结构动力学

*本章讨论结构在动力荷载作用下的反应。

**学习本章注重动力学的特征------惯性力。

*结构动力计算的目的在于确定结构在动力荷载作用下的位移、内力等量值随时间变化的规律，从而找出其最大值作为设计的依据。

*动力学研究的问题：动态作用下结构或构件的强度、刚度及稳定性分析。

一、本章重点

1．振动方程的建立

2．振动频率和振型的计算

3．振型分解法求解多自由度体系

4．最大动位移及最大动应力

二、基础知识

1．高等数学

2．线性代数

3．结构力学

三、动力荷载的特征

1．大小和方向是时间 t 的函数

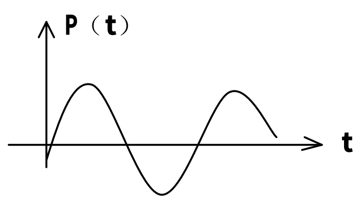
例如：地震作用，波浪对船体的作用，风荷载，机械振动等

2．具有加速度，因而产生惯性力

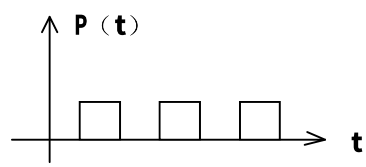
四、动力荷载的分类

1．周期性动力荷载

例如：①机械运转产生的动力荷载，②打桩时的锤击荷载。



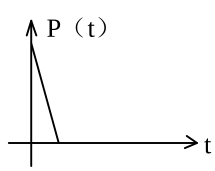
（机械运转荷载）



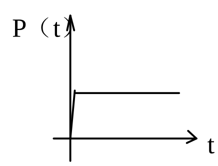
（打桩荷载）

2．冲击荷载

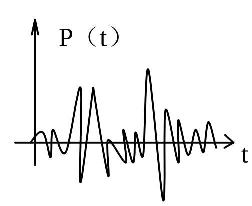
例如：①爆炸力产生的动力荷载，②车轮对轨道连接处的冲击。



（爆炸力动力荷载）



（吊车起吊钢索的受力）



（随机动力荷载）

3． 突加常量荷载

例如：吊车起吊重物时钢索的受力。

4．随机动力荷载

前 3 类荷在是时间 t 的确定函数，称为确定性动力荷载；而地震作用，波浪对船体的作

用，风荷载等其作用大小只能用统计的方法获得。

五、动力荷载的计算方法

1．原理：达朗贝尔原理，动静法建立方程

2．计算工具：微分方程，线性代数，结构力学

六、体系振动的自由度---------动力自由度

结构具有质量，有质量在运动时就有惯性力。在进行动力计算时，一般把结构的质量简化为若干质点的质量，整个结构的惯性力就成为各质点的惯性力问题。

1．质点简化的一般要求

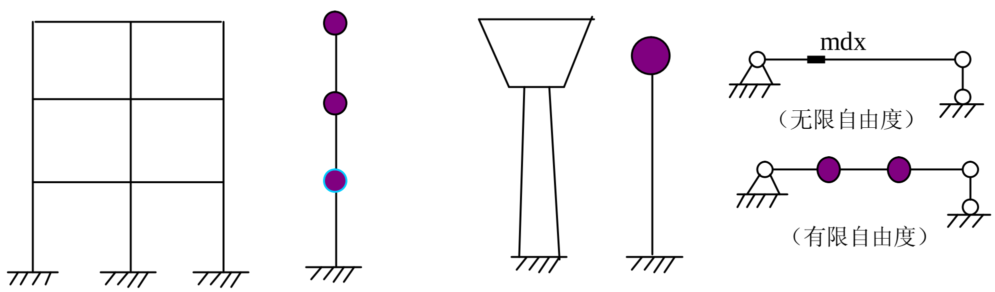
①简单，②能反映主要的振动特性

例如：楼房；质量集中在各层楼板平面内

水塔：质量集中在水箱部分

梁：无限自由度

集中质量



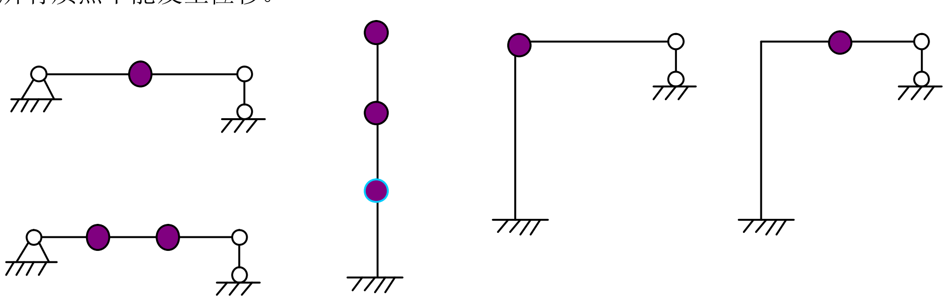
（楼房质量集中）　　（水塔质量集中）　　（梁的质量集中）

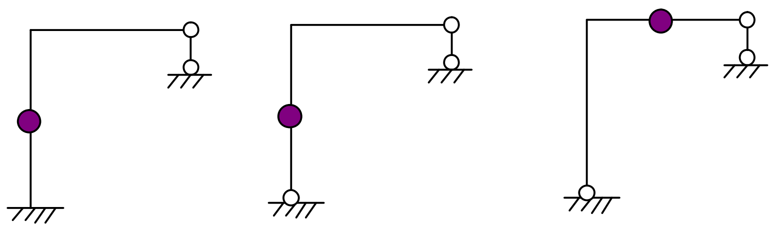
2． 位移 y（t）

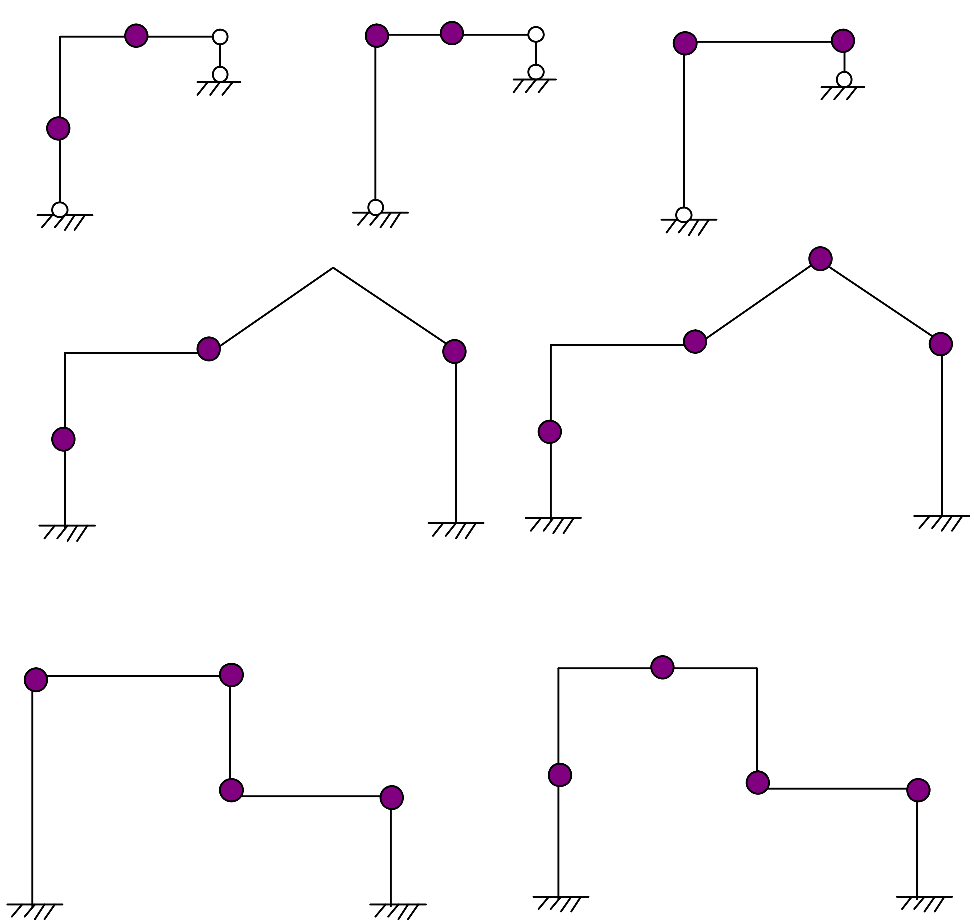
即指质点的位移 y（t），其加速度为 $\ddot{y}(t)$

3．动力自由度的确定

即质点位移数量的确定。方法：附加链杆法，即附加链杆的最少的链杆数（独立个数）使所有质点不能发生位移。







从以上确定动力自由度的例题中可以看出：

①质点的个数与自由度的数目不一定相同

②与结构是静定的还是超静定的没有确定的关系。

4．从数学方面考虑振动位移

以 y（x，t）$=\sum_{k=1}^{n} a_k j_k(x,t)$ 代表结构中位置 x 处在时刻 t 时的位移反应。

式中，$j_k(x,t)$ 为满足边界条件的一组正交函数，

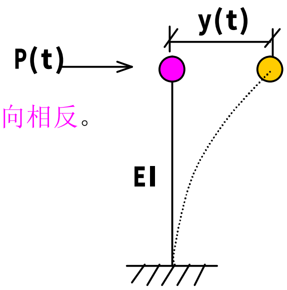
a_k 为待定系数，称为广义坐标。

振型分解法的思想即源出于此。

一、 单自由度体系的振动方程

本节概述单自由度体系振动方程的建立过程。基本原理是达朗贝尔原理，按动静法建立振动方程。

考虑图示单质点的振动过程。杆件的刚度为 **EI**，质点的质量为 m**,**时刻 **t** 质点的位移 **y**（**t**）。



1.阻尼力

$F_D = -C\dot{y}(t)$ ，称为粘滞阻尼力，阻尼力与运动方向相反。

一切引起振动衰减的因素均称为阻尼，包括

①材料的内摩擦引起的机械能转化为热能消失

②周围介质对结构的阻尼（如，空气的紫力）

③节点，构件与支座连接之间的摩擦阻力

④通过基础散失的能量

2. 弹性恢复力

$F_E = -K\,y(t)$ ，**K** 为侧移刚度系数，弹性恢复力与运动方向相反。

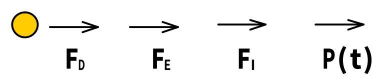
3. 惯性力

$F_I = -m\ddot{y}(t)$ ， $\ddot{y}(t)$ 为质点运动加速度，惯性力与运动方向相反。

4. 动力荷载

P(t)，直接作用在质点上，它与质点运动方向相同。

5. 振动方程的建立



根据质点的受力平衡，写出平衡方程如下：

$$F_D + F_E + F_I + P(t) = 0$$ 即，

$$m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + K\,y(t) = P(t) \qquad \text{------------------}（1）$$

此方程为二阶常系数非齐次微分方程。

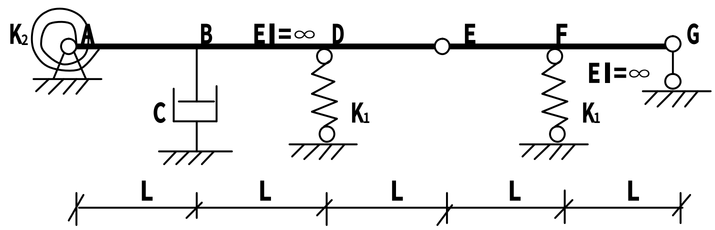
二、建立单自由度体系的振动方程举例

本节主要学习微分方程的建立方法、各系数的求法。

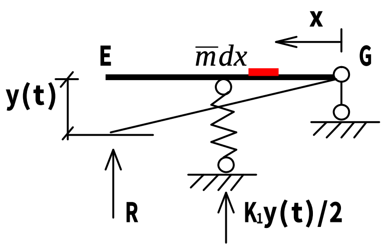
例题 **1**

建立下列结构振动体系的振动方程。横梁具有无限刚性，**EI=∞**。

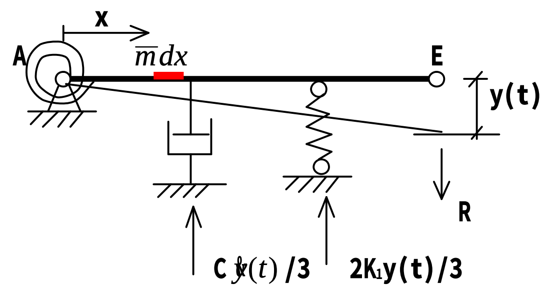
已知，$K_1 = \dfrac{12EI}{L^3}$ ，$K_2 = \dfrac{4EI}{L}$ ，阻尼系数为 **C** ，横梁具有分布质量 $\overline{m} = \dfrac{m}{L}$ 。



解：1）动力自由度为 1，设 E 处的竖向位移是 y(t)



图（a）



图（b）

2)考虑 EFG 部分的受力，取研究对象如图（a）所示；

由$\sum M_G=0$　得：

$$R\cdot 2L + K_1\frac{y(t)}{2}\cdot L + \int_0^{2L}\overline{m}dx\left(\frac{xy(t)}{2L}\right)''\cdot x = 0 \qquad \text{----------------（a）}$$

3）考虑 ABDE 部分的受力，取研究对象如图（b）所示

由$\sum M_A=0$　得：

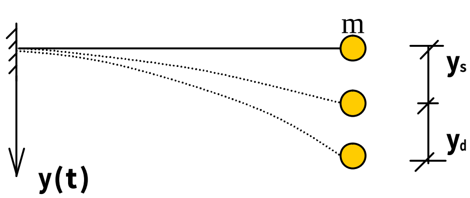
$$R\cdot 3L - K_1\frac{2y(t)}{L}\cdot 2L - C\frac{1}{3}\dot{y}(t)\cdot L - K_2\frac{y(t)}{3L} - \int_0^{3L}\overline{m}dx\left(\frac{y(t)}{3L}\cdot x\right)''\cdot x = 0 \qquad \text{--------（b）}$$

由（a），（b）两式消去 R 后整理得：

$$15L^4\overline{m}\ddot{y}(t) + CL^3\dot{y}(t) + 79EI\,y(t) = 0$$

注意：振动方程中的 $y(t)$ 仅仅是动力作用下产生的，不包括静位移。可人为 $y(t)$ 是从静平衡位置算起的。以后，我们也只计算动位移。

如下图所示的振动



则，质点 m 上，

1）重力 W

2）弹性力 – K y(t)= - k（y_s+y_d）

3）惯性力 - $m\ddot{y}(t) = -m(\ddot{y}_s + \ddot{y}_d)$

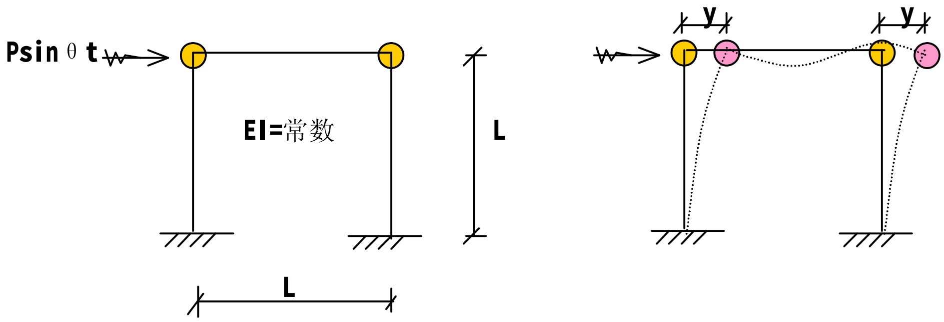
平衡方程：$m(\ddot{y}_s + \ddot{y}_d) + k(y_s+y_d) = W$

注意到：y_s 为静位移，则 $W= ky_s$ 及 $\ddot{y}_s = 0$　，上式为 $m\ddot{y}_d + ky_d = 0$

这表明：以静平衡位置作为计算位移的起点，所得的方程与重力无关（对有阻尼振动及强迫振动也适用。

例题 **2**

试建立图示结构的振动方程，质点的质量都是 m

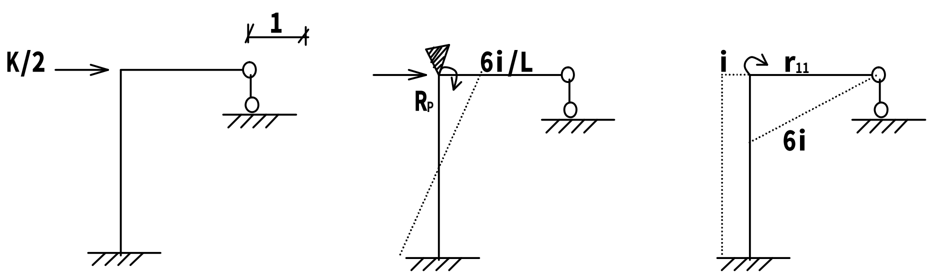


解：**1**）动力自由度为 **1**，即质点（两个）的水平位移（忽略转动惯量及杆件的轴向变形）

2）惯性力：$-2m\ddot{y}(t)$ ；弹性力：$-Ky(t)$

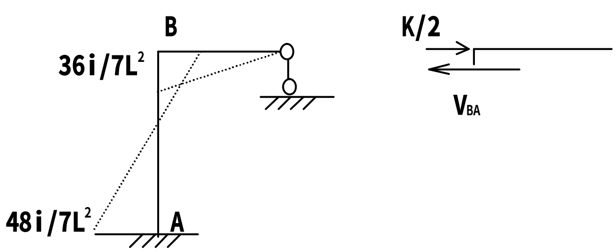
3）侧移刚度 **K** 的求法

用位移法计算质点有侧移为 **1** 时的力 **K**，取半结构如图示，用剪力静定杆办法求解



如图，$R_P=-\dfrac{6i}{L}$ ，$r_{11}=7i$　　位移法方程：$r_{11}\theta+R_P=0$ ，解得：$\theta=\dfrac{6}{7L}$

作出弯矩图如下：



取横梁为研究对象，$\Sigma X=0$，得：$K=\dfrac{24EI}{L^3}$

4）振动方程

$-2m\ddot{y}(t)-Ky(t)+P\sin\theta t=0$　即，

$$2m\ddot{y}(t)+\frac{24EI}{L^3}y(t)=P\sin\theta t$$

一、　无阻尼的自由振动

振动方程　$m\ddot{y}(t)+\mathrm{K}\,y(t)=0$，　写作：

$$\ddot{y}(t)+\frac{K}{m}y(t)=0\quad，记\ \omega^2=\frac{K}{m}\quad 又可写作：$$

$$\ddot{y}(t)+\omega^2 y(t)=0 \qquad\text{--（1）}$$

方程的解的形式为：

$$y(t)=\mathrm{A}\cos\omega t+\mathrm{B}\sin\omega t \qquad\text{--（2）}$$

初始条件为：$y(t)\big|_{t=0}=y_0$　，$\dot{y}(t)\big|_{t=0}=v_0$　，代入方程的解（2）中，得：

$$y(t)=y_0\cos\omega t+\frac{v_0}{w}\sin\omega t \qquad\text{--（3）}$$

二、　有阻尼的自由振动

振动方程　$m\ddot{y}(t)+\mathrm{C}\,\dot{y}(t)+\mathrm{K}\,y(t)=0$，　写作：

$$\ddot{y}(t)+\frac{C}{m}\dot{y}(t)+\frac{K}{m}y(t)=0\quad，记\ \omega^2=\frac{K}{m}\quad，2n=\frac{C}{m}\quad，又可写作：$$

$$\ddot{y}(t)+2n\,\dot{y}(t)+\omega^2 y(t)=0 \qquad\text{--（4）}$$

利用常数变易法，令 $y(t)=e^{-nt}S(t)$ 代入方程（4）中 得：

$$\ddot{S}(t)+(\omega^2-n^2)\,S(t)=0 \qquad\text{--（5）}$$

1．当 n＞ω时（强阻尼）

方程（5）的解为：

$$S(t)=A_1\mathrm{sh}\sqrt{n^2-w^2}\,t+A_2\mathrm{ch}\sqrt{n^2-w^2}\,t$$

从而，方程（4）的解为：

$$y(t)=e^{-nt}S(t)=e^{-nt}\left(A_1\mathrm{sh}\sqrt{n^2-w^2}\,t+A_2\mathrm{ch}\sqrt{n^2-w^2}\,t\right) \qquad\text{---------------------（6）}$$

2．n＝ ω时（称为临界阻尼）

由（5）式得：　$\ddot{S}(t)=0$

$$S(t)=B_1+B_2t$$

$$y(t)=e^{-nt}S(t)=e^{-nt}(B_1+B_2t) \qquad\text{------------------------------------（7）}$$

此时，令 $n_{cr}=\omega=\dfrac{C_{cr}}{2m}$　，$C_{cr}=2m\omega$（此式为确定临界阻尼的公式）

当为一般情况时，$n = \dfrac{C}{2m} = \dfrac{C}{C_{cr}} \cdot \dfrac{C_{cr}}{2m} = \xi\omega$

式中，$\xi = \dfrac{C}{C_{cr}}$ 称为阻尼比。

对钢筋混凝土结构 $\xi < 5\%$ ，一般取 3%

对钢结构 $\xi = 1\% — 2\%$

3）当 n < ω 时（弱阻尼）

此时，记 $w_d^2 = w^2 - n^2$ ，则（5）式可写成：

$$\ddot{S}(t) + w_d^2 S(t) = 0$$

则，其解可仿（1），（2）式的形式，得：

$$S(t) = A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t$$

从而，$y(t) = e^{-nt}$（$A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t$）

$$y(t) = e^{-xwt}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t) \quad \text{-----------------------------------}（8）$$

初始条件：$y(t)\big|_{t=0} = y_0$ ，$\dot{y}(t)\big|_{t=0} = v_0$ ，代入方程的解（8）中，写成简洁的形式：

$$y(t) = A e^{-xwt}\sin(\omega_d t + \phi)$$

三、 无阻尼的强迫振动

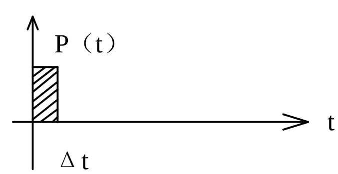
振动方程：

$$m\ddot{y}(t) + K y(t) = P(t)$$

1．瞬时冲击荷载作用时的强迫振动

特点：①作用时间与系统的自振周期相比很小

②Δt 时间内 P（t）可视为常数



设干扰力 P（t）作用于系统的时间为Δt

由动量定理：

$m(v - v_0) = P(t - t_0)$

若 $t_0=0$ 时 $v_0=0$ 则，$v = \dfrac{pt}{m}$ 于是，在（0，t）时间内系统产生的位移反应 $y(t)$ 为：

$$y(t) = \int_0^t \frac{pt}{m}dt = \frac{pt^2}{2m}$$

由假设，干扰力作用的时间为Δt ，则Δt 时间内系统产生的速度反应和位移反应分别为：

$$v(t) = \frac{p\Delta t}{m} \quad , \quad y(t) = \frac{p(\Delta t)^2}{2m}$$

$y(t)$ 和 $v(t)$ 比较是高阶无穷小量，故可认为：

Δt 时间内，干扰力的作用近似的看作是初速度为 $v(t)=\dfrac{p\Delta t}{m}$，初位移为 $y(t)=\dfrac{p(\Delta t)^2}{2m}=0$ 的自由振动。

由（3）式可知：

$$y(t)=y_0\cos\omega t+\frac{v_0}{w}\sin\omega t=\frac{p\Delta t}{mw}\sin\omega t \quad \text{---------------------（9）}$$

若时间 t 不是从 0 开始，而是从 τ 开始的，则（9）式写为：

$$y(t)=\frac{p\Delta t}{mw}\sin\omega(t-\tau) \quad \text{---------------------------------------（10）}$$

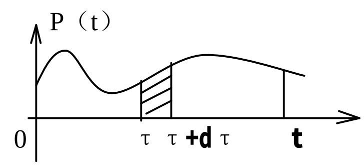
2．一般性动力荷载 P（t）作用于系统时

考虑 P（t）在（0，t）时间内作用于系统，

认为是由无数个瞬时冲击荷载的叠加，如图。

考虑由时刻 τ 开始，在 dτ 时间内的位移反应，

由（10）式可得：



$$dy(t)=\frac{p(t)dt}{mw}\sin\omega(t-\tau)$$

则，在（0，t）时间内作用于系统，系统所产生的位移反应为：

$$y(t)=\int_0^t\frac{p(t)dt}{mw}\sin\omega(t-\tau) \quad \text{--（11）}$$

此式称为杜哈美积分（卷积、褶积）

如果叠加自由振动部分，可得位移反应：

$$y(t)=y_0\cos\omega t+\frac{v_0}{w}\sin\omega t+\int_0^t\frac{p(t)dt}{mw}\sin\omega(t-\tau) \quad \text{---------------------------（12）}$$

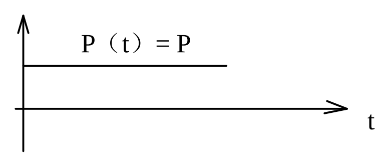
但，通常情况下，自由振动部分由于阻尼的存在，一段时间后会消失而仅剩下特解部分。

3．突加长期常量荷载

以 P（t）＝P 代入（11）式可得：

$$y(t)=\frac{p}{mw^2}(1-\cos\omega t)=\frac{p}{K}(1-\cos\omega t)$$

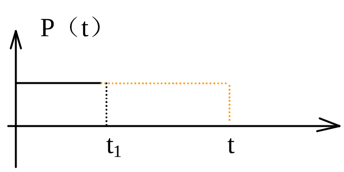
$$=p\cdot d(1-\cos\omega t)=y_s(1-\cos\omega t) \quad \text{--------（13）}$$



式中，$y_s=p\cdot d$ 为静位移。显然，$y_{\max}=2y_s$

定义：$\mu=\left|\dfrac{y_{\max}}{y_s}\right|$ 为动力系数。故，突加长期常量荷载的动力系数为 2

4．突加短期常量荷载



1^0 当 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 时，由（**13**）式得：$y(t) = y_s$（1-cosωt） ------------------（14）

2^0 当 $t_1 \leqslant t$ 时，可看作是一个叠加的过程。由（**13**）式得：

$y(t) = y_s$（1-cosωt）- y_s[1-cosω（t-t_1）]

$$= 2y_s \sin\frac{wt_1}{2}\sin w(t-\frac{t_1}{2})$$ --------------------（15）

讨论：

①当 $y_{\max}$ 发生时，$\sin\frac{wt_1}{2}$=1 ，得：$t_1=\frac{T}{2}$ （T 为系统的自振周期）。故，当 $t_1 \geqslant \frac{T}{2}$ 时，最大位移（此时，$t_1=\frac{T}{2}$）$y_{\max}=2y_s$

②当 $t_1<\frac{T}{2}$ 时，最大位移 $y_{\max}=2y_s\ \sin\frac{wt_1}{2}$

5．简谐动力荷载

以 P（t）= Psinθt 代入（11）得：

$$y(t) = \frac{1}{mw}\int_0^t P\sin qt \cdot \cos w(t-t)dt$$

$$= \frac{P}{mw^2} \cdot \frac{1}{1-(\frac{q}{w})^2}(\sin\theta t - \frac{q}{w}\sin\omega t)$$

$$= m\ y_s(t)\ (\sin\theta t - \frac{q}{w}\sin\omega t)$$ -----------------------------（16）

式中，$y_s(t) = \frac{P}{mw^2}\cdot$ 为静位移；$m = \frac{1}{1-(\frac{q}{w})^2}$ 为动力系数

（16）式由两部分组成：

① $m\ y_s(t)\ \frac{q}{w}\ \sin\omega t$---------由 P（t）引起，由振动系统产生，称为生态振动。

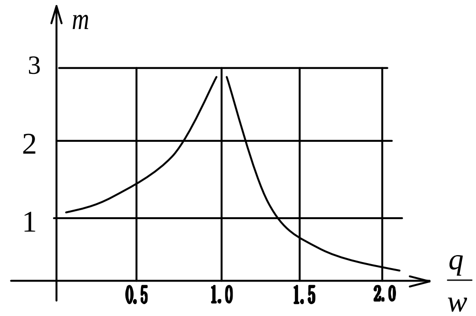
② $m\ y_s(t)\ \sin\theta t$ ----------------------------------由 P（t）自身产生，称为稳态振动。

生态振动由于阻尼的影响，较长时间后振动会消失，故，（16）式的稳态解为：

$$y(t) = m\ y_s(t)\ \sin\theta t$$ -------------------------------（17）

显然，最大位移反应仍然为动力系数与静位移的乘积。

如果把 $\frac{q}{w}$ 当作横坐标，m 当作竖坐标，可画出动力系数谱曲线如下：



$\frac{q}{w}$ < 1 ，称为共振前区，为减小动力系数，可采取增大ω的方法--------刚性方案

$\frac{q}{w}$ > 1 ，称为共振后区，为减小动力系数，可采取减小ω的方法--------柔性方案

工程中，把 0.75 < $\frac{q}{w}$ < 1.25 的区域称为共振区，设计时应避开。

四、 有阻尼的强迫振动（弱阻尼）

振动方程：$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{p(t)}{m}$

与前节的讨论类似，也考虑如下的问题。

1．瞬时冲击荷载作用下的位移反应

在有阻尼的自由振动中我们得到其位移反应，即（8）式

$$y(t) = e^{-xwt}\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right)$$

对作用时间为Δt 的瞬时冲击荷载作用下的位移反应可认为是初速度为 $\frac{p\Delta t}{m}$，初位移为 0 的自由振动，以此初始条件代入（8）式（上式），得：

$$y(t) = \frac{p(t)\Delta t}{mw_d} e^{-xwt} \sin\omega_d t$$

若 t 从τ开始，则上式写成

$$y(t) = \frac{p(t)\Delta t}{mw_d} e^{-xw(t-t)} \sin\omega_d (t-\tau) \text{ ------------------------ (18)}$$

2．任意动力荷载 p（t）作用时的位移反应

考虑从τ时刻开始，作用时间为 **d**τ的瞬时冲击荷载产生的位移反应，由（18）式，

$$d\,y(t) = \frac{p(t)dt}{mw_d} e^{-xw(t-t)} \sin\omega_d (t-\tau)$$

任意动力荷载 p（t）在（0，t）时间上作用时的位移反应可看作是上式的叠加

$$y(t) = \frac{1}{mw_d}\int_0^t e^{-xw(t-t)} p(t)\cdot\sin w_d (t-t)dt \text{ --------------- (19)}$$

3．有初速度、初位移的强迫振动

自由振动的位移反应叠加（19）式即可

$y(t)\ = \ e^{-xwt}$ （Acosω_dt +Bsinω_dt） $+\dfrac{1}{mw_d}\int_0^t e^{-xw(t-t)}p(t)\cdot\sin w_d(t-t)dt$

4．特例

1^0 突加长期常量荷载

以 p（t）＝P 代入（19）式得：

$$y(t)=m\ y_s(t)$$

式中，$y_s(t)=\dfrac{P}{mw^2}\cdot$， m =1 - e^{-xwt} （cosω_dt $+\dfrac{xw}{w_d}$ sinω_dt）

当 t=$\dfrac{p}{w_d}$ 时， $m_{\max}=1+e^{-\frac{xwp}{w_d}}\approx 1+e^{-xp}$

2^0 简谐动力荷载 Psinθt

以 p（t）＝Psinθt 代入（19）式，或直接解下面的方程

$$\ddot{y}(t)+2\xi\omega\dot{y}(t)+\omega^2 y(t)=\frac{P}{m}\sin\theta t$$

**齐次解： $y(t)=\ e^{-xwt}$ （Acosω_dt +Bsinω_dt）

**特解（稳态解）：$y^*(t)=B_1\cos\theta t\ +\ B_2\sin\theta t$

把特解代入（19）式，得系数 B_1 及 B_2

$$B_1=-\frac{P}{m}\frac{2xwq}{(q^2-w^2)^2+4x^2w^2q^2}$$

$$B_2=\frac{P}{m}\frac{w^2-q^2}{(q^2-w^2)+4x^2w^2q^2}$$

现讨论其稳态振动*

令 B_1= - **Csin**ε ，B_2= Ccosε ，则：

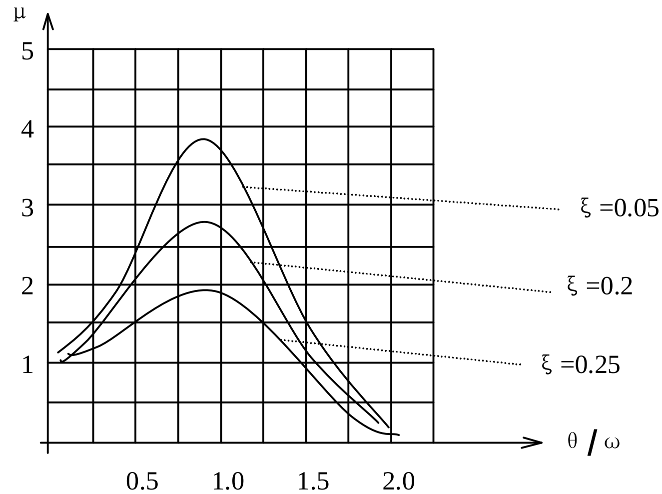
$$y(t)=C\sin(\theta t-\varepsilon)$$

式中，C 为振幅， ε 为相位角。 ε **=tg**$^{-1}\dfrac{2xwq}{w^2-q^2}$ ，C **=**$m\ y_s(t)$ 即，

$$y(t)=\ m\ y_s(t)\sin(\theta t-\varepsilon) \qquad \text{---------}（*）$$

式中，$y_s(t)=\dfrac{P}{mw^2}\cdot$ ， $m=\dfrac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{q}{w}\right)^2\right]^2+4x^2\left(\dfrac{q}{w}\right)^2}}$ = f（$\dfrac{q}{w}$， ξ）

给出不同的阻尼比ξ，画出位移反应谱示意图如下：



由示意图可见：

①μ 随阻尼比 ξ 的增大而下降较快，特别是在 $\frac{q}{w}=1$ 附近

②共振时 $\frac{q}{w}=1$，此时 μ$=\frac{1}{2x}$（不是最大值），$\mu_{max}=\frac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}$，在 $\frac{q}{w}=1$ 的左侧。

③当 θ=ω 时， ε$=\frac{p}{2}$ （*）式可写成共振时的位移反应

$$y(t)=-m\ y_s(t)\cos\theta t$$

此时，

惯性力：$F_I=-m\ddot{y}(t)=-m\theta^2 m\ y_s(t)\cos\theta t$

$$=-m w^2 m\ y_s(t)\cos\theta t \quad （以\ \omega\ 换\ \theta）$$

$$=-K_{11} m\ y_s(t)\cos\theta t$$

弹性力：$F_E=-K_{11}\ y(t)=K_{11} m\ y_s(t)\cos\theta t$

阻尼力：$F_D=-C\dot{y}(t)=-C\theta\ m\ y_s(t)\sin\theta t=-C\omega\ m\ y_s(t)\sin\theta t$

$$=-2\xi\omega\omega m m\ y_s(t)\sin\theta t$$

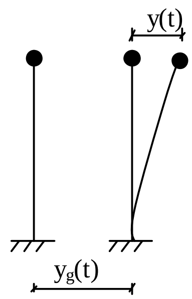
$$=-2\xi\omega\omega m\frac{1}{2x}\ y_s(t)\sin\theta t$$

$$=-m\omega^2 y_s(t)\sin\theta t=-m\omega^2\frac{P}{mw^2}\sin\theta t$$

$$=-P\sin\theta t$$

可见，共振时惯性力与弹性力平衡；阻尼力与外力（干扰力）平衡。若无阻尼，则无任何力与外力（干扰力）平衡，以致出现 y(t)趋于∞，产生共振。

3^0 地震地面运动



如图，质点的绝对位移为 $y_g(t)+y(t)$，则

惯性力 $F_I = -m(\ddot{y}_g(t)+\ddot{y}(t))$

弹性力 $F_E = -K_{11}\,y(t)$

阻尼力 $F_D = -C\,\dot{y}(t)$

振动方程：$m(\ddot{y}_g(t)+\ddot{y}(t)) + C\dot{y}(t) + K_{11}\,y(t) = 0$

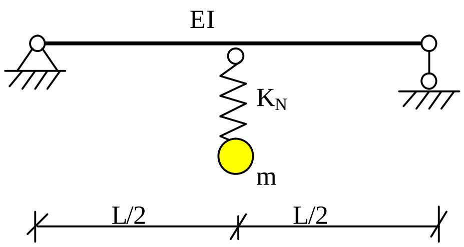
整理：$m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + K_{11}\,y(t) = -m\ddot{y}_g(t)$

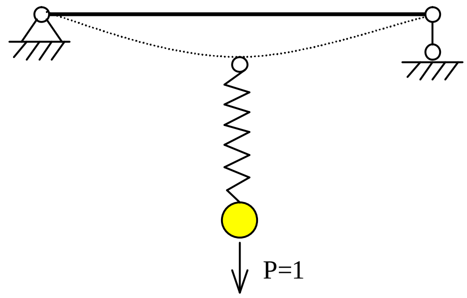
或写成：$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = -\ddot{y}_g(t)$

此式的解的形式为（19）式。

例题 1

图示体系，不计梁重，弹簧的刚度 $K_N = \dfrac{12EI}{L^3}$，梁的抗弯刚度为 EI，求自振频率。





解：这是无阻尼的自由振动。

振动方程：$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$ ，其中 $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = \sqrt{\dfrac{1}{md}}$ 就是所求的频率。

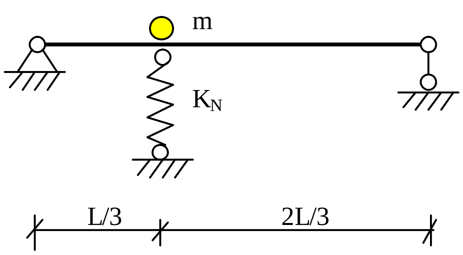
因而，只要求出质点振动的刚度 K 或柔度 δ 即可。本题求 δ 是方便的。

在质点处作用单位力 P=1（惯性力为 1），则质点产生的竖向位移 $\delta = \dfrac{1}{K_N} + \dfrac{L^3}{48EI}$

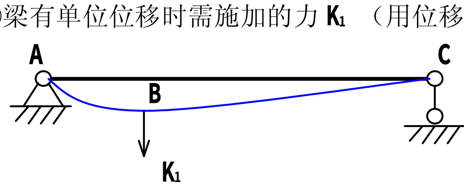
即，$\delta = \dfrac{5L^3}{48EI}$ ，从而，$\omega = \sqrt{\dfrac{1}{md}} = \sqrt{\dfrac{48EI}{5mL^3}}$

例题 2

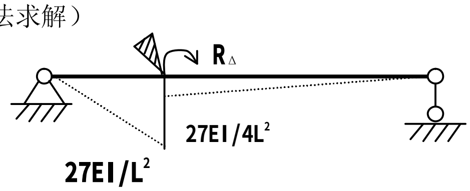
图示结构，梁的刚度为 EI，弹簧的刚度 $K_N = \dfrac{6EI}{L^3}$ ，不计梁的自重，求自振频率。



解：本题与例题 1 不同的是，质点作用单位力时不易求出位移 δ，因为不易确定梁和弹簧各自的受力。故，本题采用刚度法求解。
在质点施加力 K，使质点有单位位移。求出 K 即可。
①梁有单位位移时需施加的力 K_1 （用位移法求解）

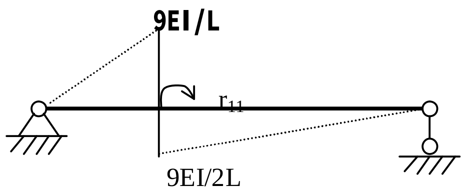


变形图

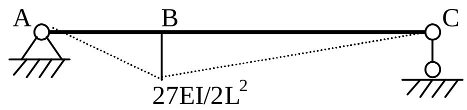


M_Δ图（竖向位移为 **1**）

计算出 $R_\Delta = -\dfrac{27EI}{L^2} + \dfrac{27EI}{4L^2} = -\dfrac{81EI}{4L^2}$



$\overline{m}$ 图（转角为 1 时）

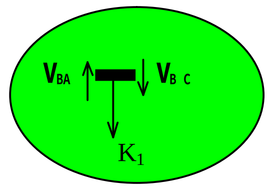


M 图

计算得 $r_{11}=\dfrac{9EI}{L}+\dfrac{9EI}{2L}=\dfrac{27EI}{2L}$

位移法方程 $r_{11}\theta+R_{\Delta}=0$ ，解得：$\theta=\dfrac{3}{2L}$。作出 M 图如图。

取图示研究对象，算得 $K_1=\dfrac{243EI}{4L^3}$



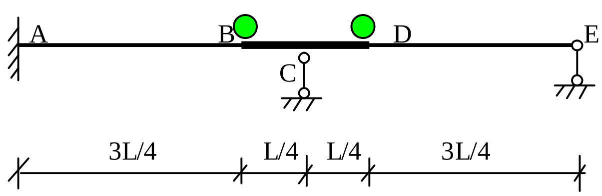
②单位位移时弹簧的反力 $K_2=K_N=\dfrac{6EI}{L^3}$

③　$K=K_1+K_2=\dfrac{267EI}{4L^3}$

圆频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{K}{m}}=\sqrt{\dfrac{267EI}{4mL^3}}$

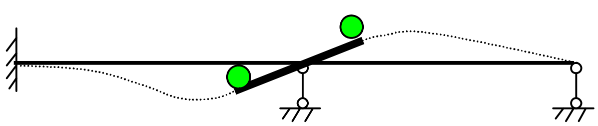
例题 3

图示结构，AB 和 DE 杆的刚度均为 EI，而 BD 杆的刚度为无限刚性。B 和 D 处各有集中质量 m ，试求结构的自振频率。



解：1）动力自由度为 1

画出振动变形图如下：



以刚性杆 BD 的转角 $q(t)$ 为变量建立振动方程。质点位移 $y(t)=\dfrac{Lq(t)}{4}$

2）求转角 $q(t)$ 时需在 C 处施加的力矩。

①AB 杆的杆端弯矩和杆端剪力

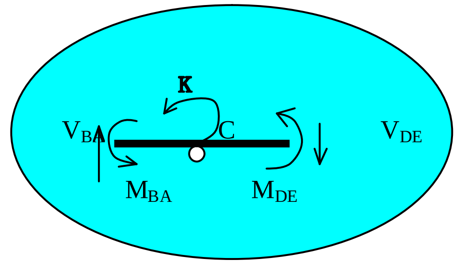
$M_{BA}=-4i\,q(t)-\dfrac{6i}{\frac{3L}{4}}\dfrac{Lq(t)}{4}=-\dfrac{16EI}{3L}q(t)-\dfrac{8EI}{3L}q(t)=-\dfrac{8EI}{L}q(t)$

$V_{BA}=\dfrac{160EI}{9L^2}q(t)$

②DE 杆的杆端弯矩和杆端剪力

$$M_{DE} = -3i\,q(t) - \frac{3i}{\frac{3L}{4}}\,\frac{Lq(t)}{4} = -\frac{16EI}{3L}q(t)$$

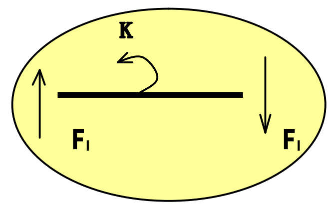
$$V_{DE} = \frac{64EI}{9L^3}q(t)$$



3）取 BD 为研究对象，如图

$$\sum M_C=0\ ，\ K + M_{BA} + M_{DE} - V_{BA}\frac{L}{4} - V_{DE}\frac{L}{4} = 0$$

解得：$K=\dfrac{704EI}{36L}q(t)$ ，这便是弹性恢复力。



4）振动方程：

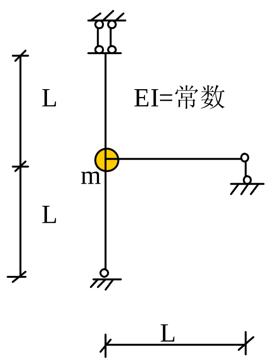
$$2m\frac{L\ddot{q}(t)}{4}\frac{L}{4} + \frac{704EI}{36L}q(t) = 0$$ ，整理得：

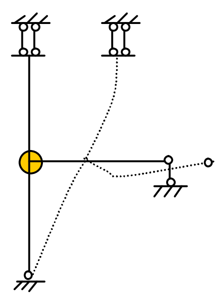
$$\ddot{q}(t) + \frac{1408EI}{9mL^3}q(t) = 0$$

5）由振动方程知，$\omega = \sqrt{\dfrac{1408EI}{9mL^3}} = \dfrac{8}{3L}\sqrt{\dfrac{22EI}{mL}}$

例题 4

如图，不计杆的自重，求自振频率。



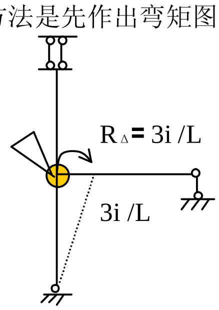


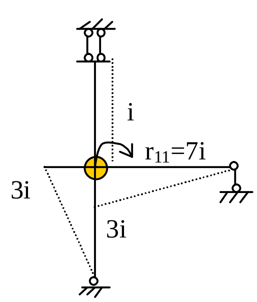
变形图

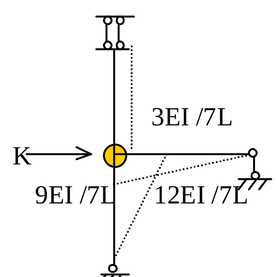
解：1）动力自由度为 1，质点的水平振动。

2）结构为超静定结构，求刚度宜用位移法，即求质点的侧移刚度。

3）方法是先作出弯矩图。

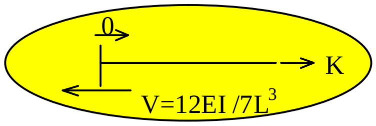






M_Δ图　　$\overline{M}$ 图　　M 图

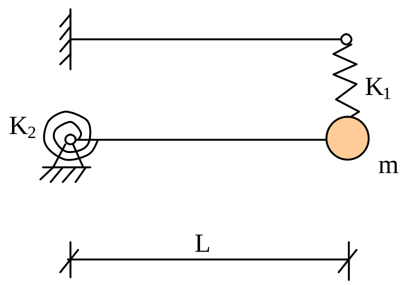
4）解位移法方程可得 $\theta=\dfrac{3}{7L}$，作出 M 图如图。取水平梁的水平受力分析

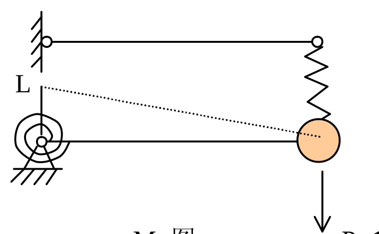


得：K=$\dfrac{12EI}{7L^3}$ ，从而：$\omega=\sqrt{\dfrac{12EI}{7mL^3}}$

例题 5

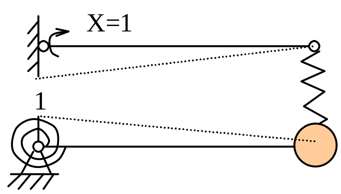
已知，$K_1=\dfrac{6EI}{L^3}$ ，$K_2=\dfrac{3EI}{L}$ ，EI=常数。求自振频率。



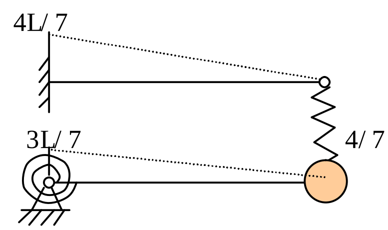


M_P 图

解：1）是超静定结构，本题用力法较简单，作 M_P 图如图示。



M_1 图



M 图

2）$\delta_{11}=\dfrac{2L}{3EI}+\dfrac{L^3}{6EI}\cdot\dfrac{1}{L}\cdot\dfrac{1}{L}+\dfrac{L}{3EI}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{7L}{6EI}$ ，

$\Delta_{1P}=\dfrac{L^2}{3EI}+\dfrac{L}{3EI}\cdot L\cdot 1=\dfrac{2L^2}{3EI}$

解力法方程得：X= $-\dfrac{4L}{7}$ ，画出 M 图如图示。

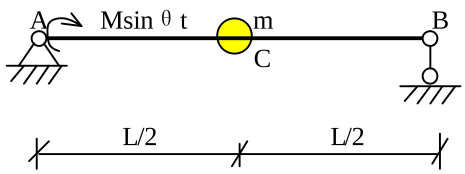
3）用 M 图与 M_P 两图图乘，（或 M 图自己与自己图乘）可得：

$\delta=\dfrac{2L^3}{7EI}$ ，从而

$\omega=\sqrt{\dfrac{1}{md}}=\sqrt{\dfrac{7EI}{2mL^3}}$

例题 6

图示简支梁跨中有质量 m，支座 A 受动力矩 Msinθt 作用，不计梁的质量。求质点的动位移和支座 A 处的动转角。



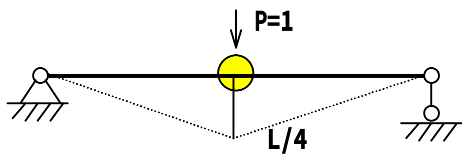
解：动荷载不作用在质点上，不能直接用公式，需建立振动方程。

建立方程的依据：质点的位移由动力矩 Msinθt 和惯性力 $-m\ddot{y}(t)$ 共同产生。

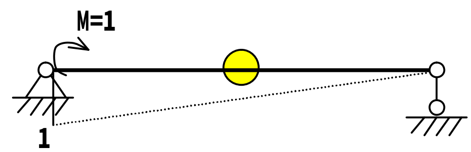
A 端的转角也由动力矩 Msinθt 和惯性力 $-m\ddot{y}(t)$ 共同产生。

为此，

①求出动力矩为 **1** 及惯性力为 **1** 时在质点及 **A** 端处产生的位移及转角。



M_1 图



M_2 图

$\delta_{11} = \dfrac{L^3}{48EI}$ ，$\delta_{12} = \delta_{21} = \dfrac{L^2}{16EI}$ ，$\delta_{22} = \dfrac{L}{3EI}$

②由叠加原理可得振动方程

$y(t) = \delta_{11}\left(-m\ddot{y}(t)\right) + \delta_{12}\,M\sin\theta t$ ------------------------（1）

$\theta_A(t) = \delta_{21}\left(-m\ddot{y}(t)\right) + \delta_{22}\,M\sin\theta t$ ------------------------（2）

③由（**1**）式得：

$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \dfrac{P^*}{m}\sin\theta t$ ，式中 $\omega^2 = \dfrac{48EI}{mL^3}$ ，$P^* = \dfrac{3M}{L}$

其稳态解：$y(t) = \dfrac{P^*}{m\omega^2}\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{\theta}{\omega}\right)^2}\sin\theta t = \mu\, y_S \sin\theta t$ ----------------（3）

式中，$\mu = \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{\theta}{\omega}\right)^2}$ 为动力系数。$y_S = \dfrac{ML^2}{16EI}$ 为由 M 引起的质点静位移。

④把（3）式代入（2）中，得：

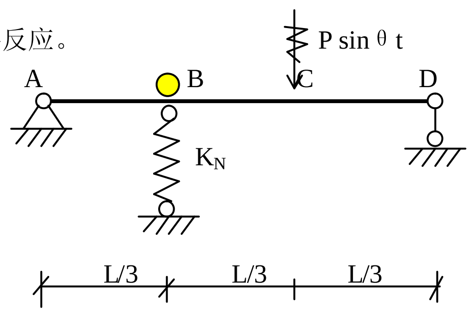
$$q_A(t) = m_j \frac{ML}{3EI} \sin\theta t = m_j\, j_S \sin\theta t \qquad \text{---------------}（4）$$

式中，$m_j = \dfrac{1-\dfrac{7}{16}\left(\dfrac{q}{w}\right)^2}{1-\left(\dfrac{q}{w}\right)^2}$ ，$j_S = \dfrac{ML}{3EI}$ 为由 M 引起的 A 端静转角。

例题 7

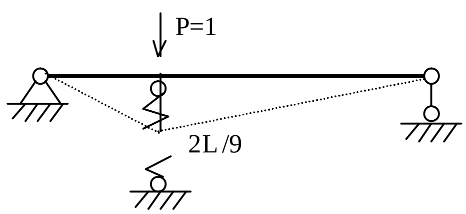
图示结构，梁的刚度为 EI，弹簧的刚度 $K_N = \dfrac{6EI}{L^3}$ ，不计梁的自重，$\theta = \sqrt{\dfrac{89EI}{4mL^3}}$ 。

求 B 点的最大动力位移反应。

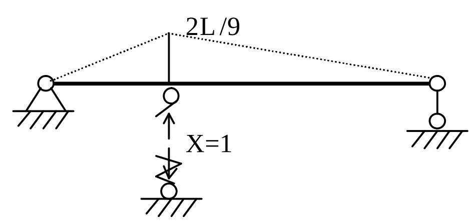


解：在例 2 中，我们用刚度法求得 B 处的竖向刚度，这里再用力法求其柔度，并求动力荷载为 1 时在 B 处产生的竖向位移。

1）求 B 处的柔度



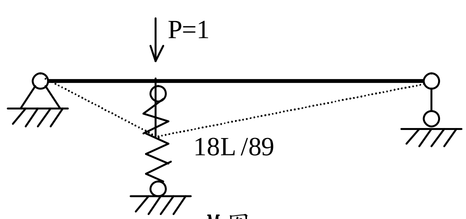
M_P 图



$\overline{M}$ 图

“切断”弹簧后的结构作为基本结构，画出 M_P 图及 $\overline{M}$ 图。

则，$\delta_{11} = \dfrac{89L^3}{486EI}$ ，$\Delta_{1P} = -\dfrac{4L^3}{243EI}$ ，解力法方程的 X=$\dfrac{8}{89}$ ，作出 M 图如下：

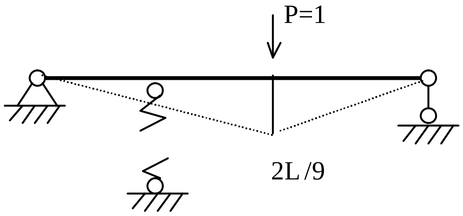


M 图

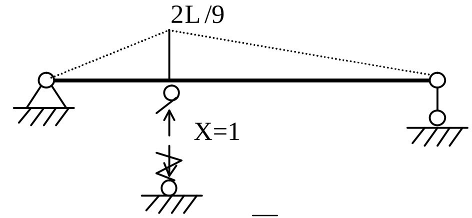
M 图与 M_P 图图乘即为所求的柔度 $d_{11}^* = \dfrac{4L^3}{267EI}$

2）求动力荷载为 1 时在质点出产生的位移

即求解如下问题

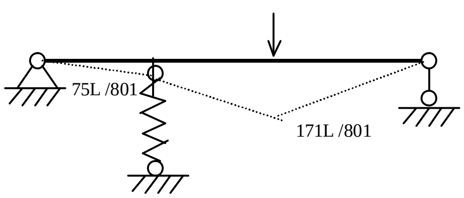


M_P 图

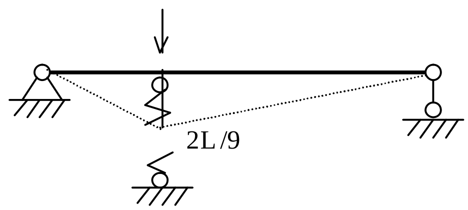


$\overline{M}$ 图

δ $_{11}=\dfrac{89L^3}{486EI}$ ，Δ $_{1P}=-\dfrac{21L^3}{1458EI}$ ，解力法方程得：X=$\dfrac{7}{89}$ ，得 M 图如下：



M 图



$\overline{M}$ 图

上 M 图与其右侧的 $\overline{M}$ 图图乘即得求动力荷载为 1 时在质点出产生的位移 $d_{21}^{*}=\dfrac{7L^3}{534EI}$

3）振动方程

$y(t) = -m\ddot{y}(t)\, d_{11}^{*} + d_{21}^{*}$ P sin θ t

代入 d_{11}^{*} ，d_{21}^{*} 得：

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{P^*}{m} \sin\theta t$$

式中，$\omega^2=\dfrac{267EI}{4mL^3}$ ，$P^*=\dfrac{7P}{8}$

方程的解：

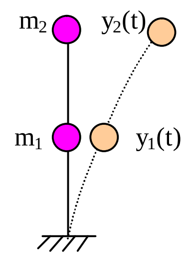
$y(t) = m\ y_S\ \sin\theta t$

式中，$m=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{q}{w}\right)^2}=\dfrac{3}{2}$ 为动力系数，$y_S=\dfrac{P^*}{mw^2}=\dfrac{7PL^3}{534EI}$

$y_{\max}(t)=m\ y_S=\dfrac{7PL^3}{356EI}$

多自由度体系的自由振动

本节讨论多自由度体系的自由振动，主要讨论其振动方程、振型方程、频率方程及振型图的画法。



一、柔度法建立振动方程

（一）、两个质点的振动

考虑图示两自由度体系的自由振动，

设时刻 t 质点 m_1 与质点 m_2 的位移

反应分别为 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$，则它们

都是由质点 1 与质点 2 的惯性力共同产生，依此建立柔度法方程如下：

$$y_1(t) = -m_1\ddot{y}_1(t)\,\delta_{11} - m_2\ddot{y}_2(t)\,\delta_{12} \qquad \text{----------------------(1)}$$

$$y_2(t) = -m_1\ddot{y}_1(t)\,\delta_{21} - m_2\ddot{y}_2(t)\,\delta_{22} \qquad \text{----------------------(2)}$$

式中，δ_{ij} 为 j 质点的惯性力为 1 时在 i 质点处产生的位移。i ，j = 1，2

设方程（1），（2）的解的形式为：

$$y_1(t) = A_1\sin(\omega \mathbf{t} + \phi) \qquad \text{----------------------(3)}$$

$$y_2(t) = A_2\sin(\omega \mathbf{t} + \phi) \qquad \text{----------------------(4)}$$

把（3），（4）代入（1），（2）式中，并记：$\lambda = \dfrac{1}{w^2}$ 得：

$$\begin{cases}(m_1 d_{11} - l)A_1 + m_2 d_{12} A_2 = 0 \\ m_1 d_{21} A_1 + (m_2 d_{22} - l)A_2 = 0\end{cases} \qquad \text{--------------------（5）}$$

（5）式称为振型方程。考虑（5）式有非零解（否则，体系不振动），则需使，

$$\begin{vmatrix} m_1 d_{11} - l & m_2 d_{12} \\ m_1 d_{21} & m_2 d_{22} - l \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{--------------------（6）}$$

（6）式称为频率方程，方程（6）有两个不同实数根 λ_1 与 λ_2 。记，

$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{1}{l_1}}$ < $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{1}{l_2}}$ ，则 ω_1 称为第一频率或基本频率；则 ω_2 称为第二频率，

$T_1 = \dfrac{2p}{w_1}$ ，$T_2 = \dfrac{2p}{w_2}$ 则 T_1 称为第一周期或基本周期；T_2 称为第二周期。

将 $\lambda = \lambda_1$ 代入方程（5）中的任意一个方程，得到由于 λ_1 而得的 A_2 与 A_1 的比值，记为：

$\dfrac{A_{21}}{A_{11}} = \dfrac{l_1 - m_1 d_1}{m_2 d_{22}}$ ，相应与 λ_1（或 ω_1）的解可写作：

$y_1(t)=$ A$_{11}$sin（ω$_1$**t** + φ）

$y_2(t)=$ A$_{21}$sin（ω$_1$**t** + φ）

显然，$\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}=\dfrac{A_{21}}{A_{11}}=\dfrac{l_1-m_1d_1}{m_2d_{22}}$ = 常数，这表示 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 是相关的，故把

$\{A_1\}=\{A_{11}\quad A_{21}\}^T$ 称为第一振型，或主振型。

同理，

把 λ = λ$_2$ 代入方程（5）中的任意一个方程，得到由于 λ$_2$ 而得的 A$_2$ 与 A$_1$ 的比值，记为：

$\dfrac{A_{22}}{A_{12}}=\dfrac{l_2-m_1d_{11}}{m_2d_{22}}$ ，相应与 λ$_2$（或 ω$_2$）的解可写作

$y_1(t)=$ A$_{12}$sin（ω$_2$**t** + φ）

$y_2(t)=$ A$_{22}$sin（ω$_2$**t** + φ）

显然，$\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}=\dfrac{A_{22}}{A_{12}}=\dfrac{l_2-m_1d_{11}}{m_2d_{22}}$ = 常数，同样，称 $\{A_2\}=\{A_{12}\quad A_{22}\}^T$ 为第二振型。

从数学上讲，两个不同实数根（特征根）λ$_1$ 与 λ$_2$ 对应的两个振型（特征向量）$\{A_1\}$ 与 $\{A_2\}$ 是线性无关的，故，体系自由振动在任意时刻 t 的位移反应可写作两个振型的线性组合，亦即方程（1）与（2）的一般解。

$y_1(t)=$ A$_{11}$sin（ω$_1$**t** + φ）+ A$_{12}$sin（ω$_2$**t** + φ）

$y_2(t)=$ A$_{21}$sin（ω$_1$**t** + φ）+ A$_{22}$sin（ω$_2$**t** + φ）

（二）、n 个自由度体系的振动及其矩阵表示

振动方程可表示为：

$$y_i(t)=-\sum_{j=1}^{n}m_j\ddot{y}_j(t)d_{ij}\quad ,\ i=1,2,\dots,n$$

即，第 i 质点的位移是由所有质点的惯性力在第 i 质点产生位移的叠加。写成矩阵的形式为：

$$\begin{Bmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ \cdots\\ y_n(t)\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n}\\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} m_1 & & 0 & \\ & m_2 & & \\ & & \cdots & \\ & 0 & & m_n\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1(t)\\ \ddot{y}_2(t)\\ \cdots\\ \ddot{y}_n(t)\end{Bmatrix}\qquad \text{--------（7-1）}$$

简写为：

$$\{y(t)\}=-[d]\cdot[M]\cdot\{\ddot{y}(t)\}\qquad \text{------------------------------（7-2）}$$

$[d]$称为柔度矩阵，$[M]$称为质量矩阵，$\{y(t)\}$称为位移列向量，$\{\ddot{y}(t)\}$称为加速度列向量。

方程（7）的解设为：

$$\{y(t)\}=\{A\}\sin(\omega t+\phi) \qquad \text{------------------------}（8）$$

式中，$\{A\}=\{A_1 \quad A_2 \quad \cdots\cdots \quad A_n\}^T$

把（8）式代入（7）式，得：

$$\{A\}=\omega^2[d]\cdot[M]\{A\} \qquad \text{--------------------------------}（9）$$

或写成，$\dfrac{1}{w^2}\{A\}=[d]\cdot[M]\{A\}$ ，记：$\lambda=\dfrac{1}{w^2}$ 得：

$$([d]\cdot[M]-\lambda E)\{A\}=\{0\} \qquad \text{------------------------------}（10）$$

式中 E 为单位矩阵，$\{0\}$为零列向量，（10）式称为振型方程。

同样，（10）式有非零解（否则将不产生振动）的条件是：

$$|[d]\cdot[M]-\lambda E|=0 \qquad \text{-----------------------------}（11）$$

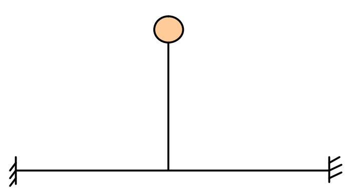
（11）式称为频率方程。

频率方程有 n 个互不相同的实数根 λ_1，λ_2，…，λ_n，对应着 n 个互不相同的圆频率；代入（10）式可得到 n 个线性无关的振型。记，

$\{A_j\}=\{A_{1j} \quad A_{2j} \quad \cdots\cdots \quad A_{nj}\}^T$ ，称为第 j 振型。

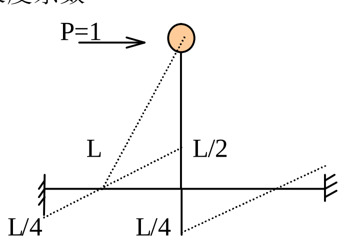
[计算举例]

图示体系，EI=常数，质点的质量为 m，各杆的长度都是 L，求各频率和振型，画振型图。

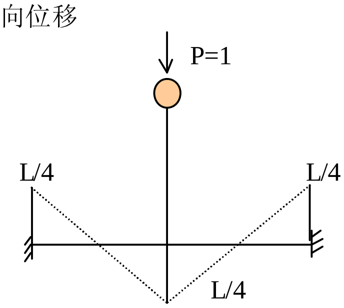


解：1）2 个动力自由度，质点的水平位移和竖向位移

2）求柔度系数



M_1图



M_2图

分别作出惯性力在两个方向为 **1** 时的 M_1 图与 M_2 图，求得：

$\delta_{11}=\dfrac{11L^3}{24EI}$ ， $\delta_{12}=\delta_{21}=0$ ， $\delta_{22}=\dfrac{L^3}{12EI}$

3）求解频率方程

记，$\lambda=\dfrac{1}{w^2}$ ，由（**6**）式得频率方程：

$$\begin{vmatrix} \dfrac{11mL^3}{24EI}-l & 0 \\ 0 & \dfrac{mL^3}{12EI}-l \end{vmatrix}=0$$

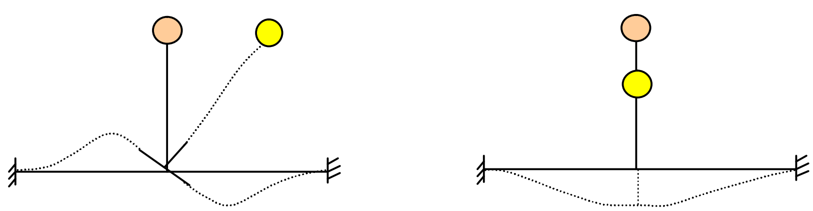
解得：$\lambda_1=\dfrac{11mL^3}{24EI}$ ，$\lambda_2=\dfrac{mL^3}{12EI}$ ，从而，$\omega_1=\sqrt{\dfrac{24EI}{11mL^3}}$ ，$\omega_2=\sqrt{\dfrac{12EI}{mL^3}}$

4）求振型

把 λ_1（或 ω_1）代入振型方程（**5**）中的任意一个得 $\{A_1\}=\{1.0 \quad 0.0\}^T$

把 λ_2（或 ω_2）代入振型方程（**5**）中的任意一个得 $\{A_2\}=\{0.0 \quad 1.0\}^T$

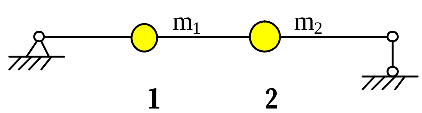
5）画振型图



二、刚度法建立振动方程

（一）、两个质点的振动

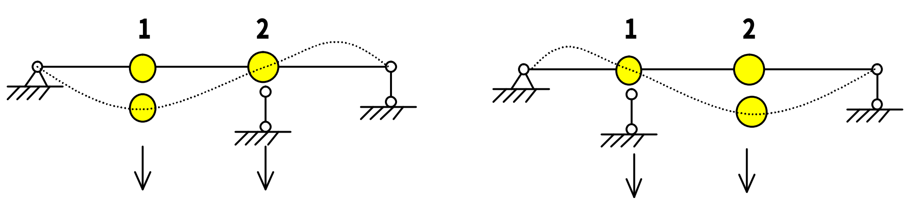
图示简支梁，质量集中在跨中两个质点，如图，具有两个动力自由度。用刚度法建立振动方程时，考虑每个质点的受力平衡。



质点 **1** 的受力平衡方程：$-m_1\ddot{y}_1(t)-F_{EK1}=0$ ------------------（**1**）

质点 **2** 的受力平衡方程：$-m_2\ddot{y}_2(t)-F_{EK2}=0$ ------------------（**2**）

式中，$-F_{EK1}$ 及 $-F_{EK2}$ 分别是质点 **1** 和质点 **2** 的弹性恢复力，其求法如下



K_{11} K_{21} K_{12} K_{22}

在质点 **2** 处附加支杆，使质点 **1** 有单位竖向位移，则在质点 **1** 和质点 **2** 分别有力 K_{11} 和 K_{21}；
在质点 **1** 处附加支杆，使质点 **2** 有单位竖向位移，则在质点 **1** 和质点 **2** 分别有力 K_{12} 和 K_{22}

当上述两个质点同时产生位移 $y_1(t)$ 及 $y_2(t)$ 时，依叠加法可得：

$F_{EK1}=K_{11}y_1(t)+K_{12}y_2(t)$ ------------------（3）

$F_{EK2}=K_{12}y_1(t)+K_{22}y_2(t)$ ------------------（4）

由式（1），（2），（3），（4）可得两自由度体系的振动方程：

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1(t)+K_{11}y_1(t)+K_{12}y_2(t)=0 \\ m_2\ddot{y}_2(t)+K_{21}y_1(t)+K_{22}y_2(t)=0 \end{cases} \qquad \text{------------------（5）}$$

（二）、n 个质点的振动及其矩阵表示

一般方程可写为：

$$m_i\ddot{y}_i(t)+\sum_{j=1}^{n}K_{ij}y_j(t)=0 \qquad , \quad i=1，2，\ldots，n$$

写成矩阵的形式为：

$$[M]\cdot\{\ddot{y}(t)\}+[K]\cdot\{y(t)\}=\{0\} \qquad \text{------------------（6）}$$

式中，

$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & & 0 & \\ & m_2 & & \\ & & \cdots & \\ & 0 & & m_n \end{bmatrix}$ 为质量矩阵，$[K]=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$ 为刚度矩阵，

$\{\ddot{y}(t)\}=\{\ddot{y}_1(t) \quad \ddot{y}_2(t) \quad \cdots\cdots \quad \ddot{y}_n(t)\}^T$ ，$\{y(t)\}=\{y_1(t) \quad y_2(t) \quad \cdots\cdots \quad y_n(t)\}^T$

设方程的解的形式为：

$$\{y(t)\}=\{A\}\ \sin(\omega t+\phi) \qquad \text{----------------（7）}$$

式中，$\{A\}=\{A_1 \quad A_2 \quad \cdots\cdots \quad A_n\}^T$

代入（6）式可得：

$$([K]-w^2[M])\cdot\{A\}=\{0\} \qquad \text{------------------（8）}$$

此式就是刚度法的振型方程。

（8）式有非零解的条件是其系数行列式等于零（否则，体系不振动）

即，

$$\begin{vmatrix} K_{11}-m_1w^2 & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22}-m_2w^2 & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn}-m_nw^2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{--------------（9）}$$

（9）式便是刚度法的频率方程。

实际上，在（6）式$[M]\cdot\{\ddot{y}(t)\}+[K]\cdot\{y(t)\} = \{0\}$的两边左称$[K]^{-1}$，并注意到：

$[K]^{-1}=[d]$就得到柔度法方程$\{y(t)\}=-[d]\cdot[M]\cdot\{\ddot{y}(t)\}$

[计算举例]

图示结构弹簧的刚度 $K_N=\dfrac{13EI}{2L^3}$，杆长都是 **L**，求振动频率和振型，作出振型图。

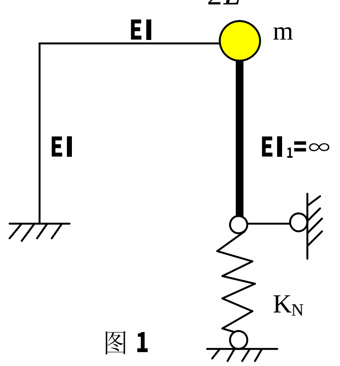


图 **1**

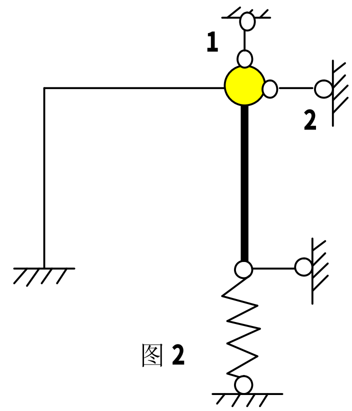


图 **2**

解：**1**）**2** 个动力自由度，质点的水平位移和竖向位移，如图。

2）求刚度系数

①求图 **2** 所示结构在支杆 **1** 有单位竖向位移时的 K_{11} 及 K_{21}

画出变形图如图 **3** 所示。求 K_{11} 及 K_{21} 就要作出其弯矩图。

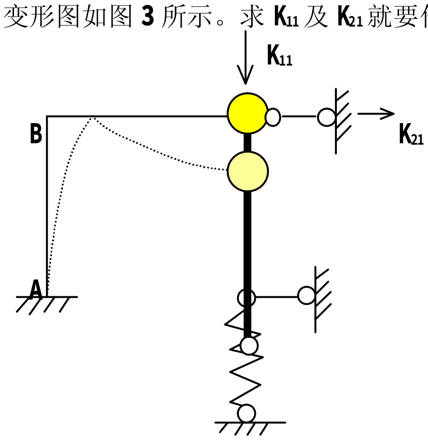


图 **3**

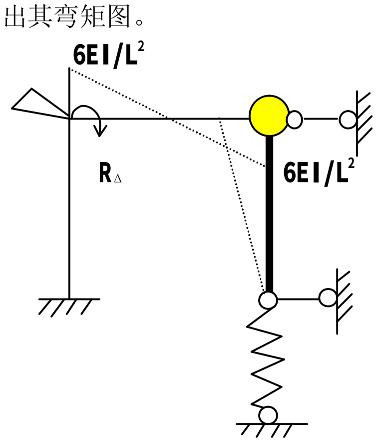


图 **4**

位移法变量为 θ_B，作出 M_Δ 图如图 4 所示。

再作出 $\overline{M}$ 图如图 **5** 所示。

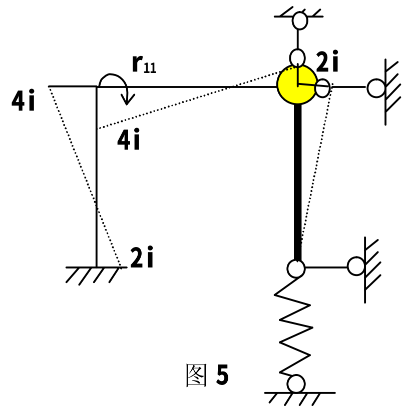


图 **5**

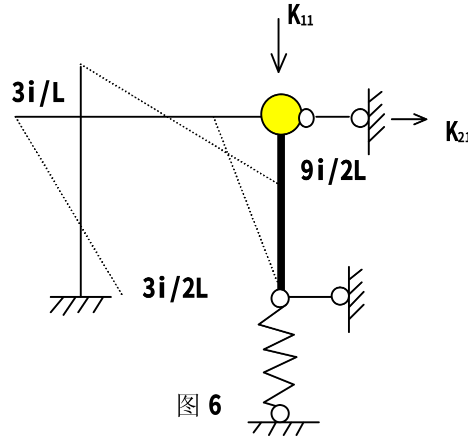
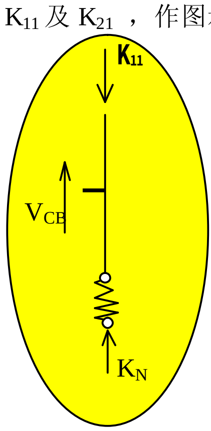
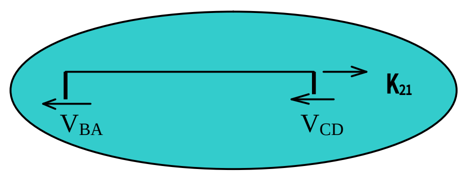


图 **6**

$r_{11}=8i$ ，$R_{\Delta}=-\dfrac{6i}{L}$ ，得：$\theta_B=\dfrac{3}{4L}$，作出 M 图如图 6 所示。

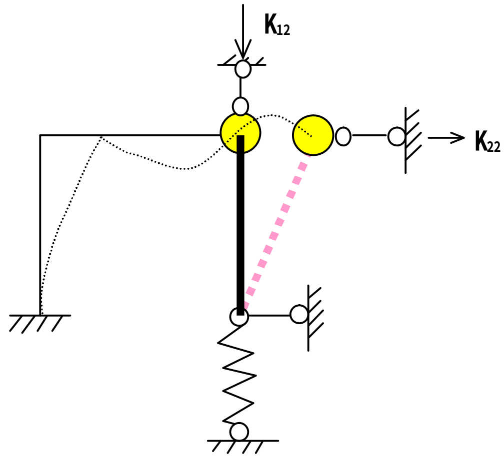
为求 K_{11} 及 K_{21} ，作图示研究对象。





由Σ**Y=0** 得 $K_{11}=\dfrac{14i}{L^2}$ ，由Σ**X=0** 得 $K_{21}=-\dfrac{9i}{L^2}$

②类似的方法求图 **2** 所示结构支杆 **2** 有水平侧移Δ**=1** 时的 K_{12} 及 K_{22} 。



3）求频率和振型

振型方程写为：$\begin{cases}\left(K_{11}-w^{2}m\right)A_{1}+K_{12}A_{2}=0\\ K_{21}A_{1}+\left(K_{22}-w^{2}m\right)A_{2}=0\end{cases}$

频率方程写为：$\begin{vmatrix}K_{11}-w^{2}m & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}-w^{2}m\end{vmatrix}=0$

记，$\lambda=\dfrac{mw^{2}L^{3}}{EI}$，由频率方程可得：

$(14-l)^{2}-81=0$

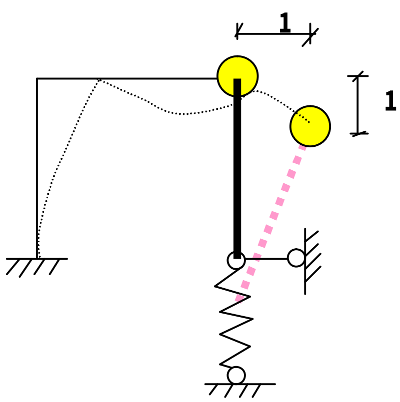
解得：$\lambda_1=5$ ，$\lambda_2=23$

从而，$\omega_1=2.236\sqrt{\dfrac{EI}{mL^{3}}}$ ，$\omega_2=4.796\sqrt{\dfrac{EI}{mL^{3}}}$

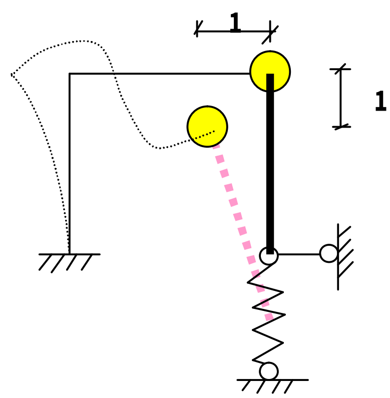
把 $\lambda_1=5$ ，$\lambda_2=23$ 分别代入振型方程可得两个振型为：

$\{A_1\}=\{1.0\quad 1.0\}^{T}$ ，$\{A_2\}=\{1.0\quad -1.0\}^{T}$

4）振型图



第一振型



第二振型

主振型的正交性

在刚度法表示的振型方程$\left([K]-w^2[M]\right)\cdot\{A\}=\{0\}$中，考虑第 **j** 振型方程：

$$\left([K]-w_j^2[M]\right)\cdot\{A_j\}=\{0\}$$ 即，

$$[K]\cdot\{A_j\}-w_j^2[M]\cdot\{A_j\}=\{0\}$$

在上式中左乘$\{A_i\}^T$，

$$\{A_i\}^T[K]\cdot\{A_j\}-w_j^2\{A_i\}^T[M]\cdot\{A_j\}=0 \qquad \text{-----------}（1）$$

再考虑第 i 振型，i $\neq$ j

$$[K]\{A_i\}-w_i^2[M]\cdot\{A_i\}=\{0\}$$

求此式的转置，得：

$$\{A_i\}^T[K]-w_i^2\{A_i\}^T[M]=\{0\}$$

在上式中右乘$\cdot\{A_j\}$，得：

$$\{A_i\}^T[K]\cdot\{A_j\}-w_i^2\{A_i\}^T[M]\cdot\{A_j\}=0 \qquad \text{-----------}（2）$$

由（1），（2）两式相减，得：

$$(w_i^2-w_j^2)\{A_i\}^T[M]\cdot\{A_j\}=0$$

由于$w_i\neq w_j$，所以有：

$$\{A_i\}^T[M]\cdot\{A_j\}=0 \qquad \text{----------}（3）$$

此式称为振型关于质量矩阵的正交性，又称为第一正交性

由（1）或（2）式，显然有：

$$\{A_i\}^T[K]\cdot\{A_j\}=0 \qquad \text{----------}（4）$$

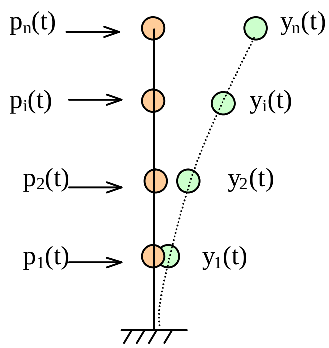
此式称为振型关于刚度矩阵的正交性，又称为第二正交性。

强迫振动，振型叠加法

一、振动方程

（一）柔度法

由动静法，考虑第 i 质点的位移是由各质点的惯性力及各干扰力共同引起，写出振动方程如下：



$$y_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} d_{ij} m_j \ddot{y}_j(t) \ + \ \sum_{j=1}^{n} d_{ij} p_j(t) = \ -\sum_{j=1}^{n} d_{ij} m_j \ddot{y}_j(t) \ + \ \Delta_{ip}(t)$$

式中，d_{ij} 为第 j 质点有力 1 时在第 i 质点产生的位移，$\Delta_{ip}(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} p_j(t)$

i =1，2，**…**，n

写成矩阵的形式为：

$$[d]\cdot[M]\{\ddot{y}(t)\} \ + \ \{y(t)\} \ = \ \Delta_{ip}(t) \qquad \text{-------------------}（1）$$

（二）刚度法

由动静法，考虑第 i 质点的受力平衡，

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} y_j(t) \ + \ m_i \ddot{y}_i \ = p_i(t)$$

写成矩阵的形式为：

$$[M]\cdot\{\ddot{y}(t)\} \ + \ [K]\cdot\{y(t)\} \ = \ \{p(t)\} \qquad \text{-------------------(2)}$$

（三）振动方程的解

非齐次方程的解（1）或（2）的特解是稳态振动解，亦即动力位移反应。其形式为

$$\{y(t)\}=\{A\}\sin（\theta t + \phi） \qquad \text{------------------}（3）$$

二、振型叠加法

n 个质点的振动具有 n 个振型，这 n 个振型是线性无关的，在数学上构成 n 维空间的一组基底。故，n 个质点的振动的位移反应可写作：

$$\{y(t)\} = [A]\{q(t)\} \qquad \text{----------------(4)}$$

式中，

$$[A]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}=[\{A_1\} \quad \{A_2\} \quad \cdots\cdots \quad \{A_n\}]$$ 称为振型矩阵。

$\{q(t)\}=\{q_1(t) \quad q_2(t) \quad \cdots\cdots \quad q_n(t)\}^T$，称为广义坐标。

即，（4）式又可写作：

$$\{y(t)\} = \sum_{j=1}^{n} q_j(t)\{A_j\} \qquad \text{------------------（5）}$$

现考虑有阻尼的强迫振动，其振动方程为：

$$[M]\cdot\{\ddot{y}(t)\} + [C]\cdot\{\dot{y}(t)\} + [K]\cdot\{y(t)\} = \{p(t)\} \qquad \text{-----------------（6）}$$

式中，

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$ 称为阻尼矩阵。其意义如下：

$F_{D\,i} = -\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\dot{y}_j(t)$ ，i =1，2，...，n 为。它是由各质点的速度引起的在 i 质点的阻尼力的叠加。

方程（6）是藕合的，为了解藕，令：

$$[C]=\alpha[M] + \beta[K] \qquad \text{----------（7）}$$

式中，α，β 为两个常数，可由前两个振型获得。

依上述各项，方程（6）可写为：

$$[M]\cdot\{\ddot{y}(t)\} + (\alpha[M] + \beta[K])\{\dot{y}(t)\} + [K]\cdot\{y(t)\} = \{p(t)\} \qquad \text{----- -------（8）}$$

把（4）式代入（8）式，得：

$$[M][A]\{\ddot{q}(t)\} + (\alpha[M] + \beta[K])[A]\{\dot{q}(t)\} + [K][A]\{q(t)\} = \{p(t)\} \qquad \text{-----（9）}$$

以 $\{A_i\}^T$ 左乘（9）式，先考虑其第一项的系数

$$\{A_i\}^T[M][A]=\{A_i\}[M][\{A_1\}\ \ \{A_2\}\ \ \cdots\cdots\ \ \{A_n\}]$$

$$=\{A_i\}^T[[M]\{A_1\}\ \ [M]\{A_2\}\ \ \cdots\ \ [M]\{A_i\}\ \ \cdots\ \ [M]\{A_j\}\ \ \cdots\ \ [M]\{A_n\}]$$

$$=$$

$$[\{A_i\}^T[M]\{A_1\}\ \ \{A_i\}^T[M]\{A_2\}^T\ \ \cdots\ \ \{A_i\}^T[M]\{A_i\}\ \ \cdots\ \ \{A_i\}^T[M]\{A_i\}\ \ \cdots\ \ \{A_i\}^T[M]\{A_n\}]$$

$$=[0\ \ 0\ \ \cdots\ \ \{A_i\}^T[M]\{A_i\}\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 0]$$

同理，方程（9）左边第三项的系数变成

$$[0\ \ 0\ \ \{A_i\}^T[K]\{A_i\}\ \ 0\ \ 0]$$

记，$M_i^*=\{A_i\}^T[M]\{A_i\}$，$K_i^*=\{A_i\}^T[K]\{A_i\}$，$C_i^*=aM_i^*+bK_i^*$

则，方程（9）左边第二项的系数变成

$$[0\ \ 0\ \ aM_i^*+bK_i^*\ \ 0\ \ 0]$$

记，$\{A_i\}^T\{P(t)\}=P_i^*(t)$，则（9）式就解耦成为：

$$M_i^*\ddot{q}_i(t)+C_i^*\dot{q}_i(t)+K_i^*q_i(t)=P_i^*(t)$$

两边同除以M_i^*，并记：$w_i^2=\dfrac{K_i^*}{M_i^*}$　$\dfrac{C_i^*}{M_i^*}=2x_iw_i$，则方程（9）变为：

$$\ddot{q}_i(t)+2x_iw_i\dot{q}_i(t)+w_i^2q_i(t)=\frac{p_i^*(t)}{M_i^*} \qquad \text{--------------（10）}$$

方程（10）可由杜哈美积分求得其解。这在单自由度体系中已讨论过。

$$q_i(t)=\frac{1}{M_i^*w_{id}}\int_0^t p_i^*(t)e^{-x_iw_i(t-t)}\sin w_{id}(t-t)dt$$

若$P_i^*(t)$是简谐荷载，则

$$q_i(t)=\frac{1}{M_i^*w_{id}}\bar{P}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{q}{w_i}\right)^2\right)^2+4x_i^2w_i^2\left(\frac{q}{w_i}\right)^2}}\sin(\theta t+\varepsilon_i)$$

依（10）式求的$q_i(t)$（i =1，2，...，n）后，可由（4）式确定任意时刻 t 的位移反应。

[计算举例]

1．求图示结构的最大动位移反应，并作最大动力弯矩图。已知，各杆长 L，$q=\sqrt{\dfrac{9EI}{mL^3}}$ ，

不计阻尼。

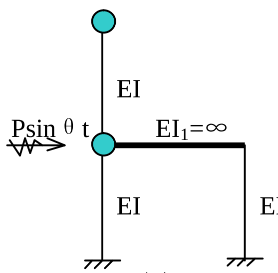


图 1

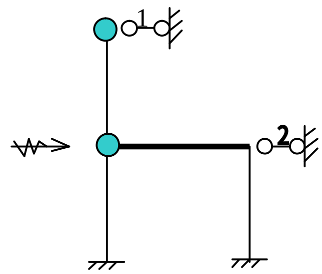


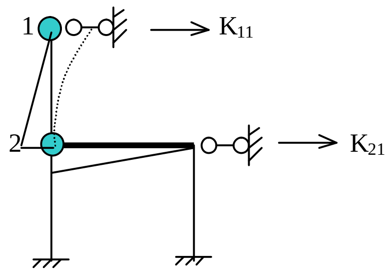
图 2

解：1）两个动力自由度

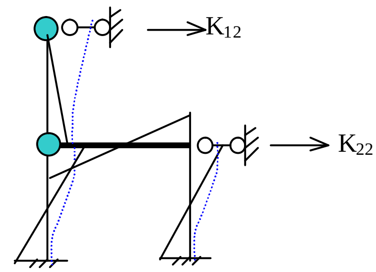
2）求刚度系数，用刚度法建立振动方程。

求图 2 所示支座 1 有侧移 Δ=1 时在支杆 1 处的力 K_{11} 及在支杆 2 处的力 K_{21} 和

图 2 所示支座 2 有侧移 Δ=1 时在支杆 1 处的力 K_{12} 及在支杆 2 处的力 K_{22}



M_1 图



M_2 图

$K_{11}=\dfrac{3i}{L^2}$　　$K_{12}=K_{21}=-\dfrac{3i}{L^2}$　　，$K_{22}=\dfrac{27i}{L^2}$

3）振动方程

$$[M]\cdot\{\ddot{y}(t)\}+[K]\cdot\{y(t)\}=\{p(t)\}$$

其解的形式为

$$\{y(t)\}=\{A\}\sin(\theta t+\phi)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -q^2A_1 \\ -q^2A_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{3i}{L^2} & -\dfrac{3i}{L^2} \\ -\dfrac{3i}{L^2} & \dfrac{27i}{L^2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

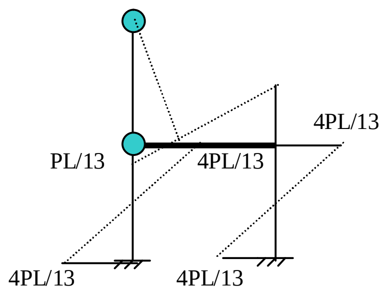
解得：

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\dfrac{PL^2}{39i} \\ \dfrac{2PL^2}{39i} \end{Bmatrix}$$ 此解就是最大动力位移。

4)最大动力弯矩图

最大弯矩图看作是两个最大位移弯矩图的叠加，即

$M=M_1A_1+M_2A_2$



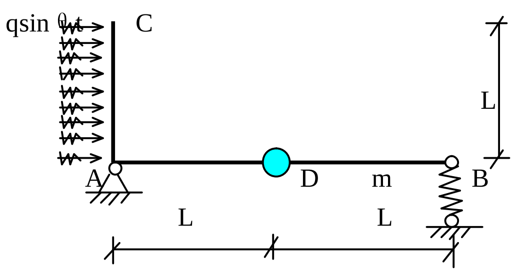
M_{max} 图

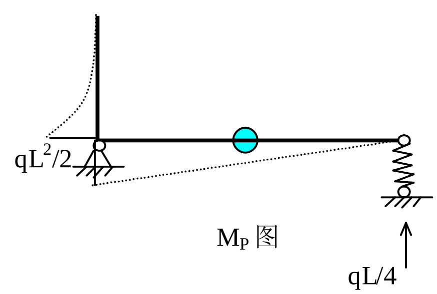
注意：此图为相应与简谐荷载方向向右时的情况；若简谐荷载方向向左时，弯矩图的受拉侧相反。

例 2

求图示结构 B 点的最大竖向位移 Δ_{BV} ，并绘最大动力弯矩图。已知，EI=常数，不计阻尼，

$q=\sqrt{\dfrac{EI}{mL^3}}$ ，弹簧的刚度 $K_N=\dfrac{EI}{L^3}$





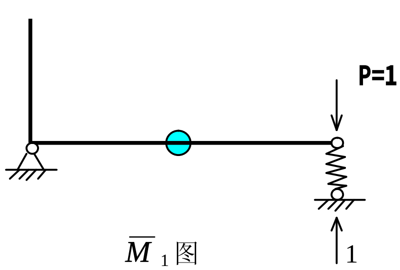
M_P 图

解：1）动力自由度 1 ，D 点的竖向位移 $y(t)$

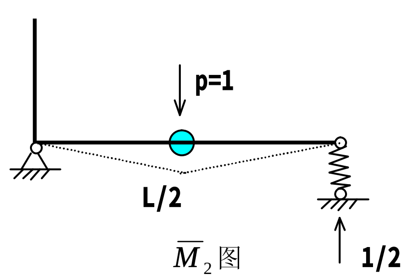
2）B 点的最大位移应由静位移 + 动位移组成。用柔度法建立振动方程。

求动力荷载幅值在 **B** 和 **D** 处产生的位移 Δ_{BP} 及 Δ_{DP} 及

惯性力为 **1** 时在 **B** 和 **D** 处产生的位移 δ_B ， δ_{DD}



$\overline{M}_1$ 图



$\overline{M}_2$ 图

$\Delta_{BP}=\dfrac{L^3}{EI}\dfrac{qL}{4}\cdot 1=\dfrac{qL^4}{4EI}$ ， $\Delta_{DP}=\dfrac{qL^4}{4EI}$

δ$_B$= $\dfrac{L^3}{EI}\,\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{L^3}{2EI}$ ，δ$_{DD}$= $\dfrac{5L^3}{12EI}$

3）振动方程

$$\begin{cases} y_B(t)=-m\ddot{y}_D(t)\cdot d_B+\Delta_{BP}\sin qt \\ y_D(t)=-m\ddot{y}_D(t)\cdot d_{DD}+\Delta_{DP}\sin qt \end{cases} \qquad \text{-------------------- (1)}$$

先解第二个方程**,**以 $y(t)=A\sin qt$ 代入方程，得：

$$\left(1-mq^2 d_{DD}\right)A=\Delta_{DP}$$

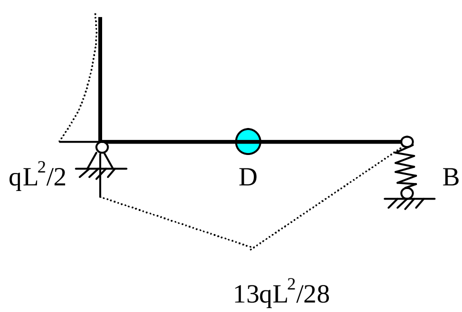
A= $\dfrac{\Delta_{DP}}{1-mq^2 d_{DD}}=\dfrac{3qL^4}{7EI}$

以 $y(t)=\dfrac{3qL^4}{7EI}\sin qt$ 代入第一个方程，解得：

$y_B(t)=\dfrac{13qL^4}{28EI}\sin qt$ ， $y_B(t)_{mzx}$= $\dfrac{13qL^4}{28EI}$

4）质点惯性力幅值

I=mθ^{2}A= $\dfrac{3qL}{7}$，以 M=M$_P$+ $\overline{M}_2\cdot I$ 得最大动力弯矩图如下：

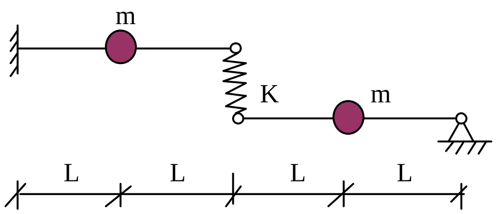


例如，M$_D$= $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{qL^2}{2}+\dfrac{L}{2}\cdot\dfrac{3qL}{7}=\dfrac{13qL^2}{28}$

多自由度振动习题课

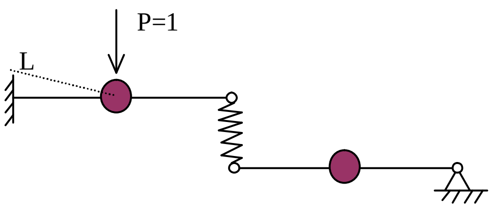
例题 1

求图示结构体系的自振频率和振型，已知 K=$\dfrac{EI}{L^3}$ ，EI=常数。

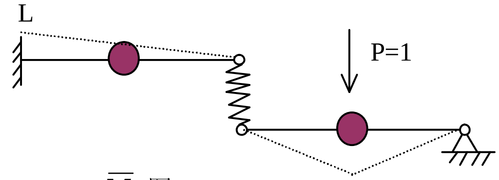


解：1）两个动力自由度

2）柔度法求解。求单位力作用于质点时在质点处产生的位移 δ_{ij}，作出 $\overline{M}_1$ 图及 $\overline{M}_2$ 图。



$\overline{M}_1$ 图



$\overline{M}_2$ 图

$\delta_{11}=\dfrac{L^3}{EI}$ ，$\delta_{12}=\delta_{21}=\dfrac{5L^3}{12EI}$ ，$\delta_{22}=\dfrac{13L^3}{12EI}$

3）振动方程

$y_1(t)=-m\ddot{y}_1(t)\,\delta_{11}-m\ddot{y}_2(t)\,\delta_{12}$ ----------------------(1)

$y_2(t)=-m\ddot{y}_1(t)\,\delta_{21}-m\ddot{y}_2(t)\,\delta_{22}$ ----------------------(2)

设方程（1），（2）的解的形式为：

$y_1(t)=A_1\sin(\omega t+\phi)$ ----------------------(3)

$y_2(t)=A_2\sin(\omega t+\phi)$ ----------------------(4)

把（3），（4）代入（1），（2）式中，并记：$\lambda=\dfrac{1}{w^2}$ 得振型方程：

$$\begin{cases}(md_{11}-l)A_1+d_{12}mA_2=0\\ d_{21}mA_1+(md_{22}-l)A_2=0\end{cases}$$ --------------------（5）

频率方程

$$\begin{vmatrix} md_{11}-l & md_{12} \\ md_{21} & md_{22}-l \end{vmatrix}=0$$

代入 δ_{ij}，得：

$l^2 - 17l + 51 = 0$

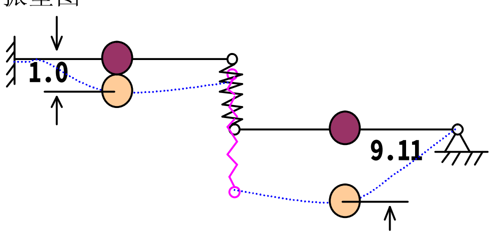
解得：λ₁=**13.11** ，λ₂=**3.89** ，从而，

$w_1 = 0.96\sqrt{\dfrac{EI}{mL^3}}$ ，$w_2 = 1.76\sqrt{\dfrac{EI}{mL^3}}$

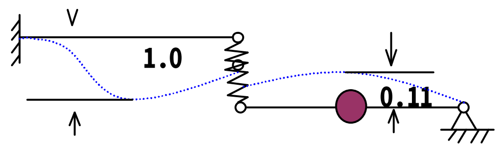
把λ_1代入振型方程得第一振型$\{A_1\} = \{1.0 \quad 9.11\}^T$

把λ_2代入振型方程得第二振型$\{A_2\} = \{1.0 \quad -0.11\}^T$

4）振型图



第一振型



第二振型

例题 2

求图示结构的频率和振型，已知 $K_1=\dfrac{12EI}{L^3}$ ，$K_2=\dfrac{6EI}{L^3}$ ，无穷刚性杆具有分布质量$\overline{m}$ 。

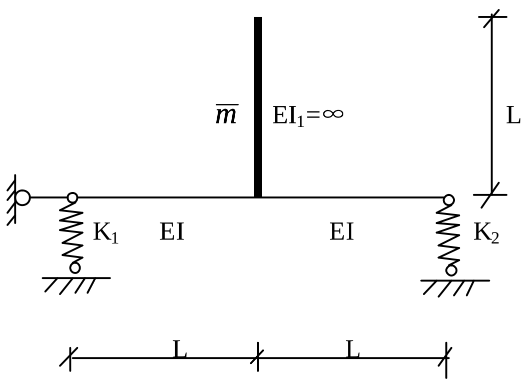


图 1

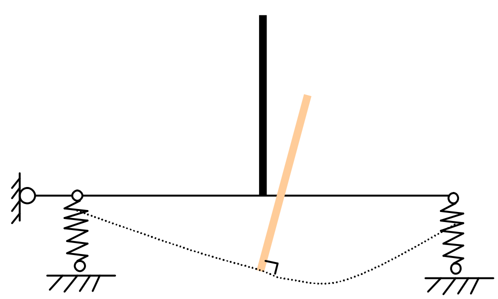
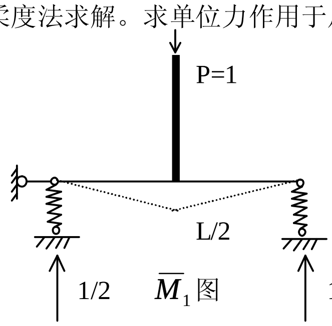
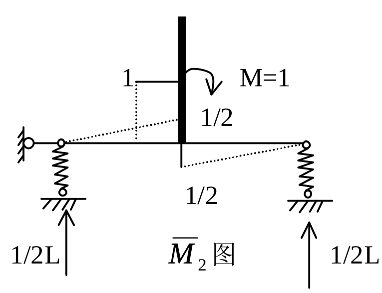


图 2

解：1）两个动力自由度，无穷刚性杆质心的竖向位移和转动，变形图如图（2）所示。

2）柔度法求解。求单位力作用于质点时在质点处产生的位移δ_{ij}，作出$\overline{M}_1$图及$\overline{M}_2$图。





$\delta_{11}=\dfrac{11L^3}{48EI}$ ，$\delta_{22}=\dfrac{11L}{48EI}$ ，$\delta_{12}=\delta_{21}=\dfrac{L^2}{96EI}$

3）振动方程及其解

$$\begin{cases} y(t)=-m\delta_{11}\ddot{y}(t)-J\delta_{12}\ddot{\theta}(t) \\ \theta(t)=-m\delta_{21}\ddot{y}(t)-J\delta_{22}\ddot{\theta}(t) \end{cases}$$

式中，J=$\dfrac{mL^2}{12}$

设方程的特解为：

$$\begin{cases} y(t)=A\sin(\omega t+\varphi) \\ \theta(t)=\phi\sin(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

代入振动方程中，整理得振型方程：

$$\begin{cases} (132-\lambda)A+\dfrac{L}{2}\phi=0 \\ \dfrac{6}{L}A+(11-\lambda)\phi=0 \end{cases}$$

式中，$\lambda=\dfrac{576EI}{m\omega^2L^3}$

解频率方程：$\lambda^2-143\lambda+1449=0$ 得：

$\lambda_1\approx 132$ ，$\lambda_2\approx 11$ 从而，

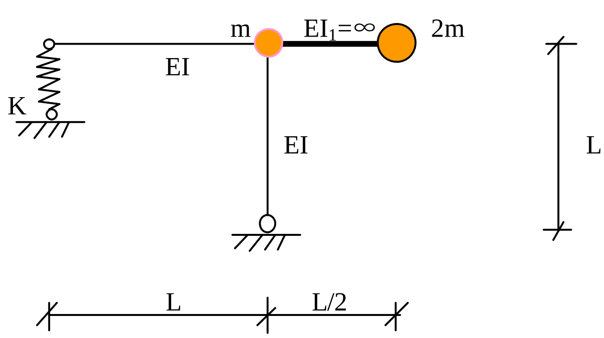
$\omega_1=2.09\sqrt{\dfrac{EI}{mL^3}}$ ，$\omega_2=7.24\sqrt{\dfrac{EI}{mL^3}}$

4）振型

$\{A_1\}=\{1.0 \quad 0.0\}^T$ ，$\{A_2\}=\{0.0 \quad 1.0\}^T$

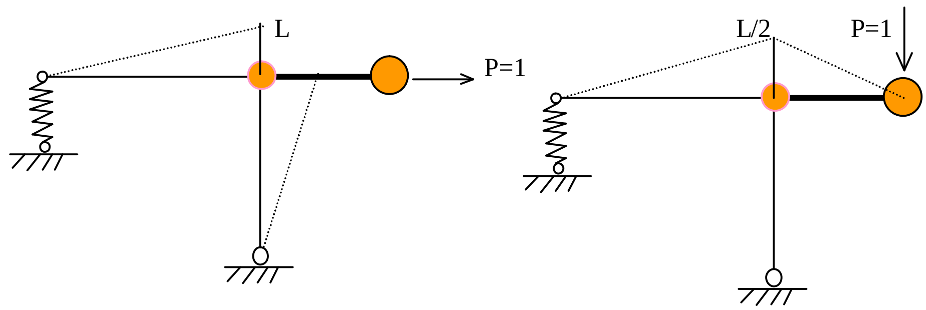
例题 3

求图示结构的频率和振型，已知 K=$\dfrac{2EI}{L^3}$



解：1）两个动力自由度，两质点的共同水平位移及 2m 质点的竖向位移。

2）柔度法求解。求单位力作用于质点时在质点处产生的位移 δ $_{ij}$，作出 $\overline{M}_1$ 图及 $\overline{M}_2$ 图。



$\overline{M}_1$ 图　　　　$\overline{M}_2$ 图

$\delta_{11}=\dfrac{7L^3}{6EI}$　，$\delta_{22}=\dfrac{5L^3}{24EI}$　，$\delta_{12}=\delta_{21}=\dfrac{5L^3}{12EI}$

记，$\lambda=\dfrac{24EI}{mw^2L^3}$　可得频率方程

$$(84-l)\cdot(10-l)-600=0$$

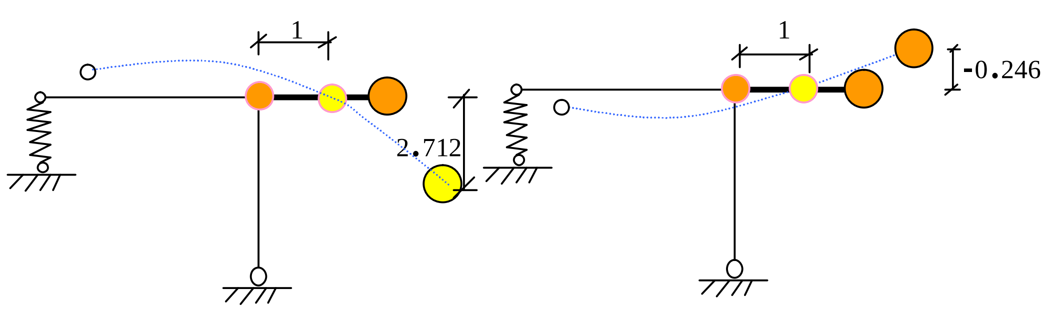
解得：λ_1**=91.375**　λ_2**=2.625**，从而

ω_1**=0.5125**$\sqrt{\dfrac{EI}{mL^3}}$　，ω_2**=3.024**$\sqrt{\dfrac{EI}{mL^3}}$

3）振型

$\{A_1\}=\{1.0\quad 2.712\}^T$　，$\{A_2\}=\{1.0\quad -0.2458\}^T$

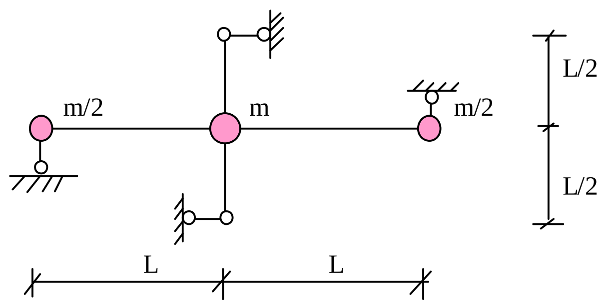
4）振型图



第一振型　　　　第二振型

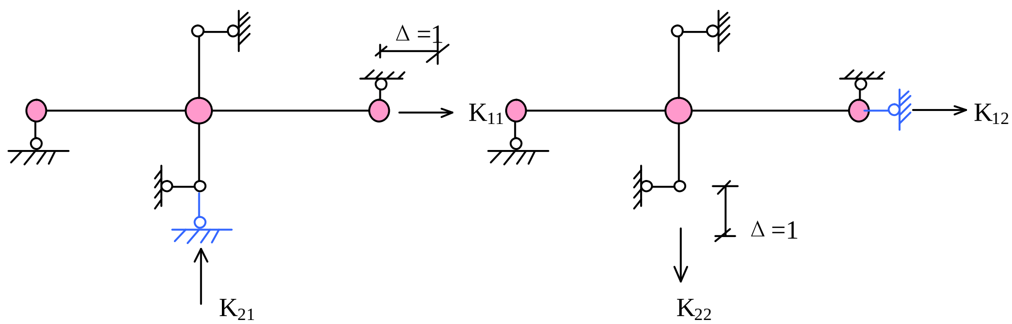
例题 4

求图示结构的频率和振型，EI=常数。



解：1）两个动力自由度，三个质点的共同水平位移 $y_1(t)$ 和质点 m 的竖向位移 $y_2(t)$。

2）用刚度法。



由对称性，$K_{11}=\dfrac{48EI}{L^3}$ ，$K_{22}=\dfrac{6EI}{L^3}$ ，$K_{12}=K_{21}=0$

3）振动方程

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1(t)+K_{11}y_1(t)+K_{12}y_2(t)=0 \\ m_2\ddot{y}_2(t)+K_{21}y_1(t)+K_{22}y_2(t)=0 \end{cases}$$

式中，$m_1=\dfrac{m}{2}+m+\dfrac{m}{2}=2m$ ，$m_2=m$

设其解的形式为：

$y_1(t)=A_1\sin(\omega t+\phi)$

$y_2(t)=A_2\sin(\omega t+\phi)$

得频率方程：

$$\begin{vmatrix} K_{11}-2mw^2 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22}-mw^2 \end{vmatrix}=0$$

解得：

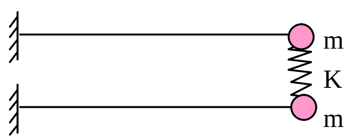
$$\omega_1=2.45\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}\quad,\quad \omega_2=4.90\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

4）振型

$$\{A_1\}=\{1.0\quad 0.0\}^T\quad,\quad \{A_2\}=\{0.0\quad 1.0\}^T$$

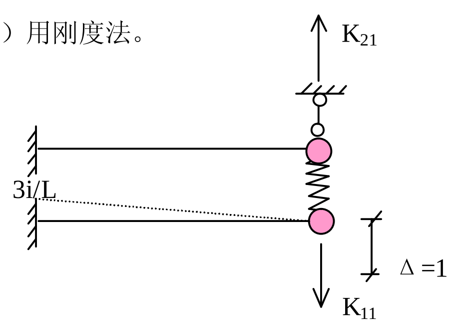
例题 5

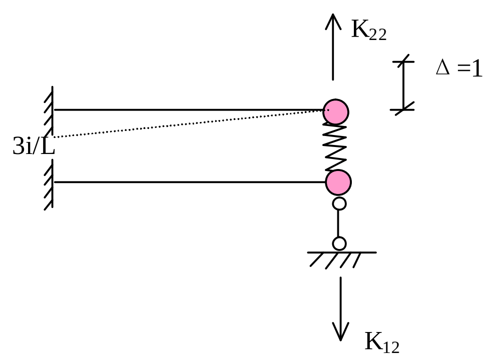
求图示结构的频率和振型，K=$\dfrac{EI}{L^3}$，杆长 L，EI=常数。



解：1）两个动力自由度，两个质点的竖向位移 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$。

2）用刚度法。





K11=$\dfrac{3EI}{L^3}+\dfrac{EI}{L^3}=\dfrac{4EI}{L^3}$ ，K12=K21=$\dfrac{EI}{L^3}$ ，由对称性，K22=$\dfrac{3EI}{L^3}+\dfrac{EI}{L^3}=\dfrac{4EI}{L^3}$

3）频率方程

$$\begin{vmatrix} K_{11}-mw^2 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22}-mw^2 \end{vmatrix}=0$$

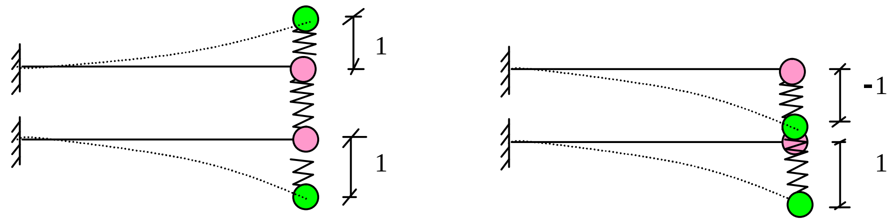
记，$\lambda=\dfrac{w^2L^3}{EI}$ 得：$(4-\lambda)^2-1=0$ ，得：

$$\omega_1=1.732\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}\quad,\quad \omega_2=2.236\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

4）振型

$$\{A_1\}=\{1.0\quad 1.0\}^T\quad,\quad \{A_2\}=\{1.0\quad -1.0\}^T$$

即，发生对称振动及反对称振动。振型图如下：



正对称振动，第一振型　　　　反对称振动，第二振型

例题 6

求图示结构的频率和振型，杆长都是 L，$EI_1=\infty$，EI=常数。

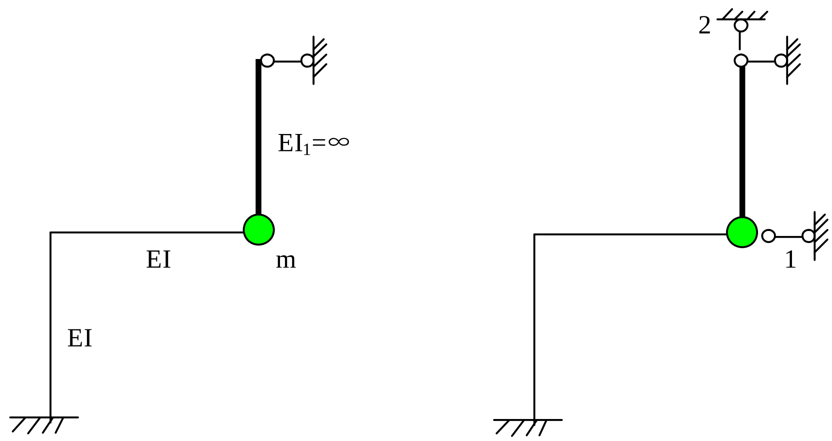


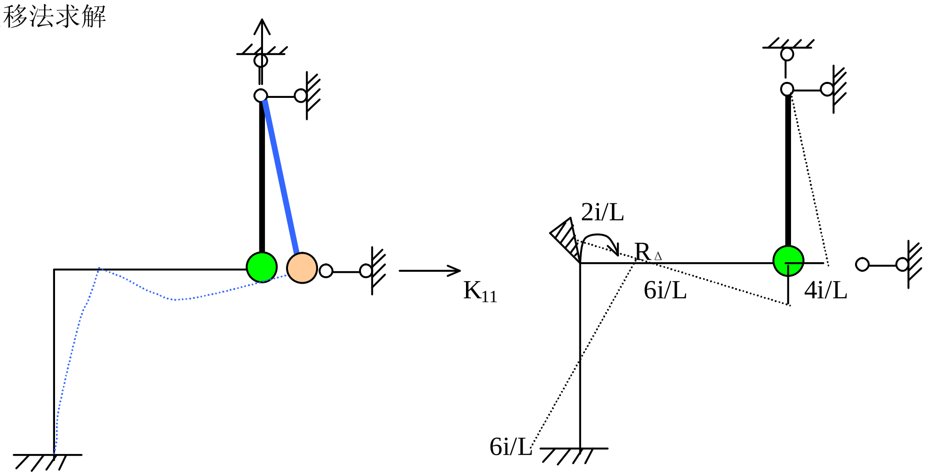
图 1　　　　图 2

解：1）两个动力自由度，质点的水平位移 $y_1(t)$ 和竖向位移 $y_2(t)$。

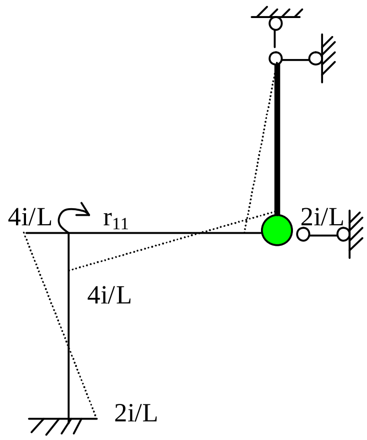
2）用刚度法。

①刚度法求图 2 所示结构在支座 1 产生水平位移时在支座 1 和支座 2 处产生的 K_{11} 及 K_{21}

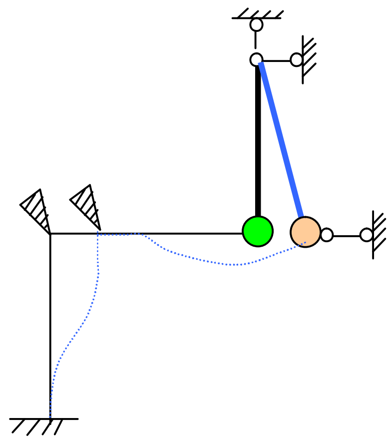
用位移法求解



结构变形　　　　$M_\triangle$图

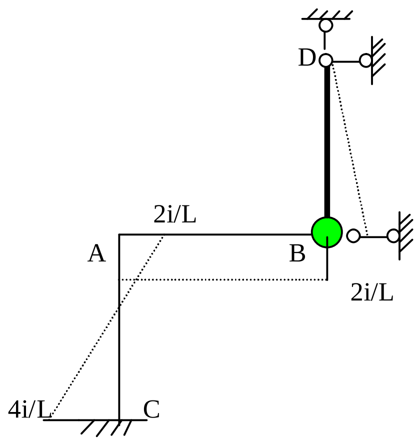


$\overline{M}$ 图

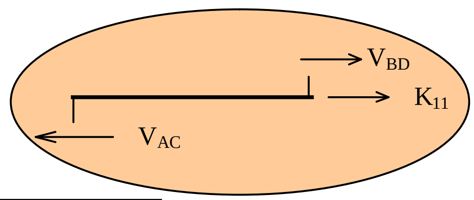


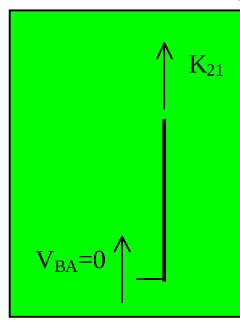
附加刚臂后变形图

$r_{11}=8i$ ，$R_{\Delta}=-\dfrac{8i}{L}$ ，$r_{11}\theta+R_{\Delta}=0$ ，解得：$\theta=\dfrac{1}{L}$ ，作出 M 图如图所示。



M 图





取 AB 杆为研究对象，考虑水平方向的受力平衡，如图，得：$K_{11}=\dfrac{8i}{L^2}$

取 BD 杆为研究对象，考虑竖向的受力平衡，如图，得：$K_{21}=0$

②同理，刚度法求图 2 所示结构在支座 2 产生竖向位移时在支座 1 和支座 2 处产生的 K_{12} 及 K_{22}

（过程略）得：$K_{22}=\dfrac{7.5i}{L^2}$ ，$K_{12}=0$

3）由于 $K_{12}=K_{21}=0$ ，故，

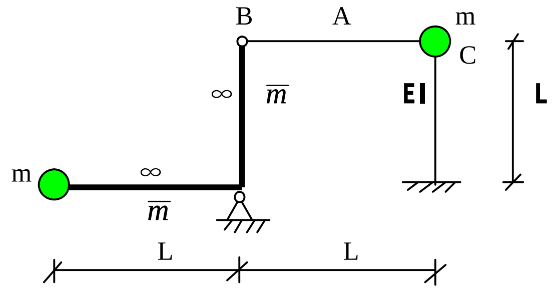
$$w_1=\sqrt{\frac{K_{11}}{m}}=\sqrt{\frac{8EI}{mL^3}} \quad , \quad w_2=\sqrt{\frac{K_{22}}{m}}=\sqrt{\frac{15EI}{2mL^3}}$$

4）振型

$$\{A_1\}=\{1.0 \quad 0.0\}^T \quad , \quad \{A_2\}=\{0.0 \quad 1.0\}^T$$

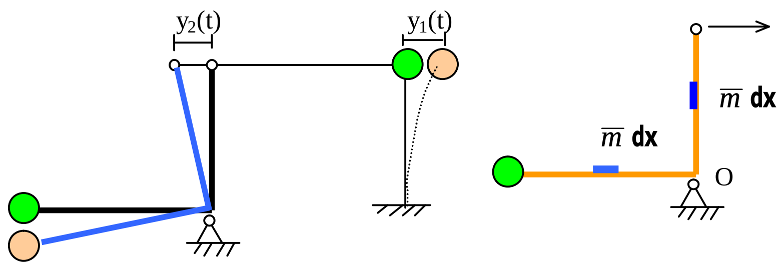
例题 7

求图示结构的频率和振型，已知 A=$\frac{I}{L^2}$ ，杆长都是 L，$\bar{m}=\frac{m}{L}$



解：1）两个动力自由度，质点 C 的水平位移 $y_1(t)$ 和质点 B 的水平位移 $y_2(t)$，如图。

2）用刚度法。



质点 C 的的平衡：$\frac{3EI}{L^3}y_1(t) + \frac{EA}{L}\left(y_1(t)+y_2(t)\right) + m\ddot{y}_1(t) = 0$ ---------（1）

再取图示研究对象，$\sum M_O=0$ ，得：

$$\frac{EA}{L}\left(y_1(t)+y_2(t)\right)L + m\ddot{y}_2(t)L + 2\int_0^l \bar{m}dx\cdot\frac{\ddot{y}_2(t)}{L}\cdot x\cdot x = 0 \qquad \text{---------（2）}$$

代入 A=$\frac{I}{L^2}$ ，并设 $y_1(t)$=$A_1\sin\omega t$ ，$y_2(t)$=$A_2\sin\omega t$ 代入方程（1)、(2）的振型方程：

$$\begin{cases}\left(\frac{4EI}{L^3}-mw^2\right)A_1+\frac{EI}{L^3}A_2=0\\ \frac{EI}{L^3}A_1+\left(\frac{EI}{L^3}-\frac{5}{3}mw^2\right)A_2=0\end{cases}$$

记，$l=\frac{mw^2L^3}{EI}$ ，振型方程的系数行列式等于零可得频率方程：

$5\lambda^2-23\lambda+9=0$

解得：λ_1=**4.168** ，λ_2=**0.432** 从而，

$$\omega_1=2.042\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}\ ,\quad \omega_2=0.657\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

3）振型

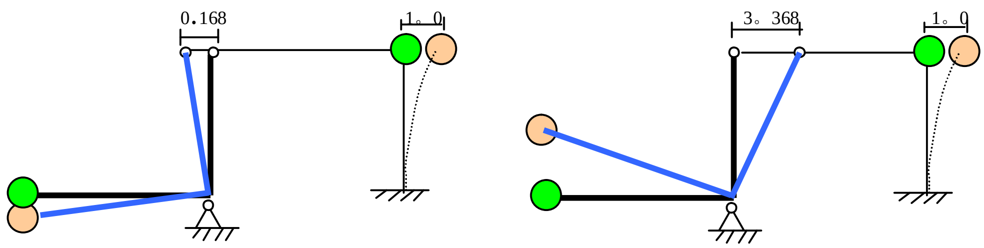
把 λ_1=**4.168** 代入振型方程得第一振型

$$\{A_1\}=\{1.0 \quad 0.168\}^T$$

把λ$_2$=**0.432** 代入振型方程得第二振型

$$\{A_2\}=\{1.0 \quad -3.368\}^T$$

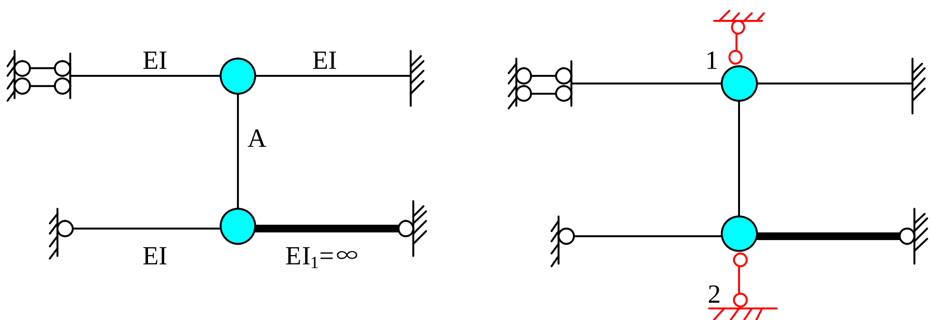
4）振型图



第一振型　　　　第二振型

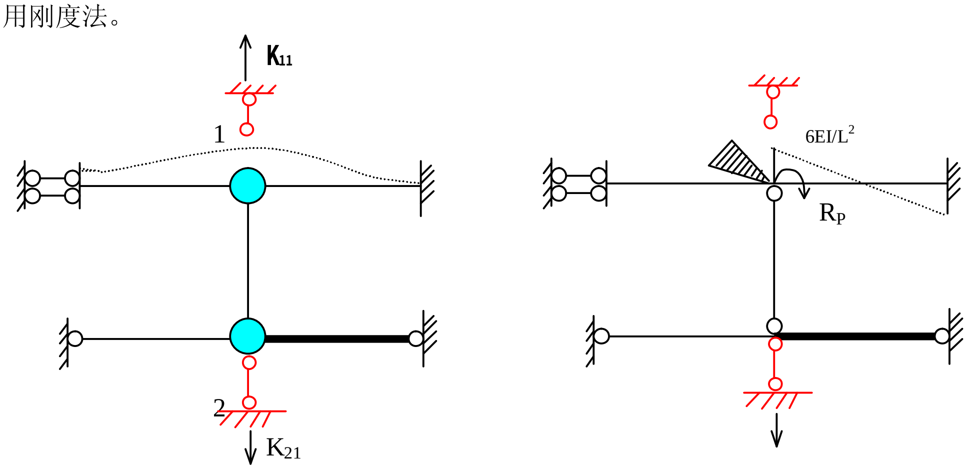
例题 8

求图示结构的频率和振型，已知 A=$\dfrac{I}{2L^2}$ ，杆长都是 L ，质点的质量都是 m



解：1）两个动力自由度， 附加支杆 1 与 2 ，如图。

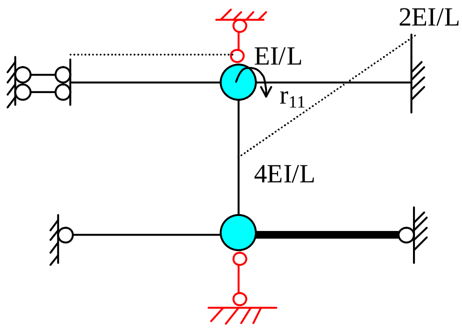
2）用刚度法。

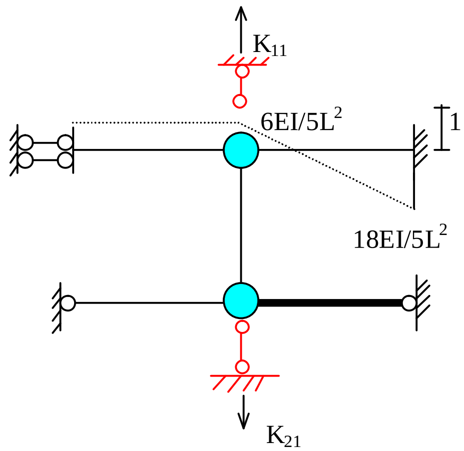


K_{11} 、K_{21} 的意义　　　　M_Δ图

①位移法：附加刚臂，支杆 1 发生单位位移时作出 M_Δ 图，$R_P=-\dfrac{6EI}{L^2}$

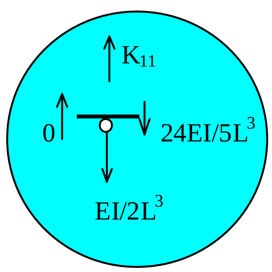
再作出 $\overline{M}$ 图，$r_{11}=\dfrac{5EI}{L}$ ，解出 $\theta=\dfrac{6}{5L}$ ，作出 M 图如下：





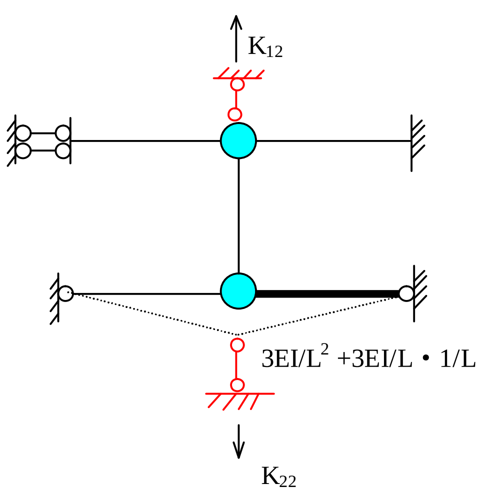
$\overline{M}$ 图　　　　　　　　M 图

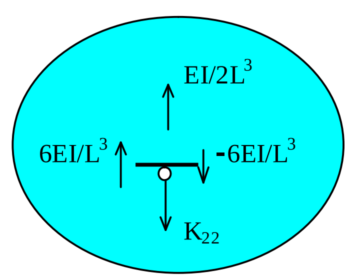
取质点 1 为研究对象，作出受力图如下：



$K_{11}=\dfrac{53EI}{10L^3}$ ，显然，$K_{21}=\dfrac{EI}{2L^3}$

②当支杆 **2** 发生单位位移时，作出 **M** 图如下，并取质点 **2** 为研究对象。





$K_{22}=\dfrac{EI}{2L^3}+\dfrac{6EI}{L^3}+\dfrac{6EI}{L^3}=\dfrac{25EI}{2L^3}$ ，显然，$K_{12}=\dfrac{EI}{2L^3}$

3）频率方程

$$\begin{vmatrix} K_{11}-mw^2 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22}-mw^2 \end{vmatrix}=0$$

代入 K_{ij} ，并记 $\lambda=\dfrac{mw^2L^3}{EI}$ 得：

$5\lambda^2 - 89\lambda + 330 = 0$ 解得：

$\lambda_1=5.625$ **$\lambda_2=12.535$** 从而

$\omega_1=2.296\sqrt{\dfrac{EI}{mL^3}}$ ，$\omega_2=3.54\sqrt{\dfrac{EI}{mL^3}}$

4）振型

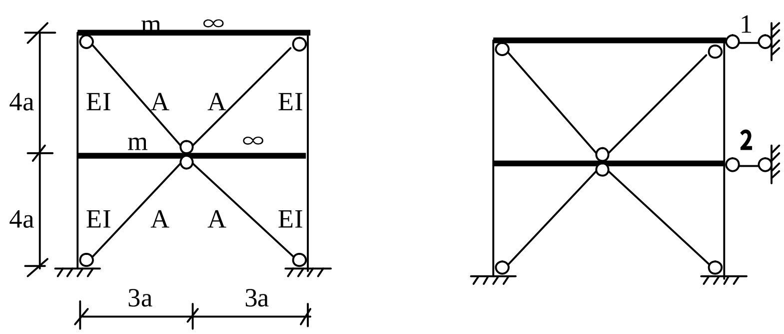
$\{A_1\}=\{1.0 \quad -0.07\}^T$ ，$\{A_2\}=\{1.0 \quad 14.47\}^T$

5）振型图

（略）

例题 9

求图示框桁结构的频率和振型，已知 A=$\dfrac{I}{a^2}$ ，图中粗线为无穷大刚性杆件。



解：1）两个动力自由度，上梁质量 m 的水平位移 $y_1(t)$ 和下梁质量 m 的水平位移 $y_2(t)$

2）求刚度系数

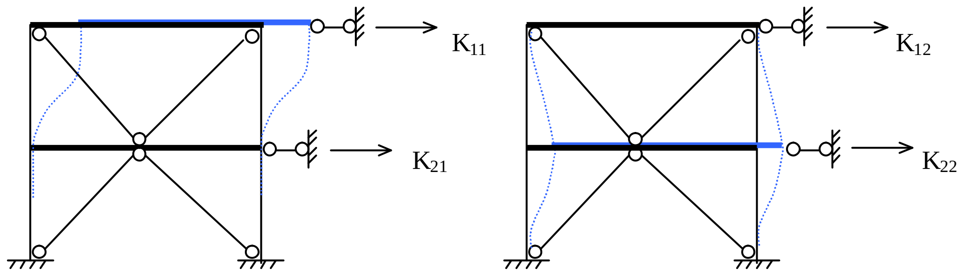


图 1　　　　　　　　　　　图 2

K_{ij} 的意义见图 1 和图 2 所示。

图 1 中，当支杆 1 发生水平位移时，上层内的两个二力杆中，一个伸长；一个缩短。

$$K_{11}=\frac{24EI}{(4a)^3}+\frac{EA}{5a}\cdot\cos a\cdot\cos a+\frac{EA}{5a}\cdot\cos a\cdot\cos a=0.519\frac{EI}{a^3}$$

$$K_{21}=-K_{11}=-0.519\frac{EI}{a^3}$$

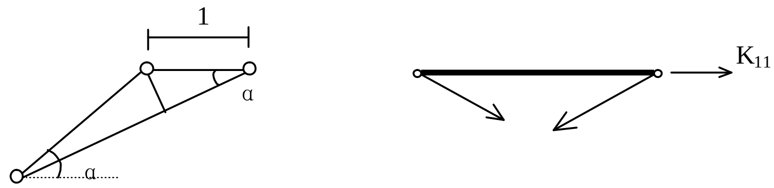


图 2 中，当支杆 2 发生水平位移时，上、下两层内的四个二力杆中，两个伸长；两个缩短。

$$K_{22}=\frac{48EI}{(4a)^3}+\frac{EA}{5a}\cdot\cos a\cdot\cos a\times 4=2K_{11}=1.038\frac{EI}{a^3}$$

3）频率方程

记，$l=\frac{mw^2a^3}{EI}$，则频率方程为

$$\begin{vmatrix}0.519-l & -0.519\\ -0.519 & 1.038-l\end{vmatrix}=0$$

解得：$\lambda_1=0.19824$，$\lambda_2=1.35876$　　从而，

$\omega_1=0.4452\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$，$\omega_2=1.1657\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$

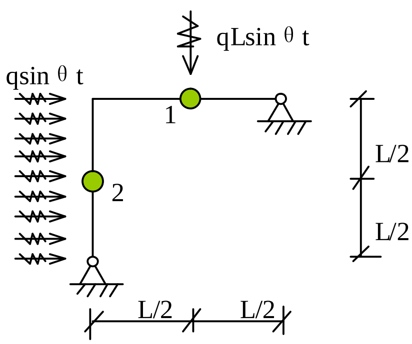
4）振型

$\{A_1\}=\{1.0\quad 1.618\}^T$，$\{A_2\}=\{1.0\quad -0.618\}^T$

多自由度强迫振动习题课

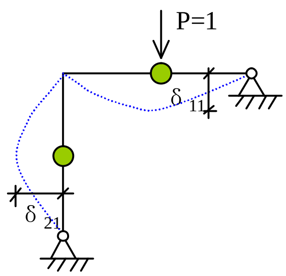
例题 1

试绘制图示结构最大动力弯矩图，EI=常数，$q=4\sqrt{\dfrac{EI}{mL^3}}$ ，ξ =0

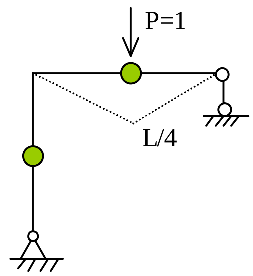


解：1）两个动力自由度

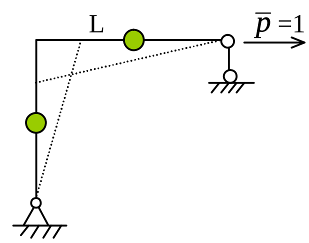
2）计算质点 1、质点 2 处的柔度系数。用力法



δ 11、δ 21 的意义

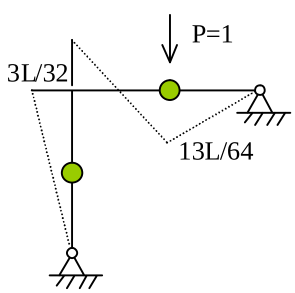


M_{P1} 图

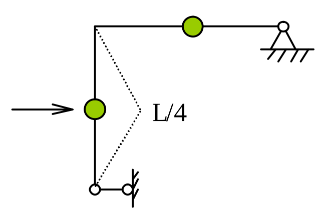


$\bar{M}$ 图

依 M_P 图及 $\bar{M}$ 图作出 **P=1** 作用于质点 **1** 时产生的弯矩图 $\bar{M}_1$ 图如下：



$\bar{M}_1$

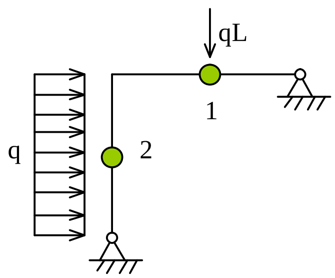


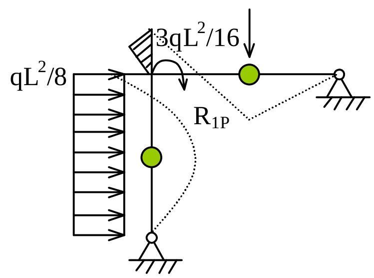
M_{P2} 图

$\bar{M}_1$ 与 M_{P1} 图图乘得 $d_{11}=\dfrac{23L^3}{1536EI}$ ，$\bar{M}_1$ 与 M_{P2} 图图乘得 $d_{21}=-\dfrac{9L^3}{1536EI}$

由对称性 $d_{22}=\dfrac{23L^3}{1536EI}$

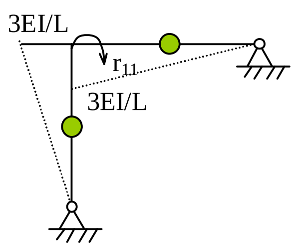
3）求简谐荷载幅值在 1，2 两质点处产生的静位移 Δ_{1P} 及 Δ_{2P}



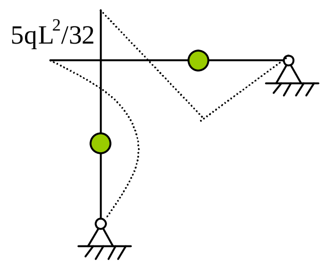


M_P 图

用位移法作出 M 图。作出 M_P 图，求得 $R_{1P}=-\dfrac{qL^2}{16}$，再作出 $\overline{M}$ 图及求出 $r_{11}=\dfrac{6EI}{L}$



$\overline{M}$ 图

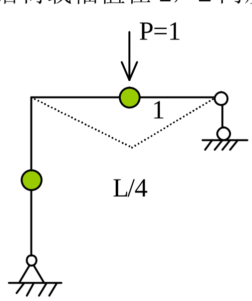


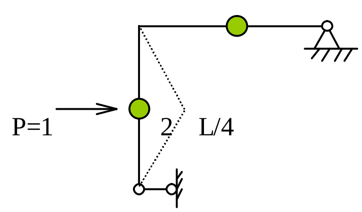
M 图

$r_{11}\cdot q + R_{1P}=0$ ，求出 $q=\dfrac{qL^3}{96EI}$

$M= M_P+ \overline{M}\cdot q$　　作出 M 图。

为求简谐荷载幅值在 1，2 两质点处产生的位移，作出如下两图。





M 图与上两图图乘，可得：$\Delta_{1P}=\dfrac{17qL^4}{1536EI}$ ，$\Delta_{2P}=\dfrac{5qL^4}{1536EI}$

4）写出振动方程，求出质点的振幅

$$
\begin{cases}
y_1(t) = -md_{11}\ddot{y}_1(t) - md_{21}\ddot{y}_2(t) + \Delta_{1P}\sin qt \\
y_2(t) = -md_{21}\ddot{y}_1(t) - md_{22}\ddot{y}_2(t) + \Delta_{2P}\sin qt
\end{cases}
$$

设方程的特解为：

$$\begin{cases} y_1(t) = A_1 \sin qt \\ y_2(t) = A_2 \sin qt \end{cases}$$

代入振动方程，得振型方程：

$$\begin{cases} (md_{11}q^2 - 1)A_1 + md_{12}q^2 A_2 = \Delta_{1P} \\ md_{21}A_1 + (md_{22}q^2 - 1)A_2 = \Delta_{2P} \end{cases}$$

式中，δ_{ij} ，θ ，Δ_{iP} 已知，代入振型方程，整理得：

$$\begin{cases} 9A_1 + 73A_2 + \dfrac{5qL^4}{16EI} = 0 \\ 73A_1 + 9A_2 + \dfrac{17qL^4}{16EI} = 0 \end{cases}$$

解得两质点的位移幅值：

$$\begin{cases} A_1 = -0.01424 \cdot \dfrac{qL^4}{EI} \\ A_2 = -0.0025 \cdot \dfrac{qL^4}{EI} \end{cases}$$

5）质点的惯性力幅值

依惯性力 $I = -m\ddot{y}(t) = mq^2 A \sin qt$ 得：

$$(I_1)_{\max} = mA_1q^2 = -0.2278qL$$

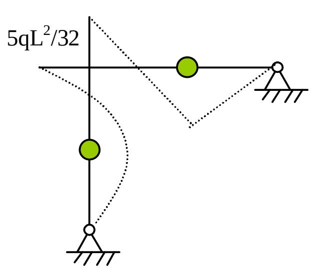
$$(I_2)_{\max} = mA_2q^2 = -0.0404qL$$

负号表示惯性力方向与所设的单位力方向相反。

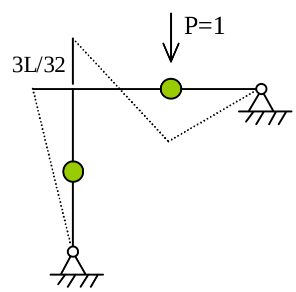
6）最大动力弯矩公式

$M_{\max} = M_P + \overline{M}_1 \cdot (I_1)_{\max} + \overline{M}_2 \cdot (I_2)_{\max}$

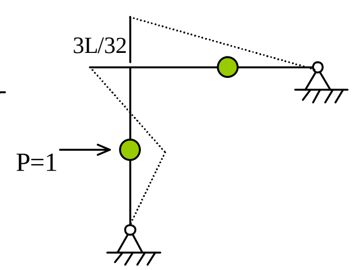
即如下三个图的叠加



M_P图（静荷载幅值产生）

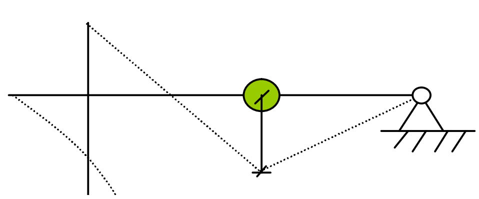


$\overline{M}_1$ · 图



$\overline{M}_2$ · 图

需注意的是，振动中体系的振动频率为 θ ，稳态振动。故，叠加公式中的$(I_1)_{\max}$ 与$(I_2)_{\max}$ 应取绝对值计算。最大动力弯矩图如下：



$0.1814qL^2$

$0.294qL^2$

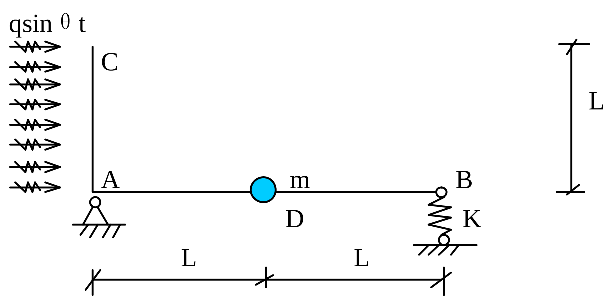
$0.0444qL^2$

最大动力弯矩图

例题 2

求图示结构 B 点最大竖向位移 Δ_{BV} ，并绘最大动力弯矩。已知，EI=常数，不计阻尼，

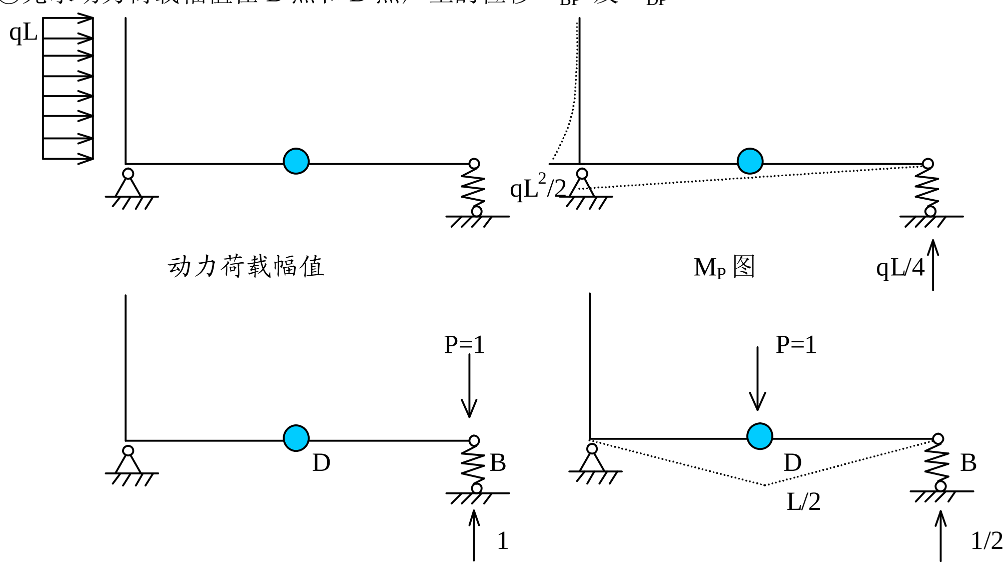
$$q=\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}\quad ,\ K=\frac{EI}{L^3}$$



解：1）动力自由度为 1，D 点的竖向位移 $y(t)$

2）B 点的最大位移应由静位移和动力位移的叠加。用柔度法建立振动方程

①先求动力荷载幅值在 B 点和 D 点产生的位移 Δ_{BP} 及 Δ_{DP}



动力荷载幅值　　M_P 图

M_1 图　　M_2 图

$\Delta_{BP}=\dfrac{1}{K}\cdot\dfrac{qL}{4}\cdot 1 = \dfrac{L^3}{EI}\cdot\dfrac{qL}{4}\cdot 1 = \dfrac{qL^4}{4EI}$ ，

$\Delta_{DP}=\dfrac{1}{EI}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2L\cdot\dfrac{L}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{qL^2}{2}\right)+\dfrac{1}{K}\cdot\dfrac{qL}{4}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{qL^4}{4EI}$

②再求质点的惯性力为 **1** 时在 **B** 和 **D** 点产生的竖向位移 δ_{DD} 及 δ_{BD}

M_1 与 M_2 图乘得 δ_{BD} ，M_2 自图乘得 δ_{DD}

$\delta_{DD}=\dfrac{5L^3}{12EI}$ ， $\delta_{BD}=\dfrac{L^3}{EI}$

3）振动方程

$$\begin{cases} y(t) = -m\ddot{y}(t)\delta_{DD} + \Delta_{DP}\sin\theta t \\ y_B(t) = -m\ddot{y}(t)\delta_{BD} + \Delta_{BP}\sin\theta t \end{cases}$$

先解第一个方程，令 $y(t) = A\sin\theta t$ ，代入第一个方程得：

$$A=\frac{\Delta_{DP}}{1-m\theta^2\delta_{DD}}=\frac{3qL^4}{7EI}$$

以 $y(t)=\dfrac{3qL^4}{7EI}\sin\theta t$ 代入第二个方程得：

$$y_B(t)=\frac{13qL^4}{28EI}\sin\theta t$$

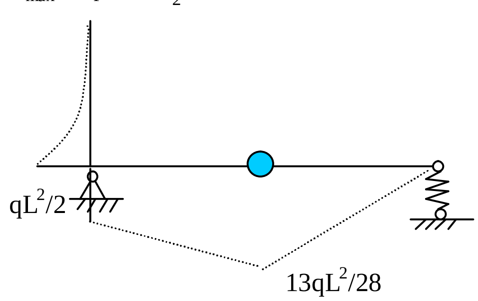
$$\left(y_B(t)\right)_{\max}=\frac{13qL^4}{28EI}$$

4）质点惯性力幅值

$$I=m\theta^2 A=m\frac{EI}{mL^3}\frac{3qL^4}{7EI}=\frac{3qL}{7}$$

5）最大动力弯矩图

依 $M_{max}=M_P + M_2\cdot I$ 画出最大动力弯矩图如下

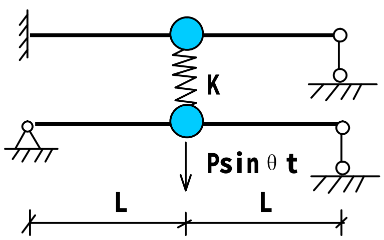


最大动力弯矩图

例题 **3**

求图示结构的质点的最大动力位移，并绘最大动力弯矩图。已知，**EI**=常数， ξ **=0**，

$q=\sqrt{\dfrac{4EI}{mL^3}}$ ，弹簧刚度 **K**=$\dfrac{EI}{L^3}$ ，质点的质量都是 m 。



解：**1**）两个动力自由度

2）宜用刚度法求解

①图 **1** 所示结构当支座 **1** 产生单位位移时，求 K_{11} 及 K_{22} 。用位移法

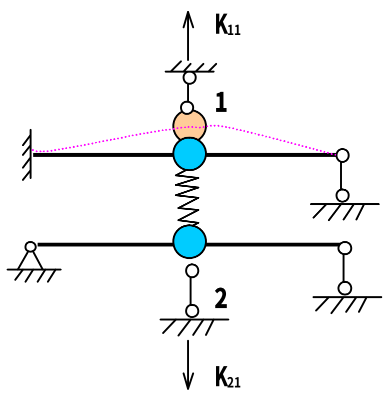
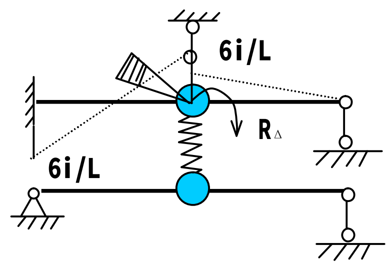
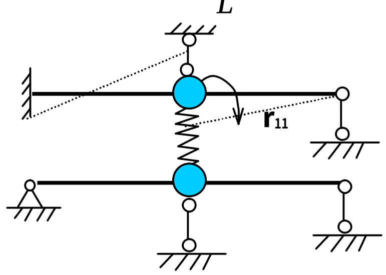


图 **1**

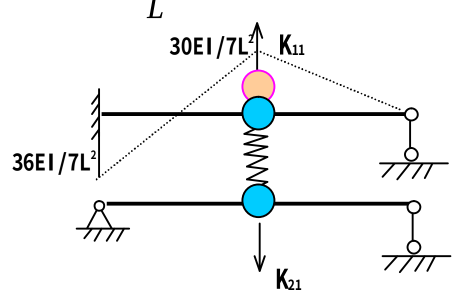


M_Δ图

作出 M_Δ图，求出 $R_\Delta=\dfrac{3EI}{L^2}$ ，再作出 $\overline{M}$ 图，求出 $r_{11}=\dfrac{7EI}{L}$，解位移法方程作出 M_1 图。



$\overline{M}$ 图



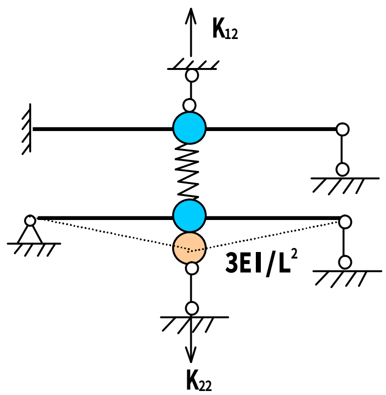
M_1 图

不难求得：$K_{11}=\dfrac{EI}{L^3}+\dfrac{30EI}{7L^3}+\dfrac{66EI}{7L^3}=\dfrac{103EI}{7L^3}$ ，$K_{21}=\dfrac{EI}{L^3}$

②由于下梁具有对称性，故，当质点 **2** 有单位位移时，质点 **2** 处梁截面无转角。

弯矩图可直接作出。

$$K_{22}=\frac{EI}{L^3}+\frac{3EI}{L^3}+\frac{3EI}{L^3}=\frac{7EI}{L^3}\quad ,\quad K_{12}=\frac{EI}{L^3}$$



M_2 图

3）振动方程

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1(t)+K_{11}y_1(t)+K_{12}y_2(t)=0 \\ m\ddot{y}_2(t)+K_{21}y_1(t)+K_{22}y_2(t)=P\sin qt \end{cases}$$

设方程的解为：

$$\begin{cases} y_1(t)=A_1\sin qt \\ y_2(t)=A_2\sin qt \end{cases}$$

，代入方程得：

$$\begin{cases} 75A_1+7A_2=0 \\ A_1+3A_2=\dfrac{PL^3}{EI} \end{cases}$$

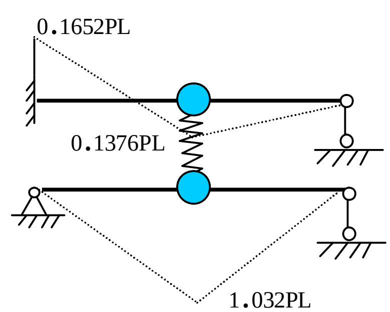
解得最大位移反应：

$$A_1=-0.0321\frac{PL^3}{EI}$$

$$A_1=0.344\frac{PL^3}{EI}$$

4）最大动力弯矩图

$M_{max}=M_1A_1+M_2A_2$

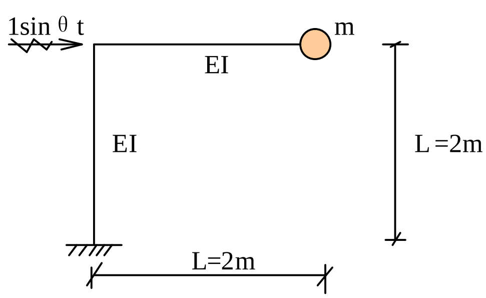


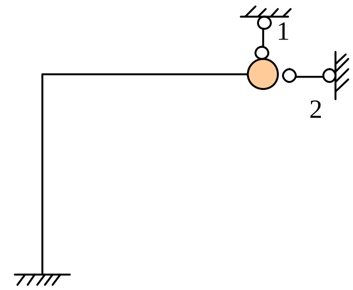
最大动力弯矩图

例题 4

求质点的最大动位移，并绘最大动力弯矩图。已知，动力荷载幅值为 1KN ，$q=\sqrt{\dfrac{4EI}{mL^3}}$，

EI=9×**10^{3}KN·**m ，不计阻尼。

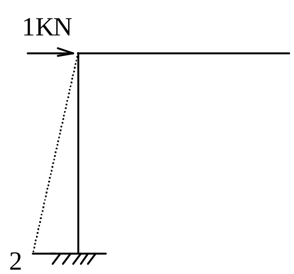




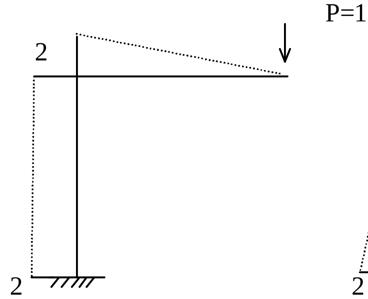
解：1)求自振频率和振型。
不难求得质点惯性力为 1 时在质点振动方向产生的位移，即柔度系数

$\delta_{11}=\dfrac{32}{3EI}$ ，$\delta_{12}=\delta_{12}=\dfrac{4}{EI}$ ，$\delta_{22}=\dfrac{8}{3EI}$

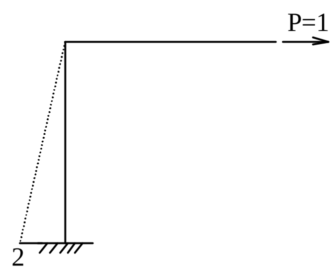
2）动荷载幅值在质点处产生的竖向和水平方向的位移 Δ_{1P} 及 Δ_{2P}



M_P 图



$\overline{M}_1$ 图



$\overline{M}_2$ 图

$\Delta_{1P}=\dfrac{4}{EI}=4.4444\times10^{-4}$ ，$\Delta_{2P}=\dfrac{8}{3EI}=2.9629\times10^{-4}$

3）写出振动方程，求出质点的振幅

$$\begin{cases} y_1(t)=-md_{11}\ddot{y}_1(t)-md_{21}\ddot{y}_2(t)+\Delta_{1P}\sin qt \\ y_2(t)=-md_{21}\ddot{y}_1(t)-md_{22}\ddot{y}_2(t)+\Delta_{2P}\sin qt \end{cases}$$

设方程的特解为：

$$\begin{cases} y_1(t)=A_1\sin qt \\ y_2(t)=A_2\sin qt \end{cases}$$

代入振动方程，得振型方程：

$$\begin{cases} (md_{11}q^2-1)A_1+md_{12}q^2A_2=\Delta_{1P} \\ md_{21}A_1+\left(md_{22}q^2-1\right)A_2=\Delta_{2P} \end{cases}$$

式中，δ_{ij} ，θ ，Δ_ip 已知，代入振型方程，整理得：

$$\begin{cases}13A_1+6A_2=-1.3333\times10^{-3}\\ 6A_1+A_2=-0.8888\times10^{-3}\end{cases}$$

解得两质点的位移幅值（最大动位移）：

$A_1=-1.7391\times10^{-4}$（米）

$A_2=1.5459\times10^{-4}$（米）

4）质点的惯性力幅值

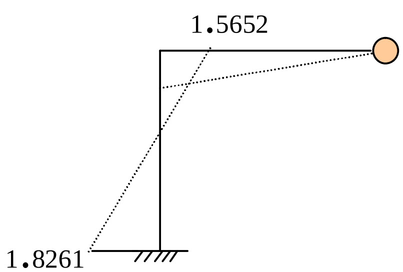
依惯性力 $I=-m\ddot{y}(t)=mq^2A\sin qt$ 得：

$(I_1)_{max}=-0.7826$（KN）

$(I_2)_{max}=\ \ 0.6957$（KN）

5）求最大动力弯矩图

$$M_{max}=M_P+\overline{M}_1\cdot(I_1)_{max}+\overline{M}_2\cdot(I_2)_{max}$$

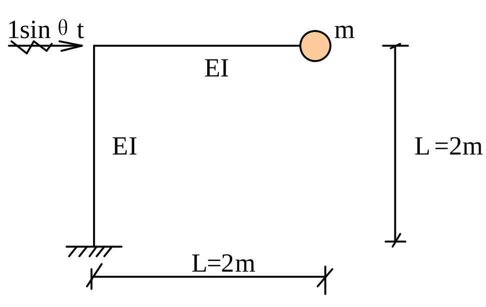


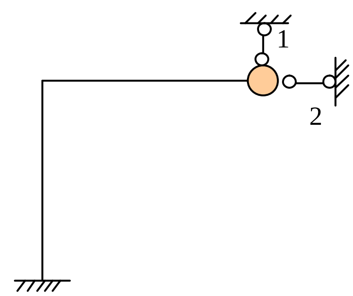
M_{max}图，单位：KN·m

例题 5

用振型叠加法求解图示质点处的最大位移，已知，$\xi_1=\xi_2=0.10$，动力荷载幅值为 1KN，

$q=\sqrt{\dfrac{4EI}{mL^3}}$，**EI=9×10³KN·m**





解：1)求自振频率和振型。

由例题 4，求得柔度系数后，代入频率方程得：$\omega_1=0.285\sqrt{\dfrac{EI}{m}}$，$\omega_1=0.995\sqrt{\dfrac{EI}{m}}$，

代入振型方程得：$\{A_1\}=\{1.0\quad 0.414\}^T$，$\{A_2\}=\{1.0\quad -2.414\}^T$

用位移法或直接求柔度矩阵的逆，不难得出刚度矩阵$[K]$

2)求广义质量、广义刚度、广义荷载

$$M_1^* = \{A_1\}^T [M] \{A_1\} = \{1.0 \quad 0.414\} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.414 \end{Bmatrix} = 1.1716\text{m}$$

$$K_1^* = \{A_1\}^T \cdot \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \{A_1\} = \{1.0 \quad 0.414\} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3EI}{14} & -\frac{9EI}{28} \\ -\frac{9EI}{28} & \frac{6EI}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.414 \end{Bmatrix} = 0.095EI$$

$$P_1^*(t) = \{A_1\}^T \{P(t)\} = \{1.0 \quad 0.414\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ P\sin qt \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{M_1^*} = \frac{0.3534}{m} \sin\theta t$$

$$\ddot{q}_1(t) + 2x_1 \cdot w_1 \dot{q}_1(t) + w_1^2 q(t) = P_1^*(t) \qquad \text{-------------------（1）}$$

同理，$M_2^* = 6.827m$ ，$K_2^* = 6.761EI$ ，$P_2^*(t) = -\frac{0.3536}{m}\sin\theta t$

$$\ddot{q}_2(t) + 2x_2 \cdot w_2 \dot{q}_2(t) + w_2^2 q(t) = P_2^*(t) \qquad \text{-------------------（2）}$$

3）求解（1)、（2）可用杜哈美积分

$$q_j(t) = \frac{P_j^*}{mw_j^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{q}{w_j}\right)^2\right)^2 + 4x_j^2 \left(\frac{q}{w_j}\right)^2}} \sin(\theta t + \varepsilon_j)$$

式中，$tge_j = -\frac{2x_j w_j q}{w_j^2 - q^2}$

$$q_1(t) = 9.34 \times 10^{-5} \sin(qt + e_1)$$

$$q_2(t) = -7.7 \times 10^{-5} \sin(qt + e_2)$$

4）位移反应

由 $\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix}$ 得：

$$y_1(t) = A_{11}q_1(t) + A_{12}q_2(t) = 9.34 \times 10^{-5} \sin(qt + e_1) - 7.7 \times 10^{-5} \sin(qt + e_2)$$

$$y_2(t) = A_{21}q_1(t) + A_{22}q_2(t) = 3.87 \times 10^{-5} \sin(qt + e_1) + 18.59 \times 10^{-5} \sin(qt + e_2)$$

整理后得：

$$y_1(t) = 10^{-4}(-1.67\sin qt - 0.302\cos qt)$$

$$y_2(t) = 10^{-4}(0.8573\sin qt + 0.4233\cos qt)$$

从而得：

$$\left(y_1(t)\right)_{\max} = 1.697 \times 10^{-4} \text{（米）}$$

$$\left(y_2(t)\right)_{\max} = 0.956 \times 10^{-4} \text{（米）}$$

与例题 4 比较，质点的竖向最大位移由于阻尼的作用减小了 2.4%；水平位移减小了 38.0%。