自由边界问题的最优控制

于静（计算数学）
指导教师：王子亭（教授）

摘要

自由边界问题是非常常见的问题，它存在于伴随着相的变化的能量流动问题和某些扩散问题中。经济学领域中的美式期权定价问题也属于自由边界问题的范畴。它主要是指控制方程的求解区域不是完全已知的，其中未知的部分有时甚至是随时间变化的，它需要随着方程的解一同求出来。在研究自由边界问题时，大家首先会很自然的想到，要改写模型，使自由边界在模型里消失。本文通过引进变分不等式达到了这一目的，从而可以从弱解的意义下来研究自由边界问题的解的性质。对于与自由边界问题等价的抛物型变分不等式的障碍问题，本文对障碍的最优控制做了一定的研究。障碍是原自由边界问题中的解需要满足的某个条件。由于只有很少的一部分自由边界问题能够求出它的解析解，因此，如何用一种高精度的数值方法求解就显的尤为重要。通过对自由边界问题的改写我们很自然想到用变分不等式法求解，即求解它的等价的变分不等式问题。本文采用了有限元法求解变分不等式，并对氧气扩散问题作了数值实验得出结论：变分不等式法在求解自由边界时，存在着较大的误差，所以对于以求自由边界为目的的问题，这一方法不应该是求解时的首选。因此，本文引进了谱方法，同时也对氧气扩散问题作了数值实验，知道了谱方法求解自由边界是非常精确的。另外，本文针对前面的理论，研究了一个比较实际的问题一美式期权定价问题。首先改写此问题为与其等价的抛物型变分不等式模型，利用抛物型变分不等式的极值原理研究了期权价格的性质。然后利用谱方法求它的数值解得到了最佳实施边界一自由边界关于时间的函数图象。由

于美式期权定价问题中的初始条件带有弱奇性，不能直接利用谱方法求解，因此本文提出了用磨光函数近似带有弱奇性的初始条件，并证明了近似后的模型的解能够很好的收敛到原问题的解。

关键词： 自由边界，最优控制，Chebyshev 谱方法，美式期权，最佳实施边界

Optimal Control of the Free Boundary Problems

YU Jing(Computational Mathematics)

Directed by Professor WANG Zi-ting

Abstract

Free boundary problems are very popular. They occur mostly in heat-flow problems with phase changes and in certain diffusion processes. In mathematics finance problems, there is an important problem, called pricing American options, which is also a free boundary problem. Some of the boundary of the free boundary problems is often unknown, and sometimes is moving. It needs to be solved with the solution of the equation. When we study a free boundary problem, we always think to rewrite the problem in order to make the free boundary disappear. The thesis introduced the variational inequality, so we can study the problem in some "weak" sense. For the parabolic obstacle problems, the thesis studied the optimal control of the obstacle. And the obstacle is a condition which the original problem should be satisfied with. Because only a little of free boundary problems can be given their analytical solutions, how to get accurate solutions with a sophisticated high-quality numerical algorithm becomes very important. From rewriting the free boundary problem, we naturally consider to solve the problem with variational inequality method. In other words, the problem becomes how to solve the variational inequality. Today there are many methods to solve it. The most popular one is Finite Element method. The thesis solved the oxygen diffusion problem by the method, and got a conclusion that there is a great error in the solution of the free boundary. So for a problem whose purpose is to get the free boundary, the method must not be the first choice. For the above reasons the thesis introduced Chebyshev spectral method, which is tested by the oxygen problem. And we know spectral method is an accurate method for the free boundary. In addition, we studied a useful problem called pricing American options. First of all, we rewrite the problem into a parabolic variational inequality, then studied the price of the option by maximum principle, finally got the numerical solutions and drew the picture of the optimal exercise boundary. Because the initial data of the pricing American options is weak singular, the thesis use smoothed function to approach the initial data, and proved that the solution of the approximative problem is convergent to the solution of the original problem.

Key words: free boundary, optimal control, Chebyshev spectral method, the pricing American options, the optimal exercise boundary

独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中国石油大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签　名：于静　　2007 年 5 月 16 日

关于论文使用授权的说明

本人完全了解中国石油大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件及电子版，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

(保密论文在解密后应遵守此规定)

学生签名：于静　　2007 年 5 月 16 日

导师签名：　　2007 年 5 月 16 日

第1章 引言

自由边界问题是指微分方程求解区域的某些边界不是给定的，是未知的(甚至是随时间变化的)，这部分边界就叫自由边界，它需要和定解问题的解一起确定。因此相应地，在自由边界上需要补充一个边界条件，通常叫做自由边界条件。例如，方程$\Delta u=f$,求解区域为Ω。假定$\partial\Omega$只有部分为已知的，记为S，未知的部分为Γ，在S上满足$u=\phi$。且在Γ上有$\nabla(u-\phi)=0$。所以我们就要寻求u和Γ满足

$$\begin{cases}\Delta u=f, & 在\Omega中\\ u=\phi, & 在S上\\ \nabla(u-\phi)=0, & 在\Gamma上\end{cases} \tag{1.1}$$

这个模型就是一个自由边界问题的模型。

1.1 发展概况

自由边界问题广泛存在于诸多工程领域，例如，冶金业中金属的融化凝固、气体在多孔介质中的扩散（例如，氧气通过生物组织的吸收问题）、地下渗流、电化加工、水晶生长以及金融 （美式的期权定价问题）等许多领域均属于自由边界问题的范畴。

自由边界问题大致可以分为两类：一类是自由边界依赖于时间变化，即不稳定的自由边界问题，又叫抛物型自由边界问题。比较典型的就是Stefan问题(性质均一的介质的融化或凝固问题)。介质中的温度的变化遵循能量方程，相的变化的分界面就是自由边界。这个领域的最早的研究是由Gabriel Lame和Emile Clapeyron在1831年开创的[1]。19世纪80年代，Franz Neumann在Konigsberg论坛中最早提出了简单的冰的融化问题的近似解问

题。关于凝固的问题和冰的融化的问题的著作在1889年出版，Jozef Stefan对于一般的有相变化的问题给出了数学模型。相应的自由边界问题就以他的名字传了下来，就是我们所熟悉的一相和两相的 Stefan 问题。另一类是自由边界不随时间变化，即是稳定的自由边界问题，又叫椭圆型自由边界问题，这类问题的自由边界是固定的，但是却是未知的，它广泛存在于地下液体的渗流问题中。

1.1.1 抛物型自由边界问题

冰融化、合金冶炼、氧气扩散以及美式期权定价（详见第五章）等都属于这个问题的范畴。

一块半无限大的冰，初始温度达到融化温度（即0摄氏度），在时间$t=0$时冰的表面温度升高到0摄氏度以上的某个温度，随后一直保持着这个温度。融化发生在边界或冰水交界处，并移动到冰层内部，在温度为0摄氏度处分离出一个区域，隔开水和冰。由于热交换只发生在水中，称为单相问题。

假如用$u(x,t)$表示在时间t时刻水的温度分布，可以通过解如下的热传导方程来得到未知的$u(x,t)$和$s(t)$：

$$
\begin{aligned}
&u_t = ku_{xx}, \quad 0<x<s(t), t>0 \\
&u(0,x)=0, \quad s(0)=0 \\
&u(t,0)=u_{0,} \quad u(t,s(t))=0 \\
&-ku_x(t,s(t))=\lambda \dot{s}(t)
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

其中$k=\dfrac{K}{c\rho}$（c、ρ、K分别是比热、密度和热传导系数）。

单相问题中若冰$(0<x<l)$的初始温度在融点以下，那么热传导同时发生在冰和水中，称为两相的自由边界问题。描述如下：

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=k_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},0<x<s(t)\text{（水中）}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=k_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2},s(t)<x<l\text{（冰中）}$$

$$u_1(s(t),t)=u_2(s(t),t)=0$$

$$k_2\frac{\partial u_2}{\partial x}-k_1\frac{\partial u_1}{\partial x}=\lambda\frac{ds}{dt},x=s(t),t>0$$

合金的凝固不同于古典的 Stefan 问题，预先并不知道融化的温度，它依赖于合金的组成。合金的凝固需要同时研究热流过程和不纯物的扩散。一个简单的两相合金凝固过程可以如下表示,其中 u_i,c_i,k_i 分别是温度、浓度和导热系数（$i=1$ 是固相，$i=2$ 是液相），

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=k_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},\frac{\partial c_1}{\partial t}=D_1\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}\qquad 0<x<s(t)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=k_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2},\frac{\partial c_2}{\partial t}=D_2\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}\qquad s(t)<x<l$$

$$r_2\frac{\partial u_2}{\partial x}-r_1\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{ds}{dt},x=s(t)$$

$$\beta_2\frac{\partial u_2}{\partial x}-\beta_1\frac{\partial u_1}{\partial x}=(c_1-c_2)\frac{ds}{dt},x=s(t)$$

$$u_1=u_2=g,c_1=c_0(g),c_2=c_l(g),x=s(t)$$

氧气的扩散是带有隐式自由边界条件的典型例子，所谓隐式自由边界条件是指在自由边界条件中缺少关于自由边界 $s(t)$ 的导数项。首先，氧气以常速度扩散到一种即能吸收氧气又不与氧气反应的介质中。在介质表面的氧气浓度保持常数，氧气扩散的最内部边界构成了自由边界。问题的第一个阶段是连续的直到达到一个稳态，氧气不再扩散到介质中，介质表面不再

有氧气进入或出来。介质继续吸收已经扩散到其中的氧气，相应的标志渗透深度的边界将退到表面。解决此类问题的主要目的是取得边界轨迹及决定氧气的分布的函数，氧气扩散方程为：

$$\begin{aligned} & c_t = c_{xx} - 1, \qquad 0 < x < s(t), t > 0 \\ & c(0,x) = \frac{1}{2}(1-x)^2, \quad s(0) = 1 \\ & c_x(t,0) = 0, \qquad c(t,s(t)) = 0 \\ & c_x(t,s(t)) = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中 c 为氧气自由扩散的浓度。

1.1.2 椭圆型自由边界问题

椭圆型自由边界问题起源于液体在多孔介质中的渗流，比较典型是水坝中水的渗流；开阔的水渠中水的渗流；或者是井中液体的渗流。这类问题中多孔介质被以一个明显的分界面分开的两种液体占据，这个分界面就称为自由边界。水气，油水，油气以及咸水淡水分界面都是比较常见的。以简单的矩形坝为例：

一个矩形坝将位于两个不同水位的水库分开，假定水是不可压缩的，水坝的渗透率是均一的，且底部是水平的不渗透的，那么水会在水坝中渗流。水坝可以被认为是二维的即在（x，y）平面内（如图所示）。渗流区域是有界的,边界为 AF、BD、AB 以及自由边界 FD。那么这个问题的模型为：

$$\begin{aligned} & \nabla^2\phi = 0, \qquad \text{在}\Omega\text{，} 0 < x < x_1, 0 < y < f(x), \\ & \phi = y_1 \qquad \text{在 AF 上，} \phi = y_2 \quad \text{在 BC 上} \\ & \phi = y, \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{在 FD 上，} \phi = y \quad \text{在 CD 上} \\ & \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad \text{在 AB 上，} \frac{\partial\phi}{\partial x} \le 0 \text{在 CD 上} \end{aligned}$$

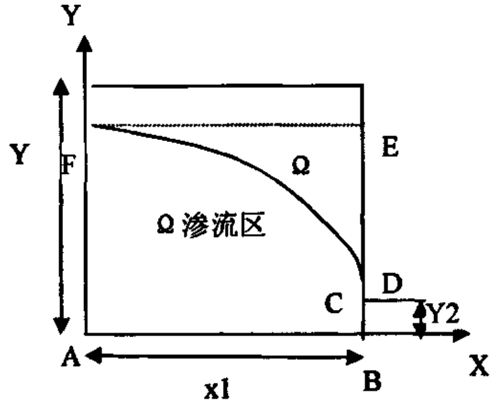

图 1.1 矩形坝中水的渗流的示意图

上述问题均是常见的自由边界问题。从 1950 年开始，随着许多各种各样的复杂的物理现象的数学模型被建立，自由边界问题的各种不同的解法也随之而来。由于自由边界问题本身的复杂性，很少一部分的自由边界问题能够求出解析解。随着计算机技术的不断发展，人们的焦点逐渐转移到求自由边界问题的数值解上来。

1.2 自由边界问题数值解法概况

在 20 世纪 50 年代末，产生了许多数值方法，包括焓方法（E.L.Albasiny, 1956）,前沿固定法，有限差分法（J.Crank，1957）和变网格法（J.Douglas 和 T.M..Gallie，1955）。从那时开始，各种各样的数值方法就如雨后春笋般发展起来了。但是，一般来讲，现今存在的每一种数值方法都能归结到下面几种类型中：

固定区域方法：这一类方法的主要思想就是用自由边界附近满足的微分方程和边界条件，改写原问题，使原来在某个变化区域成立的问题转化成在整个区域都成立的新问题。根据改写问题的方式不同又可分为，焓方法[2]、变分不等式方法[3]、截断方法[4]。

前沿追踪法： 这一类方法的特点是在每一步都显式地计算出自由边界

的位置。具体分为前沿捕获法[5]，前沿追踪变网格法[6]，水平集法[7]等。前沿捕获方法是在固定网格上应用这一技巧的，每一步分界面的位置都不在网格结点上，所以，离边界远处用正则的有限差分，在自由边界附近就将差分公式进行修正，以适应不均匀的空间。前沿追踪变网格法是建立了变网格，在每一个时间步长，自由边界都与某个结点一致，可以通过修正部分或着整个时间或空间网格，再应用适应的空间时间有限元方法。线方法是建立在仅仅对时间进行离散的的基础上，在每一个时间步长上求解出普通的偏微分方程的一系列边界值。

前沿固定方法：这种方法的主要思想就是通过固定自由边界将自由边界的非线性转移到偏微分方程中去。因为计算区域变成了矩形，在自由边界附近就不需要再做调整了。这样做就是在微分算子中引进了一个附加的项，这个附加项有非常明显的非线性并且是与自由边界的条件是一致的。固定变量具体方法有变量变换[8]、等温线方法等。

积分方法：这种方法是建立在抛物型算子的基本解的理论基础上的，将微分算子转换成积分算子[9]。自由边界问题的积分方法首先要求出满足初始条件和边界条件的 Green 函数，通过积分 Green 函数或者其导数，问题的解就可以写出来了。

1.3 本文主要工作

本文主要研究如下的变系数抛物型自由边界问题（1.4），

$$
\begin{aligned}
&u_t = L_x[u] + f(t,x) \qquad (t,x)\in Q_T \\
&u(x,0)=\varphi(x),\ s(0)=s_0 \\
&B[u]=\psi(t), \quad u(t,s(t))=\theta(t) \\
&u_x(t,s(t))=\eta(t)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

$$u \geq \phi \qquad (t,x) \in Q_T$$

其中 $B[u]$ 是在 $x=0$ 点处的边界条件，Is 是 $[0,\ s(t)]$，$Q_T=(0,T)\times Is$

$$L_x=\alpha_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\alpha_1(t,x)\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_0(t,x),\text{其中}\alpha_2(t,x)\geq 0$$

本文首先要将（1.4）改写成等价的抛物型变分不等式的障碍问题模型，利用抛物型变分不等式的极值原理研究解的解析性质，以及研究变分不等式障碍问题的障碍的最优控制问题。在研究美式期权定价问题中，我们利用抛物型变分不等式的极值原理，研究美式期权价格的性质。

利用有限元法求解改写的变分不等式模型，从而得到原问题的解。

利用结合区域分解的谱方法求解自由边界问题，并对带有奇性的初始的条件提出了用磨光函数来近似，并且可以证明，近似后的模型的解收敛到原问题的解。初始条件带有奇性的比较典型的例子就是美式期权定价问题，我们利用谱方法求解了这一问题，给出了美式期权的最佳实施边界的函数图象，并且得出结论：美式期权是时间的递减函数。

对于两种方法，我们均以氧气扩散这一实际问题，作了数值实验。进一步验证了谱方法对于自由边界的求解的精确性。

第 2 章 自由边界问题的变分原理

用变分原理研究自由边界问题，就是指根据自由边界问题的解满足的控制方程与边界条件，改写原问题成为变分不等式（或微分不等式）问题，使原来在变化区域成立的问题转化成在整个区域都成立的新问题，通过解这个新问题，来得到自由边界问题的解[10]。

例如，考虑如下自由边界问题，

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = f && \text{在}\,\Omega_1\,\text{上} \\
&u = u_n = 0 && \text{在}\,S(t)\,\text{上} \\
&u = g \ge 0\,, && \text{在}\,\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus S(t) \\
&u\big|_{t=0} = u_0 \ge 0 &&
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Ω_1 是使偏微分方程成立的整个区域；Γ_1 是这个区域的边界的固定部分，$S(t)$ 是其移动部分；并且所求函数和流量（u_n，即 u 的法向导数）在 $S(t)$ 上消失，见图 2.1。

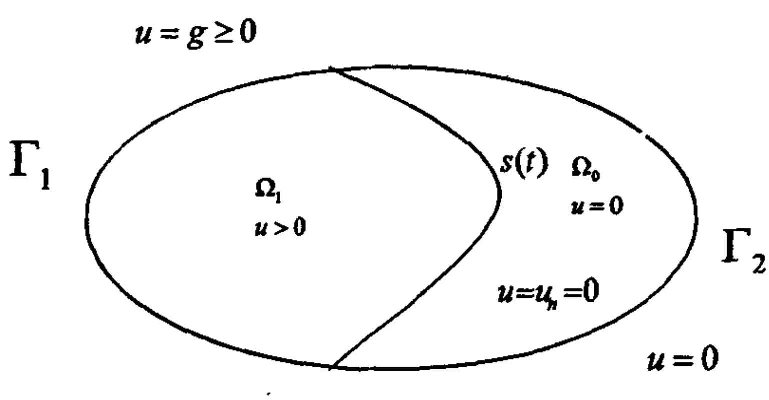

图 2.1 自由边界问题的区域示意图

我们引进区域$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_0$，满足$\Omega_0$与$\Omega_1$有共同的自由边界$S(t)$，且定义在$\overline{\Omega}_0$的闭包上$u\equiv 0$（也就是，$u=0$在$\Omega_0$上，且$u=0$在$\Gamma_0=\partial\Omega_0\setminus S(t)$上）。那么，利用$S(t)$处的条件，$u$在整个区域$\Omega$上是连续定义的，且$\Omega$含有固定的边界。如果对于边界值g的相容性条件成立（即，当$x\to S(t)$时，$g,\nabla g\to 0$），那么$u\in C^1(\overline{\Omega})$。

定义正定的双线性算子

$$a(v,w)=\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w dx$$

一般的内积为

$$\langle v,w\rangle=\int_\Omega vwdx$$

对于任意的检验函数$v\in H^1(\Omega)$且$v\ge 0, v=g$在Γ_1上，$v=0$在Γ_0上，有

$$\begin{aligned}\langle u_t,v-u\rangle+a(u,v-u)&=\int_{\Omega_1}u_t(v-u)dx+\int_{\Omega_1}\nabla u\cdot\nabla(v-u)dx\\&=\int_{\Omega_1}(u_t-\Delta u)(v-u)dx=\int_{\Omega_1}f(v-u)dx\ge\int_\Omega f(v-u)dx\end{aligned}\tag{2.2}$$

由于在$\Omega\setminus\Omega_1$上$u=0$，在$\partial\Omega_1$上$v-u=0$，并且利用Green公式和分部积分，得到初始的自由边界问题的在固定区域Ω上，上述模型等价于变分不等式，

$$(u_t,v-u)+a(u,v-u)\ge(f,v-u)\tag{2.3}$$

其中v满足在Γ_1上$v=g$，在Γ_2上$v=0$，且$v\ge 0$，

$$a(u,v-u)=\iint_\Omega \nabla u\nabla(v-u)dxdy$$

由于，

$$(u_t,v-u)+a(u,v-u)=\iint_{\Omega_1}u_t(v-u)dxdy+\iint_{\Omega_1}\nabla u\nabla(v-u)dxdy$$

$$= \iint_{\Omega_1} (u_t - \nabla^2 u)(v-u)dxdy$$

所以，

$$(u_t, v-u) + a(u, v-u) = \iint_{\Omega_1} f(v-u)dxdy \geq \iint_{\Omega} f(v-u)dxdy \qquad (2.4)$$

所以在整个区域中有 $u_t - \nabla^2 u - f \geq 0$。

2.1 抛物型变分不等式

若

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t,x)u$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \forall (t,x) \in Q_T, \xi \in R^n \ (\lambda > 0) \qquad (2.5)$$

那么称算子 $\frac{\partial}{\partial t} + A$ 为抛物型算子，显然 $\frac{\partial}{\partial t} - L_x$ 也是抛物型算子。

若 $\nabla_x a_{ij}$ 存在且有界，那么我们引入 A 的一个双线性形式，

$$a(t;u,v) = \int_{\Omega} (\sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum \tilde{b}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv)dx \qquad (2.6)$$

其中，

$$\tilde{b}_i = b_i + \sum \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$$

令

$$(v,w) = \int_{\Omega} vwdx$$

$K(\phi)$ 是 $H^1(Q_T)$ 的一个闭凸子集，考虑如下问题：对于所有的 $v \in K(\phi)$，寻找 u，使 u 满足

$$u \in K(\phi)$$

$$(u_t, v-u) + a(t; v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K \tag{2.7}$$

这个问题被称为抛物型变分不等式[10]。

令定义在 $\bar{Q}_T$ 上的函数 $\phi(x,t)$ 有连续的导数 $D_x\phi, D_t\phi, D_x^2\phi$，在 $\partial_p Q_T$ 上 $\phi \leq g$，考虑凸集，

$$K(\phi) = \{v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), 在边界\partial_p Q_T上 v = g, v \geq \phi \; a.e.\} \tag{2.8}$$

由（2.7）和（2.8）构成的问题称为抛物型障碍问题，ϕ 被称为障碍。

抛物型自由边界问题（1.4）中 $\theta(t) = 0, \eta(t) = 0$，则（1.4）可以改写成如下变分不等式模型，$\forall v \in K(\phi)$，寻找 $u \in K(\phi)$ 且满足，

$$(u_t, v-u) + (-L_x[u], v-u) \geq (f, v-u) \tag{2.9}$$

$$K(\phi) = \{v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), 在边界\partial_p Q_T上 \mathrm{B}_1[v] = g, v \geq \phi \; a.e.\}$$

其中，$\partial_p Q_T$ 是 Q_T 的抛物型自由边界，$\partial_p Q_T = \partial\Omega \times (0,T) \cup \bar{\Omega} \times \{0\}$，$B_1[v]$ 是边界条件，g 被定义为 $\begin{cases} v(0,x) = \varphi(x) \\ B[v] = \psi(x) \end{cases}$。

假设(2.5)(2.7)成立，$\mathrm{c} \geq 0$, $\partial\Omega \in \mathrm{C}^{2+\alpha}$, 且 $f, g, D_x g, D_x^2 g \in \mathrm{C}^{\alpha}(\bar{Q}_T)$　　(2.10)

根据文[10]的结论，我们可以直接得到如下结论，若 u 是（2.9）的解，则 u 满足，

$$\left.\begin{array}{l} u_t - L_x u \geq f \\ u \geq \phi \\ (u_t - L_x u - f)(u-\phi) = 0 \end{array}\right\} a.e.在\overline{Q_T}中 \tag{2.11}$$

$$u = g 在\partial_p Q_T 上$$

文[10]还给出如下定理：

定理 2.1：若（2.5）（2.7）（2.10）成立，且$\left|D_x a_{ij}\right| \le C$则由（2.7）（2.8）构成的抛物型障碍问题存在唯一的解u，并且满足$D_x u, D_x^2 u, D_t u \in L^p(Q_T)$，$\forall 1 < p < \infty$。

强最大值原理[10]：假定$\frac{\partial}{\partial t} - L_x$是$Q_T$中的抛物型算子，令$u$是$Q_T$中的函数，$D_x u, D_t u, D_x^2 u$在$Q_T$中是连续的，且在$Q_T$中$\frac{\partial u}{\partial t} - L_x u \le 0$。那么，

对于$p^0 \in Q_T$，若$u(p^0) = \sup\limits_{C(p^0)} u \ge 0$，则在$C(p^0)$中，$u \equiv const$；

对于$p^0 \in \Omega \times \{T\}$，若$u$在$Q_T \bigcup \Omega \times \{T\}$连续，那么$u \equiv const$。

2.2 障碍的最优控制

最优控制问题是人们日常生活及日常工作中都会经常遇到的普遍性问题。比如我们从事某项工作时，需要我们在已有的条件下，以最小的代价换取最大的收益。变分不等式的最优控制问题实际上是用变分不等式方法来研究参数系统的控制问题。本文中主要研究抛物型变分不等式障碍的最优控制。

抛物型变分不等式的障碍问题的最优控制的数学语言描述如下[11][12]：给定$\phi \in U$，$f \in L^2(Q_T)$，$U = \{\phi \in L^2(Q_T) \mid \phi_t \in L^2(Q_T)\}$为控制集。对应有$u = T(\phi)$，满足障碍问题（2.7）—（2.8）。我们要寻找一个障碍ϕ^*使得$u^* = T(\phi^*)$满足（2.8）且最接近目标效益z，考虑如下目标泛函：

$$J(\phi) = \int_{Q_T} [(T(\phi) - z)^2 + |\Delta\phi|^2 + |\phi_t|^2] dxdt$$

即，我们寻找合适的$\phi^* \in U$，使得

$$J(\phi^*) = \inf_{\phi \in U} J(\phi) \tag{2.12}$$

满足（2.12）的ϕ^*及其对应的$u^*=T(\phi^*)$称为最优对（ϕ^*，$T(\phi^*)$）。

变分不等式的障碍的最优控制的应用很多，可以参看参考文献[13][14][15]。

考虑惩罚问题（2.13），

$$
\begin{aligned}
&u_t - L_x[u] + \beta_\varepsilon(u-\phi) = f && \text{在}Q_T\text{中} \\
&u = g && \text{在}\partial_p Q_T\text{上}
\end{aligned}
\qquad (2.13)
$$

其中$\beta_\varepsilon(t)\in C^\infty,(0<\varepsilon<1)$，满足，

$$\beta_\varepsilon(t)\to-\infty \quad \text{若}t<0,\varepsilon\to 0,$$

$$\beta_\varepsilon(t)\to 0 \quad \text{若}t>0,\varepsilon\to 0,$$

$$\beta_\varepsilon(t)\le C \qquad \beta_\varepsilon(0)\ge -C$$

$$1\ge\beta'_\varepsilon(t)\ge 0,$$

其中C是与ε无关的常数。

下面我们借助惩罚问题（2.13），利用 Schauder 不动点定理估计$|\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\phi)|$的范围。

Schauder 不动点定理：设 Y 是 Banach 空间闭凸子集，T 为 Y 上的连续算子，TY 为 Y 的紧子集，且 TY 是预紧的，则 T 有不动点，即存在一个点$y_0\in Y$，使得$Ty_0=y_0$。

引理 2.1：若（2.10）成立，那么存在（2.13）的解$u=u_\varepsilon$，且有

$$|\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-\phi)|\le C \qquad (2.14)$$

这里，C不依赖ε。

证明：对$\forall N>0$，令

$$\beta_{\varepsilon,N}(t)=\max\{\min\{\beta_\varepsilon(t),N\},-N\}$$

我们考虑如下问题

$$u_t-L_x u+\beta_{\varepsilon,N}(u-\phi)=f \qquad 在Q_T中 \tag{2.15}$$

$$u=g \qquad 在\partial_p Q_T上$$

对于任意$v\in L^p(Q_T)$ $(1<p<\infty)$，$\exists w\in W^{2,p}(Q_T)$，且

$$w_t-L_x w=f-\beta_{\varepsilon,N}(v-\phi) \qquad 在Q_T中 \tag{2.16}$$

$$w-g\in H_0^1(Q_T)且|w|_{2,p}\le R$$

其中R是一个与v无关的常量。

令$w=Tv$，T是将$L^p(Q_T)$空间中以0中心半径为R的球，并且T是紧的，有Shauder不动点定理知，存在$v=Tv$是（2.16）的解，即存在$u=u_{\varepsilon,N}$，$Tu=u$，u是（2.15）的解。

由于，$u=u_{\varepsilon,N}\in W^{2,p}(Q_T)$，对于$\forall p<\infty,\beta_{\varepsilon,N}(u-\phi)$是Holder连续，下面，我们估计$\beta_{\varepsilon,N}(u-\phi)$的范围。

令

$$\zeta(X)=\zeta(t,x)=\beta_{\varepsilon,N}(u-\phi)$$

由β_ε的定义知，$\zeta(X)\le C$（其中C不依赖于N，ε）。令$\mu=\min\zeta(X)$，不妨设$\mu=\zeta(X^0),\mu\le 0,\mu<\beta_\varepsilon(0)$（其中$X^0=(t^0,x^0)$）则$X^0\notin\partial_p Q_T$，否则，

$$\mu=\zeta(X^0)=\beta_{\varepsilon,N}(g-\phi)\ge\beta_{\varepsilon,N}(0)\ge\beta_\varepsilon(0)。$$

若$X^0\in Q_T$，则$\beta_{\varepsilon,N}(t)$关于t单调，且$u-\phi$在X^0取最小值且不大于0，则，

$$\zeta(X^0)\ge f(X^0)+L_x\phi(X^0)\ge -C$$

那么，$\left|\beta_{\varepsilon,N}(u_{\varepsilon,N}-\phi)\right|\le C$。若 N 足够大，则 $u_{\varepsilon,N}\to u_{\varepsilon}$，$\left|\beta_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}-\phi)\right|\le C$，且 $u_{\varepsilon,N}$ 是问题（2.16）的解。证毕。

我们定义一维的惩罚问题的解为 $u_{\varepsilon}=T_{\varepsilon}(\phi)$，我们知道[16][17]，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$u_{\varepsilon}\to T(\phi)$。

引理 2.2： 对于 $\phi\in U$，惩罚问题（2. 9）的解 $u_{\varepsilon}=T_{\varepsilon}(\phi)$，满足

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla u_{\varepsilon}(t)\|_{L^2(\Omega)}+\|(u_{\varepsilon})_t\|_{L^2(Q_T)}+\|\Delta u_{\varepsilon}\|_{L^2(Q_T)}\le C_1[C+\|f\|_{L^2(Q_T)}+\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}] \quad (2.17)$$

证明：首先，我们要考虑到在约束集 K 中，$u_{\varepsilon}\ge\phi$。由引理 2.1 的证明我们知道

$$\|\beta_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}-\phi)\|_{L^2(Q_T)}\le C \quad (2.18)$$

我们有[18]，

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla u_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}+\|u_{\varepsilon t}\|_{L^2(Q_T)}+\|\Delta u_{\varepsilon}\|_{L^2(Q_T)}+\|f\|_{L^2(Q_T)}$$
$$\le C_1(\|\beta_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}-\phi)\|_{L^2(Q_T)}+\|f\|_{L^2(Q_T)}+\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)})$$

再由（2.18）我们可以得到（2.17）。证毕。

引理 2.3： 对 $\phi\in U$，障碍问题（2. 7）（2. 8）存在唯一的解 $u=T(\phi)$。当 $\varepsilon\to 0$ 时，（2.13）的解 $u_{\varepsilon}=T_{\varepsilon}(\phi)$ 满足，在 $L^2(Q_T)$ 中，

$u_{\varepsilon}\to u$ 强收敛；$\nabla u_{\varepsilon}\to\nabla u$ 强收敛；

$u_{\varepsilon t}\to u_t$ 弱收敛；$\Delta u_{\varepsilon}\to\Delta u$ 弱收敛。

且 u 满足，

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}+\|u_t\|_{L^2(Q_T)}+\|\Delta u\|_{L^2(Q_T)}+\|f\|_{L^2(Q_T)}$$
$$\le C(\|\beta_{\varepsilon}(u-\phi)\|_{L^2(Q_T)}+\|f\|_{L^2(Q_T)}+\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}) \quad (2.19)$$

证明：首先，由2.3节的讨论我们知道，(2.7)(2.8)存在唯一解，且u_ε在$L^2(Q_T)$强收敛到u。对每一个t我们有

$$\|\nabla(u_\varepsilon-u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \|\Delta(u_\varepsilon-u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|u_\varepsilon-u\|_{L^2(\Omega)}$$

则∇u_ε在$L^2(Q_T)$中强收敛到∇u。

由引理2.1我们可得到$(u_\varepsilon)_t$在$L^2(Q_T)$中收敛到u_t，Δu_ε在$L^2(Q_T)$中弱收敛到Δu。由上述地收敛性我们可以知道，（2.19）成立。

解的存在唯一性由上述讨论或者由[18]可得。证毕。

根据引理2.2和引理2.3我们可以得到如下定理：

定理 2.2：障碍问题（2.7）（2.8）中存在一个最优控制ϕ，并且ϕ是最小化问题（2.12）的解。

证明：令$\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$满足，$\phi_k\in U$，

$$\inf_{\phi\in U} J(\phi)=\lim_{k\to\infty} J(\phi_k) \tag{2.20}$$

从目标泛函$\{J(\phi_k)\}_{k=1}^{\infty}$有界，我们可以知道，存在一个障碍$\phi^*\in U$，满足，$\phi_k\to\phi^*$且$(\phi_k)_t\to{\phi^*}_t$，由我们将$\phi_k$与$u=T(\phi_k)$应用到（2.19）中，可以得到，在$L^2(Q_T)$中，$u_k\to u$强收敛；$\nabla u_k\to\nabla u$强收敛；$(u_k)_t\to u_t$弱收敛；$\Delta u_k\to\Delta u$弱收敛。

所以，我们有

$$\lim_{k\to\infty} T(\phi_k)=T(\phi^*) \tag{2.21}$$

我们令$v\in K$，$v_k=\max(v,\phi_k)$，那么我们有$v_k\in K(\phi_k)$，在$L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$中v_k弱收敛于v，且有

$$\int_{Q_T}[(u_k)_t(v_k-u_k)+L_x[u_k](v_k-u_k)]dxdt \ge \int_{Q_T} f(v_k-u_k)dxdt$$

令$k\to\infty$，对任意$v\in K(\phi^*)$得到，

$$\int_{Q_T}[(u^*)_t(v-u^*)+L_x[u^*](v-u^*)dxdt \ge \int_{Q_T} f(v-u^*)dxdt$$

我们知道在$K(\phi_k)$中，$\phi_k\le u_k$，由上述的强收敛性，我们有$\phi^*\le u^*$。所以，

$$u^*\in K(\phi^*)\text{且}u^*=T(\phi^*) \tag{2.22}$$

由弱收敛性我们可以得到，

$$\lim_{k\to\infty}T(\phi_k)=T(\phi^*)$$

我们可以得到，

$$\lim_{k\to\infty}J(\phi_k)\ge J(\phi^*) \tag{2.23}$$

由（2.20）（2.21）（2.22）（2.23）我们可以知道，ϕ^*是一个最优控制，并且最小化泛函（2.12）。

2.3 抛物型变分不等式的数值解

当与自由边界问题等价的抛物型变分不等式建立后，剩下的问题就是解变分不等式。考虑如下变分不等式

$$(u_t,v-u)+a(u,v-u)\ge(f,v-u) \tag{2.24}$$

我们利用有限元法[21][22]来解变分不等式。

首先，对求解区域剖分，如果$0\le x\le 1$，选取点$x_0,x_1,\dots,x_{N-1}$，使得

$$0=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{N-1}=1$$

记$h=1/N$，我们定义基函数ϕ_i，令u，v展成如下格式，

$$u=\sum_{i=1}^{N}u_i\phi_i=u_i\phi_i,\quad v=\sum_{i=1}^{N}v_i\phi_i=v_i\phi_i \tag{2.25}$$

我们引进几个特殊的矩阵，$M_{ij}=(\phi_i,\phi_j)$，$K_{ij}=a(\phi_i,\phi_j)$，$f_j=(f,\phi_j)$。注意到M_{ij}，K_{ij}均是对称的，则我们可以得到，

$$M_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial t}(v_j-u_j)+K_{ij}u_i(v_j-u_j)-f_j(v_j-u_j)\geq 0$$

若u_i^n定义u_i在$n\delta t$时刻的值，

$$M_{ij}\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\delta t}(v_j-u_j^{n+1})+[\theta K_{ij}u_i^{n+1}+(1-\theta)K_{ij}u_i^n](v_j-u_j^{n+1})-f_j(v_j-u_j^{n+1})\geq 0$$

整理得，

$$[\frac{M_{ij}}{\delta t}+\theta K_{ij}]u_i^{n+1}(v_j-u_j^{n+1})\geq\{f_j+[\frac{M_{ij}}{\delta t}-(1-\theta)K_{ij}]u_i^n\}(v_j-u_j^{n+1})\quad(2.26)$$

如果$a(u,v)=a(v,u)$，我们有如下定理：

定理2.3: 已知Ω是凸集，若$a(u,v)=a(v,u)$，则u是(2.27)的解$\Leftrightarrow$ u是(2.28)的解。其中，

$$(u,v-u)+a(u,v-u)\geq(f,v-u)\quad(2.27)$$

$$J(u)=\min_{v\in\Omega}J(v)=\min_{v\in\Omega}[(v,v)+a(v,v)-2(f,v)]\quad(2.28)$$

如果u_h^n表示在时间$n\delta t$时刻有限元网格结点上的值，那么将（2.24）离散得到，

$$(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\delta t},v_h-u_h^{n+1})_h+a(u_h^{n+1},v_h-u_h^{n+1})_h\geq(f_h^n,v_h-u_h^{n+1})_h$$

我们如果用θ－型离散得到，

$$(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\delta t},v_h-u_h^{n+1})_h+a(u_h^{n+\theta},v_h-u_h^{n+1})_h\geq(f_h^{n+\theta},v_h-u_h^{n+1})_h$$

其中$u_h^{n+\theta}=\theta u_h^{n+1}+(1-\theta)u_h^n$。整理得，

$$(u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1})_h + \delta t a(u_h^{n+\theta}, v_h - u_h^{n+1})_h \ge \delta t(f_h^{n+\theta} + \frac{u_h^n}{\delta t}, v_h - u_h^{n+1})_h$$

$$(u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1})_h + \delta t\theta a(u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1})_h \ge \delta t(f_h^{n+\theta} + \frac{u_h^n}{\delta t}, v_h - u_h^{n+1})_h$$

$$-\delta t(1-\theta)a(u_h^n, v_h - u_h^{n+1})_h \quad (2.29)$$

由定理 2.3 知（2.29）的解等价于最小值问题（2.30）的解，

$$\min\{(v_h, v_h)_h + \delta t\theta a(v_h, v_h)_h - 2\delta t[(f_h^{n+\theta} + \frac{u_h^n}{\delta t}, v_h)_h - \frac{(1-\theta)}{2} a(u_h^n, v_h)_h]\}$$

$$(2.30)$$

2.4 数值实验

对于氧气扩散问题（1.3），我们很容易得到如下变分不等式模型：

$$(c_t, v-c) + a(c, v-c) \ge (-1, v-c)$$

（2.26）中取 $\theta = 1, f = -1$，固定区域 Ω 为 $[0,1]$，基函数 ϕ_i [23]，

$$\phi_i = \begin{cases} [x-(i-1)h]/h & (i-1)h \le x \le ih \\ [(i+1)h - x]/h & ih \le x \le (i+1)h \end{cases}。$$

则 M_{ij} 是对角矩阵，对角线元素为 h，K_{ij} 是三对角矩阵，对角线元素是 $\frac{2}{h}$，次对角线元素是 $-\lambda$。

整理（2.26）可以得到，

$$Au_i^{n+1}(v_j - u_j^{n+1}) + b(v_j - u_j^{n+1}) \ge 0 \quad (2.31)$$

这里，A 是三对角矩阵，对角线元素是 $(1+2\frac{\delta t}{h^2})$，次对角线元素为 $-\frac{\delta t}{h^2}$，$b = \delta t - c_i^n$。令 $z = Ac + b$，有

$$z_i^{k+1}=b_i+\sum_{j=1}^{i-1}A_{ij}c_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{N}A_{ij}c_j^{k} \tag{2.32}$$

$$c_i^{(k+1)}=\max\{0,c_i^k+\omega z_i^{(k+1)}/A_{ii}\} \tag{2.33}$$

则我们可以得到如下数值解：

表 2.1 $\delta t=0.01$时，在$x=0$处，氧气浓度随时间的变化值

t	c(t,0)	t	c(t,0)
0.01	0.38894248	0.11	0.12572632
0.02	0.34040956	0.12	0.10910789
0.03	0.29899802	0.13	0.09316693
0.05	0.24616328	0.15	0.04876147
0.07	0.20102334	0.17	0.03493626
0.08	0.18061203	0.18	0.02153776
0.09	0.16136050	0.19	0.00893769

表 2.2 $\delta t=0.01$，$\delta x=0.01$时氧气浓度

$c(t,x)$	x				
t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.01	0.36501823	0.30994707	0.24327738	0.17913513	0.12419248
0.05	0.24019767	0.21964345	0.18693635	0.18495878	0.10961712
0.10	0.14019086	0.12803262	0.11081395	0.09008578	0.06574645
0.18	0.02017851	0.01609856	0.00993932	0.00349853	0
0.19	0.00780974	0.00457810	0.00080105	0	0

表 2.3 $\delta t=0.01$，$\delta x=0.0001$时，自由边界的值

t	s(t)	t	s(t)
0.01	1.0000	0.11	0.8301
0.02	0.9999	0.12	0.7896
0.04	0.9921	0.14	0.6925
0.05	0.9819	0.15	0.6339
0.06	0.9672	0.16	0.5663
0.08	0.9249	0.18	0.3859
0.09	0.8976	0.19	0.2423

2.5 本章小结

自由边界问题的变分不等式方法使自由边界从表达式上来看消失了，但是要通过其满足的相应的条件来确定。它将所求的自由边界问题转化成在固定区域成立的新问题，解决了由于自由边界的存在，给我们的求解带来的不便。在第四章中，我们将利用抛物型变分不等式的极值原理，研究美式期权定价问题中的期权价格的性质。

本章中我们主要针对障碍变分不等式问题中的障碍进行研究。我们的目的是找到一个最优的障碍，使其能够与某个目标效益最接近，并且使障碍的范数不是很大。我们通过对一维惩罚问题的研究，建立了满足上述目标的障碍的存在性理论。

从氧气扩散的数值实验中我们可以看出这种近似方法有两个明显的优点：一是它的计算过程与自由边界的实际的变化无关（不管自由边界是否光滑，是否有尖锐的谷或峰）；二是进行计算的区域在任何时候都保持固定，并且有非常稳定的格式。但是这种方法的主要缺点就是求解自由边界的困难，主要是因为这种方法是利用新问题的数值解来后验性地确定自由边界的。因此，如果我们研究的问题的主要目的是确定自由边界的位置，固定区域方法就不是我们的第一选择。

第3章 自由边界问题的谱方法

谱方法从产生至今已有多年历史，已经被广泛应用到了流体力学、气象、计算物理等领域。它和有限差分法、有限元方法一起被称为偏微分方程数值求解的三种基本方法。

谱方法不同于有限元法，在谱方法中试探函数被取为无穷可微的整体函数，它是以正交多项式作为基函数的Galerkin方法、Tau方法或配置方法，它们统称为谱方法。Galerkin方法中检验函数与试探函数属于同一个空间，并要求满足边界条件；Tau方法与Galerkin方法类似，但不要求检验函数满足边界条件，而是利用边界条件再补充些方程，最后得到一个封闭的方程组；配置方法则是取检验函数为以那些配置点为中心的Dirac－δ函数，使得微分方程在这些配置点上精确成立。

如果按照所讨论的问题是否周期，我们又可把谱方法分为Fourier谱方法（周期情形）和Chebyshev谱方法、Legendre谱方法和Hermite谱方法等，这些方法是分别以三角函数、Chebyshev多项式、Legendre多项式等作为基函数来讨论问题的。实际计算中有时根据计算的需要，可以将Chebyshev谱方法和Legendre谱方法相结合，充分发挥Legendre谱方法稳定性好，及Chebyshev谱方法计算量小的优点。

谱方法的最大优点在于它的所谓“无穷阶”收敛性，即如果原方程的解无穷光滑，那么谱方法的收敛阶将是无穷的。其次，快速算法的使用也可以大大减少计算量。但是，谱方法也有其不足，其一是要求原问题解的正则性较好；其二是要求求解区域比较规则，一般是乘积型区域；此外，Chebyshev谱方法权函数在边界处的奇性也会导致计算出现某些数值不稳定现象。

由于 Chebyshev 多项式与三角函数有非常密切的关系，因此它有许多比较好的性质，而本文研究的自由边界问题不是周期的，所以采用 Chebyshev 谱方法。

Chebyshev 谱方法实际上是一种前沿固定方法，主要思想就是通过固定自由边界的移动前沿，将自由边界的非线性转移到偏微分方程中去。因为计算区域变成了矩形，所以我们可以利用谱方法解变换后的模型。固定移动前沿的最简单的方法是作前沿变换。

3.1 算法描述

3.1.1 前沿变换

对于如下的一维一相自由边界问题，

$$u_t = L_x[u] + f(t,x) \quad t>0, x\in Is \tag{3.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ s(0)=s_0 \tag{3.2}$$

$$B[u]=\psi(t), \quad u(t,s(t))=\theta(t) \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} u_x(t,s(t)) = -\lambda\dfrac{ds}{dt} & (stefan\ \text{问题}) \\ u_x(t,s(t))=0 & (\text{隐式问题}) \end{cases} \tag{3.4}$$

若 Is 是 $[0,\ s(t)]$，我们令 $\xi=\dfrac{2x}{s(t)}-1$，可将 $x\in Is$ 映射到 $\xi\in[-1,1]$，则

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}=\frac{2}{s(t)}\frac{\partial\tilde{u}(t,\xi)}{\partial\xi},\quad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=\frac{4}{s^2(t)}\frac{\partial^2\tilde{u}(t,\xi)}{\partial\xi^2}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial\tilde{u}(t,\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{u}(t,\xi)}{\partial t}=\frac{\partial\tilde{u}(t,\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial s(t)}\frac{ds}{dt}+\frac{\partial\tilde{u}(t,\xi)}{\partial t}=-\frac{(\xi+1)}{s(t)}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{ds}{dt}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}$$

$$L_x[u]=\tilde{L}_\xi[\tilde{u}]=4\frac{\tilde{\alpha}_2(t,\xi)}{s^2(t)}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+\frac{2\tilde{\alpha}_1(t,\xi)}{s(t)}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\tilde{\alpha}_0(t,\xi)\tilde{u}$$

控制方程变为：

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=4\frac{\tilde{\alpha}_2(t,\xi)}{s^2(t)}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+(\frac{2\tilde{\alpha}_1(t,\xi)}{s(t)}+\frac{\xi+1}{s(t)}\frac{ds}{dt})\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\tilde{\alpha}_0(t,\xi)\tilde{u}+\tilde{f}(t,\xi) \quad (3.5)$$

记

$$\widetilde{L}_{t,\xi}=4\frac{\widetilde{\alpha}_2(t,\xi)}{s^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+(\frac{2\widetilde{\alpha}_1(t,\xi)}{s(t)}+\frac{\xi+1}{s(t)}\frac{ds}{dt})\frac{\partial}{\partial\xi}+\widetilde{\alpha}_0(t,\xi) \quad (3.6)$$

其中，$\tilde{\alpha}_i(t,\xi)=\alpha_i(t,x(\xi,s(t)))\ (i=0,1,2)$，$\tilde{f}(t,\xi)=f(t,x(\xi,s(t)))$，

$$\tilde{u}(t,\xi)=u(t,x(\xi,s(t)))$$

初始条件变为：$\tilde{u}(0,\xi)=\tilde{\varphi}(\frac{(\xi+1)s_0}{2})$

边界条件变为：$B[\tilde{u}](t,-1)=\psi(t),\ \tilde{u}(t,1)=\theta(t)$

3.1.2 自由边界的移动速率

由于前沿变换后的方程含有$\frac{ds}{dt}$，所以，我们需要它的显式表达式。对于 Stefan 问题中，$\frac{ds}{dt}$以自由边界条件的形式给出来了，对于隐式的自由边界问题，我们就需要推导出自由边界的移动速度[26]。

对方程$u(t,s(t))=\theta(t)$关于t求导，得到

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{dt}u(t,s(t))=u_t(t,s(t))+\frac{ds}{dt}u_x(t,s(t))$$

由于（3.3），我们有

$$u_t(t,s(t))=\dot{\theta}(t)$$

$$0=\frac{d}{dt}u_x(t,s(t))=u_{tx}(t,s(t))+\frac{ds}{dt}u_{xx}(t,s(t))=(L_x(u))_x+\frac{ds}{dt}u_{xx}(t,s(t))$$

因此，若$u_{xx}\neq 0$，

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{(L_x(u))_x}{u_{xx}}\bigg|_{(t,s(t))}=-\frac{s(t)(\tilde{L}_{t,\xi}(u))_\xi}{2u_{\xi\xi}}\bigg|_{(t,b)},b=-1或1$$

若 $L_x=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-1,\ \theta(t)\equiv 0$，由上式知，

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{(L_x(u))_x}{u_{xx}}=-\frac{u_{xxx}}{u_{xx}}\bigg|_{x=s(t)}=-\frac{u_{xxx}}{u_t+1}\bigg|_{x=s(t)}=-\frac{u_{xxx}}{\dot{\theta}(t)+1}\bigg|_{x=s(t)}$$

$$\frac{ds}{dt}=-u_{xxx}(t,s(t))$$

则

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{8}{s^3(t)}u_{\xi\xi\xi}(t,1) \tag{3.7}$$

3.1.3 Chebyshev 展开

经过前沿变换后的自由边界问题的求解区域从 Is 变换到了[-1,1]。我们可以对解进行 Chebyshev 多项式展开。

第一类 Chebyshev 多项式定义为 $\{T_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 定义为

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x),\ -1\le x\le 1,\ n=0,1,\ldots$$

显然 $T_0(x)=1,T_1(x)=x,T_2(x)=2x^2-1,\ldots.$，递推关系

$$T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x),\ k=1,2,\ldots$$

Chebyshev 多项式的主要性质[24]，

$$|T_k(x)|\le 1,-1\le x\le 1 \tag{3.8}$$

$$T_k(\pm 1)=(\pm 1)^k \tag{3.9}$$

$$|T_k'(x)|\le k^2,-1\le x\le 1,T_k'(\pm 1)=(\pm 1)^k k^2 \tag{3.10}$$

$$\tilde{u}_m^{(1)}=\frac{2}{c_m}\sum_{\substack{p=m+1\\p+m为奇}}^{\infty}p\tilde{u}_p,\ c_k=\begin{cases}2,k=0\\1,k\geq 1\end{cases} \tag{3.11}$$

$$\tilde{u}_m^{(2)}=\frac{2}{c_m}\sum_{\substack{p=m+1\\p+m为奇}}^{\infty}p\tilde{u}_p^{(1)}=\frac{2}{c_m}\sum_{\substack{p=m+1\\p+m为奇}}^{\infty}p(\frac{2}{c_p}\sum_{\substack{s=m+1\\s+m为奇}}^{\infty}s\tilde{u}_s)=\frac{1}{c_m}\sum_{\substack{p=m+2\\p+m为偶}}^{\infty}p(p^2-m^2)\tilde{u}_s \tag{3.12}$$

$$\tilde{u}_k^{(3)}=\frac{2}{c_k}\sum_{\substack{p=k+1\\p+k为奇}}^{\infty}p\tilde{u}_p^{(2)}=\frac{2}{c_k}\sum_{\substack{p=k+1\\p+k为奇}}^{\infty}p\frac{1}{c_p}\sum_{\substack{s=p+2\\p+s为偶}}^{\infty}s(s^2-p^2)\tilde{u}_s \tag{3.13}$$

Chebyshev 级数乘法法则[25]

$$(uv)_k=\frac{1}{2}\sum_{p+q=k}u_pv_q+\sum_{|p-q|=k}u_pv_q \tag{3.14}$$

如果令 $\tilde{u}(t,\xi)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n(t)T_n(\xi)$ 满足， $\xi=-1,\tilde{u}=0$； $\xi=1,\tilde{u}_\xi=0$。于是根据性质（3.9）（3.10）我们可以得到

$$\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n a_n=0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}n^2 a_n=0$$

根据（3.11）（3.12）（3.13）我们可以将（3.1）所有项都展成 Chebyshev 级数。

因此我们可以得到一个 $N+1$ 阶的常微分方程组（未知量为 a_n，及 $s(t)$）。

$$\frac{da_n}{dt}=\sum_{m=0}^{N-1}A_{nm}(s,\dot{s})a_m+f_n,\qquad 0\leq n\leq N-3$$

$$a_n(0)=\tilde{\varphi}_n,\ s(0)=s_0,$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} q_1(n) a_n = \sum_{n=0}^{N-1} q_2(n) a_n = 0$$

$$\frac{ds}{dt} = G(t, s, a_0, \ldots, a_{N-1})$$

其中 $a_n(t), f_n(t), \varphi_n$ 分别是解，源项及初始数据的 Chebyshev 系数。A_{nm}，$q_i(n)$，G 的具体形式依赖于具体的边界条件的形式。

3.1.4 非齐次边界条件的齐次化

如果边界条件不是齐次的，即 $\psi(t) \neq 0$ 或 $\theta(t) \neq 0$，必须按照下列原则将非齐次边界条件齐次化[27]：利用边界条件构造一个修正的函数，使它满足修正的有齐次边界条件的方程。若 $B[u] = u$，我们定义

$$w(t,\xi) = \tilde{u}(t,\xi) - \frac{\xi+1}{2}\theta(t) + \frac{\xi-1}{2}\psi(t)$$

显然 $w(t,\xi)$ 满足

$$w_t = \widetilde{L}_{t,\xi}[w] + \widetilde{F}(t,\xi)$$

$$\tilde{F}(t,\xi) = \tilde{f}(t,\xi) + \frac{\xi+1}{2}\dot{\theta}(t) - \frac{\xi-1}{2}\dot{\psi}(t) + \left(\frac{2\tilde{\alpha}_1}{s(t)} + \frac{\xi+1}{s(t)}\frac{ds}{dt}\right)\left(\frac{1}{2}\theta(t) - \frac{1}{2}\psi(t)\right)$$

$$+\tilde{\alpha}_0(t,\xi)\left(\frac{\xi+1}{2}\theta(t) - \frac{\xi-1}{2}\psi(t)\right)$$

通过此变换就有 $w(t,-1) = w(t,1) = 0$。所以，不失一般性下面讨论中所有条件都是齐次的。

3.1.5 算法的修正

为了提高计算精度，我们可以将计算区域[-1,1]，分解成几个小区间在这几个小区间上分别计算。我们令

$$-1 = l_0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_{N-1} < l_N = 1$$

为了在每个小区间$\Delta_j=[l_j,l_{j+1}], j=0,\dots N-1$上，还能够利用 Chebyshev 谱方法，我们需要进一步做变量变换，使新的方程的仍在[-1,1]上求解。

因此，我们做变换

$$z_j=\frac{2\xi-(l_j+l_{j+1})}{l_{j+1}-l_j}, \quad j=0,\dots N-1$$

原问题就化成了N个小问题。但是要注意的是，由于把求解区域分解了，可能会影响u在以及u_ξ在结点的连续性。所以，定解条件需要被修正。

$$B_1[u^{(0)}]=0$$

$$u^{(j)}(t,1)=u^{(j+1)}(t,-1)$$

$$\frac{2}{l_{j+1}-l_j}u_z^{(j)}(t,1)=\frac{2}{l_{j+2}-l_{j+1}}u_z^{(j+1)}(t,-1)$$

$$B_2[u^N]=0$$

其中，$B_1[u^{(0)}]$，$B_2[u^N]$是没有剖分前在±1处的边界条件，$u^{(j)}=u(t,\xi(z_j))$。

3.1.6 带有奇性的初值问题

如果$t=0,u(0,x)=\varphi(x)$足够光滑，则我们可以将它展成快速收敛的 Chebyshev 级数。如果$\varphi(x)$有尖点，Chebyshev 级数将收敛的很慢，甚至会产生数值不稳定现象。因此，对于分片光滑的初始值问题，我们无法直接用 Chebyshev 谱方法求解。

因此，我们需要另外的方法来处理初始值的弱奇性问题[27]。

假定，$\varphi(x)\in \mathrm{F}$，我们需要建立一个光滑函数序列$\{\varphi_\varepsilon\}\subset \mathrm{F}'$（$\mathrm{F}\subseteq \mathrm{F}'$）使其收敛到$\varphi(x)$,我们取$\varphi(x)$的磨光函数[28]。

我们可以定义一个函数，$\alpha(x)=\begin{cases} C\exp(x^2-1)^{-1} & |x|\le 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$，$C$ 是使 $\int_\Omega \alpha(x)dx=1$ 的常数（Ω 包含单位闭球 $\overline{B_1(o)}$）。

令 $\alpha_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}\alpha(\frac{x}{\varepsilon})$（磨光核），那么 $\varphi_\varepsilon(x)=\int_\Omega \alpha_\varepsilon(x-y)\varphi(y)dy$（磨光函数），可以证明，$\varepsilon\to 0$，$\varphi_\varepsilon(x)\to\varphi(x)$。

定理 3.1：假设 $\alpha(x)=\begin{cases} C\exp(x^2-1)^{-1} & |x|\le 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$，$C$ 是使 $\int_\Omega \alpha(x)dx=1$ 的常数，$\alpha_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\alpha(\frac{x}{\varepsilon})$，则 $\alpha_\varepsilon(x)$ 收敛到 δ—函数。

证明：

$$\alpha_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\alpha(\frac{x}{\varepsilon})=\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}C\exp((\frac{x}{\varepsilon})^2-1)^{-1}, \left|\frac{x}{\varepsilon}\right|\le 1(|x|\le|\varepsilon|) \\ 0, |x|>\varepsilon \end{cases}$$

$$\int_\Omega \alpha_\varepsilon(x)dx=\int_\Omega \frac{C}{\varepsilon}\exp((\frac{x}{\varepsilon})^2-1)^{-1}dx \overset{令 y=\frac{x}{\varepsilon}}{\Rightarrow} \int_\Omega C\exp(y^2-1)^{-1}dy=1 \qquad (3.15)$$

若 $x\ne 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C}{\varepsilon}\exp((\frac{x}{\varepsilon})^2-1)^{-1}=0 \qquad (3.16)$$

$x=0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C}{\varepsilon}\exp((\frac{x}{\varepsilon})^2-1)^{-1}\to\infty \qquad (3.17)$$

由（3.15）—（3.17）我们知 $\lim_{\varepsilon\to}\frac{1}{\varepsilon}\alpha(\frac{x}{\varepsilon})\to\delta(x)$。

为了计算的简便，我们也可以用函数 $\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ [29]来近似 $\delta(x)$，

$$\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon}(\int_{-1}^{1}(1-x^2)^6dx)^{-1}(1-(\frac{x}{\varepsilon})^2)^6,|x|\le\varepsilon\\0,\text{其它情况}\end{cases}$$

定理 3.2：设$\varphi(x)\in\Omega$在任意紧集$K\subset R$上可积，若$\varphi(x)\in C^0(R)$，则对于任意紧集$K\subset R^n$，当$\varepsilon\to 0$时，$\varphi_\varepsilon(x)\to\varphi(x)$。

证明：若$\varphi(x)\in C^0(R)$，利用

$$\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)dy=1$$

可得

$$\varphi_\varepsilon(x)-\varphi(x)=\int_{R^n}(\varphi(x-y)-\varphi(x))\alpha_\varepsilon(y)dy$$

当x属于某紧集K时，由于$\alpha_\varepsilon(y)$的支集在球$|y|\le\varepsilon$中，故上式积分号下作为函数φ的变元的x与$x-y$落在紧集K_1中，这里K_1是把以K中任意点为球心，1 为半径的球都包含在里面的一个紧集。利用φ在紧集K_1上的一致连续性可知，对任意$\delta>0$，在ε充分小时有

$$\max_{x\in K}|\varphi_\varepsilon(x)-\varphi(x)|\le\int_{R^n}|\varphi(x-y)-\varphi(x)|\alpha_\varepsilon(y)dy$$

$$\le\max_{\substack{x,x-y\in K_1\\|y|\le\varepsilon}}|\varphi(x-y)-\varphi(x)|\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)dy$$

$$\le\delta\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)dy=\delta$$

所以，当$\varepsilon\to 0$时，在K上$\varphi_\varepsilon(x)$一致收敛于$\varphi(x)$。

3.2 算法的收敛性

利用磨光函数近似初始条件得到的数学模型的解是否收敛到原问题的解呢，收敛速度又如何呢？由于我们对变量做了前沿变换，故偏微分方程

的成立区域变成了固定区域。所以为了讨论的方便，我们将问题限制到固定区域中，我们考虑如下模型：

$$u_t = L_x[u] + f(t,x) \quad t>0, x\in I_0 \tag{3.18}$$

$$u(0,x)=\varphi(x)\,,\quad B[u]=0 \tag{3.19}$$

其中，$L_x(u)$ 和 $B[u]$ 同式（3.1）（3.2）中相同，$I_0=[0,S_0]$。

定理 3.3: 假定 $\alpha_i \in C_t^1\times C_x^2$，$f(t,x)\in C_t^0\times C_x^0$，若初边值问题(3.18)—(3.19)的解为 $u(t,x)$，而另外由一组初值条件 $u_n(0,x)=\varphi_n(x)\in C^k(I_0)$ 确定的问题的解为 $u_n(t,x)$。假定 $\varphi_n(x)\to\varphi$，对于任意的 $x\in I_0$ 和序列 $\varepsilon_n\to 0$，在任意有限时间段 $(0,T]$ 内，我们有

$$\sup_{x\in I_0}\left|u_n(t,x)-u(t,x)\right| \le K(t)\varepsilon_n \tag{3.20}$$

特别地，当 $t>0$ 时，在 I_0 中，当 $n\to\infty$ 时，$u_n(t,x)$ 一致收敛到 $u(t,x)$。其中 $K(t)$ 在任意 $[t_0,T]$（$t_0>0$）上都是有界的，当 $t\to 0$ 时，$K(t)\to\infty$。

证明：为了讨论问题的方便，我们不妨假定所讨论问题的边界条件为 Dirichlet 条件，

$$u(t,0)=u(t,S_0)=0$$

考虑 L_x 的伴随算子 L_x^*[30]，

$$L_x^* = \alpha_2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2\alpha_{2,x}(t,x)-\alpha_1(t,x))\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_0(t,x) - \alpha_{1,x}(t,x) + \alpha_{2,xx}(t,x)$$

我们假定 L_x^* 的基本解为 $G(x,t;\xi,\tau)\in C_x^2\times C_t^1$，且 $G(0,t;\xi,\tau)=0$。则

$$\int_0^{t_\varepsilon}\int_{I_0}\{(G_t+L_x^*[G])u+(u_t-L_x[u])G\}d\xi d\tau$$

$$=\int_0^{t_\varepsilon}\int_{I_0}\{\frac{\partial}{\partial\xi}[\alpha_2 Gu_\xi-\alpha_2 uG_\xi+(\alpha_1-\alpha_{2,\xi})uG]-(uG)_\tau\}d\xi d\tau$$

利用定解条件，并且令$t_\varepsilon\to 0$，我们得到

$$u(t,x)=-\int_0^t\int_{I_0}G(x,t;\xi,\tau)f(\tau,\xi)d\xi d\tau+\int_{I_0}G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi$$

$$+\int_0^t\alpha_2(\tau,S_0)G(x,t;s_0,\tau)u_\xi(\tau,S_0)d\tau$$

当$\varphi(x)$取$\varphi_n(x)$时对应的解为$u_n(t,x)$。因为对每一个n都有$\varphi_n(x)\in C^k(I_0)$（$K>0$），由微分方程的理论我们知道，$u_n(t,x)\in C_t^1\times C_x^2$。

我们取$n=m_1$，m_2时的解分别为u_{m_1},u_{m_2}。那么，

$$\left|u_{m_1}-u_{m_2}\right|\le\left|\int_{I_0}G(x,t;\xi,0)(\varphi_{m_1}(\xi)-\varphi_{m_2}(\xi))d\xi\right|$$

$$+\left|\int_0^t\alpha_2(\tau,S_0)G(x,t;S_0,\tau)[u_{m_1\xi}(\tau,S_0)-u_{m_2\xi}(\tau,S_0)]d\tau\right|=J_1+J_2$$

而

$$J_1=\left|\int_{I_0}G(x,t;\xi,0)(\varphi_{m_1}(\xi)-\varphi_{m_2}(\xi))d\xi\right|$$

$$\le\left|\int_{I_0}G(x,t;\xi,0)(\varphi_{m_1}(\xi)-\varphi(\xi))d\xi\right|+\left|\int_{I_0}G(x,t;\xi,0)(\varphi(\xi)-\varphi_{m_2}(\xi))d\xi\right|$$

基本解 G 满足，

$$|G(x,t;\xi,\tau)| \le \frac{C}{(t-\tau)^{\mu}} \frac{1}{|x-\xi|^{1-2\mu}}$$

C 是常数，$\mu \in (0,1)$。因为 $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$，固有 $|\varphi_n(x)-\varphi(x)| \le M(x)\varepsilon_n$，可以得到，

$$J_1 \le \frac{\tilde{M}}{t^{\mu}}(\varepsilon_{m_1}+\varepsilon_{m_2})$$

其中，$\tilde{M}$ 是常数。

$$J_2 \le \int_0^t |\alpha_2(\tau,S_0)G(x,t;S_0,\tau)| |u_{m_1,\xi}(\tau,S_0)-u_{m_2,\xi}(\tau,S_0)| d\tau$$

$$\le (\varepsilon_{m_1}+\varepsilon_{m_2}) \int_0^t |\alpha_2(\tau,S_0)G(x,t;S_0,\tau)| (\frac{M_G}{\tau^r}+K_1(\tau)) d\tau$$

$$\le M_G(\varepsilon_{m_1}+\varepsilon_{m_2})F_G(x,S_0)\int_0^t \eta(\tau)d\tau$$

$$\le M_G(\varepsilon_{m_1}+\varepsilon_{m_2})F_G(x,S_0)K_2(t)$$

其中 $K_2(t)$，$F_G(x,S_0)$ 均是有界的。所以，

$$|u_{m_1}-u_{m_2}| \le (\frac{\tilde{M}}{t^{\mu}}+M_G F_G(x,S_0)K_2(t))(\varepsilon_{m_1}+\varepsilon_{m_2})$$

$$\sup_{x\in I_0}|u_{m_1}-u_{m_2}| \le K(t)(\varepsilon_{m_1}+\varepsilon_{m_2})$$

其中，$K(t)=\frac{\tilde{M}}{t^{\mu}}+\max_{x\in I_0}[M_G F_G(x,S_0)K_2(t)]$。

由于 $K(t)$ 是 $[t_0,T]$ 有界的,因此若 $m_1 \to \infty$，$m_2 \to \infty$ 时有，$\sup_{x\in I_0}|u_{m_1}-u_{m_2}| \to 0$。

所以，$u_n(t,x)$ 一致收敛到 $u(t,x)$。

定理 3.4：在问题（3.18）—（3.19）中，令 $x_0 \in I_0$。如果初始条件是

$u(0,x) = u_0 = c_0\delta(x-x_0) + c_1 H(x-x_0) + c_2(x)\max(0, x-x_0) + c_3(x)\max(0, x^2) + \ldots$

$u_{\alpha,\varepsilon}(t,x)$ 是将 $\delta(x)$ 用 $\alpha_\varepsilon(x)$ 近似得到的问题的解，$u(t,x)$ 是原问题的解，那么当 $\varepsilon \to 0$，$u_{\alpha,\varepsilon}(t,x) \to u(t,x)$，且收敛阶数为 $o(\varepsilon^2)$。

证明：由定理 3.1，定理 3.3 的证明我们知道，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\alpha_\varepsilon(x) \to \delta(x), \quad u_{\alpha,\varepsilon}(t,x) \to u(t,x)$$

下面我们只证明收敛阶数。

对任意函数 $\varphi \in \mathrm{F}'$，我们有，

$$\left|\alpha_\varepsilon[\varphi] - \delta_0[\varphi]\right| \le \left|\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_\varepsilon(x)\varphi(0)dx\right|$$

从定理 3.1 证明我们知道 $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$。

令

$$y = \frac{x}{\varepsilon}$$

则有

$$\left|\alpha_\varepsilon[\varphi] - \delta_0[\varphi]\right| \le \left|\int_{-1}^{1} \alpha(y)[\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)]dy\right|$$

而 $\varphi_\varepsilon(\varepsilon y) - \varphi(0) = \varepsilon y \varphi'(0) + \dfrac{\varepsilon^2 y^2}{2}\varphi''(0) + O(\varepsilon^3)$ 代入上式得，

$$\left|\alpha_\varepsilon[\varphi] - \delta_0[\varphi]\right| \le \left|\int_{-1}^{1} \alpha(y)(\varepsilon y \varphi'(0) + \frac{\varepsilon^2 y^2}{2}\varphi''(0) + O(\varepsilon^3))dy\right|$$

由于 $\alpha(x)$ 是偶函数，所以，

$$\left|\alpha_\varepsilon[\varphi]-\delta_0[\varphi]\right|\le\left|\int_{-1}^{1}\alpha(y)(\frac{\varepsilon^2y^2}{2}\varphi''(0)+O(\varepsilon^3))dy\right|\le\frac{\varepsilon^2}{2}\left|\varphi''(0)\right|\int_{-1}^{1}\alpha(y)y^2dy+o(\varepsilon^2)$$

由于，$\varphi\in F'$ 即 φ 足够光滑，$\left|\varphi''(0)\right|\le M<\infty$，则，

$$\left|\alpha_\varepsilon[\varphi]-\delta[\varphi]\right|\le\tilde{M}\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)$$

又由于 $\frac{d}{dx}H(x)=\frac{d^2}{dx^2}\max(0,x)=\frac{d^3}{dx^3}\frac{1}{2}\max(0,x^2)=\delta(x)$， $u_\varepsilon(0,x)\to u(0,x)$ 的收敛阶数为 $o(\varepsilon^2)$，由定理3.3中的（4.22）知 $u_{\alpha,\varepsilon}(t,x)\to u(t,x)$，且收敛阶数为 $o(\varepsilon^2)$。证毕。

3.3 数值实验

氧气扩散问题（1.3），经过前沿变换后得到的模型为：

$$c_t=\frac{4}{s^2(t)}c_{yy}+(y+1)\frac{\dot{s}(t)}{s(t)}c_y-1,-1<y<1,t>0 \tag{3.21}$$

$$c(0,y)=\frac{1}{8}(1-y)^2,\qquad s(0)=1 \tag{3.22}$$

$$c_y(t,-1)=c(t,1)=0 \tag{3.23}$$

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{8}{s^3(t)}c_{yyy}(t,1) \tag{3.24}$$

记模型的解为 $c(t,y)$，令 $c(t,y)=\sum_{n=0}^{N-1}a_nT_n(y)$ 我们可以得到如下常微分方程组：

$$\frac{da_n}{dt}=\frac{1}{c_n}\frac{4}{s^2(t)}\sum_{\substack{m=n+2\\ m+n\text{偶数}}}^{N-1}m(m^2-n^2)a_m+\frac{2}{c_n}\frac{\dot{s}(t)}{s(t)}(\sum_{m=n+1}^{N-1}ma_m+\frac{na_n}{2}),1\le n\le N-3$$

$$\frac{da_0}{dt}=\frac{1}{c_0}\frac{4}{s^2(t)}\sum_{\substack{m=2\\ m偶数}}^{N-1} m^3a_m+\frac{2}{c_0}\frac{\dot{s}(t)}{s(t)}\sum_{m=1}^{N-1}ma_m-1, n=0$$

$$a_n(0)=c_{\varepsilon,n}(0),\quad s(0)=1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}a_n=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n n^2a_n=0$$

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{8}{s^3(t)}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{2}{c_n}\sum_{\substack{p=n+1\\ p+n为奇}}^{N-1}p\frac{1}{c_p}\sum_{\substack{s=p+2\\ p+s为偶}}^{N-1}s(s^2-p^2)a_s$$

对于这一问题我们分三种情况进行数值实验，情况 1：$N=10$（第一行）；情况 2：$N=100$（第二行）；情况 3：$N=10$（第三行），修正后的 Chebyshev 算法（在 50 个小区间上计算）。

我们得到如下数值结果：

表 4.1：情况 1（第一行）；情况 2（第二行）；情况 3（第三行）

t	c(t,0)	s(t)	t	c(t,0)	s(t)
0.01	0.38988135 0.38717464 0.38719871	1.00000000 1.00000000 1.00000000	0.1	0.14355714 0.14355530 0.14317777	0.93333387 0.93504241 0.93499984
0.02	0.34194497 0.34045136 0.34042345	1.00000000 1.00000000 1.00000000	0.12	0.10964921 0.10964891 0.10935786	0.86742552 0.86987449 0.87679551
0.06	0.22382245 0.22375861 0.22403351	0.99027243 0.99142747 0.99175623	0.16	0.04955625 0.04955625 0.04874281	0.68224118 0.68184228 0.68400081
0.08	0.18111175 0.18110064 0.18124654	0.96952240 0.97100057 0.97143363	0.18	0.02240337 0.02240337 0.02178658	0.51897562 0.50971102 0.50999585

由于 $s(t)$ 本身比较小，故如果仅仅对 $s(t)$ 作图的话，差别不是很明显，所以我们作 $s(t)$ 与积分方法得到的结果的差关于时间 t 的图象。

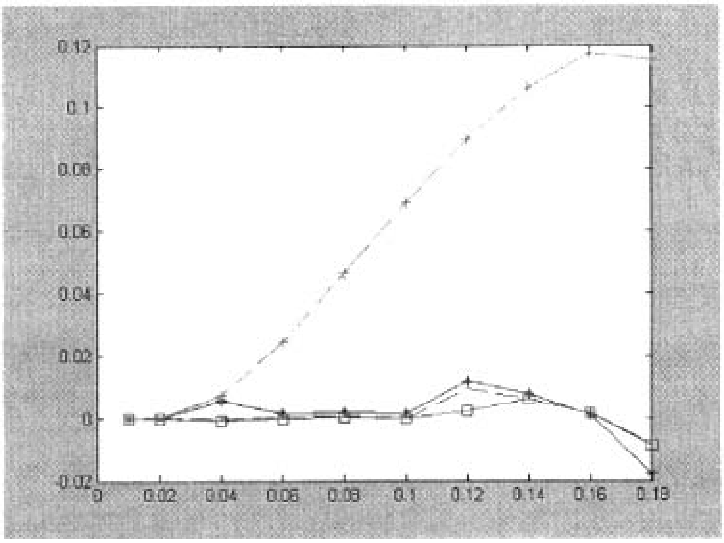

图 4.1：：“—*”表示情况 1；“—”表示情况 2；

“—口”表示情况 3；“—+”表示变分不等式法

3.4 结论

我们将解氧气扩散问题得到的数值结果与积分方法所得的结果相比较，我们可以知道如果 N 越大得到的结果将越准确。但是如果用修正的 Chebyshev 谱方法，即将[-1,1]剖分成几个小区间的话，即使 N 相对的小一点得到的结果也是比较准确的。

与变分不等式方法相比，对于氧气浓度的计算相差并不是非常明显，可是对于自由边界的计算结果就要准确许多了。主要是由于用变分不等式方法求解自由边界时，需要根据隐式的自由边界条件，利用所求得的关于氧气的浓度的数值解，后验性的估计自由边界，因此误差就比较大。

第 4 章 美式期权定价问题

所谓的期权是指持有人在确定时间，按确定价格向出售方购（销）一定数量和质量的原生资产的协议，但他不承担必须购入（销售）的义务[31]。

期权持有人具有按协议条款在规定时间实施这个协议的权利，但不负有必须实施这个协议的义务。在期权合约中，确定价格称为实施价格或敲定价格(exercise price or strike price)，确定日期为到期日(expiry date)，按期权合约规定执行购入或销售标的资产称为实施(exercise)。

期权按合约中购入和销售原生资产来划分为两种基本类型[32]:

看涨期权（call option）：持有者有权在某一确定时间以某一确定价格购买标的资产。

看跌期权（put option）：持有者有权在某一确定时间以某一确定的价格出售标的资产。

期权按合约中有关的实施条款来划分：

欧式期权（European option）：只能在合约规定的到期日实施。

美式期权（American option）：能在合约规定的到期日以前（包括到期日）任何一个工作日实施。

4.1 美式期权的模型

我们需要的符号有：S 为标的资产的价格，$C(t,S)$ 为看涨期权价格，$P(t,S)$ 为看跌期权价格，K 为期权的敲定价格，r 为风险利率，q 为红利率，σ 为标的物价格的变动率，$B(t)$ 为最优执行价格（t 时刻自由边界的位置），T 为到期日。

美式期权是一张具有提前实施条款的合约。从数学上来讲，美式期权

的定价问题是一个自由边界问题，它的自由边界是这样的一条需要确定的交界线，它把区域$\{0 \le S \le \infty, 0 \le t \le T\}$分成两个部分，一部分是继续持有区域，另一部分是终止持有区域，这条自由边界在金融上被称为最佳实施边界（optimal exercise boundary）。

显然对每个美式期权的持有人来讲，需要知道曲线的位置，以便制定出最佳的实施方案。

4.1.1 美式看涨看跌期权定价模型

期权作为一种衍生证券，它的定价决定于标的资产价格的变化。由于标的资产是一种风险资产，因此它的价格变化是随机的。由此产生的期权的价格变化亦必是随机的。但是，一旦标的资产价格确定下来，那么作为它的衍生证券（期权）的价格亦将随之确定。这就是说，若在t时刻，标的资产价格为$S(t)$，期权价格为函数$C(t,S)$（$P(t,S)$），我们的任务就是通过建立偏微分方程模型去确定这个函数。

对于终止期为$t=T$的美式看涨期权，在未来的期权到期日若当标的资产的价格$S(T)$大于敲定价格K，则合约赋予期权持有人利用敲定价格K购入标的资产的权利，从而获得利益，否则期权就无意义。它存在两个区域一个是继续持有区域Σ_1，在这个区域中：

$$C(S,t) > (S-K)^+$$

另一个是终止持有区，在这个区域内：

$$C(S,t) = (S-K)^+$$

我们可以认为

$$\Sigma_1 = \{(S,t) \mid 0 \le S \le S(t), 0 \le t \le T\}$$

$$\Sigma_2 = \{(S,t) \mid S(t) \le S < \infty, 0 \le t \le T\}$$

$$S(t) > K \quad (0 \le t < T)$$

在到期日的任何时间，对于最优价格下的任何标的资产的价格均满足 Black－Scholes 方程[33]

$$LC = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + (r-q)SC_S + C_t - rC = 0 \qquad (\Sigma_1)$$

期权只有在标的资产价格 S 大于敲定价格 K 时才执行。所以期权到期时，期权价格满足

$$C(T,S) = \max(0, S-K)$$

很显然，如果标的资产价格为 0，期权是无意义的，于是，

$$C(t,0) = 0$$

通过最优执行价格定义我们知道，当标的资产价格达到 $B(t)$ 时，权利被行使，即此时期权价值为

$$C(t,B(t)) = B(t) - K$$

为了解决自由边界 $B(t)$，我们还需要其他条件。

最优执行价格需要满足在任何瞬时时间中都最大化期权价格，即

$$B(t) = \arg\max_{f(t)} C(t,S;f(t)) \tag{4.1}$$

$f(t)$ 是所有的可取函数。我们可以考虑满足 $f(T) = B(T)$ 的连续函数 $f(t)$，

$$f(t) = B(t) + \varepsilon g(t), \quad g(T) = 0$$

我们定义

$$C_\varepsilon = C(t,S;f(t)) = C(t,S;B(t)+\varepsilon g(t))$$

满足（4.1）的必要条件为

$$\left.\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0 \tag{4.2}$$

令$U=\partial C_\varepsilon/\partial\varepsilon$，我们得到

$$\frac{1}{2}\sigma^2S^2U_{SS}+(r-q)SU_S+U_t-rU=0,\ 0<t<T,0<S<B(t)+\varepsilon g(t)$$

$$\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t,S)=\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t,0)=0$$

根据链式法则

$$\frac{dC_\varepsilon}{d\varepsilon}(t,B(t)+\varepsilon g(t))=C_S(t,B(t)+\varepsilon g(t))g(t)+\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \varepsilon}$$

另外，对C_ε的边界条件微分得

$$\frac{dC_\varepsilon}{d\varepsilon}(t,B(t)+\varepsilon g(t))=\frac{d}{d\varepsilon}(B(t)+\varepsilon g(t)-K)=g(t)$$

所以，

$$[C_S(t,B(t)+\varepsilon g(t))g(t)-1]g(t)=-\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \varepsilon}$$

定义

$$C'_{0,\varepsilon}\equiv\left.\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$

我们有，

$$\frac{1}{2}\sigma^2S^2[C'_{0,\varepsilon}]_{SS}+(r-q)S[C'_{0,\varepsilon}]_S+[C'_{0,\varepsilon}]_t-r[C'_{0,\varepsilon}]=0,\ 0<t<T,0<S<B(t)$$

$$[C'_{0,\varepsilon}](T,S)=0$$

$$[C'_{0,\varepsilon}](t,0)=0$$

$$[C'_{0,\varepsilon}](t,B(t))=[1-C_S(t,B(t))]g(t)$$

由（4.2）知，对任意$g(t)$，$[1-C_S(t,B(t))]g(t)=0$。从而可以得到我们所需要得另一个自由边界条件$C_S(t,B(t))=1$，对于美式看跌期权$P(t,S)$，类似地

我们可以得到 $P_S(t,B(t))=-1$。文[34]给出，

$$B(T)=\begin{cases}\max\{K,\dfrac{rK}{q}\}\\ \min\{K,\dfrac{rK}{q}\}\end{cases}$$

从而可以得到美式看涨期权和看跌期权的模型[35]。

美式看涨期权：

$$\frac{1}{2}\sigma^2S^2C_{SS}+(r-q)SC_S+C_t=rC,0<t<T,0<S<B(t) \tag{4.3}$$

$$C(T,S)=\max(0,S-K) \tag{4.4}$$

$$C(t,0)=0 \tag{4.5}$$

$$C(t,B(t))=B(t)-K,\ C_S(t,B(t))=1 \tag{4.6}$$

$$B(T)=K\max(1,\frac{r}{q}) \tag{4.7}$$

美式看跌期权：

$$\frac{1}{2}\sigma^2S^2P_{SS}+(r-q)SP_S+P_t=rP,0<t<T,S>B(t) \tag{4.8}$$

$$P(T,S)=\max(0,K-S) \tag{4.9}$$

$$P(t,+\infty)=0 \tag{4.10}$$

$$P(t,B(t))=K-B(t),\ P_S(t,B(t))=-1 \tag{4.11}$$

$$B(T)=K\min(1,\frac{r}{q}) \tag{4.12}$$

4.1.2 美式期权定价看涨—看跌对称关系

定理 4.1 ：设 $C(S,t;r,q)$， $P(S,t;r,q)$ 以及 $S_c(t;r,q)$， $S_p(t;r,q)$ 分别是具

有相同期限T和相同敲定价格K的支付红利的美式看涨和看跌期权的价格与最佳实施边界，则

$$C(S,t;r,q)=\frac{S}{K}P(\frac{K^2}{S},t;q,r)$$

和

$$\sqrt{S_c(t,r,q)S_p(t;q,r)}=K$$

证明：设P和$B(t)$是以下定解问题（4.8）—（4.12）的解。令

$$W=\frac{K}{S}C(S,t)$$

$$y=\frac{K^2}{S}$$

则区域$\{B(t)\le S<\infty\}\Rightarrow$区域$\{0\le y\le\frac{K^2}{B(t)}\}$。记$S^*=\frac{K^2}{B(t)}$，利用条件（4.9）得

$$W(S^*)=\frac{K}{B(t)}(K-B(t))\bigg|_{B(t)=\frac{K^2}{S^*}}=S^*-K \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}\bigg|_{y=S^*}=(\frac{\partial W}{\partial S}\frac{dS}{dy})_{y=S^*}=(-\frac{K^2}{S^2})(-\frac{K^2}{y^2})\bigg|_{y=S^*}=1 \tag{4.14}$$

由（4.10）得到边界条件

$$W(0,t)=(\frac{K}{S}(K-S))_{S=\infty}=0 \tag{4.15}$$

最后推导$W(y,t)$在区域$\{0\le y\le S^*\}$满足的方程。通过计算我们可以得到，

$$S\frac{\partial P}{\partial S}=\frac{S}{K}(-y\frac{\partial W}{\partial y}+W)$$

$$S\frac{\partial}{\partial S}(S\frac{\partial P}{\partial S})=\frac{S}{K}[y\frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial W}{\partial y})-2y\frac{\partial W}{\partial y}+W]$$

因此方程（4.8）转化成

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S\frac{\partial}{\partial S}S\frac{\partial P}{\partial S}+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})SP_S+P_t=rP,0<t<T,S>B(t)$$

$$\frac{S}{K}\{\frac{\sigma^2}{2}y\frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial W}{\partial y})+[-\sigma^2-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})]y\frac{\partial W}{\partial y}+[r-q-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma^2}{2}-q]W\}+W_t=0$$

即

$$\frac{1}{2}\sigma^2 y^2 W_{yy}+(q-r)yW_y+W_t=qW,0<t<T,0<y<S^*$$

而对于自由边界，

$$S^*(T;q,r)=\frac{K^2}{B(T;r,q)}=\frac{K^2}{\min\{K,\frac{r}{q}K\}}=\max(K,\frac{q}{r}K)$$

记$C(t,S;r,q)=W(t,y;q,r)$得

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS}+(r-q)SC_S+C_t=rC,0<t<T,0<S<S^*$$

$$C(S^*)=S^*-K$$

$$C(0,t)=0，C(T,S)=\max(0,S-K)$$

$$C_S(t,S^*)=1，S^*(T)=\max(K,\frac{r}{q}K)$$

所以，定理结论成立。证毕。

定理4.1实际上描述的是美式看涨看跌期权价格的对称关系，这种关系的另一种表示为[34]，

$$\frac{C(t,S;r,q)-S}{K}=\frac{P(t,S;q,r)-K}{S}，且\frac{B^c(t)}{K}=\frac{K}{B^p(t)}$$

利用这一关系我们在下面的讨论中，仅考虑美式看涨期权即可。

我们引入新的变量，

$$\tau=(T-t),s=\frac{S}{K},c(\tau,s)=\frac{C(t,S)}{K},b(\tau)=\frac{B(t)}{K},$$

模型（4.3）－（4.7）变为

$$c_\tau=\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 c_{ss}+(r-q)sc_s-rc,\tau>0,0<s<b(\tau)$$

$$c(0,s)=\max(0,s-1),b(0)=\max(1,r/q)$$

$$c(\tau,0)=0 \tag{4.16}$$

$$c(\tau,b(\tau))=b(\tau)-1,c_s(\tau,b(\tau))=1$$

4.2 美式期权价格的性质

从定解问题（4.3）－（4.7），我们给出美式看涨期权定价的变分不等式模型[35][36]：

在区域 $\Sigma:\{0\le S<\infty,0\le t\le T\}$ 上，寻求函数 $C(t,S)\in C_\Sigma^1$，其中 $\Sigma=\Sigma_1\bigcup\Sigma_2$，使得，

（1） 在继续持有区域 Σ_1 上，

$$C(t,S)>(S-K)^+,$$

$$LC=0$$

（2）在终止持有区域 Σ_2 上，

$$C(t,S)=(S-K)^+$$

$$LC=rK>0$$

（3）在终止时间$t=T$，

$$C(t,S)=(S-K)^{+}$$

（4）当$S=0$，

$$C(t,S)=0$$

综合（1）一（4），因此美式看涨期权定价的变分不等式[37]模型为：

$$\min(\frac{1}{2}\sigma^2S^2C_{SS}+(r-q)SC_S+C_t-rC,C-(S-K))=0$$

$$C(0,S)=0 \qquad (4.17)$$

$$C(T,S)=S-K$$

如果令$x=\ln S$，$\tau=T-t$，$v(\tau,x)=C(t,S)$，则定解问题（4.17）转化为

$$\min(-(\frac{\partial v}{\partial\tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial v}{\partial x}+rv),v-(e^x-K))=0$$

$$v(T,x)=0 \qquad (4.18)$$

$$v(0,x)=e^x-K$$

仿照第二章，我们给出（4.18）问题的惩罚问题：

$$L_\varepsilon(v)=\frac{\partial v}{\partial\tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial v}{\partial x}+rv+\beta_\varepsilon(v-\Pi_\varepsilon(e^x-K))=0$$

$$v(T,x)=0 \qquad (4.19)$$

$$v(0,x)=\Pi_\varepsilon(e^x-K)$$

其中$\Pi_\varepsilon(y)=\begin{cases}y,y\geq\varepsilon\\ \square\ ,|y|<\varepsilon\\ 0,y\leq-\varepsilon\end{cases}$，$\Pi_\varepsilon(y)\in C^\infty(R)$，$0\leq\Pi_\varepsilon{}'(y)\leq1$，$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\Pi_\varepsilon(y)=y^{+}$。

我们有以下结论：

定理 4.2：设 $v_\varepsilon(t,x)$ 是惩罚问题（4.19）的解，则当 $\varepsilon \to 0$ 时，在 $\overline{D_T}$ 的任意有界闭子区域上，$v_\varepsilon(t,x)$ 一致收敛到（4.18）的解 $v(t,x)$，其中

$$D_T = \{(x,t) \mid a < x < b, 0 < t \le T\}, -\infty \le a < b \le +\infty。$$

定理 4.3：对于美式看涨期权定价，我们有，

（1） 若 $S_1 \ge S_2$，则

$$C(t,S_1) \ge C(t,S_2) \tag{4.20}$$

（2） 若 $K_1 \ge K_2$，则

$$C(t,S;K_1) \le C(t,S;K_2) \tag{4.21}$$

证明：（4.20）与（4.21）的证明是类似的，我们仅证（4.20）。作函数

$$W(\tau,x) = v_1(\tau,x) - v_2(\tau,x)$$

其中，$v_i(\tau,x) = v_\varepsilon(\tau,x;S_i)(i=1,2)$。将它代入（4.19）我们有，

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x} + rW + \beta_\varepsilon(v_1 - \Pi_\varepsilon(e^x - K))$$

$$-\beta_\varepsilon(v_2 - \Pi_\varepsilon(e^x - K)) = 0$$

$$\beta_\varepsilon(v_1 - \Pi_\varepsilon(e^{x_1} - K)) - \beta_\varepsilon(v_2 - \Pi_\varepsilon(e^{x_2} - K))$$

$$= \beta'_\varepsilon(\xi)(v_1 - v_2 - \Pi_\varepsilon(e^{x_1} - K) + \Pi_\varepsilon(e^{x_2} - K))$$

$$= \beta'_\varepsilon(\xi)(W - \Pi'_\varepsilon(\eta)(e^{x_1} - e^{x2}))$$

则我们有，

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (r - q - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x} + (r + \beta'_\varepsilon(\xi))W = \beta'_\varepsilon(\xi)\Pi'_\varepsilon(\eta)(e^{x_2} - e^{x_1}) \le 0$$

$$W(0,x)=v_1(0,x)-v_2(0,x)=\Pi_\varepsilon(e^{x_1}-K)-\Pi_\varepsilon(e^{x_2}-K)$$

$$=\Pi_\varepsilon'(\varsigma)(e^{x_1}-e^{x_2})\geq 0$$

由极值原理，我们知道$W(\tau,x)=v_1(\tau,x)-v_2(\tau,x)\geq 0$，所以由定理 4.2 知式（4.20）成立。

定理 4.4：对于美式看涨期权定价，我们有

（1） 若$r_1\geq r_2$时，则

$$C(t,S;r_1)\geq C(t,S;r_2) \tag{4.22}$$

（2） 若$q_1\geq q_2$时，则

$$C(t,S;q_1)\leq C(t,S;q_2) \tag{4.23}$$

证明：（4.22）与（4.23）证明是相似的，我们只证（4.22）。作函数

$$W(\tau,x)=v_2(\tau,x)-v_1(\tau,x)+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\varepsilon}}{r_2r_1}$$

其中，$v_i(\tau,x)=v_\varepsilon(\tau,x;r_i)(i=1,2)$。将它代入（4.19）得到：

$$\frac{\partial W}{\partial\tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-(r_2-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x}+r_2W+\beta_\varepsilon(v_2-\Pi_\varepsilon(e^x-K))$$

$$-\beta_\varepsilon(v_1-\Pi_\varepsilon(e^x-K))=\frac{r_2-r_1}{r_1}\sqrt{\varepsilon}+r_2(\frac{\partial v_1}{\partial x}-v_1)-r_1(\frac{\partial v_1}{\partial x}-v_1)$$

于是，我们可以得到，

$$\frac{\partial W}{\partial\tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-(r_2-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x}+(r_2+\beta_\varepsilon'(\alpha))W\leq(r_2-r_1)[\frac{\partial v_1}{\partial x}-v_1+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{r_1}]\leq 0$$

$$W(x,0)=\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\varepsilon}}{r_2r_1}\leq 0$$

因此由极值原理我们知道，

$$W(\tau,x)\le 0$$

即

$$v_2(\tau,x)-v_1(\tau,x)+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\varepsilon}}{r_2r_1}\le 0$$

令$\varepsilon\to 0$，由定理 4.2 知定理结论成立。证毕。

定理 4.5: 对于美式看涨期权定价，我们有

（1） 若$t_1\ge t_2$时，则

$$C(t_1,S)\le C(t_2,S) \tag{4.24}$$

（2） 若$T_1\ge T_2$，则当$0\le t\le T_2$时，

$$C(t,S;T_1)\ge C(t,S;T_2) \tag{4.25}$$

证明：我们令

$$W(\tau,x)=\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\tau}$$

不难验证在$\overline{D_T}$上（D_T与定理 5.2 定义一样），W适合如下定解问题，

$$\frac{\partial W}{\partial\tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x}+(r+\beta_\varepsilon'(\alpha))W=0$$

$$W(x,0)=\phi(x)$$

其中

$$\alpha=v_\varepsilon-\Pi_\varepsilon(e^x-K)$$

$$\phi(x)=\left.\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=[\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}-rv_\varepsilon-\beta_\varepsilon(v-\Pi_\varepsilon(e^x-K))]_{\tau=0}$$

$$=\frac{\sigma^2}{2}(\Pi_\varepsilon''(y)e^{2x}+\Pi'(y)e^x)+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Pi_\varepsilon'(y)e^x-r\Pi_\varepsilon(y)-\beta_\varepsilon(0)$$

这里$y=e^x-K$。

由$\beta_\varepsilon(x)$及Π_ε的定义我们知道，

$$\phi(x)\ge(r-q)\Pi_\varepsilon'(y)e^x-r\Pi_\varepsilon(y)+C_\varepsilon$$

$$\ge C_\varepsilon-r(\Pi_\varepsilon(y)-y\Pi_\varepsilon'(y))-r(e^x-K)\Pi_\varepsilon'(y)+(r-q)\Pi_\varepsilon'(y)e^x$$

$$\ge C_\varepsilon-r\varepsilon+rK-q$$

若$rK-q\ge0$，我们取$\beta_\varepsilon(0)\ge C_\varepsilon=r\varepsilon$，则$\phi(x)\ge0$；若$rK-q<0$，我们取$\beta_\varepsilon(0)\ge C_\varepsilon=r\varepsilon-rK+q$，则$\phi(x)\ge0$。

由极值原理我们知道，$W(\tau,x)\ge0$，即$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\tau}\ge0$。当$\varepsilon\to0$，$\frac{\partial C}{\partial t}\le0$，所以（4.24）成立。

下证（4.25）。

我们令

$$W(\tau,x)=v_\varepsilon(x,\tau;T_1)-v_\varepsilon(x,\tau;T_2)，（\tau=T_2-t）$$

在区域$\overline{D_T}$上，W满足如下定解问题：

$$\frac{\partial W}{\partial\tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2W}{\partial x^2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x}+(r+\beta_\varepsilon'(\xi))W=0$$

$$W(x,0)=\phi(x)$$

其中

$$\phi(x)=v_\varepsilon(x,0;T_1)-v_\varepsilon(x,0;T_2)=v_\varepsilon(x,0;T_1)-\Pi_\varepsilon(K-e^x)$$

回到原来的时间变量t，我们有，

$$\phi(x)=v_\varepsilon(x,0;T_1)-\Pi_\varepsilon(K-e^x)=v_\varepsilon(x,0;T_1)-v_\varepsilon(x,T_1;T_1)\geq 0$$

故有极值原理，我们知道

$$W(\tau,x)\geq 0$$

令$\varepsilon\to 0$，（4.25）得证。证毕。

定理4.5说明，美式期权价格对于期权有效期T以及时间t的关系是确定的，从金融意义上来讲，因为对于美式期权，由于有效期长的期权包含了有效期短的期权的所有实施机会，因此它有更多的获利机会，从而人们为此必须花出更高的代价（期权金）。对时间而言，由于t增加，$T-t$减小，（与截止时间$t=T$更接近），期权通过提前实施的机会就相对减少。

定理4.6：对于美式看涨期权定价，我们有，若$\sigma_1\geq\sigma_2$，

$$C(t,S;\sigma_1)\geq C(t,S;\sigma_2) \tag{4.26}$$

证明：令

$$W(\tau,x)=v_1(\tau,x)-v_2(\tau,x)$$

其中$v_i(\tau,x)=v_\varepsilon(\tau,x;\sigma_i)$，（$i=1,2$）。容易验证，在区域$\overline{D_T}$上，$W(\tau,x)$满足如下问题，

$$\frac{\partial W}{\partial\tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial x}+(r+\beta_\varepsilon^{'}(\xi))W=\frac{1}{2}({\sigma_1}^2-{\sigma_2}^2)(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}-\frac{\partial v_2}{\partial x}) \tag{4.27}$$

$$W(0,x)=0$$

如果令，$F(\tau,x)=\dfrac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}-\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}$，则$H(\tau,x)$满足如下问题：

$$\frac{\partial F}{\partial\tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial F}{\partial x}+(r+\beta_\varepsilon^{'}(\alpha))F=f(\tau,x)$$

$$F(0,x)=\phi(x)$$

其中，

$$f(\tau,x)=-\beta_\varepsilon''(\alpha)(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}+e^x\Pi_\varepsilon'(e^x-K))^2+\beta_\varepsilon'(\alpha)\Pi_\varepsilon''(e^x-K)e^{2x}$$

$$\phi(x)=(e^x\Pi_\varepsilon'(e^x-K))'-(e^x\Pi_\varepsilon'(e^x-K))=e^{2x}\Pi_\varepsilon''(e^x-K)$$

由 $\beta_\varepsilon(\cdot)$ 与 $\Pi_\varepsilon(\cdot)$ 得， $f(\tau,x)\geq 0$ ， $\phi(x)\geq 0$ 。应用极值原理，我们知道，

$F(\tau,x)\geq 0$ ，

$$\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}-\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x}\geq 0 \tag{4.28}$$

将（4.28）代入（4.27）我们知道，（4.27）的右端项非负，故对问题（4.27）应用极值原理，我们可以得到，

$$v_1(\tau,x)\geq v_2(\tau,x)$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，（4.26）成立。证毕。

由（4.20）—（4.26），再根据美式看涨看跌期权的对称关系，对于美式期权的价格变化，我们可得到如下表格：（这里“＋”表示期权价格是变数的增函数“－”表示期权价格是变数的减函数）

表 4.1：美式期权价格与各参数的关系

变数	看涨期权	看跌期权
S	＋	－
K	－	＋
r	＋	－
q	－	＋
σ	＋	＋
T	＋	＋
t	－	－

4.3 敲定价格的最优控制

有上述讨论我们可以知道，美式期权定价问题可以转化为抛物型变分不等式的障碍控制问题，

$$\min\left(-\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial v}{\partial x}+rv\right), v-(e^x-K)\right)=0$$

$$v(T,x)=0 \tag{4.29}$$

$$v(0,x)=e^x-K$$

这里障碍为$\phi=e^x-K$。由第二章对于障碍最优控制的讨论我们知道，根据我们的目标效益可以得到最优的敲定价格K^*。

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial v}{\partial x}+rv+\beta_\delta(v-(e^x-K))=0\text{在}Q_T\text{中} \tag{4.30}$$

记为$\overline{L}_x[v]=(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial}{\partial x}-r)v$

下面我们讨论最优的敲定价格K^*，其中$K^*=e^x-\phi^*$所要满足的必要条件。

定理 4.7： 设v^δ是（4.30）的解，映射$\phi\to v^\delta=T_\delta(\phi)$。对于$\delta>0$，则$v^\delta$是可微的即若给定$\phi\in U$，$l\in L^2(Q_T)$，$\phi+\varepsilon l\in U$，存在$\xi^\delta\in L^2(Q_T)$满足，当$\varepsilon\to 0$时，$\frac{v^\delta(\phi+\varepsilon l)-v^\delta(\phi)}{\varepsilon}\xrightarrow{\text{弱}}\xi^\delta$在$L^2(Q_T)$中。

证明：定义$v^{\delta,\varepsilon}=T_\delta(\phi+\varepsilon l)$且$v^\delta=T_\delta(\phi)$。我们有，

$$v_t^{\delta,\varepsilon}-v_t^\delta-\overline{L}_x[v^{\delta,\varepsilon}-v^\delta]+\beta_\delta(v^{\delta,\varepsilon}-(\phi+\varepsilon l))-\beta_\delta(v^\delta-\phi)=0$$

$$((v^{\delta,\varepsilon}-v^\delta)_t, v^{\delta,\varepsilon}-v^\delta)-(\overline{L}_x[v^{\delta,\varepsilon}-v^\delta], v^{\delta,\varepsilon}-v^\delta)$$

$$=-\frac{1}{\delta}(\beta(v^{\delta,\varepsilon}-(\phi+\varepsilon l))-\beta_{\delta}(v^{\delta}-\phi),v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta})$$

$$=-\frac{1}{\delta}(\int_0^1\beta'(\theta(v^{\delta,\varepsilon}-(\phi+\varepsilon l))+(1-\theta)(v^{\delta}-\phi))\times[(v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta})-\varepsilon l],v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta})$$

$$\frac{d}{d\theta}\beta(\theta(v^{\delta,\varepsilon}-(\phi+\varepsilon l))+(1-\theta)(v^{\delta}-\phi))$$

$$=\beta'(\theta(v^{\delta,\varepsilon}-(\phi+\varepsilon l))+(1-\theta)(v^{\delta}-\phi))(v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta}-\varepsilon l)$$

我们可以得到：

$$((v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta})_t,v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta})-(\overline{L}_x[v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta}],v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta})$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{\delta}(l\int_0^1\beta'(\theta(v^{\delta,\varepsilon}-(\phi+\varepsilon l))+(1-\theta)(v^{\delta}-\phi))d\theta,(v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta}))$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{\delta}\|l\|_{L^2(Q_T)}\left\|v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta}\right\|_{L^2(Q_T)}$$

$$\leq\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\|l\|_{L^2(Q_T)}+\frac{1}{2}\int_{Q_T}(v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta})^2dxds$$

Gronwall 不等式：

$$\int_{Q_T}(v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta})^2dxds\leq\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\|l\|^2_{L^2(Q_T)}C_1$$

所以

$$(-\overline{L}_x[v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta}],v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta})\leq\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\|l\|^2_{L^2(Q_T)}C_2$$

则我们得到

$$\left\|\frac{v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta}}{\varepsilon}\right\|_{L^2(Q_T)}\leq\frac{C}{\delta}\|l\|_{L^2(Q_T)}$$

对所有ε均成立，则存在一个ξ^{δ}满足，

$$\frac{v^{\delta,\varepsilon}-v^{\delta}}{\varepsilon}\xrightarrow{w}\xi^{\delta}$$

证毕。

4.4 数值结果

美式期权合约中具有提前实施的条款，因此最佳实施边界（自由边界）的确定，对于美式期权具有特殊的意义。因此解决美式期权定价问题时采用的方法，必须能够相对精确的解出自由边界。从氧气扩散问题的求解中，我们可以看出，变分不等式方法对自由边界的确定存在很大的误差，因此，美式期权定价问题的求解我们采用谱方法。

对于美式看涨期权价格模型（4.16）我们只考虑$r>q$的情形，即：

$$c_\tau=\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 c_{ss}+(r-q)sc_s-rc,\tau>0,0<s<b(\tau)$$

$$c(0,s)=\max(0,s-1),b(0)=r/q$$

$$c(\tau,0)=0$$

$$c(\tau,b(\tau))=b(\tau)-1,c_s(\tau,b(\tau))=1$$

由于$u(\tau,s)$在$s=1$处有弱的间断，我们注意到，

$$\frac{dH(x)}{dx}=\frac{d^2}{dx^2}\max(0,x)=\delta(x)$$

其中，$\delta(x)$是 Dirac δ 一函数，$H(x)$是 Heavyside 函数。根据定理 4.2，我们用$\frac{1}{\varepsilon}\alpha(\frac{x}{\varepsilon})$来近似$\delta(x)$，利用 Chebyshev 谱方法解此模型，参数为$r=0.12$，$q=0.08$，$\sigma=0.2$，$K=1$，$T=1$，$\varepsilon=0.001$我们得到关于美式看涨期权的最佳实施边界关于τ和t的函数图象（图 4.1），以及在终止时刻$\tau=T$即$t=0$，期权价格随标的资产价格的变化曲线（图 4.2）。

从图 4.1 中我们可以看出，美式看涨期权的最佳实施边界对于时间t是单调递减的函数，根据美式看跌看涨期权的对称关系，我们知道美式看跌

期权的最佳实施边界对于时间 t 是单调递增函数。

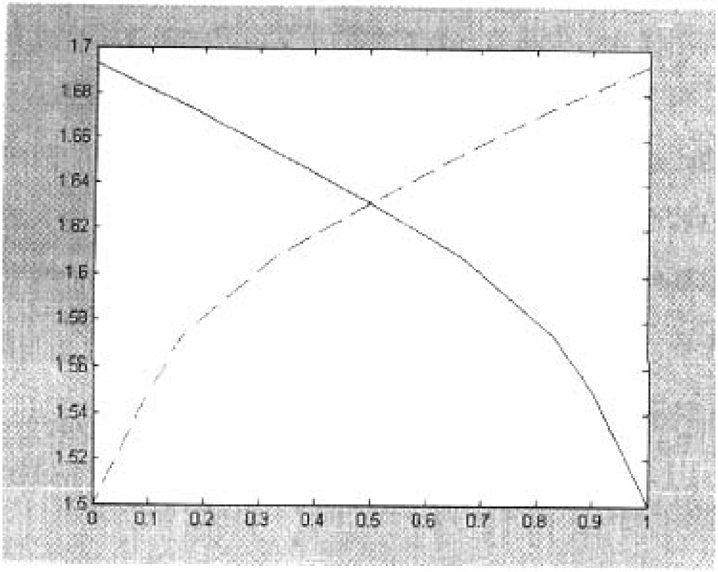

图 4.1 美式看涨期权最佳实施边界的函数图象

“——”是关于 τ，“—”是关于 t

当 $r > q$ 时由边界条件（4.7）我们可以得到它的下界即 $B(t) \geq B(T) = \frac{r}{q}K$。同时我们可以得到它的上界即 $B(t) < B(\infty)$（$B(\infty)$ 是永久式美式看涨期权的最佳实施边界）。我们在 4.2 中已经证明美式期权价格关于有效期 T 是递增的也就是说，在同一敲定价格的美式期权中，最贵的是永久美式期权（即是一张没有终止期，在生效后任何时间都可以实施的美式期 $C(t,S;T) \leq C(t,S;\infty)$。再根据自由边界条件（4.6）我们可以得到美式看涨期权最佳实施边界的上界 $B(t) < B(\infty)$，至此我们可以得出结论，美式看涨期权中的最佳实施边界

$$\max(K, K\frac{r}{q}) \leq B(t) \leq B_\infty。$$

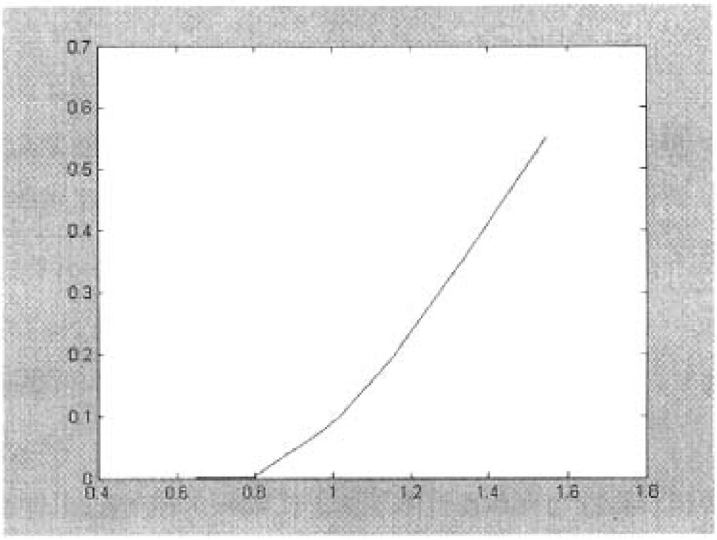

图 4.2 在终止时刻 $\tau = T$ 即 $t = 0$，期权价格随标的资产价格的变化曲线

图 4.2 再一次验证了，美式看涨期权中，期权价格是标的资产价格 S 的非减函数。

4.5 结论

美式期权的特征就是提前实施[38]，期权持有人在整个期权的有效期内必须时刻注意是继续持有还是立即实施。根据期权的内在价值是大于还是等于实施期权的收益，美式期权定价分成两个区域，继续持有区域和终止持有区域，它们之间的交界面称为最佳实施边界。美式期权的持有人应该根据这一“图像”确定自己的实施策略。

确定美式期权定价的数学模型实际上是求解一个偏微分方程自由边界问题的障碍问题，这里的障碍是期权的收益函数，解与障碍的重合集是期权的终止持有区域，重合集的边界称为自由边界，它是美式期权的最佳实施边界。

美式期权定价问题是一个非线性问题，它的定价一般无法用显式表达式给出，因此对于美式期权价格以及它的最佳实施边界的性态研究具有重

要的意义。

通过利用美式期权定价惩罚问题的研究，我们知道了美式期权价格对于股价、敲定价、无风险利率、红利率、波动率、有效期以及时间的依赖关系；了解了美式看涨期权的最佳实施边界关于时间是单调递增的，美式看跌期权的最佳实施边界关于时间是单调递减的。

第 5 章 结论及展望

5.1 结论

本文主要研究的是一类一维一相的变系数抛物型自由边界问题（1.4）。

首先我们将自由边界模型改写成等价的抛物型变分不等式的障碍问题，并且根据偏微分方程的控制理论研究了抛物型变分不等式的障碍的最优控制问题。

对于模型（1.4）的求解本文采用了两种方法：一种是比较经典的变分不等式法；另一种是 Chebyshev 谱方法。

变分不等式方法的核心就是解自由边界问题的等价的变分不等式模型，我们采用了有限元法。并对氧气扩散的实际问题作了数值实验，通过数值实验我们可以明显的看出区域固定法的优缺点：它的计算过程与自由边界的实际的变化无关，进行计算的区域在任何时候都保持固定，并且有非常稳定的格式；主要缺点就是求解自由边界的困难。所以对于需要精确确定自由边界的问题来讲就不能直接采用这种方法（例如，美式期权定价问题）。

Chebyshev 谱方法，是一种特殊的前沿固定方法。本文结合区域分解法将一般地 Chebyshev 谱方法进行了修正，经数值实验证明，利用经过修正了的谱方法求解自由边界问题时能够得到更加准确的数值解。对于初始条件有弱奇性的自由边界问题（美式期权定价问题），本文利用磨光函数给出了它的近似模型，并且证明了近似模型的收敛性。

对于这两种方法，我们都对氧气扩散问题做了数值实验，并且得出结论：用谱方法求解自由边界问题中的自由边界时，要比用区域固定法精确的多。

为了用我们的理论解决实际问题，我们研究了带终止期的不附红利的美式期权定价问题。这也是一种抛物型自由边界问题，它的初始条件含有弱奇性。我们将这一问题的自由边界模型改写为变分不等式模型，利用抛物型变分不等式的极值原理分析了美式期权定价问题中期权价格的性质，得到了期权价格对各参数－股价、敲定价、无风险利率、红利率、波动率、有效期以及时间的依赖关系。我们利用 Chebyshev 谱方法解决了这一初始条件带有弱奇性的问题，并且得到了最佳实施边界关于时间的函数图象，得出结论：美式看涨期权的最佳实施边界关于时间是递减的。

5.2 展望与设想

本文主要针对一维一相自由边界问题展开讨论的，我们试着将得到的结果推广到两相问题，或者多相问题中去。

文中，我们采用有限元法解变分不等式，实际问题中我们还可以采取其它方法解变分不等式，有可能会得到更加有效的结果。

本文中的区域剖分技巧只是针对一维问题的，对于二维或更高维的问题，区域剖分要麻烦地多。我们可以试着去寻找适合高维问题的区域剖分方法。

近年来，在金融领域衍生证券变的越来越重要，许多交易所正在进行着大量的期货期权交易，因此对期权模型的研究也就显得更加重要了，本文仅仅利用抛物型变分不等式的极值原理对期权的价格的性态进行了研究。由于期权持有人在整个期权有效期内需要时刻注意是继续持有还是立即实施，即需要知道继续持有区域和终止区域的交界线－自由边界。本文中仅通过数值解知道了自由边界关于时间是递减的，我们在今后的工作中其实还可以利用变分不等式的其它理论，对期权的最佳实施边界的性质（比如凹凸性，光滑性，以及渐进性等）进行研究。

参考文献

[1] Crank J..Free and Moving Boundary problems. New York:Clarendon Press, 1984

[2] Kmanenomostskaja S.L.. On the Stefan problem. Mat.Sb.,1961;Vol.53(95): 498~514

[3] Duvaut G.and Ockendon J.L.. Inequalities in Mechanics and Physics. Berlin-Heidelberg-New York:Springer,1976

[4] Berger A.E.,Climent M. and Rogers J.C.W.. Numerical solution of a diffusion consumption problem with a free boundary. SIAM J.Numer.Anal., 1975; Vol.12,No.4:646~672

[5] Lazaridis A.. A numerical solution of the multidimensional solidification(or melting)problem. Int.J.Heat Mass Transfer, 1970;Vol.13:1459~1477

[6] Douglas J. and Gallie T.M.. On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition. Duke Math.J., 1955;Vol.22:557~570

[7] Meyer G.H.. An alternating direction method for multidimensional parabolic free surface problems. Int.J.Num.Meth.Eng.,1977;Vol.11:741~752

[8] Landau H.G.. Heat conduction in a melting solid. Quart.Appl.Math.. 1950; Vol.8:81~94

[9] Crowley A.B.. On the weak solution of moving boundary problems. J.Inst. Maths Apllics, 1979;Vol.24:43~57

[10] Avner Friedman. Variational Principles And Free Boundary Problems. New York:wiley,1982:72~118

[11] D.R.Adams,S.Lenhart,J.Yong. Optimal control of the obstacle for an elliptic variational inequality. Appl.Math.Optim,1998;Vol.38:121~141

[12] C.Baiocchi , A.Capelo. Variational and Quadivariational Inequalities. New York:Wiley,1984

[13] M.Bergounioux,H.Zidani. Pontryagin maximum principle for optimal control of variational inequalities. SIAM J.Control Optim, 1999;Vol.37: 1273~1290

[14] A.Friedman. Varialtional Principles and Free Boundary problems. New York:Wiley,1982

[15] V.Barbu. Necessary conditions for distributed control problems governed by Parabolic Variational inequalities. SIAM J.Control Optim,1981;Vol. 19:64~86

[16] D.Kinderlehrer,G.Stampacchia.An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications.New York:Academic Press,1980

[17] V.Barbu. Optimal Control of Variational Inequalities. London:Pitman,1984

[18] A.Friedman . Optimal control for Parabolic Variational inequalities. SIAM J.Control Optim,1987;Vol.25:482～497

[19] V.Barbu. Analysis and Control of Nolinear Infinite Dimensional Systems. New York:Academic Press,1993

[20] L.C.Evans.Partial Differential Equations.Am.Math.Soc..Providence,1998

[21] David R.Adams. Suzanne Lenhart.Optimal Control of the Obstacle for a Parabolic Varational Inequality. Journal of Mathematical Analysis and Application,2002;Vol.289:602~614

[22] 戴嘉尊，邱建贤. 微分方程数值解法. 第一版. 东南大学出版社, 2002: 214~219

[23] I.Babuska,T.Janik.The h-p version of the finite element method for parabolic equations.Numerical Method for Partial Differential equations, 1989;vol.5:363~369

[24] 向新民. 谱方法的数值分析. 第一版. 科学出版社，2000：48~83

[25] Canuto C.,Hussaini M.Y.,Quarteroni A.and Zang T.A..Spectral Methods in Fluid Dynamics.Berlin,Heidlberg:Springer-Verlag,1988

[26] Crank J.and Gupta R.S..A Moving boundary problems arising from the diffusion of oxygen in absorbing tissue.J.Inst.Maths Applics, 1972; vol.10: 19~33

[27] Andrei Greenberg.Chebyshev Spectral Method for Singular Moving Problems with Application to Finance:[phd],California Institute of Technology Pasadena,California:2003

[28] 陈恕行. 现代偏微分方程导论. 第二版. 科学出版社，2005：4~7

[29] Friedman A..Partial Differential Equations of Parabolic Type.New Jersey:Prentice Hall,1964:25~78

[30] Hansen E. and Hougaard P..On a moving boundary problem from biomechanics.J.Inst. Maths Applics,1974;Vol.13:385~398

[31] 张陶伟. 期权、期货和衍生证券. 第一版. 华夏出版社，1997：5~70

[32] Black,F. & Scholes.The pricing of options and corporate liabilities. J.polit. Econ.,1981:637~654

[33] Kim I.J..The analytic valuation of American options.Review of Financial Studies,1990;Vol.3:547~572

[34] McDonald R.L.,Schroder M.D..A partity result for American options.Journal of Computational Finance,1998;Vol.1:5~13

[35] 姜礼尚. 美式期权定价的数学模型和方法. 第一版. 高等教育出版社，

2003：116~160

[36] 彭丽华，王建华. 美式期权定价的数值方法及敏感性分析. 决策参考，2006:211

[37] Achdou Y.. An inverse problem for a parabolic variational inequality arising in volatility calibration with American option. SIAM J. Control Optim,Vol.43: 1583~1615

[38] Jiang L..Analysis of pricing American options on the maximum(minimum) of Two risk assets.Interface&Free Boundary,2002;Vol.4:27~46

[39] 林成森. 数值计算方法. 第一版. 科学教育出版社，2001：247～252

致 谢

本文是在导师王子亭教授的悉心指导下完成的，从论文的选题、研究思路的确定到重难点问题上的探索都倾注了他大量的心血。在三年的学习过程中，导师给予了我多方面的关心和指教，他那渊博的学识、严谨的治学态度、敏捷的思维以及生活中的待人接物都给我留下了深刻的印象，使我受益匪浅。在论文完成之际本人向导师王子亭教授致以深深的敬意和衷心的感谢！

感谢在论文中引用到其学术著作和研究成果的众多学术前辈们。感谢所有为我的论文提供帮助和给予支持的老师、同学、朋友们！

另外，也在此向多年来支持自己完成学业的家人表示深深的感谢！

个人简历、在学期间的研究成果

于静，女，汉族，中共党员，1981 年 11 月出生，祖籍山东省蓬莱市，中国石油大学（华东）计算数学专业 2004 级硕士研究生。

2004 年 7 月毕业于中国石油大学（华东），获信息与计算科学专业学士学位，同年九月保送至中国石油大学（华东）数学与计算科学学院计算数学专业，师从王子亭教授。在攻读硕士学位期间，在导师的悉心指导和院系领导、老师的关怀下，取得了较大的进步。曾获“科技创新突出贡献奖”，获第三届全国研究生数学建模竞赛三等奖。

截至目前已公开发表学术论文 1 篇:《一类变系数抛物型自由边界问题》发表于《甘肃联合大学学报（自然科学版）》杂志 2007 年第 2 期。