a>b>0,\ c>d>0\Rightarrow ac>bd$

（4）$a>b>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b},\ a<b<0\Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

（5）$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n,\ \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

（6）$|x|<a\ (a>0)\Leftrightarrow -a<x<a,\ |x|>a\Leftrightarrow x<-a$或$x>a$

如：若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列结论不正确的是（　　）

A. $a^2<b^2$　　　　B. $ab<b^2$

C. $|a|+|b|>|a+b|$　　　　D. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$

答案：C

35. 利用均值不等式：

$a^2+b^2\geq 2ab\ (a,\ b\in R^+)$；$a+b\geq 2\sqrt{ab}$；$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 求最值时，你是否注

意到“$a,\ b\in R^+$”且“等号成立”时的条件，积 (ab) 或和 $(a+b)$ 其中之一为定值？（一正、二定、三

相等）

注意如下结论：

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}\ (a,\ b \in R_+)$$

当且仅当 $a=b$时等号成立。

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca\ (a,\ b \in R)$$

当且仅当 $a=b=c$时取等号。

$a>b>0,\ m>0,\ n>0$，则

$$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}<1<\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$$

如：若 $x>0$，$2-3x-\frac{4}{x}$ 的最大值为

（设 $y=2-\left(3x+\frac{4}{x}\right)\leq 2-2\sqrt{12}=2-4\sqrt{3}$

当且仅当 $3x=\frac{4}{x}$，又 $x>0$，$\therefore x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，$y_{max}=2-4\sqrt{3}$）

又如：$x+2y=1$，则 2^x+4^y 的最小值为 ________

（$\because 2^x+2^{2y}\geq 2\sqrt{2^{x+2y}}=2\sqrt{2^1}$，$\therefore$最小值为 $2\sqrt{2}$）

36. 不等式证明的基本方法都掌握了吗？

（比较法、分析法、综合法、数学归纳法等）

并注意简单放缩法的应用。

如：证明 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$

（$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$

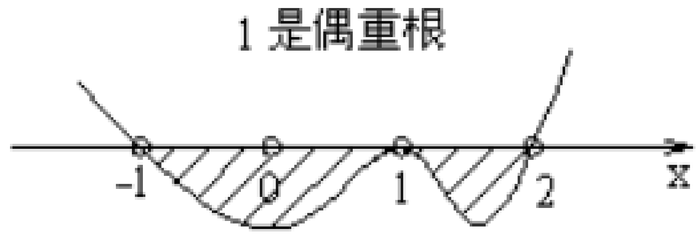
$=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$=2-\frac{1}{n}<2$）

37. 解分式不等式 $\frac{f(x)}{g(x)}>a\ (a\neq 0)$的一般步骤是什么？

（移项通分，分子分母因式分解，x 的系数变为 1，穿轴法解得结果。）

38. 用“穿轴法”解高次不等式——“奇穿，偶切”，从最大根的右上方开始



如：$(x+1)(x-1)^2(x-2)^3<0$

39. 解含有参数的不等式要注意对字母参数的讨论

如：对数或指数的底分 $a>1$或$0<a<1$讨论

40. 对含有两个绝对值的不等式如何去解？

（找零点，分段讨论，去掉绝对值符号，最后取各段的并集。）

例如：解不等式 $|x-3|-|x+1|<1$

（解集为 $\left\{x|x>\frac{1}{2}\right\}$）

41. 会用不等式 $|a|-|b|\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$证明较简单的不等问题

如：设 $f(x)=x^2-x+13$，实数 a满足 $|x-a|<1$

求证：$|f(x)-f(a)|<2(|a|+1)$

证明：$|f(x)-f(a)|=|(x^2-x+13)-(a^2-a+13)|$

$=|(x-a)(x+a-1)|$ $(\because|x-a|<1)$

$=|x-a||x+a-1|<|x+a-1|$

$\leq|x|+|a|+1$

又 $|x|-|a|\leq|x-a|<1$，$\therefore|x|<|a|+1$

$\therefore|f(x)-f(a)|<2|a|+2=2(|a|+1)$

（按不等号方向放缩）

42. 不等式恒成立问题，常用的处理方式是什么？（可转化为最值问题，或“△”问题）

如：$a<f(x)$恒成立 $\Leftrightarrow$ $a<f(x)$的最小值

$a>f(x)$恒成立 $\Leftrightarrow$ $a>f(x)$的最大值

$a>f(x)$能成立 $\Leftrightarrow$ $a>f(x)$的最小值

例如：对于一切实数 x，若 $|x-3|+|x+2|>a$ 恒成立，则 a 的取值范围是 ____

（设 $u=|x-3|+|x+2|$，它表示数轴上到两定点 -2 和 3 距离之和

$u_{min}=3-(-2)=5$，$\therefore 5>a$，即 $a<5$

或者：$|x-3|+|x+2|\geq|(x-3)-(x+2)|=5$，$\therefore a<5$）

43. 等差数列的定义与性质

定义：$a_{n+1}-a_n=d$（d 为常数），$a_n=a_1+(n-1)d$

等差中项：x，A，y 成等差数列 $\Leftrightarrow 2A=x+y$

前 n 项和 $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$

性质：$\{a_n\}$ 是等差数列

（1）若 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$；

（2）数列 $\{a_{2n-1}\}$，$\{a_{2n}\}$，$\{ka_n+b\}$ 仍为等差数列；

S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，，仍为等差数列；

（3）若三个数成等差数列，可设为 $a-d$，a，$a+d$；

（4）若 a_n，b_n 是等差数列 S_n，T_n 为前 n 项和，则 $\dfrac{a_m}{b_m}=\dfrac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$；

（5）$\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow S_n=an^2+bn$（$a$，$b$ 为常数，是关于 n 的常数项为 0 的二次函数）

S_n 的最值可求二次函数 $S_n=an^2+bn$ 的最值；或者求出 $\{a_n\}$ 中的正、负分界项，即：

当 $a_1>0$，$d<0$，解不等式组 $\begin{cases}a_n\geq 0\\ a_{n+1}\leq 0\end{cases}$ 可得 S_n 达到最大值时的 n 值。

当 $a_1<0$，$d>0$，由 $\begin{cases}a_n\leq 0\\ a_{n+1}\geq 0\end{cases}$ 可得 S_n 达到最小值时的 n 值。

如：等差数列 $\{a_n\}$，$S_n=18$，$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=3$，$S_3=1$，则 $n=$ ______

（由 $a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=3\Rightarrow 3a_{n-1}=3$，$\therefore a_{n-1}=1$

又$S_3=\frac{(a_1+a_3)}{2}\cdot 3=3a_2=1$，$\therefore a_2=\frac{1}{3}$

$$\therefore S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(a_2+a_{n-1})\cdot n}{2}=\frac{\left(\frac{1}{3}+1\right)n}{2}=18$$

$\therefore n=27$）

44. 等比数列的定义与性质

定义：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$（q为常数，$q\neq 0$），$a_n=a_1q^{n-1}$

等比中项：x、G、y成等比数列 $\Rightarrow G^2=xy$，或$G=\pm\sqrt{xy}$

前n项和：$S_n=\begin{cases} na_1\ (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1) \end{cases}$ （要注意 ！）

性质：$\{a_n\}$是等比数列

（1）若$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$

（2）S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$,,，仍为等比数列

45. 由S_n求a_n时应注意什么？

（$n=1$时，$a_1=S_1$，$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$）

46. 你熟悉求数列通项公式的常用方法吗？

例如：（1）求差（商）法

如：$\{a_n\}$满足 $\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+$,, $+\frac{1}{2^n}a_n=2n+5$ $<1>$

解：$n=1$时，$\frac{1}{2}a_1=2\times 1+5$，$\therefore a_1=14$

$n\geq 2$时，$\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+$,, $+\frac{1}{2^{n-1}}a_{n-1}=2n-1+5$ $<2>$

$<1>-<2>$得：$\frac{1}{2^n}a_n=2$

$\therefore a_n=2^{n+1}$

$\therefore a_n = \begin{cases} 14 & (n=1) \\ 2^{n+1} & (n \geq 2) \end{cases}$

[练习]

数列 $\{a_n\}$满足 $S_n + S_{n+1} = \frac{5}{3}a_{n+1}$，$a_1 = 4$，求 a_n

（注意到 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 代入得：$\frac{S_{n+1}}{S_n} = 4$

又 $S_1 = 4$，$\therefore \{S_n\}$是等比数列，$S_n = 4^n$

$n \geq 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1} = ,, \quad = 3 \cdot 4^{n-1}$

（2）叠乘法

例如：数列 $\{a_n\}$中，$a_1 = 3$，$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$，求 a_n

解：$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} ,, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} ,, \frac{n-1}{n}$，$\therefore \frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n}$

又 $a_1 = 3$，$\therefore a_n = \frac{3}{n}$

（3）等差型递推公式

由 $a_n - a_{n-1} = f(n)$，$a_1 = a_0$，求 a_n，用迭加法

$$n \geq 2\text{时，}\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &= f(2) \\ a_3 - a_2 &= f(3) \\ ,, \quad &\quad ,, \\ a_n - a_{n-1} &= f(n) \end{aligned}\right\}\text{两边相加，得：}$$

$a_n - a_1 = f(2) + f(3) + ,, \quad + f(n)$

$\therefore a_n = a_0 + f(2) + f(3) + ,, \quad + f(n)$

[练习]

数列 $\{a_n\}$，$a_1 = 1$，$a_n = 3^{n-1} + a_{n-1}\ (n \geq 2)$ 求 a_n

（$a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$）

（4）等比型递推公式

$a_n = ca_{n-1} + d$ （c、d为常数，$c \neq 0$，$c \neq 1$，$d \neq 0$）

可转化为等比数列，设 $a_n + x = c(a_{n-1} + x)$

$$\Rightarrow a_n = ca_{n-1} + (c-1)x$$

令 $(c-1)x = d$，$\therefore x = \dfrac{d}{c-1}$

$\therefore \left\{a_n + \dfrac{d}{c-1}\right\}$是首项为 $a_1 + \dfrac{d}{c-1}$，c为公比的等比数列

$$\therefore a_n + \frac{d}{c-1} = \left(a_1 + \frac{d}{c-1}\right) \cdot c^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \left(a_1 + \frac{d}{c-1}\right)c^{n-1} - \frac{d}{c-1}$$

［练习］

数列 $\{a_n\}$满足 $a_1 = 9$，$3a_{n+1} + a_n = 4$，求 a_n

（$a_n = 8\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{n-1} + 1$）

（5）倒数法

例如：$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n + 2}$，求 a_n

由已知得：$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{a_n + 2}{2a_n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{a_n}$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$为等差数列，$\dfrac{1}{a_1} = 1$，公差为 $\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n+1)$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{n+1}$$

47．你熟悉求数列前 n 项和的常用方法吗？

例如：（1）裂项法：把数列各项拆成两项或多项之和，使之出现成对互为相反数的项。

如：$\{a_n\}$是公差为 d的等差数列，求 $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k a_{k+1}}$

解：由 $\dfrac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \dfrac{1}{a_k(a_k + d)} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)(d \neq 0)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + ,, \quad + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

[练习]

求和：$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ,, \quad + \frac{1}{1+2+3+,, \quad +n}$

（$a_n = ,, \quad = ,,$ ， $S_n = 2 - \frac{1}{n+1}$）

（2）错位相减法：

若 $\{a_n\}$为等差数列， $\{b_n\}$为等比数列，求数列 $\{a_n b_n\}$（差比数列）前 n项和，可由 $S_n - qS_n$ 求S_n，其中 q为 $\{b_n\}$的公比。

如：$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ,, \quad + nx^{n-1} \quad <1>$

$x \cdot S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ,, \quad + (n-1)x^{n-1} + nx^n \quad <2>$

$<1> - <2>$：$(1-x)S_n = 1 + x + x^2 + ,, \quad + x^{n-1} - nx^n$

$x \neq 1$时， $S_n = \frac{(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$

$x = 1$时， $S_n = 1 + 2 + 3 + ,, \quad + n = \frac{n(n+1)}{2}$

（3）倒序相加法：把数列的各项顺序倒写，再与原来顺序的数列相加。

$$\left.\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + ,, \quad + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + ,, \quad + a_2 + a_1 \end{array}\right\}\text{相加}$$

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ,, \quad + (a_1 + a_n),,$

[练习]

已知$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$， 则 $f(1) + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(4) + f\left(\frac{1}{4}\right) =$ ______

（由 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=1$

$\therefore$ 原式 $=f(1)+\left[f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\left[f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right]+\left[f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}+1+1+1=3\frac{1}{2}$）

48. 你知道储蓄、贷款问题吗？

△零存整取储蓄（单利）本利和计算模型：

若每期存入本金 p 元，每期利率为 r，n 期后，本利和为：

$$S_n=p(1+r)+p(1+2r)+\cdots+p(1+nr)=p\left[n+\frac{n(n+1)}{2}r\right]\cdots\text{等差问题}$$

△若按复利，如贷款问题——按揭贷款的每期还款计算模型（按揭贷款——分期等额归还本息的借款种类）

若贷款（向银行借款） p 元，采用分期等额还款方式，从借款日算起，一期（如一年）后为第一次还款日，如此下去，第 n 次还清。如果每期利率为 r（按复利），那么每期应还 x 元，满足

$$p(1+r)^n=x(1+r)^{n-1}+x(1+r)^{n-2}+\cdots+x(1+r)+x$$

$$=x\left[\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}\right]=x\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

$$\therefore x=\frac{pr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

p——贷款数，r——利率，n——还款期数

49. 解排列、组合问题的依据是：分类相加，分步相乘，有序排列，无序组合。

（1）分类计数原理：$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$

（m_i 为各类办法中的方法数）

分步计数原理：$N=m_1\cdot m_2\cdots m_n$

（m_i 为各步骤中的方法数）

（2）排列：从 n 个不同元素中，任取 m（$m\le n$）个元素，按照一定的顺序排成一

列，叫做从 n个不同元素中取出 m个元素的一个排列，所有排列的个数记为 A_n^m.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}\ (m \le n)$$

规定：$0! = 1$

（3）组合：从 n 个不同元素中任取 m（m≤n）个元素并组成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m个元素的一个组合，所有组合个数记为 C_n^m.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

规定：$C_n^0 = 1$

（4）组合数性质：

$$C_n^m = C_n^{n-m},\quad C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m,\quad C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

50. 解排列与组合问题的规律是：

相邻问题捆绑法；相间隔问题插空法；定位问题优先法；多元问题分类法；至多至少问题间接法；

相同元素分组可采用隔板法，数量不大时可以逐一排出结果。

如：学号为 1，2，3，4 的四名学生的考试成绩

$x_i \in \{89, 90, 91, 92, 93\}$，$(i = 1, 2, 3, 4)$且满足 $x_1 < x_2 \le x_3 < x_4$，

则这四位同学考试成绩的所有可能情况是（）

A. 24　　B. 15　　C. 12　　D. 10

解析：可分成两类：

（1）中间两个分数不相等，

□ □ □ □

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

有$C_5^4 = 5$（种）

（2）中间两个分数相等

$x_1 < x_2 = x_3 < x_4$

相同两数分别取 90，91，92，对应的排列可以数出来，分别有 3，4，3 种，∴有 10 种。

∴共有 5＋10＝15（种）情况

51. 二项式定理

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$$

二项展开式的通项公式： $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r\ (r=0,1,\cdots,n)$

C_n^r为二项式系数（区别于该项的系数）

性质：

（1）对称性： $C_n^r=C_n^{n-r}\ (r=0,1,2,\cdots,n)$

（2）系数和： $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$$

（3）最值： n 为偶数时， n＋1 为奇数，中间一项的二项式系数最大且为第

$\left(\frac{n}{2}+1\right)$项，二项式系数为 $C_n^{\frac{n}{2}}$；n为奇数时， $(n+1)$为偶数，中间两项的二项式

系数最大即第 $\frac{n+1}{2}$项及第 $\frac{n+1}{2}+1$项，其二项式系数为 $C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}$

如：在二项式 $(x-1)^{11}$的展开式中，系数最小的项系数为 ________（用数字表示）

（∵n＝11

∴共有 12项，中间两项系数的绝对值最大，且为第 $\frac{12}{2}=6$或第 7项

由$C_{11}^rx^{11-r}(-1)^r$，∴取$r=5$即第 6项系数为负值为最小：

$$-C_{11}^6=-C_{11}^5=-426$$

又如：$(1-2x)^{2004}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2004}x^{2004}\ (x\in R)$，则

$(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+(a_0+a_3)+\cdots+(a_0+a_{2004})=$ __________（用数字作答）

（令$x=0$，得：$a_0=1$

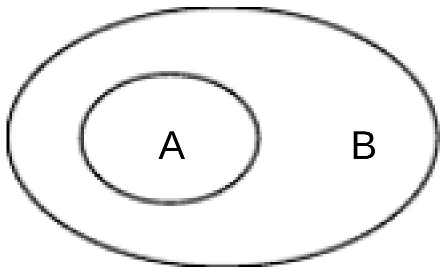
令$x=1$，得：$a_0+a_2+\cdots+a_{2004}=1$

∴原式 $=2003a_0+(a_0+a_1+\cdots+a_{2004})=2003\times1+1=2004$）

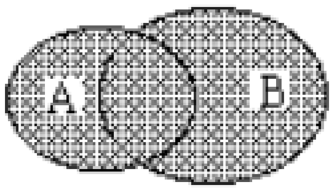
52. 你对随机事件之间的关系熟悉吗？

（1）必然事件 Ω，$P(\Omega)=1$，不可能事件 ϕ，$P(\phi)=0$

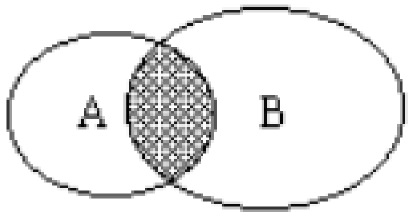
（2）包含关系： $A \subset B$，“A发生必导致B发生”称B包含A。



（3）事件的和（并）： $A+B$或$A \cup B$“A与B至少有一个发生”叫做 A与B的和（并）。

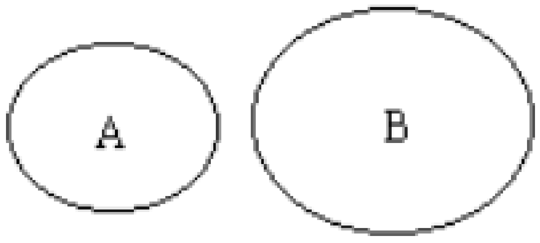


（4）事件的积（交）： $A \cdot B$或$A \cap B$“A与B同时发生”叫做 A与B的积。



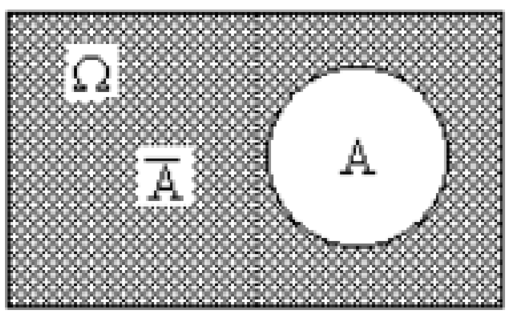
（5）互斥事件（互不相容事件）：“A 与 B 不能同时发生”叫做 A、B 互斥。

$A \cdot B = \phi$



（6）对立事件（互逆事件）：

“A不发生”叫做 A发生的对立（逆）事件， $\overline{A}$ $A \cup \overline{A} = \Omega$，$A \cap \overline{A} = \phi$



（7）独立事件： A 发生与否对 B 发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件。

A与B独立， A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立。

53. 对某一事件概率的求法：

分清所求的是：（1）等可能事件的概率（常采用排列组合的方法，即

$$P(A) = \frac{A\text{包含的等可能结果}}{\text{一次试验的等可能结果的总数}} = \frac{m}{n}$$

（2）若 A、B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

（3）若 A、B 相互独立，则 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

（4）$P(\overline{A})=1-P(A)$

（5）如果在一次试验中 A 发生的概率是 p，那么在 n 次独立重复试验中 A 恰好发生

k 次的概率：$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

如：设 10 件产品中有 4 件次品，6 件正品，求下列事件的概率。

（1）从中任取 2 件都是次品；

$$\left(P_1=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}\right)$$

（2）从中任取 5 件恰有 2 件次品；

$$\left(P_2=\frac{C_4^2C_6^3}{C_{10}^5}=\frac{10}{21}\right)$$

（3）从中有放回地任取 3 件至少有 2 件次品；

解析：有放回地抽取 3 次（每次抽 1 件），$\therefore n=10^3$

而至少有 2 件次品为“恰有 2 次品”和“三件都是次品”

$$\therefore m=C_3^2\cdot 4^2 6^1+4^3$$

$$\therefore P_3=\frac{C_3^2\cdot 4^2\cdot 6+4^3}{10^3}=\frac{44}{125}$$

（4）从中依次取 5 件恰有 2 件次品。

解析：∵一件一件抽取（有顺序）

$$\therefore n=A_{10}^5,\ m=C_4^2A_5^2A_6^3$$

$$\therefore P_4=\frac{C_4^2A_5^2A_6^3}{A_{10}^5}=\frac{10}{21}$$

分清（1）、（2）是组合问题，（3）是可重复排列问题，（4）是无重复排列问题。

54. 抽样方法主要有：简单随机抽样（抽签法、随机数表法）常常用于总体个数较少时，它的特征是从总体中逐个抽取；系统抽样，常用于总体个数较多时，它的主要特征是均衡成若干部分，每部分只取一个；分层抽样，主要特征是分层按比例抽样，主要用于总体中有明显差异，它们的共同特征是每个个体被抽到的概率相等，体现了抽样的客观性和平等性。

55. 对总体分布的估计——用样本的频率作为总体的概率，用样本的期望（平均值）和方差去估计总体的期望和方差。

要熟悉样本频率直方图的作法：

（1）算数据极差 $(x_{max}-x_{min})$；

（2）决定组距和组数；

（3）决定分点；

（4）列频率分布表；

（5）画频率直方图。

其中，频率 $=$ 小长方形的面积 $=$ 组距 $\times \dfrac{频率}{组距}$

样本平均值：$\bar{x}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

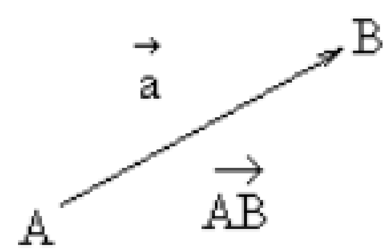
样本方差：$S^2=\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\right]$

如：从 10 名女生与 5 名男生中选 6 名学生参加比赛，如果按性别分层随机抽样，则组成此参赛队的概率为 ____________。

$\left(\dfrac{C_{10}^{4}C_{5}^{2}}{C_{15}^{6}}\right)$

56. 你对向量的有关概念清楚吗？

（1）向量——既有大小又有方向的量。



（2）向量的模——有向线段的长度，$|\vec{a}|$

（3）单位向量 $|\vec{a}_0|=1$，$\vec{a}_0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

（4）零向量 $\vec{0}$，$|\vec{0}|=0$

（5）相等的向量 $\Leftrightarrow \begin{cases}长度相等\\方向相同\end{cases}$ $\vec{a}=\vec{b}$

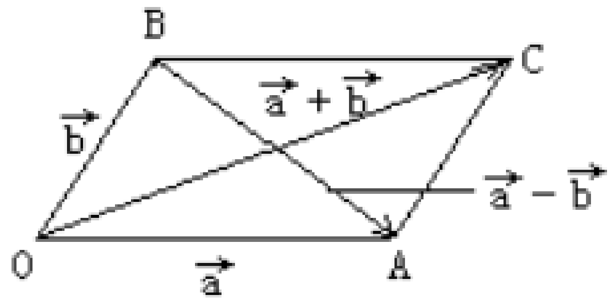
在此规定下向量可以在平面（或空间）平行移动而不改变。

（6）并线向量（平行向量）——方向相同或相反的向量。

规定零向量与任意向量平行。

$\vec{b} \parallel \vec{a}\,(\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow$ 存在唯一实数 λ，使 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$

（7）向量的加、减法如图：



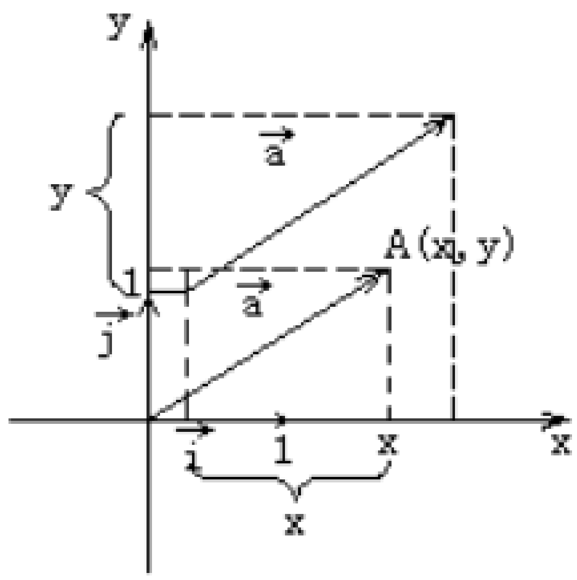
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

（8）平面向量基本定理（向量的分解定理）

$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ 是平面内的两个不共线向量，$\vec{a}$ 为该平面任一向量，则存在唯一实数对 λ_1、λ_2，使得 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$，$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底。

（9）向量的坐标表示



$\vec{i}$，$\vec{j}$ 是一对互相垂直的单位向量，则有且只有一对实数 x，y，使得 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$，称 (x，y) 为向量 $\vec{a}$ 的坐标，记作：$\vec{a} = (x, y)$，即为向量的坐标表示。

设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$，$\vec{b} = (x_2, y_2)$

则 $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1, y_1) \pm (y_1, y_2) = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2)$

$\lambda\vec{a}=\lambda(x_1, y_1)=(\lambda x_1, \lambda y_1)$

若$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

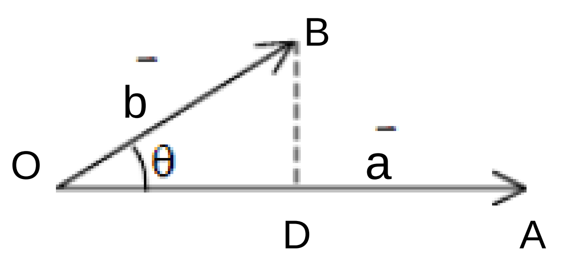
则$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，A、B两点间距离公式

57. 平面向量的数量积

（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积（或内积）。

θ为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，$\theta\in[0, \pi]$



数量积的几何意义：

$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于$|\vec{a}|$与$\vec{b}$在$\vec{a}$的方向上的射影$|\vec{b}|\cos\theta$的乘积。

（2）数量积的运算法则

①$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

②$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

③$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=x_1x_2+y_1y_2$

注意：数量积不满足结合律 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

（3）重要性质：设 $\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2)$

①$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=0$

②$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$或$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

$\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}$（$\vec{b}\neq 0$，$\lambda$惟一确定）

$\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$

③$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2$，$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

④ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

［练习］

（1）已知正方形 ABCD，边长为 1，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，则

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=$ ______

答案：$2\sqrt{2}$

（2）若向量 $\vec{a}=(x,\ 1)$，$\vec{b}=(4,\ x)$，当 $x=$ ____ 时 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线且方向相同

答案：2

（3）已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 均为单位向量，它们的夹角为 60°，那么 $|\vec{a}+3\vec{b}|=$ ______

答案：$\sqrt{13}$

58. 线段的定比分点

设 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，分点 $P(x,\ y)$，设 P_1、P_2 是直线 l 上两点，P 点在

l 上且不同于 P_1、P_2，若存在一实数 λ，使 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则 λ 叫做 P 分有向线段

$\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比（$\lambda>0$，P 在线段 P_1P_2 内，$\lambda<0$，P 在 P_1P_2 外），且

$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\[2ex] y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}$，P 为 P_1P_2 中点时，$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\\[2ex] y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$

如：ΔABC，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$

则 ΔABC 重心 G 的坐标是 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

※．你能分清三角形的重心、垂心、外心、内心及其性质吗？

59. 立体几何中平行、垂直关系证明的思路清楚吗？

平行垂直的证明主要利用线面关系的转化：

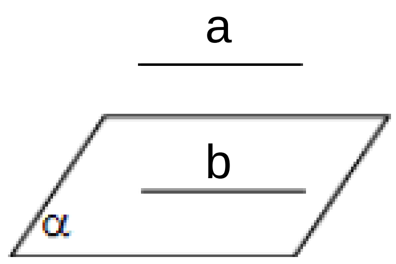
线∥线 ⟷ 线∥面 ⟷ 面∥面

$\xrightarrow{\text{判定}}$ 线⊥线 ⟷ 线⊥面 ⟷ 面⊥面 $\xleftarrow{\text{性质}}$

线∥线 ⟷ 线⊥面 ⟷ 面∥面

线面平行的判定：

$a\parallel b$，$b\subset$面α，$a\not\subset\alpha\Rightarrow a\parallel$面$\alpha$



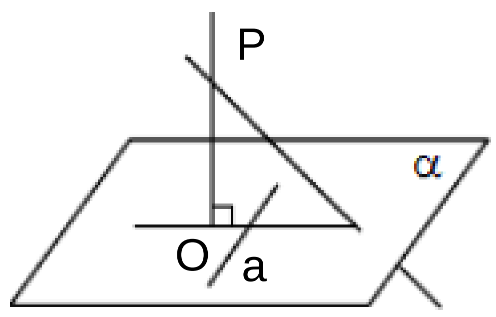
线面平行的性质：

$\alpha\parallel$面α，$\alpha\subset$面β，$\alpha\cap\beta=b\Rightarrow a\parallel b$

三垂线定理（及逆定理）：

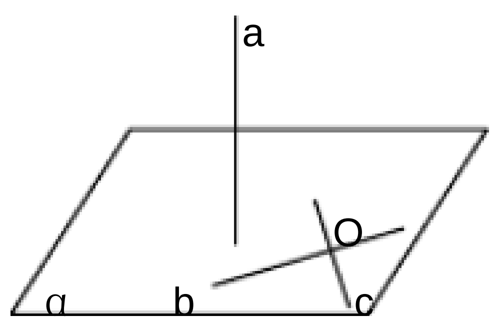
$PA\perp$面α，AO为PO在α内射影，$a\subset$面α，则

$a\perp OA\Rightarrow a\perp PO$；$a\perp PO\Rightarrow a\perp AO$



线面垂直：

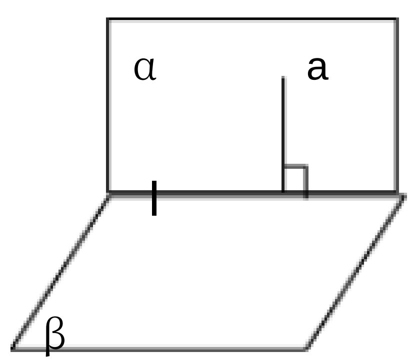
$a\perp b$，$a\perp c$，b，$c\subset\alpha$，$b\cap c=O\Rightarrow a\perp\alpha$



面面垂直：

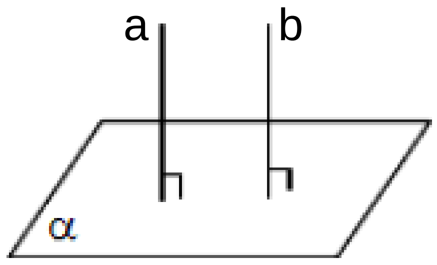
$a\perp$面α，$a\subset$面$\beta\Rightarrow\beta\perp\alpha$

面$\alpha\perp$面β，$\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$a\perp l\Rightarrow a\perp\beta$



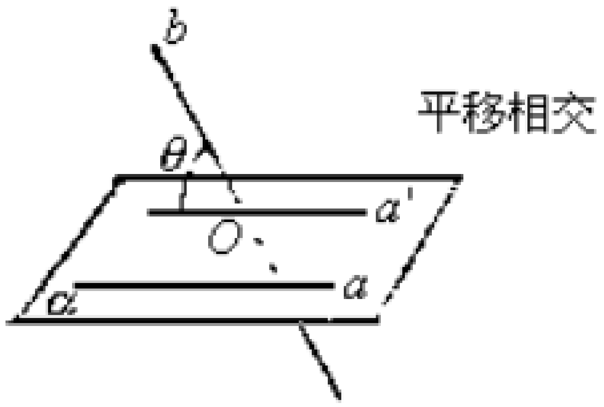
a⊥面 α, b⊥面 $\alpha \Rightarrow$ a∥b

面 α⊥a, 面 β⊥a $\Rightarrow$ α∥β



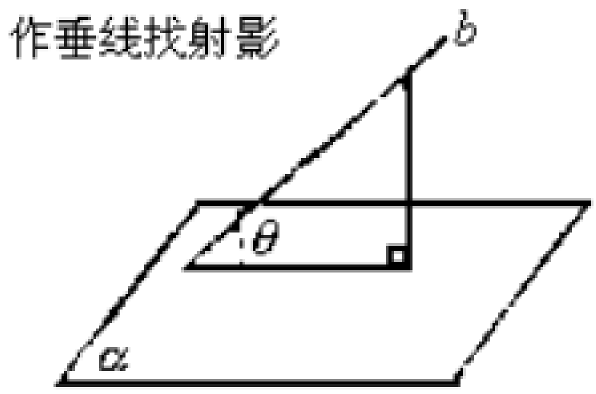
60. 三类角的定义及求法

（1）异面直线所成的角 θ，$0° < \theta \le 90°$

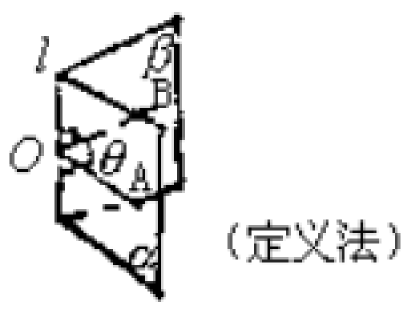


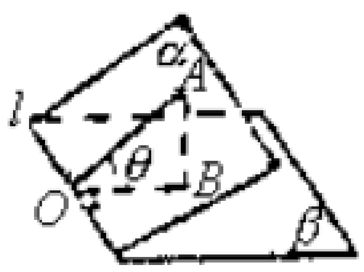
（2）直线与平面所成的角 θ，$0° \le \theta \le 90°$

$\theta = 0^{o}$ 时，b∥α或 b⊂α



（3）二面角：二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角 θ，$0^{o} < \theta \le 180^{o}$





（三垂线定理法：A∈α 作或证 AB⊥β 于 B，作 BO⊥棱于 O，连 AO，则 AO⊥棱 l，∴∠AOB 为所求。）

三类角的求法：

①找出或作出有关的角。

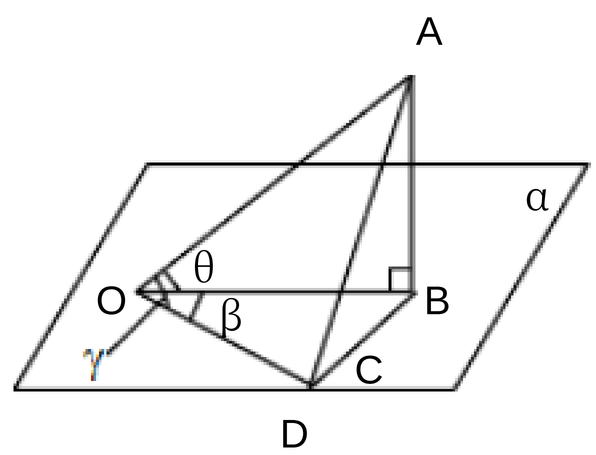
②证明其符合定义，并指出所求作的角。

③计算大小（解直角三角形，或用余弦定理）　　。

［练习］

（1）如图， OA 为 α 的斜线 OB 为其在 α 内射影， OC 为 α 内过 O 点任一直线。

证明： $\cos\gamma=\cos\theta\cdot\cos\beta$



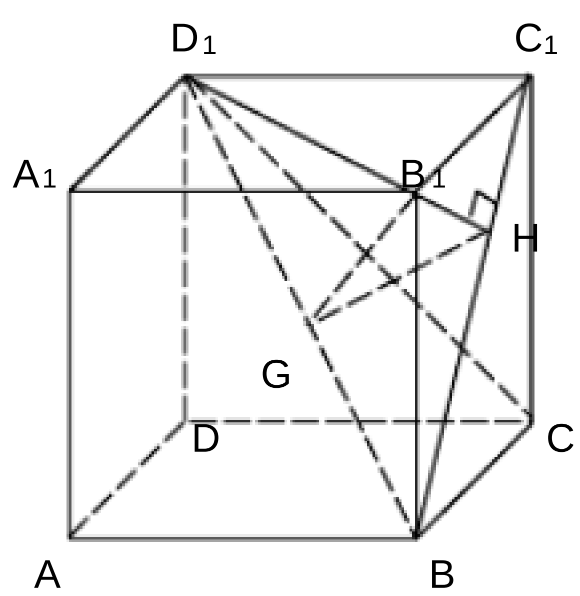
（θ为线面成角，∠ AOC ＝ γ，∠ BOC ＝ β）

（2）如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中对角线 $BD_1=8$， BD_1 与侧面 B_1BCC_1 所成的为 30°。

①求 BD_1 和底面 ABCD 所成的角；

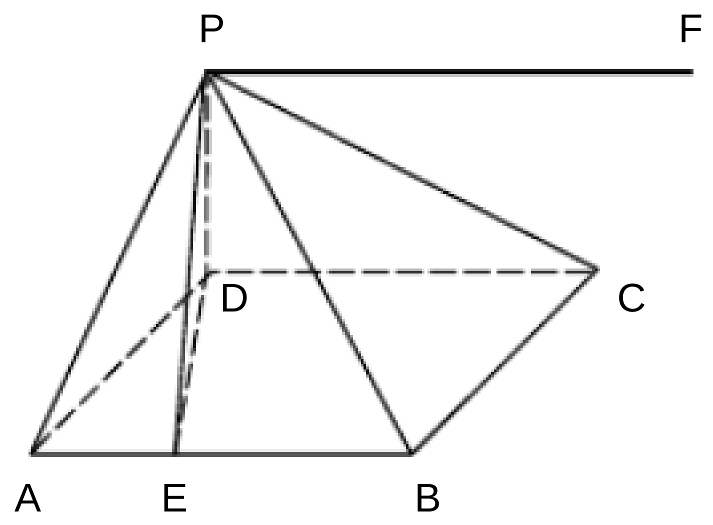
②求异面直线 BD_1 和 AD 所成的角；

③求二面角 $C_1-BD_1-B_1$ 的大小。



（① $\arcsin\dfrac{3}{4}$；② $60°$；③ $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$）

（3）如图 ABCD 为菱形，∠ DAB ＝60°， PD⊥面 ABCD，且 PD＝AD，求面 PAB 与面 PCD 所成的锐二面角的大小。



（∵ AB∥DC，P 为面 PAB 与面 PCD 的公共点，作 PF∥AB，则 PF 为面 PCD 与面 PAB 的交线,,）

61. 空间有几种距离？如何求距离？

点与点，点与线，点与面，线与线，线与面，面与面间距离。

将空间距离转化为两点的距离，构造三角形，解三角形求线段的长（如：三垂线定理法，或者用等积转化法）。

如：正方形 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 a，则：

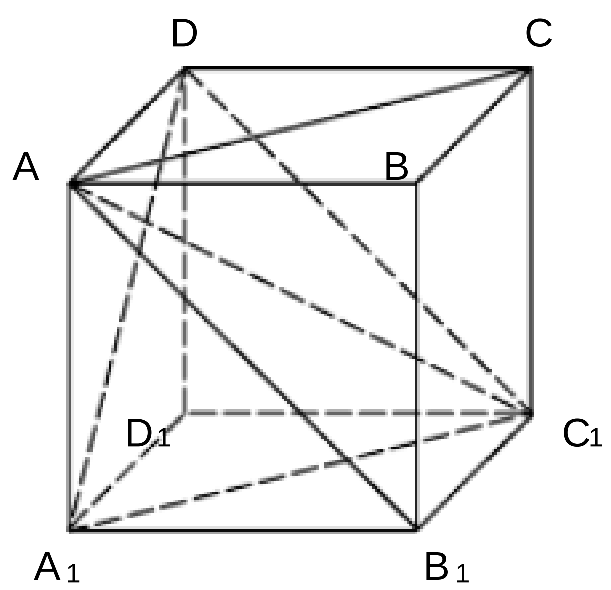
（1）点 C 到面 AB_1C_1 的距离为 ____________；

（2）点 B 到面 ACB_1 的距离为 ____________；

（3）直线 A_1D_1 到面 AB_1C_1 的距离为 ____________；

（4）面 AB_1C 与面 A_1DC_1 的距离为 ____________；

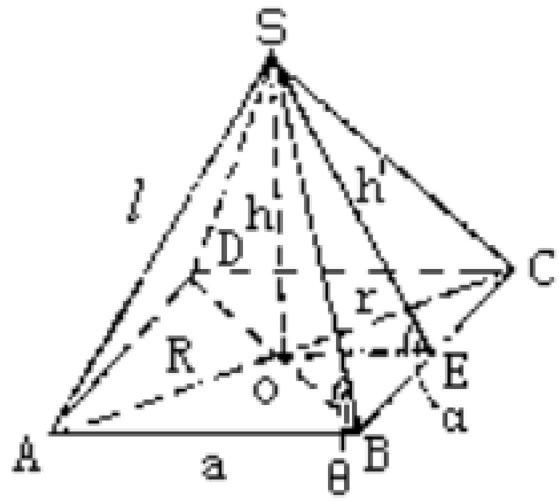
（5）点 B 到直线 A_1C_1 的距离为 ____________。



62. 你是否准确理解正棱柱、正棱锥的定义并掌握它们的性质？

正棱柱——底面为正多边形的直棱柱

正棱锥——底面是正多边形，顶点在底面的射影是底面的中心。



正棱锥的计算集中在四个直角三角形中：

$Rt\Delta SOB$, $Rt\Delta SOE$, $Rt\Delta BOE$和$Rt\Delta SBE$

它们各包含哪些元素？

$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}C\cdot h'$（C——底面周长，$h'$为斜高）

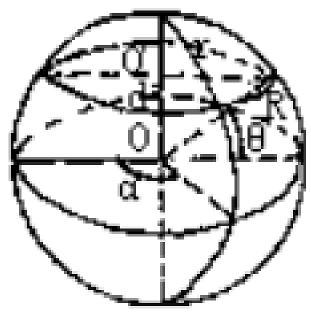
$V_{锥}=\frac{1}{3}$底面积×高

63. 球有哪些性质？

（1）球心和截面圆心的连线垂直于截面 $r=\sqrt{R^2-d^2}$

（2）球面上两点的距离是经过这两点的大圆的劣弧长。为此，要找球心角！

（3）如图，θ 为纬度角，它是线面成角；α 为经度角，它是面面成角。



（4）$S_{球}=4\pi R^2$，$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$

（5）球内接长方体的对角线是球的直径。正四面体的外接球半径 R 与内切球半径 r 之比为 R∶r＝3∶1。

如：一正四面体的棱长均为 $\sqrt{2}$，四个顶点都在同一球面上，则此球的表面积为（）

A. 3π　　B. 4π　　C. $3\sqrt{3}\pi$　　D. 6π

答案：A

64. 熟记下列公式了吗？

（1）l 直线的倾斜角 $\alpha\in[0,\ \pi)$，$k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2},\ x_1\neq x_2\right)$

$P_1(x_1,\ y_1)$、$P_2(x_2,\ y_2)$是l 上两点，直线 l 的方向向量 $\vec{a}=(1,\ k)$

（2）直线方程：

点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$（k存在）

斜截式：$y=kx+b$

截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

一般式：$Ax+By+C=0$（A、B不同时为零）

（3）点$P(x_0,\ y_0)$到直线l：$Ax+By+C=0$的距离 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

（4）l_1到l_2的到角公式：$\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1-k_1k_2}$

l_1与l_2的夹角公式：$\tan\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1-k_1k_2}\right|$

65. 如何判断两直线平行、垂直？

$$\left.\begin{array}{l}A_1B_2=A_2B_1\\A_1C_2\neq A_2C_1\end{array}\right\}\Leftrightarrow l_1\parallel l_2$$

$k_1=k_2\Rightarrow l_1\parallel l_2$（反之不一定成立）

$A_1A_2+B_1B_2=0\Leftrightarrow l_1\perp l_2$

$k_1\cdot k_2=-1\Rightarrow l_1\perp l_2$

66. 怎样判断直线 l 与圆 C 的位置关系？

圆心到直线的距离与圆的半径比较。

直线与圆相交时，注意利用圆的“垂径定理”。

67. 怎样判断直线与圆锥曲线的位置？

联立方程组 $\Rightarrow$ 关于 x（或 y）的一元二次方程 $\Rightarrow$ “Δ”

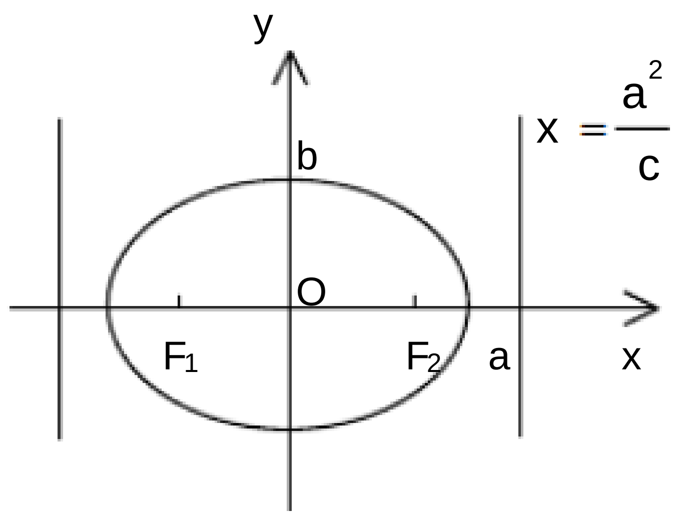
$\Delta>0\Leftrightarrow$ 相交；$\Delta=0\Leftrightarrow$ 相切；$\Delta<0\Leftrightarrow$ 相离

68. 分清圆锥曲线的定义

第一定义 $\begin{cases} 椭圆 \Leftrightarrow |PF_1| + |PF_2| = 2a,\ \ 2a > 2c = |F_1F_2| \\ 双曲线 \Leftrightarrow \big||PF_1| - |PF_2|\big| = 2a,\ \ 2a < 2c = |F_1F_2| \\ 抛物线 \Leftrightarrow |PF| = |PK| \end{cases}$

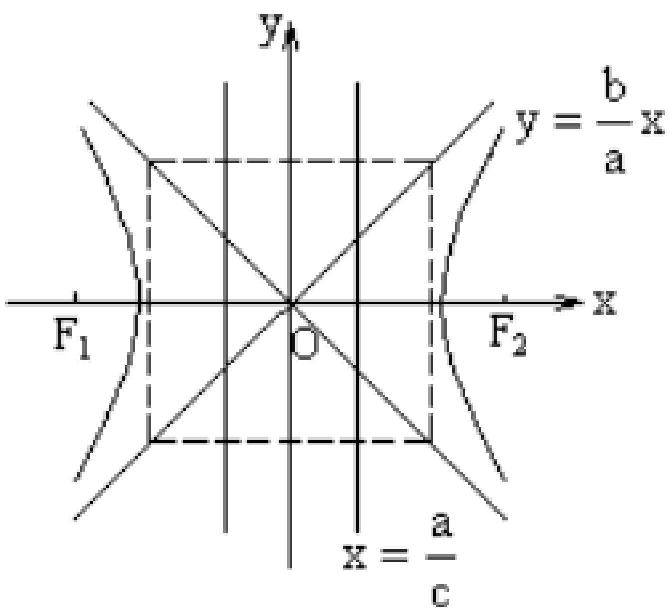
第二定义： $e = \dfrac{|PF|}{|PK|} = \dfrac{c}{a}$

$0 < e < 1 \Leftrightarrow$ 椭圆； $e > 1 \Leftrightarrow$ 双曲线； $e = 1 \Leftrightarrow$ 抛物线



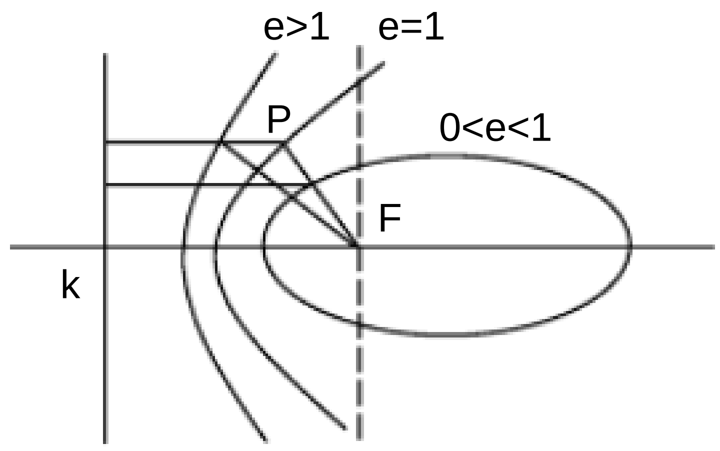
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$

$(a^2 = b^2 + c^2)$



$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > 0,\ \ b > 0)$

$(c^2 = a^2 + b^2)$



69. 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有相同焦点的双曲线系为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda\ (\lambda\neq 0)$

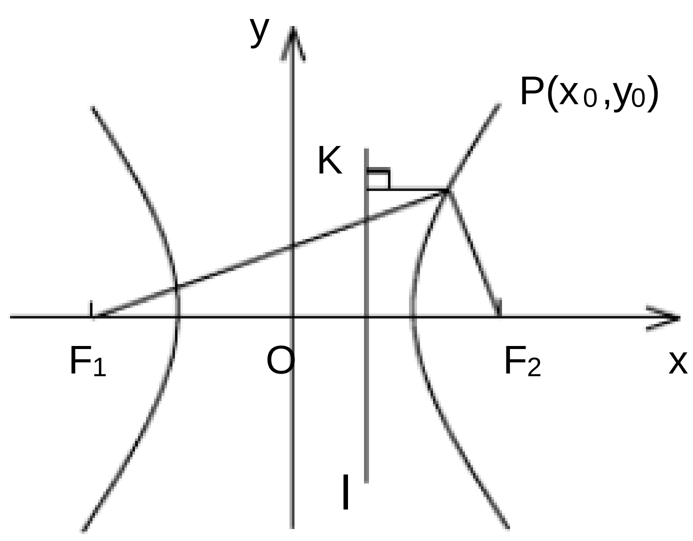
70. 在圆锥曲线与直线联立求解时，消元后得到的方程，要注意其二次项系数是否为零？△≥0的限制。（求交点，弦长，中点，斜率，对称存在性问题都在△≥0下进行。）

弦长公式 $|P_1P_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$

71. 会用定义求圆锥曲线的焦半径吗？

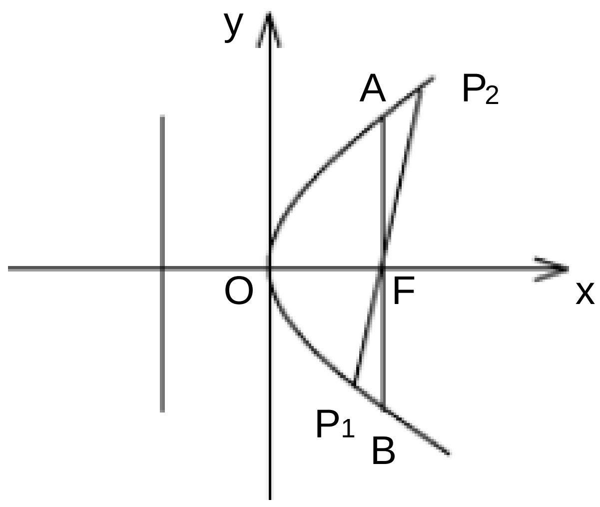
如：



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{|PF_2|}{|PK|}=e,\ |PF_2|=e\left(x_0-\frac{a^2}{c}\right)=ex_0-a$

$|PF_1|=ex_0+a$



$y^2=2px(p>0)$

通径是抛物线的所有焦点弦中最短者；以焦点弦为直径的圆与准线相切。

72. 有关中点弦问题可考虑用“代点法”。

如：椭圆 $mx^2+ny^2=1$ 与直线 $y=1-x$ 交于M、N两点，原点与 MN 中点连

线的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\frac{m}{n}$ 的值为 ________

答案：$\frac{m}{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

73. 如何求解“对称”问题？

（1）证明曲线 C：F（x，y）＝0 关于点 M（a，b）成中心对称，设 A（x，y）为曲线 C 上任意一点，设 A'（x'，y'）为 A 关于点 M 的对称点。

（由 $a=\frac{x+x'}{2}$，$b=\frac{y+y'}{2}\Rightarrow x'=2a-x$，$y'=2b-y$）

只要证明 $A'(2a-x,\ 2b-y)$ 也在曲线 C 上，即 $f(x')=y'$

（2）点 A、A' 关于直线 l 对称 $\Leftrightarrow\begin{cases}AA'\perp l\\ AA'\text{中点在 } l\text{ 上}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}k_{AA'}\cdot k_l=-1\\ AA'\text{中点坐标满足 } l\text{ 方程}\end{cases}$

74. 圆 $x^2+y^2=r^2$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）

75. 求轨迹方程的常用方法有哪些？注意讨论范围。

（直接法、定义法、转移法、参数法）

76. 对线性规划问题：作出可行域，作出以目标函数为截距的直线，在可行域内平移直线，求出目标函数的最值。 Dove