

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com



高等教育学习辅导丛书

自动控制理论自学同步训练习题与精解

杨京燕 主编

GAODENGJIAOYU XUEXI BUDAO
CONGSHU

中国电力出版社

高等教育学习辅导丛书

自动控制理论

自学同步训练习题与精解

杨京燕 主编

中国电力出版社

目 录

前言

第 1 章 概 论	1
1.1 内容提示	1
1.2 习题讲解	3
1.3 同步练习	4
1.4 参考答案	5
第 2 章 自动控制系统的数学模型	7
2.1 内容提示	7
2.2 习题讲解	16
2.3 同步练习	28
2.4 参考答案	30
第 3 章 时域分析法	32
3.1 内容提示	32
3.2 习题讲解	39
3.3 同步练习	45
3.4 参考答案	48
第 4 章 频域分析法	50
4.1 内容提示	50
4.2 习题讲解	58
4.3 同步练习	65
4.4 参考答案	67
第 5 章 稳定性分析	69
5.1 内容提示	69
5.2 习题讲解	72
5.3 同步练习	82
5.4 参考答案	85
第 6 章 根轨迹法	87
6.1 内容提示	87
6.2 习题讲解	90
6.3 同步练习	98
6.4 参考答案	100

第 7 章 自动控制系统的的设计和校正	104
7.1 内容提示	104
7.2 习题讲解	108
7.3 同步练习	115
7.4 参考答案	118
第 8 章 状态空间分析法	121
8.1 内容提示	121
8.2 习题讲解	129
8.3 同步练习	138
8.4 参考答案	139
第 9 章 基于 MATLAB 的自动控制系统实验	142
9.1 受控对象动态特性实验	142
9.2 典型环节的动态特性实验	145
9.3 环节或受控对象的频率特性实验	150
9.4 控制系统根轨迹图绘制实验	152
9.5 控制系统的分析和校正实验	154
9.6 实验说明	161
附录 模拟试卷 (一)	173
模拟试卷 (二)	177

第 1 章 概 论

- ☆ 控制系统中常用术语
- ☆ 控制系统组成及分类
- ☆ 负反馈控制系统的基本原理
- ☆ 对控制系统的基本要求

1.1 内 容 提 示

一、自动控制和自动控制系统的概念

自动控制：应用控制装置自动地、有目的地控制或调节机器设备或生产过程，使其具有希望的状态或功能。

自动控制系统：能够实现自动控制任务的、由控制器和被控对象等部件组成的系统。

参考（给定）输入量：作用于系统输入端，并作为控制依据的物理量。

输出量（被控量）：要求实现自动控制的物理量。

控制对象：要求实现自动控制的机器设备或生产过程。

扰动量：破坏系统输入、输出之间预定关系的物理量。

控制器：对系统起控制作用的设备总体。

二、自动控制系统的分类及基本组成

（一）按自动控制系统结构分类

开环控制系统：输出量不参与系统的控制，即输出量（被控量）与输入量之间不存在反馈通道的系统。

（1）按给定值控制。见图 1-1（a），信号由给定值向输出量单向传送。

（2）前馈控制系统。见图 1-1（b），直接根据扰动信号进行调节，可以补偿某些可测

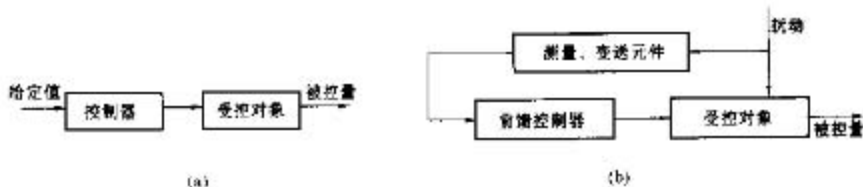


图 1-1 开环控制系统典型方框图

（a）按给定信号控制的方框图；（b）前馈控制系统的方框图

扰动对系统输出量的影响，注意到输出量并不参与系统的控制，所以仍属于开环控制系统。

(3) 开环控制系统的特点：结构简单易实现，但没有自动补偿各种扰动及特性参数变化对系统输出量影响的能力，即使前馈控制系统对不可测扰动也无能为力，用于控制精度不高的场合。

闭环控制系统：又称反馈控制系统。输出量直接或间接地反送到输入端，参与系统控制，即输出量（被控量）与输入量之间存在反馈通道的系统。图 1-2 为闭环控制系统方框图。



图 1-2 闭环控制系统方框图

(1) 判断一个系统是否是闭环控制系统应掌握一个要素：取得偏差、改造偏差、按偏差进行反馈调节。

取得偏差：参考输入信号与反馈信号比较得到偏差信号，由测量变送器组成的反馈元件和比较元件（用“ \otimes ”表示）共同完成。反馈信号是被控量的函数，注意进行比较的信号必须有相同的量纲。

改造偏差：由控制器完成，将偏差信号改造成具有合适的控制规律和足够的功率的控制量，作用于受控对象。

按偏差进行反馈调节：当受控对象受到各种扰动引起被控量变化时，测出偏差量，按偏差进行控制和调节，直到偏差量接近于或等于零为止。

(2) 闭环控制系统的特点。可以按偏差自动调节，抗干扰性能好，控制精度高。系统参数应选择适当，否则不能正常工作。

前馈—反馈复合控制系统：在反馈控制系统的基础上，增加了对扰动信号的前馈补偿通路，属于闭环控制和前馈控制方式的组合。前馈补偿通路可及时消除扰动的影响，包括低频强扰动，反馈回路可保证控制精度。

(二) 其他分类方式

其他分类方式如表 1-1 所示。

表 1-1 其他分类方式归类表

分类方式	系统名称	主要特点
按给定值信号的特点分类	恒值系统	输入量为常值，要求出现扰动时，被控量等于给定常值
	随动系统	输入量随时间任意变化，要求被控量跟踪输入量变化
	程序控制系统	输入量为已知函数，要求被控量按此函数变化

续表

分类方式	系统名称	主要特点
按系统元件的特性分类	线性控制系统	各元件的输入、输出特性为线性, 可用线性微分方程描述的系统, 线性系统服从于叠加原理
	非线性控制系统	一个或以上为非线性元件的系统, 用非线性微分方程描述, 不服从叠加原理
按控制信号的形式分类	连续控制系统	各物理量是时间的连续函数
	离散控制系统	在时间上离散的系统

三、对自动控制系统的性能要求

稳定性: 系统能够工作的首要条件。

快速性: 指系统的响应速度应尽可能快。

准确性: 指过渡过程结束后, 被控量应尽可能准确地达到希望值。

总之, 系统应能达到稳、快、准的要求, 实际上它们相互之间会产生矛盾, 因此要研究怎样兼顾这三方面的性能, 以满足实际系统的需求。

1.2 习题讲解

1.1 解释下列名词术语: 自动控制系统、受控对象、扰动、给定值、参考输入、反馈。

解 自动控制系统——受控对象和控制装置的总体。

受控对象——要求实现自动控制的机器、设备和生产过程。

扰动——除给定值之外, 引起被控制量变化的各种外界原因。

给定值(参考输入)——作用于控制系统输入端, 并作为控制依据的物理量。

反馈——将输出量直接或间接的反送至输入端, 并与输入量比较, 使系统按其差值进行调节, 使偏差减小或消除。

1.2 开环控制系统和闭环控制系统有什么优缺点?

解 开环控制系统结构简单易实现, 响应速度快, 没有稳定问题, 但不能自动纠正或减小各种扰动引起的输入量与被控制量间的偏差, 只能根据给定值或可以测量到的扰动量进行补偿。

闭环控制系统利用反馈原理可自动纠正或减小输出量与被控制量间的偏差, 抗干扰能力强, 可用较低廉的元件构成精度较高的控制系统, 但闭环控制系统所面临的研究课题较开环控制系统复杂, 例如调节的稳定性问题、响应速度以及控制精度等问题。

1.3 什么是反馈控制系统、前馈控制系统、前馈—反馈复合控制系统?

解 反馈控制系统是基于反馈原理构成的闭环系统。

前馈控制系统是一种按干扰进行补偿的开环控制系统, (测量的值是干扰量), 用于抑制可测量的干扰对系统的影响。

前馈—反馈复合控制系统是在闭环反馈控制系统的基础上增加了对扰动进行补偿的前馈控制部分, 同时按给定值和主要干扰进行控制, 兼有开环控制和闭环控制两者的优点。

1-4 反馈控制系统的动态过程(动态特性)由哪几种类型? 生产过程希望的动态特性是什么?

解 反馈控制系统对阶跃响应的动态过程有:

- (1) 单调指数上升过程。无振荡但响应速度较慢。
- (2) 正弦衰减振荡过程。有振荡但响应速度较单调指数上升过程快, 合理地选择系统参数, 可使其具有适宜的超调量和较快的响应速度, 是生产过程常希望的动态特性。
- (3) 等幅振荡过程。幅值不衰减的正弦振荡过程, 此时系统工作在稳定与不稳定的边界。
- (4) 渐扩振荡过程。随着时间的推移, 输出幅值越来越大的振荡过程, 此时系统工作在不稳定状态。

1-5 举出几个生产过程自动控制系统常遇到的非线性元件, 并说明是什么类型的非线性元件。

解 带死区(不灵敏区)的元件, 带饱和特性的元件, 带继电器特性的元件, 变放大系数的元件, 带间隙特性的元件等。

1-6 对自动控制系统基本的性能要求是什么?

解 对自动控制系统基本的性能要求是:

稳定性。首要条件。

快速性。动态过程的要求, 超调量要小, 响应速度要快。

准确性。稳态要求, 稳态误差要小。

1.3 同步练习

一、名词解释

1. 自动控制
2. 自动控制系统
3. 开环控制系统
4. 闭环控制系统
5. 前馈—反馈控制系统

二、多项选择题

1. 开环控制系统的输出

1. 闭环控制系统的输出
- A. 参与系统的反馈调节 B. 不参与系统的反馈调节
C. 到输入有反馈通路 D. 到输入无反馈通路
2. 前馈控制系统是
- A. 闭环控制系统 B. 开环控制系统
C. 按扰动信号进行补偿的系统 D. 能抑制不可测量的扰动的系统

三、填空题

1. 常规控制器由 _____ 元件、_____ 元件、_____ 元件和 _____ 元件组成。
2. 对自动控制系统基本性能的要求是 _____ 性、_____ 性和 _____ 性。

四、问答题

1. 开环控制系统和闭环控制系统的本质区别是什么？
2. 自动控制系统一般有多少种分类方式？

五、应用题

根据图 1-3 所示的电动机速度控制系统工作原理图：

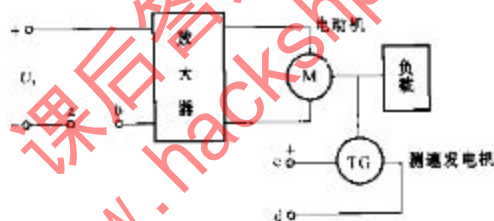


图 1-3 电动机速度控制系统工作原理图

- (1) 将 a、b、c、d 用连线接成负反馈控制系统；
- (2) 画出系统方框图。

1.4 参 考 答 案

一、名词解释

1. 自动控制——应用自动控制装置自动的、有目的地控制或调节机器设备或生产过程，使之按照期望的性能指标运行。
2. 自动控制系统——完成自动控制任务的所需部件按一定方式连接构成的系统。
3. 开环控制系统——系统控制器的输入信号中不包含受控对象输出端的反馈信号的系统。
4. 闭环控制系统——系统控制器的输入信号中包含受控对象输出端的反馈信号的系统。

5. 前馈—反馈控制系统——在闭环控制系统的基础上加入对主扰动补偿环节的系统。

【评注】 理解常用名词术语的含义, 正确叙述即可, 不必死记硬背。

二、多项选择题

1. B、D 2. A、C 3. A、C

三、填空题

1. 定值 比较 放大 反馈

2. 稳定 快速 准确

四、问答题

1. 开环控制系统和闭环控制系统的本质区别是输出量是否参与控制, 从输出端到输入端有无反馈通路。

2. 自动控制系统一般按结构分为开环控制系统和闭环控制系统; 按给定输入信号分为恒值系统、随动系统和程序控制系统; 按元件的性质分为线性控制系统和非线性控制系统; 按控制信号的形式分为连续控制系统和离散控制系统。

五、应用题

(1) 将 a、b、c、d 用连线连接成负反馈控制系统, 如图 1-4 所示。

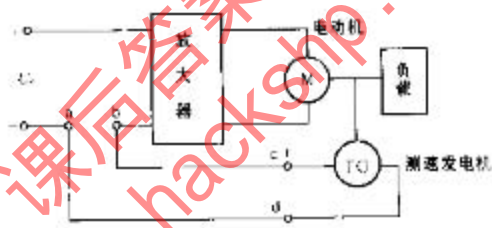


图 1-4 电动机速度负反馈控制系统图

(2) 画出系统方框图如图 1-5 所示。



图 1-5 电动机速度控制系统方框图

第 2 章 自动控制系统的数学模型

- ☆ 拉氏变换
- ☆ 传递函数
- ☆ 方框图等效转换
- ☆ 信号流图及 Mason 公式
- ☆ 基本控制作用

2.1 内 容 提 示

数学模型: 自动控制系统输入、输出及内部各物理量之间动态关系的数学表达式。

常用数学模型: 解析式形式的数学模型有微分方程、差分方程、传递函数、状态方程; 常见图形方式的数学模型有方框图、信号流图、频率特性。

建立数学模型的目的: 用于分析系统的性能, 不同的分析方法应采用不同的数学模型, 同一系统可用不同的数学模型表示。

一、微分方程、拉氏变换和传递函数

(一) 系统微分方程的建立步骤

- (1) 确定系统各元件的输入量和输出量。
- (2) 根据元件所遵循的定律, 列写原始方程式。注意考虑负载效应。系统微分方程在一定条件下可适当进行简化, 略去某些次要因素。
- (3) 消去中间变量, 得到描述系统输入、输出关系的微分方程式。

(二) 拉氏变换

拉氏变换的作用: 将微分方程经拉氏变换变为以 s 为变量的代数方程, 简化了运算, 是经典控制理论最重要的数学工具。

拉氏变换的定义、性质和定理: 已知原函数 $x(t)$, 求象函数 $X(s)$ 的拉氏正变换, 关系式为 $X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$, 其逆运算称为拉氏反变换, 关系式为 $x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} X(s)e^{st} ds$, 简记为 $x(t) = L^{-1}[X(s)]$ 。

拉氏变换的性质和定理列于表 2-1, 常用函数的拉氏变换列于表 2-2。

表 2-1 拉氏变换的性质和定理

定 理	表 达 式	说 明
线性性质	$L[ax_1(t) + bx_2(t)] = aX_1(s) + bX_2(s)$	其中 a, b 为常数

续表

定 理	表 达 式	说 明
微分定理	$L[x^{(n)}(t)] = s^n X(s) - [s^{n-1}x(0) + s^{n-2}x'(0) + \dots + x^{(n-1)}(0)]$	当 $n-1$ 个初值为零时, 中括号部分等于零
积分定理	$L\left[\int_0^t \dots \int_0^{\tau} x(t) dt^n\right] = \frac{1}{s^n} X(s) + \left[\frac{1}{s^{n-1}}x(0) + \dots + \frac{1}{s}x^{(n-1)}(0)\right]$	当多重初值积分为零时, 中括号部分等于零
终值定理	$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$	常用于求系统的稳态误差
初值定理	$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$	
延迟定理	$L[x(t-\tau)] = e^{-s\tau}X(s)$	

表 2-2 拉普拉斯变换对照表

序 号	$x(t)$	$X(s)$
1	单位脉冲 $\delta(t)$	1
2	单位阶跃 $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	单位斜坡 t	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8	$t^n (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-bt} - ae^{-at})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

续表

序号	$x(t)$	$X(s)$
15	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
16	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t)$	$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$
17	$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \lg^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$
18	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \lg^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)}$

用拉氏变换和拉氏反变换求解微分方程的步骤:

(1) 对微分方程进行拉氏变换(常用拉氏变换的线性性质和微分定理), 得到以 s 为变量的代数方程, 方程中的初值设为零。

(2) 整理以 s 为变量的代数方程, 得到系统输出变量的表达式。

(3) 将系统输出变量的表达式展开成部分分式。

(4) 对部分分式进行拉氏反变换(可查拉氏变换表), 即可得微分方程的解。掌握拉氏反变换的部分分式展开法才能实施步骤(3)、(4)。

拉氏反变换的部分分式展开法: 设系统输出变量的表达式为 $X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$, 对分母进行因式分解, 若 $A(s) = 0$ 无重根, 则

$$X(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i} \quad (2-1)$$

其中

$$A_i = \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s + p_i) \right]_{s = -p_i} \quad (2-2)$$

式(2-1)经拉氏反变换得

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-p_i t}$$

若 $A(s) = 0$ 有 r 个重根 p_1 ($r \geq 2$), 则

$$\begin{aligned} X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} &= \frac{A_r}{(s + p_1)^r} + \frac{A_{r-1}}{(s + p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(s + p_1)} + \frac{A_{r+1}}{(s + p_{r+1})} \\ &+ \cdots + \frac{A_n}{(s + p_n)} \end{aligned} \quad (2-3)$$

其中待定常数 $A_{r+1}, A_{r-2}, \dots, A_n$ 为对应单根的系数, 按式(2-2)计算, 而 A_r, A_{r-1}, \dots, A_1 按式(2-4)计算

$$A_{r-j} = \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{ds^j} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s + p_1)^r \right] \right\}_{s = -p_1} \quad (2-4)$$

式(2-4)经拉氏反变换得

$$x(t) = \left[\frac{A_r}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{A_{r-1}}{(r-2)!} t^{r-2} + \cdots + A_2 t + A_1 \right] e^{-p_1 t} + \sum_{i=1}^m A_i e^{-p_i t} \quad (2-5)$$

(三) 传递函数

传递函数的定义: 零初始条件下, 系统输出量的拉式变换与输入量的拉式变换之比。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (n \geq m) \quad (2-6)$$

分子分母均可分解成一阶因式的连乘积, 具有两种标准形式

首 1 型:
$$G(s) = \frac{R(s)}{A(s)} = \frac{k \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \quad (2-7)$$

尾 1 型:
$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^l \prod_{j=1}^n (T_j s + 1)} \quad (2-8)$$

式中 z_i ——传递函数的零点, $i=1, 2, \dots, m$;

p_j ——传递函数的极点, 又称特征根, $j=1, 2, \dots, n$;

k ——传递系数 $k = \frac{b_0}{a_0}$, 又称根轨迹增益;

K ——开环增益。

注意到 $K \neq k$, 将式 (2-7) 和式 (2-8) 均取 s 趋向于零的极限, 得根轨迹增益 k 与开环增益 K 的关系: 即

$$k = K \frac{\prod_{i=1}^m |z_i|}{\prod_{j=1}^n |p_j|} \quad (2-9)$$

传递函数的性质:

- (1) 传递函数是以复变量 s 为自变量的有理真分式, 即 $m \leq n$, 且具有实系数。
- (2) 传递函数只与本身结构和参数有关, 与输入信号的形式和作用位置无关。
- (3) 传递函数不反应具体的物理系统, 不同的物理系统可能有相同的传递函数。
- (4) 传递函数等于系统单位脉冲响应的拉式变换。

因为 $Y(s) = G(s) \times R(s)$, 而单位脉冲信号的拉式变换等于 1 的缘故, 即 $R(s) = 1$ 。

传递函数的局限性: 传递函数是一种输入输出的外部描述, 传递函数只适用于零初始条件下的线性定常系统, 当初始条件不为零时, 需另外计入非零初始条件对输出的影响。

传递函数与线性微分方程之间具有相通性, 可以互换 (令 $s = d/dt$)。一个传递函数只够表示系统一个输入信号对一个输出信号的关系, 不同的输入信号和输出信号之间的传递函数是不同的。

传递函数的求法:

- (1) 按定义求。已知系统的微分方程, 在零初始条件下求输出变量的拉式变换与输入

变量拉式变换的比值。

(2) 用复阻抗法求电路的传递函数。推导电路的传递函数时, 可不写微分方程, 利用复阻抗直接写出输出等效阻抗与输入等效阻抗之比, 即为电网络的传递函数。已知电阻的复阻抗为 R , 电容的复阻抗为 $\frac{1}{Cs}$, 电感的复阻抗为 LS , 利用普通阻抗的串



图 2-1 电路图

并联方法可计算电路的等效复阻抗, 考虑某电路已经简化成图 2-1 的最简形式, 则电路的传递函数为

$$\frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

二、典型环节的动态特性和传递函数

控制系统可看成是由典型环节组成的, 研究典型环节的基本特性是研究整个系统的基础, 常见的典型环节见表 2-3。

表 2-3 典型环节的动态特性和传递函数归纳表

环节	动态方程	传递函数	特点及作用
比例环节	$y(t) = kx(t)$	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k$	输入、输出形状相同, 幅值不同, 为可调增益的放大环节
积分环节	$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t x(\tau) d\tau$ 或 $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{T} x(t)$	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{Ts}$	若输入为误差信号, 输出为误差的积累; 若误差为零, 输出不变; 误差加倍, 输出值的变化率加倍; 误差幅值愈大, T 愈小, 积累作用愈强。可控制或消除系统的误差
微分环节	理想 $y(t) = T_d \frac{dx(t)}{dt}$	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = T_d s$	若输入为误差信号, 输出为误差的变化速度, 能在误差变大前产生修正, 改善系统的动态性能
	实际 $T_d \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_d T_d \frac{dx(t)}{dt}$	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k_d T_d s}{1 + T_d s}$	
惯性环节	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{1 + Ts}$	若输入为阶跃信号, 输出为指数上升曲线, 表明存在惯性
二阶振荡环节	$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$ $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\omega_n \zeta \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$	$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$ $= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \zeta s + \omega_n^2}$	$\omega_n - \frac{1}{T}$ 称自然振荡频率; ζ 称阻尼比, $0 < \zeta < 1$ 时, 阶跃响应为正弦衰减振荡
延迟环节	$y(t) = x(t - \tau)$	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-s\tau}$	输入、输出形状相同, 只是延迟了时间

三、电气环节的负载效应及传递函数

负载效应: 环节的负载对环节传递函数的影响。若两个无源网络串联时, 满足输出端负载阻抗为无穷大而输入阻抗为零, 称这两个无源网络不存在负载效应, 否则存在负载效

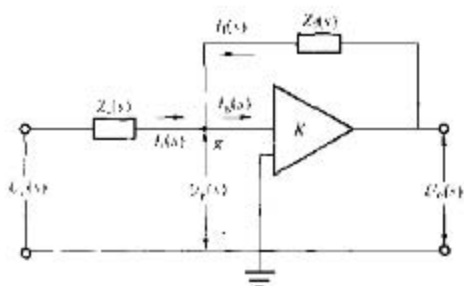


图 2-2 运算放大器构成的环节结构图

$Z_o(s)$ 、 $Z_i(s)$ —— 分别为运算放大器的输出阻抗和输入阻抗 (如图 2-2 所示)。

只要适当选择 $Z_i(s)$ 、 $Z_o(s)$ 的形式, 就能构成各种不同的运算。常见的由运算放大器构成的环节见表 2-4。

表 2-4 常见的由运算放大器构成的环节

名称及算式	$Z_o(s)$ 、 $Z_i(s)$ 的形式
反相器 $U_o(s) = -U_i(s)$	$Z_o = Z_i = R$
比例器 $U_o(s) = -\frac{Z_o}{Z_i} U_i(s) = -k U_i(s)$	$Z_o = R, Z_i = kR$
加法器 $U_o(s) = -(U_{i1} + U_{i2} + \dots + U_{in})$	Z_i 为相同的 R 并联, $Z_o = R$
积分器 $G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_o(s)}{Z_i(s)} = -\frac{1}{Ts}$	$Z_o = R, Z_i = C$ $T = RC$
理想微分器 $G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_o(s)}{Z_i(s)} = -T_d s$	$Z_o = C, Z_i = R$ $T_d = RC$
实际微分器 $G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_o(s)}{Z_i(s)} = -\frac{k_d T_d s}{T_d s + 1}$	Z_o 为 R 与 C 串联, $Z_i = R_i$ $T_d = R C$ $k_d = \frac{R_i}{R}$

原。解决办法: ①将负载归入环节内考虑; ②加装隔离放大器 (输入阻抗无穷大而输出阻抗很小) 可消除两环节间的负载效应。

由运算放大器构成的环节: 运算放大器满足的基本关系式为

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_o(s)}{Z_i(s)} \quad (2-10)$$

式中 $U_o(s)$ 、 $U_i(s)$ —— 分别为运算放大器的输出电压和输入电压;

四、系统方框图的等效转换和信号流程图及 Mason 公式

(一) 方框图和方框图的等效转换

方框图及绘制方法: 方框图是表示信号传递关系的数学图形。由方框、信号线、引出点和比较点构成。对同一系统, 方框图不唯一。方框图可按如下步骤绘出:

- (1) 考虑负载效应, 建立系统各元件的微分方程;
- (2) 对各元件的微分方程进行拉氏变换, 写出传递函数, 并画出各元件的方框图;
- (3) 从和系统输入量有关的比较点开始, 依据信号流向, 把各元件的方框图连接起来, 将输出量放在右端, 便得到系统的方框图。

方框图的等效转换:

- (1) 系统方框图等效转换的目的是将复杂的连接方式进行简化, 便于求出系统的传递函数。

(2) 等效转换的基本原则是: 转换前后保持信号的“等效性”。

(3) 最基本的等效转换法。表 2-5 列出了方框图的等效转换法则, 其中最基本的等效转换法有串联等效(多个方框串联时等效为各个方框传递函数的乘积)、并联等效(多个方框并联时等效为各个方框传递函数的代数和)和反馈连接等效。

表 2-5 方框图的等效转换法

1	串 联		
2	并 联		
3	反 馈		
4	分点逆矢向前移		
5	分点顺矢向后移		
6	合点顺矢向后移		
7	合点逆矢向前移		
8	相邻分点, 合点之间互移		
9	各分点或各合点之间互移		

当系统连接很复杂时, 为了使用这三种等效转换法, 需要利用其余的等效转换法对图形进行处理。

反馈连接的基本定义式: 见图 2-3。

前向通路的传递函数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} \quad (2-11)$$

反馈通路的传递函数

$$H(s) = \frac{B(s)}{Y(s)} \quad (2-12)$$

开环传递函数

$$G_0(s) = G(s)H(s)$$

$$\text{闭环传递函数} \quad C(s) = \frac{\text{前向通路的传递函数}}{1 \mp \text{开环传递函数}} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)} \quad (2-13)$$

分母中的“-”号对应图 2-2 正反馈情况。基本定义式 (2-11) ~ (2-13) 应牢记。方框图的常见题型及简化的思路如下:

(1) 多环交叉反馈是常见的题型, 应利用方框图的等效转换法则消除交叉反馈, 再用式 (2-13) 消去反馈环, 即将反馈连接的结构用一个方框取代, 这个过程应从内反馈环开始, 逐步向外反馈环进行, 直至求出整个系统的传递函数。

(2) 若题目为多输入多输出结构, 应用叠加原理解题。注意不同的输入、输出之间的前向通路的传递函数及反馈通路的传递函数是不同的, 所以用式 (2-13) 求出的传递函数也是不同的。

(3) 若题目为多输入多输出且含有交叉反馈结构, 应同时应用 (1)、(2) 进行。

(二) 信号流图

信号流图及常用术语: 信号流图是一种表达线性代数方程组结构的网络, 信号流图可以看成是方框图的简化表示方法, 由节点和支路组成。对同一系统, 信号流图不唯一。

源点: 只有输出支路的节点, 也称输入节点。

汇点: 只有输入支路的节点, 也称输出节点。

混合节点: 既有输入支路, 又有输出支路的节点。

前向通路: 从源点到汇点之间, 与每个节点仅相交一次的通路。

回路: 起于并终于同一节点, 且与任何节点相交不多于一次的闭合通路。

不接触回路: 相互之间无公共节点的回路。

梅森 (Mason) 增益公式: 应用梅森增益公式可不经任何等效转换, 一步写出系统的传递函数。

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n p_k \Delta_k \quad (2-14)$$

式中 Δ ——特征式, $\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 L_2 - \sum L_3 L_3 L_3 + \dots$;

n ——从输入节点到输出节点前向通路的总条数;

p_k ——从输入节点到输出节点第 k 条前向通路的总增益;

$\sum L_n$ ——所有不同回路的增益之和;

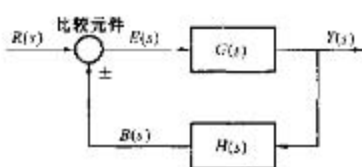


图 2-3 反馈连接方框图

$\sum L_b L_c$ ——每两个互不接触回路增益乘积之和;

$\sum L_a L_b L_c$ ——每三个互不接触回路增益乘积之和;

Δ_k ——与第 k 条前向通路不接触部分的 Δ 值, 称为余因子式。

信号流图绘制方法: 有两种。

(1) 根据系统微分方程绘制。把微分方程经拉氏变换, 变换为 s 的代数方程, 对系统中每个变量指定一个节点, 按变量的因果关系从左至右顺序排列, 根据代数方程, 用标明增益的支路将节点连接起来即可。

表 2-6 方框图与信号流图的对应关系

方框图	信号流图
输入量	源点
输出量	汇点
比较点、引出点和其他中间变量	混合节点
方框	支路
方框中的传递函数	支路增益 (注意负反馈支路增益表示)

(2) 由方框图得到信号流图。依据表 2-6 方框图与信号流图的对应关系直接画出。

由于信号流图与方框图之间有对应关系, 因此梅森增益公式也可直接用于方框图。由方框图得到信号流图时, 需特别指出的是, 如果信号的比较点之前有分点时, 比较点和分点应分别设置相应的节点, 节点之间为单位增益, 一定视其为互不接触回路。

应用梅森增益公式应注意的问题:

(1) 使用公式时必须所有的通路及回路上进行, 要细心不能遗漏。特别注意互不接触回路的处理。

(2) 梅森增益公式只能用于求源点到汇点或者混合节点 (因混合节点可通过增加具有单位传输的支路变为汇点) 的传递函数, 而不能直接用于求汇点 (混合节点) 到源点 (混合节点) 或者源点到源点的传递函数。

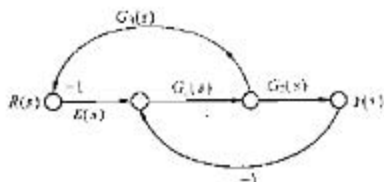


图 2-4 信号流图

例如图 2-4 所示的信号流图, 求 $\frac{Y(s)}{E(s)}$ 。因 $Y(s)$ 和 $E(s)$ 为汇点和混合节点, 梅森增益公式不能直接用, 可通过求 $\frac{Y(s)}{R(s)}$ 、 $\frac{E(s)}{R(s)}$ 得到 $\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{Y(s)/R(s)}{E(s)/R(s)}$ 。

(3) 在方框图上用梅森公式时, 应注意区分互不接触回路。特别是如果信号的比较点之前有分点时, 比较点和分点应分别设置相应的节点, 视为互不接触回路。

五、常规控制器的基本控制规律、动态特性和实现方法

参考输入 $r(t)$ 和输出信号 $y(t)$ 比较得到偏差信号 $e(t)$, 作用于控制器 $G_c(s)$, 控制器

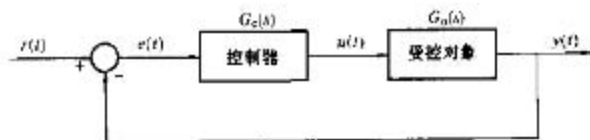


图 2-5 控制系统的基本结构方框图

的输出 $u(t)$ 作用于被控对象 $G_o(s)$ 。控制器按其基本控制规律, 动态特性和实现方法归纳成表 2-7,

表 2-7 四种控制作用的基本控制规律、动态特性和实现方法 (用运算法放大器构成)

	动态方程	传递函数	特点	实现方法
比例控制器 P	$u(t) = K_p e(t) = \frac{1}{\delta} e(t)$	$G_p(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p = \frac{1}{\delta}$	可调整增益控制器, 加快控制过程, 属于有差控制, K_p 越小偏差越大, 但振荡小	$Z_1 = R_1$ $Z_2 = R_1$ $K_p = \frac{R_1}{R_1}$
比例积分控制器 PI	$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right]$ $= \frac{1}{\delta} \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right]$	$G_p(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$ $= \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$	积分部分按偏差的积累控制可保证系统无差 (某类输入下), T_i 越大, 积分作用越小, 控制作用越长	$Z_1 = R_1 + \frac{1}{C_i s}$ $Z_2 = R_1$ $K_p = \frac{R_1}{R_1}$ $T_i = R_1 C_i$
比例微分控制器 PD	理想 $u(t) = K_p \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$ $= \frac{1}{\delta} \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$ 实际	$G_p(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$ $= \frac{1}{\delta} (1 + T_d s)$ $G_p(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left[1 + \frac{k_d T_d s}{1 + T_d s} \right]$ $= \frac{1}{\delta} \left[1 + \frac{k_d T_d s}{1 + T_d s} \right]$	微分部分按偏差的变化率控制, 具有预测特性, 可提高系统的响应速度和动态偏差, 只有在瞬态过程中才起作用, 所以不能单独使用	$Z_1 = R_1$ $Z_2 = R_1 + \frac{1}{C_d s}$ $K_p = \frac{R_1}{R_1}$ $T_d = R_1 C_d$ (理想情况下)
比例积分微分控制器 PID	$u(t) = K_p \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right\}$ $= \frac{1}{\delta} \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right\}$	$G_p(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$ $= \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$	兼有三个控制作用的优点	$Z_1 = R_1 + \frac{1}{C_d s}$ $Z_2 = R_1 + \frac{1}{C_i s}$ $K_p = \frac{R_1 C_i + R_1 C_d}{R_1 C_i}$ $T_i = R_1 C_i + R_1 C_d$ $T_d = \frac{R_1 C_i R_1 C_d}{R_1 C_i + R_1 C_d}$

2.2 习题讲解

2-1 用拉氏变换求解下列微分方程 (设初始条件为零)。

(1) $T_x \dot{x}(t) + x(t) = r(t)$, 其中 $r(t)$ 分别为 $\delta(t)$, $1(t)$ 和 $t \cdot 1(t)$;

$$(2) \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t);$$

$$(3) \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 1(t).$$

解 (1) 当 $r(t) = \delta(t)$ 时, 对微分方程两端取拉氏变换得 $\mathcal{L}X(s) + X(s) = 1$

写成输出量 $X(s)$ 的表达式
$$X(s) = \frac{1}{s+1} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

对上式进行拉氏反变换求得微分方程的解
$$x(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

当 $r(t) = 1(t)$ 时, $\mathcal{L}X(s) + X(s) = \frac{1}{s}$

写成输出量 $X(s)$ 的表达式, 并展开成部分分式
$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} - \frac{B}{s+1}$$

其中 $A = X(s)s \Big|_{s=0} = 1, B = X(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = -T$

所以
$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

$$x(t) = 1 - e^{-t/T}$$

当 $r(t) = t \cdot 1(t)$ 时, $\mathcal{L}X(s) + X(s) = \frac{1}{s^2}, X(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+1}$

$$x(t) = t - T(1 - e^{-t/T})$$

$$(2) \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t)$$

$$s^2 X(s) + sX(s) + X(s) = 1$$

写成输出量 $X(s)$ 的表达式, 并配方, 以便查表

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}/2}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

对上式进行拉氏反变换求得微分方程的解

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$(3) \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 1(t)$$

$$s^2 X(s) + 2sX(s) + X(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)} = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1}$$

对上式进行拉氏反变换求得微分方程的解

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = 1 - (1-t)e^{-t}$$

2-2 求下列象函数 $Y(s)$ 的原函数 $y(t)$ 。

$$(1) Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$(2) Y(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+2}$$

$$(3) Y(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}$$

解 (1) 将 $Y(s)$ 展开成部分分式

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$\text{其中 } A = Y(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = -1, B = Y(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = 2$$

$$\text{所以 } Y(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 2e^{-2t} - e^{-t}$$

$$(2) Y(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{(s+1)^2+1}$$

利用拉氏变换的性质并查表得

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = e^{-t}(\cos t + 2\sin t)$$

$$(3) Y(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s+1} + \frac{B_2}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+3}$$

$$\text{其中 } A = Y(s)s \Big|_{s=0} = \frac{2}{3}, B_1 = Y(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$B_2 = \frac{d}{ds}[Y(s)(s+1)^2] \Big|_{s=-1} = \frac{3}{4}, C = Y(s)(s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{1}{12}$$

$$\text{所以 } Y(s) = \frac{2/3}{s} + \frac{-1/2}{(s+1)^2} + \frac{3/4}{s+1} + \frac{1/12}{s+3}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}\right)e^{-t} + \frac{1}{12}e^{-3t}$$

2-3 已知图 2-6 所示的无源网络 (a)、(b)、(c), 分别求输出 $u_o(t)$ 和输入 $u_i(t)$ 的传

$$\text{递函数 } G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}$$

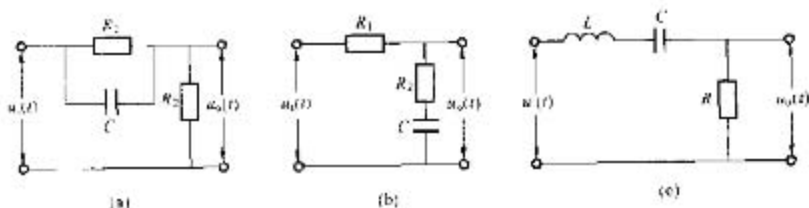


图 2-6 习题 2-3 图

解 图 2-6(a) $G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_1 R_2 Cs + R_1}{R_1 R_2 Cs + R_1 + R_2}$

图 2-6(b) $G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}$

图 2-6(c) $G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R}{R + Is + \frac{1}{Cs}} = \frac{RCS}{LCs^2 + RCs + 1}$

2-4 已知图 2-7 所示的无源网络 (a)、(b), 分别求它们的输出传递函数 $G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}$

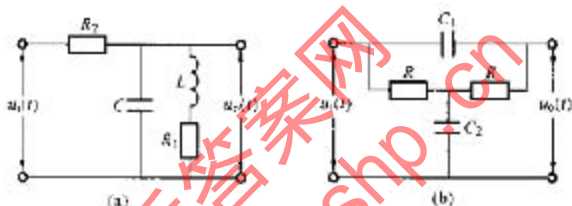


图 2-7 习题 2-4 图

解 图 2-7 (a)

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}(Ls + R_1) / \frac{1}{Cs} + Ls + R_1}{R_2 + \left[\frac{1}{Cs}(Ls + R_1) / \frac{1}{Cs} + Ls + R_1 \right]}$$

$$= \frac{Ls + R_1}{LCR_2s^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1 + R_2}$$

图 2-7 (b), 根据图 2-8 列方程

输入回路 $U_i = I_1 R + (I_1 + I_2) \frac{1}{C_2 s}$

整理得 $\frac{I_1}{U_i - \frac{1}{C_2 s} I_2} = \frac{C_2 s}{RCs + 1}$

输出回路 $U_o = I_2 R + (I_1 + I_2) \frac{1}{C_2 s}$

整理得 $U_o = \frac{1}{C_2 s} I_1 + \left(R + \frac{1}{C_2 s} \right) I_2$

中间回路 $I_1 R = \left(R + \frac{1}{C_1 s} \right) I_2$

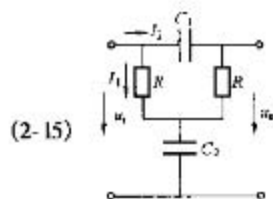


图 2-8

(2-15)

(2-16)

$$\text{整理得 } \frac{I_2}{I_1} = \frac{RC_1 s}{RC_1 s + 1}$$

(2-17)

由式(2-15)、(2-16)、(2-17) 画出系统结构图如下

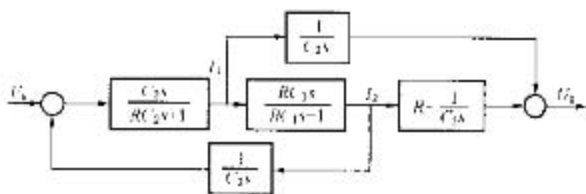


图 2-9

应用梅森公式求出

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\left(\frac{C_2 s}{RC_2 s + 1}\right) \left(\frac{RC_1 s}{RC_1 s + 1}\right) \left(R + \frac{1}{C_1 s}\right) + \left(\frac{C_2 s}{RC_2 s + 1}\right) \left(\frac{1}{C_2 s}\right)}{1 + \left(\frac{C_2 s}{RC_2 s + 1}\right) \left(\frac{RC_1 s}{RC_1 s + 1}\right) \left(\frac{1}{C_2 s}\right)} \\ &= \frac{R^2 C_1 C_2 s^2 + 2RC_1 s + 1}{R^2 C_1 C_2 s^2 + (2C_1 + C_2)Rs + 1} \end{aligned}$$

2-5 试分别求出图 2-10 所示运算放大器组成的环节的输入/输出传递函数 $\frac{U_o(s)}{U_i(s)}$

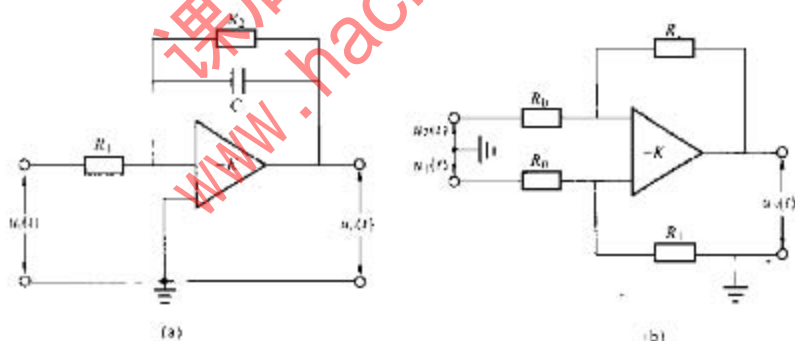


图 2-10 习题 2-5 图

解 图 2-10 (a) 因为 $\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_f}{Z_i}$

其中 Z_f 为反馈阻抗, Z_i 为输入阻抗, 所以

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{R_2 Cs + 1} \right)$$

图 2-10(b) $U_o(s) = -\frac{R_1}{R_0} U_2(s) + \frac{R_1}{R_0} U_1(s) = \frac{R_1}{R_0} [U_1(s) - U_2(s)]$

2-6 把图 2-11 的方框图化简, 并求传递函数 $\frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

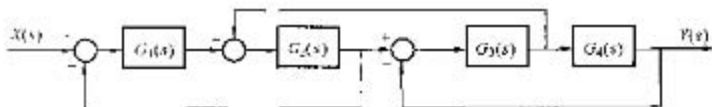


图 2-11 习题 2-6 图

解 简化步骤 (见图 2-12):

- (1) 将 $Y(s)$ 的引出点前移得方框图 2-12 (a);
- (2) 将 $G_3(s), G_4(s)$ 构成的反馈环简化成方框图 2-12 (b);
- (3) 将 $G_2(s)$ 的引出点后移得方框图 2-12 (c);
- (4) 将单位反馈系统简化得方框图 2-12 (d);

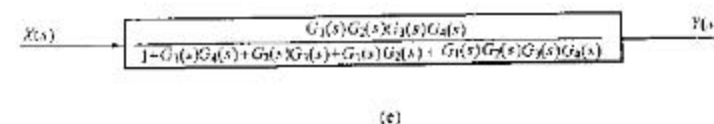
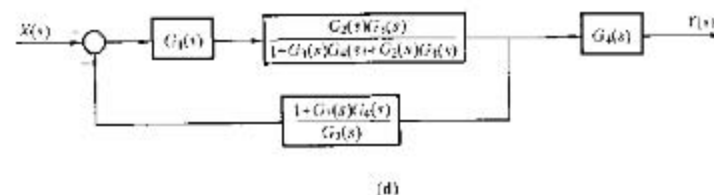
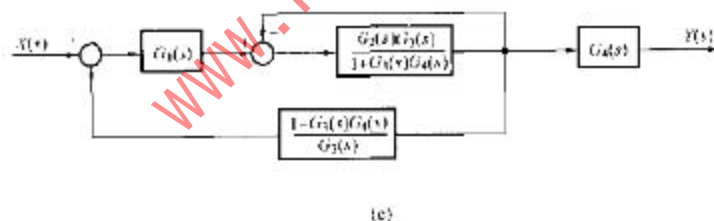
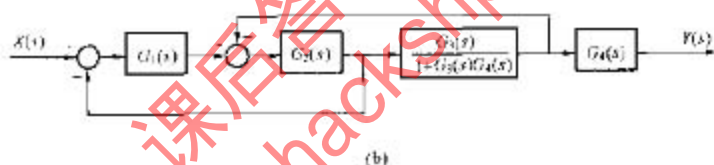
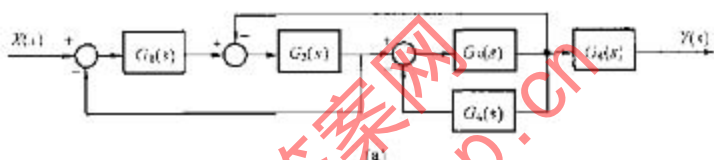


图 2-12 系统方框图的简化

(5) 将反馈系统简化并与 $G_4(s)$ 串联简化得方框图 2-12 (e)。

【评注】 移动引出点与方框的位置, 以便消除交叉反馈逐步化简是最常用的方法。

2-7 试用方框图化简的方法求图 2-13 所示系统的传递函数 $\frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

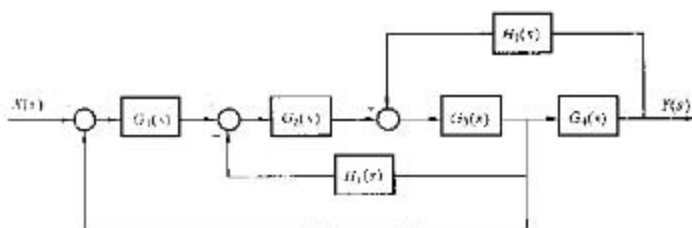


图 2-13 习题 2-7 图

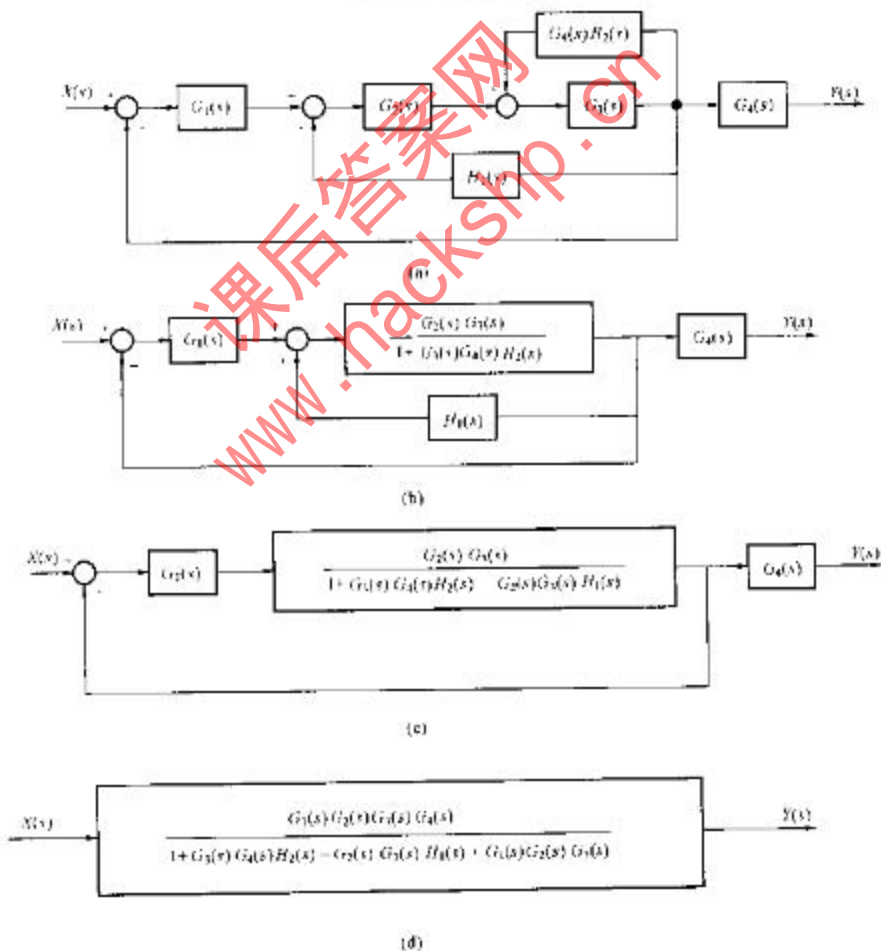


图 2-14 方框图的简化

解 简化步骤 (见图 2-14):

- (1) 将 $Y(s)$ 引出点前移得方框图 (a);
- (2) 将 $G_3(s)$ 、 $G_4(s)$ 、 $H_2(s)$ 组成的反馈回路简化得方框图 (b);
- (3) 将以 $H_1(s)$ 为反馈支路的反馈回路简化得方框图 (c);
- (4) 将单位反馈回路简化, 并与 $G_2(s)$ 串联简

化得方框图 (d)。

【评注】 先简化内回路, 再简化外回路, 使方框图逐步简化成一个方框, 是多环反馈相互套接时的处理方法。

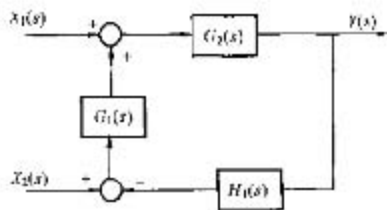


图 2-15 习题 2-8 图

2-8 试求图 2-15 所示系统的输出 $Y(s)$ [用 $X_1(s)$ 和 $X_2(s)$ 来表示]。

解 应用叠加原理

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)}, \quad \frac{Y(s)}{X_2(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

$$Y(s) = \frac{G_2(s)X_1(s) + G_1(s)G_2(s)X_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

【评注】 多输入系统应用叠加原理来处理, 不同输入时前馈与反馈通路不同。

2-9 将习题 2-6 的方框图改画成信号流图 (见图 2-16), 并用梅森公式求传递函数 $\frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

解

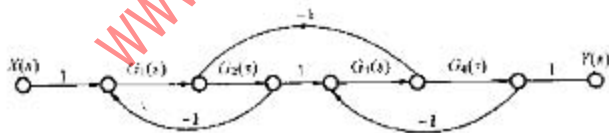


图 2-16

(作图时注意某反馈回路相加点之前有分点时, 对于分点和相加点要分设相应节点, 节点之间为单位增益)。

$$P_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$$

$$L_1 = -G_1(s)G_2(s)$$

$$L_2 = -G_3(s)G_4(s)$$

$$L_3 = -G_2(s)G_2(s)$$

L_1 与 L_3 互不接触

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2 \\ &= 1 + G_1(s)G_2(s) + G_3(s)G_4(s) + G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s) \\ G(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} \quad \Delta_1 = 1 \\ &= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s) + G_3(s)G_4(s) + G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}\end{aligned}$$

【评注】 不要遗漏互不接触回路。

2-10 将习题 2-7 的方框图改画成信号流图 (见图 2-17), 并用梅森公式求传递函数 $\frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

解

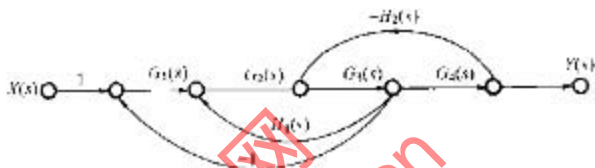


图 2-17

$$\begin{aligned}P_1 &= G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s) \\ L_1 &= G_2(s)G_3(s)H_1(s) \\ L_2 &= -G_2(s)G_3(s)H_2(s) \\ L_3 &= -G_1(s)G_2(s)H_3(s) \\ \Delta &= 1 - G_2(s)G_3(s)H_1(s) + G_3(s)G_4(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s) \\ \Delta_1 &= 1 \\ \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 - G_2(s)G_3(s)H_1(s) + G_3(s)G_4(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)}\end{aligned}$$

2-11 求如图 2-18 所示两个电路输出信号 $u_o(t)$ 和输入信号 $u_i(t)$ 的传递函数, 并说明负载效应对传递函数的影响。

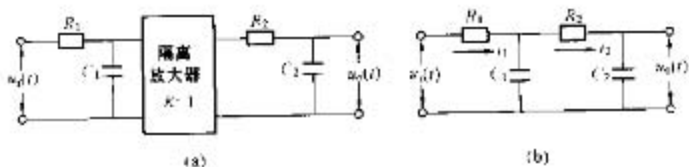


图 2-18 习题 2-11 图

解 图 2-18(a) $\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1)} \cdot \frac{1}{(R_2 C_2 s + 1)}$

$$\begin{aligned} \text{图 2-18(b)} \quad u_1(t) &= \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt + i_1 R_1 \\ &= \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + i_2 R_2 = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt \\ u_2(t) &= \frac{1}{C_2} \int i_2 dt \end{aligned}$$

消去中间变量得

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t)$$

零初始条件下取拉氏变换得

$$R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 U_2(s) + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s U_2(s) + U_2(s) = U_1(s)$$

$$\therefore \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

图 2-18 (a) 由于隔离放大器的输入阻抗无穷大, 输出阻抗为零, 使由 $R_1 C_1$ 和 $R_2 C_2$ 组成的两环节不存在负载效应, 可以直接用串联环节的简化方法求总传递函数; 图 (b) 由于存在负载效应, 只能看作一个整体求 $\frac{U_2(s)}{U_1(s)}$, 图 2-18(b) 也可用复阻抗法求 $\frac{U_2(s)}{U_1(s)}$ 。

【评注】 通过此题理解负载效应的含义。

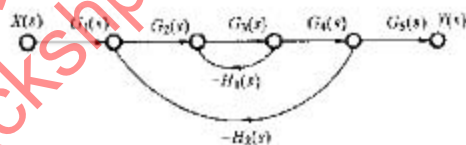


图 2-19 习题 2-12 图

2-12 设系统的信号流图如图 2-19 所示,

试用梅森公式求总的传递函数 $\frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

解 $P_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)$

$$\Delta = 1 + G_3(s)H_1(s) + G_2(s)G_3(s)G_4(s)H_2(s)$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\text{所以 } \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)}{1 + G_3(s)H_1(s) + G_2(s)G_3(s)G_4(s)H_2(s)}$$

2-13 设系统的信号流图如图 2-20 所示, 试用梅森公式求总的传递函数 $\frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

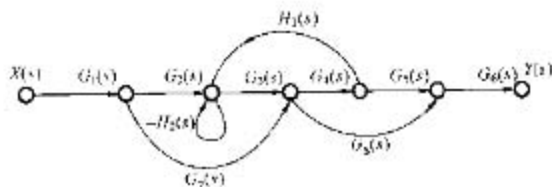


图 2-20 习题 2-13 图

解 $P_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)$

$$P_2 = G_1(s)G_7(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)$$

$$P_3 = G_1(s)G_7(s)G_8(s)G_6(s)$$

$$P_4 = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_8(s)G_6(s)$$

$$\Delta = 1 + H_2(s) + G_7(s)G_4(s)H_1(s)$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 + H_2(s)$$

$$\Delta_3 = 1 + H_2(s)$$

$$\Delta_4 = 1$$

$$\text{所以 } \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

$$\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)(1+H_2) + G_1(s)G_7(s)G_4(s)G_6(s)(1+H_2) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_6(s)G_8(s)(1+H_2) - G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_6(s)}{1 + H_2 + G_7(s)G_4(s)H_1}$$

【评注】梅森公式必须在所有通路上进行, 不能遗漏, 还应注意余因子不为 1 时的求法。

2-14 已知系统由如下方程组成, 试画出该系统的方框图或信号流图, 并求出闭环传递函数 $\frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

$$X_1(s) = G_1(s)X(s) - G_2(s)[G_7(s) - G_8(s)]Y(s)$$

$$X_2(s) = G_2(s)[X_1(s) - G_6(s)X_3(s)]$$

$$X_3(s) = [X_2(s) - Y(s)G_5(s)]G_3(s)$$

$$Y(s) = G_4(s)X_3(s)$$

解 系统信号流图见图 2-21。

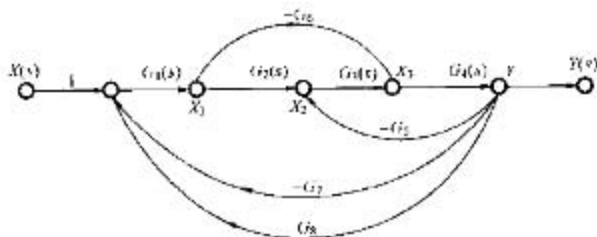


图 2-21 习题 2-14 图

$$\frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_2(s)G_7(s)G_6(s) + G_7(s)G_4(s)G_5(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_7(s) - G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_6(s)}$$

【评注】由方程组画方框图和信号流图时, 图形应仅遵方程式, 并注意负号的处理。熟练以后, 可直接由梅森公式写结果。

2-15 设系统由下列代数方程和微分方程组成:

$$x_1(t) = x(t) - y(t)$$

$$x_2(t) = \tau \frac{dx_1(t)}{dt} + K_1 x_1(t)$$

$$x_3(t) = K_2 x_2(t)$$

$$x_4(t) = x_3(t) - x_5(t) - K_5 y(t)$$

$$\frac{dx_5(t)}{dt} = K_3 x_4(t)$$

$$K_4 x_5(t) = T \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

其中, $x_1(t)$ 和 $y(t)$ 分别为系统的输入信号和输出信号。 τ 、 T 、 K_1 、 K_2 、 K_3 、 K_4 、 K_5 均为常数, 试建立系统的方框图或信号流图, 并求取系统的传递函数 $\frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

解 方程两端取零初始条件下的拉氏变换

$$X_1(s) = X(s) - Y(s)$$

$$X_2(s) = \tau s X_1(s) + K_1 X_1(s)$$

$$X_3(s) = K_2 X_2(s)$$

$$X_4(s) = X_3(s) - X_5(s) - K_5 Y(s)$$

$$X_5(s) = \frac{1}{s} K_3 X_4(s)$$

$$K_4 X_5(s) = T s Y(s) + Y(s) \text{ 或 } Y(s) = \frac{K_4}{T s + 1} X_5(s)$$

系统信号流图见图 2-22。

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_2 K_3 K_4 (\tau s + K_1)}{T s^2 + (T K_3 + K_2 K_3 K_4 \tau + 1) s + (K_4 K_5 + K_1 K_2 K_4 + 1) K_3}$$

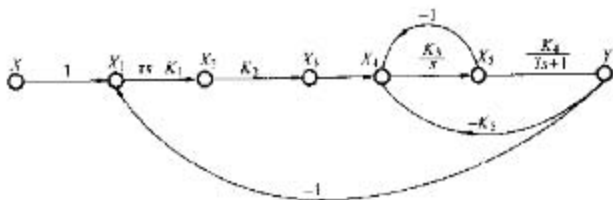


图 2-22

【评注】先将方程式取拉氏变换, 化为以 s 为变量的代数方程组, 并写成果方程形式 (X_1 、 X_2 、 X_3 、 X_4 、 X_5 、 y 作为结果变量只在方程左端出现一次); 然后将各变量设置不同的节点, 根据因果方程的关系把各节连接起来, 用梅森公式求 $\frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

2.3 同步练习

一、名词解释

1. 传递函数的极点
2. 方框图的等效转换原则
3. 回路增益
4. 不接触回路

二、多项选择题

1. 系统的传递函数取决于_____。
 - A. 系统结构
 - B. 固有参数
 - C. 输入量的形式
 - D. 输出量的形式
2. 已知控制系统的微分方程为 $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t)$ 则此系统满足_____。
 - A. 当 $y(t)|_{t=0} = 0$, 微分方程的拉氏变换为 $TSY(s) + Y(s) = R(s)$
 - B. 当 $\frac{dy(t)}{dt}|_{t=0} = 0$, 微分方程的拉氏变换为 $TSY(s) + Y(s) = R(s)$
 - C. 当 $r(t) = 1(t)$ 时, $y(t) = (1 - e^{-t/T})$
 - D. 当 $r(t) = t$ 时, $y(t) = (t - e^{-t/T})$
3. 传递函数_____。
 - A. 是复变量 s 的有理真分式
 - B. 只与自身结构和参数有关
 - C. 是单位脉冲响应的拉氏变换
 - D. 可以反映零输入下的动态特性

三、填空题

1. 传递函数只适用于描述_____。
2. 系统常见的典型环节有_____。
3. 常规控制器中 P 表示_____, PI 表示_____, PD 表示_____, PID 表示_____。

四、问答题

1. PI 控制器中, 积分时间 T_i 对控制系统有什么影响?
2. 在方框图中, 如果在信号的合点之前有信号引出的分点, 那么在绘制信号流图时, 此合点和分点分别设置节点, 还是设为同一个节点?
3. 试问如图 2-23 所示两个信号流图的总传输是否相同?

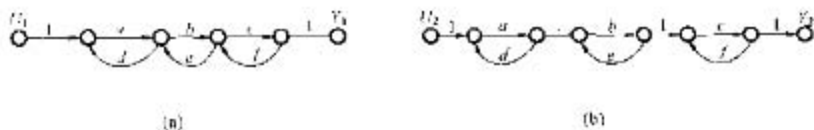


图 2-23 信号流图

五、计算题

1. 已知无源网络如图 2-24 所示。

- (1) 建立系统的微分方程式;
- (2) 求传递函数 $U_c(s)/U_e(s)$;
- (3) 该网络是否等效于两个 RC 网络串联?
- (4) 建立该网络的方框图, 并用方框图的等效转

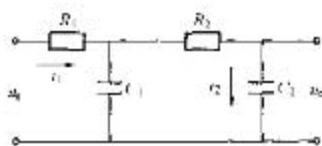


图 2-24 计算题 1 图

换或 Mason 公式求 $\frac{U_c(s)}{U_e(s)}$ 。

- 【评注】** 掌握建立系统微分方程式的三个步骤;
掌握由系统微分方程式求传递函数的方法;
正确理解负载效应;
掌握方框图的绘制、等效转换方法;
掌握在方框图上用 Mason 公式求传输的方法。

以上要点见“内容提示”部分。

2. 简化图 2-25 所示系统的方框图, 并求其闭环传递函数。

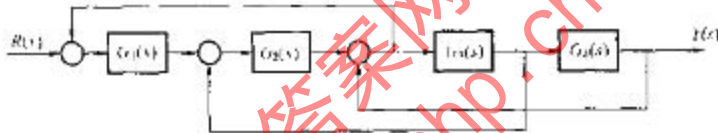


图 2-25 计算题 2 图

- 【评注】** 适当移动分点, 消除交叉反馈, 是求解此类题目的关键。

3. 求图 2-26 所示系统的传递函数 $\frac{Y(s)}{D(s)}$ 和 $\frac{E(s)}{D(s)}$ 。

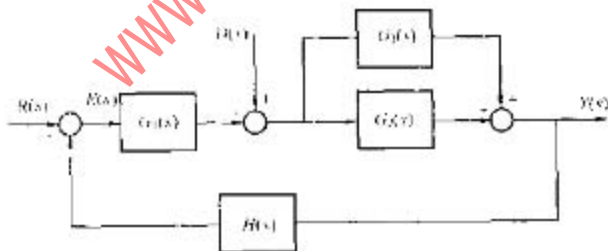


图 2-26 计算题 3 图

- 【评注】** 利用叠加原理求多变量系统的传递函数, 同一系统的闭环特征式 (传递函数的分母) 是一定的, 不随输入点的位置而改变。

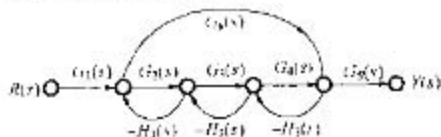


图 2-27 计算题 4 图

4. 系统信号流图如图 2-27 所示, 求 $\frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

2.4 参 考 答 案

一、名词解释

1. 传递函数的极点——传递函数分母多项式的根, 即特征方程的根。
2. 方框图的等效转换原则——转换前后有关部分的输入变量和输出变量之间的关系保持不变。

3. 回路增益——回路中各支路传输的乘积。

4. 不接触回路——没有公共节点的回路。

二、多项选择题

1. A B 2. A C 3. A B C

三、填空题

1. 零初始条件下的线性定常系统
2. 比例环节、积分环节、微分环节、一阶惯性环节、二阶振荡环节
3. 比例控制器 比例积分控制器 比例微分控制器 比例积分微分控制器

四、问答题

1. T_i 越大, 积分控制作用越小, 输出振荡减弱, 动态偏差加大, 控制过程长; T_i 减小, 积分控制作用越强, 效果正相反, 但应注意输出振荡的加剧, 有时会使系统不稳定。

2. 应分别设置节点。

3. 不相同。

五、计算题

$$1. (1) R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

$$(2) \frac{U_r(s)}{U_c(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

(3) 两个 RC 网络直接串联时, 存在负载效应, 总传递函数不等于各自传递函数的乘积。

$$(4) \text{ 因为 } I_1(s) = \frac{U_r(s) - U_{c1}(s)}{R_1}, I_2(s) = \frac{U_{c1}(s) - U_c(s)}{R_2}$$

$$U_{c1}(s) = \frac{I_1(s) - I_2(s)}{C_1 s}, U_c(s) = \frac{1}{C_2 s} I_2(s)$$

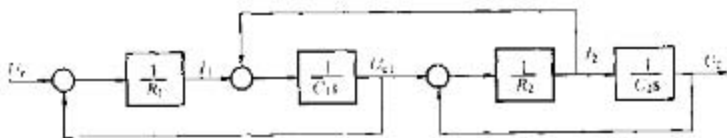


图 2-28

该网络的方框图见图 2-28。

$\frac{U_i(s)}{U_j(s)}$ 的结果同(2)。

$$2. \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s) + G_3(s)G_4(s) + G_2(s)G_3(s)}$$

$$3. \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s) + G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s) + G_1(s)G_3(s)H(s)}$$

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{[G_2(s) + G_3(s)]H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s) + G_1(s)G_3(s)H(s)}$$

$$4. \frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s) + G_1G_5G_6(1 + G_2H_2)}{1 + G_2(s)H_1(s) + G_3(s)H_2(s) + G_4(s)H_3(s) + G_6(s)H_1(s)H_2(s)H_3(s) + G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_3(s)}$$

课后答案网
 www.hackshp.cn

第3章 时域分析法

- ☆ 时域性能指标
- ☆ 一、二阶系统的时域分析
- ☆ 高阶系统的时域分析及主导极点
- ☆ 稳态误差及误差系数

3.1 内容提示

一、典型输入信号和时域性能指标

典型输入信号: 是为了便于对系统进行分析, 设计和比较, 规定的一些理想输入信号。常用的有五种, 见表 3-1。

表 3-1 典型输入信号

名称	时域表达式	频域表达式	特点
阶跃函数	$u_c(t), t \geq 0$	$\frac{1}{s}$	突变信号, 最不利的形式, $u_c=1$ 称单位阶跃函数
斜坡函数	$r, r \geq 0$	$\frac{1}{s^2}$	按恒定速度变化的位置信号, 称速度函数。图像为第一象限的直线, $r=1$ 称单位斜坡函数
抛物线函数	$\frac{1}{2} R t^2, t \geq 0$	$\frac{R}{s^3}$	按恒定加速度变化的位置信号, 称加速度函数, 第一象限的抛物线, $R=1$ 称单位抛物线函数
脉冲函数	$\delta(t), t \geq 0$	1	很重要的数学工具, 例如, 脉冲响应的拉氏变换就是系统的传递函数
正弦函数	$A \sin \omega t$	$\frac{As}{s^2 + \omega^2}$	频率分析法中用

时域性能指标: 在单位阶跃输入下系统的响应曲线上定义的, 曲线见图 3-1, 性能指标见表 3-2。

表 3-2 时域性能指标

分类	名称	意义
动态性能指标	最大超调量 σ_p (%)	反映响应过程的平稳性
	上升时间 t_r , 峰值时间 t_p	系统响应初始阶段的快慢
	调整时间 t_s	过渡过程的持续时间, 表征系统的总体快慢性
稳态误差	e_{ss}	表征系统的跟踪精度

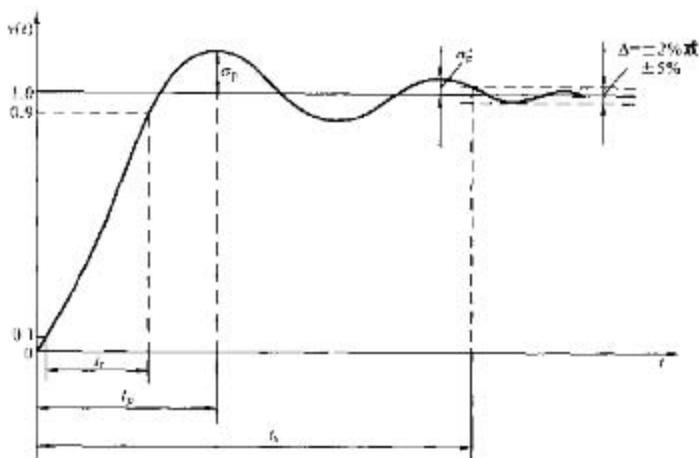


图 3-1 系统单位阶跃响应曲线及其性能指标

二、一阶系统的时域分析

一阶系统: 一阶微分方程描述的系统。方框图见图 3-2。

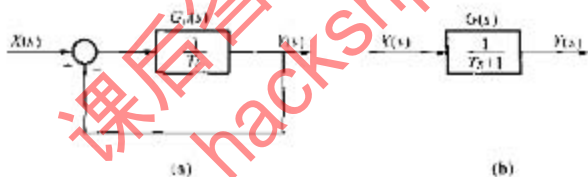


图 3-2 一阶系统的方框图

系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (3-1)$$

动态性能指标: 允许误差范围 $\Delta = \pm 5\% \sim \pm 2\%$ 时, 调整时间 $t_s = (3 \sim 4) T$ 。

典型响应见表 3-3。

表 3-3 一阶系统的时域响应

输入信号	响应表达式 [全响应 = 稳态响应 + 暂态响应]	响应曲线
$x(t) = 1(t)$ $X(s) = \frac{1}{s}$	$Y(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$ $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$	<p>$y(t)$ 的初始斜率为 $1/T$</p>

续表

输入信号	响应表达式 (全响应 = 稳态响应 + 暂态响应)	响应曲线
$x(t) = t$ $X(s) = \frac{1}{s^2}$	$Y(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+1/T}$ $y(t) = t - T(1 - e^{-t/T}) \quad (t \geq 0)$	
$x(t) = \delta(t)$ $X(s) = 1$	$Y(s) = \frac{1}{Ts+1} = \frac{1/T}{s + 1/T}$ $y(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \quad (t \geq 0)$	

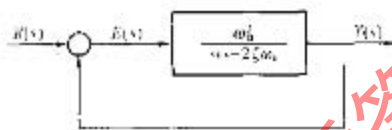


图 3-3 一阶系统的方框图

线性定常系统的一个重要性质: 从表 3-3 看出系统对输入信号导数的响应等于系统对该输入信号响应求导。利用此性质, 若已知某一典型输入信号的响应, 就可直接写出另一典型输入的响应。例如, 若已知斜坡输入的响应, 对其求导就直接得到阶跃信号的响应。这一性质不仅适用于

一阶系统, 而且适用于任何线性定常系统。

三、二阶系统的时域分析

二阶系统: 二阶微分方程描述的系统。方框图见图 3-3。

系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-2)$$

两个重要参数:

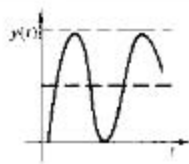
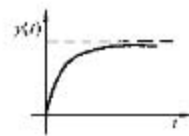
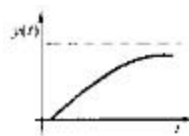

ζ ——阻尼比, ζ 不同, 二阶系统的单位阶跃响应不同, 见表 3-4。

ω_n ——无阻尼自然振荡频率。

表 3-4 二阶系统的单位阶跃响应一览表

阻尼比	极点分布图	响应表达式 (全响应 = 稳态响应 + 暂态响应)	响应曲线
$0 < \zeta < 1$ 欠阻尼	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 特征根实部为负, 位于 s 左半平面	$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \theta)$ ($t \geq 0$)	

续表

阻尼比	极点分布图	响应表达式 (全响应 = 稳态响应 + 暂态响应)	响应曲线
$\zeta = 0$ 无阻尼	$s_{1,2} = \pm j\omega_n$ 特征根实部为零, 位于 s 平面的虚轴	$y(t) = 1 - \cos\omega_n t \quad (t \geq 0)$	
$\zeta = 1$ 临界阻尼	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n$ 特征根位于负实轴上且相等	$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}(1 + \omega_n t) \quad (t \geq 0)$	
$\zeta > 1$ 过阻尼	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ 特征根位于负实轴上	$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right) \quad (t \geq 0)$	
$-1 < \zeta < 0$ 负阻尼	$s_{1,2} = \zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 特征根实部为正, 位于 s 右半平面	输出响应发散, 系统不稳定	

二阶系统的动态性能指标计算: 导出条件如下:

- (1) 典型二阶系统;
- (2) 单位阶跃输入下 (最不利的输入);
- (3) 欠阻尼状态下 (常见的希望状态, 可使系统的平稳性和快速性得到较好的折衷)。

上升时间

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3-3)$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

峰值时间

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3-4)$$

最大超调量

$$\sigma_p (\%) = e^{-\frac{\Delta\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \times 100\% \quad (3-5)$$

调整时间

$$t_s \Big|_{\Delta = (\pm 5\% = 2\%)} = \frac{3 - 4}{\zeta\omega_n} \quad (3-6)$$

典型欠阻尼二阶系统动态性能指标随闭环极点位置变化的规律见表 3-5。

表 3-5 二阶系统动态性能指标随闭环极点位置变化的趋势

极点移动轨迹	极点坐标		系统参数		性能指标	
	σ_{ω_n}	$\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$	ζ	m_n	$\sigma_p/\%$	t_s
	I	—	↑	↑	↓	↓
	II	↑	+	↑	↑	—
	III	↑	—	—	—	↓
	IV	↓	↑	↓	—	—

四、高阶系统的时域分析

高阶系统简化分析方法的依据:

(1) 高阶系统的阶跃响应 = 稳态响应 + 暂态响应。

(2) 动态分量的大小和形态与零极点在上平面上的分布有关, 距虚轴近的极点且附近又无闭环零点, 则该极点对应的动态分量因为幅值大且衰减速度慢而对系统动态性能的影响大。远离虚轴的极点或虽靠近虚轴但附近有闭环零点, 则该极点对应的动态分量因为幅值小且衰减速度快而对系统动态性能的影响较小。

(3) 若闭环极点附近有闭环零点且十分靠近, 则这样的一对零极点称为偶极子, 偶极子对动态性能的影响可忽略不计。

主导极点: 常为一对共轭复数极点且: ①附近无闭环零点; ②非主导极点距虚轴的距离比主导极点距虚轴的距离大 5 倍以上 (工程放宽至 2~3 倍)。

主导极点法分析思路: 将高阶系统有条件的 (主导极点满足的条件) 看作典型二阶系统来分析, 简化了分析过程, 分析结果的近似程度取决于主导极点条件的满足程度。

五、控制系统的稳态误差分析及误差系数

典型的闭环控制系统结构如图 3-4 所示。

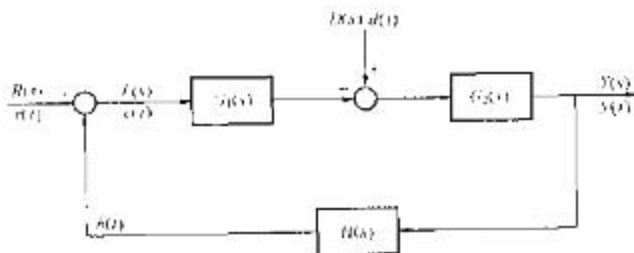


图 3-4 闭环控制系统方框图

误差的定义: 有两种: ①从输入端定义的误差 $e(t) = r(t) - b(t) =$ 参考输入值 - 反馈值; ②从输出端定义的误差 $e(t) =$ 输出希望值 - 实际输出值。第一种定义方式便于量测, 仅研究此种。

稳态误差的定义: 误差的稳态值, 即

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [r(s) - b(s)] \quad (3-7)$$

稳态误差的计算方法:

(1) 利用终值定理计算稳态误差:

从图 3-4 看出在参考输入和扰动输入共同作用下误差的拉氏变换为

$$E(s) = E_r(s) + E_d(s) = \frac{R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} - \frac{G_2(s)H(s)D(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

利用终值定理 $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} [K_r(s) + E_d(s)] = e_{ssr} + e_{ssd} \quad (3-8)$

(2) 静态误差系数法:

确定系统的型 (开环结构中积分环节的个数, 即 s 平面原点处的极点个数), 则稳态误差与系统的参考输入、静态误差系数的关系如表 3-6 所示。

表 3-6 输入信号下的稳态误差综合表

系统类型	输入类型		斜坡输入 $r(t) = r \cdot 1(t)$		抛物线输入 $r(t) = \frac{1}{2} r^2 1(t)$	
	阶跃输入 $r(t) = 1(t)$	静态误差系数	静态误差	静态误差系数	静态误差	静态加速度误差系数
0 型系统	K	$\frac{1}{1+K}$	∞	$\frac{1}{K}$	∞	$\frac{1}{K}$
1 型系统	∞	0	∞	$\frac{1}{K}$	∞	$\frac{1}{K}$
2 型系统	∞	0	∞	0	∞	$\frac{1}{K}$

稳态误差分析中应注意的概念:

- (1) 只有对稳定系统, 计算稳态误差才有意义。
- (2) 误差的拉氏变换 $E(s)$ 在 s 的右半平面解析时 [$E(s)$ 的极点均位于不包含虚轴的 s 左半平面], 才能用终值定理求稳态误差。

(3) 系统的稳态误差仅和开环传递函数的三个参数有关, 即: ① 开环增益 K (即 $G(s)$ “尾 1 型” 时的比例系数); ② 系统的型; ③ 典型参考输入及作用点。

(4) 静态误差系数只适用于二种典型参考输入 (阶跃函数、斜坡函数、抛物线函数) 及其线性组合情况下的稳态误差计算, 且 $r(t)$ 不存在前馈通道, 不适用于扰动输入下的稳态误差计算。

(5) 稳态误差系数针对三种典型参考输入有不同的名称, 但均指稳态情况下输出与输入在位置上的误差。三个稳态误差系数不能串用。

(6) 稳态误差计算出的值只有三种情况: “0”、“ ∞ ”、“非零有限常数” (与开环增益 K 和输入幅值相关的常数), 可用来检验计算结果是否正确。

调差率: 表征阶跃扰动对系统响应稳态值的影响程度, 即

$$\delta_s = - \left. \frac{y_D(\infty)}{y_R(\infty)} \right|_{\substack{r(t)=1(t) \\ d(t)=1(t)}} \quad (3-9)$$

其中, $y_D(\infty)$ 与 $y_R(\infty)$ 分别表示系统对阶跃扰动输入和阶跃参考输入的稳态响应。

当 $d(t)$ 的增加引起 $y_D(\infty)$ 减小时, δ_s 取为正; 当 $d(t)$ 的增加引起 $y_D(\infty)$ 增加时, δ_s 取为负。调差率的绝对值 $|\delta_s|$ 越小, 系统受扰动的影响越小。对图 3-5 所示的单位反馈无差系统:

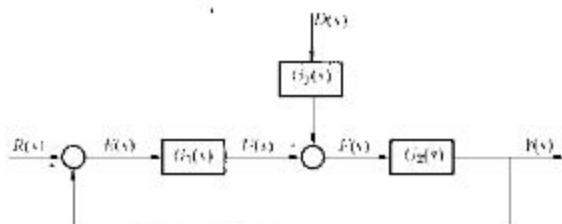


图 3-5 考虑扰动输入的反馈控制系统方框图

当只考虑扰动输入 [$R(s) = 0$] 时, 其传递函数为

$$G_D(s) = \frac{Y_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (3-10)$$

当 $r(t) = 1(t)$ 时, $y_R(\infty) = 1$, 所以

$$\delta_s = -y_D(\infty) = -G_D(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_2(s)G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{G_2(0)G_1(0)}{1 + G_1(0)G_2(0)} \quad (3-11)$$

此式表明: 单位反馈无差系统 (I 型及以上的系统), 调差率只由系统对扰动的传递函数的稳态值 $G_D(0)$ 确定。

减小或消除稳态误差的途径:

(1) 在扰动作用点之前的前向通路中加大增益或加装积分环节, 可同时消除系统在特定 $r(t)$ 、特定 $d(t)$ 下的稳态误差。但应注意过大的增益或积分环节的引入一般对系统的稳定性是不利的, 只有保证系统稳定为前提, 这一措施才有意义。

(2) 前馈补偿方法, 既能减小系统的稳态误差, 又能保证系统的稳定性不变。常见两种方式: 按输入补偿构成复合控制系统, 可消除系统在特定 $r(t)$ 下的稳态误差; 按扰动补偿可消除系统在特定 $d(t)$ 下的稳态误差。以后者为例, 见图 3-6。

选择 $G_4(s) = \frac{G_3(0)}{G_1(0)}$, 使 $y_D(\infty) = 0$, 可消除扰动稳态误差。

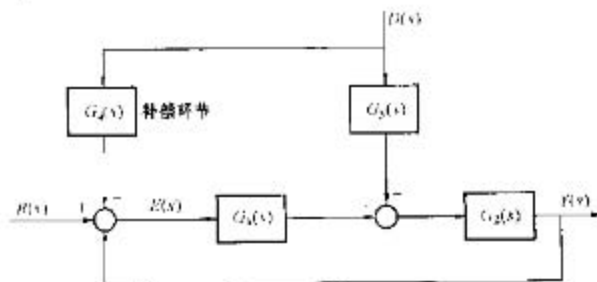


图 3-6 对扰动补偿措施

3.2 习题讲解

3-1 设有一个二阶系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

要求在单位阶跃输入信号下, 输出响应 $y(t)$ 的超调量 $\sigma_p\% \leq 5\%$, 并且当允许稳态误差范围 $\Delta = \pm 2\%$ 时的调整时间 $t_s = 2s$, 试求系统的 ζ 和 ω_n 应为何值?

解

$$\text{由 } \begin{cases} \sigma_p\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 5\% \\ t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2 \text{ (s)} \end{cases}$$

$$\text{得 } \ln 0.05 = -\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx -3$$

$$(\pi^2 + 9)\zeta^2 = 9 \quad \zeta = \sqrt{\frac{9}{\pi^2 + 9}} \approx 0.69$$

$$\omega_n = \frac{4}{2 \times 0.69} \approx 2.9 \text{ (rad/s)}$$

【评注】 应记住典型二阶系统性能指标的计算公式, 其中 $\sigma_p\%$ 是 ζ 的单值函数, 由 $\sigma_p\%$ 确定 ζ , t_s 确定 ω_n .

3-2 设一单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{10}{s(0.1s + 1)}$$

试求系统的阻尼比, 无阻尼自然振荡频率 ω_n , 超调量 σ_p 及峰值时间 t_p , $\Delta = \pm 5\%$ 时的调整时间 t_s .

解

$$G_0(s) = \frac{10}{s(0.1s + 1)} = \frac{100}{s(s + 10)}$$

$$\omega_n = \sqrt{100} = 10 \text{ (rad/s)}$$

$$\therefore 2\zeta\omega_n = 10$$

$$\therefore \zeta = \frac{10}{2 \times 10} = 0.5 \text{ 得出:}$$

$$\begin{cases} \sigma_p\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 16.3\% \\ t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{10 \sqrt{1-0.5^2}} = 0.363 \text{ (s)} \\ t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{0.5 \times 10} = 0.6 \text{ (s)} \end{cases}$$

【评注】 应牢记二阶系统的标准形式, 这样就易于由已知系统求出参数, 进而再由参数 ζ 、 ω_n , 求出相应的性能指标。

3-3 已知二阶系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s(3+7s)}{(1+3s)(1+5s)}$$

设输入为 $r(t) = 1(t)$, 求输出响应 $y(t)$ 。

解 $r(t) = 1(t), R(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{s(3+7s)}{(1+3s)(1+5s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{3+7s}{(1+3s)(1+5s)}$$
$$= \frac{(3+7s)/15}{\left(s + \frac{1}{3}\right)\left(s + \frac{1}{5}\right)} = \frac{A}{s + \frac{1}{3}} + \frac{B}{s + \frac{1}{5}}$$

其中 $A = Y(s)\left(s + \frac{1}{3}\right)\Big|_{s = -\frac{1}{3}} = -\frac{4}{3}$

$$B = Y(s)\left(s + \frac{1}{5}\right)\Big|_{s = -\frac{1}{5}} = \frac{4}{5}$$

$$y(t) = \frac{4}{5}e^{-\frac{1}{5}t} - \frac{4}{3}e^{-\frac{1}{3}t}$$

3-4 已知系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{13s^2}{(s+5)(s+6)}$$

设输入信号 $r(t) = \frac{1}{2}t^2$, 求输出响应 $y(t)$ 。

解 $Y(s) = \frac{13s^2}{(s+5)(s+6)} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{13}{s(s+5)(s+6)}$

$$= \frac{13/30}{s} - \frac{13/5}{(s+5)} + \frac{13/6}{(s+6)}$$

$$y(t) = \frac{13}{30} - \frac{13}{5}e^{-5t} + \frac{13}{6}e^{-6t}$$

3-5 设系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

(1) 试求 $\zeta = 0.1, \omega_n = 5s^{-1}$; $\zeta = 0.1, \omega_n = 10s^{-1}$ 时单位阶跃响应的超调量 σ_p (%) 和调整时间 t_s ($\Delta = \pm 5\%$)。

(2) 试求 $\zeta = 0.5, \omega_n = 5s^{-1}$ 时单位阶跃响应的超调量 σ_p (%) 和调整时间 t_s ($\Delta = \pm 5\%$)。

(3) 讨论参数 ζ 和 ω_n 与过渡过程的关系。

解 (1) $\sigma_p \% = e^{-\frac{0.1 \times \pi}{\sqrt{1-0.1^2}}} \times 100 \% = 73 \%$

$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} = \begin{cases} 6 \text{ (s)}, & \omega_n = 5 \text{ s}^{-1} \text{ 时} \\ 3 \text{ (s)}, & \omega_n = 10 \text{ s}^{-1} \text{ 时} \end{cases}$$

(2) $\sigma_p \% = e^{-\frac{0.5 \times \pi}{\sqrt{1-0.5^2}}} \times 100 \% = 16.3 \%$

$$t_s = \frac{3}{0.5 \times 5} = 1.2 \text{ (s)}$$

(3) 超调量唯一地由阻尼比 ζ 决定, 阻尼比 ζ 越小, $\sigma_p \%$ 越大; ζ 不变时, ω_n 愈大, 调整时间 t_s 愈短; ω_n 不变时, 阻尼比愈大, t_s 愈短, 因此决定系统参数时, 先由要求的 $\sigma_p \%$ 确定 ζ , 再由要求的 t_s 确定 ω_n 。

3-6 设系统方框图如图 3-7 所示, 若欲使系统的单位阶跃响应 $y(t)$ 的最大超调量 $\sigma_p \%$ 不超过 20%, 峰值时间 t_p 等于 1s, 试确定图 3-7 中增益 K 及速度反馈系数 K' 的数值, 并确定在 K 和 K' 的数值取值情况下, 系统单位阶跃响应的上升时间 t_r 和调整时间 t_s ($\Delta = \pm 2\%$)。

解 由图得闭环特征方程为

$$1 + \frac{K(1+K's)}{s(s+1)} = 0$$

$$s^2 + (1+KK')s + K = 0$$

因此 $K = \omega_n^2, \zeta = \frac{1+KK'}{2\omega_n}$

由已知条件 $\sigma_p \% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 \% = 20 \%$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 1$$

得出 $\zeta = 0.46, \omega_n = 3.54$

$$K = 12.5, K' = \frac{2\zeta\omega_n - 1}{K} = 0.18$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \text{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-0.46^2}}{0.46} = 0.93 \text{ (rad)}$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{3.14 - 0.93}{3.54 \sqrt{1-0.46^2}} = 0.7 \text{ (s)}$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.46 \times 3.54} = 2.2 \text{ (s)}$$

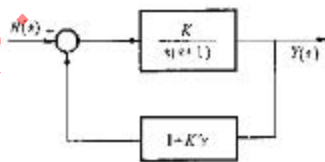


图 3-7 习题 3-6 图

3-7 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_v(s) = \frac{100}{s(s+10)}$$

试求: (1) 位置误差系数 K_p , 速度误差系数 K_v 和加速度误差系数 K_a ;

(2) 当参考输入 $r(t) = 1 + t + at^2$ 时, 求系统的稳态误差。

解 $G_0(s) = \frac{100}{s(s+10)} = \frac{10}{s\left(\frac{1}{10}s+1\right)}$

(1) $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{s\left(\frac{1}{10}s+1\right)} = \infty$

$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{s\left(\frac{1}{10}s+1\right)} = 10$

$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{10}{s\left(\frac{1}{10}s+1\right)} = 0$

(2) 应用叠加原理

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} + \frac{1}{K_v} + \frac{2a}{K_a} = \frac{1}{1+\infty} + \frac{1}{10} + \frac{2a}{0} = \infty$$

【评注】借助于稳态误差系数求系统的稳态误差, 应将开环传递函数写成 $G_0(s) = \frac{K}{s^N} \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)$ 的形式最为方便, 此时若 $N=0, K=K_p; N=1, K=K_v; N=2, K=K_a$ 。此

例 $N=1, K_v=K=10$ 。综合输入下, 已知系统为 I 型, 不能跟踪 at^2 , 所以可直接得到 $e_{ss} = \infty$, 而不必每个输入下的稳态误差都计算出来。

3-8 设系统的方框图如图 3-8 所示, 图中 $G_0(s)$ 为受控对象的传递函数, $G_c(s)$ 为比例-微分控制器, 当输入信号 $r(t) = A_1 \cdot 1(t) + B_1 t + \frac{1}{2} c_1 t^2$ 时, 求系统的稳态误差。

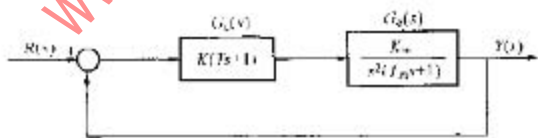


图 3-8 习题 3-8 图

解 系统开环传递函数 $G_0(s) = \frac{KK_m(Ts+1)}{s^2(T_m s+1)}$

系统为 2 型, 跟踪阶跃输入和斜坡输入无差, 跟踪抛物线输入的稳态误差系数

$K_a = \frac{1}{KK_m}$, 所以

$$e_{ss} = 0 + 0 + \frac{c_1}{KK_m} = \frac{c_1}{KK_m}$$

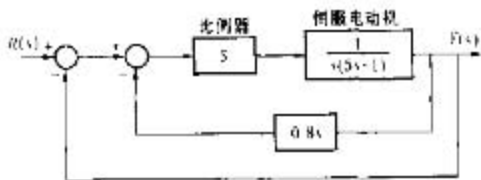


图 3-9 习题 3-9 图

3-9 设有一电动机转速控制系统的方框图如图 3-9 所示。已知输入信号为 $r(t) = A_1 \cdot 1(t) + A_2 t + \frac{A_3}{2} t^2$, 求系统的稳态误差。

$$\text{解 } G_0(s) = \frac{5}{1 + \frac{5}{s(5s+1)} + 0.8s} = \frac{5}{s(5s+5)} = \frac{1}{s(s+1)}$$

系统为 I 型, 不能跟踪抛物线输入, 所以 $e_{ss} = \infty$

3-10 设单位反馈系统的开环传递函数 $G(s)H(s)$ 及输入信号 $r(t)$ 为

$$(1) G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+4)}, r(t) = 10t;$$

$$(2) G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+4)}, r(t) = 4 + 6t + 3t^2;$$

$$(3) G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+4)}, r(t) = 4 + 6t + 3t^2 + 1.8t^3.$$

试求以上三种情况的稳态误差 e_{ss} 。

解 三种情况的输入不同, 系统 $G(s)H(s)$ 相同为 I 型系统, 不能跟踪抛物线输入, 跟踪斜坡输入有差, 所以

$$(1) e_{ss} = \frac{10}{K_v} = \frac{10}{K} = \frac{10}{10/4} = 4$$

$$(2) e_{ss} = \infty$$

$$(3) e_{ss} = \infty$$

3-11 设一控制系统的框图如图 3-10 所示。已知参考输入 $r(t) = A \cdot 1(t)$, 扰动输入 $d(t) = 2 \cdot 1(t)$, 求:

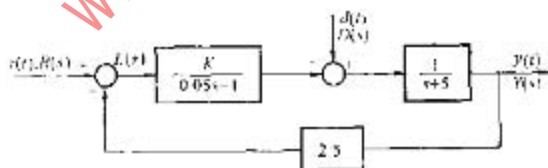


图 3-10 习题 3-11 图

(1) $K = 40$ 时, 系统的稳态误差 e_{ss} ;

(2) $K = 20$ 时, 系统的稳态误差 e_{ss} 。

解 $r(t)$ 单独作用时, $d(t) = 0$

$$G_0(s) = \frac{2.5K}{(0.05s+1)(s+5)} = \frac{0.5K}{(0.05s+1)\left(\frac{1}{5}s+1\right)}$$

系统为 0 型, $e_{ss} = \frac{A}{1+0.5K}$

$d(t)$ 单独作用时, $r(t) = 0$

$$\frac{E_D(s)}{D(s)} = \frac{-\frac{2.5}{s+5}}{1 + \frac{2.5K}{(0.05s+1)(s+5)}} = \frac{-2.5(0.05s+1)}{0.05s^2 + 1.25s + 5 + 2.5K}$$

$$e_{ssd} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-2.5(0.05s+1)}{0.05s^2 + 1.25s + 5 + 2.5K} \cdot \frac{2}{s}$$

$$= \frac{-5}{5 + 2.5K}$$

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd}$$

$$(1) K = 40 \text{ 时, } e_{ss} = \frac{A}{1 + 2.5 \times 40} - \frac{5}{5 + 2.5 \times 40} = \frac{A-1}{21}$$

$$(2) K = 20 \text{ 时, } e_{ss} = \frac{A}{1 + 0.5 \times 20} - \frac{5}{5 + 2.5 \times 20} = \frac{A-1}{11}$$

【评注】参考输入和扰动输入共同作用下的稳态误差, 应用叠加原理求, 其中扰动输入不适用于稳态误差系数, 只能用终值定理求。

3-12 在上题的图 3-10 中:

(1) 在扰动作用点之前串入积分环节 $\frac{1}{s}$, 求系统的稳态误差 e_{ss} ;

(2) 在扰动作用点之后串入积分环节 $\frac{1}{s}$, 求系统的稳态误差 e_{ss} 并假设 $r(t) = 1(t)$, $d(t) = 1(t)$, $K = K_1$;

(3) 在上列(2)的情况下, 对扰动加装比例型补偿环节, 以使调差率 $\sigma_s = 0.04$, 试画出补偿方框图, 及补偿环节的比例系数数值 K_2 。

解 (1) 串入积分环节后, 系统为 1 型, 跟踪阶跃输入无差, 所以 $e_{ssr} = 0$

$$\frac{E_D(s)}{D(s)} = \frac{-2.5/s+5}{1 + \frac{2.5K}{s(0.05s+1)(s+5)}}$$

$$e_{ssd} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-2.5}{s+5 + \frac{2.5K}{s(0.05s+1)}} \cdot \frac{2}{s} = 0$$

$$\therefore e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd} = 0$$

$$(2) \frac{E_D(s)}{D(s)} = \frac{-2.5/s(s+5)}{1 + \frac{2.5K_1}{s(s+5)(0.05s+1)}} = \frac{-2.5}{s(s+5) + \frac{2.5K_1}{(0.05s+1)}}$$

$$e_{ssd} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-2.5}{s(s+5) + \frac{2.5K_1}{(0.05s+1)}} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{1}{K_1}$$

e_{ssr} 与(1)一样, 等于零

$$\therefore e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd} = -\frac{1}{K_1}$$

(3) 补偿方框图见图 3-11。

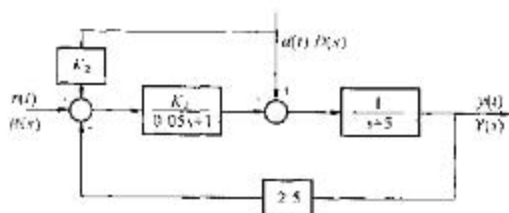


图 3-11 补偿方框图

$$Y_D(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y_D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s+5} + \frac{-K_1 K_2}{(0.05s+1)(s+5)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.05s+1-K_1 K_2}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K_1} = \frac{1-K_1 K_2}{5+2.5K_1}$$

$$Y_R(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y_R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K_1}{(0.05s+1)(s+5)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K_1} = \frac{K_1}{5+2.5K_1}$$

$$\therefore \delta_s = -\frac{Y_D(\infty)}{Y_R(\infty)} \Big|_{\substack{U(s)=10(s) \\ a(t)=1(t)}} = 0.04$$

$$\text{即 } -\frac{1-K_1 K_2}{5+2.5K_1} \cdot \frac{5+2.5K_1}{K_1} = -0.04$$

$$\therefore K_2 = \frac{-1}{K_1} - 0.04$$

3.3 同步练习

一、名词解释

1. 超调量 2. 主导极点 3. 系统的型 4. 二阶振荡系统

二、多项选择题

1. 过阻尼系统的时域性能指标有_____。
- A. t_p B. σ_p C. t_r D. t_s
2. 对二阶系统 (I 型), 增大开环增益 K , 则会引起_____。
- A. 阻尼比减小, 超调量增大 B. 阻尼比增大, 超调量减小
- C. ω_n 增大, 上升时间减小 D. 稳态误差减小
3. 系统的稳态误差取决于_____。
- A. 系统各环节的时间常数 B. 系统的型
- C. 控制输入信号 D. 开环增益 K
4. 典型二阶系统工作于欠阻尼状态, 若增加阻尼比, 则_____。

A. 超调量增大 B. 超调量减小 C. 超调量不变 D. 峰值时间加大

5. 控制系统的开环传递函数 $G_0(s) = \frac{10(s+0.5)}{s(0.5s+1)(s^2+2s+2)}$, 系统的开环增益 K 为__

A. 10 B. 2.5 C. $K=K_c$ D. 0.5

三、填空题

1. 二阶系统随阻尼比不同, 其特征根和单位阶跃响应不同, 当阻尼比为__时, 特征根为一对共轭复根, 响应曲线为__; 当阻尼比为__时, 特征根为两个相等的实根, 响应曲线为__; 当阻尼比 $\zeta > 1$ 时, 特征根为两个__。

2. 系统的响应由两部分组成, 动态分量决定了系统的__, 稳态分量决定了系统的__。

3. 当输入为斜坡函数时__型以上的系统, 才能使稳态误差为零。

4. 对于高阶系统, 如果能找到一对(或一个)__, 则高阶系统可近似用__系统进行分析。

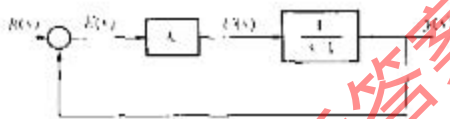


图 3-12

四、问答题

1. 为什么控制工程中常把二阶系统设计为欠阻尼?

2. 系统的稳态误差与动态性能的改善, 在对系统的型和开环增益的要求上有矛盾吗? 若有的话, 如何解决?

3. 一阶系统如图 3-12 所示, 在阶跃输入时, 系统为什么一定有稳态误差存在?

五、计算题

1. 设温度计可用一惯性环节 $\frac{1}{Ts+1}$ 描述, 测量水温时, 要求在 1min 时显示出稳态值的 98%, 求时间常数 T 。如果给容器中的水加热, 使水温以 $10^\circ\text{C}/\text{min}$ 的速度线性上升, 问温度计的稳态指示误差有多大?

【评注】 练习一阶环节的调整时间、稳态误差分析。

2. 已知 4 个二阶系统的闭环极点分布如图 3-13 所示, 试按表格 3-7 的形式比较它们的性能。



图 3-13

表 3-7 二阶系统性能比较

比较项目		振荡频率	阻尼比	衰减速度
I	1			
	2			
II	3			
	4			

【评注】 定性分析闭环极点位置与动态性能或参数之间的关系, 即闭环极点实部、虚部变化时与动态性能的关系。

3. 典型二阶系统单位阶跃响应曲线如图 3-14 所示, 确定系统的闭环传递函数。

【评注】 由图中可得到 $\sigma_p\%$ 和 t_p 值, 从而求出阻尼比 ζ 和自然振荡频率 ω_n , 代入 $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 中即可, 掌握性能指标与参数的对应关系。注意 $\sigma_p\% = 25\%$, 不是 50%, 单位阶跃响应的稳态值为 2, 不是 1, 可推断 $K=2$ 。

4. 系统结构如图 3-15 所示, 要求阻尼比 $\zeta=0.6$, 试确定 K_f 值, 并计算 $\sigma_p\%$ 、 t_p 、 t_s 。

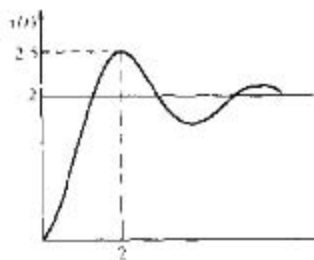


图 3-14

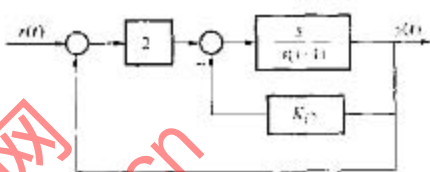


图 3-15

【评注】 二阶系统性能与参数对应, 参数与传递函数标准型式相联系, 掌握二阶系统开、闭环传递函数的标准型式, 参数及性能的关系是分析解答此类题目的关键。

5. 试求图 3-16 中的稳态误差, 已知 $r(t) = 1(t)$, $d(t) = 0.1 \times 1(t)$ 。

【评注】 应用迭加原理分别求 $r(t)$ 和 $d(t)$ 作用下的稳态误差, 其中 $r(t)$ 作用下的稳态误差可以用静态误差系数法, $K=200$, I 型系统, $e_{ssr}=0$, 而扰动作用下的稳态误差不能借助于静态系数法, 而应为:

$$e_{ssd} = \lim_{s \rightarrow 0} sY_D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_D(s)D(s)$$

6. 系统结构如图 3-17 所示, 分别计算 $r(t) = t \cdot 1(t)$ 、 $d(t) = 1(t)$ 时系统的稳态误差, 说明开环放大系数在闭合回路上的分布对 $r(t)$ 和 $d(t)$ 作用下的稳态误差的影响。若使稳态误差为零, 可采取什么措施。

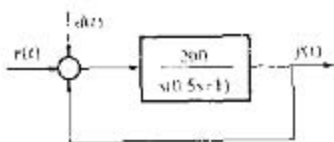


图 3-16

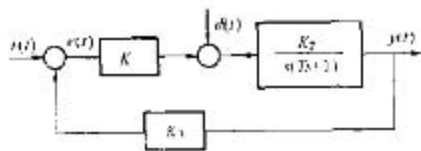


图 3-17

【评注】 用静态误差系数法可得出 $e_{ssr} = \frac{1}{K_1 K_2 K_3}$, 用终值定理求出 $e_{ssd} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_D(s) \times D(s) = -\frac{1}{K_1}$, 说明了开环放大系数不论分布在闭合回路哪一段, 均可减小 $r(t)$ 作用下的稳

态误差 e_{ss} 。欲减小 $d(t)$ 作用下的稳态误差 e_{ss} , 则只有在扰动作用点之前设置才有效。若使稳态误差为零, 可在扰动作用点之前加入积分环节即可。

3.4 参 考 答 案

一、名词解释

1. 超调量——描述系统的相对稳定性指标。动态响应曲线偏离稳态值的最大偏差值的百分数。

2. 主导极点——如果系统闭环极点中有一个极点或一对复数极点距虚轴最近且附近没有其他闭环零点, 则它在响应中起主导作用称主导极点。

3. 系统的型——按系统开环传递函数中积分环节的个数分类

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}{s^N \prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}$$

当 $N=0, 1, 2, \dots$ 时, 分别称为 0 型, 1 型, 2 型, \dots 系统。

4. 二阶振荡系统——二阶系统中, 阻尼比 $0 < \zeta < 1$, 单位阶跃响应为正弦衰减振荡曲线

二、选择题

1. C、D 2. A、C、D 3. B、C、D 4. B、D 5. B、C

三、填空题

1. $0 < \zeta < 1$ 正弦衰减振荡 $\zeta = 1$ 无振荡的单调上升 不相等的实数根

2. 动态性能 稳态精度

3. 2 型

4. 主导极点 二阶 (或一阶)

四、问答题

1. 二阶系统在欠阻尼时虽有振荡, 但只要阻尼比选择适当, 则系统响应的快速性和过渡过程的平稳性可以得到兼顾。

2. 有矛盾。开环增益增大, 或系统的型提高, 可以改善或消除系统的稳态误差, 但同时会影响系统的动态性能, 乃至影响系统的稳定性。采用按扰动进行补偿 (讲义图 3-28) 和按输入进行补偿的方法, 可以在不影响系统稳定性的前提下, 提高系统的稳态精度。

3. 令阶跃输入 $r(t) = A$, 假设 $y(t)$ 能等于 A , 则 $e(t) = 0, u(t) = Ke(t) = 0, y(t) = 0$, 与假设矛盾。为使此类系统在阶跃输入时能正常工作, 系统 $e(t)$ 一定存在, 且稳态误差等于 $\frac{A}{1+K}$, 不等于零。

五、计算题

1. $T = 15s$, 稳态指示误差 $e_{ss} = 2.5$

2.

组别	系统	比较项目		
		振荡频率 (高、低)	阻尼比 (大、中、小)	衰减速度 (快、慢)
I	1	低	中	慢
	2	高	小	慢
II	1	低	中	慢
	3	高	中	快
III	1	低	中	慢
	4	低	大	快

$$3. G(s) = \frac{5.9}{s^2 + 1.39s + 2.95} \quad (\zeta = 0.404, \omega_n = 1.717, K = 2)$$

$$4. K_1 = 0.56 \quad \sigma_p \% = 9.5\% \quad t_p = 1.24s \quad t_s = 1.86s$$

$$5. e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd} = 0 - 0.1 = -0.1$$

$$6. e_{ssr} = \frac{1}{K_1 K_2 K_3} \quad e_{ssd} = -\frac{1}{K_1}, \text{ 若使稳态误差为零, 可在扰动作用点之前加入积分环}$$

7. $\frac{1}{s}$

课后答案网
www.hackshp.cn

第4章 频域分析法

- ☆ 频率特性的基本概念
- ☆ 频率特性的极坐标图
- ☆ 频率特性的对数坐标图
- ☆ 最小相位系统
- ☆ 频域指标与时域指标的关系

4.1 内容提示

一、频率特性的基本概念

频率特性的定义: 稳定的线性系统, 在正弦信号作用下, 系统的稳态输出为同频率的正弦函数, 但幅值和相位均发生变化。其幅值与输入正弦信号的幅值之比 $M(\omega)$ 称为幅频特性; 其相位与输入正弦信号的相位之差 $\theta(\omega)$ 称为相频特性。 $M(\omega)$ 和 $\theta(\omega)$ 合起来称为系统的频率特性。

频率特性的表示方法

指数式 $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} = M(\omega) e^{j\theta(\omega)}$ (4-1)

直角坐标式 $G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ (4-2)

其中 $R(\omega)$, $I(\omega)$ 分别是 $G(j\omega)$ 的实部和虚部, 称为实频特性和虚频特性。

式 (4-1) 和式 (4-2) 的相互转换关系为

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

$$\theta(\omega) = \angle G(j\omega) = \text{tg}^{-1} \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$$

$$R(\omega) = M(\omega) \cos \theta(\omega)$$

$$I(\omega) = M(\omega) \sin \theta(\omega)$$

频率特性与传递函数的关系: 频率特性是传递函数的特殊形式, 即

$$G(j\omega) = G(s) |_{s=j\omega}$$

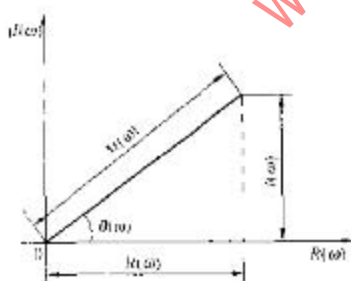


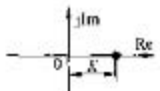
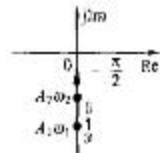
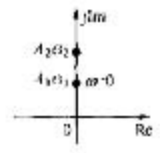
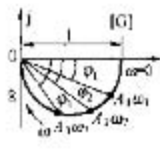
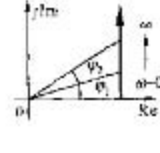
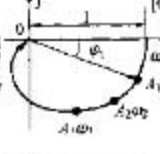
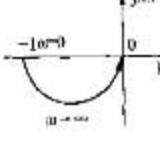
图 4-1 频率特性 $G(j\omega)$ 两种表示方法的关系

二、频率特性的极坐标图

基本概念: 频率特性的极坐标图有两个称呼, 即幅相特性曲线和奈氏 (Nyquist) 曲线。它是以 ω 为参变量, 以复平面上的矢量表示 $G(j\omega)$ 的一种方法。正频段和负频段的极坐标图对称于复平面上的实轴。

常见典型环节的频率特性见表 4-1。

表 4-1 典型环节频率特性

典型环节	幅相频率特性 $G(j\omega)$	幅频特性 $A(\omega)$	相位频率特性 $\varphi(\omega)$	幅相频率特性曲线
放大环节 K	Ke^{j0}	K	0°	
积分环节 $\frac{1}{s}$	$\frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{j(-\frac{\pi}{2})}$	$\frac{1}{\omega}$	-90°	
微分环节 s	$j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$	ω	$+90^\circ$	
惯性环节 $\frac{1}{Ts+1}$	$\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} e^{-\arctan(T\omega)}$	$\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$	$-\arctan(T\omega)$	
一阶微分环节 $Ts+1$	$j\omega T + 1$	$\sqrt{(T\omega)^2+1}$	$\arctan(T\omega)$	
振荡环节 $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2} = \frac{1}{\sqrt{[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2+(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}} e^{-\arctan(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2})}$	$\frac{1}{\sqrt{[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2+(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$	$-\arctan\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}\right)$	
不稳定环节 $\frac{1}{Ts-1}$	$\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{j(180^\circ-\arctan(T\omega))}$	$\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$	$-180^\circ + \arctan(T\omega)$	

续表

典型环节	对数幅频特性 $20\lg A(\omega)$	相位频率特性 $\varphi(\omega)$	对数幅频特性曲线 $20\lg A(\omega)$ 、 相频 $\varphi(\omega)$ 特性曲线
放大环节 K	$20\lg K$	0°	
积分环节 $\frac{1}{s}$	$-20\lg \omega$	-90°	
微分环节 s	$20\lg \omega$	$+90^\circ$	
惯性环节 $\frac{1}{Ts+1}$	$-20\lg \sqrt{1+T^2\omega^2}$	$-\arctan(T\omega)$	
一阶微分环节 $Ts+1$	$20\lg \sqrt{1+(T\omega)^2}$	$\arctan(T\omega)$	
振荡环节 $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$20\lg \frac{1}{\sqrt{[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + (2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$	$-\arctan \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$	
不稳定环节 $\frac{1}{Ts-1}$	$-20\lg \sqrt{T^2\omega^2-1}$	$-180^\circ + \arctan(T\omega)$	

开环频率特性极坐标图的一般形状:

(1) 开环奈氏图的低频段的形状由开环增益 K 和系统的型决定。因为

$$G(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{K \prod_{i=1}^v (\tau_i j\omega + 1)}{(j\omega)^v \prod_{j=1}^n (T_j j\omega + 1)} \Big|_{\omega \rightarrow 0} \approx \frac{K}{(j\omega)^v} = \begin{cases} K \angle 0^\circ \cdots v = 0 \\ \infty \angle -v90^\circ \cdots v \neq 0 \end{cases} \quad (4-3)$$

v 为系统的型。图 4-2 为 0 型、1 型、2 型系统低频段极坐标图的一般形状。

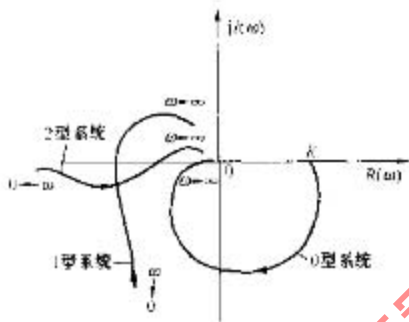


图 4-2 0 型、1 型、2 型系统低频段极坐标图的一般形状图

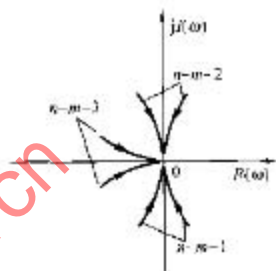


图 4-3 高频段的极坐标图

(2) 开环奈氏图高频段的形状为: $G(j\omega)$ 曲线以顺时针方向按 $-90^\circ (n-m)$ 的角度趋向于坐标原点, 图 4-3 为高频段的极坐标图。

(3) 如果系统不包含微分环节, 即式 (4-3) 中 $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_n = 0$, 开环频率特性极坐标图的相角随着 ω 的增加连续地减小, 中频段 ($0 < \omega < \infty$) 是一条光滑的曲线, 否则可能出现弯曲, 图 4-4 就是开环奈氏图与分子动态特性关系的一个例子。

开环奈氏图的概略绘图法:

(1) 决定特殊点的位置。这些特殊点包括图形的起点和终点 (利用图

4-2 和图 4-3 高、低频段的一般形状可画出)、 $\omega = \frac{1}{T}$ 的点、曲线过负实轴的点 (令频率特性表达式的虚部为零可求出)。

(2) 特殊点之间的部分描点连线画出, 并注意中频段与分子动态特性的关系。

三、频率特性的对数坐标图

基本概念: 由对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线组成。横坐标采用 $\lg \omega$ 分度, 标注值仍为 ω ; 对数幅频特性曲线的纵坐标按 $L(\omega) = 20 \lg |G|$ 分度, 单位为分贝, 用 dB

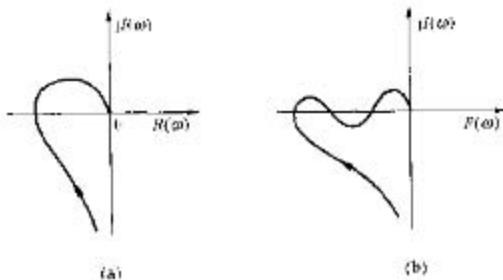


图 4-4 开环奈氏图与分子动态特性的关系
(a) 不包含微分环节; (b) 包含微分环节

表示; 对数相频特性曲线的纵坐标按角度分度。频率特性的对数坐标图又称为伯德图 (Bode 图)。

Bode 图常用术语:

- (1) 十倍频程: 频率每增加十倍的频带宽度。
- (2) 斜率以 (dB/dec) 表示, 指频率每改变十倍频程时, $L(\omega)$ 的改变量。

(一) 典型环节的 Bode 图

典型环节的 Bode 图有如下特点:

(1) 互为倒数的典型环节的对数幅频特性和对数相频特性只相差一个符号, Bode 图对称于横轴。

(2) 典型环节的渐近线斜率、典型环节 ω 从 0 到 ∞ 变化时, 相角的变化范围归纳为表 4-2。

表 4-2 典型环节 Bode 图的变化特征

典型环节	变化特征	对数幅频特性在转折频率处斜率变化	对数相频特性
比例环节		斜率为零	0°
积分环节		无转折频率, 一个积分环节斜率 -20 (dB/dec)	-90°
微分环节		无转折频率, 一个微分环节斜率 20 (dB/dec)	$+90^\circ$
惯性环节		在转折频率处斜率减小 20 (dB/dec)	$0^\circ \sim -90^\circ$
振荡环节		在转折频率处斜率减小 40 (dB/dec)	$0^\circ \sim -180^\circ$
一阶微分环节		在转折频率处斜率增大 20 (dB/dec)	$0^\circ \sim 90^\circ$
二阶微分环节		在转折频率处斜率增大 40 (dB/dec)	$0^\circ \sim 180^\circ$

注: 转折频率处对数相频特性为相角变化范围的一半。

掌握典型环节 Bode 图的变化特征是绘制系统开环 Bode 图的基础。

(二) 开环 Bode 图的绘制

(1) 将开环传递函数写成“尾 1 型”标准形式 (并分解为典型环节的形式), 把所含各典型环节的转折频率由小到大依次标注在 ω 轴上。

(2) 绘制开环对数幅频特性曲线。画起始段是关键, 起始段是第一个转折频率之前的线段, 它取决于系统的型 N 和开环增益 K , 其低频段的斜率由型 N 决定: 为 $-20N$ (dB/dec); 起始线段或其延长线必通过一点, 此点由开环增益 K 决定, 具体有两种方法确定此点: ①在 $\omega = 1$ 处, $L(\omega) = 20\lg K$ (若 $N = 0$, 作高度为 $20\lg K$ 的水平线); ②起始段或其延长线与零分贝线的交点频率等于 $K^{1/N}$ 。

(3) 从起始段开始, 沿着频率增大的方向, 按环节的斜率相加, 即每遇到一个转折频率就改变一次分段直线的斜率 (遵循表 4-2)。分段直线最后一段为高频段, 其斜率为 $-20(n-m)$ dB/dec。

(4) 如果需要, 按各典型环节的误差曲线进行修正。

(5) 绘制开环对数相频特性曲线。将各典型环节的 $\theta_i(\omega)$ 画出, 从低频段到高频段

逐段叠加即可。对数相频特性曲线高频段的角度为 $-(n-m)90^\circ$ 。

(三) 最小相位系统和非最小相位系统

(1) 基本概念。如果系统的开环传递函数在右半 s 平面没有零点和极点, 则对应的系统称为最小相位系统, 否则称为非最小相位系统。典型环节组成的系统一定是最小相位系统, 含有开环不稳定环节或延迟环节的系统, 一定是非最小相位系统。

(2) 最小相位系统和非最小相位系统的关系:

- 1) 结构类似的最小相位系统和非最小相位系统的幅频特性完全相同。
- 2) 最小相位系统的相角变化范围是最小的。

(3) 对最小相位系统而言, 一个幅频特性只有唯一的一个相频特性与之对应, 所以依据最小相位系统的幅频特性, 就可直接写出系统的传递函数 (低频段的形状和位置决定开环增益 K 和系统的型 N , 转角频率及转角频率处的斜变化决定系统其他典型环节的形式)。

(四) 系统开环对数频率特性与闭环稳态误差的关系

在给定输入系统后, 闭环稳态误差只和系统的型 N 及开环增益 K 有关, 所以通过观察 Bode 图低频段的形状和位置即可决定系统的稳态误差。依据的公式是

$$L(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = 20 \lg \left| \frac{K}{j\omega^N} \right| = -20N \lg \omega + 20 \lg K |_{\omega=1} = 20 \lg K \quad (4-4)$$

与 0 (dB) 线的交点, 即模为 1, 由式 (4-4) 得到

$$\left| \frac{K}{j\omega^N} \right| = 1 \quad \omega^N = K \quad (4-5)$$

具体做法如下:

(1) 0 型系统 $N=0$, $K=K_p$, 幅频特性低频段渐近线的斜率为 0 (dB/dec), 纵坐标高度为 $20 \lg K_p$ 。

在单位阶跃输入下, 系统闭环稳态误差 $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$ 。

(2) 1 型系统 $N=1$, $K=K_v$, 由式 (4-4) 可知, 幅频特性低频段渐近线的斜率为 -20 (dB/dec)。

求速度误差系数的方法有两种:

1) 由式 (4-4) 可知, 低频段渐近线或其延长线在 $\omega=1$ 处的幅值为 $20 \lg K_v$ (dB), 可求出 K_v 。

2) 由式 (4-5) 可知, 低频段渐近线或其延长线与 0 (dB) 线的交点 (即模为 1) 处的频率 $\omega = K_v$ 。

在单位斜坡输入下, 系统闭环稳态误差 $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$ 。

(3) 2 型系统 $N=2$, $K=K_a$, 由式 (4-4) 可知, 幅频特性低频段渐近线的斜率为 -40 (dB/dec)。

求速度误差系数的方法有两种:

1) 由式 (4-4) 可知, 渐近线或其延长线在 $\omega = 1$ 处的幅值为 $20\lg K_s$ (dB), 可求出 K_s .

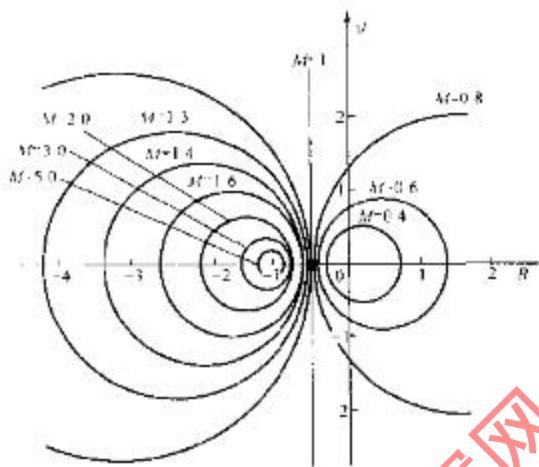


图 4-5 等 M 圆图

以上两种方法只适用于数学模型已知的情況。

(3) 若已知单位反馈系统的开环频率特性 $G(j\omega)$ 的奈氏图, 利用等 M 圆和等 N 圆的幅相频率特性图, 求闭环频率特性。

开环频率特性 $G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$

闭环频率特性 $W(j\omega) = M(\omega)e^{j\mu(\omega)}$

(4-6)

则 $R(\omega)$ 、 $I(\omega)$ 、 $M(\omega)$ 满足圆的方程

$$\left(R + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + I^2 = \left(\frac{M}{M^2 - 1}\right)^2$$

给定 M , 在 $R-I$ 平面上得到一圆, 变动 M 得到一族圆, 称为等 M 圆, 如图 4-5 所示。

令 $N = \operatorname{tg} \alpha$, 则 $R(\omega)$ 、 $I(\omega)$ 、 N 满足圆的方程

$$\left(R + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(I - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2}$$

给定 N , 在 $R-I$ 平面上得到一圆, 变动 N 得到一族圆, 称为等 N 圆。如图 4-6 所示。

将系统开环频率特性 $G(j\omega)$ 的奈氏图, 叠画在等 M 圆和等 N 圆图上, 得到奈氏图与等 M 圆和等 N 圆交点, 由交点对

2) 由式 (4-5) 可知, 渐近线或其延长线与 0 (dB) 线的交点处的频率 $\omega =$

$$\sqrt{K_s}, K_s = \omega^2$$

在单位抛物线输入下, 系统闭环

稳态误差 $e_{ss} = \frac{1}{K_s}$ 。

四、闭环系统的幅相频率特性

(一) 闭环频率特性的求法

(1) 若已知闭环传递函数 $W(s)$, 则闭环频率特性 $W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}$ 。

(2) 若已知开环传递函数 $G(s)$ 、 $H(s)$, 则闭环传递函数 $W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$, 闭环频率特性 $W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}$ 。

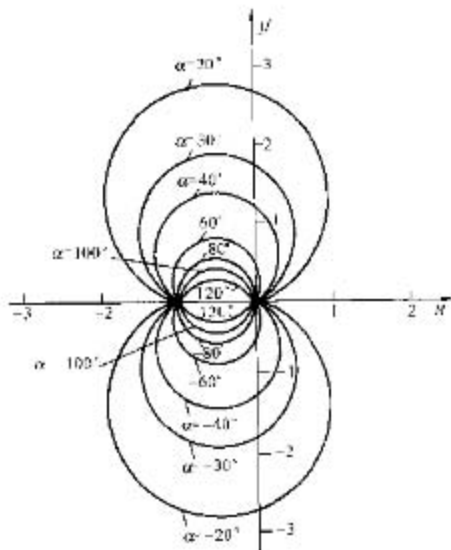


图 4-6 等 N 圆图

应的 M 和 N 值, 利用式 (4-6), 可得到系统的闭环频率特性, 注意到 $\alpha = \lg^{-1} N$ 。

(4) 若已知单位反馈系统的开环频率特性 $G(j\omega)$ 的 Bode 图, 利用尼柯尔斯线图求闭环频率特性。

具体做法是: 将 Bode 图的幅频特性和相频特性曲线合并, 画在以对数幅值 $L(\omega)$ 为纵坐标, 以相角 $\theta(\omega)$ 为横坐标的直角坐标系下, 称为对数幅相图; 将等 M 圆和等 N 圆变换到对数幅相坐标上, 称为尼柯尔斯图线。将对数幅相图叠画在尼柯尔斯图线上, 则对数幅相曲线与尼柯尔斯图线上的等 M 曲线族和等 N 曲线族的交点就得到了闭环频率特性的幅值 $L(\omega)$ 和相角 $\theta(\omega)$ 。

(二) 非单位反馈系统闭环频率特性曲线的绘制

设非单位反馈系统闭环频率特性 $G(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} = \frac{1}{H(j\omega)} \times \frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$

根据前述方法绘制单位反馈部分 $\frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$ 的闭环频率特性曲线, 然后再与 $\frac{1}{H(j\omega)}$ 相乘。

(三) 频域性能指标与时域性能指标的关系

(1) 闭环频域性能指标。

1) 谐振峰值 M_r 和谐振频率 ω_r 。 M_r 是闭环幅频特性的最大值, M_r 大, 意味着阻尼比小, 平稳性差。对应 M_r 的频率 ω_r 称为谐振频率。

典型二阶系统 $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, (0 < \zeta < 0.707),$

$$\omega_r = \omega_c \sqrt{1-\zeta^2}, (0 < \zeta < 0.707)$$

2) 截止频率 ω_b 和频带宽度 $0 \sim \omega_b$ 。当系统闭环幅频特性 $L(\omega)$ 的数值比初值 L_0 小 3 (dB) 时, 或者说 $M(\omega)$ 的数值衰减到初值 M_0 的 0.707 倍时, 所对应的频率称为截止频率 ω_b , 对应的频率范围 $0 \sim \omega_b$ 称为频带宽度。 ω_b 大, 表示系统的快速性好, 但 ω_b 太大, 系统抗高频干扰的能力将降低。

(2) 闭环频域性能指标与时域性能指标的关系。以典型二阶系统作定量分析, 结论可近似用于具有一对主导极点的高阶系统。

1) 谐振峰值 M_r 和超调量 $\sigma_p\%$ 的关系。

$$\sigma_p\% = e^{-\sqrt{\frac{M_r^2-1}{M_r^2+1}}} \times 100\%$$

当 $M_r = 1.2 \sim 1.5$ 时, $\sigma_p\% = 20\% \sim 30\%$, 是比较合适的范围。

2) 谐振峰值 M_r 和调整时间 t_s 的关系。

$$\omega_s t_s |_{\Delta = \pm 5\% \sim \pm 2\%} = (3-4) \sqrt{\frac{2\sqrt{M_r^2-1}}{M_r - \sqrt{M_r^2-1}}}$$

M_p 与 t_s 成正比, ω_p 与 t_s 成反比, ω_p 越高, t_s 越小, 系统响应速度越快。

3) 闭环截止频率 ω_c 与阻尼比 ζ 、峰值时间 t_p 和调整时间 t_s 的关系。

$$\omega_c t_p = \pi \sqrt{\frac{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}{1 - \zeta^2}}$$

$$\omega_c t_s = \frac{3}{\zeta} \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

从以上两式可以看出, 给定阻尼比 ζ 后, ω_c 与 t_p 和 t_s 均成反比, 即带宽 $0 \sim \omega_c$ 越宽, 系统的响应速度越快, 调整时间越短。

4.2 习题讲解

4.1 设某环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

今测得其频率响应, 当 $\omega = 1$ (rad/s) 时, 幅频 $M(1) = 12\sqrt{2}$, 相频 $\theta(1) = -\frac{\pi}{4}$, 求此环节传递函数的 K 和 T 各为多少?

解

$$G(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \Big|_{\omega=1} = 12\sqrt{2} \\ \angle G(j\omega) = -\arctan T\omega \Big|_{\omega=1} = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

得 $T = 1, K = 24$

【评注】 理解幅频特性和相频特性的含义。

4.2 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s + 1}$$

当把下列输入信号作用到闭环系统上时, 求闭环系统的稳态输出。

- (1) $r(t) = \sin(t + 30^\circ)$;
- (2) $r(t) = 2\cos(2t - 45^\circ)$;
- (3) $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ)$ 。

解

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1} = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}} e^{-j\varphi}$$

$$M(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 1}}, \theta(\omega) = -\arctan^{-1} \omega$$

$$(1) \omega = 1, y(t) = \frac{10}{\sqrt{2}} \sin [t + (-\operatorname{tg}^{-1} 1 + 30^\circ)] = 7.07 \sin (t - 15^\circ)$$

$$(2) \omega = 2, y(t) = 2 \cdot \frac{10}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \cos [2t + (-\operatorname{tg}^{-1} 2 - 45^\circ)] \\ = 8.94 \cos (2t - 108.4^\circ)$$

(3) 应用叠加原理

$$y(t) = 7.07 \sin (t - 15^\circ) - 8.94 \cos (2t - 108.4^\circ)$$

【评注】 理解正弦稳态输出与输入的关系, 即频率不变输出幅值与输入幅值之比为幅频特性, 输出相角减输入相角为相频特性。

4.3 已知 $-RLC$ 无源网络如图 4-7 所示, 当 $\omega = 10$ (rad/s) 时, 其幅值 $M(\omega) = 1$, 相角 $\theta(\omega) = -90^\circ$, 求 RLC 电路的传递函数。

$$\text{解 } G(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} \\ = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega + (1 - LC\omega^2)} \\ = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (1 - LC\omega^2)^2}} e^{j\theta} = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2} e^{-j\theta}$$

已知 $\omega = 1$, $\theta(\omega) = -90^\circ$ 得 $1 - 100LC = 0$, $LC = 0.01$

已知 $M(10) = 1$, $(10RC)^2 + (1 - 100LC)^2 = 1$, 得 $RC = 0.1$

$$\therefore G(s) = \frac{1}{0.01s^2 + 0.1s + 1} = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

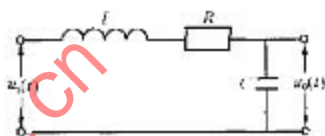


图 4-7 习题 4-3 图

4.4 若系统的单位阶跃响应为

$$y(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t} \quad (t \geq 0)$$

试求系统的传递函数和频率特性。

$$\text{解 } Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+4} + \frac{0.8}{s+9} \\ = \frac{36}{s(s+4)(s+9)}$$

$$G(s) = Y(s)/R(s) = \frac{36}{(s+4)(s+9)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}s+1\right)\left(\frac{1}{9}s+1\right)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}j\omega+1\right)\left(\frac{1}{9}j\omega+1\right)}$$

【评注】 理解频率特性与时域响应的关系, 即 $Y(s) = L[y(t)]$, $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$,

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$

4-5 已知一些元件的对数幅频特性曲线如图 4-8 所示, 试写出它们的传递函数, 并求出各传递函数的参数值。

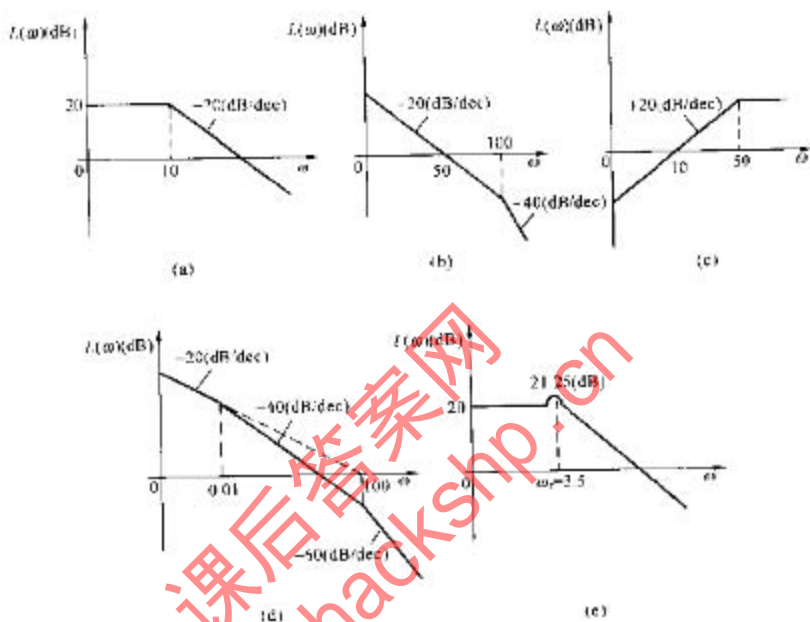


图 4-8 习题 4-5 图

解 (a) $20 \lg K = 20$, $K = 10$, $\omega = 1$ 处, 斜率变化 -20 dB/dec , 为一阶惯性环节,

$$G(s) = \frac{10}{0.1s + 1}$$

$$(b) G(s) = \frac{K}{s(0.01s + 1)}$$

$$|G(j50)| = \frac{K}{50 \sqrt{(0.01 \times 50)^2 + 1}} = 1, \text{ 得 } K = 50$$

$$\therefore G(s) = \frac{50}{s(0.01s + 1)}$$

$$(c) G(s) = \frac{Ks}{(0.02s + 1)}$$

$$|G(j10)| = \frac{K \cdot 10}{\sqrt{(0.02 \times 10)^2 + 1}} = 1 \text{ 得 } K = 0.1$$

$$\therefore G(s) = \frac{0.1s}{(0.02s + 1)}$$

$$(d) K_1 = K = 100$$

$$\therefore G(s) = \frac{100}{s(100s + 1)(0.01s + 1)}$$

$$(e) G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\text{由 } 20\lg M_r = 20\lg \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} = 1.25(\text{dB}), \text{得 } \zeta = 0.5$$

$$\text{由 } \omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} = 3.5, \text{得 } \omega_n = 5(\text{rad/s})$$

$$\text{由 } 20\lg K = 20\text{dB}, \text{得 } K = 100$$

$$\therefore G(s) = \frac{2500}{s^2 + 5s + 25}$$

【评注】 掌握由最小相位系统的幅频特性求传递函数的方法, 实际为画 Bode 图方法的反应用, 即由低频段斜率判断系统的型; 由低频段 $\omega = 1$ 处的幅值或低频段延长线交于 0dB 线的交点值或利用已知的 ω_c 值确定开环增益 K ; 由幅频特性的斜率变化推断传递函数的各典型环节, 转角频率倒数为环节的时间常数。

4-6 某二阶系统的极坐标如图 4-9 所示, 试写出其传递函数。

解 $\because \omega \rightarrow 0 \quad \varphi(\omega) \rightarrow -90^\circ$

\therefore 系统为 1 型

$\because K_p$ 为无穷大, 系统为 2 阶

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(Tj\omega+1)} = \frac{K}{-T\omega^2 + j\omega}$$

$$= \frac{K(j\omega + T\omega^2)}{-T^2\omega^4 - \omega^2}$$

$$\text{Re}[G(j\omega)] = \frac{KT}{-T^2\omega^2 - 1}$$

$$\omega = 2 \text{ 时 } \frac{KT}{-4T^2 - 1} = -1$$

$$\omega = 0 \text{ 时 } \frac{KT}{-1} = -2$$

联立求解 $K = 4, T = 0.5$

$$\therefore G(s) = \frac{4}{s(0.5s+1)}$$

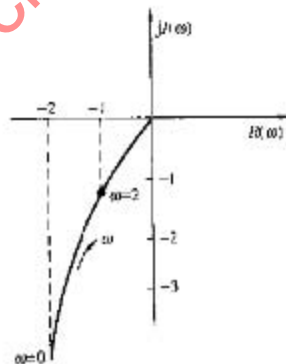


图 4-9 习题 4-6 图

4-7 画出下列传递函数的频率特性极坐标图 (奈氏图)。

$$(1) G(s) = \frac{100}{(s+10)(s+50)^2}$$

$$(2) G(s) = \frac{250}{s(s+50)^2}$$

$$(3) G(s) = \frac{250}{s^2(s+5)(s+15)}$$

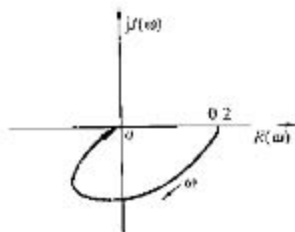


图 4-10

解 (1) $G(s) = \frac{0.2}{(0.1s+1)(0.02s+1)}$

$$G(j\omega) = \frac{0.2}{(0.1j\omega+1)(0.02j\omega+1)}$$

$$= \frac{0.2[(1-0.002\omega^2) - 0.12j\omega]}{[(0.1\omega)^2+1][(0.02\omega)^2+1]}$$

$$G(j0) = 0.2/0^\circ$$

$$G(j\infty) = 0/-180^\circ$$

由于对 ω 从 $0 \sim +\infty$, $I_m[G(j\omega)] < 0$, 故奈氏图与负实轴无交点。 $\theta(\omega)$ 从 0° 连续减至 -180° , 作奈氏图如图 4-10 所示。

(2) $G(s) = \frac{5}{s(0.02s+1)}$

$$G(j\omega) = \frac{5}{j\omega(0.02j\omega+1)} = \frac{-0.1\omega - 5j}{\omega(0.02^2\omega^2+1)}$$

$$G(j0) = \infty/-90^\circ$$

$$G(j\infty) = 0/-180^\circ$$

由于对 ω 从 $0 \sim +\infty$, 虚部 $I_m[G(j\omega)] < 0$, 故奈氏图与负实轴无交点, $\theta(\omega)$ 从 -90° 连续减小至 -180° , 作奈氏图如图 4-11 所示。

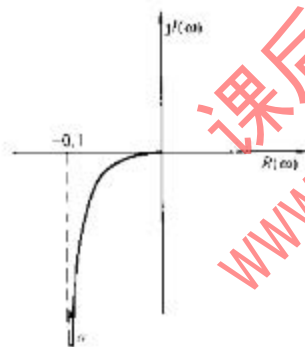


图 4-11

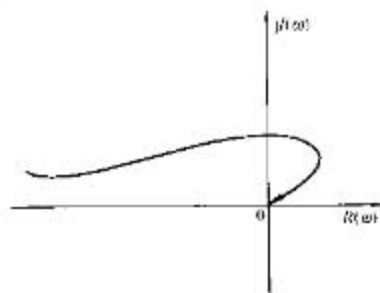


图 4-12

(3) $G(s) = \frac{250}{s^2(s+5)(s+15)} = \frac{\frac{10}{3}}{s^2\left(\frac{1}{5}s+1\right)\left(\frac{1}{15}s+1\right)}$

$$G(j\omega) = \frac{\frac{10}{3}}{-\omega^2\left(\frac{1}{5}j\omega+1\right)\left(\frac{1}{15}j\omega+1\right)} = \frac{\frac{10}{3}\left[\left(1-\frac{1}{75}\omega\right) - \frac{4}{15}j\omega\right]}{-\omega^2\left(\frac{1}{25}\omega^2+1\right)\left(\frac{1}{225}\omega^2+1\right)}$$

$$G(j0) = \infty/-180^\circ$$

$$G(j\infty) = 0/-360^\circ$$

由于对 ω 从 $0 \sim \infty$, 虚部 $I_m[G(j\omega)] < 0$, 所以奈氏图与负实轴无交点, 与虚轴有交点。 $\theta(\omega)$ 从 -180° 连续减少至 -360° , 作奈氏图如图 4-12 所示。

【评注】 概略绘制奈氏图的一般步骤为:

- (1) 传递函数写成典型环节的“尾1型”形式, 并且实、虚部分开。
- (2) 确定起点 $G(j0)$ 和终点 $G(j\infty)$ 。

$$\text{模: } |G(j0)| = \begin{cases} \infty & 0 \text{ 型以上系统} \\ K & 0 \text{ 型系统} \end{cases}, |G(j\infty)| = 0$$

相角: $\angle G(j0) = -90^\circ N$ (N 为系统的型), $\angle G(j\infty) = -(n-m)90^\circ$ (参见图 4-2 和图 4-3)

(3) 确定奈氏图与负实轴的交点。

(4) 根据上述确定的特殊点, 结合 $G(j\omega)$ 的变化趋势作图。无零点的最小相位系统, 相角 $\theta(\omega)$ 随 ω 的增大而单调减小, 若存在零点或非最小相位系统, 奈氏图可能出现凹凸。

4-8 绘制下列开环传递函数的频率特性的伯德图。

$$(1) G_a(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$$

$$(2) G_c(s) = \frac{250}{s(s+5)(s+15)}$$

$$(3) G_c(s) = \frac{250(1+s)}{s^2(s+5)(s+15)}$$

解 (1) $G_a(j\omega) = \frac{2}{(2j\omega+1)(8j\omega+1)}$

将 $G_a(j\omega)$ 写成尾 1 的标准形式, 将转角频率依次标在 ω 轴上, 由三个典型环节组成, 一个比例环节, 两个一阶惯性环节, 转角频率依次为 0.125, 0.5;

画起始段: 由系统的型 N 和开环增益 K 决定, $N=0$, 作 $20\lg K=6.02\text{dB}$ 的水平线;

由第一个转角频率开始沿 ω 轴向右, 每经过一次转角频率 $L(\omega)$ 变更一次比例由 $0\text{dB}/\text{dec} \rightarrow -20\text{dB}/\text{dec} \rightarrow -40\text{dB}/\text{dec}$;

将各典型环节的对数相频特性画出后相叠加, 得总的相频特性, 见图 4-13 (a)。

$$(2) G_c(j\omega) = \frac{\frac{10}{3}}{j\omega \left(\frac{1}{5}j\omega + 1 \right) \left(\frac{1}{15}j\omega + 1 \right)}$$

转角频率为 5, 15, 标在 ω 轴上;

$N=1$, 过 $\omega=1$, 找高度为 $20\lg \frac{10}{3} = 10.46\text{dB}$, 作斜率为 $-20\text{dB}/\text{dec}$ 直线, 到 $\omega=5$ 处 (斜率变更 $-20\text{dB}/\text{dec}$) 斜率为 $-40\text{dB}/\text{dec}$, 到 $\omega=15$ 处 (斜率变更 $-20\text{dB}/\text{dec}$), 斜率为 $-60\text{dB}/\text{dec}$;

最后将各相频特性叠加。见图 4-13 (b)。

$$(3) G_c(j\omega) = \frac{\frac{10}{3}(1+j\omega)}{(j\omega)^2 \left(\frac{1}{5}j\omega + 1 \right) \left(\frac{1}{15}j\omega + 1 \right)}$$

转角频率依次为 1, 5, 15, 标在 ω 轴上;

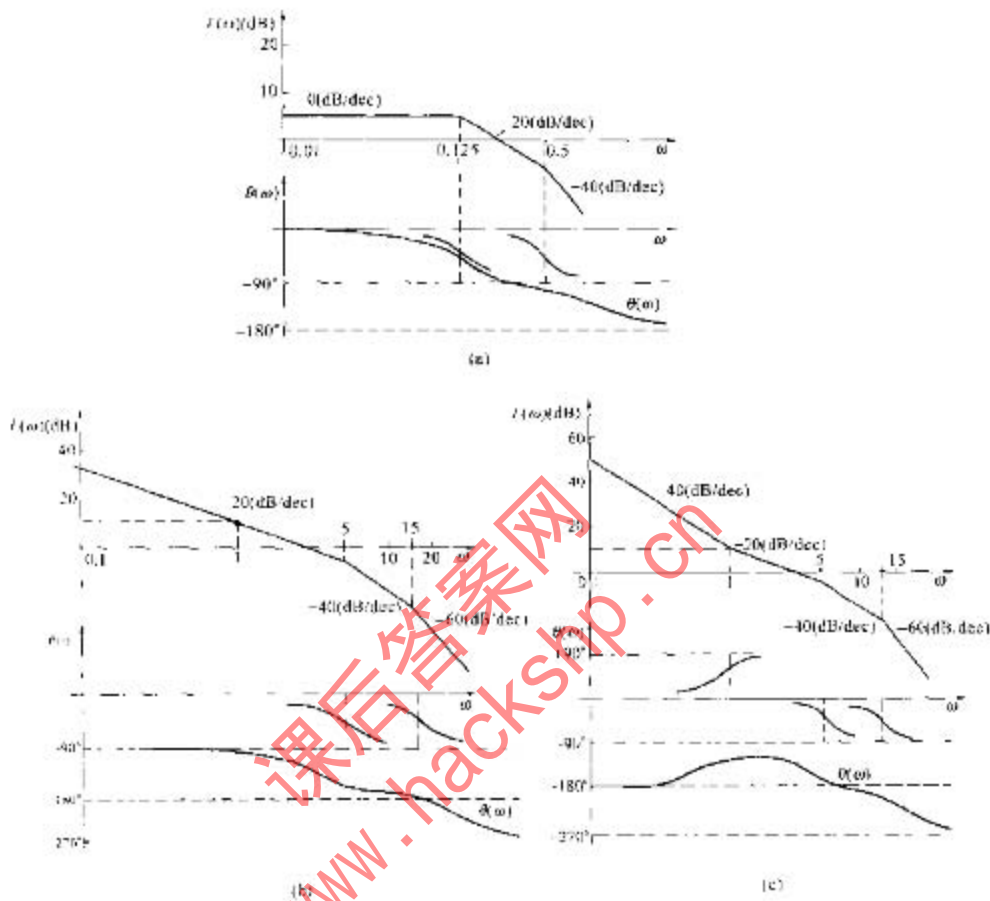


图 4-13

$N = 2$ 。过 $\omega = 1$ ，找高度为 $20 \lg \frac{10}{3} = 10.46$ dB，作斜率为 -40 dB/dec 的直线至第一个转角频率 $\omega = 1$ 处，(斜率变更 $+20$ dB/dec) 斜率为 -20 dB/dec，到 $\omega = 5$ 处斜率为 -40 dB/dec，到 $\omega = 15$ 处斜率为 -60 dB/dec；

将各相频特性叠加，见图 4-13 (c)。

【评注】 Bode 图的基本绘图步骤：

- (1) 将 $G_o(j\omega)$ 写成“尾 1 化”标准形式，将各环节的转角频率标于 ω 轴上。
- (2) 画起始段：取决于系统的型 N 和开环增益 K 。在 $\omega = 1$ ，高度为 $20 \lg K$ 的点处，作斜率为 $(-20)N$ (dB/dec) 的直线，该直线和 0 dB 线交点处的频率恰好为 $K^{\frac{1}{N}}$ 。
- (3) 从第一个转角频率开始沿 ω 轴向右，每经一个转角频率，斜率变更一次。若为惯性环节，斜率变更 -20 (dB/dec)；为一阶微分环节，斜率变更 $+20$ (dB/dec)；为二阶振荡环节，斜率变更 -40 (dB/dec) ……。

(4) 修正。

(5) 将各典型环节的相频特性画出, 然后叠加, 即得对数相频特性。

4.3 同步练习

一、名词解释

1. 频率特性
2. 截止频率 ω_c
3. 最小相位系统
4. 转角频率

二、单项选择题

1. $K > 0$ 时, 0 型系统的奈氏图起始于_____。
A. 负实轴 B. 正实轴 C. 正虚轴 D. 负虚轴
2. 1 型系统对数幅频特性曲线最低频段为_____。
A. -40 (dB/dec) 的直线 B. 水平直线
C. -20 (dB/dec) 的直线 D. -60 (dB/dec) 的直线
3. 线性系统的频带宽度越宽, 则系统的_____。
A. 响应速度愈快, 调整时间愈长 B. 响应速度愈快, 调整时间愈短
C. 带宽不反映控制系统的响应速度 D. 抗干扰能力愈强
4. 设开环 $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)}$, 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 相频特性趋向于_____。
A. -90° B. $+90^\circ$ C. -180° D. -270°

三、填空题

1. 对数幅频特性曲线与系统性能相关, 其中低频段与系统的_____性能相关。
2. 控制系统的传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$, 其频率特性为_____, 幅频特性 $M(\omega)$ 为_____, 相频特性 $\theta(\omega)$ 为_____。
3. 2 型系统最低频段渐近线的斜率为_____, 最低频段渐近线 (或其延长线) 与 0dB 的交点为_____, 在 $\omega = 1$ 处的幅值为_____。
4. 一阶惯性环节的相移范围为_____。

四、问答题

1. 为什么仅由最小相位系统的对数幅频特性就可确定其传递函数?
2. 简述线性控制系统存在谐振峰值的条件, 并写出常用的闭环频域指标。
3. 奈氏图和 Bode 图的对应关系是什么?

五、计算题

1. 已知系统的闭环传递函数 $G(s) = \frac{2s}{2s + 1}$, 若以正弦信号 $r(t) = 2\cos(0.5t + 20^\circ)$ 作为输入, 试求系统的稳态响应 $y(t)$ 。

【评注】 练习用频率特性的概念解此题。

2. 系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1 + j0.2\omega)(1 + j0.05\omega)}$$

绘制奈氏曲线。

【评注】 掌握概略绘制奈氏图的一般步骤, 先决定特殊点的位置 (起点、终点、与实轴和虚轴的交点), 再将特殊点之间描点连线即可。

3. 设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{0.25(s+2)}{s(s+0.5)(s+0.1)}$$

绘制伯德图。

【评注】 掌握绘制伯德图的方法, 先将 $G(s)H(s)$ 写成“尾 1 化”形式按转角频率依次排序标于 ω 轴上, 按“内容提示”介绍的方法先画低频段, 此例低频段斜率 -20 (dB/dec), 过点 $(1, 20\text{dB})$, 然后依据“内容提示”中表 4-1, 每遇一个转角频率改变一次斜率, 得到 $L(\omega)$, 画出各环节相频特性, 然后叠加得到总 $\theta(\omega)$ 。

4. 已知最小相位系统的对数幅频特性如图 4-14 所示, 写出它们的传递函数。

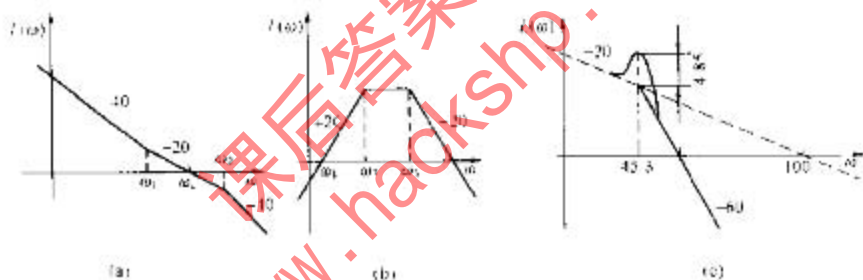


图 4-14

【评注】 (a) 图中 ω_1, ω_2 已知, K 未知, 利用 $|G(j\omega_c)| = 1$, 求出 K 。

(b) 图中利用低频段 $20\lg K\omega_1^2 = 0$, 求 K , 由此例可推论, 若起始段为微分环节, 个数为 N , 则 $20\lg K\omega_1^N = 0, K = \frac{1}{\omega_1^N}$ 。

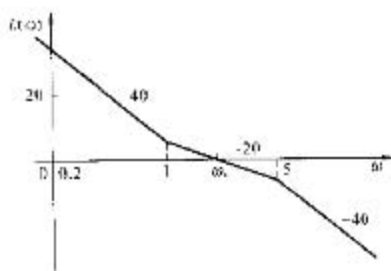


图 4-15

(c) 由振荡环节 M_r 和 ω_r , 确定 ζ 和 ω_n , 可写出二阶环节。

5. 已知最小相位系统的开环对数幅频特性如图 4-15 所示, 渐近线在两转角频率的几何中心和 0 (dB) 线相交, 即 $\omega_c = \sqrt{1 \times 5} = 2.236$, 估算系统的稳态误差。

【评注】 熟悉低频段与系统稳态性能的关系, 掌握利用已知的 ω_c 确定 K 值的方法 [见习题讲解图 4-5 (b)]。

4.4 参 考 答 案

一、名词解释

1. 频率特性——系统正弦稳态输出 $y(\omega)$ 与输入 $x(\omega)$ 之比 $G(j\omega) = \frac{y(\omega)}{x(\omega)} = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)} = M(\omega)e^{j\theta(\omega)}$ 。
2. 截止频率 ω_c ——闭环系统对数幅值 $L(\omega)$ 比初值 $L(0)$ 小 3(dB) 时(或闭环幅值 $M(\omega)$ 为初值 $M(0)$ 的 0.707 倍时)的 ω 值。
3. 最小相位系统——系统开环传递函数在右半 s 平面没有零极点的系统。
4. 转角频率——对数幅频特性两条渐近线相交处的频率。

二、单项选择题

1. B 2. C 3. B 4. D

三、填空题

1. 稳态

$$2. \frac{K}{j\omega(T_1\omega + 1)} \quad \frac{K}{\omega \sqrt{T_1^2\omega^2 + 1}} \quad -90^\circ \sim -180^\circ \sim 180^\circ T_1\omega$$

$$3. -40 \text{ (dB/dec)} \quad \omega = \sqrt{K} \quad 20 \lg K_0$$

$$4. 0^\circ \sim -90^\circ$$

四、问答题

1. 因为最小相位系统, 幅频特性和相频特性有唯一的对应关系。

2. 阻尼比 $\zeta > 0.707$ 时, ω_c 为虚数, 不存在谐振峰值, 幅频特性单调递减; $\zeta = 0.707$ 时, $\omega_c = 0$, $M_r = 1$; $\zeta < 0.707$ 时, $\omega_c > 0$, $M_r > 1$; $\zeta \rightarrow 0$ 时, $\omega_c \rightarrow \omega_n$, $M_r \rightarrow \infty$ 。闭环频域指标为 M_r , ω_c , ω_{-3dB} 。

3. 奈氏图上的负虚轴、负实轴分别和伯德图上的 -90° 线、 -180° 线相对应; 奈氏图上幅值为 1 的点和伯德图上的 0 (dB) 线相对应; 奈氏图上幅值大于 1 的点(小于 1 的点)和伯德图上 0 (dB) 线以上(以下)的区域相对应。

五、计算题

$$1. y(t) = 1.414 \cos(0.5t + 65^\circ)$$

$$2. G(j\omega)H(j\omega) = \begin{cases} \omega \rightarrow 0^+ \text{ 时, } \infty / -90^\circ \\ \omega \rightarrow \infty \text{ 时, } 0 / -270^\circ \end{cases}$$

与实轴的交点为 $(-0.4, j0)$ 。

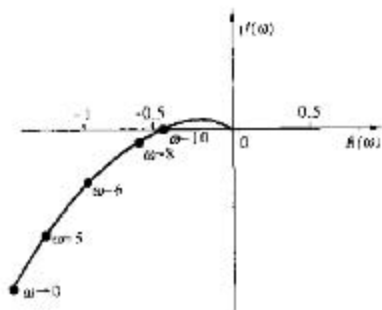


图 4-16

3. 转角频率依次为 0.1、0.5 和 2, ① 为比例环节; ② 为积分环节; ③、④ 为惯性环节; ⑤ 为比例微分环节

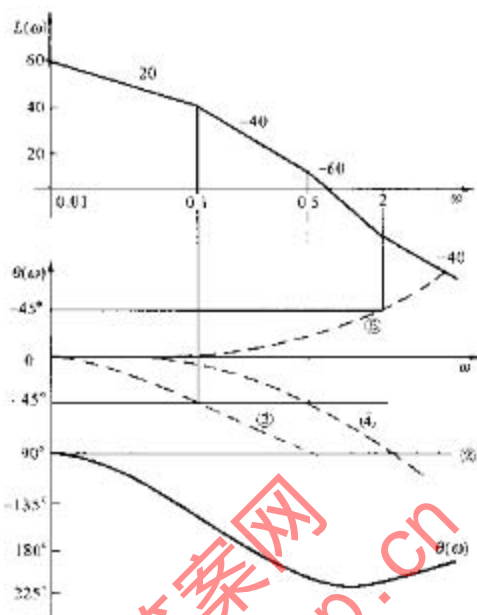


图 4-17

$$4. (a) G(s) = \frac{\omega_1 \omega_2 \left(\frac{1}{\omega_3} s + 1 \right)}{s^2 \left(\frac{1}{\omega_1} s + 1 \right)}$$

$$(b) G(s) = \frac{\frac{1}{\omega_1} s}{\left(\frac{1}{\omega_2} s + 1 \right) \left(\frac{1}{\omega_3} s + 1 \right)}$$

(c) ($K=100$, 由 $20 \lg M_c = 4.85$, 求出 $\zeta = 0.3$; 由 $\omega_n = 45.3$, 求出 $\omega_n = 50$)

$$G(s) = \frac{100}{s \left[\left(\frac{1}{50} \right)^2 s^2 + 2 \times 0.3 \times \frac{1}{50} s + 1 \right]} = \frac{100}{s(0.0004s^2 + 0.012s + 1)}$$

$$5. G(s)H(s) = \frac{2.236(s+1)}{s^2(0.2s+1)} \quad e_{ss} = \frac{1}{2.236} = 0.447$$

(已知 ω_c 确定 K 值时可用 $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = \frac{K \sqrt{\omega_c^2 + 1}}{\omega_c^2 \sqrt{0.2^2 \omega_c^2 + 1}} = \frac{K\omega_c}{\omega_c^2} = 1$ 求 K , 很方便)

第5章 稳定性分析

- ☆ 稳定的基本概念
- ☆ 劳斯判据——赫尔维茨判据
- ☆ 奈奎斯特判据
- ☆ 相位裕量和增益裕量
- ☆ 开环对数坐标图与时域性能的关系

5.1 内容提示

一、稳定的基本概念

(一) 系统稳定的定义

(1) 输入有界时输出有界称为有界输入有界输出 (Bounded Input Bounded Output——BIBO) 的稳定性。

(2) 系统在自由运动状态下 (无外加激励时), 输出能随着时间的推移而趋向于系统的平衡状态, 称为渐近稳定性。

对线性定常系统, 上述两个稳定性的定义等价。

(二) 系统稳定的充分必要条件

线性系统的稳定性取决于自身的结构和参数, 即取决于系统特征方程式根的实部的符号, 与系统的初始条件和输入无关。线性系统的充分必要条件是系统特征方程式的根全部具有负实部, 或系统特征方程式的根全部位于 s 左半平面。

对于一阶、二阶系统, 其特征方程式的各项系数全为不等于零的正值, 则满足系统稳定的充分必要条件, 二阶以上的系统特征方程式的各项系数全为不等于零的正值是系统稳定的必要条件, 而非充分条件。

(三) 判别系统稳定性的方法

(1) 劳斯判据和赫尔维茨判据——代数判据。

(2) 奈奎斯特判据——频率域判据。

(3) 根轨迹法——图解求根法。

二、时域分析中的劳斯和赫尔维茨稳定性判据

两种判据表现形式不同, 但都是由系统特征方程式的系数来判断系统的稳定性, 所以统称为代数判据。

必要条件。系统特征方程式的各项系数均大于零。

充分条件。

(1) 劳斯判据: 由系统特征方程式各项系数列出劳斯表, 若劳斯表中第一列元素为正, 则系统稳定, 否则系统不稳定。第一列元素符号改变的次数代表特征方程正实部根的个数。计算劳斯表时可能会出现两种特殊情况:

1) 若第一列出现零元素, 用无穷小的正数 ϵ 代替零元素, 然后按通常的方法完成劳斯表的运算。在第一列中, 如果 ϵ 上面的系数与 ϵ 下面的系数符号相反, 表明有一个符号变化, 系统不稳定; 如果 ϵ 上面的系数与 ϵ 下面的系数符号相同, 则系统中有共轭虚根。

2) 若某行元素全为零或只有等于零的一项, 表明系统存在关于原点对称的共轭虚根或共轭复数根。利用系数全零行的上一行组成辅助方程, 并以辅助方程的导数的系数代替全零行的各元素, 继续完成劳斯表的运算。辅助方程是系统特征方程的一个因式, 所以关于原点对称的根可由辅助方程求得。

(2) 赫尔维茨判据: 由系统特征方程各项系数所构成的各阶赫尔维茨行列式全部为正, 则系统稳定。

三、频域分析中的奈奎斯特稳定性判据

利用开环奈氏图判断闭环系统的稳定性

(一) 奈奎斯特稳定性判据的基本公式

$$Z = P - N \quad (5-1)$$

式中 Z ——闭环系统在右半 s 平面的极点数;

P ——开环系统在右半 s 平面的极点数;

N ——当 ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时, 开环奈氏图围绕 $(-1, j0)$ 点转过的圈数 (逆时针方向为正)。

(二) 奈奎斯特稳定性判据的具体应用

(1) 开环稳定系统 ($P=0$)。则闭环系统稳定的充分必要条件是 $N=0$, 即开环奈氏图不包围 $(-1, j0)$ 点。

(2) 开环不稳定系统 ($P \neq 0$)。则闭环系统稳定的充分必要条件是 $N=P$, 即开环奈氏图逆时针包围 $(-1, j0)$ 点 P 次。

(3) 开环系统含有 ν 个积分环节时, 式 (5-1) 不变, 只须将原开环奈氏图相应频率从 $\omega=0^+$ 到 $\omega=0^+$ 顺时针补充半径 ∞ , 角度为 $\nu\pi$ 的圆弧。

(4) 若只利用开环奈氏图 ω 从 0 到 $+\infty$ 变化的部分 (正频段的部分), 式 (5-1) 变为

$$Z = P - 2N \quad (5-2)$$

开环系统含有 ν 个积分环节时, 式 (5-2) 不变, 只须将开环奈氏图相应频率从 $\omega=0$ 到 $\omega=0^+$ 顺时针补充半径 ∞ , 角度为 $\nu \frac{\pi}{2}$ 的圆弧。

(5) 若开环奈氏图通过 $(-1, j0)$ 点, 表明闭环系统在 s 平面虚轴上有极点, 系统处于临界稳定状态, 工程上一般认为是不稳定的。

四、用频率法分析系统的相对稳定性

(一) 相对稳定性的概念

要求系统不但稳定, 而且还要有一定的稳定裕量, 在有干扰的情况下, 仍保证系统处于

稳定状态。

(二) 相位裕量和增益裕量的计算

相对稳定性用相位裕量和增益裕量的大小表示, 且只适用于最小相位系统。

(1) 相位裕量 $PM = \gamma = 180^\circ + \theta(\omega_c)$

式中 ω_c ——幅频特性模为 1 处的频率, 称为剪切频率, 或增益穿越 (交界) 频率。

相位裕量的物理意义: 幅频特性模为 1 处相角再滞后 γ , 系统就达到临界稳定状态了, 即用幅频特性模为 1 处的相角与 180° 的距离来衡量相对稳定性。 $\gamma > 0$, 闭环系统稳定。

(2) 增益裕量 $K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$

增益裕量常用分贝 (dB) 表示

$$GM = K_g(\text{dB}) = 20 \lg \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|} = -20 \lg |G(j\omega)H(j\omega)|$$

式中 ω_g ——相频特性为 -180° 处的频率, 称为相位穿越 (交界) 频率。

增益裕量的物理意义: 增益还能增大 K_g 倍, 系统就达到临界稳定状态了。 $K_g > 1$ 或 $K_g(\text{dB}) > 0$, 闭环系统稳定。

(3) 在奈氏图和 Bode 图上表示的稳定系统和不稳定系统的相位裕量和增益裕量, 见表 5-1。

表 5-1 稳定系统和不稳定系统的相位裕量和增益裕量

	奈氏图	Bode 图	特点
稳定系统			$\omega_c < \omega_g$ $\gamma > 0, K_g > 1$ 或 $K_g(\text{dB}) > 0(\text{dB})$
不稳定系统			$\omega_c > \omega_g$ $\gamma < 0, K_g < 1$ 或 $K_g(\text{dB}) < 0(\text{dB})$

(三) 开环对数频率特性与系统时域性能之间的关系

(1) 三频段与系统性能的关系。

1) 低频段——指 $L(\omega)$ 的渐近线在第一个转角频率之前的频段。低频段的特性完全由系统的型 σ 和开环增益 K 决定。因此低频段与系统的稳态误差密切相关。

2) 中频段——指剪切频率 ω_c 附近的频段。中频段与系统的动态性能密切相关。希望 $L(\omega)$ 在中频段的斜率为 -20 (dB/dec), 并占有较宽的频带, 此时系统具有较大的相位裕量 γ , 动态过程的超调量 σ_p 和调整时间 t_s 小。 ω_c 越高, 系统的快速性越好, 中频段越宽, 阶跃响应越接近非周期过程。

3) 高频段——指 $L(\omega)$ 具有最高转角频率的频段。高频段的分贝值越低, 系统的抗干扰能力越强。

(2) 频域性能指标与时域性能指标的定量关系。对典型二阶系统给出的定量关系可近似用于存在一对主导极点的高阶系统。

1) 相位裕量 $\gamma(\omega_c)$ 与超调量 σ_p (或阻尼比 ζ) 的关系:

$$\gamma(\omega_c) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}}$$

2) 相位裕量 $\gamma(\omega_c)$ 与调整时间 t_s 的关系:

$$t_s(\omega_c) \approx \frac{6-8}{\operatorname{tg} \gamma(\omega_c)}$$

调整时间 t_s 与剪切频率成反比, ω_c 越大, t_s 越小。

5.2 习题讲解

5-1 试判断图 5-1 (a), (b) 所示两个系统的 BIBO 稳定性。

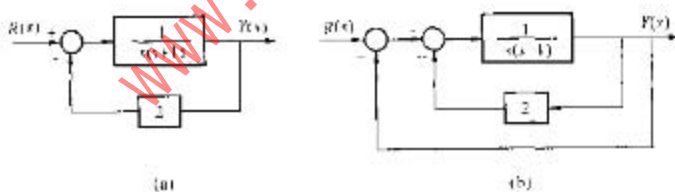


图 5-1 习题 5-1 图

解

$$(a) \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 2}$$

闭环极点 $s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$, 具有负实部, 系统 BIBO 稳定。

$$(b) \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 - s + 3}$$

闭环极点 $s_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{11}}{2}$, 具有正实部, 系统不稳定。

5-2 已知系统的特征方程为

$$(1) s^3 + 20s^2 + 10s + 50 = 0$$

$$(2) s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 9 = 0$$

$$(3) s^3 + 20s^2 + 8s + 300 = 0$$

$$(4) s^6 + 6s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 10s^2 + 14s + 12 = 0$$

$$(5) s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 + 23s + 46 = 0$$

用劳斯判据判别系统的稳定性。

解 以上5个系统均满足稳定的必要条件

$$(1) s^3 + 20s^2 + 10s + 50 = 0$$

列劳斯表

$$\begin{array}{r|ll} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 20 & 50 \\ s^1 & \frac{15}{2} & 0 \\ s^0 & 50 & \end{array}$$

第一列元素为正, 系统稳定。

$$(2) s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 9 = 0$$

$$\begin{array}{r|lll} s^4 & 1 & 3 & 9 \\ s^3 & 1 & 5 & \\ s^2 & -2 & 9 & \\ s^1 & \frac{19}{2} & 0 & \\ s^0 & 9 & & \end{array}$$

第一列元素变号两次, 系统不稳定, 有两个正实部根。

$$(3) s^3 + 20s^2 + 8s + 300 = 0$$

$$\begin{array}{r|ll} s^3 & 1 & 8 \\ s^2 & 20 & 300 \\ s^1 & -7 & 0 \\ s^0 & 300 & \end{array}$$

第一列元素变号两次, 系统不稳定, 有两个正实部根。

$$(4) s^6 + 6s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 10s^2 + 14s + 12 = 0$$

$$\begin{array}{r|llll} s^6 & 1 & 4 & 10 & 12 \\ s^5 & 6 & 6 & 14 & \\ s^4 & 3 & \frac{23}{3} & 12 & \\ s^3 & -\frac{28}{3} & -10 & & \\ s^2 & -\frac{187}{42} & 12 & & \\ s^1 & \frac{2834}{187} & & & \\ s^0 & 12 & & & \end{array}$$