

摘 要

本文研究的主要内容：在齐次平衡原则的思想下，充分利用F-展开法和Riccati方程在非线性偏微分方程(PDES)求解中的优良特性，提出一种广义改进的F-展开法。此方法在借助于计算机符号系统Mathematica下，操作方便，可以得到非线性PDES的一系列精确解(类孤子解，三角函数周期解，有理数解，指数解)。并用此方法求解了Kdv-mKdv方程及(2+1)维Burgers方程，得到了他们丰富类型的精确解，其中部分是新解。并对部分解进行数值模拟以便直观分析。

首先,利用齐次平衡思想及改进的辅助方程方法研究了Klein-Gordon方程，得到了Klein-Gordon方程类孤子解，三角函数周期解，有理数解，指数解。

其次,利用改进的F-展开法研究了(2+1)维Broer-Kaup方程。得到了他们丰富类型的精确解：光滑的钟形孤立波解，kink解，类孤子解，复数形式解，有理数解等，并得到了部分新解。这些解对于解释一些物理现象具有一定的意义。

最后，利用广义改进的F-展开法研究了Kdv-mKdv方程和(2+1)维Burgers的精确解。得到了它的kink解，类孤子解，复数形式解，有理数解等，这对于对这些方程的进一步研究有积极的意义。

关键词：非线性PDES，齐次平衡原则，辅助方程方法，广义改进的F-展开法，精确解

ABSTRACT

The major content of this paper is a generalized modified F-expansion method. Under Homogeneous balance idea, the generalized modified F-expansion method is proposed by taking full advantages of F-expansion method and Riccati equation in seeking exact solutions of nonlinear PDEs. The method can be conveniently operated with the aid of computer symbolic systems (Mathematica), and rich families of exact solutions of nonlinear PDEs have been obtained, including soliton-like solutions, trigonometric function solutions and rational solutions. By using the method, we have solved the Kdv-mKdv equation, the (2+1)-dimensional Burgers equations. Massive exact solutions of them have been obtained, and some of the solutions are new. We also provided some figures of partial solutions for direct-viewing analysis.

Firstly, we researched the Klein-Gordon equation by using the modified auxiliary method. As a result, many new and more general exact non-traveling wave solutions are obtained including soliton-like solutions, trigonometric function solutions, exponential solutions and rational solutions.

Next, we researched the exact solutions of the (2+1)-dimensional Borer-Kaup equations by using a modified F-expansion method. rich families of exact solutions of them have been obtained, including

bell-shaped solitary solutions, kink solutions, soliton-like solutions, complex solutions, rational solutions and so on. And some of them are new. We consider these solutions will make sense for explaining some physical phenomenon.

Finally, we researched the exact solutions of the Kdv-mKdv equation and the (2+1)-dimensional Burgers equations, and we obtained its kink solutions, soliton-like solutions, complex solutions, rational solutions and so on. These work will be usefull for further research to the equation.

KEY WORDS: nonlinear PDEs, homogeneous balance principle, auxiliary equation method, generalized modified F-expansion method, exact solution

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权江苏大学可以将本学位论文的全部内容或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保 密 ☐，在 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 ☒。

学位论文作者签名：马 昆

指导教师签名：蔡同梁

08 年 12 月 15 日

08 年 12 月 15 日

独创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已注明引用的内容以外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：马昆

日期：08 年 12 月 15 日

第一章 绪论

以应用为目的,或以物理、力学等其他学科问题为背景的微分方程的研究,不仅是传统应用数学中一个最主要的内容,也是当代数学的一个重要组成部分。它是数学理论与实际应用之间的一座重要桥梁,研究工作一直十分活跃,研究领域日益扩大。

目前微分方程研究的主体是非线性微分方程,特别是非线性偏微分方程(NLPDE)。很多意义重大的自然科学和工程技术问题都可归结为非线性偏微分方程的研究。现实生活的许多领域内数学模型都可以用 NLPDE 来描述,很多重要的物理、力学等学科的基本方程本身就是 NLPDE,另外,随着研究的深入,有些原先可用线性微分方程近似处理的问题,也必须考虑非线性的影响,所以对 NLPDE 的研究,特别是 NLPDE 求解精确解的研究工作就显示出了很重要的理论和应用价值,但是数学研究的结果,在目前还未能提供一种普遍有效的求精确解的方法。20 世纪 50 年代以来,人们对非线性现象的研究中提出了“孤子”的概念,进而使得对 NLPDE 求解的研究成为非线性科学中的热点。下面介绍一下孤立子理论的研究背景、研究现状及本文的研究工作。

1.1 研究背景

孤立子理论已经成为应用数学和数学物理的一个重要组成部分,在流体力学,等离子物理,经典场论,量子论等领域有着广泛的应用。

随着近代物理学和数学的发展,早在 1834 年由英国科学家 Russell 发现的孤立波现象近二十多年来引起了人们的极大关注,对这一现象的兴趣与日俱增。这是因为一方面孤立子具有粒子和波的许多性能,在自然界中有一定的普遍性,利用孤立子理论也成功地解释了许多物理上长期用经典理论未能解答的现象;另一方面,随着孤立子物理问题的深入研究,孤立子的数学理论也应运而生,并已初步形成比较完善的理论体系^[1-9]。

孤立子理论自 1965 年由 Zabusky 和 Kruskal 对孤立子(Soliton,简称孤子)命名后得到了迅速地发展。究其原因是孤波现象无所不在,从天空螺旋星系的密度波,线,超流氦-3,超导 Josephson 结,磁学,结构相变,液晶,流体动力学以及基本粒子等,都与孤子有关。其发展大致可分三个阶段:

第一阶段,主要是在 19 世纪。最早讨论孤立子问题的是 Scott Russell。1844 年英国工程师 Russell 发现船在运河中快速行驶着,当这条船突然停止时,在船头附近产生了一个光滑的、像小山包一样的水波,然后这个水波离开船头保持它的形状和速度保持不变,接着这个水波的高度逐渐减少,最后在运河的一个拐弯处消失掉,他把这种水波称为孤立波,认为它就是流体运动的一个稳定解。直到 1895 年,荷兰阿姆斯特丹大学的 Korteweg 教授和他的学生 de Vries 才成功导出了著名 Kdv 方程,求出了与 Russell 描述一致的即具有形状不变的脉冲状的孤立波解,在理论上证实了孤立波的存在,并对孤立波现象作了较为完整的分析,解释了 Russell 的浅水波,解决了这个问题。他们的数学模型为

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

孤立波解为

$$u_1(x,t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right) \quad (1.2)$$

后人称 $u_1(x,t)$ 为 1-孤立子解,如果令 $\xi = x - ct$,那么 u_1 在平面上的图为图 1.1 所示。

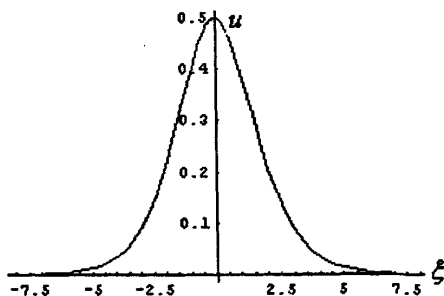


图1.1 光滑孤立子 u_1 在 $\xi - u$ 平面上的图形

1965 年美国数学家 Kruskal 和abusky 对 KdV 方程的孤立波解进行数学模拟,他们发现两个孤立波相撞之后,各自的运动方向和大小形状都保持不变。这种性质与物理中粒子的性质类似,因此他们称这种孤立波为孤立子。在通常情况下,人们把孤立波和孤立子混为一谈,不把它们区别开来。与此同时,在 1876-1882 年发现的 Backlund 变换,成为后来发展孤子理论的重要基础。

第二阶段大致可划在 1955-1975 年。1955 年, Fermi, Pasta, Ulam(FPU)将 64 个质点用非线性弹簧连成一条非线性振动弦,用计算机计算了一维非线性晶格在各个振动模之间的转换。初始时,这些谐振子的所有能量都集中在一个质点

上,其他 63 个质点的初始能量为零。按照经典的理论,只要非线性效应存在,就会有能量均分,各态历经等现象出现,即任何微弱的非线性相互作用,可导致系统的非平衡状态向平衡状态的过渡。但实际计算的结果却与经典理论是背道而驰。实际上,经过相当长时间之后,能量似乎又回到了原来的初始分布,这就是著名的 FPU 问题。由于 FPU 问题是在频域空间考察的,未能发现孤波解,因此该问题未能得到正确的解释。后来,人们发现可以把晶体看成具有质量的弹簧拉成的链条,这恰好是 Fermi 研究的情况。Toda 研究了这种模式的非线性振动,得到了孤波解,使 FPU 问题得到正确的解答,从而进一步激发起人们对孤立波的研究兴趣。1965 年, Zabusky 和 Krusal 对等离子体中孤立波的相互碰撞过程进行计算机数值模拟,进一步证实了孤立波在碰撞前后波形和速度保持不变的论断,并且把它命名为孤立子(Soliton),它是指一大类非线性偏微分方程的许多具有特殊性质的解,以及具有相应的物理现象,它的性质具体为:(1)能量比较集中;(2)孤立子相互碰撞时具有弹性散射现象。从此孤立子理论的研究工作得到了迅速发展。

第三阶段(1973 至今),把孤子概念及理论广泛应用于物理学,生物学,天文学等各个领域,开展了高维孤子的研究。1980 年非线性效应专刊 *Physica D* 问世,与此同时,光纤中的孤子已在实验中产生出来。此后的发展更是突飞猛进。

综上所述,孤立子理论的产生和发展是与近代物理密切相关的。孤立子理论不但包括了有关的数学理论,也包括了物理理论,数学的严密性和物理的启发性和实用性两者相互结合,相互依存,相互渗透,相互促进,使孤立子理论显示出强大的生命力,这也是现代自然科学发展的重要特征之一。

孤立子一词虽被广泛引用,但无一般性定义。数学中,将孤立子理解为非线性偏微分方程的局部行波解,所谓局部是指微分方程的解在空间的无穷远处趋于零或确定常数的情况。换言之,孤立子指的是稳定的孤立波,即与同类孤波碰撞后不会消失,而且波形、波速和幅度不会改变或只有微弱改变的孤立波。在物理中,孤立子被理解为经典场方程的一个稳定的有限能量的不弥散的解,即能量集中在一个狭小的区域内且相互作用后不改变波形和波速。许多非线性发展方程,如 KdV 方程、Sine-Gordon 方程、Schrödinger 方程、Boussinesq 方程、KP 方程, Toda 晶格方程等都具有孤立子解。孤立子除常见的钟型和扭型外还有包络孤子、

哨孤子、拓扑性孤子和非拓扑性孤子、呼吸子、亮孤子和暗孤子、正孤子和反孤子以及它们叠加而形成的形形色色的孤立子。

1.2 研究现状

求解微分方程是古老而在理论和实际上又很重要的研究课题，显示解，特别是行波解可以很好的描述各种物理现象，如振动、传播波等。但由于非线性微分方程的复杂性，至今仍有大量的重要方程无法求出精确解，即使已经求出精确解，也各有各的技巧，至今尚无一般的求解方法。所幸的是孤立子理论中蕴涵着一系列构造精确解的有效方法，如反散射法（IST）、Bäcklund变换法、Darboux变换法、Hirota双线性法、Painlevé有限展开法^[10]，延拓法及Lie群法^[11]等。随着各种求解方法的出现，不但过去难以求解的方程得到解决，而且许多新的，具有重要物理意义的解不断被发现和利用。

1967年，Gardner^[12]等人发明了求解KdV方程的逆散射方法（也称为非线性），这一方法利用量子力学中的Schrodinger方程特征值问题（正散射问题）及其反问题（反散射问题）之间的关系，经过求解Gel'fand-Levitan-Marck-enko线性积分方程而给出KdV方程初值问题的解。它不仅对应用技术提供了崭新的方法和概念，而且对数学自身的发展也有深远影响。随后，Lax^[14]将该方法加以综合和推广，使之能够用于求解其他非线性偏微分方程的初值问题，从而逐步形成一种系统的求解方法。1972年，Zakharov和Shabat^[15]推广了这一方法，求出高阶KdV方程，立方Schrodinger方程等的精确解。Ablowitz, Kaup, Newell和Segur^[16-18]则更加一般化反散射方法。李翊神、田畴、屠规章教授等也为发展反散射方法做了很好的工作。

1971年，Hirota所引进的双线性变换法（Hirota方法）^[18,19]，是构造非线性偏微分方程N-孤立子解及其Backlund变换的一种重要而直接的方法。

1975年，Wahlquit和Estabrook提出延拓结构法，以外微分形式为工具，给出寻找与反散射方法相联系的线性特征值问题的系统的方法。

1991年，李翊神教授基于对称约束提出一种非线性偏微分方程的直接的变量分离方法；随后，楼森岳教授等提出另一种更有效的直接变量分离法得到了许多的（2+1）维非线性发展方程的精确解。

精确求解非线性发展方程的工作具有重复性、固定的套路和规律、计算量大的特点,计算机代数的出现使人们摆脱了刻板、大量而重复的计算,提高了速度保证了准确率。1996年, Parkes和Duffy给出了求非线性发展方程孤立波解的双曲正切函数法的Mathematica程序包。王明亮教授等基于非齐次项与高阶导数项平衡的原则,将非线性方程齐次化、代数化,提出了齐次平衡法。

近年来提出并发展起来的齐次平衡方法,实际上是求非线性偏微分方程精确解的一种指导原则,故也称为齐次平衡原则。依据该原则,可事先判定某类非线性偏微分方程是否有一定形式的精确解存在,如果回答是肯定的,则可按一定的步骤求出它来,并同时得到其满足某些条件的Backlund变换。因而齐次平衡原则具有直接、简洁、步骤分明的特点,再者,还适用于计算机的符号计算系统进行计算,且得到的是精确的结果。至今,齐次平衡原则在非线性的数学物理中已得到广泛的应用,且其应用范围正在不断的扩展,已成为处理非线性数学物理相关问题的有效工具之一。

所以,近年来在齐次平衡原则下又发展了多种求解非线性偏微分方程精确解的方法:像Tanh-函数法^[20,21], Sine-Cosine方法^[22], Jacobi椭圆函数展开法^[23], Riccati方程方法^[24,25]及F-展开法^[26-29]等。这些方法一般都借助于计算机代数系统(Mathematica或Maple),求解方便、直接,而且可以对解进行数值模拟以便于直观分析解的性质。

1.3 研究的内容和意义

本文在齐次平衡原则的思想下,充分利用F-展开法和Riccati方程在非线性的偏微分方程求解中的优良特性,提出一种广义改进的F-展开法。此方法在借助于计算机符号系统Mathematica下,操作方便,可以得到非线性偏微分方程的一系列精确解(类孤子解,三角函数周期解,有理数解)。并用此方法求解了Kdv-mKdv方程及(2+1)维Burgers方程,得到了他们丰富类型的精确解,其中部分是新解。下面是本文具体的研究工作:

第三章,利用齐次平衡方法及改进的辅助方程方法研究了Klein-Gordon方程,得到了Klein-Gordon方程类孤子解,三角函数周期解,有理数解,指数解。

第四章,利用改进的F-展开法研究了(2+1)维Broer-Kaup方程的精确解。

得到了他们丰富类型的精确解：光滑的钟形孤立波解，kink解，类孤子，复数形式解，有理数解等，并得到了部分新解。相信这些解对于解释一些物理现象具有一定的意义。

第五章，在第四章给出的改进的F-展开法的基础上，提出了一种广义改进的F-展开法，并利用广义改进的F-展开法研究了Kdv-mKdv方程和(2+1)维Burgers方程的精确解。得到了它的kink解，类孤子，复数形式解，有理数解等，这对于此方程的进一步研究有积极的意义。

本文研究的意义：本文在齐次平衡思想下提出的一种广义改进的F-展开法，克服了原有经典F-展开法、改进的F-展开法和辅助方程方法的一些局限（经典F-展开法及辅助方程方法只能很好的适合于奇次和偶次阶偏导数不同时存在的偏微分方程，而且主要得到的是Jacobi椭圆函数解），因此广义改进的F-展开法有更加广阔的应用范围，而且随着对Riccati方程的深入研究，相信此方法应用前景会更加广阔，并能有助于发现更多复杂的精确解。而且本文通过用辅助方程方法、改进的F-展开法和广义改进的F-展开法对Klein-Gordon方程、Kdv-mKdv方程、(2+1)维Broer-Kaup方程及(2+1)维Burgers方程的求解，找出了它们丰富类型的精确解及一些新解。相信这些解将会对于解释一些重要的物理现象有积极的意义。

第二章 基本概念

2.1 孤立子及尖峰孤立子

目前,对孤立子有多种定义方式,但还没有一个确切的定义。李政道认为:在一个场论系统中,如果有一个经典的解,它在任何时间内都束缚于一个有限区域内,那么这样的解就叫做经典孤立子解。

通常在应用数学中,将孤立子理解为非线性演化方程局部化的行波解,经过互相碰撞后,不改变波形和速度(或许相位发生变化)。在物理领域,孤立子被理解为:经相互作用后,波形和速度只有微弱改变的孤立波。或者被理解为:非线性演化方程能量有限的解。即能量集中在空间有限区域,不随时间的增加而扩散到无限区域中去。

本文采用下述定义,即:

定义 2.1.1 孤立子是指一大类非线性偏微分方程的许多具有特殊性质的解,以及与之相应的物理现象。它满足以下三点:

- (1) 孤立子(孤波)是波动问题中的一种能量有限局域解;
- (2) 能在空间给定区域稳定存在;
- (3) 相互作用不改变各自的特性。

从以上定义可知,孤立子能量集中在一个较狭小的区域,两个孤立子相互作用时出现弹性散射现象,即波形和波速能恢复到原状(或许相位有一些改变)。因此,孤立子具备了粒子和波的许多性能,在自然界中有一定的普遍性。近年来,人们也从更广泛的意义上理解孤立子这一术语,比如说,把能量集中在一个较狭小的区域的静态解有时也称为孤立子。

定义 2.1.2 若孤立子解在波峰处有一个不连续的一阶导数,则称此孤立子解为尖峰孤立子解(Peakon),如图 2.1 所示。

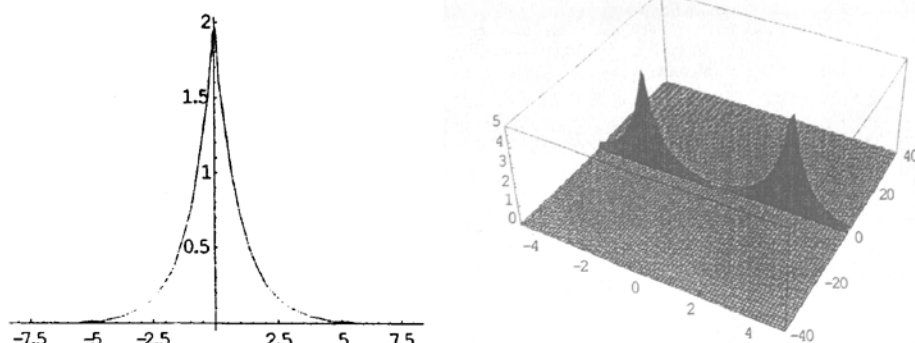
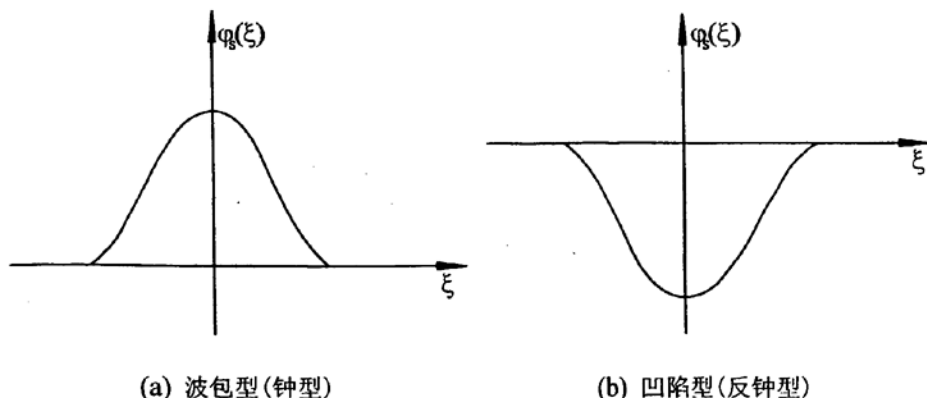


图 2.1 尖峰孤立子解

2.2 孤立子的分类

通常所说的孤波,是指非线性演化方程局域行波解。所谓“局域”,指的是非线性演化方程的解在空间的无穷远处趋于 0 或趋于确定常数的情况。目前已经有一系列非线性演化方程存在孤波解,除 KDV 方程外,比较重要的还有非线性 Schrodinger 方程(NLS 方程)、sine-Gordon (W.Gordon)方程、Hirota(M.Toda)非线性晶格方程、铁磁链方程、布森内斯克方程、波恩(M.Born)—英菲尔德(M.L.Infeld)方程。归纳起来,孤波的典型类型不外乎图 2.2 中的四种:(a)波包型(钟型);(b)凹陷型(反钟型);(c)扭结型;(d)反扭结型。其中(a)和(b)都是当 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时,解 $\varphi_s(\xi) \rightarrow 0$;而(c)和(d)则是当 $\xi \rightarrow +\infty$ 或 $-\infty$ 时, $\varphi_s(\xi)$ 趋向于不同的常数值。



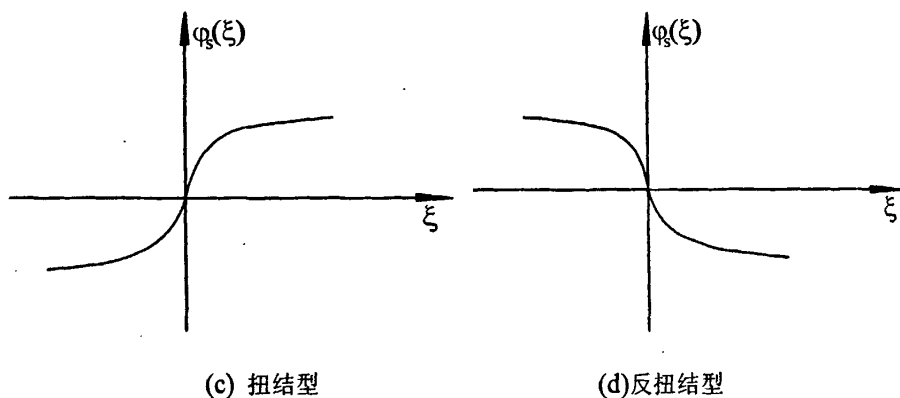


图 2.2 孤立子的分类

从拓扑性质角度,孤波可分为拓扑性孤波和非拓扑性孤波。拓扑性孤波存在的必要条件是有简并真空态,即在无穷远处存在不同的真空态,或者说有不同的边界条件;有孤立子解时,无穷远处的边界条件就与没有孤立子解时不同。而非拓扑性孤波不需要简并真空态,无论有无孤立子解,在无穷远处都有相同的边界条件。一般来说,钟型分布的正、负(暗)孤波及其序列都是非拓扑的,但是 Kink 孤波(其模方或其导数却是钟型的,如光纤中基本暗孤子就是例子)是拓扑孤子。需要注意的是,同一方程可能支持两类不同拓扑性质的孤波解,如(NLS)方程支持明孤子解和小振幅明暗孤子解(非拓扑)及基本暗孤子解(拓扑)。

值得说明的是,尽管孤波原本指一类可积非线性演化方程的局域行波解。但现在,至少在物理上,孤波概念已经被推广到相对稳定的孤波解。即使原来方程并非可积的。例如光孤子理论中,尽管有阻尼项的 NLS 方程是不可积的,而且实际光纤中的光孤子也不可能不衰减,但在阻尼很小的情况下,相对稳定的孤波仍被称为光孤子。在其他一些情况下,对孤波的理解常常也因为实际问题而有所推广。

2.3 逆算符法

据逆算符方法的基本思想,把偏微分方程 $Au = A(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0$ 改写为

$$Lu + Ru + Nu = 0 \quad (2.3.1)$$

其中 L 和 R 是线性微分算子, Nu 是非线性项。算子 L 是可逆的,作用逆算子 L^{-1} 于上式两边得到

$$u = f - L^{-1}(Ru) + L^{-1}(Nu) \quad (2.3.2)$$

其中 f 满足(2.3.1)及初始条件, 根据逆算符方法 u 可以分解为一系列分量之和

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad (2.3.3)$$

利用回归关系可以得到

$$u_0 = f(x), \quad u_{k+1} = -L^{-1}(Ru_k) + L^{-1}(Nu_k) \quad (2.3.4)$$

非线性项 $F(u)=Nu$ 可以表示为无限级数之和

$$F(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \quad (2.3.5)$$

其中 A_n 是Adomian多项式, 定义为

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [F(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i)]_{\lambda=0}, n=0,1,2,\dots \quad (2.3.6)$$

利用(2.3.3), (2.3.4)可以依次解出 $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$, 从而得到方程的解

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (2.3.7)$$

业已证明Adomian分解法是收敛的, 而且收敛速度相当快, 能够得到精确解。

2.4 齐次平衡法

齐次平衡法是一种求解非线性偏微分方程非常重要的方法, 它将非线性发展方程的求解问题转化为纯代数运算。利用这种方法不仅可以得到方程的Backlund变换, 而且能得到非线性偏微分方程的新解。该方法的大致步骤如下: 对于给定一个非线性偏微分方程

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (2.4.1)$$

这里 P 一般是其变元的多项式, 其中含有非线性项及线性出现的最高阶偏导数项。

一个函数 $w = w(x, t)$ 称为是方程(2.4.1)的拟解, 如果存在单变元函数 $f = f(w)$, 使得 $f(w)$ 关于 x, t 的一些偏导数的适当的线性组合, 即

$$u(x, t) = \frac{\partial^{m+n} f(w)}{\partial x^m \partial t^n} + v(x, t) (f(w) \text{ 关于 } x \text{ 和 } t \text{ 的低于 } m+n \text{ 阶的偏导数的适当线性组合}) \quad (2.4.2)$$

精确的满足(2.4.1)。(2.4.2)中的非负整数 m, n , 单变元函数 $f = f(w)$ 以及函数 $w = w(x, t)$ 都是待定的), 将(2.4.2)代入(2.4.1)中可通过以下步骤确定它们:

首先,使高阶偏导数项中包含的 $w = w(x, t)$ 的偏导数的最高幂次和非线性项中包含的关于 $w = w(x, t)$ 的偏导数的最高幂次相等,来决定非负整数 m 及 n 是否存在。

其次,集合 $w = w(x, t)$ 的偏导数的最高幂次的全部项,使其系数为零,而得 $f(w)$ 满足的 ODE,解之可得 $f = f(w)$,一般是对数函数。

第三,将 $f(w)$ 的各阶导数的非线性项,用 $f(w)$ 的较高阶的导数来代替,再将 $f(w)$ 的各阶导数项分别合并在一起,并令其系数为零,而得 $w = w(x, t)$ 的各次齐次型的 PDE 组,可适当选择(2.4.2)中线性组合的系数,使 PDE 组有解。

最后,若前三步的解答使肯定的,将这些结果代入(2.4.2),经过一些计算就得(2.4.1)的精确解。

从(2.4.2)中可以看出,如果 $v(x, t)$ 方程(2.4.1)的一个解,则通过上述步骤就可以求得方程的 Backlund 变换。

2.5 Jacobi 椭圆函数方法

考虑非线性偏微分方程(2.4.1),寻求它的行波解为

$$u = u(\xi), \quad \xi = k(x - ct) \quad (2.5.1)$$

其中 k 和 c 分别为波数和波速。

将 $u(\xi)$ 展开为下列 Jacobi 椭圆正弦函数 $\text{sn} \xi$ 的级数:

$$u = \sum_{j=0}^n a_j \text{sn}^j \xi \quad (2.5.2)$$

它的最高阶数为

$$O(u(\xi)) = n \quad (2.5.3)$$

因为

$$\frac{du}{d\xi} = \sum_{j=0}^n j a_j \text{sn}^{j-1} \xi \text{cn} \xi \text{dn} \xi \quad (2.5.4)$$

其中 $\text{cn} \xi$ 和 $\text{dn} \xi$ 分别为 Jacobi 椭圆余弦函数和第三种 Jacobi 椭圆函数,且

$$\text{cn}^2 \xi = 1 - \text{sn}^2 \xi, \quad \text{dn}^2 \xi = 1 - m^2 \text{sn}^2 \xi \quad (2.5.5)$$

m ($0 < m < 1$) 为模数, 且

$$\frac{d}{d\xi} \operatorname{sn} \xi = \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi, \quad \frac{d}{d\xi} \operatorname{cn} \xi = -\operatorname{sn} \xi \operatorname{dn} \xi, \quad \frac{d}{d\xi} \operatorname{dn} \xi = -m^2 \operatorname{sn} \xi \operatorname{cn} \xi \quad (2.5.6)$$

由(2.5.4)式, 可以认为 $\frac{du}{d\xi}$ 的最高阶数为

$$O\left(\frac{du}{d\xi}\right) = n+1 \quad (2.5.7)$$

类似地, 有

$$O\left(u \frac{du}{d\xi}\right) = 2n+1, \quad O\left(\frac{d^2 u}{d\xi^2}\right) = n+2, \quad O\left(\frac{d^3 u}{d\xi^3}\right) = n+3 \quad (2.5.8)$$

在(2.5.2)式中选择 n , 使得非线性偏微分方程(2.4.1)中的非线性项和最高阶数项平衡, 将(2.5.2)代入非线性偏微分方程(2.4.1)中, 并利用(2.5.5)和(2.5.6), 可将方程(2.4.1)变成关于 $\operatorname{sn}' \xi$ ($i=0, 1, \dots, N$) 的多项式。置 $\operatorname{sn}' \xi$ 的各次幂次的系数为零, 得关于 $a_0, a_1, \dots, a_N, k, c$ 的代数方程组。

解上述方程组, 将结果代入(2.5.2)中, 得(2.4.1)Jacobi椭圆函数解。

应该指出的是, 因为 $m \rightarrow 1$ 时, $\operatorname{sn} \xi \rightarrow \tanh \xi$, (2.5.2)式就退化为

$$u = \sum_{j=0}^n a_j \tanh' \xi \quad (2.5.9)$$

所以此方法包含了双曲正切函数展开法。

2.6 辅助方程方法

考虑非线性偏微分方程(2.4.1), 寻求它的行波解为

$$u = u(\xi), \quad \xi = k(x - \omega t) \quad (2.6.1)$$

其中 k 和 ω 分别为波数和波速。

将式(2.6.1)代入方程(2.4.1)中, 则(2.4.1)化为 $u(\xi)$ 的非线性常微分方程(NODE):

$$G(u, u_\xi, u_{\xi\xi}, u_{\xi\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (2.6.2)$$

设 $u(\xi)$ 可表为 $z(\xi)$ 有限幂级数:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i z'(\xi) \quad (2.6.3)$$

这里 a_i 是待定常数, N 为一常数, 由非线性偏微分方程(2.4.1)中具有支配地位的非线性项和最高阶数项平衡得到, $z(\xi)$ 满足如下新的辅助常微分方程

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = Az(\xi)^2 + Bz(\xi)^4 + Cz(\xi)^6 \quad (2.6.4)$$

其中 A, B, C 为待定实数。

将(2.6.3)代入NODE(2.6.2)中, 利用(2.6.4)可将方程(2.6.2)左边变成 $z(\xi)$ 的多项式。令 $z(\xi)$ 的各幂次的系数为零, 可得关于 $a_0, a_1, \dots, a_N, k, \omega$ 的代数方程组。解上述方程组(可借助Mathematica或Maple), 可解得 $a_0, a_1, \dots, a_N, k, \omega$, 将结果代入(2.6.3)中, 得(2.4.1)的行波解的一般形式。

利用表2.1, 适当选取 A, B, C, Δ 的值, 可得方程(2.4.1)的一些特殊解。

表2.1 A, B, C, Δ 与方程(2.6.4)的解 $z(\xi)$ 之间的关系表 $\Delta = B^2 - 4AC, \varepsilon = \pm 1$ (B —一般为任意实数)

A	C	Δ	$z(\xi)$
$A > 0$	C 为任意实数	Δ 为任意实数	$\sec h(\sqrt{A}\xi) \left(\frac{-AB}{B^2 - AC(1 + \varepsilon \tanh(\sqrt{A}\xi))^2} \right)^{1/2}$
$A > 0$	C 为任意实数	Δ 为任意实数	$\csc h(\sqrt{A}\xi) \left(\frac{AB}{B^2 - AC(1 + \varepsilon \coth(\sqrt{A}\xi))^2} \right)^{1/2}$
$A > 0$	C 为任意实数	$\Delta > 0$	$\left(\frac{2A}{\varepsilon \sqrt{\Delta} \cosh(2\sqrt{A}\xi) - B} \right)^{1/2}$
$A < 0$	C 为任意实数	$\Delta > 0$	$\left(\frac{2A}{\varepsilon \sqrt{\Delta} \cos(2\sqrt{-A}\xi) - B} \right)^{1/2}$
$A > 0$	C 为任意实数	$\Delta < 0$	$\left(\frac{2A}{\varepsilon \sqrt{-\Delta} \sinh(2\sqrt{A}\xi) - B} \right)^{1/2}$
$A < 0$	C 为任意实数	$\Delta > 0$	$\left(\frac{2A}{\varepsilon \sqrt{\Delta} \sin(2\sqrt{-A}\xi) - B} \right)^{1/2}$
$A > 0$	$C > 0$	Δ 为任意实数	$\sec h(\sqrt{A}\xi) \left(\frac{-A}{B + 2\varepsilon \sqrt{AC} \tanh(\sqrt{A}\xi)} \right)^{1/2}$
$A < 0$	$C > 0$	Δ 为任意实数	$\sec(\sqrt{-A}\xi) \left(\frac{-A}{B + 2\varepsilon \sqrt{-AC} \tan(\sqrt{-A}\xi)} \right)^{1/2}$
$A > 0$	$C > 0$	Δ 为任意实数	$\csc h(\sqrt{A}\xi) \left(\frac{-A}{B + 2\varepsilon \sqrt{-AC} \coth(\sqrt{A}\xi)} \right)^{1/2}$
$A < 0$	$C > 0$	Δ 为任意实数	$\csc(\sqrt{-A}\xi) \left(\frac{-A}{B + 2\varepsilon \sqrt{AC} \cot(\sqrt{-A}\xi)} \right)^{1/2}$
$A > 0$	C 为任意实数	$\Delta = 0$	$\left(-\frac{A}{B} (1 + \varepsilon \tanh(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi)) \right)^{1/2}$
$A > 0$	C 为任意实数	$\Delta = 0$	$\left(-\frac{A}{B} (1 + \varepsilon \coth(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi)) \right)^{1/2}$
$A > 0$	C 为任意实数	Δ 为任意实数	$4 \left(\frac{4Ae^{2\varepsilon\sqrt{A}\xi}}{(e^{2\varepsilon\sqrt{A}\xi} - 4B)^2 - 64AC} \right)^{1/2}$

2.7 F-展开法

考虑非线性偏微分方程(2.4.1), 寻求它的行波解为

$$u = u(\xi), \quad \xi = k(x - ct) \quad (2.7.1)$$

其中 k 和 c 分别为波数和波速。

将式(2.7.1)代入方程(2.4.1)中, 则(2.4.1)化为 $u(\xi)$ 的非线性常微分方程(NODE):

$$P(u, u', u'', \dots) = 0 \quad (2.7.2)$$

设 $u(\xi)$ 可表为 $F(\xi)$ 有限幂级数:

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i F^i(\xi) \quad (a_N \neq 0) \quad (2.7.3)$$

这里 a_i 是待定常数, $F(\xi)$ 满足下列一阶常微分方程:

$$F'^2(\xi) = pF^4 + qF^2 + R \quad (2.7.4)$$

这里 P, Q, R 是待定常数, 正整数 N 是由具有支配地位的非线性项与最高阶偏导数项平衡确定。

将(2.7.3)代入NODE(2.7.2)中, 利用(2.7.4)可将方程(2.7.2)左边变成 $F(\xi)$ 的多项式。置 $F(\xi)$ 的各次幂次的系数为零, 得关于 $a_0, a_1, \dots, a_N, k, c$ 的代数方程组。

求解上述方程组(可借助Mathematica或Maple), 可解得 $a_0, a_1, \dots, a_N, k, c$, 将结果代入(2.7.3)中, 得(2.4.1)的行波解的一般形式。

利用表2.2, 适当选取 P, Q, R 的值, 可得方程(2.4.1)的由Jacobi函数表示的周期波解。

F-展开法与本文2.6所讲述的辅助方程方法的约束方程不同。由于约束方程的不同, 根据相应约束方程和特解的对照表, 在求解偏微分方程时得到相应的特解的形式也不同。

表2.2 P, Q, R 与方程 $F'^2(\xi) = pF^4 + qF^2 + R$ 的解 $F(\xi)$ 之间的关系

P	Q	R	$F'^2(\xi) = pF^4 + qF^2 + R$	$F(\xi)$
m^2	$-(1+m^2)$	1	$F'^2(\xi) = (1-F^2)(1-m^2F^2)$	$\operatorname{sn}\xi$
$-m^2$	$2m^2-1$	$1-m^2$	$F'^2(\xi) = (1-F^2)(m^2F^2+1-m^2)$	$\operatorname{cn}\xi$
-1	$2-m^2$	m^2-1	$F'^2(\xi) = (1-F^2)(F^2+m^2-1)$	$\operatorname{dn}\xi$
1	$-(1+m^2)$	m^2	$F'^2(\xi) = (1-F^2)(m^2-F^2)$	$\operatorname{sn}\xi = (\operatorname{sn}\xi)^{-1}$
$1-m^2$	$2m^2-1$	$-m^2$	$F'^2(\xi) = (1-F^2)[(m^2-1)F^2-m^2]$	$\operatorname{cn}\xi = (\operatorname{cn}\xi)^{-1}$
m^2-1	$2-m^2$	-1	$F'^2(\xi) = (1-F^2)[(1-m^2)F^2-1]$	$\operatorname{dn}\xi = (\operatorname{dn}\xi)^{-1}$
$1-m^2$	$2-m^2$	1	$F'^2(\xi) = (1+F^2)[(1-m^2)F^2+1]$	$\operatorname{sc}\xi = \frac{\operatorname{sn}\xi}{\operatorname{cn}\xi}$
$-m^2(1-m^2)$	$2m^2-1$	1	$F'^2(\xi) = (1+m^2F^2)[(m^2-1)F^2-1]$	$\operatorname{sd}\xi = \frac{\operatorname{sn}\xi}{\operatorname{dn}\xi}$
1	$2-m^2$	$1-m^2$	$F'^2(\xi) = (1+F^2)[F^2+(1-m^2)]$	$\operatorname{sc}\xi = \frac{\operatorname{cn}\xi}{\operatorname{sn}\xi}$
1	$2m^2-1$	$-m^2(1-m^2)$	$F'^2(\xi) = (m^2+F^2)[F^2+(m^2-1)]$	$\operatorname{sd}\xi = \frac{\operatorname{dn}\xi}{\operatorname{sn}\xi}$

第三章 改进的辅助方程方法求解 Klein-Gordon 方程

本章主要研究运用改进的辅助方程方法求解二次非线性 Klein-Gordon 方程 [30-37], 即

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \beta u - \gamma u^2 = 0 \quad (3.1)$$

其中 α, β, γ 为已知常数。

3.1 改进的辅助方程方法

考虑一个给定的NLPDE, 含有自变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_t, t)$ 及变量 u :

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (3.1.1)$$

这里 P 为其变元的多项式, 其中包含有非线性项和高阶偏导数项。采用改进的F-展开法求解方程(3.1.1)的步骤如下:

(I) 寻求方程(3.1.1)的行波解为

$$u = u(\xi), \quad \xi = k(x - \omega t) \quad (3.1.2)$$

其中 k 和 ω 分别为波数和波速。

将(3.1.2)式代入方程(3.1.1)中, 则(3.1.1)化为 $u(\xi)$ 的非线性常微分方程 (NODE):

$$G(u, u_\xi, u_{\xi\xi}, u_{\xi\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (3.1.3)$$

(II) 设 $u(\xi)$ 可表为 $z(\xi)$ 有限幂级数:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i z^i(\xi) \quad (3.1.4)$$

这里 a_i 是待定常数, N 为一常数, 由非线性偏微分方程(3.1.1)中具有支配地位的非线性项和最高阶数项平衡得到, $z(\xi)$ 满足如下新的辅助常微分方程

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = Az(\xi)^2 + Bz(\xi)^3 + Cz(\xi)^4 \quad (3.1.5)$$

其中 A, B, C 为待定实数。

(III) 将(3.1.4)代入NODE(3.1.3)中, 利用(3.1.5)可将方程(3.1.3)左边变成 $z(\xi)$ 的多项式。令 $z(\xi)$ 的各次幂次的系数为零, 可得关于 $a_0, a_1, \dots, a_N, k, \omega$ 的代数方程组。

求解上述方程组 (可借助Mathematica或Maple), 可解得 $a_0, a_1, \dots, a_N, k,$

ω , 将结果代入(3.1.4)中, 得(3.1.1)的行波解的一般形式。

(IV) 利用表3.1, 适当选取 A, B, Δ 的值, 可得方程(3.1.1)的一些特殊解。

表3.1 A, B, C, Δ 与方程(3.1.5)的解 $z(\xi)$ 之间的关系表 $\Delta=B^2-4AC, \varepsilon=\pm 1$ (B 为任意实数)

A	C	Δ	$z(\xi)$
$A>0$	C 为任意实数	Δ 为任意实数	$\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi\right) \frac{-AB}{B^2-AC(1+\varepsilon \tanh(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi))^2}$
$A>0$	C 为任意实数	Δ 为任意实数	$\operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi\right) \frac{AB}{B^2-AC(1+\varepsilon \coth(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi))^2}$
$A>0$	C 为任意实数	$\Delta>0$	$\frac{2A \operatorname{sech}(\sqrt{A}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta}-B \operatorname{sech}(\sqrt{A}\xi)}$
$A<0$	C 为任意实数	$\Delta>0$	$\frac{2A \operatorname{sec}(\sqrt{-A}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta}-B \operatorname{sec}(\sqrt{-A}\xi)}$
$A>0$	C 为任意实数	$\Delta<0$	$\frac{2A \operatorname{csch}(\sqrt{A}\xi)}{\varepsilon\sqrt{-\Delta}-B \operatorname{csch}(\sqrt{A}\xi)}$
$A<0$	C 为任意实数	$\Delta>0$	$\frac{2A \operatorname{csc}(\sqrt{-A}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta}-B \operatorname{csc}(\sqrt{-A}\xi)}$
$A>0$	$C>0$	Δ 为任意实数	$\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi\right) \frac{-A}{B+2\varepsilon\sqrt{AC} \tanh(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi)}$
$A<0$	$C>0$	Δ 为任意实数	$\operatorname{sec}^2\left(\frac{\sqrt{-A}}{2}\xi\right) \frac{-A}{B+2\varepsilon\sqrt{-AC} \tan(\frac{\sqrt{-A}}{2}\xi)}$
$A>0$	$C>0$	Δ 为任意实数	$\operatorname{csch}^2\left(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi\right) \frac{-A}{B+2\varepsilon\sqrt{AC} \coth(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi)}$
$A<0$	$C>0$	Δ 为任意实数	$\operatorname{csc}^2\left(\frac{\sqrt{-A}}{2}\xi\right) \frac{-A}{B+2\varepsilon\sqrt{-AC} \cot(\frac{\sqrt{-A}}{2}\xi)}$
$A>0$	C 为任意实数	$\Delta=0$	$-\frac{A}{B}(1+\varepsilon \tanh(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi))$
$A>0$	C 为任意实数	$\Delta=0$	$-\frac{A}{B}(1+\varepsilon \coth(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi))$
$A>0$	C 为任意实数	Δ 为任意实数	$\frac{4Ae^{\varepsilon\sqrt{A}\xi}}{(e^{\varepsilon\sqrt{A}\xi}-B)^2-4AC}$
$A>0$	C 为任意实数	Δ 为任意实数且 $B=0$	$\frac{4Ae^{\varepsilon\sqrt{A}\xi}}{1-4ACe^{4\varepsilon\sqrt{A}\xi}}$
$A=0$	C 为任意实数	Δ 为任意实数	$\frac{4B}{B^2\xi^2-4C}$
$A=0$	$C>0$	Δ 为任意实数且 $B=0$	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{C}\xi}$

通过对辅助方程方法细致深入的研究, 对其对约束方程进行了改进, 将原有的约束方程 $(\frac{dz}{d\xi})^2 = Az(\xi)^2 + Bz(\xi)^4 + Cz(\xi)^6$ 改进为方程 $(\frac{dz}{d\xi})^2 = Az(\xi)^2 + Bz(\xi)^3 + Cz(\xi)^4$ 。

由于约束方程的改变, 原有的约束方程与特解的关系列表也随之改进, 由原来的表 2.1 改进为表 3.1。并且由此改进, 在应用改进后的方法求解非线性偏微分方程可得到更多丰富类型的精确解。

3.2 求解 Klein-Gordon 方程

Parkes 等人运用 Jacobi 椭圆函数展开法求得了方程(3.1)的周期解^[38]。我们将运用辅助方程方法求得方程(3.1)的多重行波解。

(I) 首先做如下变换

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x + kt \quad (3.2.1)$$

这里 k 是波速。将(3.2.1)代入方程(3.1)得到下面的常微分方程

$$(k^2 - \alpha^2)u_{\xi\xi} + \beta u + \gamma u^2 = 0 \quad (3.2.2)$$

使非线性项 γu^2 , 同时与线性项 $\alpha^2 u_{\xi\xi}$ 及 $u_{\xi\xi}$ 平衡, 可得 $m=2$ 。因此我们令

$$u(\xi) = a_0 + a_1 z(\xi) + a_2 z^2(\xi) \quad (3.2.3)$$

其中 a_0, a_1, a_2 为待定常数。 $z(\xi)$ 满足下式

$$(\frac{dz}{d\xi})^2 = Az^2(\xi) + Bz^3(\xi) + Cz^4(\xi) \quad (3.2.4)$$

(II) 将(3.2.4)及(3.2.3)代入(3.2.2)得

$$\begin{aligned} & \beta a_0 - \gamma a_0^2 + a_1 \beta z(\xi) - A a_1 \alpha^2 z(\xi) + A a_1 k^2 z(\xi) + \frac{3}{2} B a_1 k^2 z^3(\xi) - \\ & \frac{3}{2} B a_1 \alpha^2 z^3(\xi) + 2 C a_1 k^2 z^5(\xi) - 2 C a_1 \alpha^2 z^5(\xi) - 2 \gamma a_0 a_1 z(\xi) - \\ & \gamma a_1^2 z^2(\xi) + 4 A a_2 k^2 z^2(\xi) - 4 A a_2 \alpha^2 z^2(\xi) + \beta a_2 z^2(\xi) + 2 B a_2 k^2 z^3(\xi) - \\ & 2 B a_2 \alpha^2 z^3(\xi) + 3 B a_2 k^2 z^4(\xi) + 2 C a_2 k^2 z^4(\xi) - 3 B a_2 \alpha^2 z^4(\xi) - \\ & 2 C a_2 \alpha^2 z^4(\xi) + 4 C a_2 k^2 z^6(\xi) - 4 C a_2 \alpha^2 z^6(\xi) - 2 \gamma a_0 a_2 z^2(\xi) - \\ & 2 \gamma a_1 a_2 z^3(\xi) - \gamma a_2^2 z^4(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

令 $z^j(\xi)$ ($j=0, 1, \dots, 6$) 的个性系数均为零, 则可得关于 a_0, a_1, a_2 与 k 的代数方程组

$$\begin{cases} \beta a_0 - \gamma a_0^2 = 0, \\ Ak^2 a_1 - A\alpha^2 a_1 + \beta a_1 - 2\gamma a_0 a_1 = 0, \\ -\gamma a_1^2 + 4Ak^2 a_2 - 4A\alpha^2 a_2 + \beta a_2 - 2\gamma a_0 a_2 = 0, \\ \frac{3}{2}Bk^2 a_1 - \frac{3}{2}B\alpha^2 a_1 + 2Bk^2 a_2 - 2B\alpha^2 a_2 - 2\gamma a_1 a_2 = 0, \\ 3Bk^2 a_2 + 2Ck^2 a_2 - 3B\alpha^2 a_2 - 2C\alpha^2 a_2 - \gamma a_2^2 = 0, \\ 2Ck^2 a_1 - 2C\alpha^2 a_1 = 0, \\ 4Ck^2 a_2 - 4C\alpha^2 a_2 = 0 \end{cases} \quad (3.2.6)$$

(III) 运用 Mathematica 求解上述代数方程组, 可得 a_0, a_1, a_2 与 k 如下情况的解:

情况 1:
$$a_0 = \frac{\beta}{\gamma}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad (3.2.7)$$

情况 2:
$$a_0 = 0, \quad a_1 = -\frac{27\beta}{4\gamma}, \quad a_2 = -\frac{243\beta}{16\gamma},$$

$$A = -\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}, \quad B = -\frac{81\beta}{16(k^2 - \alpha^2)}, \quad C = 0, \quad (3.2.8)$$

情况 3:
$$a_0 = \frac{\beta}{\gamma}, \quad a_1 = \frac{27\beta}{4\gamma}, \quad a_2 = \frac{243\beta}{16\gamma},$$

$$A = \frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}, \quad B = \frac{81\beta}{16(k^2 - \alpha^2)}, \quad C = 0, \quad (3.2.9)$$

将以上三种情况下的解代入式(3.2.3)中, 根据附录 C, 选取 A, B, C 的不同取值, 并利用 A, B, C 与 $z(\xi)$ 的对应关系, 可得 Klein-Gordon 方程(3.1)的类孤子解、三角函数周期解、有理解 (重复类型的解这里将其省去)。

3.2.1 Klein-Gordon 方程的类孤子解

(I) 情况 2, 在 $A > 0$ (即 β 与 $(k^2 - \alpha^2)$ 异号) 时,

$$u_1(\xi) = -\frac{27\beta}{4\gamma} \left(\frac{16}{81} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{-\beta}{4(k^2 - \alpha^2)}} \xi \right) - \frac{243\beta}{16\gamma} \left(\frac{16}{81} \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{-\beta}{4(k^2 - \alpha^2)}} \xi \right) \right)^4 \right) \quad (3.2.1.1)$$

(II) 情况 2, 在 $A > 0$ (即 β 与 $(k^2 - \alpha^2)$ 异号), $\Delta > 0$ (即 β^2 不为零) 时,

$$u_2(\xi) = -\frac{27\beta}{4\gamma} \left(\frac{-32 \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{-\beta}{k^2 - \alpha^2}} \xi \right)}{\pm 81 - 81 \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{-\beta}{k^2 - \alpha^2}} \xi \right)} \right)^3 - \frac{243\beta}{16\gamma} \left(\frac{-32 \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{-\beta}{k^2 - \alpha^2}} \xi \right)}{\pm 81 - 81 \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{-\beta}{k^2 - \alpha^2}} \xi \right)} \right)^4 \quad (3.2.1.2)$$

(III) 情况 1, 在 $A > 0$ 时,

$$u_3(\xi) = \frac{\beta}{\gamma} \left(\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi\right) \frac{-AB}{B^2 - AC(1 + \varepsilon \tanh(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi))^2} \right)^2 \quad (3.2.1.3)$$

(IV) 情况 1, 在 $A > 0$, $\Delta > 0$ 时,

$$u_4(\xi) = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{2A \operatorname{sech}(\sqrt{A}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta} - B \operatorname{sech}(\sqrt{A}\xi)} \right)^2 \quad (3.2.1.4)$$

(V) 情况 1, 在 $A > 0$, $C > 0$ 时,

$$u_5(\xi) = \frac{\beta}{\gamma} \left(\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi\right) \frac{-A}{B + 2\varepsilon\sqrt{AC} \tanh(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi)} \right)^2 \quad (3.2.1.5)$$

(VI) 情况 1, 在 $A > 0$, $\Delta = 0$ 时,

$$u_6(\xi) = \frac{\beta}{\gamma} \left(-\frac{A}{B} (1 + \varepsilon \tanh(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi)) \right)^2 \quad (3.2.1.6)$$

(VII) 情况 3, 在 $A > 0$ (即 β 与 $(k^2 - \alpha^2)$ 同号) 时,

$$u_7(\xi) = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{16}{81} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\beta}{4(k^2 - \alpha^2)}}\xi\right) \right)^2 + \frac{27\beta}{4\gamma} \left(\frac{16}{81} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\beta}{4(k^2 - \alpha^2)}}\xi\right) \right)^3 + \frac{243\beta}{16\gamma} \left(\frac{16}{81} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\beta}{4(k^2 - \alpha^2)}}\xi\right) \right)^4 \quad (3.2.1.7)$$

(VIII) 情况 3, 在 $A > 0$ (即 β 与 $(k^2 - \alpha^2)$ 同号), $\Delta > 0$ (即 β^2 不为零) 时,

$$u_8(\xi) = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{-32 \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi\right)}{\pm 81 - 81 \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi\right)} \right)^2 + \frac{27\beta}{4\gamma} \left(\frac{-32 \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi\right)}{\pm 81 - 81 \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi\right)} \right)^3 + \frac{243\beta}{16\gamma} \left(\frac{-32 \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi\right)}{\pm 81 - 81 \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi\right)} \right)^4 \quad (3.2.1.8)$$

其中 α , β , γ 和 k 为任意常数。

3.2.2 Klein-Gordon 方程的三角函数解

(I) 情况 2, 在 $A < 0$ (即 β 与 $(k^2 - \alpha^2)$ 同号), $\Delta > 0$ 时,

$$u_9(\xi) = -\frac{27\beta}{4\gamma} \left(\frac{-32 \sec\left(\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi\right)}{\pm 81 - 81 \sec\left(\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi\right)} \right)^3 - \frac{243\beta}{16\gamma} \left(\frac{-32 \sec\left(\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi\right)}{\pm 81 - 81 \sec\left(\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi\right)} \right)^4 \quad (3.2.2.1)$$

(II) 情况 1, 在 $A < 0$, $\Delta > 0$ 时,

$$u_{10}(\xi) = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{2A \sec(\sqrt{-A}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta} - B \sec(\sqrt{-A}\xi)} \right)^2 \quad (3.2.2.2)$$

(III) 情况 1, 在 $A < 0$, $C > 0$ 时,

$$u_{11}(\xi) = \frac{\beta}{\gamma} \left(\sec^2\left(\frac{\sqrt{A}}{2}\xi\right) \frac{-A}{B + 2\varepsilon\sqrt{-AC} \tan(\frac{\sqrt{-A}}{2}\xi)} \right)^2 \quad (3.2.2.3)$$

(IV) 情况 3, 在 $A < 0$ (即 β 与 $(k^2 - \alpha^2)$ 异号), $\Delta > 0$ 时,

$$u_{12}(\xi) = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{-32 \sec \left(\sqrt{\frac{-\beta}{k^2 - \alpha^2}} \xi \right)}{\pm 81 - 81 \sec \left(\sqrt{\frac{-\beta}{k^2 - \alpha^2}} \xi \right)} \right)^2 + \frac{27\beta}{4\gamma} \left(\frac{-32 \sec \left(\sqrt{\frac{-\beta}{k^2 - \alpha^2}} \xi \right)}{\pm 81 - 81 \sec \left(\sqrt{\frac{-\beta}{k^2 - \alpha^2}} \xi \right)} \right) + \frac{243\beta}{16\gamma} \left(\frac{-32 \sec \left(\sqrt{\frac{-\beta}{k^2 - \alpha^2}} \xi \right)}{\pm 81 - 81 \sec \left(\sqrt{\frac{-\beta}{k^2 - \alpha^2}} \xi \right)} \right) \quad (3.2.2.4)$$

其中 α , β , γ 和 k 为任意常数。

3.2.3 Klein-Gordon 方程的指数解

(I) 情况 1, 在 $A > 0$ 时,

$$u_{13}(\xi) = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{4Ae^{\varepsilon\sqrt{A}\xi}}{(e^{\varepsilon\sqrt{A}\xi} - B)^2 - 4AC} \right)^2 \quad (3.2.3.1)$$

(II) 情况 2, 在 $A > 0$, $B = 0$ 时,

$$u_{14}(\xi) = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{4Ae^{\varepsilon\sqrt{A}\xi}}{1 - 4ACe^{4\varepsilon\sqrt{A}\xi}} \right)^2 \quad (3.2.3.2)$$

(III) 情况 2, 在 $A > 0$ 时,

$$u_{15}(\xi) = -\frac{27\beta}{4\gamma} \left(\frac{-4\beta e^{\varepsilon\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi}}{(k^2 - \alpha^2) \left(e^{\varepsilon\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi} + \frac{81\beta}{16} \right)} \right)^2 - \frac{243\beta}{16\gamma} \left(\frac{-4\beta e^{\varepsilon\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi}}{(k^2 - \alpha^2) \left(e^{\varepsilon\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi} + \frac{81\beta}{16} \right)} \right) \quad (3.2.3.3)$$

(IV) 情况 3, 在 $A > 0$ 时,

$$u_{16}(\xi) = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{-4\beta e^{\varepsilon\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi}}{(k^2 - \alpha^2) \left(e^{\varepsilon\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi} + \frac{81\beta}{16} \right)} \right)^2 + \frac{27\beta}{4\gamma} \left(\frac{-4\beta e^{\varepsilon\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi}}{(k^2 - \alpha^2) \left(e^{\varepsilon\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi} + \frac{81\beta}{16} \right)} \right) + \frac{243\beta}{16\gamma} \left(\frac{-4\beta e^{\varepsilon\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi}}{(k^2 - \alpha^2) \left(e^{\varepsilon\sqrt{\frac{\beta}{k^2 - \alpha^2}}\xi} + \frac{81\beta}{16} \right)} \right) \quad (3.2.3.4)$$

其中 α , β , γ 和 k 为任意常数。

3.2.4 Klein-Gordon 方程的有理函数解

(I) 情况 1, 在 $A = 0$ 时,

$$u_{17} = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{4B}{B^2\xi^2 - 4C} \right)^2 \quad (3.2.4.1)$$

(II) 情况 2, 在 $A = 0$, $B = 0$, $C > 0$ 时,

$$u_{18} = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{C}\xi} \right)^2 \quad (3.2.4.2)$$

其中 α , β , γ 和 k 为任意常数。

与文献[39]比较, 可以发现, 运用改进的辅助方程方法求解非线性偏微分方程能够得到更多丰富类型的 Klein-Gordon 方程的精确解

第四章 改进的 F-展开法

本章研究的主要内容是在齐次平衡原则的思想下,充分利用 F-展开法和 Riccati 方程在非线性偏微分方程求解中的优良特性,提出的一种改进的 F-展开法。此方法在借助于计算机符号系统 Mathematica 下,操作方便,可以得到非线性偏微分方程的一系列精确解(类孤子解,三角函数周期解,有理数解)。并以 2+1 维方程(Broer-Kaup 方程)为例,对此方法的加以说明,得到了他们丰富类型的精确解,其中部分是新解。

从本章可以看出改进的 F-展开法有更加广阔的应用范围,而且不像原有的 F-展开法是从获得 Jacobi 椭圆函数解入手,改进后的方法将是直接从获得物理意义深刻的类孤子解,三角函数周期解入手,而且随着对 Riccati 方程的深入研究,相信此方法应用前景会更加广阔,并能有助于发现更多复杂的精确解。

4.1 改进的 F-展开法

考虑一个给定的 NLPDE, 含有自变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_l, t)$ 及变量 u :

$$P(u, u_t, u_{x_1}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (4.1.1)$$

这里 P 为其变元的多项式, 其中包含有非线性项和高阶偏导数项。采用改进的 F-展开法求解方程(4.1.1)的步骤如下:

(I) 求方程(4.1.1)的行波解:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_l, t) = u(\xi), \quad \xi = k_1(x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_l x_l + \omega t) \quad (4.1.2)$$

$k_1, k_2, \dots, k_l, \omega$ 待定。将式(4.1.2)代入方程(4.1.1)中, 则(4.1.1)化为 $u(\xi)$ 的非线性常微分方程 (NODE):

$$P(u, u', u'', \dots) = 0 \quad (4.1.3)$$

(II) 设 $u(\xi)$ 可表为 $F(\xi)$ 有限幂级数:

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=-N}^N a_i F^i(\xi), \quad (a_N \neq 0) \quad (4.1.4)$$

这里 a_0, a_i 是待定常数, $F(\xi)$ 满足 Riccati 方程:

$$F'(\xi) = A + BF(\xi) + CF^2(\xi), \quad (4.1.5)$$

A, B, C 是待定常数, 正整数 N 是由具有支配地位的非线性项与最高阶偏导数项

平衡而确定, 并且:

(a) 当 $N = \frac{p}{q}$ 为分数时, 令 $u(\xi) = v^{\frac{p}{q}}(\xi)$

(b) 当 N 为负整数时, 令 $u(\xi) = v^N(\xi)$

化为新的关于 $v(\xi)$ 的 NODE, 以确保平衡常数为正整数。

(III) 将(4.1.4)代入 NODE (4.1.3)中, 利用(4.1.5)可将方程(4.1.3)变成 $F^p(\xi)$ ($p = -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m$) 的多项式。置 $F^p(\xi)$ 的各次幂次的系数为零, 得关于 $a_{-N}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_N, k_\lambda, \omega$ ($\lambda = 1, \dots, l$) 的代数方程组。

(IV) 解上述方程组 (可借助 Mathematica 或 Maple), $a_{-N}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_N, k_\lambda$ 和 ω 可由 A, B, C (或方程(4.1.1)的系数) 表示, 将结果代入(4.1.4)中, 得(4.1.1)的行波解的一般形式。

(V) 利用表4.1, 取 A, B, C 的不同值可得 $F(\xi)$ 的各种形式的三角函数解, 双曲函数解及有理数解, 将这样的 A, B, C 值和相对应的 $F(\xi)$ 代入方程(4.1.1)的行波解的一般形式中, 得方程(4.1.1)的一系列类孤子解, 三角函数周期解及有理数解。

扩展的F-展开法较F-展开法做了两方面的改进。

第一, 对其解的一般形式做了改进, 具体有两个方面。首先, 将原来解的形式 $u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i F^i(\xi)$ 改进为 $u(\xi) = a_0 + \sum_{i=-N}^N a_i F^i(\xi)$, 也即在原有解的形式上添加了倒数项。

第二, 对约束方程进行了改进, 将原有的约束方程 $F'^2(\xi) = pF^4 + qF^2 + R$ 改进为 Riccati 方程 $F'(\xi) = A + BF(\xi) + CF^2(\xi)$ 。未改进的F-展开法仅使用于求解奇次项与偶次项不同时存在的非线性偏微分方程, 而改进后的方法很好的克服了这一缺陷, 因而改进后的方法有更广泛的应用前景。由于约束方程的改变, 原有的约束方程与特解的关系列表也随之改进, 原来的表2.2改进为表4.1。

表 4.1 Riccati 方程 4.1.5 中, A, B, C 的不同取值与相应的 $F(\xi)$ 的值之间的关系:

A	B	C	$F(\xi)$
0	1	-1	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\frac{\xi}{2})$
0	-1	1	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(\frac{\xi}{2})$
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\coth(\xi) \pm \csc h(\xi), \tanh(\xi) \pm i \sec h(\xi)$
1	0	-1	$\tanh(\xi), \coth(\xi)$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\sec(\xi) + \tan(\xi), \csc(\xi) - \cot(\xi)$
$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\sec(\xi) - \tan(\xi), \csc(\xi) + \cot(\xi)$
1(-1)	0	1(-1)	$\tan(\xi), \cot(\xi)$
0	0	$\neq 0$	$-1/(C*\xi + m)$ (m is an arbitrary constant)
arbitrary constants	0	0	$A\xi$
arbitrary constants	$\neq 0$	0	$[\exp(B\xi) - A]/B$

4.2 (2+1) 维方程 Broer-Kaup 方程

考虑 (2+1) 维 Broer-Kaup 方程, 其一直是研究数学物理方程的学者们研究的主要对象^[40-44], 形式如下:

$$u_y + 2v_{xx} + 2(uu_x)_y - u_{xy} = 0 \quad (4.2.1)$$

$$v_t + 2(uv)_x + v_{xx} = 0 \quad (4.2.2)$$

该方程是由 Kadomtsev-Petviashvili 方程演化而来。

(I) 设(4.2.1), (4.2.2)有如下形式的行波解:

$$u(x, y, t) = u(\xi), \quad v(x, y, t) = v(\xi), \quad \xi = k(x + ly + \omega t), \quad (k \neq 0) \quad (4.2.3)$$

将(4.2.3)代入(4.2.1)和(4.2.2)中, 得 $u(\xi)$ 的 ODE:

$$l\omega u''(\xi) + 2v''(\xi) + 2lu'(\xi)u'(\xi) + 2lu''(\xi)u(\xi) - klu'''(\xi) = 0 \quad (4.2.4)$$

$$\omega u'(\xi) + 2v(\xi)u'(\xi) + 2v'(\xi)u(\xi) + kv''(\xi) = 0 \quad (4.2.5)$$

(II) 设(4.2.4), (4.2.5)具有行如(4.1.4)式的解, 由 $u''(\xi)u(\xi)$ 与 $u'''(\xi)$ 及 $v'(\xi)u(\xi)$ 与 $v''(\xi)$ 平衡可确定正整数 $n=1, m=2$ 。

从而方程(4.2.4), (4.2.5)具有如下形式的解:

$$u(\xi) = a_0 + a_1 F^{-1}(\xi) + a_2 F(\xi) \quad (4.2.6)$$

$$v(\xi) = b_0 + b_1 F(\xi) + b_2 F^2(\xi) + b_3 F^{-1}(\xi) + b_4 F^{-2}(\xi) \quad (4.2.7)$$

这里 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$ 是待定常数。

把(4.2.6), (4.2.7)式带入(4.2.4), (4.2.5)中, 并利用ODE(4.1.5), 可将方程(4.2.4), (4.2.5)的左端变为关于 $F(\xi)$ 的多项式。我们整理 $F^i(\xi)$ 项的系数, 并令各次幂项的系数为0, 得到关于 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, k, l, \omega$ 的超定代数方程组;

(III) 利用Mathematica解上述代数方程组, 可得 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, k, l, \omega$ 如下情况的解:

情况1: $A=0$ 时, 方程组有如下解:

$$\begin{aligned} b_0 = b_3 = b_4 = 0, \quad b_1 = BClk^2, \quad b_2 = -lC^2k^2, \\ \omega = -2a_0 - Bk, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -Ck \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

其中 a_0, k, l 为任意常数。

情况2: $B=0$ 时, 方程组有如下解:

$$b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0, \quad \omega = -2a_0, \quad b_4 = -lA^2k^2, \quad a_1 = Ak, \quad a_2 = Ck, \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} b_1 = b_2 = b_3 = 0, \quad b_0 = -lACk^2, \quad b_4 = -lA^2k^2, \\ \omega = -2a_0, \quad a_1 = Ak, \quad a_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$b_0 = b_1 = b_3 = b_4 = 0, \quad \omega = -2a_0, \quad a_1 = -Ak, \quad a_2 = -Ck, \quad b_2 = -lA^2k^2, \quad (4.2.11)$$

$$\begin{aligned} b_1 = b_3 = 0, \quad b_2 = -lC^2k^2, \quad b_0 = -2lACk^2, \quad b_4 = -lA^2k^2, \\ \omega = -2a_0, \quad a_1 = Ak, \quad a_2 = -Ck, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} b_1 = b_3 = b_4 = 0, \quad b_0 = -lACk^2, \quad b_2 = -lC^2k^2, \\ \omega = -2a_0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -Ck, \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

其中 a_0, k, l 为任意常数。

情况3: $A=B=0$ 时, 方程组有如下解:

$$b_0 = b_1 = b_4 = 0, \quad b_2 = -lC^2k^2, \quad \omega = -2a_0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -Ck, \quad (4.2.14)$$

其中 a_0, k, l 为任意常数。

将以上各解代入(4.2.6), (4.2.7), 得到方程(4.2.4), (4.2.5)的各种形式的解。

对于情况 1, 可得如下 (2+1) 维 BK 方程的精确解如下:

$$\begin{cases} u(\xi) = -CkF(\xi) \\ v(\xi) = BClk^2F(\xi) - lC^2k^2F^2(\xi) \end{cases} \quad (a)$$

对于情况 2, 以(4.2.12)为例, 可得如下 (2+1) 维 BK 方程的精确解如下:

$$\begin{cases} u(\xi) = Ak \frac{1}{F(\xi)} - CkF(\xi) \\ v(\xi) = -2ACK^2 - C^2lk^2F^2(\xi) - lA^2k^2 \frac{1}{F^2(\xi)} \end{cases} \quad (b)$$

对于情况 3, 可得如下 (2+1) 维 BK 方程的精确解如下:

$$\begin{cases} u(\xi) = -CkF(\xi) \\ v(\xi) = -lC^2k^2F^2(\xi) \end{cases} \quad (c)$$

4.2.1 (2+1) 维 Broer-Kaup 方程的类孤子解

(I) 当 $A=0$, $B=1$, $C=-1$, 由表 4.1, 则: $F(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\frac{\xi}{2})$, 将其代入(a)式,

可得

$$\begin{cases} u_1(\xi) = k[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\frac{\xi}{2})] \\ v_1(\xi) = -lk^2[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\frac{\xi}{2})][\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\frac{\xi}{2})] \end{cases} \quad (4.2.1.1)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = -2a_0 - Bk$, a_0 , k , l 为任意常数。

(II) 当 $A=0$, $B=-1$, $C=1$, 由表 4.1, 则 $F(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(\frac{\xi}{2})$, 将其代入(a)式,

可得

$$\begin{cases} u_2(\xi) = k[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(\frac{\xi}{2})] \\ v_2(\xi) = -lk^2[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(\frac{\xi}{2})][\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \coth(\frac{\xi}{2})] \end{cases} \quad (4.2.1.2)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = -2a_0 - Bk$, a_0 , k , l 为任意常数。

(III) 当 $A = \frac{1}{2}$, $B=0$, $C = -\frac{1}{2}$, 由表 4.1, 则 $F(\xi) = \coth(\xi) \pm \operatorname{csch}(\xi)$ 或

$\tanh(\xi) \pm i \operatorname{sech}(\xi)$, 将其代入(b)式, 可得

$$\begin{cases} u_{3(1)}(\xi) = \frac{1}{2}k \frac{1}{\coth(\xi) + \operatorname{csch}(\xi)} + \frac{1}{2}k[\coth(\xi) + \operatorname{csch}(\xi)] \\ v_{3(1)}(\xi) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}lk^2[\coth(\xi) + \operatorname{csch}(\xi)]^2 - \frac{1}{4}lk^2 \frac{1}{[\coth(\xi) + \operatorname{csch}(\xi)]^2} \end{cases} \quad (4.2.1.3)$$

$$\begin{cases} u_{3(2)}(\xi) = \frac{1}{2}k \frac{1}{\coth(\xi) - \operatorname{csch}(\xi)} + \frac{1}{2}k[\coth(\xi) - \operatorname{csch}(\xi)] \\ v_{3(2)}(\xi) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}lk^2[\coth(\xi) - \operatorname{csch}(\xi)]^2 - \frac{1}{4}lk^2 \frac{1}{[\coth(\xi) - \operatorname{csch}(\xi)]^2} \end{cases} \quad (4.2.1.4)$$

$$\begin{cases} u_{3(3)}(\xi) = \frac{1}{2}k \frac{1}{\tanh(\xi) + i \operatorname{sech}(\xi)} + \frac{1}{2}k[\tanh(\xi) + i \operatorname{sech}(\xi)] \\ v_{3(3)}(\xi) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}lk^2[\tanh(\xi) + i \operatorname{sech}(\xi)]^2 - \frac{1}{4}lk^2 \frac{1}{[\tanh(\xi) + i \operatorname{sech}(\xi)]^2} \end{cases} \quad (4.2.1.5)$$

$$\begin{cases} u_{3(4)}(\xi) = \frac{1}{2}k \frac{1}{\tanh(\xi) - i \operatorname{sech}(\xi)} + \frac{1}{2}k[\tanh(\xi) - i \operatorname{sech}(\xi)] \\ v_{3(4)}(\xi) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}lk^2[\tanh(\xi) - i \operatorname{sech}(\xi)]^2 - \frac{1}{4}lk^2 \frac{1}{[\tanh(\xi) - i \operatorname{sech}(\xi)]^2} \end{cases} \quad (4.2.1.6)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = -2a_0$, a_0 , k , l 为任意常数。

(IV) 当 $A=1$, $B=0$, $C=-1$, 由表 4.1, 则 $F(\xi) = \tanh(\xi)$ 或 $\coth(\xi)$, 将其代入(b)式, 可得

$$\begin{cases} u_{4(1)}(\xi) = k \frac{1}{\tanh(\xi)} + k \tanh(\xi) \\ v_{4(1)}(\xi) = -2Ck^2 - lk^2 \tanh^2(\xi) - lk^2 \frac{1}{\tanh^2(\xi)} \end{cases} \quad (4.2.1.7)$$

$$\begin{cases} u_{4(2)}(\xi) = k \frac{1}{\coth(\xi)} + k \coth(\xi) \\ v_{4(2)}(\xi) = -2Ck^2 - lk^2 \coth^2(\xi) - lk^2 \frac{1}{\coth^2(\xi)} \end{cases} \quad (4.2.1.8)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = -2a_0$, a_0 , k , l 为任意常数。

4.2.2 (2+1) 维 Broer-Kaup 方程的三角函数解

(I) 当 $A = \frac{1}{2}$, $B=0$, $C = \frac{1}{2}$, 由表 4.1, 则 $F(\xi) = \sec(\xi) + \tan(\xi)$ 或 $\csc(\xi) - \cot(\xi)$,

将其代入(b)式, 可得

$$\begin{cases} u_{5(1)}(\xi) = \frac{1}{2}k \frac{1}{\tan(\xi) + \sec(\xi)} - \frac{1}{2}k[\tan(\xi) + \sec(\xi)] \\ v_{5(1)}(\xi) = -\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}lk^2[\tan(\xi) + \sec(\xi)]^2 - \frac{1}{4}lk^2 \frac{1}{[\tan(\xi) + \sec(\xi)]^2} \end{cases} \quad (4.2.2.1)$$

$$\begin{cases} u_{5(2)}(\xi) = \frac{1}{2}k \frac{1}{\csc(\xi) - \cot(\xi)} - \frac{1}{2}k[\csc(\xi) - \cot(\xi)] \\ v_{5(2)}(\xi) = -\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}lk^2[\csc(\xi) - \cot(\xi)]^2 - \frac{1}{4}lk^2 \frac{1}{[\csc(\xi) - \cot(\xi)]^2} \end{cases} \quad (4.2.2.2)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = -2a_0$, a_0, k, l 为任意常数。

(II) 当 $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = -\frac{1}{2}$, 由表 4.1, 则 $F(\xi) = \sec(\xi) - \tan(\xi)$ 或 $\csc(\xi) + \cot(\xi)$, 将其代入(b)式, 可得

$$\begin{cases} u_{6(1)}(\xi) = -\frac{1}{2}k \frac{1}{\sec(\xi) - \tan(\xi)} + \frac{1}{2}k[\sec(\xi) - \tan(\xi)] \\ v_{6(1)}(\xi) = -\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}lk^2[\sec(\xi) - \tan(\xi)]^2 - \frac{1}{4}lk^2 \frac{1}{[\sec(\xi) - \tan(\xi)]^2} \end{cases} \quad (4.2.2.3)$$

$$\begin{cases} u_{6(2)}(\xi) = -\frac{1}{2}k \frac{1}{\csc(\xi) + \cot(\xi)} + \frac{1}{2}k[\csc(\xi) + \cot(\xi)] \\ v_{6(2)}(\xi) = -\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}lk^2[\csc(\xi) + \cot(\xi)]^2 - \frac{1}{4}lk^2 \frac{1}{[\csc(\xi) + \cot(\xi)]^2} \end{cases} \quad (4.2.2.4)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = -2a_0$, a_0, k, l 为任意常数。

(III) 当 $A = 1(-1)$, $B = 0$, $C = 1(-1)$, 由表 4.1, 则 $F(\xi) = \tan(\xi)$ 或 $\cot(\xi)$, 将其代入(b)式, 可得

$$\begin{cases} u_{7(1)}(\xi) = k \frac{1}{\tan(\xi)} - k \tan(\xi) \\ v_{7(1)}(\xi) = -2k^2 - lk^2 \tan^2(\xi) - lk^2 \frac{1}{\tan^2(\xi)} \end{cases} \quad (4.2.2.5)$$

$$\begin{cases} u_{7(2)}(\xi) = k \frac{1}{\cot(\xi)} - k \cot(\xi) \\ v_{7(2)}(\xi) = -2k^2 - lk^2 \cot^2(\xi) - lk^2 \frac{1}{\cot^2(\xi)} \end{cases} \quad (4.2.2.6)$$

$$\begin{cases} u_{7(3)}(\xi) = -k \frac{1}{\tan(\xi)} + k \tan(\xi) \\ v_{7(3)}(\xi) = -2k^2 - lk^2 \tan^2(\xi) - lk^2 \frac{1}{\tan^2(\xi)} \end{cases} \quad (4.2.2.7)$$

$$\begin{cases} u_{7(4)}(\xi) = -k \frac{1}{\cot(\xi)} + k \cot(\xi) \\ v_{7(4)}(\xi) = -2k^2 - lk^2 \cot^2(\xi) - lk^2 \frac{1}{\cot^2(\xi)} \end{cases} \quad (4.2.2.8)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = -2a_0$, a_0, k, l 为任意常数。

4.2.3 (2+1) 维 Broer-Kaup 方程的有理函数解

(I) 当 A 为任意常数, $B=0$, $C=0$, 由表 4.1, 则 $F(\xi) = A\xi$, 将其代入(b)式, 可得

$$\begin{cases} u_8(\xi) = \frac{k}{\xi} \\ v_8(\xi) = -lk^2 \frac{1}{\xi^2} \end{cases} \quad (4.2.3.1)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = -2a_0$, a_0, k, l 为任意常数。

(II) 当 $A=0$, $B=0$, $C \neq 0$, 由表 4.1, 则 $F(\xi) = \frac{-1}{C\xi + m}$ (m 为任意常数), 将其代入(c)式, 可得

$$\begin{cases} u_9(\xi) = -Ck \frac{-1}{C\xi + m} \\ v_9(\xi) = -lC^2k^2 \frac{1}{(C\xi + m)^2} \end{cases} \quad (4.2.3.2)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = -2a_0$, a_0, k, l 为任意常数。

由上述求解过程可发现, 该种改进的 F-展开法与第三章中所用改进的辅助方程方法有更加广阔的应用范围, 改进的辅助方程方法仅适用于奇偶次不同时存在的非线性偏微分方程, 而改进的 F-展开法的适用范围更加广泛。

第五章 求解偏微分方程的一种广义改进的 F-展开法

本章利用在上章中提出的一种改进的 F-展开法的基础上,提出了一种广义改进的 F-展开法。广义扩展的 F-展开法在改进的 F-展开法的基础上对解的一般形式做了改进,虽然解的一般形式较改进的 F-展开法复杂,求解过程也更加复杂,但由于解的形式的改进,可以得到非线性偏微分方程的更多丰富类型的精确解。

本章利用广义扩展的 F-展开法求解了 Kdv-mKdv 方程和 (2+1) 维 Burgers 方程,求得了其丰富类型的精确解,有部分新解。

5.1 广义改进的 F-展开法

考虑一个给定的 NLPDE, 含有自变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_l, t)$ 及变量 u :

$$P(u, u_1, u_{x_1}, u_{xx_1}, \dots) = 0 \quad (5.1.1)$$

这里 P 为其变元的多项式, 其中包含有非线性项和高阶偏导数项。采用改进的 F-展开法求解方程(5.1.1)的步骤如下:

(I) 求方程(5.1.1)的行波解:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_l, t) = u(\xi), \quad \xi = k_1(x_1 + k_2x_2 + \dots + k_lx_l + \omega t) \quad (5.1.2)$$

$k_1, k_2, \dots, k_l, \omega$ 待定。将式(5.1.2)代入方程(5.1.1)中, 则(5.1.1)化为 $u(\xi)$ 的非线性常微分方程 (NODE):

$$P(u, u', u'', \dots) = 0 \quad (5.1.3)$$

(II) 设 $u(\xi)$ 可表为 $F(\xi)$ 有限幂级数:

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^n \{a_i F^{-i}(\xi) + a_i F^i(\xi) + b_i F^i(\xi) F'(\xi) + c_i F^{-i}(\xi) F'(\xi)\} \quad (5.1.4)$$

这里 a_0, a_i, b_i, c_i ($i=1, \dots, l$) 是待定常数, $F(\xi)$ 满足 Riccati 方程:

$$F'(\xi) = A + BF(\xi) + CF^2(\xi), \quad (5.1.5)$$

A, B, C 是待定常数, 正整数 N 是由具有支配地位的非线性项与最高阶偏导数项平衡而确定, 并且:

$$(a) \text{ 当 } N = \frac{p}{q} \text{ 为分数时, 令 } u(\xi) = v^{\frac{p}{q}}(\xi)$$

$$(b) \text{ 当 } N \text{ 为负整数时, 令 } u(\xi) = v^N(\xi)$$

化为新的关于 $v(\xi)$ 的 NODE, 以确保平衡常数为正整数。

(III) 将(5.1.4)代入 NODE(5.1.3)中, 利用(5.1.5)可将方程(5.1.3)变成 $F^p(\xi)$ ($p = -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m$) 的多项式。置 $F^p(\xi)$ 的各次幂次的系数为零, 可得关于 a_0, a_i, b_i, c_i ($i=1, \dots, l$), k_λ, ω ($\lambda=1, \dots, l$) 的代数方程组。

(IV) 求解上述方程组 (可借助 Mathematica 或 Maple), a_0, a_i, b_i, c_i ($i=1, \dots, l$), k_λ, ω ($\lambda=1, \dots, l$) 可由 A, B, C (或方程(5.1.1)的系数) 表示, 将结果代入(5.1.4)中, 得(5.1.1)的行波解的一般形式。

(V) 利用表 4.1, 取 A, B, C 的不同值可得 $F(\xi)$ 的各种形式的三角函数解, 双曲函数解及有理数解, 将这样的 A, B, C 值和相对应的 $F(\xi)$ 代入方程(5.1.1)的行波解的一般形式中, 得方程(5.1.1)的一系列类孤子解, 三角函数周期解及有理数解。

在本文第四章对 F-展开法改进的基础上再次改进, 解的形式由原来的 $u(\xi) = a_0 + \sum_{i=-N}^N a_i F^i(\xi)$ 改进为 $u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^n \{a_i F^i(\xi) + a_i F^i(\xi) + b_i F^i(\xi) F^i(\xi) + c_i F^i(\xi) F^i(\xi)\}$, 也即在添加倒数项的基础上再添加导数项, 虽然较原有方法比, 计算过程更为复杂, 但可得到非线性偏微分方程的更丰富类型的精确解。

5.2 Kdv-mKdv 方程的精确解

考虑 Kdv-mKdv 方程, 形式如下:

$$u_t + (\alpha + \beta u)uu_x + \varepsilon u_{xxx} = 0 \quad (5.2.1)$$

其中 $\alpha, \beta, \varepsilon$ 为任意常数。

Kdv-mKdv 方程是等离子物理和固体物理中一个重要的模型^[45]。当 $\beta = 0$ 时, 该方程可化为 Kdv 方程; 当 $\alpha = 0$ 时, 该方程还原为 mKdv 方程。

(I) 设(5.2.1)有如下形式的行波解:

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = k(x + lt), \quad (k \neq 0) \quad (5.2.2)$$

将(5.2.2)代入(5.2.1)中, 得 $u(\xi)$ 的 ODE:

$$klu'(\xi) + \alpha ku(\xi)u'(\xi) + \beta ku^2(\xi)u'(\xi) + \varepsilon k^3 u'''(\xi) = 0 \quad (5.2.3)$$

(II) 设(5.2.3)具有行如(5.1.4)式的解, 由 $\beta ku^2(\xi)u'(\xi)$ 与 $\varepsilon k^3 u'''(\xi)$ 平衡可确定正

整数 $n=1$ 。

从而方程(5.2.3)具有如下形式的解:

$$u(\xi)=a_0+a_1F(\xi)+a_2F(\xi)^{-1}+a_3F(\xi)F'(\xi)+a_4F(\xi)^{-1}F'(\xi) \quad (5.2.4)$$

这里 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 是待定常数。

把(5.2.4)式带入(5.2.3)中, 并利用ODE(5.1.5), 可将方程(5.2.3)的左端变为关于 $F(\xi)$ 的多项式。我们整理 $F'(\xi)$ 项的系数, 并令各次幂项的系数为0, 得到关于 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, k, l$ 的超定代数方程组;

(III) 利用Mathematica解上述代数方程组, 可得 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, k, l$ 如下情况的解:

$$\begin{aligned} \text{情况 1: } a_0 &= \frac{-\alpha - i\sqrt{6}Bk\sqrt{\beta}\sqrt{\varepsilon} - 2B\beta a_4}{2\beta}, \quad a_1 = -Aa_4, \quad a_2 = \frac{-i\sqrt{6}Ck\sqrt{\varepsilon} - C\sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta}}, \\ a_3 &= 0, \quad l = \frac{\alpha^2 + 2B^2k^2\beta\varepsilon - 8ACk^2\beta\varepsilon}{4\beta}; \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{情况 2: } a_0 &= \frac{-\alpha + i\sqrt{6}Bk\sqrt{\beta}\sqrt{\varepsilon} - 2B\beta a_4}{2\beta}, \quad a_1 = -Aa_4, \quad a_2 = \frac{i\sqrt{6}Ck\sqrt{\varepsilon} - C\sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta}}, \\ a_3 &= 0, \quad l = \frac{\alpha^2 + 2B^2k^2\beta\varepsilon - 8ACk^2\beta\varepsilon}{4\beta}; \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{情况 3: } a_0 &= \frac{-\alpha - i\sqrt{6}Bk\sqrt{\beta}\sqrt{\varepsilon} - 2B\beta a_4}{2\beta}, \quad a_1 = \frac{-i\sqrt{6}Ak\sqrt{\varepsilon} - A\sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta}}, \quad a_2 = -Ca_4, \\ a_3 &= 0, \quad l = \frac{\alpha^2 + 2B^2k^2\beta\varepsilon - 8ACk^2\beta\varepsilon}{4\beta}; \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

$$\begin{aligned} \text{情况 4: } a_0 &= \frac{-\alpha + i\sqrt{6}Bk\sqrt{\beta}\sqrt{\varepsilon} - 2B\beta a_4}{2\beta}, \quad a_1 = \frac{i\sqrt{6}Ak\sqrt{\varepsilon} - A\sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta}}, \quad a_2 = -Ca_4, \\ a_3 &= 0, \quad l = \frac{\alpha^2 + 2B^2k^2\beta\varepsilon - 8ACk^2\beta\varepsilon}{4\beta}; \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

$$\begin{aligned} \text{情况 5: } a_0 &= \frac{-\alpha - i\sqrt{6}Bk\sqrt{\beta}\sqrt{\varepsilon} - 2B\beta a_4}{2\beta}, \quad a_1 = \frac{i\sqrt{6}Ak\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\beta}} - Aa_4, \quad a_3 = 0, \\ a_2 &= \frac{i\sqrt{6}Ck\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\beta}} - Ca_4, \quad l = \frac{\alpha^2 + 2B^2k^2\beta\varepsilon + 16ACk^2\beta\varepsilon}{4\beta}; \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{情况 6: } a_0 &= \frac{-\alpha + i\sqrt{6}Bk\sqrt{\beta}\sqrt{\varepsilon} - 2B\beta a_4}{2\beta}, \quad a_1 = \frac{i\sqrt{6}Ak\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\beta}} - Aa_4, \quad a_3 = 0, \\ a_2 &= \frac{i\sqrt{6}Ck\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\beta}} - Ca_4, \quad l = \frac{\alpha^2 + 2B^2k^2\beta\varepsilon + 16ACk^2\beta\varepsilon}{4\beta}; \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{情况 7: } a_0 &= \frac{-\alpha - i\sqrt{6}Bk\sqrt{\beta}\sqrt{\varepsilon} - 2B\beta a_4}{2\beta}, \quad a_1 = -\frac{i\sqrt{6}Ak\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\beta}} - Aa_4, \quad a_3 = 0, \\ a_2 &= -\frac{i\sqrt{6}Ck\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\beta}} - Ca_4, \quad l = \frac{\alpha^2 + 2B^2k^2\beta\varepsilon + 16ACk^2\beta\varepsilon}{4\beta}; \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{情况 8: } a_0 &= \frac{-\alpha + i\sqrt{6}Bk\sqrt{\beta}\sqrt{\varepsilon} - 2B\beta a_4}{2\beta}, \quad a_1 = -\frac{i\sqrt{6}Ak\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\beta}} - Aa_4, \quad a_3 = 0, \\ a_2 &= -\frac{i\sqrt{6}Ck\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\beta}} - Ca_4, \quad l = \frac{\alpha^2 + 2B^2k^2\beta\varepsilon + 16ACk^2\beta\varepsilon}{4\beta}; \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

其中 α , β , ε , k 和 a_4 为任意常数。

将以上各解代入(5.2.4), 得到方程(5.2.3)的各种形式的解。

以情况 1 为例(其他情况可以类似得出), 可求得如下 kdv-mkdv 方程的精确解:

(I) 由表 4.1, 当 $A=0$, $B=1$, $C=-1$, 则: $F(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\frac{1}{2}\xi)$, 可得 kdv-mkdv 方程的类孤子解

$$u_1(x,t) = \frac{-\alpha - i\sqrt{6}k\sqrt{\beta}\sqrt{\varepsilon} - 2\beta a_4}{2\beta} + \frac{i\sqrt{6}k\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\frac{1}{2}\xi))} + \frac{a_4 \operatorname{sech}^2(\frac{\xi}{2})}{(2 + 2 \tanh(\frac{\xi}{2}))} \quad (5.2.13)$$

其中 $\xi = k(x+lt)$, $l = \frac{\alpha^2 + 2k^2\beta\varepsilon}{4\beta}$, a_4 为任意常数。

(II) 由表 4.1, 当 $A=0$, $B=-1$, $C=1$, 则 $F(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(\frac{1}{2}\xi)$, 可得 kdv-mkdv 方程的类孤子解

$$u_2(x,t) = \frac{-\alpha + i\sqrt{6}k\sqrt{\beta}\sqrt{\varepsilon} + 2\beta a_4}{2\beta} + \frac{-i\sqrt{6}k\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(\frac{1}{2}\xi))} + \frac{a_4 \operatorname{csch}^2(\frac{\xi}{2})}{2 - 2 \coth(\frac{\xi}{2})} \quad (5.2.14)$$

其中 $\xi = k(x+lt)$, $l = \frac{\alpha^2 + 2k^2\beta\varepsilon}{4\beta}$, a_4 为任意常数。

(III) 由表4.1, 当 $A = \frac{1}{2}$, $B=0$, $C = -\frac{1}{2}$, 则 $F(\xi) = \coth(\xi) \pm \csc h(\xi)$ 或 $\tanh(\xi) \pm i \sec h(\xi)$, 可得kdv-mkdv方程的类孤子解

$$u_3(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2} a_4 (\coth \xi + \csc h \xi) - \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{2\sqrt{\beta}(\coth \xi + \csc h \xi)} + \frac{a_4(-\coth(\xi)\csc h(\xi) - \csc h^2(\xi))}{\coth(\xi) + \csc h(\xi)} \quad (5.2.15)$$

$$u_4(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2} a_4 (\coth \xi - \csc h \xi) - \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{2\sqrt{\beta}(\coth \xi - \csc h \xi)} + \frac{a_4(\coth(\xi)\csc h(\xi) - \csc h^2(\xi))}{\coth(\xi) - \csc h(\xi)} \quad (5.2.16)$$

$$u_5(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2} a_4 (\tanh \xi + i \sec h \xi) - \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{2\sqrt{\beta}(\tanh \xi + i \sec h \xi)} + \frac{a_4(\sec h^2(\xi) - i \sec h(\xi) \tanh(\xi))}{i \sec h(\xi) + \tanh(\xi)} \quad (5.2.17)$$

$$u_6(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2} a_4 (\tanh \xi - i \sec h \xi) - \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{2\sqrt{\beta}(\tanh \xi - i \sec h \xi)} + \frac{a_4(\sec h^2(\xi) + i \sec h(\xi) \tanh(\xi))}{-i \sec h(\xi) + \tanh(\xi)} \quad (5.2.18)$$

其中 $\xi = k(x+lt)$, $l = \frac{\alpha^2 + 2k^2\beta\varepsilon}{4\beta}$, a_4 为任意常数。

(IV) 由表4.1, 当 $A=1$, $B=0$, $C=-1$, 则 $F(\xi) = \tanh(\xi)$ 或 $\coth(\xi)$, 可得kdv-mkdv方程的类孤子解

$$u_7(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} - a_4 \tanh \xi - \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta} \tanh \xi} + a_4 \csc h(\xi) \sec h(\xi) \quad (5.2.19)$$

$$u_8(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} - a_4 \coth \xi - \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta} \coth \xi} - a_4 \csc h(\xi) \sec h(\xi) \quad (5.2.20)$$

其中 $\xi = k(x+lt)$, $l = \frac{\alpha^2 + 8k^2\beta\varepsilon}{4\beta}$, a_4 为任意常数。

(V) 由表4.1, 当 $A = \frac{1}{2}$, $B=0$, $C = \frac{1}{2}$, 则 $F(\xi) = \sec(\xi) + \tan(\xi)$ 或 $\csc(\xi) - \cot(\xi)$,

可得kdv-mkdv方程的三角函数解

$$u_9(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2} a_4 (\sec \xi + \tan \xi) + \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{2\sqrt{\beta}(\sec \xi + \tan \xi)} + \frac{a_4(\sec^2(\xi) + \sec(\xi) \tan(\xi))}{(\sec(\xi) + \tan(\xi))} \quad (5.2.21)$$

$$u_{10}(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2} a_4 (\csc \xi - \cot \xi) + \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{2\sqrt{\beta}(\csc \xi - \cot \xi)} + \frac{a_4(\csc^2(\xi) - \cot(\xi) \csc(\xi))}{\csc(\xi) - \cot(\xi)} \quad (5.2.22)$$

其中 $\xi = k(x+lt)$, $l = \frac{\alpha^2 - 2k^2\beta\varepsilon}{4\beta}$, a_4 为任意常数。

(VI) 由表4.1, 当 $A = -\frac{1}{2}$, $B=0$, $C = -\frac{1}{2}$, 则 $F(\xi) = \sec(\xi) - \tan(\xi)$ 或 $\csc(\xi) + \cot(\xi)$, 可得kdv-mkdv方程的三角函数解

$$u_{11}(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} + \frac{1}{2}a_4(\sec\xi - \tan\xi) - \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{2\sqrt{\beta}(\sec\xi - \tan\xi)} + \frac{a_4(-\sec^2(\xi) + \sec(\xi)\tan(\xi))}{\sec(\xi) - \tan(\xi)} \quad (5.2.23)$$

$$u_{12}(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} + \frac{1}{2}a_4(\csc\xi + \cot\xi) - \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{2\sqrt{\beta}(\csc\xi + \cot\xi)} + \frac{a_4(-\csc^2(\xi) - \cot(\xi)\csc(\xi))}{\csc(\xi) + \cot(\xi)} \quad (5.2.24)$$

其中 $\xi = k(x+lt)$, $l = \frac{\alpha^2 - 2k^2\beta\varepsilon}{4\beta}$, a_4 为任意常数。

(VII) 由表4.1, 当 $A = 1(-1)$, $B=0$, $C = 1(-1)$, 则 $F(\xi) = \tan(\xi)$ 或 $\cot(\xi)$, 可得kdv-mkdv方程的三角函数解

$$u_{13}(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} - a_4 \tan \xi + \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta} \tan \xi} + a_4 \csc(\xi) \sec(\xi) \quad (5.2.25)$$

$$u_{14}(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} - a_4 \cot \xi + \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta} \cot \xi} - a_4 \csc(\xi) \sec(\xi) \quad (5.2.26)$$

$$u_{15}(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} + a_4 \tan \xi - \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta} \tan \xi} + a_4 \csc(\xi) \sec(\xi) \quad (5.2.27)$$

$$u_{16}(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} + a_4 \cot \xi - \frac{-i\sqrt{6k}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta} \cot \xi} - a_4 \csc(\xi) \sec(\xi) \quad (5.2.28)$$

其中 $\xi = k(x+lt)$, $l = \frac{\alpha^2 - 8k^2\beta\varepsilon}{4\beta}$, a_4 为任意常数。

(VIII) 由表4.1, 当 A 为任意常数, $B=0$, $C=0$, 则 $F(\xi) = A\xi$, 可得kdv-mkdv方程的有理函数解

$$u_{17}(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} - A^2 a_4 \xi + \frac{a_4}{\xi} \quad (5.2.29)$$

其中 $\xi = k(x+lt)$, $l = \frac{\alpha^2}{4\beta}$, a_4 为任意常数。

(IX) 由表4.1, 当 $A=0$, $B=0$, $C \neq 0$, 则 $F(\xi) = \frac{-1}{C^*\xi + m}$ (m 为任意常数), 可得kdv-mkdv方程的有理函数解

$$u_{18}(x,t) = \frac{-\alpha}{2\beta} - \frac{-i\sqrt{6}Ck\sqrt{\varepsilon} - C\sqrt{\beta}a_4}{\sqrt{\beta}(C^*\xi + m)} + \frac{C(-m - C\xi)a_4}{(C^*\xi + m)^2} \quad (5.2.30)$$

其中 $\xi = k(x+lt)$, $l = \frac{\alpha^2}{4\beta}$, a_4 为任意常数。

(X) 由表4.1, 当 A 为任意常数, $B \neq 0$, $C=0$, 则 $F(\xi) = \frac{\exp(B\xi) - A}{B}$, 可得kdv-mkdv 方程的指数函数解

$$u_{19}(x,t) = \frac{-\alpha - i\sqrt{6}Bk\sqrt{\beta}\sqrt{\varepsilon} - 2B\beta a_4}{2\beta} - \frac{(-A + e^{B\xi})Aa_4}{B} + \frac{Be^{B\xi}a_4}{-A + e^{B\xi}} \quad (5.2.31)$$

其中 $\xi = k(x+lt)$, $l = \frac{\alpha^2 + 2B^2k^2\beta\varepsilon}{4\beta}$, a_4 为任意常数。

可以看到, 利用广义改进的F-展开法, 我们求得了Kdv-mKdv方程的大量精确解, 其中一些是我们首次得到。为了直观的分析这些解的性质, 我们做出了部分解的图象, 我们选 $\alpha=0$, $\varepsilon=\beta=k=a_4=1$ 。

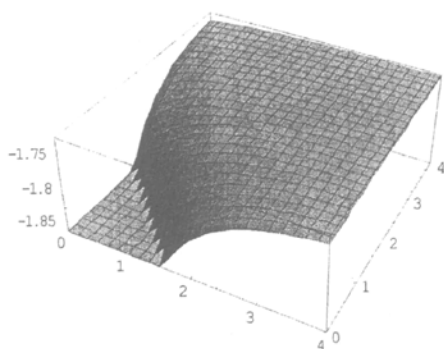


图5.2.1 类孤子解 u_1 的数值模拟

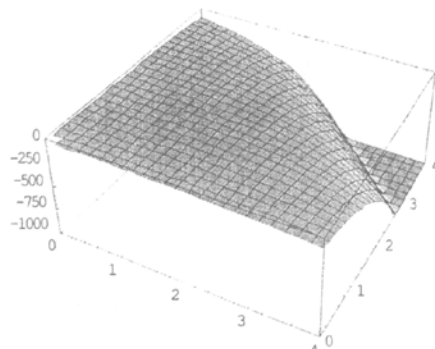


图5.2.2 类孤子解 u_2 的数值模拟

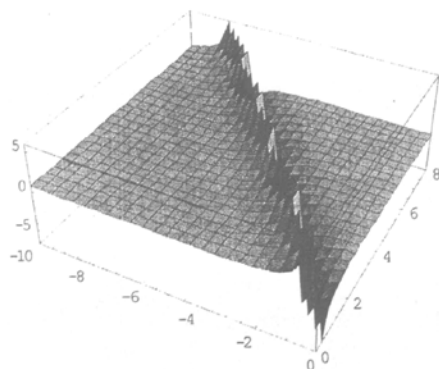
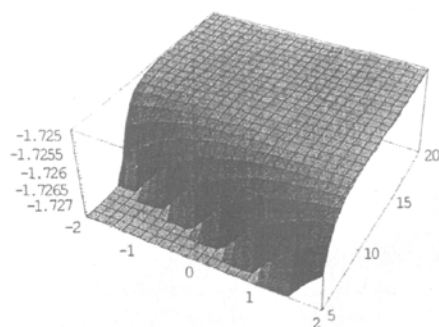


图5.2.3 类孤子解 u_3 的数值模拟



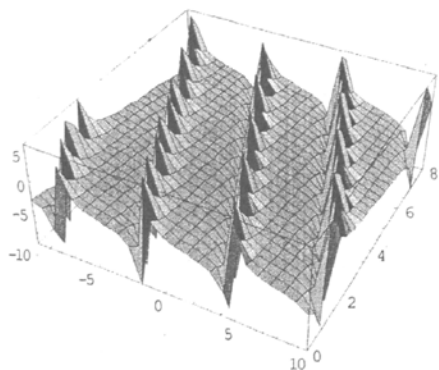


图5.2.4 三角函数解 u_9 的数值模拟

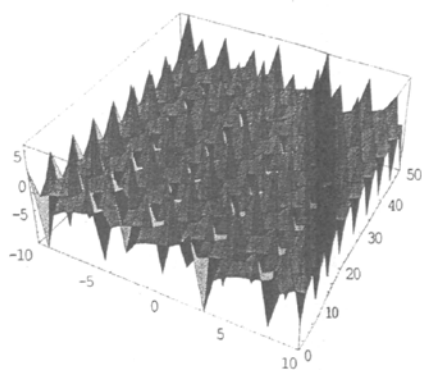


图5.2.5 三角函数解 u_{10} 的数值模拟

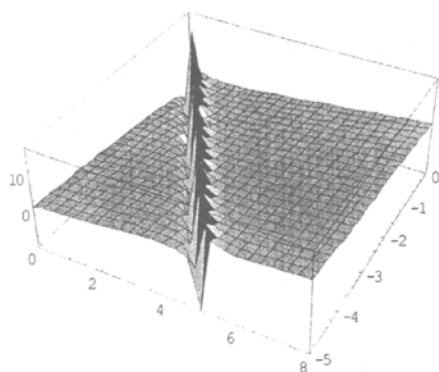


图5.2.6 有理函数解 u_{17} 的数值模拟

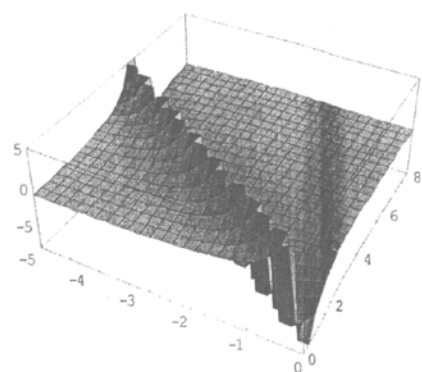


图5.2.7 有理函数解 u_{18} 的数值模拟

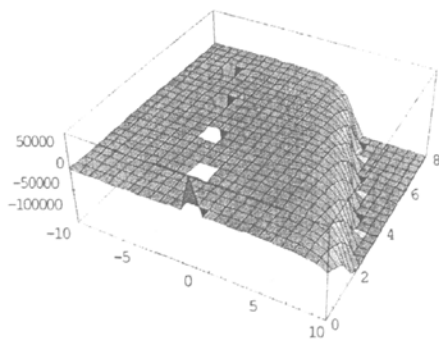


图5.2.8 指数解 u_{19} 的数值模拟

5.3 (2+1) 维 Burgers 方程的精确解

(2+1) 维 Burgers^[46-50]方程:

$$-u_t + uu_y + \alpha v u_x + \beta u_{yy} + \alpha \beta u_{xx} = 0 \quad (5.3.1)$$

$$u_x - v_y = 0 \quad (5.3.2)$$

其中 α, β 为任意常数。

当 Burgers 方程 $u_t = 2uu_x + u_{xx}$ 首次由 Bateman 提出时, 引起了极大的关注。1940 年 Burgers 给出了该方程的一些特解。接下来, Cole 独立的指出方程 $u_t = u_{xx}$ 的每一个解都有 Burgers 方程的一个解与之对应。近来, Hong 等人发现 (2+1) 维 Burgers 方程(5.3.1)和(5.3.2)是 Painleve'可积的, 并运用分离变量逼近的方法求得了该方程的部分解。Wang 及其合作者运用 Riccati 方程展开法求得了该方程的部分解。

下面运用广义扩展的 F-展开法求解 (2+1) 维 Burgers 方程:

(I) 设(5.3.1), (5.3.2)有如下形式的行波解:

$$u(x, y, t) = u(\xi), \quad v(x, y, t) = v(\xi), \quad \xi = k(x + ly + \omega t), \quad (k \neq 0) \quad (5.3.3)$$

将(5.3.3)代入(5.2.1)和(5.3.2)中, 则方程(5.2.1)和(5.3.2)可转化为如下形式:

$$-\omega u'(\xi) + lu(\xi)u'(\xi) + \alpha v(\xi)u'(\xi) + kl^2 \beta u''(\xi) + k\alpha \beta u''(\xi) = 0 \quad (5.3.4)$$

$$u'(\xi) - lv'(\xi) = 0 \quad (5.3.5)$$

(II) 设(5.3.4)和(5.3.5)具有行如(5.1.4)式的解, 由 $k\alpha \beta u''(\xi)$ 与 $lu(\xi)u'(\xi)$ 及 $\alpha v(\xi)u'(\xi)$ 平衡可确定正整数 $n=1$ 和 $m=1$ 。

从而方程(5.3.4)和(5.3.5)具有如下形式的解:

$$u(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi) + a_2 F(\xi)^{-1} + a_3 F(\xi)F'(\xi) + a_4 F(\xi)^{-1}F'(\xi) \quad (5.3.6)$$

$$v(\xi) = b_0 + b_1 F(\xi) + b_2 F(\xi)^{-1} + b_3 F(\xi)F'(\xi) + b_4 F(\xi)^{-1}F'(\xi) \quad (5.3.7)$$

这里 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$ 是待定常数。

把(5.3.6)和(5.3.7)式带入(5.3.4)和(5.3.5)中, 并利用 ODE(5.1.5), 可将方程(5.3.4)和(5.3.5)的左端变为关于 $F(\xi)$ 的多项式。我们整理 $F'(\xi)$ 项的系数, 并令各次幂项的系数为 0, 得到关于 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, k, l, \omega$ 的超定代数方程组:

(III) 利用 Mathematica 求解上述代数方程组, 可得 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, k, l, \omega$ 如下情况的解:

情况 1: $b_1 = -Ab_4, b_2 = \frac{-ia_2 - iCa_4 - C\sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}}, b_3 = 0, a_1 = -Aa_4, a_3 = 0,$

$$l = i\sqrt{\alpha}, \quad \omega = i\sqrt{\alpha}a_0 + iB\sqrt{\alpha}a_4 + \alpha b_0 + B\alpha b_4 \quad (5.3.8)$$

其中 $a_0, a_2, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

情况 2: $b_1 = A(2k\beta - b_4), b_2 = -Cb_4, b_3 = 0, a_1 = A(2kl\beta - a_4), a_2 = -Ca_4,$

$$a_3 = 0, \omega = -Bkl^2\beta - Bk\alpha\beta + la_0 + Bla_4 + \alpha b_0 + B\alpha b_4 \quad (5.3.9)$$

其中 a_0, a_4, b_0, b_4, k, l 为任意常数。

情况 3: $b_1 = -Ab_4, b_2 = \frac{ia_2 + iCa_4 - C\sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}}, b_3 = 0, a_1 = -Aa_4, a_3 = 0,$

$$l = -i\sqrt{\alpha}, \omega = -i\sqrt{\alpha}a_0 - iB\sqrt{\alpha}a_4 + \alpha b_0 + B\alpha b_4 \quad (5.3.10)$$

其中 $a_0, a_2, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

情况 4: $b_1 = -Ab_4, b_2 = -2Ck\beta - Cb_4, b_3 = 0, a_1 = -Aa_4, a_2 = -2Ckl\beta - Ca_4,$

$$a_3 = 0, \omega = Bkl^2\beta + Bk\alpha\beta + la_0 + Bla_4 + \alpha b_0 + B\alpha b_4 \quad (5.3.11)$$

其中 a_0, a_4, b_0, b_4, k, l 为任意常数。

情况 5: $b_1 = -Ab_4, b_2 = -Cb_4, b_3 = 0, a_1 = -Aa_4, a_2 = -Ca_4, a_3 = 0 \quad (5.3.12)$

其中 $a_0, a_4, b_0, b_4, k, l, \omega$ 为任意常数。

情况 6: $b_1 = -Ab_4, b_2 = \frac{ia_2 + iCa_4 - C\sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}}, b_3 = \frac{ia_3}{\sqrt{\alpha}}, a_1 = -Aa_4, l = -i\sqrt{\alpha},$

$$\omega = -i\sqrt{\alpha}a_0 - iB\sqrt{\alpha}a_4 + \alpha b_0 + B\alpha b_4 \quad (5.3.13)$$

其中 $a_0, a_2, a_3, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

情况 7: $b_1 = -Ab_4, b_2 = \frac{-ia_2 - iCa_4 - C\sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}}, b_3 = -\frac{ia_3}{\sqrt{\alpha}}, a_1 = -Aa_4, l = i\sqrt{\alpha},$

$$\omega = i\sqrt{\alpha}a_0 + iB\sqrt{\alpha}a_4 + \alpha b_0 + B\alpha b_4 \quad (5.3.14)$$

其中 $a_0, a_2, a_3, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

将以上各解代入(5.3.6)和(5.3.7), 得到方程(5.3.4)和(5.3.5)的各种形式的解。

以情况 1 为例 (其他情况可以类似得出), 首先给出此种情况下方程的一般形式的解:

$$\begin{cases} u(\xi) = a_0 - Aa_4F(\xi) + a_2F(\xi)^{-1} + a_4F(\xi)^{-1}F'(\xi) \\ v(\xi) = b_0 - Ab_4F(\xi) - \frac{ia_2 + iCa_4 + C\sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}}F(\xi)^{-1} + b_4F(\xi)^{-1}F'(\xi) \end{cases} \quad (a)$$

将 A, B, C 及 $F(\xi)$ 代入(a)中, 则可求得如下 (2+1) 维 Burgers 方程的精确解:

(I) 由表4.1, 当 $A=0$, $B=1$, $C=-1$, 则: $F(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\frac{1}{2}\xi)$, 可得 (2+1)

维Burgers方程的类孤子解

$$\begin{cases} u_1(\xi) = a_0 + \frac{a_2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\frac{\xi}{2})} + \frac{a_4 \operatorname{sech}^2(\frac{\xi}{2})}{(2 + 2 \tanh(\frac{\xi}{2}))} \\ v_1(\xi) = b_0 - \frac{ia_2 - ia_4 - \sqrt{\alpha} b_4}{\sqrt{\alpha}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh(\frac{\xi}{2}))} + \frac{b_4 \operatorname{sech}^2(\frac{\xi}{2})}{(2 + 2 \tanh(\frac{\xi}{2}))} \end{cases} \quad (5.3.15)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = i\sqrt{\alpha}a_0 + i\sqrt{\alpha}a_4 + \alpha b_0 + \alpha b_4$, $l = i\sqrt{\alpha}$ 且 $a_0, a_2, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

(II) 由表4.1, 当 $A=0$, $B=-1$, $C=1$, 则 $F(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(\frac{1}{2}\xi)$, 可得 (2+1) 维 Burgers方程的类孤子解

$$\begin{cases} u_2(\xi) = a_0 + a_2 \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(\frac{\xi}{2})} + \frac{a_4 \csc h^2(\frac{\xi}{2})}{2 - 2 \coth(\frac{\xi}{2})} \\ v_2(\xi) = b_0 - \frac{ia_2 + ia_4 + \sqrt{\alpha} b_4}{\sqrt{\alpha}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth(\frac{\xi}{2}))} + \frac{b_4 \csc h^2(\frac{\xi}{2})}{2 - 2 \coth(\frac{\xi}{2})} \end{cases} \quad (5.3.16)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = i\sqrt{\alpha}a_0 + i\sqrt{\alpha}a_4 + \alpha b_0 + \alpha b_4$, $l = i\sqrt{\alpha}$ 且 $a_0, a_2, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

(III) 由表4.1, 当 $A = \frac{1}{2}$, $B=0$, $C = -\frac{1}{2}$, 则 $F(\xi) = \coth(\xi) \pm \csc h(\xi)$ 或

$\tanh(\xi) \pm i \sec h(\xi)$, 可得 (2+1) 维Burgers方程的类孤子解

$$\begin{cases} u_{3(1)}(\xi) = a_0 - \frac{1}{2} a_4 (\coth(\xi) + \csc h(\xi)) + \frac{a_2}{\coth(\xi) + \csc h(\xi)} + \frac{a_4 (-\coth(\xi) \csc h(\xi) - \csc h^2(\xi))}{\coth(\xi) + \csc h(\xi)} \\ v_{3(1)}(\xi) = b_0 - \frac{1}{2} b_4 (\coth(\xi) + \csc h(\xi)) - \frac{ia_2 - \frac{1}{2} ia_4 - \frac{1}{2} \sqrt{\alpha} b_4}{\sqrt{\alpha}(\coth(\xi) + \csc h(\xi))} + \frac{b_4 (-\coth(\xi) \csc h(\xi) - \csc h^2(\xi))}{\coth(\xi) + \csc h(\xi)} \end{cases} \quad (5.3.17)$$

$$\begin{cases} u_{3(2)}(\xi) = a_0 - \frac{1}{2} a_4 (\coth(\xi) - \csc h(\xi)) + \frac{a_2}{\coth(\xi) - \csc h(\xi)} + \frac{a_4 (\coth(\xi) \csc h(\xi) - \csc h^2(\xi))}{\coth(\xi) - \csc h(\xi)} \\ v_{3(2)}(\xi) = b_0 - \frac{1}{2} b_4 (\coth(\xi) - \csc h(\xi)) - \frac{ia_2 - \frac{1}{2} ia_4 - \frac{1}{2} \sqrt{\alpha} b_4}{\sqrt{\alpha}(\coth(\xi) - \csc h(\xi))} + \frac{b_4 (\coth(\xi) \csc h(\xi) - \csc h^2(\xi))}{\coth(\xi) - \csc h(\xi)} \end{cases} \quad (5.3.18)$$

$$\begin{cases} u_{3(3)}(\xi) = a_0 - \frac{1}{2}a_4(i\operatorname{sech}(\xi) + \tanh(\xi)) + \frac{a_2}{i\operatorname{sech}(\xi) + \tanh(\xi)} + \frac{a_4(\operatorname{sech}^2(\xi) - i\operatorname{sech}(\xi)\tanh(\xi))}{i\operatorname{sech}(\xi) + \tanh(\xi)} \\ v_{3(3)}(\xi) = b_0 - \frac{1}{2}b_4(i\operatorname{sech}(\xi) + \tanh(\xi)) - \frac{ia_2 - \frac{1}{2}ia_4 - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}(i\operatorname{sech}(\xi) + \tanh(\xi))} + \frac{b_4(\operatorname{sech}^2(\xi) - i\operatorname{sech}(\xi)\tanh(\xi))}{i\operatorname{sech}(\xi) + \tanh(\xi)} \end{cases} \quad (5.3.19)$$

$$\begin{cases} u_{3(4)}(\xi) = a_0 - \frac{1}{2}a_4(-i\operatorname{sech}(\xi) + \tanh(\xi)) + \frac{a_2}{-i\operatorname{sech}(\xi) + \tanh(\xi)} + \frac{a_4(\operatorname{sech}^2(\xi) + i\operatorname{sech}(\xi)\tanh(\xi))}{-i\operatorname{sech}(\xi) + \tanh(\xi)} \\ v_{3(4)}(\xi) = b_0 - \frac{1}{2}b_4(-i\operatorname{sech}(\xi) + \tanh(\xi)) - \frac{ia_2 - \frac{1}{2}ia_4 - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}(-i\operatorname{sech}(\xi) + \tanh(\xi))} + \frac{b_4(\operatorname{sech}^2(\xi) + i\operatorname{sech}(\xi)\tanh(\xi))}{-i\operatorname{sech}(\xi) + \tanh(\xi)} \end{cases} \quad (5.3.20)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = i\sqrt{\alpha}a_0 + \alpha b_0$, $l = i\sqrt{\alpha}$ 且 $a_0, a_2, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

(IV) 由表4.1, 当 $A=1, B=0, C=-1$, 则 $F(\xi) = \tanh(\xi)$ 或 $\coth(\xi)$, 可得 (2+1) 维 Burgers 方程的类孤子解

$$\begin{cases} u_{4(1)}(\xi) = a_0 - a_4 \tanh(\xi) + a_2 \coth(\xi) + a_4 \operatorname{csc} h(\xi) \operatorname{sech}(\xi) \\ v_{4(1)}(\xi) = b_0 - b_4 \tanh(\xi) - \frac{ia_2 - ia_4 - \sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}} \coth(\xi) + b_4 \operatorname{csc} h(\xi) \operatorname{sech}(\xi) \end{cases} \quad (5.3.21)$$

$$\begin{cases} u_{4(2)}(\xi) = a_0 - a_4 \coth(\xi) + a_2 \tanh(\xi) - a_4 \operatorname{csc} h(\xi) \operatorname{sech}(\xi) \\ v_{4(2)}(\xi) = b_0 - b_4 \coth(\xi) - \frac{ia_2 - ia_4 - \sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}} \tanh(\xi) - b_4 \operatorname{csc} h(\xi) \operatorname{sech}(\xi) \end{cases} \quad (5.3.22)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = i\sqrt{\alpha}a_0 + \alpha b_0$, $l = i\sqrt{\alpha}$ 且 $a_0, a_2, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

(V) 由表4.1, 当 $A = \frac{1}{2}, B=0, C = \frac{1}{2}$, 则 $F(\xi) = \sec(\xi) + \tan(\xi)$ 或 $\csc(\xi) - \cot(\xi)$, 可得 (2+1) 维 Burgers 方程的三角函数解

$$\begin{cases} u_{5(1)}(\xi) = a_0 - \frac{1}{2}a_4(\sec(\xi) + \tan(\xi)) + \frac{a_2}{\sec(\xi) + \tan(\xi)} + \frac{a_4(\sec^2(\xi) + \sec(\xi)\tan(\xi))}{(\sec(\xi) + \tan(\xi))} \\ v_{5(1)}(\xi) = b_0 - \frac{1}{2}b_4(\sec(\xi) + \tan(\xi)) - \frac{ia_2 + \frac{1}{2}ia_4 + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}(\sec(\xi) + \tan(\xi))} + \frac{b_4(\sec^2(\xi) + \sec(\xi)\tan(\xi))}{(\sec(\xi) + \tan(\xi))} \end{cases} \quad (5.3.23)$$

$$\begin{cases} u_{5(2)}(\xi) = a_0 - \frac{1}{2}a_4(\csc(\xi) - \cot(\xi)) + \frac{a_2}{\csc(\xi) - \cot(\xi)} + \frac{a_4(\csc^2(\xi) - \cot(\xi)\csc(\xi))}{\csc(\xi) - \cot(\xi)} \\ v_{5(2)}(\xi) = b_0 - \frac{1}{2}b_4(\csc(\xi) - \cot(\xi)) - \frac{ia_2 + \frac{1}{2}ia_4 + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}(\csc(\xi) - \cot(\xi))} + \frac{b_4(\csc^2(\xi) - \cot(\xi)\csc(\xi))}{\csc(\xi) - \cot(\xi)} \end{cases} \quad (5.3.24)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = i\sqrt{\alpha}a_0 + \alpha b_0$, $l = i\sqrt{\alpha}$ 且 $a_0, a_2, a_4, b_0, b_4, k$ 为

任意常数。

(VI) 由表 4.1, 当 $A = -\frac{1}{2}$, $B=0$, $C = -\frac{1}{2}$, 则 $F(\xi) = \sec(\xi) - \tan(\xi)$ 或 $\csc(\xi) + \cot(\xi)$, 可得 (2+1) 维 Burgers 方程的三角函数解

$$\begin{cases} u_{6(1)}(\xi) = a_0 + \frac{1}{2}a_4(\sec(\xi) - \tan(\xi)) + \frac{a_2}{\sec(\xi) - \tan(\xi)} + \frac{a_4(-\sec^2(\xi) + \sec(\xi)\tan(\xi))}{\sec(\xi) - \tan(\xi)} \\ v_{6(1)}(\xi) = b_0 + \frac{1}{2}b_4(\sec(\xi) - \tan(\xi)) - \frac{ia_2 - \frac{1}{2}ia_4 - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}(\sec(\xi) - \tan(\xi))} + \frac{b_4(-\sec^2(\xi) + \sec(\xi)\tan(\xi))}{\sec(\xi) - \tan(\xi)} \end{cases} \quad (5.3.25)$$

$$\begin{cases} u_{6(2)}(\xi) = a_0 + \frac{1}{2}a_4(\csc(\xi) + \cot(\xi)) + \frac{a_2}{\csc(\xi) + \cot(\xi)} + \frac{a_4(-\csc^2(\xi) - \csc(\xi)\cot(\xi))}{\csc(\xi) + \cot(\xi)} \\ v_{6(2)}(\xi) = b_0 + \frac{1}{2}b_4(\csc(\xi) + \cot(\xi)) - \frac{ia_2 - \frac{1}{2}ia_4 - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}(\csc(\xi) + \cot(\xi))} + \frac{b_4(-\csc^2(\xi) - \csc(\xi)\cot(\xi))}{\csc(\xi) + \cot(\xi)} \end{cases} \quad (5.3.26)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = i\sqrt{\alpha}a_0 + \alpha b_0$, $l = i\sqrt{\alpha}$ 且 $a_0, a_2, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

(VII) 由表 4.1, 当 $A = 1(-1)$, $B=0$, $C = 1(-1)$, 则 $F(\xi) = \tan(\xi)$ 或 $\cot(\xi)$, 可得 (2+1) 维 Burgers 方程的三角函数解

$$\begin{cases} u_{7(1)}(\xi) = a_0 - a_4 \tan(\xi) + a_2 \cot(\xi) + a_4 \csc(\xi) \sec(\xi) \\ v_{7(1)}(\xi) = b_0 - b_4 \tan(\xi) - \frac{ia_2 + ia_4 + \sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}} \cot(\xi) + b_4 \csc(\xi) \sec(\xi) \end{cases} \quad (5.3.27)$$

$$\begin{cases} u_{7(2)}(\xi) = a_0 - a_4 \cot(\xi) + a_2 \tan(\xi) - a_4 \csc(\xi) \sec(\xi) \\ v_{7(2)}(\xi) = b_0 - b_4 \cot(\xi) - \frac{ia_2 + ia_4 + \sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}} \tan(\xi) - b_4 \csc(\xi) \sec(\xi) \end{cases} \quad (5.3.28)$$

$$\begin{cases} u_{7(3)}(\xi) = a_0 + a_4 \tan(\xi) + a_2 \cot(\xi) + a_4 \csc(\xi) \sec(\xi) \\ v_{7(3)}(\xi) = b_0 + b_4 \tan(\xi) - \frac{ia_2 - ia_4 - \sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}} \cot(\xi) + b_4 \csc(\xi) \sec(\xi) \end{cases} \quad (5.3.29)$$

$$\begin{cases} u_{7(4)}(\xi) = a_0 + a_4 \cot(\xi) + a_2 \tan(\xi) - a_4 \csc(\xi) \sec(\xi) \\ v_{7(4)}(\xi) = b_0 + b_4 \cot(\xi) - \frac{ia_2 - ia_4 - \sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}} \tan(\xi) - b_4 \csc(\xi) \sec(\xi) \end{cases} \quad (5.3.30)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = i\sqrt{\alpha}a_0 + \alpha b_0$, $l = i\sqrt{\alpha}$ 且 $a_0, a_2, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

(VIII) 由表 4.1, 当 A 为任意常数, $B=0$, $C=0$, 则 $F(\xi) = A\xi$, 可得 (2+1) 维 Burgers 方程的有理函数解

$$\begin{cases} u_8(\xi) = a_0 - A^2 a_4 \xi + \frac{a_2 + a_4}{A\xi} \\ v_8(\xi) = b_0 - A^2 b_4 \xi - \frac{ia_2}{\sqrt{\alpha} A\xi} + \frac{b_4}{A\xi} \end{cases} \quad (5.3.31)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = i\sqrt{\alpha}a_0 + \alpha b_0$, $l = i\sqrt{\alpha}$ 且 $a_0, a_2, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

(IX) 由表 4.1, 当 $A=0, B=0$, 则 $F(\xi) = \frac{-1}{C^*\xi + m}$ (m 为任意常数), 可得 (2+1)

维 Burgers 方程的有理函数解

$$\begin{cases} u_9(\xi) = a_0 - a_2(C^*\xi + m) + \frac{C^*(-m - C^*\xi)a_4}{(C^*\xi + m)^2} \\ v_9(\xi) = b_0 - \frac{ia_2 + iCa_4 + C\sqrt{\alpha}b_4}{\sqrt{\alpha}}(C^*\xi + m) + \frac{C^*(-m - C^*\xi)b_4}{(C^*\xi + m)^2} \end{cases} \quad (5.3.32)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = i\sqrt{\alpha}a_0 + \alpha b_0$, $l = i\sqrt{\alpha}$ 且 $a_0, a_2, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

(X) 由表 4.1, 当 A 为任意常数, $B \neq 0, C=0$, 则 $F(\xi) = \frac{\exp(B\xi) - A}{B}$, 可得 (2+1)

维 Burgers 方程的指数函数解

$$\begin{cases} u_{10}(\xi) = a_0 - \frac{(-A + e^{B\xi})Aa_4}{B} + \frac{Ba_2}{-A + e^{B\xi}} + \frac{Be^{B\xi}a_4}{-A + e^{B\xi}} \\ v_{10}(\xi) = b_0 - \frac{(-A + e^{B\xi})Ab_4}{B} - \frac{iBa_2}{\sqrt{\alpha}(-A + e^{B\xi})} + \frac{Be^{B\xi}a_4}{-A + e^{B\xi}} \end{cases} \quad (5.3.33)$$

其中 $\xi = k(x + ly + \omega t)$, $\omega = i\sqrt{\alpha}a_0 + iB\sqrt{\alpha}a_4 + \alpha b_0 + B\alpha b_4$, $l = i\sqrt{\alpha}$ 且 $a_0, a_2, a_4, b_0, b_4, k$ 为任意常数。

第六章 结束语

本文利用改进的辅助方程方法求解了Klein-Gordon方程, 得到其精确解。从文中的求解过程可以看出, 改进的辅助方程方法在非线性偏微分求解中有旺盛的生命力。但更重要的是可以看出, 用改进的辅助方程方法求得的精确解有时候可以与用其他方法求得的一些结果进行相互的比较和补充, 这或许对用不同的方法结合去研究非线性偏微分方程进而得到其新的有意义精确解有一定的启发意义。

本文在齐次平衡原则的基础上, 充分利用F-展开法和Riccati方程在非线性偏微分方程求解中的优良特性, 提出了一种广义改进的F-展开法。此方法不像原有的F-展开法以得到Jacobi椭圆函数解为出发点, 而是把直接得到物理意义深刻的类孤子解和三角函数解等作为出发点, 并从解的形式方面对改进的F-展开法做了更进一步的扩展。所以, 可以更加直接的研究一些孤子方程, 而且改进的方法利用Riccati方程代替了传统F-展开法中的一阶常微分方程, 使得方法的应用范围更加的广阔。文中首先利用改进的方法求解了(2+1)维broer-Kaup方程, 然后使用广义改进的F-展开法求解了Kdv-mKdv方程和(2+1)维Burgers方程, 都得到了他们丰富类型的精确解, 其中不乏一些用其他方法没有得到的新的精确解, 这些解对于以后对这些方程的研究都会有一些积极的意义。

非线性偏微分方程是非线性科学的一个重要研究方向, 它广泛的存在于物理学各相关领域, 具有较深的物理学背景。许多经济、工程、电子、流体、物理的方面的问题都可以转化为对非线性偏微分方程的研究, 在社会生活中日益显示出其重要性。非线性偏微分方程已成为应用数学和数学物理的一个重要研究部分, 在流体力学, 等离子物理, 经典场论, 量子论等领域有着广泛的应用, 因而受到物理学界和数学界的充分重视。随着科学的发展, 对该领域的研究将成为非线性科学研究的前沿问题。

参考文献

- [1] 陈陆君, 梁昌洪. 孤立子理论及其应用, 西安电子科技大学出版社, 1997
- [2] 倪皖荪, 魏荣爵. 水槽中的孤波, 上海科技教育出版社, 1997
- [3] 李翊神. 孤子与可积系统, 上海科技教育出版社, 1999
- [4] 谷超豪等. 孤立子理论与应用, 浙江科学技术出版社, 1990
- [5] 郭柏灵, 苏凤秋. 孤立子, 辽宁教育出版社, 1998.
- [6] 黄景宁, 徐济仲, 熊吟涛. 孤子概念、原理和应用, 高等教育出版社, 2004.
- [7] 刘式达, 刘式适. 孤波和湍流, 上海科技教育出版社, 1994.
- [8] Ablowitz M J, Clarkson P A. 孤立子、非线性发展方程和逆散射, 世界图书出版公司北京公司, 2000.
- [9] 刘正荣. 关于孤立子的研究. 云南大学学报, 2003; 25: 207-211.
- [10] Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons, Nonlinear evolution equations and inverse scattering. London : Cambridge University Press, 1991.
- [11] 田畴. 李群及其在微分方程中的应用. 科学出版社, 2001.
- [12] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. Phys. Rev. Lett, 1967; 19: 1095-1097.
- [13] Lax P D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Commun. Pure. Appl. Math, 1968; 21: 467-490.
- [14] Zakharov V E, Shabat A B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional of waves in nonlinear media. Sov. Phys. JETP, 1972; 34: 62-69.
- [15] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, Segur H. Methods for solving the sine-Gordon equation., Phys. Rev. Lett. 1973, 30: 1262-1264
- [16] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, Segur H. Nonlinear evolution equations of physical significance. Phys. Rev. Lett. 1974, 31: 125-127
- [17] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C, Segur H. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. Stud. in. Appl. Math, 1974; 53: 249-315
- [18] Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solutions. Phys. Rev. Lett. 1971, 27: 1192-1194
- [19] Hirota R. Direct method of finding exact solution of nonlinear evolution equations, in "Bäcklund transformation". Edited by Miura R M. Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin. 1976: 515
- [20] Fan E G. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations. Phys Lett A, 2000; 277: 212-218.
- [21] Abdusalam H A. On an improved complex tanh-function method. Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2005; 6 (2): 99-106.

- [22] Yan CT. A simple transformation for nonlinear waves. *Phys Lett A*, 1996; 224:77 – 84.
- [23] 付遵涛,刘式适,刘式达.非线性波方程求解的新方法. *物理学报*, 2004, 53(2): 343-348.
- [24] Chen Y, Li B. General projective Riccati equation method and exact solutions for generalized KdV-type and KdV-Bergers-type equations with nonlinear terms of any order. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004; 19(4): 977 - 984.
- [25] Chen Y, Wang Q. Multiple Riccati equations rational expansion method and complexion solutions of the Whitham-Broer-Kaup equation., *Phys Lett A*, 2005; 347 :215-227.
- [26] Zhou YB, Wang ML, Wang YM. Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients. *Phys Lett A*, 2003; 308:31 – 36.
- [27] Liu JB, Yang KQ. The extended F-expansion method and exact solutions of nonlinear PDEs[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004; 22(1) :111–121.
- [28] Wang DS, Zhang HQ. Further improved F-expansion method and new exact solutions of Konopelchenko-Dubrovsky equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005; 25 :601-610.
- [29] Yomba E. The extended F-expansion method and its application for solving the nonlinear wave, CKGZ, GDS, DS and GZ equations. *Phys Lett A*, 2005; 340:149-160.
- [30] Kartik C B, Pratap C R, Rasajit K B. Solutions of non-linear Klein-Gordon equation with a quadratic non-linear term by Adomian decomposition method. *Comm. Non. Sci. Num Simu*, 2009; 14:718-723.
- [31] Fábio M .A N, Ademir P F. Stability and instability of periodic standing wave solutions for some Klein-Gordon equations. *J. Math. Anal. Appl*, 2008; 347:428-441.
- [32] Han H D, Zhang Z W. Split local absorbing conditions for one-dimensional nonlinear Klein-Gordon equation on unbounded domain. *J. Comp. Phys*, 2008; 227:8992-9004.
- [33] Yang C D. On the existence of complex spacetime in relativistic quantum mechanics. *Chaos, Soliton and Fractals*, 2008; 38: 316-331.
- [34] Dmitriev S V. Discrete systems free of the Peierls-Nabarro potential. *Non-Crystalline Solids*, 2008; 354: 4121-4125.
- [35] Wang S S, Zhang L M. A class of conservative orthogonal spline collocation schemes for solving coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations. *Appl. Math. Comp*, 2008; 203: 799-812.
- [36] Konoplya R A. Superradiant instability for black holes immersed in a magnetic field. *Phys Lett B*, 2008; 666: 283-287.
- [37] Anjan B, Chenwi Z, Essaid Z. Soliton perturbation theory for the quadratic nonlinear Klein-Gordon equation. *Appl. Math. Comp*, 2008; 203: 153-156.
- [38] Parkes E J, Duffy B R, Abbott P C. The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations. *Phys Lett A*, 2002; 295: 280-286.
- [39] Sirendaoreji. A new auxiliary equation and exact traveling wave solutions of nonlinear equations. *Phys Lett A*, 2006; 356: 124-130.

- [40] Liu Q, Zhu J M, Hong B H. A modified variable-coefficient projective Riccati equation method and its application to (2+1)-dimensional simplified generalized Broer-Kaup system. *Chaos, Soliton and Fractals*, 2008; 37: 1383-1390.
- [41] Lu D C, Hong B J. New exact solutions for the (2+1)-dimensional generalized Broer-Kaup system. *Appl. Math. Comp*, 2008; 199: 572-580.
- [42] Liu Q. Uniformly constructing a series of exact solutions for (2+1)-dimensional stochastic Broer-Kaup system. *Chaos, Soliton and Fractals*, 2008; 36: 1037-1043.
- [43] Zhu J M, Ma Z Y. New exact solutions to the (2+1)-dimensional Broer-Kaup equation. *Chaos, Soliton and Fractals*, 2007; 34: 476-481.
- [44] Hu Y H, Ma Z Y. Quasi-periodic and non-periodic waves in the (2+1)-dimensional generalized Broer-Kaup system. *Chaos, Soliton and Fractals*, 2007; 34: 482-489.
- [45] Huang D J, Zhang H Q. New exact travelling waves solutions to the combined Kdv-mKdv and generalized Zakharov equation. *Report on Math Phys*, 2006; 57: 257-269.
- [46] Wang S D, Li H B, Wang J. The novel solutions of auxiliary equation and their application to the (2+1)-dimensional Burgers equations. *Chaos, Soliton and Fractals*, 2008; 38: 374-382.
- [47] Wang S D, Li H B. Symbolic computation and non-travelling wave solutions of (2+1)-dimensional nonlinear evolution equations. *Chaos, Soliton and Fractals*, 2008; 38: 383-390.
- [48] Wang B D, Song L N, Zhang H Q. A new extended elliptic equation rational expansion method and its application to the (2+1)-dimensional Burgers equations. *Chaos, Soliton and Fractals*, 2007; 33: 1546-1551.
- [49] Zhi H Y, Zhang H Q. New rational solitary wave solutions of (2+1)-dimensional Burgers equation. *Nonlinear Analysis*, 2007; 66: 2264-2273.
- [50] Wang Q, Song L N, Zhang H Q. A new coupled sub-equations expansion method and novel complexiton solutions of (2+1)-dimensional Burgers equation. *Appl. Math. Comp*, 2007; 186: 632-637.

读研期间发表的论文

- [1] A generalized modified F-expansion method for solving kdv-mkdv equation,
Proceedings of 2008 International Pre-Olympic Congress on Computer Science.
2008.8
(国际会议论文集)
- [2] New exact traveling wave solutions of the (2+1)-dimensional Burgers equations,
International Journal of Nonlinear Science, 2008.6 (2) (UK)
(国外期刊)
(本文获江苏大学研究生科技论文大赛三等奖)
- [3] A modified F-expansion method for solving Broer-Kaup equations, 高校应用数
学学报 (英文版), (审稿中)

致 谢

在本论文顺利完成之际，作者衷心地向那些在论文完成过程中支持、帮助、鼓励过我的人表达我的感激之情。

首先，我谨向我的导师蔡国梁教授表示衷心的感谢。导师渊博的知识、务实的工作作风、严谨的治学态度，对科学真理的孜孜不倦的追求，使我在求学期间获益匪浅。再次衷心的感谢导师三年来悉心的指导、无微不至的关怀和帮助！

衷心感谢我的师兄师姐们给了我热情的指导和帮助。感谢我的同门郑松，李丹对我的真诚帮助。感谢我的同窗们和我所作的多次有益的讨论。

最后，衷心感谢我的家人和朋友在我攻读硕士研究生期间给予我的无微不至的关怀与支持。