习题 2-1

判断下列方程是否为恰当方程，并且对恰当方程求解：

1．$(3x^2-1)dx+(2x+1)dy=0$

解：$P(x,y)=3x^2-1$，$Q(x,y)=2x+1$，

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2$，所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 即，原方程不是恰当方程.

2．$(x+2y)dx+(2x+y)dy=0$

解：$P(x,y)=x+2y,\quad Q(x,y)=2x-y,$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2,$ 所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即 原方程为恰当方程

则 $xdx+(2ydx+2xdy)-ydy=0,$

两边积分得：$\dfrac{x^2}{2}+2xy-\dfrac{y^2}{2}=C.$

3．$(ax+by)dx+(bx+cy)dy=0$ (a,b 和 c 为常数).

解：$P(x,y)=ax+by,\quad Q(x,y)=bx+cy,$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=b,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=b,$ 所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即 原方程为恰当方程

则 $axdx+(bydx+bxdy\ +cydy=0,$

两边积分得：$\dfrac{ax^2}{2}+bxy+\dfrac{cy^2}{2}=C.$

4．$(ax-by)dx+(bx-cy)dy=0\qquad(b\neq 0)$

解：$P(x,y)=ax-by,\quad Q(x,y)=bx-cy,$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-b,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=b,$ 因为 $b\neq 0$，所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即，原方程不为恰当方程

5． $(t^2+1)\cos udu+2t\sin udt=0$

解：$P(t,u)=(t^2+1)\cos u, \quad Q(t,u)=2t\sin u$

则 $\frac{\partial P}{\partial t}=2t\cos u, \frac{\partial Q}{\partial x}=2t\cos u,$ 所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即 原方程为恰当方程

则 $(t^2\cos udu+2t\sin udt)+\cos udu=0,$

两边积分得：$(t^2+1)\sin u=C.$

6． $(ye^x+2e^x+y^2)dx+(e^x+2xy)dy=0$

解： $P(x,y=ye^x+2e^x+y^2$，$Q(x,y)=e^x+2xy$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=e^x+2y, \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x+2y,$ 所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即 原方程为恰当方程

则 $2e^xdx+[(ye^x+y^2)dx+(e^x+2xy)dy]=0,$

两边积分得：$(2+y)e^x+xy^2=C.$

7． $(\frac{y}{x}+x^2)dx+(\ln x-2y)dy=0$

解：$P(x,y)=\frac{y}{x}+x^2 \quad Q(x,y)=\ln x-2y,$

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x}, \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{x},$ 所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即 原方程为恰当方程

则 $(\frac{y}{x}dx+\ln xdy)+x^2dx-2ydy=0$

两边积分得：$\frac{x^3}{3}+y\ln x-y^2=C.$

8． $(ax^2+by^2)dx+cxydy=0 \quad (a,b和c为常数)$

解：$P(x,y)=ax^2+by^2$，$Q(x,y)=cxy,$

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=2by, \frac{\partial Q}{\partial x}=cy,$ 所以 当 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即 $2b=c$ 时， 原方程为恰当方程

则 $ax^2dx+(by^2dx+cxydy)=0$

两边积分得：$\dfrac{ax^3}{3}+bxy^2=C.$

而当 $2b\neq c$ 时原方程不是恰当方程.

9． $\dfrac{2s-1}{t}ds+\dfrac{s-s^2}{t^2}dt=0$

解：$P(t,s)=\dfrac{2s-1}{t}$，$Q(t,s)=\dfrac{s-s^2}{t^2}$,

则 $\dfrac{\partial P}{\partial t}=\dfrac{1-2s}{t^2},\dfrac{\partial Q}{\partial s}=\dfrac{1-2s}{t^2}$， 所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$， 即原方程为恰当方程,

两边积分得：$\dfrac{s-s^2}{t}=C$.

10． $xf(x^2+y^2)dx+yf(x^2+y^2)dy=0$, 其中 $f(\cdot)$ 是连续的可微函数.

解：$P(x,y)=xf(x^2+y^2)$， $Q(x,y)=yf(x^2+y^2)$,

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xyf',\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2xyf'$， 所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$， 即原方程为恰当方程,

两边积分得：$\int f(x^2+y^2)dx=C$,

即原方程的解为 $F(x^2+y^2)=C$ (其中 F 为 f 的原积分).

习题 2-2

1. 求解下列微分方程，并指出这些方程在平面上的有意义的区域::

（1）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y}$

解：原方程即为：$ydy=x^2dx$

两边积分得：$3y^2-2x^3=C,\quad y\neq 0$.

（2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$

解：原方程即为：$ydy=\dfrac{x^2}{1+x^3}dx$

两边积分得：$3y^2-2\ln\left|1+x^3\right|=C,\quad y\neq 0,\qquad x\neq -1$.

（3）$\dfrac{dy}{dx}+y^2\sin x=0$

解：　当 $y\neq 0$ 时

原方程为：$\dfrac{dy}{y^2}+\sin xdx=0$

两边积分得：$1+(c+\cos x)y=0$.

又 y=0 也是方程的解，包含在通解中，则方程的通解为

$1+(c+\cos x)y=0$.

（4）$\dfrac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2$；

解：原方程即为：$\dfrac{dy}{1+y^2}=(1+x)dx$

两边积分得：$arctgy=x+\dfrac{x^2}{2}+c$，

即　$y=tg(x+\dfrac{x^2}{2}+c)$.

(5) $\frac{dy}{dx}=(\cos x\cos 2y)^2$

解：①当 $\cos 2y\neq 0$ 时

原方程即为：$\frac{dy}{(\cos 2y)^2}=(\cos x)^2dx$

两边积分得：$2tg2y-2x-2\sin 2x=c$.

② $\cos 2y$=0，即 $y=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ 也是方程的解.（$k\in N$）

(6) $x\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$

解：①当 $y\neq\pm 1$ 时

原方程即为：$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{x}$

两边积分得：$\arcsin y-\ln|x|=c$.

② $y=\pm 1$ 也是方程的解.

(7). $\frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$

解．原方程即为：$(y+e^y)dy=(x-e^{-x})dx$

两边积分得：$\frac{y^2}{2}+e^y=\frac{x^2}{2}+e^{-x}+c$，

原方程的解为：$y^2-x^2+2(e^y-e^{-x})=c$.

2. 解下列微分方程的初值问题.

(1) $\sin 2xdx+\cos 3ydy=0,\quad y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{3}$；

解：两边积分得：$-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\sin 3y}{3}=c$，　即　$2\sin 3y-3\cos 2x=c$

因为　$y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{3}$　，所以　$c=3$.

所以原方程满足初值问题的解为：$2\sin 3y-3\cos 2x=3$.

(2). $xdx+ye^{-x}dy=0$， $y(0)=1$；

解：原方程即为：$xe^{x}dx+ydy=0$，

两边积分得：$(x-1)e^{x}dx+\frac{y^2}{2}dy=c$，

因为 $y(0)=1$， 所以 $c=-\frac{1}{2}$，

所以原方程满足初值问题的解为：$2(x-1)e^{x}dx+y^2dy+1=0$.

(3). $\frac{dr}{d\theta}=r$， $r(0)=2$；

解：原方程即为：$\frac{dr}{r}=d\theta$，两边积分得：$\ln r-\theta=c$，

因为 $r(0)=2$， 所以 $c=\ln 2$，

所以原方程满足初值问题的解为：$\ln r-\theta=\ln 2$ 即 $r=2e^{\theta}$.

(4). $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln|x|}{1+y^2}$， $y(1)=0$；

解：原方程即为：$(1+y^2)dy=\ln|x|dx$,

两边积分得：$y+\frac{y^3}{3}+x-x\ln|x|=c$,

因为 $y(1)=0$， 所以 $c=1$，

所以原方程满足初值为：$y+\frac{y^3}{3}+x-x\ln|x|=1$

(5). $\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx}=xy^3$， $y(0)=1$；

解：原方程即为：$\frac{dy}{y^3}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$，

两边积分得：$-\frac{1}{2}y^{-2}=\sqrt{1+x^2}+c$，

因为 $y(0)=1$，　所以 $c=-\frac{3}{2}$，

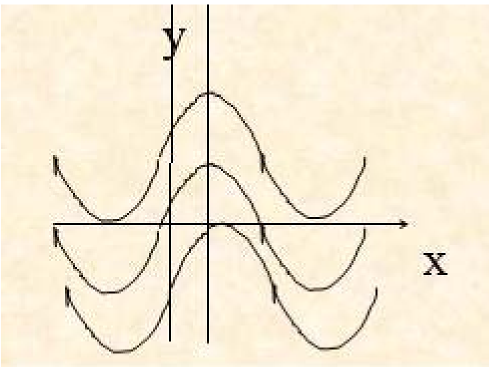
所以原方程满足初值问题的解为：$2\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{y^2}=3$.

3. 解下列微分方程，并作出相应积分曲线的简图.

(1). $\frac{dy}{dx}=\cos x$

解：两边积分得：$y=\sin x+c$.

积分曲线的简图如下：



(2). $\frac{dy}{dx}=ay$，　(常数 $a\neq 0$)；

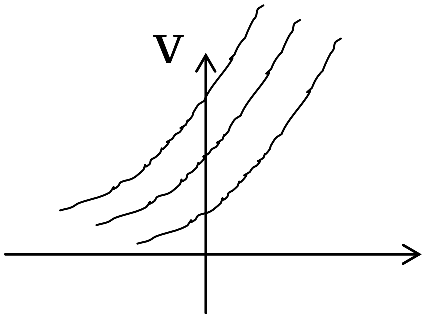
解：①当 $y\neq 0$ 时，

原方程即为：$\frac{dy}{ay}=dx$　积分得：$\frac{1}{a}\ln|y|=x+c$，

即　$y=ce^{ax}$　$(c>0)$

② $y=0$ 也是方程的解.

积分曲线的简图如下：



(3). $\dfrac{dy}{dx}=1-y^2$；

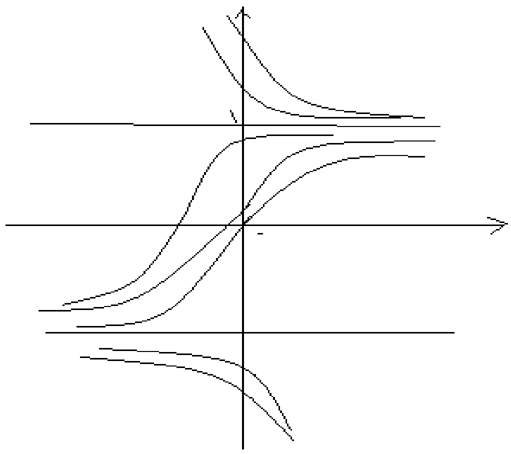
解：①当 $y\neq\pm1$ 时，

原方程即为：$\dfrac{dy}{(1-y^2)}=dx$　积分得：$\ln\left|\dfrac{1+y}{1-y}\right|=2x+c$，

即　$y=\dfrac{ce^{2x}-1}{ce^{2x}+1}$.

② $y=\pm1$ 也是方程的解.

积分曲线的简图如下：



(4). $\dfrac{dy}{dx}=y^n$，　$(n=\dfrac{1}{3},1,2)$；

解：　①当 $y\neq0$ 时，

i) $n=\dfrac{1}{3},2$ 时，原方程即为　$\dfrac{dy}{y^n}=dx$，

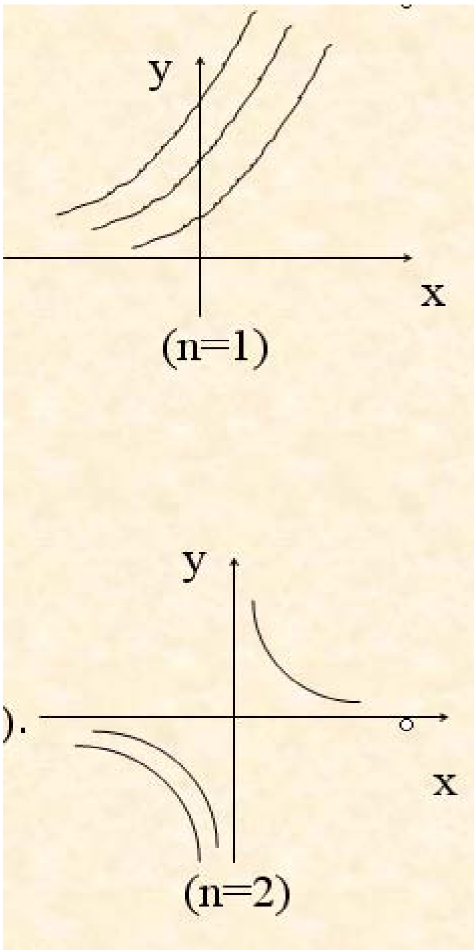
积分得：$x+\dfrac{1}{n-1}y^{1-n}=c$.

ii) $n=1$ 时，原方程即为　$\dfrac{dy}{y}=dx$

积分得：$\ln|y|=x+c$，即　$y=ce^x$　$(c>0)$.

② $y=0$ 也是方程的解.

积分曲线的简图如下：



4. 跟踪：设某 A 从 xoy 平面上的原点出发，沿 x 轴正方向前进；同时某 B 从点开始跟踪 A，即 B 与 A 永远保持等距 b．试求 B 的光滑运动轨迹．

解：设 B 的运动轨迹为 $y = y(x)$，由题意及导数的几何意义，则有

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}$，所以求 B 的运动轨迹即是求此微分方程满足 $y(0) = b$ 的解．

解之得：$x = \dfrac{1}{2} b \ln \dfrac{b + \sqrt{b^2 + y^2}}{b - \sqrt{b^2 - y^2}} - \sqrt{b^2 - y^2}$ ．

5. 设微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ (2.27)，其中 f(y) 在 $y = a$ 的某邻域(例如，区间 $|y - a| < \varepsilon$)内连续，而且 $f(y) = 0 \Leftrightarrow y = a$，则在直线 $y = a$ 上的每一点，方程(2.27)的解局部唯一，当且仅当瑕积分 $\left| \int_a^{a \pm \varepsilon} \dfrac{dy}{f(y)} \right| = \infty$ (发散).

证明：($\Rightarrow$)

首先经过域 R_1：$-\infty < x < +\infty,\quad a - \varepsilon \le y < a$ 和域 R_2：$-\infty < x < +\infty,$

$a < y \le a+\varepsilon$ 内任一点(x_0, y_0)恰有方程(2.13)的一条积分曲线，它由下式确定

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} = x - x_0 . \qquad (*)$$

这些积分曲线彼此不相交. 其次，域R_1(R_2)内的所有

积分曲线$\int \frac{dy}{f(y)} = x + c$ 都可由其中一条，比如$\int \frac{dy}{f(y)} = x + c_0$

沿着 x 轴的方向平移而得到。因此只需详细考虑经过R_1内某一点

$(x_0, a-\varepsilon)$ 的积分曲线， 它由(*)式确定.

若$\left|\int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{dy}{f(y)}\right|$收敛，即存在 $x = x_1$ ，使得$\left|\int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{dy}{f(y)}\right| = x_1 - x_0$，

即所讨论的积分曲线当 $x = x_1$ 时达到直线$y = a$上点(x_1, a). 由(*)式易看出，

所论积分曲线在(x_1, a)处与$y = a$ 相切，在这种情形下，经过此直线上的

($\Leftarrow$) 一点就不只有一条积分曲线，与局部唯一矛盾，所以$\left|\int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{dy}{f(y)}\right|$发散.

若积分$\left|\int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{dy}{f(y)}\right|$发散，此时由(*)式易看出，所论的经过$(x_0, a-\varepsilon)$的积分

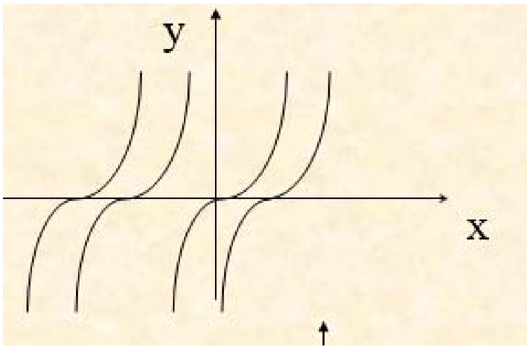
曲线，不可能达到直线 $y = a$上，而以直线$y = a$为渐近线，又注意到$y = a$也

是(2 .13)的积分曲线，所以(2.13)过$(x_0, a-\varepsilon)$的解是唯一的.

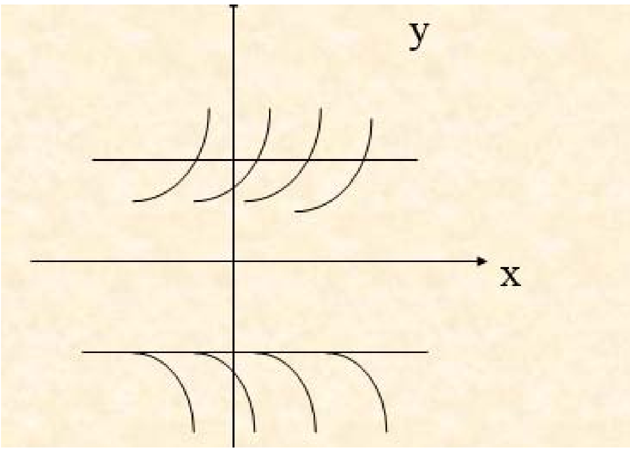
注：对于R_2内某点$(x_0, a+\varepsilon)$完全可类似地证明.

6. 作出下列微分方程积分曲线族的大致图形.

(1). $\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}$；



（2）. $\dfrac{dy}{dx}=\begin{cases} y\ln|y| & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$



习题 2-3

1. 求解微分方程：

(1) $\frac{dy}{dx}+2y=xe^{-x}$；

解： $p(x)=2, \quad q(x)=xe^{-x}$，

由公式得： $y=e^{-2x}(c+\int xe^{-x}e^{2x}dx)=ce^{-2x}+xe^{-x}-e^{-x}$，

原方程的解为： $y=ce^{-2x}+xe^{-x}-e^{-x}$.

(2) $\frac{dy}{dx}+ytgx=\sin 2x$；

解： $p(x)=tgx, \quad q(x)=\sin 2x$，

$\int p(x)dx=\int tgxdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int-\frac{d(\cos x)}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+c$， 则有

$y=e^{\ln|\cos x|}(c+\int\sin 2xe^{-\ln|\cos x|}dx)$

$=|\cos x|(c+\int\frac{\sin 2x}{|\cos x|}dx)=|\cos x|(c-2|\cos x|)=c|\cos x|-2\cos^2 x$

原方程的解为： $y=c|\cos x|-2\cos^2 x$.

(3) $x\frac{dy}{dx}+2y=\sin x, \quad y(\pi)=\frac{1}{\pi}$；

解：原方程即为： $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{\sin x}{x}$，则 $p(x)=\frac{2}{x}, \quad q(x)=\frac{\sin x}{x}$，

$\int p(x)dx=\int\frac{2}{x}dx=\ln x^2+c$， 则有

$y=e^{-\ln x^2}(c+\int\frac{\sin x}{x}e^{\ln x^2})$

$=\frac{1}{x^2}(c+\int x\sin xdx)$

$=\frac{1}{x^2}(c-x\cos x+\sin x)$

因为 $y(\pi)=\frac{1}{\pi}$， 所以 $c=0$.

原方程满足初值问题的解为： $y=-\frac{1}{x}\cos x+\frac{1}{x^2}\sin x$.

(4) $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{1-x^2}y=1+x$， $y(0)=1$；

解：$p(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，　$q(x)=1+x$，　$\int p(x)dx=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{1}{2}}$

则 $y=e^{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{\frac{1}{2}}}\ (c+\int(1+x)\ e^{\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|^{\frac{1}{2}}}\ dx)$

$$=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}(c+\int\sqrt{x^2-1}dx) & |x|>1\\ \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}(c+\int\sqrt{1-x^2}dx) & |x|<1\end{cases}$$

要求满足初值问题 $y(0)=1$的解

只需求$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}(c+\int\sqrt{1-x^2}dx) & |x|<1\end{cases}$

$$=\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}(c+\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2})$$

代入初值得$c=1$

所以满足初值问题的解为 $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}(1+\dfrac{1}{2}\arcsin x+\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2})$.

2.　将下列方程化为线性微分方程：

（1）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{2y}$；

解：令 $y^2=z$，　则原方程化为：$\dfrac{dz}{dx}=z+x^2$.

（2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+y^2}$；

解：由原方程得:，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x+y^2}{y}$，　即　$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y}x+y$　.

（3）$3xy^2\dfrac{dy}{dx}+y^3+x^3=0$；

解：令 $y^3=z$，　则原方程化为：$\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{x}z-x^2$.

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cos y}+xtgy$；

解：原方程即为：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cos y}+x\dfrac{\sin y}{\cos y}$

即 $\dfrac{\cos ydy}{dx}=1+x\sin y$.　　令 $z=\sin y$，　则 $\dfrac{dz}{dx}=xz+1$.

3.　设 $y=\phi(x)$ 满足微分不等式 $y'+a(x)y\le 0,\quad (x\ge 0)$．求证：$\phi(x)\le\phi(0)e^{-\int_0^x a(s)ds}$，$(x\ge 0)$

证明：将 $y'+a(x)y\le 0$ 两边同乘 $e^{\int_0^x a(s)ds}$　则有

$e^{\int_0^x a(s)ds}\ y'+e^{\int_0^x a(s)ds}\ a(x)y\le 0$

即 $\dfrac{d(e^{\int_0^x a(s)ds}\phi(x))}{dx}\le 0$　从 0 到 x 积分得：

$e^{\int_0^x a(s)ds}\ \phi(x)\le\phi(0)$，得证.

4.　用常数变易法求解非齐次线性方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$.

解：设方程有形如 $y=c(x)e^{-\int p(x)dx}$ 的解，将其代入方程则有

解：设方程有形如 $y=c(x)e^{-\int p(x)dx}$ 的解，将其代入方程则有

$\dfrac{dc(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$

即 $\dfrac{dc(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx}=q(x)$，　则 $c(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}+c$，

所以方程的解为 $y=e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}+c)$.

5.　考虑方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$，其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都是以 $\omega>0$ 为周期的连续函数.

试证：（1）若 $q(x)=0$，则方程的任一非零解以 ω 为周期 $\Leftrightarrow$ $p(x)$ 的平均值 $\overline{p}=\dfrac{1}{\omega}\int_0^{\omega}p(x)dx=0$.

(2)若 $q(x)\ne 0$，则方程的有唯一的 ω 周期解 $\Leftrightarrow$ $\overline{p}\ne 0$．试求出此解.

证明：(1)设 $y=\phi(x)$ 是方程的任一非零解

则 $y=ce^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}$，且 $y=ce^{-\int_{x_0}^{x+w}p(x+w)dx}$，也是解

$\Leftrightarrow e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}=e^{-\int_{x_0}^{x+w}p(x+w)dx},=e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}e^{-\int_{x}^{x+w}p(x)dx}$

$\Leftrightarrow e^{\int_0^{\omega}p(x)dx}=1\Leftrightarrow\int_0^{\omega}p(x)dx=0$

(2) 方程的通解为 $y=ce^{-\int_0^x p(x)dx}+\int_0^x q(s)e^{-\int_s^x p(t)dt}$

选择常数 c 使 $y(x)$ 成为 ω 周期函数，即 $y(x+w)=y(x)$ (*)

我们先来证明，要使(*)对所有 x 成立，其实只需对某一特定 x

(例如 $x=0$)成立,即只需 $y(\omega)=y(0)$.事实上，由于 $y(x)$ 是方程的解，

且 $p(x+w)=p(x)$ $q(x+w)=q(x)$，　所以 $y(x+w)$ 也是解.

因此，函数 $u(x)=y(x+w)-y(x)$ 是相应齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 满足

初始条件 $y(0)=0$ 的解。又因为此齐次方程的解或者恒等于 0，或者恒不

等于 0，所以 $u(x)=0$，从而 $y(w)=y(0)$，由 x 的任意性，则有 $y(x+w)=y(x)$。

即 $ce^{-\int_0^w p(x)dx}+\int_0^w q(s)e^{-\int_0^{wx}p(t)dt}ds=c$.

所以 $c=\dfrac{1}{1-e^{-\int_0^w p(x)dx}}\int_0^w q(x)e^{\int_0^w p(x)dx}dx$.

6. 连续函数 $f(x)$ 在区间 $-\infty<x<+\infty$ 上有界，证明：方程 $y'+y=f(x)$ 在区间 $-\infty<x<+\infty$ 有并且只有一个有界解．试求出这个解．并进而证明：当 $f(x)$ 还是以 ω 为周期函数时，这个解也是以 ω 为周期的周期函数.

证明：显然方程为一阶线性微分微分方程，由一阶线性微分微分方程解的求解公式得其解表达式为：

$$\begin{aligned}y&=ce^{-\int_0^x 1dx}+\int_0^x f(s)e^{-\int_s^x 1dx}ds\\&=ce^{-x}+\int_0^x f(s)e^{(s-x)}ds\end{aligned},$$

因为 $f(x)$ 有界，所以要使 y 有界，当且仅当 $c=\int_{-\infty}^{0}f(s)eds$.

从而原方程的唯一有界解为

$$y = ce^{-x} + \int_0^x f(s)e^{(s-x)}ds = \int_{-\infty}^0 f(s)e^{s-x}ds + \int_0^x f(s)e^{(s-x)}ds = \int_{-\infty}^x f(s)e^{(s-x)}ds\ .$$

下面说明当 $f(x)$ 是以 ω 为周期函数时，这个解也是以 ω 为周期的周期函数.

$y(x+\omega) = \int_{-\infty}^{x+\omega} f(s)e^{(s-x-\omega)}ds$，令 $t = s-\omega$，则

$y(x+\omega) = \int_{-\infty}^{x+\omega} f(s)e^{(s-x-\omega)}ds = \int_{-\infty}^{x} f(t+\omega)e^{(t-x)}dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)e^{(t-x)}dt = y(x)$，

所以此解为一周期函数.

7. 令空间 H^0 = { $f(x)$ | f 是以 2π 为周期的连续函数}. 易知 H^0 关于实数域,构成一个线性空间. $\forall f \in H^0$，定义它的模 $\|f\| = \max_{0\le x\le 2\pi}|f(x)|$. 证明 H^0 是一个完备的空间. 利用式(2.40)可以在空间 H^0 中定义一个变换 ϕ，它把 f 变成 y. 试证：ϕ 是一个从 H^0 到 H^0 的线性算子，而且它是有界的.

证明：(1)先证 H^0 是一个完备的空间.

设 $\{f_n(x)\}$ 是 $(H^0,\|\cdot\|)$ 中的一个基本列.

那么 $\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N(\varepsilon),\quad \ni \forall m,n > N(\varepsilon)$ 有

$\|f_m(x) - f_n(x)\| = \max_{0\le x\le 2\pi}|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

所以 $\forall 0 < x < 2\pi$，$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ (*)，固定 $x \in [0,2\pi]$，则 $\{f_n(x)\}$

是基本的，从而 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在，记为 $f_0(x)$，在（*）中令 $m \to \infty$，

得到 $|f_0(x) - f_n(x)| < \varepsilon$，所以 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f_0(x)$，从而在 H_0 中 f_n 收

敛到 f_0，所以定义的空间是完备的。

(2)证 ϕ 是一个线性有界算子。

$$\text{①}\ \phi(c_1 f_1 + c_2 f_2) = \frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(s)ds$$

$$= c_1\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}f_1(s)ds + c_2\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}f_2(s)ds$$

$$= c_1\phi(f_1) + c_2\phi(f_2)$$

所以 ϕ 是一个线性算子。

② $\|\phi(f)\| = \max_{0\le x\le 2\pi}\left|\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f(s)ds\right|$

$$\le \max_{0\le x\le 2\pi}\left|\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\max_{x\le s\le x+2\pi} f(s)ds\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}ds\right|$$

$$\le \|f\|\frac{1}{e^{2a\pi}-1}\frac{e^{4a\pi}}{a} = k\|f\|$$

所以ϕ是有界算子.

习题 2-4

1. 求解下列微分方程：

(1) $y' = \dfrac{2y-x}{2x-y}$；

解：令 $y = ux$，则原方程化为 $x\dfrac{du}{dx} + u = \dfrac{2u-1}{2-u}$，

即 $\dfrac{2-u}{u^2-1}du = \dfrac{dx}{x}$，　积分得：$\ln\left|\dfrac{1-u}{1+u}\right| - \dfrac{1}{2}\ln\left|u^2-1\right| = \ln|x| + c$

还原变量并化简得：$(y-x) = c(x+y)^3$

(2) $y' = \dfrac{2y-x+5}{2x-y-4}$；

解：由 $\begin{cases} 2y-x+5=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

令 $u = x-1,\quad v = y+2$，　则有

$\dfrac{dv}{du} = \dfrac{2v-u}{2u-v}$，由第一题的结果知此方程解为 $(v-u) = c(u+v)^3$，

还原变量并化简得：　$y-x+3 = c(x+y+1)^3.$

(3) $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x+4y-1}$；

解：令 $v = x+2y$，　则 $\dfrac{dv}{dx} = 1 + 2\dfrac{dy}{dx} = 1 + 2\dfrac{v+1}{2v-1}$，

即 $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{4v+1}{2v-1}$，此方程为变量分离方程，

分离变量并积分得：$\dfrac{1}{2}v - \dfrac{3}{8}\ln|4v+1| = x + c$，

还原变量并化简得：$8y - 4x - 3\ln|4x+8y+1| = c$.

(4) $y' = x^3y^3 - xy$.

解：①当 $y \neq 0$ 时，方程两边同时乘以 $-2y^{-3}$，则 $-2y^{-3}y' = -2x^3 + 2xy^{-2}$，令

$z = y^{-2}$， 则 $\frac{dz}{dx} = 2xz - 2x^3$,此方程为一阶线性方程，由公式得：$z = ce^{x^2} + x^2 + 1$

还原变量得： $y^2 = (ce^{x^2} + x^2 + 1)^{-1}$.

② $y = 0$ 也是方程的解.

2. 利用适当的变换，求解下列方程：

(1) $y' = \cos(x - y)$；

解：令 $u = x - y$，则 $\frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} = 1 - \cos u$，

①当 $\cos u \neq 1$ 时，有 $\frac{du}{1 - \cos u} = dx$， 即 $\frac{du}{2\sin^2\frac{u}{2}} = dx$，

两边积分得：$\frac{1}{2}ctg\frac{u}{2} = x + c$

还原变量化简得：$\cos\frac{x-y}{2} = 2x\sin\frac{x-y}{2} + c\sin\frac{x-y}{2}$.

②当 $\cos u = 1$ 时，即 $y = x + 2k\pi\ (k \in Z)$ 也是方程的解.

(2) $(3uv + v^2)du + (u^2 + uv)dv = 0$；

解：方程两边同时乘以 u 则原方程化为：

$(3u^2v + uv^2)du + (u^3 + u^2v)dv = 0$，

即 $(3u^2vdu + u^3dv) + (uv^2du + u^2vdv) = 0$

此方程为全微分方程，则原方程的解为：$u^3v + \frac{1}{2}u^2v^2 = c$.

(3) $(x^2 + y^2 + 3)\frac{dy}{dx} = 2x(2y - \frac{x^2}{y})$；

解：原方程即为 $\frac{2ydy}{2xdx} = \frac{4y^2 - 2x^2}{x^2 + y^2 + 3}$ ，令 $x^2 = v,\quad y^2 = u$，

则 $\frac{du}{dv} = \frac{4u - 2v}{u + v + 3}$ ，由 $\begin{cases} 4u - 2v = 0 \\ u + v + 3 = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} u = -1 \\ v = -2 \end{cases}$， 令 $\begin{cases} m = u + 1 \\ n = v + 2 \end{cases}$， 则 有

$\frac{dm}{dn} = \frac{4m - 2n}{m + n}$ 令 $\frac{m}{n} = z$，则 $m = zn$， $\frac{dm}{dn} = \frac{dz}{dn}n + z = \frac{4z - 2}{z + 1}$，

则有 $\frac{dz}{dn}n=\frac{(1-z)(z-2)}{z+1}$，此方程为变量分离方程，

分离变量并积分得：$\ln\frac{(z-1)^2}{|2-z|^3}=c+\ln n$，

还原变量并化简得：$(x^2-y^2+1)^2=c(-2x^2+y^2-3)^3$.

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+3xy^2-7x}{3x^2y+2y^3-8y}$.

解：原方程即为 $\frac{2ydy}{2xdx}=\frac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}$，令 $u=y^2$，　$v=x^2$，

则 $\frac{du}{dv}=\frac{2v+3u-7}{3v+2u-8}$，由 $\begin{cases}2v+3u-7=0\\3v+2u+8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=1\\v=2\end{cases}$，　令 $\begin{cases}m=u-1\\n=v-2\end{cases}$，

则 $\frac{dm}{dn}=\frac{2n+3m}{3n+2m}$，令 $\frac{m}{n}=z$，可将方程化为变量分离形方程，

$(\frac{3+2z}{2-2z^2})dz=\frac{dn}{n}$，两边积分得：$\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|1-z^2\right|=\ln n+c$，

还原变量并化简得：$(x^2-y^2-1)^5=c(x^2+y^2-3)$.

3. 求解下列微分方程：

(1). $y'=-y^2-\frac{1}{4x^2}$；

解：令 $z=xy$，　则原方程可化为：$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}(-z^2+z-\frac{1}{4})$，

$z\neq\frac{1}{2}$时，即 $xy\neq\frac{1}{2}$时

方程为 $\frac{-1}{(z-\frac{1}{2})^2}dz=\frac{dx}{x}$　，此方程为变量分离方程，

两边积分得：$\frac{1}{z-\frac{1}{2}}=\ln|x|+c$

还原变量并化简得：$y=\frac{1}{2x}+\frac{1}{x\ln|x|+cx}$；

当 $z=\frac{1}{2}$时，$y=\frac{1}{2x}$ 是方程的特解.

(2). $x^2y'=x^2y^2+xy+1$；

解：原方程即为：$y'=y^2+\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{x^2}$，

令 $z=xy$，则 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{x}(z+1)^2$，此方程为变量分离方程，

分离变量积分得：$-\dfrac{1}{z+1}=\ln|x|+c$，

还原变量并化简得：$y=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x\ln|x|+cx}$.

4. 试把二阶微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 化为一个黎卡提方程.

解：令 $y=e^{\int udx}$，　则 $y'=ue^{\int udx}$，$y''=u^2e^{\int udx}+u'e^{\int udx}$，代入原方程可得：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=u^2e^{\int udx}+u'e^{\int udx}+p(x)ue^{\int udx}+q(x)\,e^{\int udx}=0,$$

即有：$u^2+u'+p(x)u+q(x)=0$，

此方程为一个黎卡提方程.

5. 求一曲线，使得过这一曲线上任一点的切线与该点向径的夹角等于 45°.

解：设此曲线为 $y=y(x)$，由题意得：

$$\frac{\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{dy}{dx}\dfrac{y}{x}}=tg45^\circ=1，化简得：\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y},$$

此方程为齐次方程，解之得：$arctg\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=c$.

6. 探照灯的反光镜(旋转面)应具有何种形状，才能使点光源发射的光束反射成平行线束？

解：取点光源所在处为坐标原点，而 x 轴平行于光的反射方向，建立三维坐标系.

设所求曲面由曲线 $\begin{cases} y=f(x) \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转而成,则求反射镜面问题归结为求 xy 平面上的曲线 y=f(x)的问题．由题意及光的反射定律，可得到函数 $y=f(x)$ 所应满足的微分方程式：

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$，此方程为齐次方程，

解之得： $y^2 = c(c+2x)$ ，(其中 c 为任意正常数).

$y^2 = c(c+2x)$ 就是所求的平面曲线，它是抛物线，

因此反射镜面的形状为旋转抛物面 $y^2 + z^2 = c(c+2x)$.

习题 2-5

1．求解下列微分方程：

(1)． $(3x^2y+2xy+y^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$；

解：方程两边同乘 $3e^{3x}$，　则

$(9e^{3x}x^2ydx+6e^{3x}xydx+3e^{3x}x^2dy)+(3e^{3x}y^3dx+3e^{3x}y^2)dy=0$，

此方程为全微分方程，即　$3e^{3x}x^2y+e^{3x}y^3=c$.

(2)． $ydx+(2xy-e^{-2y})dy=0$；

解：方程两边同乘 $\frac{1}{y}e^{2y}$，　则　$e^{2y}dx+(2xe^{2y}-\frac{1}{y})dy=0$

即 $(e^{2y}dx+2xe^{2y}dy)-\frac{1}{y}dy=0$

此方程为全微分方程，即有　$xe^{2y}-\ln|y|=c$　.

(3)． $(3x+\frac{6}{y})dx+(\frac{x^2}{y}+\frac{3y}{x})dy=0$；

解：方程两边同乘 xy，　则

$(3x^2y+6x)dx+(x^3+3y^2)dy=0$

即　$(3x^2ydx+x^3dy)+(6xdx+3y^2dy)=0$

此方程为全微分方程，即有 $x^3y+y^3+3x^2=c$　.

(4)． $ydx-(x^2+y^2+x)dy=0$；

解：方程两边同乘 $\frac{1}{x^2+y^2}$，　则　$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}-dy=0$，

此方程为全微分方程，即　$arctg\frac{x}{y}-y=c$

(5)． $2xy^3dx+(x^2y^2-1)dy=0$；

解：方程两边同乘$\frac{1}{y^2}$，　则 $2xydx+(x^2-\frac{1}{y^2})dy=0$，

此方程为全微分方程，即 $\frac{1}{y}+x^2y=c$.

(6). $y(1+xy)dx-xdy=0$；

解：方程两边同乘$\frac{1}{y^2}$，　则 $xdx+(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy)=0$，

此方程为全微分方程，即 $\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^2=c$.

(7) $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$；

解：方程两边同乘$\frac{1}{x^2y}$，　则 $(\frac{y^2}{x^2}dx-\frac{2y}{x}dy)+\frac{2}{y}dy=0$，

此方程为全微分方程，即 $-\frac{y^2}{x}+2\ln|y|=c$

(8). $e^xdx+(e^xctgy+2y\cos y)dy=0$

解：方程两边同乘$\sin y$，　则

$(e^x\sin ydx+e^x\cos ydy)+yc\sin 2ydy=0$　，

此方程为全微分方程，即 $e^x\cos y-\frac{1}{2}y\cos 2y+\frac{1}{4}\sin 2y=c$.

2. 证明方程(5.1)有形如 $\mu=\mu(\phi(x,y))$ 的积分因子的充要条件是 $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial Q}{\partial x}-P\frac{\partial P}{\partial y}}=f(\phi(x,y))$，并写出这个积分因子。然后将结果应用到下列各种情形，得出存在每一种积分因子的充要条件:

(1) $\mu=\mu(x\pm y)$ ；　(2) $\mu=\mu(x^2+y^2)$ ；　(3) $\mu=\mu(xy)$；

(4) $\mu=\mu(\frac{y}{x})$；　　(5) $\mu=\mu(x^{\alpha}y^{\beta})$.

证明：$\Rightarrow$ 若 $\mu=\mu(\phi(x,y))$ 是 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的积分因子,

则 $\frac{\partial(\mu(\phi(x,y)P(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(\phi(x,y)Q(x,y))}{\partial x}$,

即 $\frac{\partial P}{\partial y}\ \mu(\phi(x,y))+\ \mu'(\phi(x,y))\frac{\partial\phi}{\partial y}P=\frac{\partial Q}{\partial x}\ \mu(\phi(x,y))+\ \mu'(\phi(x,y))\frac{\partial\phi}{\partial x}Q$

($\Leftarrow$)以上过程 可逆，故充分性显然.

(1) $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\mp P}=f(x\pm y)$　　(2) $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{2xQ-2yP}=f(x^2+y^2)$

(3) $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ-xP}=f(xy)$　　(4) $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{-\frac{y}{x^2}Q-\frac{1}{x}P}=f(\frac{y}{x})$

(5) $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}Q-\beta x^{\varepsilon}y^{\beta-1}P}=f(x^{\alpha}y^{\beta})$

3. 证明齐次方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 有积分因子 $\mu=\frac{1}{xP+yQ}$.

证明：作变换 $y=ux$ ，则由 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 是齐次方程，我们有

$$\begin{aligned}&P(x,ux)dx+Q(x,ux)(udx+xdu)\\&=[x^mP(1,u)+ux^mQ(1,u)]dx+x^{m+1}Q(1,u)du\\&=0\end{aligned}$$

方程两边同乘 $\frac{1}{yQ+xP}=\frac{1}{x^{m+1}[P(1,u)+uQ(1,u)]}$ ，则有

$\frac{1}{x}dx+\frac{Q(1,u)}{P(1,u)+uQ(1,u)}du=0$ ，显然此方程为全微分方程.

4. 证明定理 6 及其逆定理：在定理 6 的假定下，若 μ_1 是微分方程 (5.1) 的另一个积分因子，则 μ_1 必可表为 $\mu_1=\mu g(\phi)$ 的形式，其中函数 g 和 ϕ 的意义与在定理 6 中相同.

证明：(定理 6)

因为 $\mu=\mu(\phi(x,y))$ 是(5.1)的积分因子，且使得：

$$\mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=d\phi(x,y),$$

则 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\mu P(x,y)$，$\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=\mu Q(x,y)dy$.

要判断是否为积分因子，只需验证下列等式成立：

$$\frac{\partial(\mu P(x,y))}{\partial y}g(\phi(x,y))+\mu P(x,y)g'\frac{\partial\phi}{\partial y}=$$

$$\frac{\partial(\mu Q(x,y))}{\partial x}g(\phi(x,y))+\mu Q(x,y)g'\frac{\partial\phi}{\partial x},$$

显然 $\dfrac{\partial(\mu P(x,y))}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu Q(x,y))}{\partial x}$,

且 $\mu P(x,y)g'\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=\mu Q(x,y)g'\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$， 所以 $\mu_1=\mu g(\phi)$ 是(5.1)的积分因子.

(逆定理)由定理条件假定 μ 也是(5.1)的积分因子且使得

$$\mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=d\phi(x,y).$$

设 μ_1 是微分方程 (5.1) 的另一个积分因子,且设 $\mu_1=\mu f(x,y)$

$$\mu f(x,y)P(x,y)dx+\mu f(x,y)Q(x,y)dy=d\varphi(x,y),$$

则 $\dfrac{\partial(\mu P(x,y))}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu Q(x,y))}{\partial x}$,

即 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\mu P(x,y)+f(x,y)\dfrac{\partial(\mu P(x,y))}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\mu Q(x,y)+f(x,y)\dfrac{\partial(\mu Q(x,y))}{\partial y}$,

所以 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d\phi}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{d\phi}{dy}$， 则 $f=g(\phi(x,y))$.

5 . 设函数 $P(x,y),Q(x,y),\mu_1(x,y),\mu_2(x,y)$ 都是连续可微的，而且 μ_1,μ_2 是微分方程(5.1)的两个积分因子，$\dfrac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}\neq$ 常数。试证 $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\neq c$ 是方程(5.1)的一个通积分.

证明：利用 P47 的定理 6

令 $g(\phi(x,y))=\phi(x,y)$,

则 $\mu_{1}(x,y))=\mu(x,y)\phi(x,y)$ 是(5.1)的积分因子，

即 $\dfrac{\mu_1(x,y)}{\mu(x,y)}=\phi(x,y)$， 显然有 $\phi(x,y)$ 是方程(5.1)的通积分.

习题 2-6

1．求下列各曲线族的正交轨线族：

(1) $x^2+y^2=c$；

解：由方程得：$\begin{cases} x^2+y^2=cx \\ (2x-c)dx+2ydy=0 \end{cases}$，　消去 c 有:$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$，

则所求正交轨线的微分方程为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$，

亦即 $2xydx-(x^2-y^2)dy=0$，

所以所求正交轨线族为 $x^2+y^2=cy$.

(2)．$xy=c$　；

解：由方程得：$\begin{cases} xy=c \\ xdy+ydx=0 \end{cases}$，　消去 c 有:$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y}{x}$，

则所求正交轨线的微分方程为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$，　亦即 $ydx-xdy=0$，

所以所求正交轨线族为 $x^2-y^2=c$.

(3)．$y^2=ax^3$；

解：由方程得：$\begin{cases} y^2=ax^3 \\ 2ydy-3ax^2dx=0 \end{cases}$，消去 c 有:$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3y}{2x}$，

则所求正交轨线的微分方程为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x}{3y}$，

亦即 $2xdx+3ydy=0$，

所以所求正交轨线族为 $2x^2+3y^2=c$

(4)．$x^2+c^2y^2=1$.

解：由方程得：$\begin{cases} x^2+c^2y^2=1 \\ 2xdx+2c^2ydy=0 \end{cases}$，消去 c 有:$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-xy}{1-x^2}$

则所求正交轨线的微分方程为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-x^2}{xy}$，

亦即 $ydy+(x-\dfrac{1}{x})dx=0$，

所以所求正交轨线族为 $x^2+y^2-2\ln|x|=c$.

或者 $x^2+y^2-\ln x^2=c$.

2. 求与下列各曲线相交成 45° 角的曲线族：

(1). $x-2y=c$；

解：由方程得：$\begin{cases}x-2y=c\\2dy-dx=0\end{cases}$，　消去 c 有: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}$,

则所求等角轨线的微分方程为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{2}+tg45^\circ}{1-\frac{1}{2}tg45^\circ}$，

亦即 $3dx-dy=0$，

所以所求等角轨线族为 $3x-y=c$.

(2). $xy=c$ ；

解：由方程得：$\begin{cases}xy=c\\xdy+ydx=0\end{cases}$，　消去 c 有: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y}{x}$,

则所求等角轨线的微分方程为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{-y}{x}+tg45^\circ}{1-(-\frac{y}{x})tg45^\circ}$，

亦即 $(x-y)dx-(x+y)dy=0$，　所以所求等角轨线族为 $x^2-y^2-2xy=c$.

(3). $y=x\ln ax$ ；

解：由方程得：$\begin{cases}y=x\ln ax\\dy-(\ln ax+1)dx=0\end{cases}$，消去 a 有: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x}$,

则所求等角轨线的微分方程为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{x+y}{x}+tg45^\circ}{1-(\dfrac{x+y}{x})tg45^\circ}$，

亦即 $(2x+y)dx+ydy=0$，

所以所求等角轨线族为 $\ln(2x^2+xy+y^2)-\dfrac{2}{\sqrt{7}}arctg(\dfrac{2}{\sqrt{7}}\dfrac{2y+x}{x})=c$

(4). $y^2=4ax$.

解：由方程得：$\begin{cases}y^2=4ax\\2ydy-4adx=0\end{cases}$，消去 a 有:$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x}$,

则所求等角轨线的微分方程为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{y}{2x}+tg45^\circ}{1-(\dfrac{y}{2x})tg45^\circ}$，

亦即 $(2x+y)dx-(2x-y)dy=0$，

所以所求等角轨线族为 $\ln(2x^2-xy+y^2)-\dfrac{6}{\sqrt{7}}arctg(\dfrac{2}{\sqrt{7}}\dfrac{2y-x}{x})=c$

3. 给定双曲线 $x^2-y^2=c$，(其中 c 为任意常数). 设有一个动点 P 在平面 (x,y) 上移动，它的轨迹与和它相交的每条双曲线均成 30° 角，又设此动点从 $P_0(0,1)$ 出发，试求这动点的轨迹.

解：由题意知，此轨迹即为与双曲线 $x^2-y^2=c$ 相交成 30° 角的曲线族.

由方程得：$\begin{cases}x^2-y^2=c\\2xdx-2ydy=0\end{cases}$， 消去 c 有:$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

则所求轨线的微分方程为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{x}{y}+tg30^\circ}{1-\dfrac{x}{y}tg30^\circ}$ ，所以所求轨线族为

$\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{2}y^2+\sqrt{3}xy=c$， 又因为此轨迹过 $P_0(0,1)$ 点， 所以 $c=-\dfrac{3}{2}$，

所以所求轨迹为 $3x^2-3y^2+2\sqrt{3}xy+3=0$.

4. 追线：在 xoy 平面上，有某物 P 从原点出发，以常速 $a>0$ 沿 x 轴的正方向运动．同时又有某物 Q 以常速 b 从点 $(0,1)$ 出发追赶．设 $b>a$，且 Q 的运动方向永远指向 P．试求 Q 的运动轨迹，以及追上 P 的时间．

解：设 Q 的运动轨迹为 $y=y(x)$，由题意知 $y=y(x)$ 即是下列初值问题的解．

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y^{\frac{a}{b}}}{2}-\frac{y^{-\frac{a}{b}}}{2}, \qquad x(1)=0,$$

此方程为一变量分离方程，解之得：$x=\dfrac{y^{1+\frac{a}{b}}-1}{2(1+\frac{a}{b})}-\dfrac{y^{1-\frac{a}{b}}-1}{2(1-\frac{a}{b})}$．

当 P,Q 在 T 时刻相遇时，即有 $x(aT)=0$，

代入其轨迹方程求得：$T=\dfrac{b}{2(b^2-a^2)}$．

5. 逃逸速度：假设地球的半径为 $R=6437$ 公里，地面上的重力加速度为 9.8米/秒^2，又设质量为的火箭在地面以初速 v_0 垂直上升，假设不计空气阻力和其它任何星球的引力．试求火箭的逃逸速度，即：使火箭一去不复返的最小初速度 v_0．

解：由物理学知识知，此逃逸速度满足下列式子：

$$\frac{gmM}{R^2}=\frac{m{v_0}^2}{R}$$ (其中 M 为地球的质量)

将数据代入上式求得：$v_0=7.94$ (公里 / 秒).

6. 设某社会的总人数为 N，当时流行一种传染病，得病人数为 x．设传染病人数的扩大率与得病人数和未得病人数的乘积成正比．试讨论传染病人数的发展趋势，并以此解释对传染病人进行隔离的必要性．

解：设传染病人数是时间 t 的函数，并设题中的正比例系数为 p. 则由题意得：

$$\dot{x}(t)=p\,x(t)(N-x(t))$$

此方程为一变量分离方程，分离变量并积分得：$x(t)=\dfrac{cNe^{pNt}}{1+ce^{pNt}}$

又因为最初得病人数为 x，所以 $x(0)=x$，代入求得 $c=\dfrac{x}{N-x}$，

所以传染病人数的发展趋势可表示为：

$$x(t)=\frac{\dfrac{x}{N-x}Ne^{pNt}}{1+\dfrac{x}{N-x}e^{pNt}}$$，(其中 x 为最初得病人数).

由上式我们可以看出，当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to N$，所以及时对传染病人进行隔离是必要的.

习题 3-1

1.

(1) 解: $f(x,y)=|y|^{\alpha}$，有 $|f(x,y)-f(x,0)|=|y|^{\alpha}$，

令 $F(r)=|r|^{\alpha}$，有 $\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\int_0^{r_1}\frac{dr}{|r|^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}|r|^{1-\alpha}\Big|_0^{r_1}$，

当 $1-\alpha<0$，即 $\alpha>1$ 时，$\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{1-\alpha}|r|^{1-\alpha}=\infty$，

所以 $y(0)=0$ 的解唯一。

当 $1-\alpha=0$ 时，$\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\ln|r|\,|_0^{r_1}$，而 $\lim\limits_{r\to 0}\ln|r|=\infty$，

所以 $y(0)=0$ 的解唯一。

当 $0<\alpha<1$ 时，可解方程知其解不唯一。

所以当 $0<\alpha<1$，其解不唯一；$\alpha\ge 1$，其解唯一。

（2）. 解: 因为 $\lim\limits_{y\to 0}y|\ln y|=0$，

所以 $\frac{dy}{dx}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续.

设 $F(r)=|r\ln|r||$，有 $\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\infty$ ($r_1>0$ 为常数),

所以方程的解唯一.

2. 解: 构造毕卡序列，令 $f(x,y)=x+y+1$，$y_{n+1}(x)=\int_0^x f(x,y_n(x))dx$，

因为 $y(0)=0$，

所以 $y_1(x)=\int_0^x f(x,0)dx=\frac{1}{2}x^2+x$，

$y_2(x)=\int_0^x f(x,\frac{1}{2}x^2+x)dx=\frac{1}{6}x^3+x^2+x$，

$y_3(x)=\int_0^x f(x,y_2)dx=\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2+x$，

………………………………………………

$y_n(x)=\int_0^x f(x,y_{n-1})dx=\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}+\frac{2}{n!}x^n+\cdots+\frac{2x^2}{2!}+x$，

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \frac{2}{n!}x^n + \cdots + \frac{2x^2}{2!} + x\right),$$
$$= 2e^x - x - 2$$

所以 $y = 2e^x - x - 2$ 为方程的解.

3. 证明: 反证法

设初始问题(E)有两个解, $y(x)$ 和 $y_1(x)$, 且 $y(x_0) = y_1(x_0) = y_0$,

$\exists x_1 > x_0$, 使 $y(x_1) > y_1(x_1)$, 令 $\mu = \sup\{x_0 \le x < x_1, y(x) = y_1(x)\}$,

根据 μ 的定义与 y 的连续性可知,

对 $\forall x \in (\mu, x_1), y(x) > y_1(x)$, 令 $r(x) = y(x) - y_1(x)$,

令 $r(x) = y(x) - y_1(x)$, 有 $r(\mu) = 0$, 有

$$\frac{dr}{dx} = f(x, y(x)) - f(x, y_1(x)),$$

因为 $f(x,y)$ 对 y 是递减的, 所以 $\frac{dr}{dx} < 0$, 对 $\forall x \in (\mu, x_1)$,

所以 $r(x) < r(\mu) = 0$, 对 $\forall x \in (\mu, x_1)$,

又由 y 的连续性, 可得 $y(x_1) < y_1(x_1)$,矛盾!

习题 3-3

1. 证明: 令 $f(x,y)=a(x)y+b(x)$，显然 $f(x,y)$ 在

$S:\quad x\in I,\quad -\infty<y<+\infty$

内连续，且满足不等式 $|f(x,y)|\le|a(x)||y|+|b(x)|$，

其中令 $A(x)=|a(x)|\ge 0$，$B(x)=|b(x)|\ge 0$，由已知有 $A(x),B(x)$ 在

$x\in I$ 上是连续的,则由定理 5, 知 $y=y(x)$ 的最大存在区间为 I

2. (1) 解：令 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$，则 $f(x,y)$ 在区域

$G_1=\{-\infty<x<+\infty, y\neq 0\}$ 上连续,

或 $G_2=\{-\infty<x<0\bigcup 0<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$ 上连续。

由推论知，此方程经过 G_1 或 G_2 内任一点 P_0

存在唯一的积分曲线 Γ: $y=\phi(x),x\in J$，且延伸到

无限远。下证，积分曲线 Γ 的最大存在空间是无界的。

用反证法，先在 G_1 上讨论。设 $y=y(x)$ 上此方程满足初值条件

$y(x_0)=y_0$ 的解。设 J^+ 为它的右侧最大存在区间，

若 $J^+=[x_0,x_1]$ 是有限区间，其中 $x_1>x_0$。令 $y_1=\phi(x_1)$，

则 $(x_1,y_1)\in G_1$。因为区域 G_1 是开集，所以存在矩形区域

$R_1:\quad |x-x_1|\le a_1,\qquad |y-y_1|\le b_1$，使得 $R_1\subset G_1$。

由皮亚诺定理知，原方程至少有一个解 $y=\phi_1(x)(|x-x_1|\le h_1)$

满足初值条件 $\phi_1(x_1)=y_1$，其中 h_1 是某个常数。

令 $y(x)=\begin{cases}\phi(x) & x_0\le x\le x_{1;}\\ \phi_1(x) & x_1\le x\le x_1+h_1.\end{cases}$

则 $y=y(x)$ 是连续可微的，且它在区间 $[x_0,x_1+h_1]$ 上满足原方程，

与积分曲线 Γ 的最大右侧存在区间为 $J^+=[x_0,x_1]$ 矛盾。

所以 J^+ 不可能是有限闭区间，同理可证 J^+ 不可能是有限开区间，则

Γ 在 P_0 点的右侧将延伸到区域 G_1 的边界。同样可证，Γ 在 P_0 点的左侧

将延伸到区域 G_1 的边界，即解的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$。

同样在 G_2 上，解的存在区间为 $(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$。

（2）解：由于 $y(y-1)$ 在整个 (x,y) 平面上连续，且对 y 有连续的偏导数，

所以利用推论，可知原方程经过平面上任何一点 $P_0(x_0,y_0)$

的积分曲线 Γ 是唯一存在，并将延伸到无限远。

显然 $y=0$ 与 $y=1$ 为方程的两个解曲线。

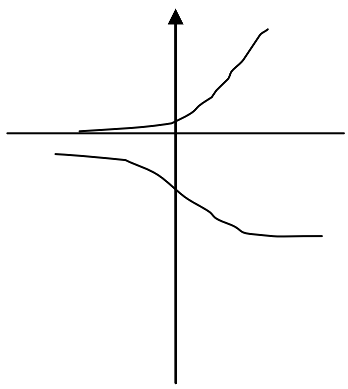
由解的唯一性，当 $y<0$ 时，其解不可能超出 $y=0$。

则其解只可能向左右延伸，即 x 的存在

区间为 $(-\infty,+\infty)$。同理可知在 $0<y<1$ 与 $y>1$ 时，

x 的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$。（如右图）所以其解的

在区间为 $(-\infty,+\infty)$。



（3）解：令 $f(x,y)=y\sin(xy)$，此方程满足 $f(x,y)$ 在

$$S:\qquad -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

内连续，且满足不等式 $|f(x,y)|\le|y|$。取 $A(x)=1$ 和 $B(x)=0$，则此

方程满足定理 5 的条件，所以此方程的每一个都以 $(-\infty,+\infty)$ 为存在区间。

（4）解：解方程得其解为 $arctgy=x-c,\ \ c$ 为一常数。

$\because\quad -\dfrac{\pi}{2}<arctgy<\dfrac{\pi}{2},\qquad \forall y\in(-\infty,+\infty)$，

$\therefore\quad -\dfrac{\pi}{2}<x-c<\dfrac{\pi}{2},\qquad \therefore\qquad -\dfrac{\pi}{2}+c<x<\dfrac{\pi}{2}+c$，

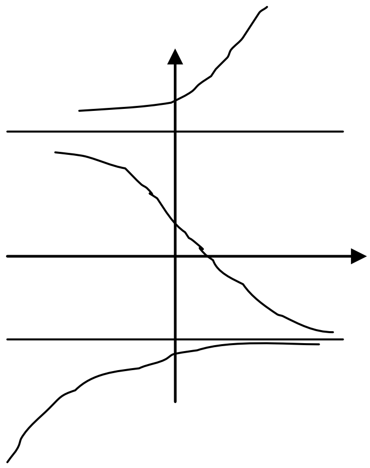
$\therefore$ 其存在区间为 $-\dfrac{\pi}{2}+c<x<\dfrac{\pi}{2}+c$。

3． 解：不矛盾。因为此方程化为微分方程为 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$，令

$f(x,y)=-\frac{x}{y}$，有 $f(x,y)$ 在 G 上不一定连续，

即不满足延伸定理的条件，所以不能说与延伸定理矛盾。

4. 解：首先，由推论可知，对于平面上任意一个包含 $P(x_0,y_0)$ 的区域 G，初值问题（E）的解都存在且唯一，并可延伸到 G 的边界。



其次，容易看出，直线 $L_1: y=3$ 和直线 $y=3$

$L_2: y=-1$ 是微分方程所对立的线素场的水平等斜线，

且积分曲线在 L_1 的上方是单调上升，在 L_1 与 L_2 之间

是单调下降，而在 L_2 的下方是单调上升。 $y=-1$

若 $P(x_0,y_0)$ 位于 L_1 的上方，显然 y=3 为方程的解，

而在 L_1 的上方，由于方程是单调上升，所以当 $y<y_0$ 时，

积分曲线是无限接近 $y=3$，由唯一性而又不能与 $y=3$

相关，所以其积分曲线必向左延伸到 $-\infty<x<x_0$。

同理若 $P(x_0,y_0)$ 位于 L_1 与 L_2 之间，可知其积分曲线向

左延伸到 $-\infty<x<+\infty$；若 $P(x_0,y_0)$ 位于 L_2 的下方，

可知其积分曲线向右延伸到 $x_0<x<+\infty$。

5. 证明：首先，由推论可知，对于平面上任意一个包含 $P(x_0,y_0)$ 的区域 G，初值问题（E）的解都存在且唯一，并且延伸到 G 的边界。其次，容易看出，直线 $y=x$ 与直线 $y=-x$ 是微分方程所对立的线素场的水平等斜线，且其单调性见图！

不妨，假设 $P(x_0,y_0)$ 在 x 轴的上方，在直线 $y=x$ 与直线 $y=-x$ 之间，

积分曲线是单调下降的，所以它将右
向穿出直线 $y=x$，并且它在右向延伸时不

能从 $y = x$ 下方穿越到上方，因此，它必
向穿出直线 $y = x$，并且它在右向延伸时不
能从 $y = x$ 下方穿越到上方，因此，它必可

向右延伸 $x_0 \le x < +\infty$。

同理可证向左延伸到 $-\infty < x \le x_0$。得证！

习题 4-1

1．求解下列微分方程

1） $2y=p^2+4px+2x^2 \qquad (p=\dfrac{dy}{dx})$

解　利用微分法得　$(2x+p)(\dfrac{dp}{dx}+1)=0$

当 $\dfrac{dp}{dx}+1=0$ 时，得 $p=-x+c$

从而可得原方程的以 P 为参数的参数形式通解

$$\begin{cases} 2y=p^2+4px+2x^2 \\ p=-x+c \end{cases}$$

或消参数 P，得通解

$$y=\frac{1}{2}(c^2+2cx-x^2)$$

当 $2x+p=0$ 时，则消去 P，得特解　$y=-x^2$

2） $y=pxlnx+(xp)^2$； $\left(p=\dfrac{dy}{dx}\right)$

解　利用微分法得　$(lnx+2xp)\left(x\dfrac{dp}{dx}+p\right)=0$

当 $x\dfrac{dp}{dx}+p=0$ 时，得　$px=c$

从而可得原方程以 p 为参数的参数形式通解：

$\begin{cases} y=pxln+(xp)^2 \\ px=c \end{cases}$ 或消 p 得通解　$y=Clnx+C^2$

当 $lnx+2xp=0$ 时，消去 p 得特解　$y=-\dfrac{1}{4}(lnx)^2$

3） $y=x\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) \qquad \left(p=\dfrac{dy}{cx}\right)$

解　利用微分法，得

$$\frac{p+\sqrt{1+p^2}}{1+p^2}=-\frac{dx}{x} \quad \text{两边积分得}$$

$$\left(1+P^2+P\sqrt{1+P^2}\right)x=c$$

由此得原方程以 P 为参数形式的通解：

$y = x(p + \sqrt{1+p^2}$ ， $\left(1 + p^2 + p^2\sqrt{1+p^2}\right)x = c.$

或消去 P 得通解

$y^2 + (X - C)^2 = C^2$

2. 用参数法求解下列微分方程

1） $2y^2 + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4$

解 将方程化为 $\frac{y^2}{2} + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{4}{5}} = 1^2$ 令 $y = \sqrt{2}\sin t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{5}}\cos t$

由此可推出 $dx = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t}dy = \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{1}{\cos t}d(\sqrt{2}\sin t) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}dt$ 从而得

$x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}t + c$

因此方程的通解为 $x = \sqrt{\frac{5}{2}}t + c$ ， $y = \sqrt{2}\sin t$

消去参数 t，得通解

$y = \sqrt{2}\sin\sqrt{\frac{2}{5}}(x - C)$

对于方程除了上述通解，还有 $y = \pm\sqrt{2}$， $\frac{dy}{dx} = 0$，显然

$y = \sqrt{2}$ 和 $y = -\sqrt{2}$ 是方程的两个解。

2） $x^2 - 3(\frac{dy}{dx})^2 = 1$

解：令 $x = \csc u$， $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cot u$

又令 $\tan\frac{u}{2} = t$ 则 $x = \frac{1}{\sin u} = \frac{1+t^2}{2t}$

$dy = \frac{1}{\sqrt{3}}\cot^2 u = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\cos^2 u}{\sin^3 u}du$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\Big/\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}(t-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3})dt$$

积分得，$y=\frac{1}{4\sqrt{3}}(\frac{1}{2}t^2-2\ln t-\frac{1}{2t^2})+c$

$$=\frac{1}{8\sqrt{3}}(t^2-4\ln t-\frac{1}{t^2})+C$$

由此得微分方程的通解为

$x=\frac{1+t^2}{2t}$，$y=\frac{1}{8\sqrt{3}}(t^2-4\ln t-\frac{1}{t^2})+c$

3）$x^3+(\frac{dy}{dx})^3=4\frac{dy}{dx}$

解：令 $\frac{dy}{dx}=xt$ 则 $x^3+x^3t^3=4x^2t$

解得 $x=\frac{4t}{1+t^3}$ 又

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\bullet\frac{dx}{dt}=\frac{4t^2}{1+t^3}\bullet\frac{4(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}=\frac{16t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}$$

$$=\frac{16}{3}\frac{(1-2t6^3)}{(1+t^3)^3}dt^3 \underline{\underline{u=t^3}} \frac{16}{3}\frac{1-2u}{(1+u)^3}du$$

$$=16\frac{du}{(1+u^3)^3}-\frac{32}{3}\frac{du}{(1+u^2}$$

$$\therefore y=-\frac{8}{(1+u)^2}+\frac{32}{3}\frac{1}{1+u^2}+C$$

$$\therefore=-\frac{8}{(1+t^3)^2}+\frac{32}{3}\frac{1}{1+t^3}+C$$

由此得微分方程的通解为

$x=\dfrac{4t}{1+t^3}$，　　$y=-\dfrac{8}{(1+t^3)^2}+\dfrac{32}{3}\dfrac{1}{1+t^3}+C$。

习题 4-2

1．得用 P—判别式求下列方程的奇解：

1） $y = x\frac{dy}{dx} + (\frac{dy}{dx})^2$

解：方程的 P—判别式为

$y = xp + p^2, x + 2p = 0$

消去 p，得 $y = -\frac{x^2}{4}$

经验证可知 $y = -\frac{x^2}{4}$ 是方程的解。

令 $F(x,y,p) = y - xp - p^2$ 则有 $F_y^{'}(x, -\frac{x^2}{4}, -\frac{x}{2}) = 1$，$F_{pp}^{''}(x, -\frac{x^2}{4}, -\frac{x}{2}) = -2$

和 $F_p^{'}(x, -\frac{x^2}{4}, -\frac{x}{2}) = 0$

因此，由定理 4.2 可知，$y = -\frac{1}{4}x^2$ 是方程的奇解。

2） $y = 2x\frac{dy}{dx} + (\frac{dy}{dx})^2$

解：方程的 P—判别式为

$y = 2xp + p^2$，$x + p = 0$

消去 P，得 $y = -x^2$，而 $y = -x^2$ 不是方程的解，故 $y = -x^2$ 不是方程的奇解。

3）$(y-1)^2(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{4}{q}y$

解：方程的 P—判别式为

$(y-1)^2 p^2 = \frac{4}{9}$ ，$2(y-1)^2 p = 0$

消去 P，得 $y = 0$，显然 $y = 0$ 是方程的解，

令 $F(x,y,p) = (y-1)^2 p^2 - \frac{4}{9}y$ 则有

$F_y^{'}(x,0,0) = -\frac{4}{9}$ $F_{pp}^{''}(x,0,0) = 2$

和 $F_p^{'}(x,0,0) = 0$

因此，由定理 4.2 知，$y = 0$ 是方程的奇解。

2．举例说明，在定理 4.2 的条件 $F_y^{'}(x,x(x),x^{'}(x))\neq 0$ $F_{pp}^{''}(x,x(x),x^{'}(x))\neq 0$ 中的两个不等式是缺一不可的，

解：考虑方程 $(\frac{dy}{dx})^2-y^2=0$

方程（1）的 P—判别式为

$p^2-y^2=0$　　　$2p=0$ 消去 P，得 $y=x(x)=0$

令 $F(x,y,p)=p^2-y^2$，于是有 $F_p^{'}(x,y,p)=-2y$　　$F_p^{'}(x,y,p)=-2p$

$F_{pp}^{''}(x,y,p)=2$ 因此虽然有　　$F_{pp}^{''}(x,y,p)=2\neq 0$ 和 $F_p^{'}(x,0,0)=0$

但是 $F_y^{'}(x,0,0)=0$

又 $y=0$ 虽然是方程的解，且容易求出方程（1）的通解为 $y=xe^{\pm x}$

因此容易验证 $y=0$ 却不是奇解。因此由此例可看出。定理 4.2 中的条件 $F_y^{'}(x(x),x^{'}(x))\neq 0$ 是不可缺少的。

又考虑方程　　$\sin(y\frac{dy}{dx})=y$

方程（2）的 P—判别式为　$\sin(yp)=y$　　$ycos(yp)=0$

消去 P，得 $y=0$。令 $F(x,y,p)=\sin(yp)-y$ 于是有 $F_y^{'}(x,y,p)=pcos(yp)-1$，

$F_p^{'}(x,y,p)=ycos(yp)$　　$F_{pp}^{''}(x,y,p)=y^2\sin(yp)$　　因此，虽然有

$F_y^{'}(x,0,0)=-1\neq 0$ 和 $F_p^{'}(x,0,0)=0$ 但 $F_{pp}^{''}(x,0,0)=0$，而经检验知 $y=0$ 是方 程（2）的解，但不是奇解。因此由此例可看出定理 4.2 中的条件 $F_{pp}^{''}(x,x(x),x^{'}(x))\neq 0$ 是不可缺少的。

3．研究下面的例子，说明定理 4.2 的条件 $F_p^{'}(x,x(x),x^{'}(x))=0$ 是不可缺少的 $y=2x+y^{'}-\frac{1}{3}(y^{'})^3$

解：方程的 P—判别式为

$y=2x+p-\frac{1}{3}p^3$　　$1-p^2=0$

消去 P，得　　$y=2x\pm\frac{2}{3}$

检验知 $y=2x+\frac{2}{3}$ 不是解，故不是奇解，而 $y=2x-\frac{2}{3}$ 虽然是解，但不是奇解。

令 $F(x,y,p)=y-2x-p+\frac{1}{3}p^3$

$F_y^{'}(x,y,p)=1$，　　$F_p^{'}(x,y,p)=-1+p^2$

$F_{pp}^{''}(x,y,p)=2p$，　　所以虽有

$F_y^{'}(x,2x\pm\frac{2}{3},2)=1\neq 0$

$F_{pp}^{''}(x,2x\pm\frac{2}{3},2)=4\neq 0$

但是 $F_p^{'}(x,2x\pm\frac{2}{3},2)=3\neq 0$

因此此例说明定理 4.2 的条件 $F_p^{'}(x,x(x),x^{'}(x)=0$ 是不可缺少的。

习题 4-3

1．试求克莱罗方程的通解及其包络

解：克莱罗方程　$y = xp + f(p)$　$(p = \frac{dy}{dx})$（1）

其中 $f''(p) \neq 0$。

对方程（1）求导值 $(x + f'(p))\frac{dp}{dx} = 0$

由 $\frac{dp}{dx} = 0$　即 $p = c$ 时　代入（1）得（1）的通解

$y = cx + f(c)$　（2）

它的 C—判别式为　$\begin{Bmatrix} y = cx + f(c) \\ x + f'(c) = 0 \end{Bmatrix}$

由此得　$\Lambda: x = -f'(c)) = \varphi(c)$，　$y = -cf'(c) + f(c) = \psi(c)$

令 $V(x, y, c) = cx + f(c) - y$　，故

$V_x^{'}(\varphi(c), \psi(c), c) = c$　　　$v_y^{'}(\varphi(c), \psi(c), c) = -1$

所以 $(V_x^{'}, V_y^{'}) \neq (0, 0)$　　又

$(\varphi'(c), \psi'(c)) = (-f''(c), -cf''(c)) \neq (0, 0)$　（由于 $f''(c) \neq 0$）

因此 Λ 满足定理 4.5 相应的非蜕化性条件。故 Λ 是积分曲线族（2）的一支包络。

课外补充

1．求下列给定曲线族的包络。

1）$(x - c)^2 + (y - c)^2 = 4$

解：由相应的 C—判别式

$V(x, y, c) = (x - c)^2 + (y - c)^2 - 4 = 0$

$V_c(x, y, c) = -2(x - c) - 2(y - c) = 0$

消去 C 得 C—判别曲线　$(x - y)^2 = 8$

它的两支曲线的参数表示式为

Λ_1：　$x = -\sqrt{2} + c$　，$y = \sqrt{2} + c$

Λ_2：$x = \sqrt{2} + c$　，$y = -\sqrt{2} + c$

对Λ_1，我们有$(\varphi'(c),\psi'(c))=(1,1)\neq(0,0)$

$$V_x^{'}(\varphi(c),\psi(c),c)=2(-\sqrt{2}+c-c)=-2\sqrt{2}$$

$$V_y^{'}(\varphi(c),\psi(c),c)=2(\sqrt{2}+c-c)=2\sqrt{2}$$

$$\therefore (V_x^{'}(\varphi(c),\psi(c),c)v,V_y^{'}(\varphi(c),\psi(c),c))\neq(0,0)$$

因此Λ_1满足定理 4.5 的相应的非蜕化条件，同理可证，Λ_2也满足定理 4.5 的相应的非蜕化条件，故Λ_1，Λ_2是曲线族的两支包络线。

2．$(x-c)^2+y^2=4c$

解：由相应的 C—判别式

$$V(x,y,c)=(x-c)^2+y^2-4c=0$$

$$V_c(x,y,c)=-2(x-c)-4=0$$

消去 C 得 C—判别曲线 $y^2=4(x+1)$ 它的两支曲线的参数表示式为

$$\Lambda_1: x=-2+c \quad , \quad y=2\sqrt{c-1}$$

$$\Lambda_2: x=-2+c \quad , \quad y=-2\sqrt{c-1}$$

对Λ_1，我们有$(\varphi'(c),\psi'(c))=(1,\dfrac{1}{\sqrt{c-1}})\neq(0,0)$

$$(V_x^{'}(\varphi(c),\psi(c),c)v,V_y^{'}(\varphi(c),\psi(c),c))=(-4,4\sqrt{c-1})\neq(0.0)$$

因此Λ_1满足定理 4.5 的相应的非蜕化条件，同理可证，Λ_2也满足定理 4.5 的相应的非蜕化条件，故Λ_1，Λ_2是曲线族的两支包络线。

3. 证：就克莱罗方程来说，P—判别曲线和方程通解的 C—判别曲线同样是方程通解的包络，从而为方程的奇解。

证：已知克莱罗方程的形式为

$$y=xp+f(p) \qquad (p=\frac{dy}{dx},f''(p)\neq0) \quad （1）$$

（1）的通解为 $y=cx+f(c)$ （2）

（2）的包络由 $y=cx+f(c)$ $x+f'(c)=0$ 确定，

即为 $y=-f'(c)$ $y=cf'(c)+f(c)$ （3）

又知方程（1）还有解 $x+f'(p)=0$ $y=xp+f(p)$

由此得 $x=f'(p)$ ， $y=-pf'(c)+f(p)$ （4）

而（4）是方程（1）的 P—判别曲线，它和（3）有相同的形式，因而同样是通解（2）的包络，消去 P 得方程（1）的奇解。

第五章 高阶微分方程

习题 5-1

1.解：对于线性单摆方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=0\ (a=\sqrt{\frac{g}{l}})$$

单摆周期

$$T=\frac{2\pi}{a}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\therefore g=l\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Ï 此，g可 ± 通过测量单摆小振动时的周期T来计算，计算公式如上。

2.证明：对于三次近似方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2(x-\frac{1}{6}x^3)=0\ (a=\sqrt{\frac{g}{l}})$$

容 ´ 得到它的首次积分

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+a^2x^2-\frac{1}{12}a^2x^4=C_1$$

即

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{1}{12}a^2(x^2-6)^2+C_1-3a^2}$$

设单摆振幅为$A(0<A<\sqrt{6})$，则它在某 ˜ 时刻t_1的运动状态是$x(t_1)=A,x^{'}(t_1)=0$，代入上式，有

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\pm\sqrt{\frac{1}{12}a^2\left[(x^2-6)^2-(A^2-6)^2\right]}\\&=\pm\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{(12-x^2-A^2)(A^2-x^2)}\end{aligned}$$

$$\therefore\frac{T}{4}=\int_0^A\frac{dx}{\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{(12-x^2-A^2)(A^2-x^2)}}$$

即

$$T=\frac{4}{a}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left[1-\frac{A^2}{12}(1+u^2)\right]}}$$

$$\lim_{A\to 0} T = \frac{2\pi}{a},\ \lim_{A\to\sqrt{6}} T = +\infty$$

T与A有关，Ï此是不等时的。

3.解：若

$$L = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

则说明细线是绷直的，悬链线是±点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$为端点的直线段。

4.解： (1)取

$$C_1=0,\ C_2=0,\ C_3=0$$

则

$$y\dot{x}-x\dot{y}=C_3=0$$

即

$$ydx-xdy=0$$

从而

$$y(t)=Cx(t)\ and\ x(t)=0$$

$$\because x^2+y^2+z^2\neq 0$$

$\therefore$不妨设$x(t)$不恒为零，则$y(t)=Cx(t)$ 又

$$x\dot{z}-z\dot{x}=0$$

$$\therefore z(t)=Kx(t)$$

从而$(x,y,z)=x(t)(1,C,K)$，运动轨道处于直线上，但是是否发生碰撞则还‡视初始状态而定。若初始时运动方向相背离，且初始动能足±克服Ú力，则不会发生碰撞，否则发生碰撞。

(2)取

$$C_1=0,\ C_2=0,\ C_3>0,\ C_4=-\left(\frac{\mu}{C_3}\right)^2$$

则

$$e=0,\ r=p=\frac{C_3^2}{\mu}$$

运动轨道为˜圆周。

习题 5-2

1.解：单摆方程(5.7)，令

$$y_1 = x,\ y_2 = \dot{x}$$

则

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} & = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} & = -a^2 \sin y_1 \end{cases}$$

悬链线方程(5.15)，令

$$y_1 = y,\ y_2 = y^{'}$$

则

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} & = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} & = a\sqrt{1+y_2^2} \end{cases}$$

二体运动方程(5.20)，令

$$y_1 = x,\ y_2 = \dot{x}$$

$$y_3 = y,\ y_4 = \dot{y}$$

$$y_5 = z,\ y_6 = \dot{z}$$

则

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} & = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} & = -\frac{Gm_s y_1}{\left(\sqrt{y_1^2+y_3^2+y_5^2}\right)^3} \\ \frac{dy_3}{dt} & = y_4 \\ \frac{dy_4}{dt} & = -\frac{Gm_s y_3}{\left(\sqrt{y_1^2+y_3^2+y_5^2}\right)^3} \\ \frac{dy_5}{dt} & = y_6 \\ \frac{dy_6}{dt} & = -\frac{Gm_s y_5}{\left(\sqrt{y_1^2+y_3^2+y_5^2}\right)^3} \end{cases}$$

2.解: 对于初值问题

$$(E):\ \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}), \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$$

(1)皮卡存在和唯˜ 定理

设初值问题(E)中$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$在区域

$$R:\ |x-x_0|\le a,\ |\mathbf{y}-\mathbf{y_0}|\le b$$

内连续，且对$\mathbf{y}$满足李氏条件，则(E)在区间$I=[x_0-h,x_0+h]$上有且只有˜个解，其中常数$h=\min\left\{a,\frac{b}{m}\right\},M>\max_{(x,\mathbf{y})\in R}|\mathbf{f}(x,\mathbf{y})|$。

主‡证明步骤：

(a)初值问题(E)等价于积分方程

$$\mathbf{y}=\mathbf{y_0}+\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(x,\mathbf{y})dx$$

(b)由此可作皮卡序列

$$\mathbf{y_{n+1}(x)}=\mathbf{y_0}+\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(x,\mathbf{y_n}(\mathbf{x}))dx$$

$(n=0,1,2,\cdots)$，其中$\mathbf{y_0}(x)=\mathbf{y_0}$

(c)归纳法可证$\mathbf{y}=\mathbf{y_n}(x)$在I上是连续的，且满足

$$|\mathbf{y_n}(x)-\mathbf{y_0}|\le M|x-x_0|\ (n=0,1,2,\cdots)$$

(d)归纳法可证

$$|\mathbf{y_{n+1}}(x)-\mathbf{y_n}(x)|\le\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}$$

它蕴含着皮卡序列$\mathbf{y}=\mathbf{y_n}(x)$是˜致收敛的

(e)令$\boldsymbol{\varphi}(x)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{y_n}(x),\ (x\in I)$，则$\mathbf{y}=\boldsymbol{\varphi}(x)$是(E)的˜个解。

(f)证明解唯˜。

(2)佩亚诺存在定理

设函数$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$在区域R内连续，则初值问题(E)在区间$|x-x_0|\le h$上至少有˜个解。这里R和h定Â如上。

主‡证明步骤：

(a)构造欧拉序列$\mathbf{y}=\boldsymbol{\varphi_n}(x),\ (|x-x_0|\le h)$

(b)由AscoliÚ理证明欧拉序列在$|x-x_0|\le h$上至少有˜个收敛子列。

(c)证明欧拉折线$\mathbf{y}=\boldsymbol{\varphi_n}(x)$在$|x-x_0|\le h$上满足

$$\boldsymbol{\varphi_n}(x)=\mathbf{y_0}+\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(x,\boldsymbol{\varphi_n}(x))dx+\boldsymbol{\delta_n}(x)$$

其中函数$\delta_{\mathbf{n}}(x)$趋于零。

(d)选取欧拉折线序列的˜个子序列，使之在$|x-x_0|\le h$上˜致收敛，极限函数为$\boldsymbol{\varphi}(x)$，则$\mathbf{y}=\boldsymbol{\varphi}(x)$在$|x-x_0|\le h$上连续，是(E)的˜个解。

3.解:对n阶线性微分方程组初值问题

$$(F):\ \frac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{A}(x)\mathbf{y}+\mathbf{e}(x),\ \mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y_0}$$

若$\mathbf{A}(x),\mathbf{e}(x)$在$|x-x_0|\le a$上连续，则(F)解存在且局部唯˜。

证明：事实上，$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})=\mathbf{A}(x)\mathbf{y}+\mathbf{e}(x)$在区域

$$R:\ |x-x_0|\le a,\ |\mathbf{y}-\mathbf{y_0}|\le b$$

内连续，且

$$|\mathbf{f}(x,\mathbf{y})-\mathbf{f}(x,\mathbf{z})|\le L|\mathbf{y}-\mathbf{z}|$$

其中

$$L=n\max_{|x-x_0|\le a}|a_{ij}(x)|$$

再由皮卡定理即可得证。

习题 5-3

1.证明：做变换$t=x-x_0,\ \mathbf{u}=\mathbf{y}-\boldsymbol{\eta}$，则

$$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})=\mathbf{f}(t+x_0,\mathbf{u}+\boldsymbol{\eta})\triangleq\mathbf{g}(t,\mathbf{u},\boldsymbol{\eta})$$

从而初值问题变为：

$$(F):\ \frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{g}(t,\mathbf{u},\boldsymbol{\eta}),\mathbf{u}(0)=0$$

由$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$在R上连续且对$\mathbf{y}$满足李氏条件，知$\mathbf{g}(t,\mathbf{u},\boldsymbol{\eta})$在

$$(G):\ |t|\le a,\ |\mathbf{u}|\le\frac{b}{2},\ |\boldsymbol{\eta}-\mathbf{y_0}|\le\frac{b}{2}$$

上连续且对$\mathbf{u}$满足李氏条件。

由定理5.1知，初值问题(F)的解$\mathbf{u}=\boldsymbol{\phi}(x,\boldsymbol{\eta})$在区域

$$(D):\ |t|\le\frac{h}{2},\ |\boldsymbol{\eta}-\mathbf{y_0}|\le\frac{b}{2}$$

上连续，即原微分方程的解$\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\eta}) \triangleq \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{\eta})$在区域Q上连续。

3.解：例如§2.2例2中的微分方程$y' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$，其积分曲线族见§2.2图2-2，显然在x轴上任˜点解都不唯˜，且局部范围内都不能把曲线族拉成平行直线族。

习题 6-1

1. 求出齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dt}=A(t)y$ 的通解，其中 A（t）分别为：

（1）$A(t)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$；（2）$A(t)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$；（3）$A(t)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$。

解 （1）方程组的分量形式为：

$$\frac{dy_1}{dt}=y_1+y_2\ ,\ \frac{dy_2}{dt}=y_2$$

从后一式容易求出 y_2 的通解为 $y_2=ke^t$，其中 K 为任意常数，可分别取 $y_2=0$ 和 $y_2=e^t$，代入前一式得到两个相应的特解，$y_1=e^t$ 和 $y_2=te^t$ 这样就求得方程组的一个解矩阵为

$\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^t&te^t\\0&e^t\end{pmatrix}$ 又 $\det\left|\Phi(t)\right|=e^{2t}\neq 0$。因此，$\Phi(t)$ 是方程组的一个基解矩阵，根据定理 6.1 ,方程的通解为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}e^t\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}te^t\\e^t\end{pmatrix}$$

（2）方程的分量形式为 $\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_2 & ①\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-y_1 & ②\end{cases}$

由①、②可和 $\frac{d^2y_1}{dt^2}+y_1=0$

由观察法知，$y_1=\cos t$，$y_1=\sin t$ 为此方程的两个特解，将其代入②式可得两个相应的特解，将其代入②式可得两个相应的特解：$y_2=-\sin t$，$y_2=\cos t$。这样就求得方程组的一个解矩阵为 $\Phi(t)=\begin{pmatrix}\cos t&s\mathrm{int}\\-s\mathrm{int}&\cos t\end{pmatrix}$ 又 $\det=\left[\Phi(t)\right]=1\neq 0$，因此 $\Phi(t)$ 中方程组的一个基解矩阵。故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\cos t\\-s\mathrm{int}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}s\mathrm{int}\\\cos t\end{pmatrix}$$

（3）程组的分量形式为：$\begin{cases} y_1' = y_3 & ① \\ y_2' = y_2 & ② \\ y_3' = y_1 & ③ \end{cases}$

解 ①+③得 $\dfrac{d}{dt}(y_1 + y_3) = y_1 + y_3$

解 ①-③得 $\dfrac{d}{dt}(y_1 - y_3) = y_1 - y_3$

解之得 $y_1 + y_3 = k_1 e^{-t}$ $\quad y_1 - y_3 = k_2 e^{-t}$

由④、⑤可得 $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2}\left(k_1 e^t + k_2 e^{-t}\right) = c_1 e^t + c_3 e^{-t} \\ y_3 = \dfrac{1}{2}\left(k_1 e^t - k_2 e^{-t}\right) = c_1 e^t - c_3 e^{-t} \end{cases}$

又由②得 $y_2 = c_2 e^t$

由此可求得方程组的一个解矩阵

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ 0 & e^t & 0 \\ e^t & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

显然，$\det[\Phi(t)] = -ze^t \neq 0$，因此$\Phi(t)$是方程组的一个基解矩阵，故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^e \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

3．试证向量函数组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，$\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 在任意区间 $a < x < b$ 上线性相关，则存在不全为零的三个常数 c_1, c_2, c_3 使得

$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$ 即 $\begin{matrix} c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0 \\ a < x < b \end{matrix}$ ①而①式之左端是一个不高于二次的多项式，它最多只可能有二个零点，同此这与①式在 $a < x < b$ 上恒等于零矛盾，从而得证。

4．试证基解矩阵完全决定齐次线性方程组即如果方程组 $\dfrac{dy}{dx} = A(x)y$ 与 $\dfrac{dy}{dx} = B(x)y$

有一个相同的基解矩阵，则 $A(x) = B(x)$

证：设这两个方程组的相同基解矩阵为 $\Phi(x)$ 那么，必有 $\det[\Phi(t)]\neq 0$,故$\Phi(x)$可逆,设逆矩阵为$\Phi^{-1}(x)$,同而

$$A(x)=\frac{d\Phi}{dx}\Phi^{-1}(x)=B(x)$$ 证毕

6．设当$a<x<b$时，非齐次线性方程组 $\frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x)$（1）中的$f(x)$不恒为零。证明（1）有且至多有 n+1 个线性无关解。

证　设$y_1(x),\cdots y_n(x)$是方程组（1）的相应齐次方程组的 n 个线性无关的解，$\varphi(x)$是（1）任意一个特解，则 $y_1(x)+\varphi(x),y_2(x)+\varphi(x),\cdots,y_n(x)+\varphi(x)$

是(1)的 n+1 个线性无关解.这是因为,若存在常数 $k_1,k_2,\cdots k_n,k_{n+1}$ 使得

$$k_1(y_1(x)+\varphi\ (x))+\cdots+k_n(y_n(x)+\varphi(x))+k_{n+1}\varphi(x)\equiv 0$$

则一定有 $k_1=k_2=\cdots k_n=k_{n+1}=0$ 否则有

$$\varphi(x)=\frac{-k_1}{k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}}y_1(x)+\cdots+\frac{-k_n}{k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}}y_n(x)$$

这与$\varphi(x)$为(1)的解矛盾，因此，$k_1+k_2+\cdots k_n+k_{n+1}\equiv 0$ 假设可知$k_1=k_2=-=k_n=0$ 故$k_{n+1}=0$，所以（1）n+1 个线性无关的解。

又设 $\varphi(x)$是（1）在(a,b)上的任一解，$y_1\ y_2\cdots y_{n+1}$是（1）的 n+1 个线性无关的解，那么，$\varphi(x)-y_1(x),\ \varphi(x)-y_2(x),\cdots,\ \varphi(x)-y_{n+1}(x)$ 是 (1) 的对应齐次方程组

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y \qquad (2)$$

的解，而（2）最多有 n 个线性无关的解，所以必存在不全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$，使得

$x\in(a,b)$

$$k_1(\varphi(x)-y_1)+k_2(\varphi(x)-y_2)+k_{n+1}(\varphi(x)-y_{n+1})\equiv 0$$

即 $(k_1+k_2+\cdots+k_{n+1})\varphi(x)=k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_{n+1}y_{n+1}$ 显然，$k_1+k_2+\cdots k_{n+1}\neq 0$，否则，存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$,使得

$$k_1y_1(x)+k_2+y_2(x)+\cdots k_{n+1}y_{n+1}(x)\equiv 0$$

这与 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_{n+1}(x)$ 线性无关矛盾，故

$$\varphi(x) = \frac{-k_1}{k_1 + k_2 + \cdots + k_{n+1}} y_1(x) + \cdots + \frac{-k_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_{n+1}} y_{n+1}(x)$$

这说明（1）的任一解，都可由这 n+1 个线性无关的解的线性表出，同时也说明（1）的任意 n+2 个解线性相关，故方程组（1）在（a，b）上至多有 n+1 个线性无关解。

习题 6-2

1. 求出常系数齐次性微分方程组 $\frac{dy}{dx} = Ay$ 的通解，其中的矩阵 A 分别为

1）$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$　　2）$\begin{pmatrix} o & a \\ -a & o \end{pmatrix}$　　3）$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

4）$\begin{pmatrix} -5 & -10 & -20 \\ 5 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$　　6）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

解：

1）　特征方程

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix}$　　　即　$(\lambda-7)(\lambda+2)=0$

矩阵 A 有特征根，$\lambda_1 = 7$　　$\lambda_2 = -2$

对应于 $\lambda_1 = 7$ 所有的特征向量 $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ 满足 $(A-7E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$ 即 $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$ 。取

$v_1 = 1$，则 $v_2 = 1$　那么对应的实值解为 $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7x}$；

对应 $\lambda_2 = -2$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ 满足 $(A+2E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$ 即 $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$，取 $v_1 = 4$，则

$v_2 = -5$，那么对应的实值解为　$y_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-zx}$ 。于是该方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7x} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

2）特征方程为

$\begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$　　　即 $\lambda^2 + a^2 = 0$

矩阵 A 有特征根 $\lambda_1 = ai$　　$\lambda_2 = -ai$

对应 $\lambda_1 = ai$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ 应满足 $\begin{pmatrix} -ai & a \\ -a & -ai \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$

取 $v_1=1$ ， 则 $v_2=i$ 　即 么 对 应 的 特 解 为 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=e^{aix}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}(\cos ax+i\sin ax)$

$$=\begin{pmatrix}\cos ax\\-\sin ax\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}\sin ax\\\cos ax\end{pmatrix}$$

由此得 $\lambda_1=ai$ 所对应的两个特解为（对 2X2 的方程组取一个特解的实部和虚部就可，因为虚根都是成对出现的。）

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos ax\\-\sin ax\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}\sin ax\\\cos ax\end{pmatrix}$$

它们在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关，故得方程组的通解：

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\cos ax\\-\sin ax\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\sin ax\\\cos ax\end{pmatrix}$$

3） $\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\0 & -1-\lambda & 0\\1 & 0 & -4-\lambda\end{vmatrix}=0$ 　即 $(\lambda+4)(\lambda+1)^2=0$

矩阵 A 有特征根 　$\lambda_1=-4$，$\lambda_1=\lambda_2=-1$。

对应于 $\lambda_1=-4$ ，特征向量应满足

$\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=0$ 　又 $\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$（只能进行行变换）

因此与 λ_1 相应的特征向量可取为 $n_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

对于二重特征根 $\lambda_2=-1$，可以算出

$$(A-\lambda_2E)^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&-3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-3&1&9\end{pmatrix}$$

因此，方程 $(A-\lambda_2E)^2\gamma=0$ 有二个线性无关的解为 　$\gamma_{10}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\gamma_{20}=\begin{pmatrix}0\\9\\-1\end{pmatrix}$

注意到$n_2=2$，就可得到$\gamma_{11}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\gamma_{21}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\9\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\0\\3\end{pmatrix}$$

从而可行基解矩阵

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}0&3e^{-x}&9xe^{-x}\\0&0&9e^{-x}\\e^{-4x}&e^{-x}&(3x-1)e^{-x}\end{pmatrix}$$

因此所求通解为 $y=\Phi(x)C$，即 $y=c_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{-4x}+c_2\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}e^{-x}+c_3\begin{pmatrix}9x\\9\\3x-1\end{pmatrix}e^{-x}$

4）特征方程 $\begin{vmatrix}-5-\lambda&-10&-20\\5&5-\lambda&10\\2&4&9-\lambda\end{vmatrix}=0$

即 $-\lambda^3+9\lambda^2-25\lambda+25=0$

矩阵 A 有特征根：$\lambda_1=5$，$\lambda_2=2+i$，$\lambda_3=2-i$

对应$\lambda_1=5$的特征向量$\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix}$应满足

$$\begin{pmatrix}-10&-10&-20\\5&0&10\\2&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix}=0$$

解之得 $\gamma_1=-2\gamma_3$ $\gamma_2=0$ 取$\gamma_3=1$ 则$\gamma_1=-2$

故相应的解为 $\begin{pmatrix}y_{11}\\y_{21}\\y_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}e^{5x}$

相应于 $\lambda_2 = 2+i$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}-7-i & -10 & -20\\ 5 & 3-i & 10\\ 2 & 4 & 7-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix}=0$$

取 $\gamma_1 = 20+10i$，$\gamma_2 = 15-5i$，$\gamma_3 = -14-2i$

那么对应的复解为

$$y = e^{(2+i)x}\begin{pmatrix}20+10i\\15-5i\\-14-2i\end{pmatrix} = e^{2x}\begin{pmatrix}20\cos x-10\sin x\\15\cos x+5\sin x\\-14\cos x+2\sin x\end{pmatrix}+e^{2x}\begin{pmatrix}10\cos x+20\sin x\\15\sin x-5\cos x\\-2\cos x-14\sin x\end{pmatrix}i$$

分别取实部，部可得方程组的两个实解

$$\begin{pmatrix}y_{12}\\y_{22}\\y_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\cos x-10\sin x\\15\cos x+5\sin x\\-14\cos x+2\sin x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_{12}\\y_{22}\\y_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\cos x+10\sin x\\15\cos x-5\sin x\\-2\cos x-14\sin x\end{pmatrix}e^{2x}$$

易知它们在 $(-\infty,+\infty)$ 上是线性无关的，于是方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=c_1e^{2x}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2x}\begin{pmatrix}20\cos x-10\sin x\\15\cos x+5\sin x\\-14\cos x+2\sin x\end{pmatrix}+c_3e^{2x}\begin{pmatrix}10\cos x+20\sin x\\15\sin x-5\cos x\\-2\cos x-14\sin x\end{pmatrix}$$

6）特征方程为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3(\lambda+2)=0$$

矩阵 A 的特征根为 $\lambda_1 = -2$， $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$

对应于 $\lambda_1 = -2$，相应的特征向量 $\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{pmatrix}$ 应满足

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}=0$$

可以算出

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解之得 $\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=-\gamma_1$， 则 $\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=1$ 那么相应的解为 $e^{-2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应于三重特征根 $\lambda_2=2$，可以算出

$$(A-\lambda_2 E)^3=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^3=16\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

因此，方程 $(A-\lambda_2 E)^3\gamma=0$ 有三个线性无关解为

$$r_{10}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad r_{20}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad r_{30}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

注意到 $n_i=3$，可得

$$\gamma_{11}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{31}=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

由以上结果，可得方程组的一个基解矩阵

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}-e^{-2x}&e^{2x}&e^{2x}&e^{2x}\\e^{-2x}&e^{2x}&0&0\\e^{-2x}&0&e^{2x}&0\\e^{-2x}&0&0&e^{2x}\end{pmatrix}$$

因此所求方程组的通解为　　$y=\Phi(x)\vec{c}$　　或

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=c_1e^{-2x}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_3e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_4e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

2．求出常系数非齐次线性方程组$\dfrac{dy}{dx}=Ay+f(x)$，的通解，其中：

3）$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$，$f(x)=\begin{pmatrix}0\\2e^x\end{pmatrix}$；　　4）$A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$，　$f(x)=\begin{pmatrix}2-x\\0\\1-x\end{pmatrix}$；

5）$A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，　$f(x)=\begin{pmatrix}x^2\\2x\\x\end{pmatrix}$。

3）解先求对应齐次方程组的通解

特征方程　$\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1=0$，特征根为$\lambda_1=\lambda_2=1$

对于二重特征根$\lambda_1=1$，可以算出

$$(A-\lambda_1E)^2=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

因此方程$(A-\lambda_1E)^2r=0$　有二个线性无关的解

$$\gamma_{10}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\qquad\gamma_{20}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\gamma_{11}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \qquad \gamma_{21}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

由此可得齐次线性方程组的一个基解矩阵

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}e^x & xe^x\\ e^x & (-1+x)e^x\end{pmatrix}$$

故非齐次方程组的通解为

$$y=\Phi(x)C+\Phi(x)\int\Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix}0\\ 2e^s\end{pmatrix}ds$$

容易求出$\Phi^{-1}(x)=\begin{pmatrix}(1-x)e^{-x} & xe^{-x}\\ e^{-x} & -e^{-x}\end{pmatrix}$

故 $\Phi(x)\int\Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix}0\\ 2e^s\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}e^x & xe^x\\ e^x & (x-1)e^x\end{pmatrix}\int\begin{pmatrix}(1-s)e^{-s} & se^{-s}\\ e^{-s} & -e^{-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2e^s\end{pmatrix}ds$

$$=\begin{pmatrix}e^x & xe^x\\ e^x & (x-1)e^x\end{pmatrix}\int\begin{pmatrix}2s\\ -2\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}e^x & xe^x\\ e^x & (x-1)e^x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2\\ -2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^2e^x\\ (2x-x^2)e^x\end{pmatrix}$$

于是非齐次方程组的通解为

$$y=c_1e^x\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+c_2e^x\begin{pmatrix}x\\ x-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x^2\\ 2x-x^2\end{pmatrix}e^x$$

4）先求对应齐次方程组的通解

特征方程为$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & -2\\ -1 & -\lambda & 0\\ 1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$

特征根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=i$ ，$\lambda_3=-i$

对应于$\lambda_1=1$的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

对应于$\lambda_2=i$的特征向量为$\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}$应满足 $\begin{pmatrix}2-i & 1 & -2\\ -1 & -i & 0\\ 1 & 1 & -1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}=0$

解之得 $\gamma_1=-i\gamma_2=\gamma_3$，令$\gamma_2=1$，则$\gamma_1=\gamma_3=-i$

其相应的复值解为： $y=e^{ix}\begin{pmatrix}-i\\1\\-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin x-i\cos x\\\cos x+i\sin x\\\sin x-i\cos x\end{pmatrix}$

分别取实部和虚部，可得齐次方程组的两个线性无关的实解,

$$y_2=\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\\\sin x\end{pmatrix}\qquad y_3=\begin{pmatrix}-\cos x\\\sin x\\-\cos x\end{pmatrix}$$

从而可得齐次方程组的一个基解矩阵

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}e^x&\sin x&\cos x\\-e^x&\cos x&-\sin x\\0&\sin x&\cos x\end{pmatrix}\text{容易求得}\ \Phi^{-1}(x)=\begin{pmatrix}e^{-x}&0&-e^{-x}\\\cos x&\cos x&\sin x-\cos x\\-\sin x&-\sin x&\sin x+\cos x\end{pmatrix}$$

这个矩阵的逆的算法：

$$\Phi(x)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}e^x&\sin x&\cos x&1&0&0\\-e^x&\cos x&-\sin x&0&1&0\\0&\sin x&\cos x&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{第一行减第三行}}\begin{pmatrix}e^x&0&0&1&0&-1\\-e^x&\cos x&-\sin x&0&1&0\\0&\sin x&\cos x&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二行}\times\cos x+\text{第三行}\times\sin x}\begin{pmatrix}e^x&0&0&1&0&-1\\-e^x\cos x&1&0&0&\cos x&\sin x\\0&\sin x&\cos x&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第三行+第二行}\times(-\sin x)}\begin{pmatrix}e^x&0&0&1&0&-1\\-e^x\cos x&1&0&0&\cos x&\sin x\\e^x\cos x\sin x&0&\cos x&0&-\cos x\sin x&\cos^2 x\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第三行+第一行}\times(-)\sin x\cos x}\begin{pmatrix}e^x&0&0&1&0&-1\\-e^x\cos x&1&0&0&\cos x&\sin x\\0&0&\cos x&-\sin x\cos x&-\cos x\sin x&\cos^2 x+\cos x\sin x\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一行}\times\cos x+\text{第二行}}\begin{pmatrix}e^x&0&0&1&0&-1\\0&1&0&\cos x&\cos x&\sin x-\cos x\\0&0&\cos x&-\sin x\cos x&-\cos x\sin x&\cos^2 x+\cos x\sin x\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&e^{-x}&0&-e^{-x}\\0&1&0&\cos x&\cos x&\sin x-\cos x\\0&0&1&-\sin x&-\sin x&\cos x+\sin x\end{pmatrix}$$

这里是只能通过**行变换**将矩阵先变成下三角，再变成对角阵即可。自己认真算，我都能算对，大家一定可以的，复习高等代数了。

我仔细算了一下，要是将齐次方程的通解写出来，再用常数变易法求出特解方程组的阶数高的时候比求矩阵的逆还复杂，所以还是建议大家用求矩阵的逆的方法来算吧。

故 $\int \Phi^{-1}(s)\begin{pmatrix}2-s\\0\\1-s\end{pmatrix}ds=\int\begin{pmatrix}e^{-s}\\(1-s)\sin s+\cos s\\-\sin s+(1-s)\cos s\end{pmatrix}d=\begin{pmatrix}-e^{-x}\\(x-1)\cos x\\(1-x)\sin x\end{pmatrix}$

则 $\Phi(x)\int\Phi^{-1}(s)f(s)ds=\begin{pmatrix}e^x&\sin x&\cos x\\-e^x&\cos x&-\sin x\\0&\sin x&\cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-e^{-x}\\(x-1)\cos x\\(1-x)\sin x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\x\\0\end{pmatrix}$

所以非齐次线性方程组的通解为

$$y=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}e^x+c_2\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\\\sin x\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}\cos x\\-\sin x\\\cos x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\x\\0\end{pmatrix}$$

5)先求对应齐次方程组的通解

特征方程 $\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\0&-1-\lambda&-1\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=0$

特征方程根为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$。对于三重特重根 $\lambda_1=-1$，可以算出

$$(A-\lambda_1E)^3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此方程 $(A-\lambda_1E)^3r=0$ 有三个线性无关的解 $r_{10}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},r_{20}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},r_{30}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$r_{11}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$r_{21}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad r_{22}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$r_{31}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad r_{32}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

由此可得齐次线性方程的一个基解矩阵 $\Phi(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & -1 & -x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}e^{-x}$

从而容易求得 $\Phi^{-1}(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & -1 & -x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}e^{x}$

又 $\int\Phi^{-1}(x)f(x)dx=\int e^{x}\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & -1 & -x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2\\ 2x\\ x\end{pmatrix}dx$

$$=\int\begin{pmatrix}3x^2\\ -2x-x^2\\ x\end{pmatrix}e^{x}dx=\begin{pmatrix}3x^2-6x+6\\ -x^2\\ x-1\end{pmatrix}e^{x}$$

故 $\Phi(x)\int\Phi^{-1}(x)f(x)dx$

$$=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & -1 & -x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}e^{-x}\begin{pmatrix}3x^2-6x+6\\ -x^2\\ x-1\end{pmatrix}e^{x}=\begin{pmatrix}2x^2-6x+6\\ x\\ x-1\end{pmatrix}$$

故非齐次线性方程组的通解为

$$y=\Phi(x)c+\Phi(x)\int\Phi^{-1}(x)f(x)dx$$

$$=c_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}e^{-x}+c_2\begin{pmatrix}x\\ -1\\ 0\end{pmatrix}e^{-x}+c_3\begin{pmatrix}x^2\\ -x\\ 1\end{pmatrix}e^{-x}+\begin{pmatrix}2x^2-6x+6\\ x\\ x-1\end{pmatrix}$$

由于特征向量取的不同，结果肯能也不一样。但是课本答案出现 e^x 肯定是不正确的。

3．求出微分方程组 $\dfrac{dy}{dx}=AY=f(x)$ 满足初值条件 $Y(0)=\gamma$ 的解，其中：

（1）$A=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$， $f(x)=\begin{pmatrix}e^{x}\\ e^{2x}\end{pmatrix}$， $\gamma=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$；

（2）$A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$， $f(x)=\begin{pmatrix}3x\\ 4\end{pmatrix}$， $\gamma=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$；

（3）$A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$， $f(x)=\begin{pmatrix}\sin x\\ -2\cos x\end{pmatrix}$， $\gamma=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

解

1）齐次方程组的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+4)^2 = 0$$

特征根 ：$\lambda_1 = \lambda_2 = -4$

对于二重特征根 $\lambda_1 = -4$，可以算出

$$(A-\lambda_1 E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同此方程 $(A-\lambda_1 E)^2 \gamma = 0$ 有二个线性无关解 $\gamma_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\gamma_{20} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\gamma_{11} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma_{21} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由此可得齐次方程组的一个基解矩阵

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} -x & 1-x \\ 1+x & x \end{pmatrix} e^{-4x}$$

从而可求得 $\Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} -x & 1-x \\ 1+x & x \end{pmatrix} e^{4x}$

故 $\int \Phi^{-1} f(x)dx = \int e^{4x} \begin{pmatrix} -x & 1-x \\ 1+x & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix} e^x dx$

$$= \int \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}xe^{5x} + \frac{1}{25}e^{5x} + \frac{1}{6}(1-x)e^{6x}e^{6x} \\ \frac{1}{5}(1+x)e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + \frac{1}{6}xe^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} \end{pmatrix} dx$$

$$= \int \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}xe^{5x} + \frac{1}{25}e^{5x} + \frac{1}{6}(1-x)e^{6x} + \frac{1}{36}e^{6x} \\ \frac{1}{5}(1+x)e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + \frac{1}{6}xe^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} \end{pmatrix}$$

所以 $\Phi(x)\int \Phi^{-1}(x) f(x)dx = \begin{pmatrix} \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x} \\ \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x} \end{pmatrix}$

故非齐次线性方程组的通解为

$$y = c_1\begin{pmatrix} -x \\ 1+x \end{pmatrix}e^{-4x} + c_2\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}e^{-4x} + \begin{pmatrix} \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^2 \\ \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x} \end{pmatrix}$$

由初始条件　$y(0) = \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{119}{900} \\ \frac{211}{900} \end{pmatrix}$

解之得　$c_1 = -\frac{211}{900}$，$c_2 = -\frac{781}{900}$

故初值问题的解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\frac{211}{900}\begin{pmatrix} -x \\ 1+x \end{pmatrix}e^{-4x} + \frac{781}{900}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}e^{-4x} + \begin{pmatrix} \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^2 \\ \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x} \end{pmatrix}$$

2）齐次方程组的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$

特征根为　$\lambda_1 = -2i$ $\lambda_2 = 2i$，　对应 $\lambda_2 = 2i$　的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = 0$$　取 $\gamma_1 = -1$，则　$\gamma_2 = i$

故　$\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}e^{2ix} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right](cox2x + isin2x)$

$$= \begin{pmatrix} -\cos 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$$

从而可得齐次方程组的一个基解矩阵

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} -\cos 2x & -\sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$$

容易求得　$\Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} -\cos s2x & -\sin 2x \\ -\sin 2x & \cos x2x \end{pmatrix}$

而　$\int \Phi^{-1} f(x)dx = \int \begin{pmatrix} -\cos x2x & -\sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x \\ 4 \end{pmatrix}dx$

$$\int\begin{pmatrix}-3x\cos 2x-4\sin 2x\\ -3x\sin 2x+4\cos 2x\end{pmatrix}dx=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}x\sin 2x+\frac{5}{4}\cos 2x\\ \frac{3}{2}x\cos 2x+\frac{5}{4}\sin 2x\end{pmatrix}$$

又 $\Phi(x)\int\Phi^{-1}(x)f(x)dx$

$$=\begin{pmatrix}-\cos 2x & -\sin 2x\\ -\sin 2x & \cos 2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}x\sin 2x+\frac{5}{4}\cos 2x\\ 3/2\,x\cos 2x+\frac{5}{4}\sin 2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\ 3/2\,x\end{pmatrix}$$

故非齐次线性方程的通解为

$$y=c_1\begin{pmatrix}-\cos 2x\\ -\sin 2x\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\sin 2x\\ \cos 2x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\ \frac{3}{2}x\end{pmatrix}$$

由初始条 $y=(10)=\gamma=(\frac{2}{3})$ 有 $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\ 0\end{pmatrix}$

解之得 $c_1=-\frac{13}{4},c_2=3$

故初值问题的解为

$$y=-\frac{13}{4}\begin{pmatrix}-\cos 2x\\ -\sin 2x\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-\sin 2x\\ \cos 2x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\ 3/2\,x\end{pmatrix}$$

或 $$\begin{cases}y_1=-\frac{13}{4}\cos 2x-3\sin 2x-\frac{5}{4}\\ y_2=\frac{13}{4}\sin 2x+3\cos 2x+\frac{3}{3}x\end{cases}$$

(3) 齐次方程组的特征方程为

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2$$

特征根 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$

对应 $\lambda_1=1$ 的特征向量应满足

$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = 0$ 取 $r_1 = 1$,则 $r_2 = 1$ 那么相应的解为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x$

对应 $\lambda_2 = 2$ 的特征向量应满足

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 0$，取 $r_1 = 3$,则$r_2 = 2$

那么相应的解为 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x}$

从而得齐次线性方程组的基解矩阵为

$$\Phi\ (x) = \begin{pmatrix} e^x & 3e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

容易求得 $\Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} -2e^x & 3e^{-x} \\ e^{-2x} & -e^{-2x} \end{pmatrix}$

由于 $\int \Phi^{-1} f(x)dx = \int \begin{pmatrix} -2e^{-x} & 3e^{-x} \\ e^{-2x} & -e^{-2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin x \\ -2\cos x \end{pmatrix} dx$

$$\begin{pmatrix} (4\cos x\_2\sin)e^{-x} \\ -\cos xe^{-2x} \end{pmatrix}$$

又 $\Phi(x)\int \Phi^{-1}(x) f(x)dx = \begin{pmatrix} e^x & 3e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (4\cos - 2\sin x)e^{-x} \\ -\cos xe^{-2x} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos x - 2\sin x \\ 2\cos x - 2\sin x \end{pmatrix}$$

故非齐线性方程组通解为

$$y = c_1\begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (4\cos x - 2\sin x)e^{-x} \\ -\cos xe^{-2x} \end{pmatrix}$$

由初值条件 $y(0) = u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

解之得 $c_1 = -4,\ \ c_2 = 1$

因此值问题解为

$$y=-4\begin{pmatrix}e^x\\e^x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3e^{2x}\\2e^{2x}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(4\cos x-2\sin x)\\2\cos x-2\sin x\end{pmatrix}$$

或 $\begin{cases}y_1=-4e^x+3e^{2x}+\cos x-2\sin x\\y_2=-4e^{2x}+2e^{2x}+2\cos x-2\sin x\end{cases}$

4.证明:常系数齐次方程组 $\dfrac{dy}{dx}=Ay$ 的任何解当 $x\to\infty$ 时都趋于零,当仅当它的系数矩阵 A 的所有特征根都具有负的实部.

证　必要性:设特征根为 $\lambda=\alpha+i\beta$,与之对应的方程组的解可表为 $y=e^{\lambda x}f(x)$。

1）当 $\beta=0$ 即 $\lambda=\alpha$ 为实数时，$f(x)$ 的每一分量或者为一常向量，或者为 x 的多项式的向量函数。此时总有当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to\infty$ 或者是常向量。那么只有当 $x\to\infty$ 时，$e^{\alpha x}\to 0$,故 α 必为负实数.

2）当 $\beta\neq 0$ 时，λ 为复数，则此时

$f(x)=p(x)(\cos\beta x+i\sin\beta x)$ 其中 $p(x)$是x 的向量多项式,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to\infty$,那么,若使当 $x\to+\infty$ 时,有 $y\to 0$ 成立,只有 $e^{\alpha x}\to 0(x\to+\infty)$,于是,$\alpha$ 必为负实数。

充分性:若系数矩阵 A 的所有特征根都具有负的实部,设特征根为 $\lambda=-\alpha+i\beta(\alpha>0)$，与之对应的解为 $y=e^{-\alpha x}f(x)$

（1）当 $\beta=0$ 时，$\lambda=-\alpha$ 为负数，由解的结构知，$f(x)$ 是关于 x 的一个多项式的向量函数，而已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\cdot e^{-\alpha x}=0$，其中 n 为任意自然数，故形如（1）的解当 $x\to+\infty$ 时，$y(x)\to 0$。

（3）当 $\beta\neq 0$ 时，$\lambda=-\alpha+i\beta$ 是复数，由解的结构，此时（1）中的 $f(x)=p(x)(\cos\beta x+i\sin\beta x)$，其中 $p(x)$ 是 x 的多项式向量函数，又由于

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-\alpha x}\cdot x^n\cos\beta x=0\qquad \lim_{x\to+\infty}e^{-\alpha x}\cdot x^n\sin\beta x=0$$

故形如（1）的解，当 $x\to+\infty$ 时，$y(x)\to 0$。

习 题 6—3

1．证明函数组 $\varphi_1(x)=\begin{cases}x^2\text{当}x\ge 0\\ 0\text{当}x<0\end{cases}$，$\varphi_2(x)=\begin{cases}0\quad\text{当}x\ge 0\\ x^2\quad\text{当}x<0\end{cases}$，在区间$(-\infty,+\infty)$上线性无关，但它们的朗斯基行列式恒等于零。这与本节的定理 6.2*是否矛盾？如果并不矛盾，那么它说明了什么？

证　设有 $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2\equiv 0\quad -\infty<x<+\infty$，则当$x\ge 0$时，有$c_1x^2+c_2 0\equiv 0$，从而推得 $c_1=0$。而当 $x<0$时，有$c_1\cdot 0+c_2x\equiv 0$，从而推得 $c_2=0$。因此在$-\infty<x<+\infty$上，只有$c_1=c_2=0$时，才有 $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)\equiv 0$，故$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$在$(-\infty,+\infty)$上线性无关。又当$x\ge 0$时，$w(x)=\begin{vmatrix}x^2 & 0\\ 2x & 0\end{vmatrix}\equiv 0$，当$x<0$时，$w(x)=\begin{vmatrix}0 & x^2\\ 0 & 2x\end{vmatrix}\equiv 0$

故当$-\infty<x<+\infty$时，有$w(x)\equiv 0$。这与本节定理 6.2 不矛盾，因为定理 6.2*成立对函数有要求，即$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$是某个二阶齐次线性方程的解组。这说明不存在一个二阶齐次线性方程，它以$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$为解组。

3．考虑微分方程　$y''+q(x)y=0$

（1）设$y=\varphi(x)$与$y=\psi(x)$是它的任意两个解，试证$y=\varphi(x)$与$y=\psi(x)$的朗斯基行列式恒等于一个常数。

（2）设已知方程有一个特解为$y=e^x$，试求这方程的通解，并确定$q(x)=?$

证：（1）在解$y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$的公共存在区间内任取一点x。由刘维尔公式，有 $w[\varphi(x),\psi(x)]=w(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}odx}=w(x_0)$（常数）

（2）由于$y=e^x$是方程的一个非零特解，故可借助刘维尔公式，求与之线性无关的特解 $y_2=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}\cdot e^{-\int odx}dx=-\frac{1}{2}e^{-x}$，故方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$

又由于$y=e^x$是方程的解，故有$e^x+q(x)e^x\equiv 0$，所以 $q(x)=-1$。

4．（1）见课本 291 页的 Lemma 9.1；（2）见课后答案

5．设函数$u(x)$和$v(x)$是方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$（6.76）的一个基本解组，

试证：（1）方程的系数函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 能由这个基本解组唯一地确定；

（2）$u(x)$ 和 $v(x)$ 没有共同的零点。

证：（1）由于 $u(x)$ 、$v(x)$ 是方程（6.76）的一个基本解组，故有

$\begin{cases} u' p(x)+uq(x)=-u'' \\ v' p(x)+vq(x)=-v'' \end{cases}$ ，　且 $\begin{vmatrix} u' & u \\ v' & v \end{vmatrix}=-w[u(x).v(x)]\neq 0$ ，　故 有

$$p(x)=\frac{\begin{vmatrix} -u'' & u \\ -v'' & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u' & u \\ v' & v \end{vmatrix}}=\frac{u''v-uv''}{w[u(x).v(x)]},\qquad q(x)=\frac{\begin{vmatrix} u' & -u'' \\ v'' & -v'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u' & u \\ v' & v \end{vmatrix}}=\frac{u'v''-u'v''}{w[u(x).v(x)]}$$

因此 $p(x),q(x)$ 能够由基本解组 $u(x),v(x)$ 惟一地确定。

（2）（反证法）若不然，$u(x)$ 和 $v(x)$ 有共同的零点，设为 x_0，则 $w(u(x_0),v(x_0))=0$，所以 $u(x)$ ，$v(x)$ 线性相关，这与 $u(x)$ ，$v(x)$ 为齐次线性方程（6.76）的一个基本解组矛盾。故得证。

7．设欧拉方程　$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0$　（1）

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是常数，$x>0$。试利用适当的变换把它化成常系数的齐次线性微分方程。

解　作自变量变换 $x=e^t$　，则 $t=\ln x$

直接计算可得 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$，　$\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-kt}\left(\frac{d^ky}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}\right)$

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_{k-1}$ 都是常数，于是 $x^k\frac{dy^k}{dx^k}=\frac{d^ky}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}$。将上述结果代人方程（1），就得到常系数齐次线性方程

$$\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0$$

其中 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 是常数

8、求解有阻尼的弹簧振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+kx=0 \qquad （1）$$

其中m,γ和中都是正的常数，并就$\Delta=r^2-4mk$大于，等于和小于零的不同情况，说明相应解的物理意义 。

解：特征方程为 $m\lambda^2+\gamma\lambda+k=0$

特征根：$\lambda_1=\dfrac{-r+\sqrt{r^2-4km}}{2m}$，$\lambda_2=\dfrac{-r+\sqrt{r^2-4km}}{2m}$

记$\Delta=\gamma^2-4mk$，下面由判别式Δ分三种情况讨论：

1）当$\Delta>0$时，这时，特征根$\lambda_2<\lambda_1<0$，的方程（1）的通解为

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t} \qquad （2）$$

由（2）可看出，方程（1）的任何解$x=x(t)$ 都满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

而且当$c_1\neq0,c_2=0$（或$c_1=0,c_2\neq0$）时，有$x(t)\neq0$。

而当$c_1\neq0,c_2\neq0$时，由（2）令 $c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=0$ （3）

若c_1与c_2同号，显然（3）式不能成立。若c_1与c_2异号，则有$t=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\ln\left(\dfrac{-c_1}{c_2}\right)$

故方程(1)的一切非零解最多只有一个零点,这相当于弹簧振子最多只能一次经过静止点。因此由以上讨论说明，当阻尼很大，即γ很大时，弹簧的运动不是周期的，且不具有振动的性质。

2）当$\Delta<0$时，这时特征根λ_1,λ_2是一对其轭的复根$\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$，

其中 $\alpha=\dfrac{-\gamma}{2m}<0$ $\beta=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2m}>0$， 于是方程（1）的通解为

$x=e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t)$，此式可改写为

$$x=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos t+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\beta t\right)e^{\alpha t}=Ae^{\alpha t}\sin(\beta t+\theta) \qquad （4）$$

其中　$A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\geq 0$，$\sin\theta=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$ $\cos\theta=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$

由于$\alpha<0$，由（4）可知 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0$这就证明，有阻尼的弹簧振动总是趋于静止的。由（4）可以看方程（1）的任何非零解（即 A≠0）都有无穷无多个零点。弹簧振动已不是周期的，弹簧振动将作衰减振动，最后振幅$Ae^{\alpha t}$将衰减到零，即振动趋于平衡位置 x=0

3）当$\Delta=0$时，此时有两个相同的特征根$\lambda_1=\lambda_2=\frac{-\gamma}{2m}$，方程（1）的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \qquad (5)$$

从（5）式可看出，弹簧的运动也不是周期的，且容易验证，一切非零解最多只有一个零点，故弹簧不能振动，在性质上与$\Delta>0$的情形相仿。

9、求解弹簧振子在无阻尼下的强迫振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=p\cos wt \qquad (1)$$

其中 m,k,p 和 w 都是正的常数，并对外加频率$w\neq w_0$和$w=w_0$两种不同的情况，说明解的物理意义，这里$w_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$是弹簧振子的因有频率。

解：对应齐次线性方程的特征方程为

$m\lambda^2+k=0$　　特征值为$\lambda_1=\sqrt{\frac{k}{m}}i$ $\lambda_2=-\sqrt{\frac{k}{m}}i$ 记$\sqrt{\frac{k}{m}}=\Omega$，则齐次线性方程的通解为 $x=c_1\cos\Omega t+c_2\sin\Omega t$

当$\Omega\neq w$时，wi不是特征方程的根，则设（1）有形如 $x=A\cos wt+B\sin wt$的解，代入（1）得$(-Amw^2+kA)\cos wt+(-Bmw^2+kB)\sin wt=p\cos wt$

比较同类项系数，得 $\begin{cases}-Amw^2+kA=p\\-Bmw^2+kB=0\end{cases}$，解之得$A=\frac{p}{k-mw^{-2}}=\frac{\frac{p}{m}}{\Omega^2-w^{-2}}$，B=0

因此方程（1）有通解

$$x(t)=c_1\cos\Omega t+c_2\sin\Omega t+\frac{\frac{p}{m}}{\Omega^2-w^2}\cos wt\text{，}\quad\sqrt{\frac{k}{m}}=\Omega\text{，}\quad\Omega\neq w\qquad ②$$

这个通解②由两部分组成，②式右端的头两端是无阻尼自由振动的解，它代表固有振动. 后一项是无阻尼强迫振动的解,它代表强迫振动,振动频率与外力频率相同,其振幅由外力的振幅 P,频率 W 及系统的参数$\sqrt{\frac{k}{m}}=\Omega$来决定,由②还可看出,若外加频率 W,接近弹簧本身的因有频率$\Omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$,则强迫振动项的振幅就越大.

若$\Omega=w$时， wi 是特征方程的根,则①有形如$x=t(A\cos wt+\sin wt)$的解,代入（1），比较同类项系数得 A=0 ， $B=\frac{p}{2m\Omega}$

此时方程（1）有通解

$$x=c_1A\cos wt+c_2\sin wt+\frac{p}{2m\Omega}t\sin\Omega t\qquad ③$$

③表示强迫振动的“振幅”，随时间的增加而无限增加，即产生共振现象。

因此上述结论可作力学解释如下：方程①是一个弹簧在受强迫力为$p\cos wt$下的振动方程当外加频率 W 等于固有频率时Ω时，就会产生共振。

10. 求解下列常数系数线性微分方程

（1） $2y''-4y'-6y=3e^{2x}$；

（2） $y''+2y'=3+4\sin 2x$；

（3） $y'''-2y''-3y'+10y=0$；

（4） $y^{(4)}+4y'''+8y''-8y'+3y=0$；

（5） $y^{(4)}+2y'''+y=\sin x$，

$y(0)=1,y'(0)=-2,y''(0)=3,y'''(0)=0$

6） $y''-2y'+2y=4e^x\cos x$

7） $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x}$

8） $x^2y''+5xy'+13y=0(x>0)$

解（1）对应齐次方程的特征方程为

$2\lambda^2-4\lambda-6=0$

特征根为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$，

所以齐次方程的通解为 $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$

因为 2 不是特征根，故非齐次方程有形如

$y=Ae^{2x}$ 的特解，其中常数 A 待定，把它代入微分方程，得出

$-6Ae^{2x}=3e^{2x}$

由此推知 $A=-\dfrac{1}{2}$

所以，原方程的通为

$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}-\dfrac{1}{2}e^{2x}$

2)，特征方程为 $\lambda^2+2\lambda=0$

特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-2$

由于 0 是一重特征根，$\pm 2i$ 不是特征根，故设方程有特解 $\overline{y}=Ax+B\cos 2x+C\sin 2x$

其中常数 A，B，C 待定。代入微分方程，可推得 $A=\dfrac{3}{2},B=-\dfrac{1}{2},c=-\dfrac{1}{2}$

所以，所求通解为

$y=c_1+c_2e^{-2x}+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}(\cos 2x+\sin 2x)$。

3）特征方程 $\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda+10=0$

特征根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=2+i,\lambda_3=2-i$

故所求通解为

$y=c_1e^{-2x}+e^{2x}(c_2\cos x+c_3\sin x)$

4）特征方程 $\lambda^4-4\lambda^3+8\lambda^2-8\lambda+3=0$

特征根 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_{3,4}=1\pm\sqrt{2}i$

故所求通解为

$$y=(c_1+c_2x)e^x+e^x(c_2\cos\sqrt{2}x+c_3\sin\sqrt{2}x$$

5）特征方程 $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$

特征根 $\lambda_1=\lambda_2=i, \lambda_3=\lambda_4=-i$

对应齐次方程的通解为

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$$

由于 $\pm i$ 是二重特征根，故已知方程有形如 $\overline{y}=Ax^2\cos x+Bx^2\sin x$ 的特解

代入已知方程，求得 $A=0, B=-\dfrac{1}{8}$

故所求方程的通解为

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x-\frac{1}{8}x^2\sin x$$

将初值条件 $y(0)=14, y'(0)=-2, y''(0)=3, y'''(0)=0$ 代入上式，求得

$$c_1=1, c_2=\frac{5}{8}, c_3=-\frac{21}{8}, c_4=2$$

故所求初值问题的特解为

$$y=(1+\frac{5}{8}x)\cos x-(\frac{21}{8}-2+\frac{1}{8}x^2)\sin x$$

6）特征方程 $\lambda^2-2\lambda+2=0$

特征根 $\lambda_1, \lambda_2=1\pm i$

由于 $1\pm i$ 是一重特征根，故方程有特解

$\overline{y}=xe^x(a\cos x+b\sin x)$ 其中 a, b 为待定常数。

代入微分方程可推知 a=0, b=0

所以，所求方程的通解为。

$$y=(c_1\cos x+c_2\sin x)e^x+2xe^x\sin x$$

7）特征方程 $\lambda^2-5\lambda+6=0$

特征根 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

由于—1 不是特征根，故方程有特解

$\bar{y} = (ax+b)e^{-x}$ 其中 a, b 为待定常数，代入微分方程可推知，a=1, b=0

故所求方程的通解为

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + xe^{-x}$$

13）这是欧拉方程，令 $x = e^t$，代入方程得

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = 0 \qquad （1）$$

特征方程 $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$，特征根 $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$

①式的通解为 $y = e^{-2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$

所以所求方程的通解为

$$y = \frac{1}{x^2}\left[(c_1 \cos(3\ln x) + c_2 \sin(3\ln x)\right]$$

9）令 $u = 2x+1$，则得

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 2\frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}(2\frac{dy}{du})\frac{du}{dx} = 4\frac{d^2y}{du^2}$$

则已知方程可化为

$$u^2\frac{d^2y}{du^2} - 2u\frac{dy}{du} + 2y = 0$$

此方程的通解为 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

将 $t = \ln(2x+1)$ 代入上式，即得所求方程的通解

$$y = c_1(2x-1) + c_2(2x+1)^2$$