高等代数（北大*第三版）答案

目 录

注：

答案分三部分，**该为第一部分**，其他请搜索，谢谢！

第一章　多项式

1．用 $g(x)$ 除 $f(x)$，求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$：

1）$f(x)=x^3-3x^2-x-1, g(x)=3x^2-2x+1$；

2）$f(x)=x^4-2x+5, g(x)=x^2-x+2$。

解 1）由带余除法，可得 $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}, r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$；

2）同理可得 $q(x)=x^2+x-1, r(x)=-5x+7$。

2．m,p,q 适合什么条件时，有

1）$x^2+mx-1\mid x^3+px+q$，

2）$x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$。

解 1）由假设，所得余式为 0，即 $(p+1+m^2)x+(q-m)=0$，

所以当 $\begin{cases} p+1+m^2=0 \\ q-m=0 \end{cases}$ 时有 $x^2+mx-1\mid x^3+px+q$。

2）类似可得 $\begin{cases} m(2-p-m^2)=0 \\ q+1-p-m^2=0 \end{cases}$，于是当 $m=0$ 时，代入（2）可得 $p=q+1$；而当 $2-p-m^2=0$ 时，代入（2）可得 $q=1$。

综上所诉，当 $\begin{cases} m=0 \\ p=q+1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} q=1 \\ p+m^2=2 \end{cases}$ 时，皆有 $x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$。

3．求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 与余式：

1）$f(x)=2x^5-5x^3-8x, g(x)=x+3$；

2）$f(x)=x^3-x^2-x, g(x)=x-1+2i$。

解 1）$\begin{matrix} q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109 \\ r(x)=-327 \end{matrix}$；

2）$\begin{matrix} q(x)=x^2-2ix-(5+2i) \\ r(x)=-9+8i \end{matrix}$。

4．把 $f(x)$ 表示成 $x-x_0$ 的方幂和，即表成

$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+...+c_n(x-x_0)^n+\cdots$的形式：

1） $f(x)=x^5, x_0=1$；

2） $f(x)=x^4-2x^2+3, x_0=-2$；

3） $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i, x_0=-i$。

解 1）由综合除法，可得 $f(x)=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5$；

2）由综合除法，可得 $x^4-2x^2+3=11-24(x+2)+22(x+2)^2-8(x+2)^3+(x+2)^4$；

3） 由综合除法，可得 $x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+(7+i)$

$=(7+5i)-5(x+i)+(-1-i)(x+i)^2-2i(x+i)^3+(x+i)^4$。

5．求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式：

1） $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$；

2） $f(x)=x^4-4x^3+1, g(x)=x^3-3x^2+1$；

3） $f(x)=x^4-10x^2+1, g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$。

解 1）$(f(x),g(x))=x+1$；

2）$(f(x),g(x))=1$；

3）$(f(x),g(x))=x^2-2\sqrt{2}x-1$。

6．求$u(x),v(x)$使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$。

1） $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2, g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$；

2） $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9, g(x)=2x^3-x^2-5x+4$；

3） $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1, g(x)=x^2-x-1$。

解 1）因为$(f(x),g(x))=x^2-2=r_2(x)$

再由$\begin{cases} f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x) \\ g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x) \end{cases}$，

解得 $\begin{aligned} r_2(x) &= g(x)-q_2(x)r_1(x)=g(x)-q_2(x)[f(x)-q_1(x)g(x)] \\ &=[-q_2(x)]f(x)+[1+q_1(x)q_2(x)]g(x) \end{aligned}$，

于是 $\begin{aligned} u(x) &= -q_2(x)=-x-1 \\ v(x) &= 1+q_1(x)q_2(x)=1+1\bullet(x+1)=x+2 \end{aligned}$。

2）仿上面方法，可得 $(f(x),g(x))=x-1$，且 $u(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3},v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$。

3）由 $(f(x),g(x))=1$ 可得 $u(x)=-x-1,v(x)=x^3+x^2-3x-2$。

7．设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$ 与 $g(x)=x^3+tx^2+u$ 的最大公因式是一个二次多项式，求 t,u 的值。

解　因为 $\begin{aligned} f(x) &= q_1(x)g(x)+r_1(x)=(x^3+tx^2+u)+(x^2+2x+u) \\ g(x) &= q_2(x)r_1(x)+r_2(x) \end{aligned}$，

$$=(x+(t-2))(x^2+2x+u)-(u+2t-4)x+u(3-t),$$

且由题设知最大公因式是二次多项式，所以余式 $r_2(x)$ 为 0，即

$$\begin{cases} -(u+2t-4)=0 \\ u(3-t)=0 \end{cases},$$

从而可解得 $\begin{cases} u_1=0 \\ t_1=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} u_2=-2 \\ t_2=3 \end{cases}$。

8．证明：如果 $d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$，且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的组合，那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

证　易见 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式。另设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式，下证 $\varphi(x)\mid d(x)$。

由于 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，这就是说存在多项式 $s(x)$ 与 $t(x)$，使

$d(x)=s(x)f(x)+t(x)g(x)$，

从而由 $\varphi(x)\mid f(x),\varphi(x)\mid g(x)$ 可得 $\varphi(x)\mid d(x)$，得证。

9．证明：$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$，（$h(x)$ 的首系数为 1）。

证　因为存在多项式 $u(x),v(x)$ 使 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，

所以$(f(x),g(x))h(x)=u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)$，

上式说明$(f(x),g(x))h(x)$是$f(x)h(x)$与$g(x)h(x)$的一个组合。

另一方面，由$(f(x),g(x))\mid f(x)$知$(f(x),g(x))h(x)\mid f(x)h(x)$，

同理可得$(f(x),g(x))h(x)\mid g(x)h(x)$，

从而$(f(x),g(x))h(x)$是$f(x)h(x)$与$g(x)h(x)$的一个最大公因式，又因为$(f(x),g(x))h(x)$的首项系数为1，所以$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$。

１０．如果$f(x),g(x)$不全为零，证明：

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1。$$

证　存在$u(x),v(x)$使$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，

又因为$f(x),g(x)$不全为0，所以$(f(x),g(x))\neq 0$，

由消去律可得$1=u(x)\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$，

所以$\left(\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))},\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$。

11．证明：如果$f(x),g(x)$不全为零，且$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$，那么$(u(x),v(x))=1$。

证 由上题证明类似可得结论。

12．证明：如果$(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1$，那么$(f(x),g(x)h(x))=1$。

证　由假设，存在$u_1(x),v_1(x)$及$u_2(x),v_2(x)$使

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1 \qquad (1)$$

$$u_2(x)f(x)+v_2(x)h(x)=1 \qquad (2)$$

将（1）（2）两式相乘，得

$$\begin{aligned}&[u_1(x)u_2(x)f(x)+v_1(x)u_2(x)g(x)+u_1(x)v_2(x)h(x)]f(x)\\&+[v_1(x)v_2(x)]g(x)h(x)=1\end{aligned},$$

所以$(f(x),g(x)h(x))=1$。

13．设$f_1(x),\ldots,f_m(x),g_1(x),\ldots,g_n(x)$都是多项式，而且

$(f_i(x),g_j(x))=1 \qquad (i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n)$。

求证：$(f_1(x)f_2(x)\ldots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x))=1$。

证 由于

$$\begin{array}{l} (f_1(x),g_1(x))=1 \\ (f_1(x),g_2(x))=1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (f_1(x),g_n(x))=1 \end{array},$$

反复应用第12题结论，可得

$$(f_1(x),g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x))=1,$$

同理可证

$$\begin{array}{l} (f_2(x),g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x))=1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (f_m(x),g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x))=1 \end{array}$$

从而可得

$$(f_1(x)f_2(x)\ldots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x))=1。$$

14．证明：如果$(f(x),g(x))=1$，那么$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$。

证　由题设知$(f(x),g(x))=1$，所以存在$u(x),v(x)$使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$，

从而$u(x)f(x)-v(x)f(x)+v(x)f(x)+v(x)g(x)=1$，

即$[u(x)-v(x)]f(x)+v(x)[f(x)+g(x)]=1$，

所以$(f(x),f(x)+g(x))=1$。

同理$(g(x),f(x)+g(x))=1$。

再由12题结论，即证$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$。

15．求下列多项式的公共根

$f(x)=x^3+2x^2+2x+1,g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$

解　由辗转相除法，可求得$(f(x),g(x))=x^2+x+1$，所以它们的公共根为$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$。

16．判别下列多项式有无重因式：

1） $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$；

2） $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$；

解 1）$\begin{array}{l} f'(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4 \\ (f(x),f'(x))=(x-2)^2 \end{array}$，

所以 $f(x)$ 有 $x-2$ 的三重因式。

2）$f'(x)=4x^3+8x-4$，$(f(x),f'(x))=1$，所以 $f(x)$ 无重因式。

17．求 t 值，使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根。

解 易知 $f(x)$ 有三重根 $x=1$ 时，$t=3$。若令

$x^3-3x^2+tx-1=(x-a)^2(x-b)$，比较两端系数，得

$$\begin{cases} -3=-2a-b \\ t=a^2+2ab \\ 1=a^2b \end{cases}$$

由（1），（3）得 $2a^3-3a^2+1=0$，解得 a 的三个根为 $a_1=1,a_2=1,a_3=\frac{1}{2}$，将 a 的三个根分别代入（1），得 $b_1=1,b_2=1,b_3=4$。再将它们代入（2），得 t 的三个根 $t_1=3,t_2=3,t_3=\frac{5}{4}$。当 $t_{1,2}=3$ 时 $f(x)$ 有 3 重根 $x=1$；当 $t_3=\frac{5}{4}$ 时，$f(x)$ 有 2 重根 $x=\frac{1}{2}$。

18．求多项式 x^3+px+q 有重根的条件。

解 令 $f(x)=x^3+px+q$，则 $f'(x)=3x^2+p$，显然当 $p=0$ 时，只有当 $q=0,f(x)=x^3$ 才有三重根。

下设 $p\neq 0$，且 a 为 $f(x)$ 的重根，那么 a 也为 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的根，即

$$\begin{cases} a^3+pa+q=0 \\ 3a^2+p=0 \end{cases}$$

由（1）可得 $a(a^2+p)=-q$，再由（2）有 $a^2=-\frac{p}{3}$。所以

$$\begin{array}{l} a(-\frac{p}{3}+p)=-q \\ \Rightarrow a=-\frac{3q}{2p} \end{array},$$

两边平方得 $\dfrac{9q^2}{4p^2}=a^2=-\dfrac{p}{3}$，所以 $4p^3+27q^2=0$。

综上所叙即知，当 $4p^3+27q^2=0$ 时，多项式 x^3+px+q 有重根。

19．如果 $(x-1)^2 \mid ax^4+bx^2+1$ ，求 a,b。

解 令 $f(x)=ax^4+bx^2+1$，$f'(x)=4ax^3+2bx$。由题设知，1 是 $f(x)$ 的根，也是 $f'(x)$ 的根，此即

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ 4a+2b=0 \end{cases},$$

解得 $a=1,b=-2$。

20．证明：$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}$ 不能有重根。

证 因为 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+...+\dfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$，所以 $f(x)=f'(x)+\dfrac{1}{n!}x^n$，

于是 $(f(x),f'(x))=(f'(x)+\dfrac{1}{n!}x^n,f'(x))=(\dfrac{1}{n!}x^n,f'(x))=1$，从而 $f(x)$ 无重根。

21．如果 α 是 $f'''(x)$ 的一个 k 重根，证明 α 是

$g(x)=\dfrac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)]$ 的一个 k+3 重根。

证 因为

$$g'(x)=\frac{x-a}{2}f''(x)-\frac{1}{2}[f'(x)-f'(a)],$$
$$g''(x)=\frac{x-a}{2}f'''(x)$$

由于 α 是 $f'''(x)$ 的 k 重根，故 α 是 $g''(x)$ 的 $k+1$ 重根。代入验算知 α 是 $g(x)$ 的根。

现在设 α 是 $g(x)$ 的 s 重根，则 α 是 $g'(x)$ 的 $s-1$ 重根，也是 $g''(x)$ 的 s-2 重根。

所以 $s-2=k+1 \Rightarrow s=k+3$。得证。

22．证明：x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0)=f'(x_0)=...=f^{(k-1)}(x_0)=0$ ，

而 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$

证 必要性：设 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根,从而是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重根，是 $f''(x)$ 的 $k-2$ 重根，$\cdots$，

是 $f^{(k-2)}(x_0)$ 的一重根，并且 x_0 不是 $f^{(k)}(x)$ 的根。于是

$f(x_0)=f'(x_0)=...=f^{(k-1)}(x_0)=0,$ 而 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$ 。

充分性：由 $f^{(k-1)}(x_0)=0$ ，而 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$ ，知 x_0 是 $f^{(k-1)}(x)$ 的一重根。又由于 $f^{(k-2)}(x_0)=0$ ，知 x_0 是 $f^{(k-2)}(x)$ 的二重根，依此类推，可知 x_0 是 $f(x)$ 的 k 重根。

23．举例说明段语“α 是 $f'(x)$ 的 m 重根，那么 α 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根”是不对的。

解 例如，设 $f(x)=\dfrac{1}{m+1}x^{m+1}-1$，那么 $f'(x)=x^m$ 以 0 为 m 重根，但 0 不是 $f(x)$ 的根。

24．证明：如果 $(x-1)\mid f(x^n)$，那么 $(x^n-1)\mid f(x^n)$。

证 要证明 $(x^n-1)\mid f(x^n)$，就是要证明 $f(1)=0$（这是因为我们可以把 x^n 看作为一个变量）。由题设由 $(x-1)\mid f(x^n)$，所以 $f(1^n)=0$，也就是 $f(1)=0$，得证。

25．证明：如果 $(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，那么 $(x-1)\mid f_1(x),(x-1)\mid f_2(x)$。

证 因为 x^2+x+1 的两个根为 ε 和 ε^2，其中 $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$，所以 ε 和 ε^2 也是 $f_1(x^3)+xf_2(x^3)$ 的根，且 $\varepsilon^3=1$，于是

$$\begin{cases} f_1(1)+\varepsilon f_2(1)=0 \\ f_1(1)+\varepsilon^2 f_2(1)=0 \end{cases},$$

解之得 $f_1(1)=0, f_2(1)=0$ 。得证。

26．求多项式 x^n-1 在复数范围内和在实数范围内的因式分解。

解 在复数范围内 $x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)...(x-\varepsilon^{n-1})$，其中 $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$，

在实数域内 $\overline{\varepsilon^j}=\varepsilon^{n-j}(0<j<n)$，所以，当 n 为奇数时，有

$$x^n-1=(x-1)[x^2-(\varepsilon+\varepsilon^{n-1})x+1][x^2-(\varepsilon^2+\varepsilon^{n-2})x+1]\ldots\cdot[x^2-(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}+\varepsilon^{\frac{n+1}{2}})x+1]$$

其中 $\varepsilon^j+\varepsilon^{n-j}=\varepsilon^j+\overline{\varepsilon^j}=2\cos\dfrac{2j\pi}{n}(j=1,2,...,\dfrac{n-1}{n})$，皆为实数。

当 n 是偶数时，有

$$x^n-1=(x+1)(x-1)[x^2-(\varepsilon+\varepsilon^{n-1})x+1][x^2-(\varepsilon^2+\varepsilon^{n-2})x+1]\ldots\cdot[x^2-(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}+\varepsilon^{\frac{n-1}{2}})x+1]$$

27．求下列多项式的有理根：

1） $x^3-6x^2+15x-14$；

2） $4x^4-7x^2-5x-1$；

3） $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$。

解　利用剩余除法试根，可得

1） 有一个有理根 2。

2） 有两个有理根$-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}$（即有 2 重有理根$-\dfrac{1}{2}$）。

3） 有五个有理根$3,-1,-1,-1,-1$（即一个单有理根 3 和一个 4 重有理根-1）。

28. 下列多项式在有理数域上是否可约？

1） x^2+1；

2） $x^4-8x^3+12x^2+2$；

3） x^6+x^3+1；

4） x^p+px+1, p 为奇素数；

5） $x^4+4kx+1, k$ 为整数。

解 1）因为± 1都不是它的根，所以x^2+1在有理数域里不可约。

2）利用艾森斯坦判别法，取 $p=2$，则此多项式在有理数域上不可约。

3）首先证明：

命题　设有多项式 $f(x)$，令$x=y+1$或$x=y-1$，得

$$g(y)=f(y+1) \text{ 或 } g(y)=f(y-1)$$

则 $f(x)$ 与 $g(y)$ 或者同时可约，或者同时不可约。

事实上，若 $f(x)$ 可约，即 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，从而 $g(y)=f(y\pm 1)=f_1(y\pm 1)f_2(y\pm 1)$，

这就是说 $g(y)$ 也可约，反之亦然。

现在我们用它来证明x^6+x^3+1在有理数域上不可约。令 $x=y+1$，则多项式变为

$$(y+1)^6+(y+1)^3+1=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3$$

利用艾森斯坦判别法，取 $p=3$，即证上式不可约，因而x^6+x^3+1也不可约。

4） 设 $f(x)=x^p+px+1$，令 $x=y-1$，则 $g(y)=f(y-1)$

$$=y^p-C_p^1y^{p-1}+C_p^2y^{p-2}-...-C_p^{p-2}y^2+(C_p^{p-1}+p)y-p$$

由于 p 是素数，因而 $p\,|\,C_p^i(i=1,2,...,p-1)$，但 $p^2\,|\,p$，所以由艾森斯坦判别法，即证 $g(y)$ 在有理数域上不可约，因而 $f(x)$ 也在有理数域上不可约。

5） 已知 $f(x)=x^4+4kx+1$，令 $x=y+1$，可得

$$g(y)=f(y+1)=y^4+4y^3+6y^2+(4k+4)y+4k+2$$

利用艾森斯坦判别法，取 $p=2$，即证 $g(y)$ 在有理数域上不可约，因而 $f(x)$ 也在有理数域上不可约。

29．用初等对称多项式表求出下列对称多项式：

1） ${x_1}^2x_2+x_1{x_2}^2+{x_1}^2x_3+x_1{x_3}^2+{x_2}^2x_3+x_2{x_3}^2$；

2） $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$；

3） $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$；

4） ${x_1}^2{x_2}^2+{x_1}^2{x_3}^2+{x_1}^2{x_4}^2+{x_2}^2{x_3}^2+{x_2}^2{x_4}^2+{x_3}^2{x_4}^2$；

5) $(x_1x_2+x_3)(x_2x_3+x_1)(x_3x_1+x_2)$；

6) $(x_1+x_2+x_1x_2)(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$。

解 1）对称多项式的首项为 ${x_1}^2x_2$，其方幂为 $(2,1,0)$，即 $\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1\sigma_2$，

又因为 ${x_1}^2x_2+x_1{x_2}^2+{x_1}^2x_3+x_1{x_3}^2+{x_2}^2x_3+x_2{x_3}^2-\sigma_1\sigma_2=-3x_1x_2x_3$，

所以 原式=$\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$。

2）同理可得 $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$

$$=x_1{}^2x_2+x_1x_2{}^2+x_1{}^2x_3+x_1x_3{}^2+x_2{}^2x_3+x_2x_3{}^2+2x_1x_2x_3$$

$$=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3+2\sigma_3$$
$$=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$$

3）原式=$({x_1}^2-2x_1x_2+{x_2}^2)({x_1}^2-2x_1x_3+{x_3}^2)({x_2}^2-2x_2x_3+{x_3}^2)$

$$={x_1}^4{x_2}^2+...,$$

由此可知多项式时六次对称多项式，且首项为 ${x_1}^4{x_2}^2$，所以 σ 的方幂之积为

指数组	对应σ的方幂乘积
4　　2　　0	$\sigma_1^2\sigma_2^2$
4　　1　　1	$\sigma_1^3\sigma_3$
3　　3　　0	σ_2^3
3　　2　　1	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
2　　2　　2	σ_3^2

原式$=\sigma_1^2\sigma_2^2+a\sigma_1^3\sigma_3+b\sigma_2^3+c\sigma_1\sigma_2\sigma_3+d\sigma_3^2$ (1)

只要令$x_1=0,x_2=x_3=0$,则原式左边$=0$。另一方面，有$\sigma_1=2,\sigma_2=1,\sigma_3=0$，

代入（1）式，得$b=-4$。再令$x_1=x_2=1,x_3=-2$，得$d=-27$。

令$x_1=x_2=1,x_3=-1$，得

$-a+c=22$ （2）

令$x_1=x_2=x_3=1,$得

$3a+c=6$ （3）

由（2），（3）解得$a=-4,c=18$。因此

原式$=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2$。

4）原式$={x_1}^2{x_2}^2+{x_1}^2{x_3}^2+{x_1}^2{x_4}^2+{x_2}^2{x_3}^2+{x_2}^2{x_4}^2+{x_3}^2{x_4}^2$

指数组	对应σ的方幂乘积
2　2　0　0	σ_2^2
2　1　1　0	$\sigma_1\sigma_3$
1　1　1　1	σ_4

设原式$=\sigma_2^2+a\sigma_1\sigma_3+b\sigma_4$

令$x_1=x_2=x_3=1,x_4=0,$得$a=-2$。

再令$x_1=x_2=x_3=x_4=1,$得$b=2$。

因此原式$=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$。

1） 原式$=x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2+(x_1{}^3x_2x_3+x_1x_2{}^3x_3+x_1x_2x_3{}^3)$

$$+(x_1{}^2x_2{}^2+x_2{}^2x_3{}^2+x_1{}^2x_3{}^2)+x_1x_2x_3,$$

由于 $x_1{}^3x_2x_3+x_1x_2{}^3x_3+x_2x_2x_3{}^3=\sigma_1^2\sigma_3-2\sigma_2\sigma_3$，

$$x_1{}^2x_2{}^2+x_2{}^2x_3{}^2+x_1{}^2x_3{}^2=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3,$$

所以原式$=\sigma_1^2\sigma_3-2\sigma_1\sigma_3+\sigma_2^2-2\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^2+\sigma_3$。

2） 原式$=x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2+2(x_1{}^2x_2{}^2x_3+x_1{}^2x_2x_3{}^2+x_1x_2{}^2x_3{}^3)$

$$+(x_1{}^2x_2{}^2+x_2{}^2x_3{}^2+x_1{}^2x_3{}^2+3x_1{}^2x_2x_3+3x_1x_2{}^2x_3+3x_1x_2x_3{}^2)$$

$$+(x_1{}^2x_2+x_1x_2{}^2+x_1{}^2x_3+x_2{}^2x_3+x_1x_3{}^2+x_2x_3{}^2)+2x_1x_2x_3,$$

其中$2(x_1{}^2x_2{}^2x_3+x_1{}^2x_2x_3{}^2+x_1x_2{}^2x_3{}^3)=2\sigma_2\sigma_3$，

$$x_1{}^2x_2{}^2+x_2{}^2x_3{}^2+\ldots+3x_1x_2x_3{}^2=\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_3,$$

$$x_1{}^2x_2+x_1x_2{}^2+\ldots+x_2x_3{}^2=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3,$$

所以 原式$=\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2^2+2\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^2-\sigma_3$。

30．用初等对称多项式表出下列 n 元对称多项式：

1）$\sum x_1^4$；

2）$\sum x_1^2x_2x_3$；

3）$\sum x_1^2x_2^2$；

4)；$\sum x_1^2x_2^2x_3x_4$

（$\sum ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}$ 表示所有由 $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}$ 经过对换得到的项的和。）

解 1）因为多项式的首项为$x_1{}^4$，所以

指数组	对应σ的方幂乘积
4000…0	σ_1^4
3100…0	$\sigma_1^2\sigma_2$

2200…0	σ_2^2
2110…0	$\sigma_1\sigma_3$
1111..0	σ_4

设原式$=\sigma_1^4+a\sigma_1^2\sigma_2+b\sigma_2^2+c\sigma_1\sigma_3+d\sigma_4$，

令$x_1=1,x_2=-1,x_3=x_4=...=x_n=0,$得$b=2$。

$x_1=x_2=1,x_3=...=x_n=0,$得$a=-4$。

$x_1=x_2=x_3=1,x_4=...=x_n=0,$得$c=4$。

$x_1=x_2=1,x_3=x_4=-1,x_5=...=x_n=0,$得$d=-4$。

所以原式$=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$。

2）同理可得原式$=\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$。

3）原式$=\sigma_1^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$。

4） 原式$=\sigma_2\sigma_4-4\sigma_1\sigma_5+9\sigma_6$。

31．设a_1,a_2,a_3是方程$5x^3-6x^2+7x-3=0$的三个根，计算

$(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)(a_2^2+a_2a_3+a_3^2)(a_1^2+a_1a_3+a_3^2)$

解　因为

$\sigma_1=a_1+a_2+a_3$

$\sigma_2=a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3$，

$\sigma_3=a_1a_2a_3$

由根和系数的关系，可得$\sigma_1=\dfrac{6}{5},\sigma_2=\dfrac{7}{5},\sigma_3=\dfrac{3}{5}$，

再将对称多项式化为初等多项式并计算，可得

$$(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)(a_2^2+a_2a_3+a_3^2)(a_1^2+a_1a_3+a_3^2)$$

$$=\sigma_1^2\sigma_1^2-\sigma_1^3\sigma_3-\sigma_2^3=-\frac{1679}{625}。$$

32．证明：三次方程$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$的三个根成等差数列的充分必要条件为

$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$。

证　设原方程的三个根为$\delta_1,\delta_2,\delta_3$，则它们成等差数列的充分必要条件为

$(2\delta_1-\delta_2-\delta_3)(2\delta_2-\delta_1-\delta_3)(2\delta_3-\delta_1-\delta_2)=0$。

将上式左端表为初等对称多项式，得

$(2\delta_1-\delta_2-\delta_3)(2\delta_2-\delta_1-\delta_3)(2\delta_3-\delta_1-\delta_2)=2\delta_1^3-9\delta_1\delta_2+27\delta_3$，

故三根成等差数列的充分必要条件为$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$。

二 、补充题及参考解答

1．设$f_1(x)=af(x)+bg(x),g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且$ad-bc\neq 0$，证明：

$$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x))$$

证　设$d(x)=(f(x),g(x))$,则由已知，得$d(x)\mid f_1(x),d(x)\mid g_1(x)$。

其次，设$\varphi(x)$是$f_1(x)$与$g_2(x)$的任一公因式，只需证明$\varphi(x)\mid d(x)$即可。

因为$f_1(x)=af(x)+bg(x),g_1(x)=cf(x)+dg(x)$,所以

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{d}{ad-bc}f_1(x)-\dfrac{b}{ad-bc}g_1(x) \\ g(x)=\dfrac{c}{ad-bc}f_1(x)+\dfrac{a}{ad-bc}g_1(x) \end{cases}$$

又因为$\varphi\mid f_1,\varphi\mid g_1\Rightarrow\varphi\mid f,\varphi\mid g$,从而$\varphi(x)\mid d(x)$。故$d(x)$也是$f_1(x)$与$g_1(x)$的最大公因式。

2．证明：只要$\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))},\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$的次数都大于零，就可以适当选择适合等式

$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$的$u(x)$与$v(x)$，使

$$\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right),\partial(v(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)$$

证　存在多项式$u_1(x)$，$v_1(x)$，使

$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=(f(x),g(x))$,从而

$$u_1(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v_1(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1 \qquad （1）$$

1） 若 $u_1(x)$ 的次数满足 $\partial(u_1(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)$,则

$\partial(v_1(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)$

事实上，采用反证法。若 $\partial(v_1(x))\geq\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)$,则（1）式左边的第一项次数小于

$\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)+\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)$,而第二项的次数大于或等于

$\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)+\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)$,

这样（1）式左端的次数 $\geq\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)+\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)>0$，但（1）式右端的次数为零，矛盾。所以 $\partial(u_1(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right),\partial(v_1(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right)$,

此时 $u_1(x)$， $v_1(x)$ 即为所求。

2)若 $\partial(u_1(x))\geq\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)$,则用 $\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 除 $u_1(x)$，可得

$u_1(x)=s(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}+r(x)$,其中 $\partial(r(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)$,

注意到 $r(x)=0$ 是不可能的，事实上，若 $r(x)=0$，则 $u_1(x)=s(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$,

代入（1）式得 $[s(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}+v_1(x)]\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1$,矛盾。

再将 $u_1(x)=s(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}+r(x)$ 代入（1）式，可得

$$r(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+[s(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v_1(x)]\times\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1,$$

令 $u(x)=r(x),v(x)=s(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v_1(x)$,再利用本题 1）的证明结果，即证。

3．证明：如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，那么 $f(x^m)$ 与 $g(x^m)$ 也互素。

证　由假设，存在 $u(x)$ 和 $v(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$，

于是 $u(x^m)f(x^m)+v(x^m)g(x^m)=1$，即证。

4．证明：如果 $f_1(x),f_2(x),...f_{s-1}(x)$ 的最大公因式存在，那么

$f_1(x),f_2(x),...f_{s-1}(x),f_s(x)$ 的最大公因式也存在，且当 $f_1(x),f_2(x),...f_{s-1}(x),f_s(x)$ 全不为零时有 $(f_1(x),f_2(x),...f_{s-1}(x),f_s(x))=((f_1(x),f_2(x),...f_{s-1}(x)),f_s(x))$，再利用上式证明，存在 $u_1(x),u_2(x),...,u_s(x)$ 使

$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+...+u_s(x)f_s(x)=(f_1(x),f_2(x),...,f_s(x))$.

证　因为 $f_1(x),f_2(x),...f_{s-1}(x)$ 的最大公因式存在，设其为 $d_1(x)$，则

$d_1(x)=(f_1(x),f_2(x),...f_{s-1}(x))$，于是 $d_1(x)$ 与 $f_s(x)$ 的最大公因式也存在，不妨设为

$d(x)=(d_1(x),f_s(x))$，则 $d(x)\mid f_i(x)\qquad(i=1,2,...,s)$，

若设 $\varphi(x)$ 是 $f_1(x),f_2(x),...f_{s-1}(x),f_s(x)$ 的任一公因式，则 $\varphi(x)\mid d_1(x)$，

这样 $\varphi(x)$ 为 $d_1(x)$ 与 $f_s(x)$ 的一个公因式，又可得 $\varphi(x)\mid d(x)$，即证

$d(x)=(f_1(x),f_2(x),...f_{s-1}(x),f_s(x))$.

下面用归纳法证明本题第二部分。当 $s=2$ 时结论显然成立，假设命题对 $s-1$ 也成立，即存在 $v_1(x),v_2(x),...,v_{s-1}(x)$，使 $v_1(x)f_1(x)+v_2(x)f_2(x)+...+v_{s-1}(x)f_{s-1}(x)$

$=(f_1(x),f_2(x),...f_{s-1}(x))=d_1(x)$，成立。

再证命题对 s 也成立。

事实上，存在 $p(x)$ 和 $q(x)$，使 $d(x)=(d_1(x),f_n(x))=p(x)d_1(x)+q(x)f_s(x)$

$=p(x)[v_1(x)f_1(x)+v_2(x)f_2(x)+...+v_{s-1}(x)f_{s-1}(x)]+q(x)f_s(x)$，

令 $u_i(x)=p(x)v_i(x)\qquad(i=1,2,...,s-1)$，$u_s(x)=q(x)$，即证。

5．多项式 $m(x)$ 称为多项式 $f(x),g(x)$ 的一个最小公因式，如果

1）$f(x)\mid m(x),g(x)\mid m(x)$；

2） $f(x),g(x)$ 的任一公倍式都是 $m(x)$ 的倍式。

我们以 $[f(x),g(x)]$ 表示首项系数是 1 的那个最小公倍式，证明：如果 $f(x),g(x)$ 的首项系数都是 1，那么 $[f(x),g(x)]=\dfrac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$。

证　令 $(f(x),g(x))=d(x)$，则

$f(x)=f_1(x)d(x)$， $g(x)=g_1(x)d(x)$，于是

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}=f(x)g_1(x)=g(x)f_1(x)。$$

即 $f(x)\mid\dfrac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$ ， $g(x)\mid\dfrac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$，

设 $M(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公倍式，下面证明 $\dfrac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}\mid M(x)$。

由倍式的定义，有 $M(x)=f(x)s(x)=g(x)t(x)$，

即 $f_1(x)d(x)s(x)=f(x)s(x)=g(x)t(x)=g_1(x)d(x)t(x)$，

消去 $d(x)$ 得 $f_1(x)s(x)=g_1(x)t(x)$，于是 $g_1(x)\mid f_1(x)s(x)$。

由于 $(f_1(x),g_1(x))=1$，因而 $g_1(x)\mid s(x)$ 或者 $s(x)=g_1(x)q(x)$，所以

$$M(x)=f(x)s(x)=f(x)g_1(x)q(x)=\frac{f_1(x)}{(f(x),g(x))}q(x),$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}\mid M(x)。即证。$$

6. 证明：设 $p(x)$ 是次数大于零的多项式，如果对于任何多项式 $f(x),g(x)$，由 $p(x)\mid f(x)g(x)$，可以推出 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $p(x)\mid g(x)$，那么 $p(x)$ 是不可约多项式。

证　采用反证法。设 $p(x)$ 可约，则有 $p(x)=p_1(x)\mid p_2(x)$，那么由假设可得

$p(x)\mid p_1(x)$ 或 $p(x)\mid p_2(x)$，

这是不可能的，因为后面两个多项式的次数低于 $p(x)$ 的次数。于是得证。

7. 证明：次数>0且首项系数为1的多项式$f(x)$是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件为：对任意的多项式$g(x)$必有$(f(x),g(x))=1$，或者对某一正整数$m, f(x)\mid g^m(x)$。

证 必要性：设$f(x)=p^s(x)$（其中$p(x)$是不可约多项式），则对任意多项式$g(x)$，有

1）$(p(x),g(x))=1$；或2）$p(x)\mid g(x)$。

对于1）有$(f(x),g(x))=1$。

对于2）有$p^s(x)\mid g^s(x)$，此即$f(x)\mid g^s(x)$。再让$m=s$，即必要性得证。

充分性：设$f(x)$不是某一个多项式的方幂，则$f(x)=p_1^{\lambda_1}(x)p_2^{\lambda_2}(x)...p_n^{\lambda_n}(x)$，

其中$n>1, \lambda_i(i=1,2,...,n)$是正整数。

若$g(x)=p_1(x)$，则由题设知$f(x)$与$g(x)$满足$(f(x),g(x))=1$或$f(x)\mid g^m(x)$（m为某一正整数）。但这是不可能的，即证。

8. 证明：次数>0且首项系数为1的多项式$f(x)$是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是：对任意的多项式$g(x),h(x)$，由$f(x)\mid g(x)h(x)$，可以推出$f(x)\mid g(x)$，或者对某一正整数$m, f(x)\mid h^m(x)$。

证 必要性：设$f(x)\mid g(x)h(x)$，则对多项式$h(x)$，有

1）$(f(x),h(x))=1$，于是$f(x)\mid g(x)$；2）$f(x)\mid h^m(x)(m$为某一正整数）。

必要性成立。

充分性：对任意多项式$g(x)$，有$(f(x),g(x))=1$或$(f(x),g(x))=d(x)\neq 1$，

若$f(x)=f_1(x)d(x)$，那么$f(x)\mid f_1(x)g(x)$，但$f(x)\mid f_1(x)$。再由充分性假设，可得$f(x)\mid g^m(x), m$为某一正整数。于是由第7题的充分条件，即证。

9. 证明：$x^n+ax^{n-m}+b$不能有不为零的重数大于2的根。

证 设$f(x)=x^n+ax^{n-m}+b$，则$f'(x)=x^{n-m-1}[nx^m+(n-m)a]$，

又因为$f'(x)$的非零根都是多项式$g(x)=nx^m+(n-m)a$的根，而$g(x)$的m个根都是单根，因而$f'(x)$没有不为零且重数大于2的根。

10． 证明：如果 $f(x)|f(x^n)$，那么 $f(x)$ 的根只能是零或单位根。

证 设 a 是 $f(x)$ 的任一个根，由 $f(x)|f(x^n)$ 知，a 也是 $f(x)|f(x^n)$ 的根，即

$f(x^n)=0$，所以 a^n 也是 $f(x)$ 的根。以此类推下去，则

$a, a^n, a^{n^2}, \ldots$ 都是 $f(x)$ 的根。

若 $f(x)$ 是 m 次多项式，则 $f(x)$ 最多只可能有 m 个相异的根，于是存在 $k>\lambda$ 使

$a^{n^k}=a^{n^\lambda}$，$a^{n^\lambda}(a^{n^k-n^\lambda}-1)=0$，因此 $f(x)$ 的根 a 或者为 0，或者为单位根。

11．如果 $f'(x)|f(x)$，证明 $f(x)$ 有 n 重根，其中 $n=\partial(f(x))$。

证 设 $a_1,a_2,\ldots,a_s$ 是 $f'(x)$ 的 s 个不同的根，且它们的重数分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$，由于 $f'(x)$ 是

$n-1$ 次多项式，因而 $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_s=n-1$，

其次，由 $f'(x)|f(x)$，所以 $a_1,a_2,\ldots,a_s$ 分别为 $f(x)$ 的 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\ldots,\lambda_s+1$ 重根，但

$(\lambda_1+1)+(\lambda_2+1)+\ldots+(\lambda_s+1)=n$，

所以 $n-1+s=n$，从而 $s=1$。这就是说，$f'(x)$ 只可能有一个根 a_1，且重数为 $\lambda_1=n-1$。

故 $f(x)$ 有 n 重根。

11．设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 n 个不同的数，而 $F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$

证明：1）$\sum_{i=1}^{n}\frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}=1$；2）任意多项式 $f(x)$ 用 $F(x)$ 除所得的余式为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$$

证 1）令 $g(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$，

则 $\partial(g(x))\le n-1$，

但 $g(a_1)=g(a_2)=\ldots=g(a_n)=1$，

所以 $g(x)\equiv 1$。即证得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}=1。$$

2）对于任意的多项式 $f(x)$，用 $F(x)$ 除得

$$f(x)=q(x)F(x)+r(x),\quad (r(x)=0\text{或}\partial(r(x))\le n-1)，$$

当 $r(x)=0$ 时，结论显然成立。当 $\partial(r(x))\le n-1$ 时，若令

$$k(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}，$$

则 $\partial(k(x))\le n-1$，于是

$$r(a_i)=f(a_i)=k(a_i)\qquad (i=1,2,...,n)，$$

即证得

$$r(x)=k(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}。$$

12. 设 $a_1,a_2,...,a_n$ 与 $F(x)$ 同上题，且 $b_1,b_2,...,b_n$ 是任意 n 个数，显然

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_iF(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$$

适合条件 $L(a_i)=b_i\qquad (i=1,2,...,n)$。

这称为拉格朗日(Lagrange)插值公式。
利用上面的公式：

1） 一个次数 <4 的多项式 $f(x)$，它适合条件：

$$f(2)=3,f(3)=-1,f(4)=0,f(5)=2$$

2）一个二次多项式 $f(x)$，它在 $x=0,\dfrac{\pi}{2},\pi$ 处与函数 $\sin x$ 有相同的值；

3）一个次数尽可能低的多项式 $f(x)$，使

$$f(0)=1,f(1)=2,f(2)=5,f(3)=10$$

解 1）设 $F(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$，且

$$f(2)=3,f(3)=-1,f(4)=0,f(5)=2，$$

将它们代入 $L(x)$（即 $f(x)$），可得

$$f(x)=\frac{3(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(x-2)(2-3)(2-4)(2-5)}+\frac{(-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(x-3)(3-2)(3-4)(3-5)}$$

$$+\frac{0(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(x-4)(4-2)(4-3)(4-5)}+\frac{2(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(x-5)(5-2)(5-3)(5-4)}$$

$$=-\frac{2}{3}x^3+\frac{17}{2}x^2-\frac{203}{6}x+42。$$

2） 已知

$$\sin 0=0=f(0)，\quad \sin\frac{\pi}{2}=1=f(\frac{\pi}{2})，\quad \sin\pi=0=f(\pi)$$

设 $F(x)=x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)$，与上题类似，可得

$$f(x)=-\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi)。$$

3） 同理，设 $F(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，可得

$$f(x)=x^2+1。$$

14．设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，试证：如果 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数，那么 $f(x)$ 不能有整数根。

证　设 a 是 $f(x)$ 的一个整数根，则 $f(x)=(x-a)f_1(x)$，由综合法知商式 $f_1(x)$ 也为整系数多项式，于是

$$\begin{cases} f(0)=-af_1(0) \\ f(1)=(1-a)f_1(1) \end{cases}$$

又因为 a 与 $1-a$ 中必有一个为偶数，从而 $f(0)$ 与 $f(1)$ 中至少有一个为偶数，与题设矛盾。

故 $f(x)$ 无整数根。

15．设 $x_1,x_2,...,x_n$ 是方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0$$

的根，证明：$x_2,...,x_n$ 的对称多项式可以表成 x_1 与 $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ 的多项式。

证　设 $f(x_2,...,x_n)$ 是关于 $x_2,...,x_n$ 的任意一个对称多项式，由对称多项式的基本定理，有

$$f(x_2,...,x_n)=g(\sigma_1^{/},...,\sigma_{n-1}^{/}) \qquad (1)$$

其中 $\sigma_1^{/}(i=1,2,...,n-1)$ 是 $x_2,...,x_n$ 的初等对称多项式。

由于

$$\begin{cases} \sigma_1' = \sigma_1 - x_1 \\ \sigma_2' = \sigma_2 - x_1\sigma_1' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{n-1}' = \sigma_{n-1} - x_1\sigma_{n-2}' \end{cases} \qquad (2)$$

其中σ_i为$x_1, x_2, ..., x_n$的初等对称多项式，但是

$$\begin{cases} \sigma_1 = -a_1 \\ \sigma_2 = a_2 \\ \cdots\cdots \\ \sigma_{n-1} = (-1)^{n-1}a_{n-1} \end{cases} \qquad (3)$$

将（3）代入（2）可知，σ_i'是$x_1, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$的一个多项式，不妨记为

$$\sigma_i' = p_i(x_1, a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, ..., n-1) \qquad (4)$$

再将（4）代入（1）式右端，即证$f(x_2, ..., x_n)$可表为$x_1, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$的多项式。

16．设$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + ... + (-1)^n \sigma_n$，

令$s_k = x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$。

1） 证明

$$x^{k+1}f'(x) = (s_0x^k + s_1x^{k-1} + ... + s_{k-1}x + s_k)f(x) + g(x)$$

其中$g(x)$的次数$< n$或$g(x) = 0$。

2） 由上式证明牛顿(Newton)公式：

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + ... + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0 \qquad （对 1 \le k \le n）$$

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + ... + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0 \qquad （对 k > n）$$

证 1）由假设$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x)}{x - x_i}$，$x^{k+1}f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{x - x_i} f(x)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{k+1} - x_i^{k+1}}{x - x_i} f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k+1}}{x - x_i} f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x^k + x_i x^{k-1} + ... + x_i^k) f(x) + g(x),$$

其中$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k+1}}{x - x_i} f(x)$是一个次数$< n$的多项式。故

$$x^{k+1}f'(x) = (s_0x^k + s_1x^{k-1} + ... + s_{k-1}x + s_k)f(x) + g(x)$$

2）由于 $f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\ldots+(-1)^n\sigma_n$，

$x^{k+1}f'(x)=x^{k+1}(nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1})$，

因此得等式

$$(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\ldots+s_{k-1}x+s_k)(x^n-\sigma_1x^{n-1}+\ldots+(-1)^n\sigma_n)+g(x)$$
$$=x^{k+1}(nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}) \qquad (*)$$

当 $k\le n$ 时，比较上式两端含 x^n 的系数，首先由于 $\partial(g(x))<n, g(x)$ 不含有 x^n 的项，所以等式左端含 x^n 的系数为

$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\ldots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^ks_0\sigma_k=0$，

而右端含 x^n 的项只有一项，它的系数为 $(-1)^k(n-k)\sigma_k$，所以

$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\ldots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^ks_0\sigma_k=(-1)^k(n-k)\sigma_k$，

注意到 $s_0=n$，即证得

$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\ldots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k\sigma_k=0$。

当 $k>n$ 时，等式 $(*)$ 右端所有项的次数都大于 n，所以含 x^n 的系数为 0，而左端含 x^n 的项的系数为 $s_k-\sigma_1s_{k-1}+\ldots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}$，因此 $s_k-\sigma_1s_{k-1}+\ldots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0$。得证。

17．根据牛顿公式，用初等对称多项式表示 s_2,s_3,s_4,s_5,s_6。

解 1）当 $n\ge6$ 时，由上题可得 $s_2-s_1\sigma_1+2\sigma_2=0$，而 $s_1=\sigma_1$，所以 $s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$。

同理可得 $s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$，

$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4$，

$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3+5\sigma_5$，

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-2\sigma_2^3$$
$$+3\sigma_3^2+6\sigma_2\sigma_4+6\sigma_1\sigma_5-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3-6\sigma_6。$$

2）当 $n=5$ 时，s_2,s_3,s_4,s_5 同 1）所给，且

$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3$

$+6\sigma_1\sigma_5-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2$。

3) 当 $n=4$ 时，s_2,s_3,s_4 同 1）所给，s_6 同 2）所给，且

$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3$。

4）当 $n=4$ 时，s_2,s_3 同 1）所给，s_5,s_6 同 3）所给，且

$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2$。

5）当 $n=2$ 时，s_2 同 1）所给，s_4,s_5,s_6 同 4）所给，且 $s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$。

18．证明：如果对于某一个 6 次方程有 $s_1=s_3=0$，那么 $\frac{s_7}{7}=\frac{s_5}{5}\bullet\frac{s_2}{2}$。

证　这时 $n=6$，并注意 $s_1=\sigma_1=0$，且 $s_1=3\sigma_3=0$，所以 $\sigma_3=0$，于是

$s_2=-2\sigma_2$，$s_5=-5\sigma_2\sigma_3+5\sigma_5$，即 $s_5=5\sigma_5$。

而 $s_7=\sigma_1s_6-\sigma_2s_5+\sigma_3s_4-\sigma_4s_3+\sigma_5s_5-\sigma_6s_1=-7\sigma_2\sigma_5$，

故 $\frac{s_7}{7}=-\sigma_2\sigma_5=\frac{s_5}{5}\bullet\frac{s_2}{2}$。

19．求一个 n 次方程使 $s_1=s_2=..=s_{n-1}=0$。

解　设此方程为 $x^n-\sigma_1x^{n-1}+...+(-1)^n\sigma_n=0$，由题设及牛顿公式，可得

$\sigma_1=\sigma_2=...\sigma_{n-1}=0$，故所求方程为 $x^n+(-1)^n\sigma_n=0$ 或 $x^n+a=0$。

20．求一个 n 次方程使 $s_1=s_2=..=s_n=0$。

解　设此方程为 $x^n-\sigma_1x^{n-1}+...+(-1)^n\sigma_n=0$，

由题设及牛顿公式可得 $\sigma_k=\frac{\sigma_{k-1}\sigma_1}{k}\qquad(k=2,3,...,n)$，

即 $\sigma_k=\frac{\sigma_1^k}{k!}\qquad(k=2,3,...,n)$，

所以 $\sigma_2=\frac{1}{2}\sigma_1^2$，$\sigma_3=\frac{1}{3!}\sigma_1^3$，...，$\sigma_n=\frac{1}{n!}\sigma_1^n$，

故所求方程为 $x^n-\sigma_1x^{n-1}+\frac{\sigma_1^2}{2!}x^{n-2}+...+(-1)^n\frac{\sigma_1^n}{n!}=0$。

第二章　　行 列 式

1.　求以下 9 级排列的逆序数,从而决定它们的奇偶性

1)　　1　3　4　7　8　2　6　9　5;

2)　　2　1　7　9　8　6　3　5　4;

3)　　9　8　7　6　5　4　3　2　1;

解:1）所求排列的逆序数为:

$$\tau(134782695)=0+1+1+3+3+0+1+1=10,$$

所以此排列为偶排列。

2) 所求排列的逆序数为:

$$\tau(217986354)=1+0+4+5+4+3+0+1=18,$$

所以此排列为偶排列。

3）所求排列的逆序数为:

$$\tau(987654321)=8+7+6+5+4+3+2+1=\frac{9(9-1)}{2}=36,$$

所以此排列为偶排列。

2.选择 i 与 k 使

1)　　$1274i56k9$ 成偶排列;

2)　　$1i25k4897$ 成奇排列。

解:　1) 当 $i=8,k=3$ 时，所求排列的逆序数为:

$$\begin{aligned}&\tau(1274i56k9)=\tau(127485639)\\&=0+0+4+1+3+1+1+0=10\end{aligned},$$

故当 $i=8,k=3$ 时的排列为偶排列.。

2)当 $i=3,k=6$ 时，所求排列的逆序数为:

$$\begin{aligned}&\tau(1i25k4897)=\tau(132564897)\\&=0+1+0+1+1+0+1+1=5\end{aligned},$$

故当 $i=3,k=6$ 时的排列为奇排列。

3. 写出把排列 12345 变成排列 25341 的那些对换。

解:　$12345\xrightarrow{(1,2)}21435\xrightarrow{(2,5)}25431\xrightarrow{(3,4)}25341$。

4. 决定排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数, 并讨论它的奇偶性。

解:　　因为 1 与其它数构成 $n-1$ 个逆序, 2 与其它数构成 $n-2$ 个逆序,

$\cdots\cdots n-1$与n构成 1 个逆序, 所以排列$n(n-1)\cdots 21$的逆序数为

$$\tau[n(n-1)\cdots 21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

故当$n=4k,4k+1$时，排列为偶排列；

当$n=4k+2,4k+3$时排列为奇排列。

5. 如果排列$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$的逆序数为k, 排列$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$的逆序数是多少?

解: 因为比x_i大的数有$n-x_i$个, 所以在

$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$与$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$这两个排列中, 由x_i与比它的各数构成的逆序数的和为$n-x_i$. 因而, 由x_i构成的逆序总数恰为 $1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$。

而排列$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$的逆序数为k, 故排列$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$的逆序数为$\frac{n(n-1)}{2}-k$。

6. 在 6 阶行列式中, $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$， $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$这两项应带有什么符号?

解: 在 6 阶行列式中, 项$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$前面的符号为

$$(-1)^{\tau(234516)+\tau(312645)}=(-1)^{4+4}=1$$ 。

同理项$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$前面的符号为

$$(-1)^{\tau(341562)+\tau(234165)}=(-1)^{6+4}=1$$ 。

所以这两项都带有正号。

7．写出 4 阶行列式中所有带有负号并且因子a_{23}的项。

解： 所求的各项应是$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ ， $-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ ， $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 。

8．按定义计算行列式：

1） $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 2） $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

3） $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$ 。

解：1）所给行列式的展开式中只含有一个非零项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$，

它前面的符号应为 $(-1)^{\tau[n(n-1)\cdots 21]}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ，

所以原行列式= $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$。

2）所给行列式的展开式中只含有一个非零项 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$，

它前面的符号应为 $(-1)^{\tau(23\cdots n1)}=(-1)^{n-1}$ ，

所以原行列式= $(-1)^{n-1}n$!。

3）所给行列式的展开式中只含有一个非零项 $a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}$，

它前面的符号应为 $(-1)^{\tau[(n-1(n-2))\cdots 21n]}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ ，

所以原行列式= $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n$!。

9．由行列式定义证明：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

解：行列式展开的一般项可表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，列标 $j_3j_4j_5$ 只可以在 1，2，3，4，5 中取不同的值，故三个下标中至少有一个要取 3，4，5 列中之一数，从而任何一个展开式中至少要包含一个 0 元素，故所给行列式展开式中每一项的乘积必为 0，因此原行列式值为 0。

10．　由行列式定义计算

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$$ 中 x^4 与 x^3 的系数，并说明理由。

解：含有 x^4 的展开项只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，所以 x^4 的系数为 2；同理，含有 x^3 的展开项只能是 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，所以 x^3 的系 数为-1。

11. 由 $\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}=0$， 证明：奇偶排列各半。

证：由题设，所给行列式的展开式中的每一项的绝对值等于 1。 而行列式的值为 0，这说明带正号与带负号的项的项数相等. 根据行列式的定义，其展开式中的每一项的符号是由该乘积中各因子下标排列的逆序数所决定的，即当该乘积中各因子的第一个下标排成自然顺序，且第二个下标所成排列为偶排列时， 该项前面所带的符号为正，否则为负号，所以，由带正号的项与带负号的项数相等即说明奇偶排列各半。

12．设

$$P(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1}\\ 1 & a_1 & a_1^{\,2} & \cdots & a_1^{\,n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^{\,2} & \cdots & a_2^{\,n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^{\,2} & \cdots & a_{n-1}^{\,n-1}\end{vmatrix},$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 是互不相同的数。

1）由行列式定义，说明 $P(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式；

2）由行列式性质，求 $P(x)$ 的根。

解：1）因为所给行列式的展开式中只有第一行含有 x，所以若行列式的第一行展开时，含有 x^{n-1} 的对应项的系数恰为 $(-1)^{n+1}$ 乘一个范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^{\,2} & \cdots & a_1^{\,n-2}\\ 1 & a_2 & a_2^{\,2} & \cdots & a_2^{\,n-2}\\ 1 & a_3 & a_3^{\,2} & \cdots & a_3^{\,n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^{\,2} & \cdots & a_{n-1}^{\,n-2}\end{vmatrix}$$

于是，由 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 为互不相同的的数即知含有 x^{n-1} 的对应项的系数不为 0，因

而 $P(x)$ 为一个 $n-1$ 次的多项式。

2） 若用 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 分代替 x 时，则由行列式的性质知所给行列式的值为 0，即 $P(a_i)=0$. 故 $P(x)$ 至少有 $n-1$ 个根 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$. 又因为 $P(x)$ 是一个 $n-1$ 次的多项式，所以 $a_1,a_2,\cdots a_{n-1}$ 必是 $P(x)$ 的全部根。

13．计算下面的行列式：

1）$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$　　2）$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

3）$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$　　4）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

5）$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$　　6）$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

解：1） 原式=$\begin{vmatrix} 1000 & 427 & 327 \\ 2000 & 543 & 443 \\ 1000 & 721 & 621 \end{vmatrix} = 10^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 327 \\ 2 & 1 & 443 \\ 1 & 1 & 621 \end{vmatrix}$

$$=10^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 327 \\ 1 & 1 & 443 \\ 0 & 1 & 621 \end{vmatrix} = -10^5 \begin{vmatrix} 1 & 327 \\ 1 & 621 \end{vmatrix} = -294\times 10^5 \text{ 。}$$

2）原式=$\begin{vmatrix} 2x+2y & y & x+y \\ 2x+2y & x+y & x \\ 2x+2y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix}$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix} x & -y \\ x-y & -x \end{vmatrix} = -2\left(x^3+y^3\right)\text{。}$$

3）原式=$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\times 8 = 48$ 。

4） 原式=$\begin{vmatrix}10 & 2 & 3 & 4\\10 & 3 & 4 & 1\\10 & 4 & 1 & 2\\10 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 1 & -3\\0 & 2 & -2 & -2\\0 & -1 & -1 & -1\end{vmatrix}$

=$20\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\0 & -2 & 2\\0 & 0 & -4\end{vmatrix}=20\begin{vmatrix}-2 & 2\\0 & -4\end{vmatrix}=160$ 。

5）原式=$\begin{vmatrix}x & x & 0 & 0\\1 & 1-x & 1 & 1\\0 & 0 & y & y\\1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & 0\\1 & -x & 1 & 0\\0 & 0 & y & 0\\1 & 0 & 1 & -y\end{vmatrix}$

6）原式=$\begin{vmatrix}a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5\\b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5\\c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5\\d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^2 & 2a+1 & 2 & 2\\b^2 & 2b+1 & 2 & 2\\c^2 & 2c+1 & 2 & 2\\d^2 & 2d+1 & 2 & 2\end{vmatrix}$=0 。

14. 证明 $\begin{vmatrix}b+c & c+a & a+b\\b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1\\b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a & b & c\\a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$。

证明：由行列式的性质，有

左边=$2\begin{vmatrix}a+b+c & c+a & a+b\\a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1\\a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2\end{vmatrix}$

=$2\begin{vmatrix}a+b+c & -b & -c\\a_1+b_1+c_1 & -b_1 & -c_1\\a_2+b_2+c_2 & -b_2 & -c_2\end{vmatrix}$

=$2\begin{vmatrix}a & b & c\\a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$=右边 。

15．算出下列行列式的全部代数余子式：

1） $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$　　2） $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

解：1） $A_{11}=-6$， $A_{12}=0$， $A_{13}=0$， $A_{14}=0$，

$A_{21}=-12$， $A_{22}=6$， $A_{23}=0$， $A_{24}=0$，

$$\begin{array}{l} A_{31}=15, A_{32}=-6, A_{33}=-3, A_{34}=0 \\ A_{41}=7, A_{42}=0, A_{43}=1, A_{44}=-2 \end{array}$$ 。

2） $A_{11}=7, A_{12}=-12, A_{13}=3$，

$A_{21}=6, A_{22}=4, A_{23}=-1$，

$A_{31}=-5, A_{32}=5, A_{33}=5$ 。

16．计算下面的行列式：

1） $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$　　2） $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

3） $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$　　4） $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

解：1）原式= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$ 。

2）原式= $\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{12}(24+6-36+54-3-32) = -\frac{13}{12}$ 。

3）原式= $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -10 \\ 3 & 0 & -5 & 5 & -11 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & -10 \\ 3 & -5 & 5 & -11 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -9 \\ 13 & 0 & 15 & -6 \\ 6 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -9 \\ 13 & 15 & -6 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 30 & 0 \\ 25 & 31 & 0 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} 19 & 30 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -483$ 。

4）原式= $\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 10 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 16 & 2 & 0 & 6 & 13 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 10 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 16 & 2 & 6 & 13 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -5 & 12 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 2 & 17 \end{vmatrix}$

$$=-\frac{1}{8}\begin{vmatrix}2&-5&12\\3&3&0\\12&2&17\end{vmatrix}=-\frac{3}{8}\begin{vmatrix}7&0&12\\0&1&0\\10&0&17\end{vmatrix}=-\frac{3}{8}\begin{vmatrix}7&0&12\\0&1&0\\10&0&17\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{3}{8}\begin{vmatrix}7&12\\10&17\end{vmatrix}=\frac{3}{8}\quad。$$

17．计算下列n阶行列式：

1） $\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\vdots&\vdots\\y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}$ 2） $\begin{vmatrix}a_1-b_1&a_1-b_2&\cdots&a_1-b_n\\a_2-b_1&a_2-b_2&\cdots&a_2-b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n-b_1&a_n-b_2&\cdots&a_n-b_n\end{vmatrix}$

3） $\begin{vmatrix}x_1-m&x_2&\cdots&x_n\\x_1&x_2-m&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1&x_2&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}$ 4） $\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}$

5） $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&-1&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2-n&0\\0&0&0&\cdots&n-1&1-n\end{vmatrix}$

解：1）按第一列展开，原式=$x^n+(-1)^{n+1}y^n$。

2）从第 2 列起各列减去第 1 列

原式=$\begin{vmatrix}a_1-b_1&b_1-b_2&\cdots&b_1-b_n\\a_2-b_1&b_1-b_2&\cdots&b_1-b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n-b_1&b_1-b_2&\cdots&b_1-b_n\end{vmatrix}$

当$n\geq 3$时，原式=0；

当 $n=2$ 时，原式=$(a_2-a_1)(b_2-b_1)$；

当 $n=1$ 时，原式=a_1-b_1。

3）原式=$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}$

$=\left(\sum_{i=n}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & -m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -m\end{vmatrix}$ 。

$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)(-m)^{n-1}$

4）原式=$\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}_{n-1}$ $=(-2)(n-2)!$。

5）各列加到第 1 列得到

原式=$\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-2) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1)\end{vmatrix}$

$=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}(n+1)$ 。

18. 证明：

1） $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right)$ 。

2） $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$。

3） $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$ 。

4） $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha$ 。

5） $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right)$ 。

证明：4）分别将第 $i(i = 2, \cdots, n+1)$ 行乘以 $-\frac{1}{a_{i-1}}$ 加到第 1 行，得

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}) = \text{右边}。$$

4）从最后一行起，分别将每一行都乘以x后加到其前一行，得

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+a_3x+a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2+a_{n-1}x+a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &=(-1)^{n+1}\left(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)\begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix}_{n-1} \\ &=(-1)^{n+1}\left(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)(-1)^{n-1} \\ &=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \end{aligned}$$

=右边。

4）将所给行列式记为D_n，按第 1 列展开得

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2},$$

即 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta\left(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}\right)$，

此式对一切n都成立. 故递推得

$$
\begin{aligned}
&D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^2\left(D_{n-2}-\alpha D_{n-3}\right)\\
&=\beta^3\left(D_{n-3}-\alpha D_{n-4}\right)=\cdots=\beta^{n-2}\left(D_2-\alpha D_1\right),\\
&=\beta^{n-2}\left[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-\alpha(\alpha+\beta)\right]=\beta^n
\end{aligned}
$$

在 D_n 中 α,β 的地位是一样的，故同理可得

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n,$$

所以 $$(\alpha-\beta)D_n=\alpha^n,$$

从而 $$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\text{右边。}$$

4）对 2 阶行列式，有 $D_2=\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1\\ 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$， 此时结论成立。

假设对阶数小于 n 的行列式结论皆成立，则对 n 阶行列式 D_n 按最后一行展开，得 $D_n=2\cos\alpha D_{n-1}-D_{n-2}$，因为

$$
\begin{aligned}
&D_{n-2}=\cos(n-2)\alpha\\
&=\cos[(n-1)\alpha-\alpha]=\cos(n-1)\alpha\cos\alpha+\sin(n-1)\alpha\sin\alpha
\end{aligned},
$$

代入 D_n 可得

$$
\begin{aligned}
&D_n=2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-1)\alpha\cos\alpha-\sin(n-1)\alpha\sin\alpha\\
&=\cos(n-1)\alpha\cos\alpha-\sin(n-1)\alpha\sin\alpha\\
&=\cos[(n-1)\alpha+\alpha]=\cos n\alpha
\end{aligned}
$$

故对一切 n 结论成立，即证。

4）左边=$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$=右边。

19．用克拉默法则解下列方程：

1）$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-3x_2+3x_3+2x_4=5 \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=3 \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=4 \end{cases}$ 2）$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6 \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8 \end{cases}$

3）$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+4x_4-x_5=-1 \\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5=8 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4+2x_5=-2 \\ 4x_1+3x_2+4x_3+2x_4+2x_5=-2 \\ x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5=-3 \end{cases}$ 4）$\begin{cases} 5x_1+6x_2=1 \\ x_1+5x_2+6x_3=0 \\ x_2+5x_3+6x_4=0 \\ x_3+5x_4+6x_5=0 \\ x_4+5x_5=1 \end{cases}$

解：1）$d=-70,d_1=-70,d_2=-70,d_3=-70,d_4=-70$ 。

所以方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{d_1}{d}=1,x_2=\frac{d_2}{d}=1,x_3=\frac{d_3}{d}=1,x_4=\frac{d_4}{d}=1$$ 。

2） $d=324, d_1=324, d_2=648, d_3=-324, d_4=-648$ 。

所以方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{d_1}{d}=1, x_2=\frac{d_2}{d}=2, x_3=\frac{d_3}{d}=1, x_4=\frac{d_4}{d}=-2$$ 。

3） $d=24, d_1=96, d_2=-336, d_3=-96, d_4=168, d_5=312$ 。

所以方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{d_1}{d}=4, x_2=\frac{d_2}{d}=-14, x_3=\frac{d_3}{d}=-4, x_4=\frac{d_4}{d}=7, x_5=\frac{d_5}{d}=13$$ 。

4） $d=665, d_1=1507, d_2=-1145, d_3=703, d_4=-395, d_5=212$.

所以方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{1507}{665}, x_2=-\frac{229}{133}, x_3=\frac{37}{35}, x_4=-\frac{79}{133}, x_5=\frac{212}{665}$$ 。

20．设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 P 中互不相同的数， $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是数域 P 中任一组给定的数，用克拉默法则证明：有唯一的数域 P 上的多项式 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$ 使

$$f(a_i)=b_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$ 。

证明：由 $f(a_i)=b_i$ 得

$$\begin{cases} c_0+c_1a_1+c_2a_1^{\ 2}+\cdots+c_{n-1}a_1^{\ n-1}=b_1 \\ c_0+c_1a_2+c_2a_2^{\ 2}+\cdots+c_{n-1}a_2^{\ n-1}=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0+c_1a_n+c_2a_n^{\ 2}+\cdots+c_{n-1}a_n^{\ n-1}=b_n \end{cases}$$

这是一个关于 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 的线性方程组，且它的系数行列式

为一个范得蒙行列式.由已知该行列式不为 0，故线性方程组只有唯一解，即所求多项式是唯一的。

21．设水银密度 h 与温度 t 的关系为 $h = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$，由实验测定得以下数据：

$t(^\circ C)$	0	10	20	30
h	13.60	13.57	13.55	13.52

求 $t=15$ ，40 时的水银密度（准确到两位数）。

解：将 t,h 的实验数据代入关系式

$h = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$，得 $a_0 = 13.60$，且

$$\begin{cases} 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 = -0.08 \\ 20a_1 + 400a_2 + 8000a_3 = -0.05 \\ 30a_1 + 900a_2 + 27000a_3 - 0.08 \end{cases}$$

因为系数行列式

$$d = \begin{vmatrix} 10 & 100 & 1000 \\ 20 & 400 & 8000 \\ 30 & 900 & 27000 \end{vmatrix} = 12 \times 10^6 \neq 0$$

$$d_1 = -50000, d_2 = 1800, d_3 = -40$$

由克拉默法则可求得 $a_1 = -0.0042, a_2 = 0.00015, a_3 = -0.0000033$，

故所求关系式为 $h = 13.60 - 0.0042t + 0.00015t^2 - 0.0000033t^3$，

再将 $t=15, t=40$ 分别代入上式，其水银密度分别为

$$h_{t=15} = 13.56, \quad h_{t=40} = 13.48\text{。}$$

第三章　线性方程组

1．用消元法解下列线性方程组：

$$1)\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x_1+2x_2-3x_4+2x_5=1 \\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7 \\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2++x_4=1 \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=-0 \end{cases}$$

$$5)\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4 \end{cases} \qquad 6)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

解　1）对方程组得增广矩阵作行初等变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 8 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为

$$rank(\overline{A}) = rank(\overline{B}) = 4 < 5,$$

所以方程组有无穷多解，其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1-x_4=1 \\ 2x_1+x_5=-2 \\ -2x_3=0 \\ -x_2+x_4=0 \end{cases},$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = 1+k \\ x_2 = k \\ x_3 = 0 \\ x_4 = k \\ x_5 = -2-2k \end{cases}$$

其中 k 为任意常数。

2）对方程组德增广矩阵作行初等变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 2 & 7 \\ 9 & -9 & 6 & 16 & 2 & 25 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -27 & 6 & 11 & -16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -\dfrac{25}{3} & \dfrac{29}{3} & \dfrac{8}{3} \\ 0 & 0 & 33 & -25 & 29 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -\dfrac{25}{3} & \dfrac{29}{3} & \dfrac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

因为

$$rank(\overline{A}) = 4 > rank(A) = 3,$$

所以原方程无解。

3）对方程组德增广矩阵作行初等变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix},$$

因为

$$rank(\overline{A}) = rank(A) = 4,$$

所以方程组有惟一解，且其解为

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 0 \end{cases}。$$

4）对方程组的增广矩阵作行初等变换，有

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & 17 & -19 & 20 \\ 0 & -34 & 38 & -40 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即原方程组德同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0 \\ -17x_2 + 19x_3 - 20x_4 = 0 \end{cases},$$

由此可解得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{17}k_1 - \dfrac{13}{17}k_2 \\ x_2 = \dfrac{19}{17}k_1 - \dfrac{20}{17}k_2 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases},$$

其中 k_1, k_2 是任意常数。

5）对方程组的增广矩阵作行初等变换，有

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

因为

$$rank(\overline{A}) = 4 \neq rank(A) = 3,$$

所以原方程组无解。

6）对方程组的增广矩阵作行初等变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ -\frac{6}{5}x_3 + x_4 = -\frac{1}{5} \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases},$$

解之得

$$\begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = \frac{2}{5} - \frac{7}{5}k \\ x_3 = k \\ x_4 = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}k \end{cases},$$

其中 k 是任意常数。

2.把向量 β 表成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合.。

1) $\beta = (1,2,1,1)$

$\alpha_1 = (1,1,1,1), \alpha_2 = (1,1,-1,-1)$

$\alpha_3 = (1,-1,1,-1), \alpha_4 = (1,-1,-1,1)$

2) $\beta = (0,0,0,1)$

$\alpha_1 = (1,1,0,1), \alpha_2 = (2,1,3,1)$

$\alpha_3 = (1,1,0,0), \alpha_4 = (0,1,-1,-1)$

解 1）设有线性关系

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4$$

代入所给向量，可得线性方程组

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3+k_4=1 \\ k_1+k_2-k_3-k_4=2 \\ k_1-k_2+k_3-k_4=1 \\ k_1-k_2-k_3+k_4=1 \end{cases},$$

解之，得

$$k_1=\frac{5}{4},\quad k_2=\frac{1}{4},\quad k_3=-\frac{1}{4},\quad k_4=-\frac{1}{4},$$

因此

$$\beta=\frac{5}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2-\frac{1}{4}\alpha_3-\frac{1}{4}\alpha_4。$$

2）同理可得

$$\beta=\alpha_1-\alpha_3。$$

3. 证明：如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$线性相关，则向量可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出.

证 由题设，可以找到不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_{r+1}$使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=0,$$

显然$k_{r+1}\neq 0$. 事实上，若$k_{r+1}=0$，而$k_1,k_2,\cdots,k_r$不全为零，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

成立，这与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关的假设矛盾，即证$k_{r+1}\neq 0$. 故

$$\beta=-\sum_{i=1}^{r}\frac{k_i}{k_{r+1}}\alpha_i,$$

即向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出。

4. $\alpha_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in})(i=1,2,\cdots,n)$，证明：如果$\left|\alpha_{ij}\right|\neq 0$，那么$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。

证 设有线性关系$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$，

代入分量，可得方程组

$$\begin{cases} \alpha_{11}k_1+\alpha_{21}k_2+\cdots+\alpha_{n1}k_n=0 \\ \alpha_{12}k_1+\alpha_{22}k_2+\cdots+\alpha_{n2}k_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1n}k_1+\alpha_{2n}k_2+\cdots+\alpha_{nn}k_n=0 \end{cases},$$

由于$\left|\alpha_{ij}\right| \neq 0$，故齐次线性方程组只有零解，从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。

5. 设$t_1,t_2,\cdots,t_r$是互不相同的数，$r \le n$. 证明：

$$\alpha_i=(1,t_i,\cdots,t_i^{n-1})(i=1,2,\cdots,r)\text{ 是线性无关的。}$$

证　设有线性关系$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$，则

$$\begin{cases} k_1+k_2+\cdots+k_r=0 \\ t_1k_1+t_2k_2+\cdots+t_rk_r=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_1^{n-1}k_1+t_2^{n-1}k_2+\cdots+t_r^{n-1}k_r=0 \end{cases},$$

1）当$r=n$时，方程组中的未知量个数与方程个数相同，且系数行列式为一个范德蒙行列式，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{i<j}(t_j-t_i)\neq 0,$$

所以方程组有惟一的零解，这就是说$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关。

2）当$r<n$时，令

$$\begin{cases} \beta_1=(1,t_1,t_1^2,\cdots,t_1^{r-1}) \\ \beta_2=(1,t_2,t_2^2,\cdots,t_2^{r-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_r=(1,t_r,t_r^2,\cdots,t_r^{r-1}) \end{cases}$$

则由上面 1)的证明可知$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$是线性无关的。而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$延长的向量，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$也线性无关。

6. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也线性无关。

证　设由线性关系$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$，则

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0\text{。}$$

再由题设知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases},$$

解得$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，所以$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$线性无关。

7. 已知$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的秩为$r$，证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任意$r$个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组.

证 设$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}$是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任意$r$个线性无关向量组，如果能够证明任意一个向量$\alpha_j (j = 1, 2, \cdots, s)$都可由$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}$线性表出就可以了。

事实上，向量组$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}, \alpha_j$是线性相关的，否则原向量组的秩大于$r$，矛盾. 这说明$\alpha_j$可由$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir}$线性表出，再由$\alpha_j$的任意性，即证。

8. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的秩为$r$，$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中的$r$个向量，使得$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中每个向量都可被它们线性表出，证明：$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的一个极大线性无关组。

证 由题设知$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$等价，所以$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$的秩与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的秩相等，且等于$r$. 又因为$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$线性无关，故而$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的一个极大线性无关组。

9. 证明：一个向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一线性无关组。

证 将所给向量组用（Ⅰ）表示，它的一个线性无关向量组用（Ⅱ）表示。

若向量组（Ⅰ）中每一个向量都可由向量组（Ⅱ）线性表出，那么向量组（Ⅱ）就是向量组（Ⅰ）的极大线性无关组. 否则，向量组（Ⅰ）至少有一个向量α不能由向量组（Ⅱ）线性表出，此时将α添加到向量组（Ⅱ）中去，得到向量组（Ⅲ），且向量组（Ⅲ）是线性无关的。

进而，再检查向量组（Ⅰ）中向量是否皆可由向量组（Ⅲ）线性表出. 若还不能，再把不能由向量组（Ⅲ）线性表出的向量添加到向量组（Ⅲ）中去，得到向量组（Ⅳ）。继续这样下去，因为向量组（Ⅰ）的秩有限，所以只需经过有限步后，即可得到向量组（Ⅰ）的一个极大线性无关组。

10. 设向量组为

$$\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)，\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)，\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)，$$

$$\alpha_4 = (1, -1, 2, 0)，\alpha_5 = (2, 1, 5, 6)。$$

1）证明：α_1, α_2线性无关。

2）把α_1,α_2扩充成一极大线性无关组。

证 1）由于α_1,α_2的对应分量不成比例，因而α_1,α_2线性无关。

2）因为$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$，且由

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_4\alpha_4=0,$$

可解得

$$k_1=k_2=k_4=0,$$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关。

再令

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_4\alpha_4+k_5\alpha_5=0,$$

代入已知向量后，由于相应的齐次线性方程组的系数行列式为0，因而该齐次线性方程组存在非零解，即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$线性相关，所以$\alpha_5$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性表出。

这意味着$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$就是原向量组的一个极大线性无关组。

注 此题也可将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$排成$5\times 4$的矩阵，再通过列初等变换化为行阶梯形或行最简形，然后得到相应结论。

11. 用消元法求下列向量组的极大线性无关组与秩：

1) $\begin{array}{ll} \alpha_1=(6,4,-1,2), & \alpha_2=(1,0,2,3,-4) \\ \alpha_3=(1,4,-9,-16,22), & \alpha_4=(7,1,0,-1,3) \end{array}$,

2) $\begin{array}{ll} \alpha_1=(1,-1,2,4), & \alpha_2=(0,3,1,2) \\ \alpha_3=(3,0,7,14), & \alpha_4=(1,-1,2,0) \\ \alpha_5=(2,1,5,6) & \end{array}$

解 1）设$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 4 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 3 & -4\\ 1 & 4 & -9 & -16 & 22\\ 7 & 1 & 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$

对矩阵A作行初等变换，可得

$$A\to\begin{bmatrix}0 & 4 & -11 & -19 & 26\\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -11 & -19 & 26\\ 0 & 1 & -14 & -22 & 31\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 45 & 69 & -98\\ 0 & 1 & -14 & -22 & 31\end{bmatrix},$$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为3，且$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$即为所求极大线性无关组。

3） 同理可得$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为所求极大线性无关组，且向量组的秩为3。

12. 证明：如果向量组（Ⅰ）可以由向量组（Ⅱ）线性表出，那么（Ⅰ）的秩不超过（Ⅱ）的秩。

证 由题设，向量组（Ⅰ）的极大线性无关组也可由向量组（Ⅱ）的极大线性无关组线性表出，即证向量组（Ⅰ）的秩不超过向量组（Ⅱ）的秩。

13. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组维向量，已知单位向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$可被它们线性表出，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。

证 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的秩为$r\le n$，而$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的秩为$n$。

由题设及上题结果知

$$n\le r,$$

从而$r=n$，故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。

14. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组$n$维向量，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是任一$n$维向量都可被它们线性表出。

证 必要性. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，但是$n+1$个$n$维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$必线性相关，于是对任意$n$维向量$\beta$，它必可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出。

充分性 任意n维向量可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出，特别单位向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出，于是由上题结果，即证$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。

15. 证明：方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

对任何$b_1,b_2,\cdots,b_n$都有解的充分必要条件是系数行列式$\left|a_{ij}\right|\ne 0$。

证 充分性. 由克拉默来姆法则即证。

下证必要性. 记

$$\begin{aligned} &\alpha_i=(\alpha_{1i},\alpha_{2i},\cdots,\alpha_{ni})\ \ (i=1,2,\cdots,n) \\ &\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n) \end{aligned},$$

则原方程组可表示为

$$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,$$

由题设知，任意向量β都可由线性$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$表出，因此由上题结果可知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线

性无关。

进而，下述线性关系

$$k_1\alpha_2 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0,$$

仅有惟一零解，故必须有$|A| = |a_{ij}| \neq 0$，即证。

16. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$有相同的秩，证明：

与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$等价。

证 由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$有相同的秩，因此它们的极大线性无关组所含向量个数必定相等．这样$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的极大线性无关组也必为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组，从而它们有相同的极大线性无关组。

另一方面，因为它们分别与极大线性无关组等价，所以它们一定等价。

17. 设$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_r, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_r, \cdots,$

$$\beta_r = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{r-1},$$

证明：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$具有相同的秩。

证 只要证明两向量组等价即可．由题设，知$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出。

现在把这些等式统统加起来，可得

$$\frac{1}{r-1}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r,$$

于是

$$\alpha_i = \frac{1}{r-1}\beta_1 + \frac{1}{r-1}\beta_2 + \cdots + (\frac{1}{r-1} - 1)\beta_i + \cdots + \frac{1}{r-1}\beta_r,$$

$$(i = 1, 2, \cdots, r)$$

即证$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$也可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性表出，从而向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$等价。

18. 计算下列矩阵的秩：

1）$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$　　2）$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3）$\begin{bmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{bmatrix}$　　4）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$

5）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$。

解　1）秩为 4；2）秩为 3；3）秩为 2；4）秩为 3；5）秩为 5。

19. 讨论 λ, a, b 取什么值时，下列方程有解，并求解。

1）$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_2 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$　　2）$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + x_2 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3 \end{cases}$

3）$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_2 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

解　1）因为方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

所以当 $\lambda = 1$ 时，原方程组与方程 $x_1 + x_2 + x_2 = 1$ 同解，故原方程组有无穷多解，且其解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - k_1 - k_2 \\ x_2 = k_1 \\ x_3 = k_2 \end{cases},$$

其中 k_1, k_2 为任意常数。

当 $\lambda = -2$ 时，原方程组无解。

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，原方程组有惟一解。且

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ x_2 = \dfrac{1}{\lambda+2} \\ x_3 = \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda=2} \end{cases}。$$

2）因为方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}3+\lambda & 1 & 2\\ \lambda & \lambda-1 & 1\\ 3\lambda+3 & \lambda & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1),$$

所以当 $\lambda=0$ 时，原方程组的系数矩阵 A 与增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩分别为 2 与 3，所以无解。

当 $\lambda=1$ 时，A 的秩为 2，$\overline{A}$ 的秩为 3，故原方程组也无解。

当 $\lambda\neq 0$，且 $\lambda\neq 1$ 时，方程组有唯一解

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{\lambda^3+3\lambda^2-15\lambda+9}{\lambda^2(\lambda-1)}\\ x_2=\dfrac{\lambda^3-12\lambda+9}{\lambda^2(\lambda-1)}\\ x_3=\dfrac{4\lambda^3-3\lambda^2-12\lambda+9}{\lambda^2(\lambda-1)}\end{cases}。$$

3） 因为方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & 2b & 1\end{vmatrix}=-b(a-1),$$

所以当 $D\neq 0$ 时，即 $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$ 时，方程组有惟一解，且为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{2b-1}{b(a-1)}\\ x_2=\dfrac{1}{b}\\ x_3=\dfrac{1+2ab-4b}{b(a-1)}\end{cases},$$

当 $D=0$ 时

1° 若 $b=0$，这时系数矩阵 A 的秩为 2，而它的增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩为 3，故原方程组无解。

2° 若 $a=1$，这时增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & b & 1 & 3\\ 1 & 2b & 1 & 4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & b-1 & 0 & -1\\ 0 & 2b-1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以当 $a=1,b\neq\dfrac{1}{2}$ 时，$\overline{A}$ 的秩为 3，A 的秩为，原方程组无解。

而当 $a=1,b=\dfrac{1}{2}$ 时，原方程组有无穷多个解，且其解为

$$\begin{cases} x_1 = 2-k \\ x_2 = 2 \\ x_3 = k \end{cases},$$

其中k为任意常数。

20. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系，并用它表出全部解：

1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$ 2）$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$

3）$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4-x_5=0 \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0 \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$ 4）$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$

解 1）对方程组的系数矩阵作行初等变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为 $rank(A)=2<5$，所以原方程组的基础解中含有 3 个线性无关的解向量，且原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \end{cases},$$

于是只要令

$$x_3=1, x_4=x_5=0,\ \text{即得}\ \eta_1=(1,-2,1,0,0)',$$

同理，令

$$x_1=1, x_3=x_5=0,\ \text{即得}\ \eta_2=(1,-2,0,1,0)',$$

$$x_5=1, x_3=x_4=0,\ \text{即得}\ \eta_3=(5,-6,0,0,1)',$$

则η_1,η_2,η_3为原方程组的一个基础解系，且该齐次线性方程组的全部解为

$$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3,$$

其中k_1,k_2,k_3为任意常数。

2）对方程组的系数矩阵作行初等变换，有

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3 & -1\\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4\\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因为$rank(A)=3<5$，所以原方程组的基础解系中含有 2 个线性无关的解向量，且原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_4-x_5=0\\ -2x_2+2x_3+2x_4+x_5=0\\ 3x_4-x_5=0\end{cases},$$

若令

$$x_1=1,x_4=0\text{，得}\eta_1=(-1,1,1,0,0)',$$

$$x_1=0,x_4=1\text{，得}\eta_2=(-\frac{7}{2},\frac{5}{2},0,1,3)',$$

则η_1,η_2为原方程组的一个基础解系，且该齐次线性方程组的全部解为

$$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2,$$

其中k_1,k_2为任意常数。

3）对方程组的系数矩阵作行初等变换，有

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5\\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 5 & -3 & -3 & 1\\ 0 & 9 & -6 & -6 & 6\\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 5 & -13 & -3 & 1\\ 0 & -21 & 12 & 12 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 4 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 5 & -3 & -3 & 1\\ 0 & -6 & 9 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

又因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以$rank(A)=4<5$，方程组的基础解系含有一个线性无关的解向量，且原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ 5x_2-3x_3-3x_4+x_5=0 \\ -6x_2+9x_3=0 \\ -5x_2+x_3+4x_4=0 \end{cases}。$$

于是令$x_2=1$，可得

$$\eta=(\frac{1}{2},1,\frac{2}{3},\frac{13}{12},\frac{1}{4})',$$

则η即为原方程组的一个基础解系，且该齐次线性方程组的全部解为$k\eta$，其中k为任意常数。

4）对方程组的系数矩阵作行初等变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

又应为

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以$rank(A)=3<5$，方程组的基础解系含有 2 个线性无关大解向量，且原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ x_2+x_3=0 \\ -8x_3+4x_4-5x_5=0 \end{cases}$$

$$x_3=1,x_5=0\text{，得}\ \eta_1=(-1,-1,1,2,0)',$$

$x_3=0,x_5=1$，得 $\eta_2=(\frac{1}{4},0,0,\frac{5}{4},1)'$，

则 η_1,η_2 为原方程组的一个基础解系，且该齐次线性方程组的全部解为

$$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2,$$

其中 k_1,k_2 为任意常数。

21. 用导出组的基础解系表出第 1 题 1)、4)、6) 题中线性方程组的全部解，其中

$$1)\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1\\x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1\\x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3\\x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3\\x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1\end{cases}\qquad 4)\begin{cases}3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0\\2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0\\4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0\\7x_1-2x_2+x_3+3x_4=-0\end{cases}$$

$$6)\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-x_4=1\\3x_1+2x_2+x_3-x_4=1\\2x_1+3x_2+x_3+x_4=1\\2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1\\5x_1+5x_2+2x_3=2\end{cases}$$

解 1) 对原方程组的增广矩阵作初等行变换，可得

$$rank(A)=rank(A|b)=4<5,$$

所以方程组有无穷多解，且其导出组的基础解系中含有 1 个线性无关的解向量，又因为原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_4=1\\2x_4+x_5=-2\\-x_2+x_4=0\end{cases},$$

若令 $x_4=1$，代入原方程组的导出组，可解得 $x_1=1,x_2=1,x_3=0,x_5=-2$，于是导出组的基础解系为

$$\eta=(1,1,0,1,-2)',$$

且原方程组的一个特解为

$$\eta_0=(1,0,0,0,-2)',$$

故园方程组的全部解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \eta_0 + k\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

其中k为任意常数。

4）对原齐次线性方程组的系数矩阵作初等变换，可得

$$rank(A) = 2 < 4,$$

所以方程组有无穷多解，且其基础解系中含有 2 个线性无关的解向量，又因为原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0 \\ -17x_2 + 19x_3 - 20x_4 = 0 \end{cases},$$

若令

$$x_3 = 1, x_4 = 0，得 x_1 = \frac{3}{17}, x_2 = \frac{19}{17},$$

再令

$$x_3 = 0, x_4 = 1，得 x_1 = \frac{13}{17}, x_2 = -\frac{20}{17},$$

于是导出组的基础解系为

$$\eta_1 = (\frac{3}{17}, \frac{19}{17}, 1, 0)'，\ \eta_2 = (-\frac{13}{17}, -\frac{20}{17}, 0, 1)',$$

故原方程组的全部解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 = k_1\begin{bmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中k_1, k_2为任意常数。

6）对原方程组的增广矩阵作初等变换，可得

$$rank(A|b) = 3 < 4,$$

所以方程组有无穷多个解，且其导出组的基础解系中含有 1 个线性无关的解向量，又因为原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ -\frac{6}{5}x_3 + x_4 = -\frac{1}{5} \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases},$$

若令 $x_3=1$，代入原方程组的导出组，可解得 $x_1=1, x_2=-\frac{7}{5}, x_4=\frac{6}{5}$，于是导出组的基础解系为

$$\eta=(1,-\frac{7}{5},1,\frac{6}{5})',$$

且原方程组的一个特解为

$$\eta_0=(0,\frac{2}{5},0,-\frac{1}{5})',$$

故原方程组的全部解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\eta_0+k\eta=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{7}{5} \\ 1 \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数。

22. a,b 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$$

有解？在有解的情形，求一般解。

解 对方程组的增广矩阵行作初等变换：

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & b-5 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix}。$$

于是，只有 $a=0$ 且 $b=2$ 时，增广矩阵的秩与系数的秩都为 2，此时原方程组有解；当 $a\neq 0$ 且 $b\neq 2$ 时，原方程组都无解。

当 $a=0$，$b=2$ 时，原方程组与方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \end{cases},$$

同解，且其一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -2 + k_3 + k_4 + 5k_5 \\ x_2 = 3 - 2k_3 - 2k_4 - 6k_5 \\ x_3 = k_3 \\ x_4 = k_4 \\ x_5 = k_5 \end{cases},$$

其中k_3, k_4, k_5为任意常数。

23.设

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$

证明：此方程组有解的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = 0,$$

在有解的情形，求出它的一般解。

证 对方程组的增广矩阵作行初等变换，有

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i \end{bmatrix}$$

此时A的秩为4，$\overline{A}$的秩为4的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = 0,$$

因此，原方程组有解的充分必要条件是$\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$。

其次，当$\sum_{i=1}^{5} a_i = 0$时，原方程组与方程组与

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \end{cases},$$

同解，所以它的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + x_2 + a_3 a_4 + k \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + k \\ x_3 = a_3 + a_4 + k \\ x_4 = a_4 + k \\ x_5 = k \end{cases},$$

其中k为任意常数。

24. 证明：与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系。

证 由于两个等价的线性无关向量组所含向量个数是相等的，不妨设$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$是齐次线性方程组的一个基础解系，且$a_1, a_2, \cdots, a_r$与它等价，则$a_i (i = 1, 2, \cdots, r)$可由$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$线性表出，从而$a_i (i = 1, 2, \cdots, r)$也是原齐次线性方程组的解。

又由题设知$a_1, a_2, \cdots, a_r$线性无关，且$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$可由$a_1, a_2, \cdots, a_r$线性表出，从而齐次线性方程组的任一个解$\beta$也都可以由$a_1, a_2, \cdots, a_r$线性表出，即证$a_1, a_2, \cdots, a_r$也是方程组的一个基础解系。

25. 设齐次方程组

$$\begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} x_2 + \cdots + \alpha_{n1} x_n = 0 \\ \alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \cdots + \alpha_{n2} x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1n} x_1 + \alpha_{2n} x_2 + \cdots + \alpha_{nn} x_n = 0 \end{cases},$$

的系数矩阵的秩为r，证明：方程组的任意$n-r$个线性无关的解都是它的一个基础解系。

证 由于方程组的系数矩阵的秩为r，所以它的基础解系所含线性无关解向量的个数为$n-r$。

设$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$是方程组的一个基础解系，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-r}$是方程组的任意$n-r$个线性无关的解向量，则向量组

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-r},$$

的秩仍为$n-r$，且$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$是它的一个极大线性无关组，同理$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-r}$也是它的一个极大线性无关组，所以$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$与$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-r}$等价，再由上题即证。

26. 证明：如果$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$是一线性方程组的解，那么

$$u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \cdots + u_t \eta_t,$$

（其中$u_1 + u_2 + \cdots + u_t = 1$）也是一个解。

证 设线性方程组为

$$\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\cdots+\alpha_{in}x_n=b_i(i=1,2,\cdots,m)$$

由题设，$\eta_j=(x_1^{(j)},x_2^{(j)},\cdots,x_n^{(j)})(j=1,2,\cdots,t)$ 是该方程组的 t 个解，现将

$$u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t=(\sum_{k=1}^{t}u_kx_1^{(k)},\sum_{k=1}^{t}u_kx_2^{(k)},\cdots,\sum_{k=1}^{t}u_kx_n^{(k)})$$

代入方程组，得

$$a_{i1}(\sum_{k=1}^{t}u_kx_1^{(k)})+a_{i2}(\sum_{k=1}^{t}u_kx_2^{(k)})+\cdots+a_{in}(\sum_{k=1}^{t}u_kx_n^{(k)})$$

$$=\sum_{k=1}^{t}u_k(a_{i1}x_1^{(k)}+a_{i2}x_2^{(k)}+\cdots+a_{in}x_n^{(k)})$$

$$=\sum_{k=1}^{t}u_kb_i=b_i\sum_{k=1}^{t}u_k=b_i(i=1,2,\cdots,m),$$

所以 $u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t$ 仍是方程组的一个解，即证。

27. 多项式

$$2x^3-3x^2+\lambda x+2 \text{ 与 } x^4+\lambda x^2-3x-1$$

在 λ 取什么值时有公共根？

解 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式为

$$\boldsymbol{R}(f,g)=\begin{vmatrix}2&-3&\lambda&2&0&0&0\\0&2&-3&\lambda&2&0&0\\0&0&2&-3&\lambda&2&0\\0&0&0&2&-3&\lambda&2\\1&0&\lambda&-3&-1&0&0\\0&1&0&\lambda&-3&-1&0\\0&0&1&0&\lambda&-3&-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+3)(-\lambda^3+4\lambda^2+28\lambda+157),$$

故当 $\lambda=-3$ 时，有

$$\boldsymbol{R}(f,g)=(\lambda+3)(-\lambda^3+4\lambda^2+28\lambda+157)=0,$$

从而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根。此外，由 $\boldsymbol{R}(f,g)=0$ 还可求得 λ 的 3 个根，它们皆可使 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根。

28. 解下列联立方程：

1) $\begin{cases} 5y^2-6xy+5x^2-16=0 \\ y^2-xy+2x^2-y-x-4=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2+4x-2y+3=0 \\ x^2+4xy-y^2+10y-9=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2+(x-4)y+x^2-2x+3=0 \\ y^3-5y^2+(x+7)y+x^3-x^2-5x-3=0 \end{cases}$

解　1）由结式

$$R_y(f,g)=\begin{vmatrix} 5 & -6x & 5x^2-16 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 5x^2-16 \\ 1 & -x-1 & 2x^2-x-4 & 0 \\ 0 & 1 & -x-1 & 2x^2-x-4 \end{vmatrix}$$

$$=32(x^4-3x^3+x^2+3x-2)$$

$$=32(x-1)^2(x+1)(x-2)=0,$$

可解得下 $x=1$，1，2，-1 四个根。

当 $x=1$ 时，代入原方程组，可得

$$\begin{cases} 5y^2-6y-11=0 \\ y^2-2y-3=0 \end{cases},$$

解此方程组，可得 $y=-1$。

当 $x=-1$ 时，代入原方程组，得

$$\begin{cases} 5y^2+6y-11=0 \\ y^2-1=0 \end{cases},$$

解之得 $y=1$。

当 $x=2$ 时，代入原方程组，可得

$$\begin{cases} 5y^2-12y+4=0 \\ y^2-3y+2=0 \end{cases},$$

解之得 $y=2$。

故原方程组有四组公共解为

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -1 \\ y_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 2 \end{cases}$$

2）同理可得

$$R_y(f,g) = 4(x+1)(x+3)(x+\frac{10+3\sqrt{5}}{5})(x+\frac{10-3\sqrt{5}}{5}) = 0,$$

所以解得

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -\frac{1}{5}(10+3\sqrt{5}), \quad x_4 = -\frac{1}{5}(10-3\sqrt{5}),$$

代入原方程组，可得四组公共解为

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -\dfrac{1}{5}(10+3\sqrt{5}) \\ y_3 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -\dfrac{1}{5}(10-3\sqrt{5}) \\ y_4 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{5} \end{cases}。$$

3）由

$$\boldsymbol{R}_y(f,g) = 4x^2(x+1)^2(x-2)^2 = 0,$$

可解得原方程组的组公共解为

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -1 \\ y_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -1 \\ y_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 2 \\ y_5 = 1+\sqrt{2}i \end{cases} \qquad \begin{cases} x_6 = 2 \\ y_6 = 1-\sqrt{2}i \end{cases}$$

第四章　　矩阵

1. 设 1）$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 2）$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&a&c\\1&b&b\\1&c&a\end{pmatrix}$

计算 AB，$AB-BA$。

解　1）$AB=\begin{pmatrix}6&2&-2\\6&1&0\\8&-1&2\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}4&0&0\\4&1&0\\4&3&4\end{pmatrix}$ $AB-BA=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&0&0\\4&-4&-2\end{pmatrix}$

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

$$AB=\begin{pmatrix}a+b+c&a^2+b^2+c^2&2ac+b^2\\a+b+c&2ac+b^2&a^2+b^2+c^2\\3&a+b+c&a+b+c\end{pmatrix}BA=\begin{pmatrix}a+ac+c&b+ab+c&2c+a^2\\a+ac+c&2b+b^2&c+ab+b\\2a+c^2&b+bc+c&c+ac+a\end{pmatrix}$$

$$AB-BA=(a_{ij})_{3\times 3},$$

其中

$a_{11}=b-ac$，　$a_{12}=a^2+b^2+c^2-b-ab-c$，　$a_{13}=b^2+2ac-a^2-2c$

$a_{21}=c-bc$，　$a_{22}=2ac-2b$，　$a_{23}=a^3+b^2+c^2-ab-b-c$

$a_{31}=3-c^2-2a$，　$a_{32}=c-bc$，　$a_{33}=b-ab$

2. 计算

1) $\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}^2$　　2) $\begin{pmatrix}3&2\\-4&-2\end{pmatrix}^5$

3) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n$　　4) $\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^n$

5) $(2,\ 3,\ -1)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}(2,\ 3,\ -1)$　　6) $(x,\ y,\ 1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{31}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}^2$，$\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}^n$

8) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$

解 1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$。

2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$。

3) 采用数学归纳法，可证

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

事实上，当 $n=2$ 时，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

结论成立。

当 $n=k-1$ 时，归纳假设结论成立，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是当 $n=k$ 时，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即证 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 成立。

4）采用数学归纳法，可证

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix},$$

事实上，当 $n=2$ 时，有

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi \\ 2\cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix},$$

结论成立。

当$n=k-1$时，归纳假设结论成立，即

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^{k-1}=\begin{pmatrix}\cos(k-1)\varphi & -\sin(k-1)\varphi\\ \sin(k-1)\varphi & \cos(k-1)\varphi\end{pmatrix},$$

于是当$n=k$时，有

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^{k}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^{k-1}\bullet\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(k-1)\varphi & -\sin(k-1)\varphi\\ \sin(k-1)\varphi & \cos(k-1)\varphi\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix},$$

其中

$$x_1=\cos(k-1)\varphi\cos\varphi-\sin(k-1)\varphi\sin\varphi=\cos k\varphi,$$

同理可得

$$x_2=-\sin k\varphi,\qquad x_3=\sin k\varphi,\qquad x_4=\cos k\varphi,$$

因而有

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}。$$

5）$\begin{pmatrix}2, & 3, & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=0$，$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2, & 3, & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & -3 & 1\\ -2 & -3 & 1\end{pmatrix}$。

6）$\begin{pmatrix}x, & y, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{12} & a_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & c\end{pmatrix}$

$$=(a_{11}x+a_{12}y+b_1,a_{12}x+a_{22}y+b_2,b_1x+b_2y+c)\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c。$$

7）注意到

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

这意味着，若令

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

则 $A^2=2^2E$. 下面对

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^n$$

分两种情形讨论

①n为偶数，即$n=2k$，于是

$$A^n=A^{2k}=(A^2)^k=2^{2k}E=2^nE,$$

②n为奇数，即$n=2k+1$，于是

$$A^n=A^{2k+1}=(A^2)^kA=2^{2k}EA=2^nA,$$

故

$$A^n=\begin{cases}2^nE, & n=2k\\ 2^{n-1}A, & n=2k+1\end{cases}。$$

8）采用数学归纳法，可证

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix},$$

事实上，当$n=1$时，结论显然成立，现在归纳假设

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^{n-1}=\begin{pmatrix}\lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-3}\\ 0 & \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2}\\ 0 & 0 & \lambda^{n-1}\end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-3}\\ 0 & \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2}\\ 0 & 0 & \lambda^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda^{n} & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^{n} & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^{n}\end{pmatrix},$$

即证结论成立。

3. 设 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$，$A$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，定义

$$f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mE。$$

1） $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$，$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$；

2） $f(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+3$，$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$，

试求 $f(A)$。

解 1） $f(A)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}8 & 2 & 4\\ 11 & 2 & 5\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\ 8 & 0 & 3\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}。$$

2 ）

$f(A)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}7 & -5\\ -15 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & -5\\ -15 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$。

4. 如果 $AB=BA$，矩阵 B 就称为 A 与可交换，设

1） $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$　　　　　2） $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}$

3） $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

求所有与 A 可交换的矩阵。

解　1）若记 $A=E+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，并设 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 与 A 可交换，即

$$\left(E+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\left(E+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right),$$

于是

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix}c&d\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix},$$

故 $c=0,a=d,b$ 任意，从而所有与 A 可交换的矩阵为 $B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$, 其中 a,b 为任意常数。

2）同理，记 $A=E+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&2&1\end{pmatrix}$ 并设 $B=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$ 与 A 可交换，即

$$\left(E+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}\left(E+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}\right)$$ 于是

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2a_2&2b_2&2c_2\\3a+a_1+a_2&3b+b_1+b_2&3c+c_1+c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3c&c&2b+c\\3c_1&c_1&2b_1+c_1\\3c_2&c_2&2b_2+c_2\end{pmatrix},$$

比较对应的(i,j)元，可得$a=b_1-\frac{1}{3}a_1$，　$b=0$，　$c=0$，

$a_2=\frac{2}{3}c_1$，$b_2=\frac{1}{2}c_1$，$c_2=b_1+\frac{1}{2}c_1$，

于是所有与A可交换的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} b_1-\frac{1}{3}a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \frac{3}{2}c_1 & \frac{1}{2}c_1 & b_1+\frac{1}{2}c_1 \end{pmatrix},$$

其中a_1,b_1,c_1为任意常数。

3）设$B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$与$A$可交换，即

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故得

$$a_1=a_2=b_2=0,\ a=b_1=c_2,\ b=c_1。$$

所以所有与A可交换的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

其中a,b,c为任意常数。

5. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

其中$a_i \neq a_j$（当$i \neq j$时）（$i,j=1,2,\cdots,n$），证明：与A可交换的矩阵只能是对角矩阵。

证 设$B=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$与$A$可交换，于是由

$$AB=\begin{pmatrix} a_1x_{11} & a_1x_{12} & \cdots & a_1x_{1n} \\ a_2x_{21} & a_2x_{22} & \cdots & a_2x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nx_{n1} & a_nx_{n2} & \ldots & a_nx_{nn} \end{pmatrix}=BA=\begin{pmatrix} a_1x_{11} & a_1x_{12} & \cdots & a_1x_{1n} \\ a_2x_{21} & a_2x_{22} & \cdots & a_2x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nx_{n1} & a_nx_{n2} & \ldots & a_nx_{nn} \end{pmatrix},$$

有

$$a_ix_j=a_jx_{ij}(i,j=1,\cdots,n),$$

即$(a_i-a_j)x_{ij}=0$（当$a_i\neq a_j$时）. 有因为$a_i\neq a_j$，所以$x_{ij}=0(i\neq j)$。于是，与A可交换的矩阵B只能是对角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}。$$

6. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1E_1 & & & \\ & a_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_rE_r \end{pmatrix},$$

其中$a_i\neq a_j$（当$i\neq j$时）（$i,j=1,2,\cdots,r$），E_i是n_i阶单位矩阵，证明：与A可交换的矩阵只能是准对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix},$$

其中A_i是n_i阶矩阵（$i,j=1,2,\cdots,r$）。

证 设

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr} \end{pmatrix}$$

与A可交换（其中B_{ij}是$n_i\times n_j$阶矩阵），则由$AB=BA$，可得

$$a_i E_i B_{ij} = B_{ij} a_i E_i (i, j = 1 \cdots, r)$$

当 $i \neq j$ 时，由 $a_i B_{ij} = B_{ij} a_i$ 及 $a_i \neq a_j$，因而必有 $B_{ij} = 0$。

于是，与 A 可交换的矩阵 B 只能是准对角矩阵

$$\begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{rr} \end{pmatrix},$$

其中 B_{ii} 是 n_i 阶矩阵（$i, j = 1, 2, \cdots, r$）。

7. 用 E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素（即 (i, j) 元）为 1，而其余元素全为零的 $n \times n$ 矩阵，

而 $A = (a_{ij})_{n \times n}$. 证明：

1）如果 $AE_{12} = E_{12} A$，那么当 $k \neq 1$ 时 $a_{k1} = 0$，当 $k \neq 2$ 时 $a_{2k} = 0$；

2）如果 $AE_{ij} = E_{ij} A$，那么当 $k \neq i$ 时 $a_{ki} = 0$，当 $k \neq j$ 时 $a_{jk} = 0$，且 $a_{ii} = a_{jj}$；

3）如果 A 与所有的 n 阶矩阵可交换，那么 A 一定是数量矩阵，即 $A = aE$。

证　1）因为

$$AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E_{12} A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

所以

$$a_{21} = a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0, \quad a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0。$$

即当 $k \neq 1$ 时 $a_{k1} = 0$，当 $k \neq 2$ 时 $a_{2k} = 0$。

2）因为

$$AE_{ij} = \begin{array}{c} \qquad\qquad j\text{列} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = E_{ij} A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & i\text{行} \end{array}$$

所以当 $k \neq i$ 时 $a_{ki} = 0$，当 $k \neq j$ 时 $a_{jk} = 0$ 且 $a_{ii} = a_{jj}$。

3）A 与任何矩阵相乘可交换，必与 E_{ij} 相乘可交换，于是由 $AE_{ij} = E_{ij} A$ 得

$$a_{ii}=a_{jj}\text{（}i,j=1,2,\cdots,n\text{）}，\ a_{ij}=0(i\neq j)$$

因此 A 是数量矩阵。

8. 如果 $AB=BA, AC=CA$，证明：$A(B+C)=(B+C)A,$ $A(BC)=(BC)A$。

证 $A(B+C)=AB+AC=BA+CA=(B+C)A$，

$$A(BC)=(AB)C=(BA)C=B(AC)=B(CA)=(BC)A\text{。}$$

9. 如果 $A=\dfrac{1}{2}(B+E)$，证明：$A^2=A$ 当且仅当 $B^2=E$。

证 充分性. 若 $B^2=E$，因为

$A^2=[\dfrac{1}{2}(B+E)]^2=\dfrac{1}{4}(B^2+2B+E)=\dfrac{1}{4}(2B+2E)=\dfrac{1}{2}(B+E)=A$，所以 $A^2=A$。

必要性. 若 $A^2=A$，则 $\dfrac{1}{4}(2B+2E)=\dfrac{1}{2}(B+E)$，即 $\dfrac{1}{4}B^2+\dfrac{1}{4}E=\dfrac{1}{2}E$，即证 $B^2=E$。

10. 矩阵称 A 为对称的，如果 $A=A'$. 证明：如果 A 是实对称矩阵，且 $A^2=0$，那么 $A=0$。

证 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则

$$A^2=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2 & * & \cdots & * \\ * & a_{12}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & a_{1n}^2+a_{2n}^2+\cdots+a_{nn}^2 \end{pmatrix}\text{。}$$

由 $A^2=0$ 有

$$a_{1i}^2+a_{2i}^2+\cdots+a_{ii}^2+a_{i,i+1}^2+\cdots+a_{in}^2=0(i=1,2,\cdots,n),$$

因而必有

$$a_{1i}+a_{2i}+\cdots+a_{ii}+a_{i,i+1}+\cdots+a_{in}=0(i=1,2,\cdots,n),$$

即证。

11. 设 A,B 都是 $n\times n$ 对称矩阵，证明：AB 也对称当且仅当 A,B 可交换。

证 当$AB=BA$时，有

$$AB=A'B'=(BA)'=(AB)',$$

所以AB是对称矩阵。

反之，当$AB=(AB)'$时，有

$$AB=(AB)'=B'A'=BA。$$

12. 矩阵A称为反对称的，如果$A'=-A$，证明：任一$n\times n$矩阵都可表为一对称矩阵与一反对称矩阵之和。

证 设A是任一$n\times n$矩阵，因为$A=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A'-\frac{1}{2}A'=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A')$，

且$\frac{1}{2}(A+A')$是对称矩阵，$\frac{1}{2}(A-A')$是反对称矩阵，所以结论成立。

13. 设$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k(k=0,1,2\cdots)$ $a_{ij}=s_{i+j-2}$ $(i,j=1,2,\cdots n)$. 证明：

证 由题设知

$$\left|a_{ij}\right|=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} n & x_1+\cdots+x_n & \cdots & x_1^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1} \\ x_1+\cdots+x_n & x_1^2+\cdots+x_n^2 & \cdots & x_1^n+\cdots+x_n^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1} & x_1^n+\cdots+x_n^n & \cdots & x_1^{2n-2}+\cdots+x_n^{2n-n} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i<j}(x_j-x_i)\prod_{i<j}(x_j-x_i)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2。$$

14. 设A是$n\times n$矩阵，证明：存在一个$n\times n$非零矩阵B使$AB=0$的充分必要条件是$\left|A\right|=0$。

证 充分性. 若$\left|A\right|=0$，则齐次方程组$AX=0$有非零解

$$X=(b_1,b_2,\cdots,b_n)',$$

只要取

$$B=\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

即可。

必要性. 设 $B=(B_1,B_2,\cdots,B_n)\neq 0$，使 $AB=0$，这里 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 B 的列向量。不失一般性，设 $B_1\neq 0$，则由 $AB=0$，得

$$(AB_1,AB_2,\cdots,AB_n)=0_{\text{。}}$$

因此，$AB_1=0$，即 $AX=0$ 有非零解，从而

$$|A|=0_{\text{。}}$$

15. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，如果对任一 n 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 都有 $AX=0$，那么 $A=0$。

证　证法 1　由题设知，n 维向量空间中的所有向量都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解，故方程组的基础解系含有 n 个线性无关的解向量，所以 $rank(A)=0$，即证 $A=0$。

16 设 B 为一 $r\times r$ 矩阵，C 为 $r\times n$ 矩阵，且 $rank(C)=r$. 证明：

1） 如果 $BC=0$，那么 $B=0$；
2） 如果 $BC=C$，那么 $B=E$。

证　1）若 $BC=0$，设 $B=(b_{ij})_{r\times r}$，$C=(c_{ij})_{r\times n}$，因 $rank(C)=r$，不失一般性，可设

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rr} \end{vmatrix} \neq 0_{\text{。}}$$

由 $BC=0$，得

$$\begin{cases} b_{i1}c_{11}+b_{i2}c_{21}+\cdots+b_{ir}c_{r1}=0 \\ b_{i1}c_{12}+b_{i2}c_{22}+\cdots+b_{ir}c_{r2}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (i=1,2,\cdots,r) \\ b_{i1}c_{1r}+b_{i2}c_{2r}+\cdots+b_{ir}c_{rr}=0 \end{cases}$$

因为该齐次方程组的系数行列式不等于零，故它只有惟一零解，即

$$b_{i1}=b_{i2}=\cdots=b_{ir}=0(i=1,2,\cdots r)_{,}$$

因而 $B=0$。

2） 若 $BC=C$，则

$$BC-EC=(B-E)C=0,$$

由 1）知 $B-E=0$，因此 $B=E$。

17. 证明：

$$rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)。$$

证 设 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，$B=(B_1,B_2,\cdots,B_n)$，则

$$(A+B)=(A_1+B_1,A_2+B_2,\cdots,A_n+B_n)。$$

若 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_{r_1}}$ 与 $B_{j_1},B_{j_2},\cdots,B_{j_{r_2}}$ 分别是 A 与 B 的列向量组的极大线性无关组，则有

$$\begin{aligned} A_t&=k_{t_1}A_{i_1}+k_{t_2}A_{i_2}+\cdots+k_{t_{r_1}}A_{i_{r_1}} \\ B_t&=l_{t_1}B_{j_1}+l_{t_2}B_{j_2}+\cdots+l_{t_{r_2}}B_{j_{r_2}} \end{aligned}\quad (t=1,2,\cdots,n)$$

于是

$$A_t+B_t=k_{t_1}A_{i_1}+\cdots+k_{t_{r_1}}A_{i_{r_1}}+l_{t_1}B_{j_1}+\cdots+l_{t_{r_2}}B_{j_{r_2}}\ (i,j=1,2,\cdots,n),$$

即 $A+B$ 的列向量组可由 $A_{i_1},\cdots,A_{i_{r_1}},B_{j_1},\cdots,B_{j_{r_2}}$ 线性表出，故

$$rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)。$$

18. 设 A,B 为 $n\times n$ 矩阵，证明：如果 $AB=0$，那么

$$rank(A)+rank(B)\le n。$$

证 设 B 的列向量组为 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，则

$$AB=A(B_1,B_2,\cdots,B_n)=(AB_1,AB_2,\cdots,AB_n)=0,$$

故有

$$AB_1=AB_2=\cdots=AB_n=0。$$

即方程组 $AX=0$ 有 n 组解 $B_1,B_2,\cdots,B_n$。

若 $rank(A)=r$，则 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 可由 $n-r$ 个线性无关的解向量线性表出，于是 $rank(B)=n-r$。因此

$$rank(A)+rank(B)\le r+(n-r)=n。$$

19. 证明：如果 $A^k=0$，那么

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}。$$

证

$$
\begin{aligned}
&(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A)\\
&=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^k\\
&=E+(A-A)+(A^2-A^2)+\cdots+(A^{k-1}-A^{k-1})-A^k\\
&=E\text{ 。}
\end{aligned}
$$

即证

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\text{ 。}$$

20. 求 A^{-1}，设

1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$ad-bc=1$　　2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　　6) $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

7) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　8) $A=\begin{pmatrix} 2 & 12 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \\ -1 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　　10) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

解　1）$A^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$。

2）对 $(A\,|\,E)$ 作行初等变换，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}。$$

3）对 $(A \mid E)$ 作行初等变换，可得

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}。$$

4）对 $(A \mid E)$ 作行初等变换，可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-6&-1&0&2&0\\0&1&2&5&1&0&-1&0\\0&0&-3&-1&-1&1&-1&0\\0&0&-1&0&1&0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-6&-2&4&4&-1\\0&1&0&5&3&-5&-5&2\\0&0&0&-1&-4&5&5&-3\\0&0&-1&0&1&0&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&22&-6&-16&17\\0&1&0&0&-17&5&20&-13\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}22&-6&-16&17\\-17&5&20&-13\\-1&0&2&-1\\4&-1&-5&3\end{pmatrix}。$$

5）对 $(A\,|\,E)$ 作行初等变换，有

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&1&-1&-1&0&1&0&0\\1&-1&1&-1&0&0&1&0\\1&-1&-1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&-2&-2&-1&1&0&0\\0&-2&0&-2&-1&0&1&0\\0&-2&-2&0&-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&-1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&-2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}。$$

6）对 $(A\,|\,E)$ 作行初等变换，有

$$\begin{pmatrix}3&4&-4&-3&1&0&0&0\\0&6&1&1&0&1&0&0\\5&4&2&1&0&0&1&0\\2&3&3&2&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-7&5&12&-19\\0&1&0&0&3&-2&-5&8\\0&0&1&0&41&-30&-69&111\\0&0&0&1&-59&43&99&-158\end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-7&5&12&-19\\3&-2&-5&8\\41&-30&-69&111\\-59&43&99&-159\end{pmatrix}。$$

7）因为 $|A|=1$，所以

$$A^{-1}=A^{*}=\begin{pmatrix}1&-3&-3&-38\\0&1&-2&7\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}。$$

8）对 $(A\,|\,E)$ 作行初等变换，有

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0&1&0&0&0\\3&2&0&0&0&1&0&0\\5&7&1&8&0&0&1&0\\-1&-3&-1&-6&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&0&0&-3&2&0&0\\0&0&1&0&-5&7&-3&-4\\0&0&0&1&2&-2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-3&2&0&0\\-5&7&-3&-4\\2&-2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}。$$

9）因为

$$\begin{array}{llll} A_{11}=1 & A_{21}=-3 & A_{31}=7 & A_{41}=-20 \\ A_{12}=7 & A_{22}=3 & A_{32}=-5 & A_{42}=10 \\ A_{13}=-9 & A_{23}=-3 & A_{33}=3 & A_{43}=-6 \\ A_{14}=-3 & A_{24}=-3 & A_{34}=3 & A_{44}=-6 \end{array}$$

且$|A|=-6$，所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}。$$

10）因为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}。$$

21.设

$$X=\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

已知 A^{-1},C^{-1} 存在，求 X^{-1}。

解　设 $X^{-1}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB_{21} & AB_{22} \\ CB_{11} & CB_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$。

因此

$$AB_{21}=E, \qquad AB_{22}=0$$

左乘 A^{-1}，得

$$B_{21}=A^{-1}, \qquad B_{22}=0,$$

又由于

$$CB_{11}=0, \qquad CB_{12}=E,$$

左乘 C^{-1} 得

$$B_{11}=0, \qquad B_{12}=C^{-1},$$

故

$$X^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}。$$

22.设

$$X=\begin{pmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，求 A^{-1}。

解 记 $X=\begin{pmatrix}0 & A\\ a_n & 0\end{pmatrix}$，其中

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\end{pmatrix}$$

则

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}0 & a_n^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}。$$

而

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1}\end{pmatrix},$$

故

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n}\\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0\end{pmatrix}。$$

23. 求矩阵 X，设

1) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,

$$2)\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix},$$

$$3)\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{pmatrix},$$

$$4)X\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}。$$

解 1）$X=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$。

2 ）

$$X=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{6}&\frac{1}{2}&1\\-\frac{11}{6}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{2}{3}&1&0\end{pmatrix}。$$

3）$$X=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\end{pmatrix}。$$

4）$X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\\ 2 & \frac{3}{2} & 4\end{pmatrix}$。

24.证明：1）如果 A 可逆对称（反对称），那么 A^{-1} 也对称（反对称）；2）不存在奇数阶的可逆反对称矩阵。

证　1)若 $A=A'$，则

$$A^{-1}=(A')^{-1}=(A^{-1})'。$$

2）由 $A=-A'$，知

$$|A|=(-1)^n|A'|=(-1)^n|A|,$$

所以当 n 为奇数时，有

$$|A|=-|A|\Rightarrow|A|=0,$$

故 A 不可逆。

25.矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为上（下）三角矩阵，如果当 $i>j(i<j)$ 时有 $a_{ij}=0$。证明：

1）两个上（下）三角形矩阵的乘积仍是上（下）三角矩阵；

2）可逆的上（下）三角矩阵的逆仍是上（下）三角矩阵。

证　1）设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & b_{nn}\end{pmatrix},$$

假定

$$AB=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix},$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{i,i-1}b_{i-1,j}+a_{ii}b_{ij}+a_{i,i+1}b_{i+1,j}+\cdots+b_{in}b_{nj},$$

当$i>j$时$a_{ij}=b_{ij}=0$，显然c_{ij}中各项均有因子为零，故$c_{ij}=0$，所以AB是上三角矩阵。

对于A,B是下三角阵情形同法可证。

2）令$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$，设$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$是$A$的逆，即$AB=E$，比较$E$和$AB$的第一列元素，有

$$\begin{cases} 1=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} \\ 0=a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0=a_{n-1,n-1}b_{n-1,1}+\cdots+a_{n-1,n}b_{n1} \\ 0=a_{nn}b_{n1} \end{cases},$$

因为$|A|\neq 0$，故$a_{11}\neq 0,a_{22}\neq 0,\cdots,a_{nn}=0$，因而得

$$b_{n1}=b_{n-1,1}=\cdots=b_{21}=0。$$

同理可得：当$i>j$时$b_{jj}=0$，因而B是上三角阵。

A是下三角阵的情形同理可证。

26. 证明：$|A^*|=|A|^{n-1}$，其中A是$n\times n$矩阵$(n>2)$。

证　因为$|AA^*|=|A|^n$，　$|AA^*|=|A||A^*|$，所以当$|A|\neq 0$时有$|A^*|=\dfrac{|A|^n}{|A|}=|A|^{n-1}$。

当$|A|=0$时 i）$rank(A)=0$，有$A=0,A^*=0$，于是$|A^*|=|A|^{n-1}$。

ii）$rank(A)>0$，由于$A^*A=|A|E=0$，于是$A^*A=0$有非零解，故$rank(A)<n$，于是$|A^*|=0$，所以此时也有，$|A^*|=|A|^{n-1}$，即证。

27. 证明：如果A是$n\times n$矩阵$(n>2)$，那么

$$rank(A^*)=\begin{cases} n, & 当rank(A)=n \\ 1, & 当rank(A)=n-1 \\ 0, & 当rank(A)<n-1 \end{cases}$$

证　当$rank(A)=n$时，故$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，所以

$$rank(A^*)=n。$$

当 $rank(A)=n-1$ 时，A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不为 0，所以

$$rank(A^*)\geq 1$$。

另一方面，由 $|A|=0$，有

$$A^*A=|A|E=0$$。

于是

$$rank(A)+rank(A^*)\leq n$$,

所以，$rank(A)\leq 1$. 故 $rank(A^*)=1$。

当 $rank(A)<n-1$ 时，A 的一切 $n-1$ 阶子式全为 0，所以，因而 $rank(A^*)=0$, 即证。

第五章 二次型

1．用非退化线性替换化下列二次型为标准形，并利用矩阵验算所得结果。

1） $-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$；

2） $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$；

3） $x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$；

4） $8x_1x_4+2x_3x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$；

5） $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$；

6） $x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$；

7） $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$。

解 1）已知 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，

先作非退化线性替换

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}\qquad(1)$$

则

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=-4y_1^2+4y_2^2+4y_1y_3\\&=-4y_1^2+4y_1y_3-y_3^2+y_3^2+4y_2^2\\&=-(2y_1-y_3)^3+y_3^2+4y_2^2,\end{aligned}$$

再作非退化线性替换

$$\begin{cases}y_1=\dfrac{1}{2}z_1+\dfrac{1}{2}z_3\\y_2=z_2\\y_3=z_3\end{cases}\qquad(2)$$

则原二次型的标准形为

$$f(x_1,x_2,x_3)=-z_1^2+4z_2^2+z_3^2,$$

最后将（2）代入（1），可得非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}z_1 + z_2 + \frac{1}{2}z_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}z_1 - z_2 + \frac{1}{2}z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases} \tag{3}$$

于是相应的替换矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且有

$$T'AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

2）已知 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$，

由配方法可得

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2)$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2,$$

于是可令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases},$$

则原二次型的标准形为

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2,$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

相应的替换矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且有

$$T'AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

（3）已知 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$，

由配方法可得

$$f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+x_2^2+x_3^2\right)-\left(4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\right)$$

$$=(x_1-x_2-x_3)^2-(2x_2+x_3)^2,$$

于是可令

$$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\y_2=2x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases},$$

则原二次型的标准形为

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-y_2^2,$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases}x_1=y_1+\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{3}{2}y_3\\x_2=\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{1}{2}y_3\\x_3=y_3\end{cases},$$

相应的替换矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix},$$

且有

$$T'AT=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&-3&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

（4）已知 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=8x_1x_2+2x_3x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$，

先作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_4 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases},$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8y_1y_4 + 8y_4^2 + 2y_3y_4 + 2y_2y_3 + 8y_2y_4$$

$$= 8\left[y_4^2 + 2y_4\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{8}y_3\right) + \left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{8}y_3\right)^2\right]$$

$$-8\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{8}y_3\right)^2 + 2y_2y_3$$

$$= 8\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{8}y_3 + y_4\right)^2 - 2\left(y_1 + y_2 + \frac{1}{4}y_3\right)^2 + 2y_2y_3,$$

再作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_2 - z_3 \\ y_4 = z_4 \end{cases},$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8\left(\frac{1}{2}z_1 + \frac{5}{8}z_2 + \frac{3}{8}z_3 + z_4\right)^2 - 2\left(z_1 + \frac{5}{4}z_2 + \frac{3}{4}z_3\right)^2$$

$$+ 2z_2^2 - 2z_3^2,$$

再令

$$\begin{cases} w_1 = z_1 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 \\ w_2 = z_2 \\ w_3 = z_3 \\ w_4 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{5}{8}z_2 + \frac{3}{8}z_3 + z_4 \end{cases},$$

则原二次型的标准形为

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2w_1^2 + 2w_2^2 - 2w_3^2 + 8w_4^2,$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}w_1 - \frac{5}{4}w_2 - \frac{3}{4}w_3 + w_4 \\ x_2 = w_2 + w_3 \\ x_3 = w_2 - w_3 \\ x_4 = -\frac{1}{2}w_1 + w_4 \end{cases},$$

相应的替换矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且有

$$T'AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}。$$

（5）已知 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$，

先作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases},$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2y_1y_2 + y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 + 2y_1y_4 + 2y_2y_4 + y_3y_4$$

$$= (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)^2 - \left(y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)^2 - \frac{3}{4}y_4^2 - y_1^2,$$

再作非退化线性替换

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ z_3 = y_3 + \frac{1}{2}y_4 \\ z_4 = y_4 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = -z_1 + z_2 - z_3 - \frac{1}{2} z_4 \\ y_3 = z_3 - \frac{1}{2} z_4 \\ y_4 = z_4 \end{cases},$$

则原二次型的标准形为

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - \frac{3}{4} z_4^2,$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 - \frac{1}{2} z_4 \\ x_2 = -z_1 + z_2 - z_3 - \frac{1}{2} z_4 \\ x_3 = z_3 - \frac{1}{2} z_4 \\ x_4 = z_4 \end{cases},$$

相应的替换矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且有

$$T'AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}。$$

（6）已知 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4$

$$+ 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4,$$

由配方法可得

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left[x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 2x_3 + x_4) + (2x_2 + 2x_3 + x_4)^2\right]$$

$$-(2x_2 + 2x_3 + x_4)^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

$$=\left(x_1+2x_2+2x_3+x_4\right)^2-2\left(x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\right)^2+\frac{1}{2}\left(x_3+x_4\right)^2,$$

于是可令

$$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+2x_3+x_4\\ y_2=x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\\ y_3=x_3+x_4\\ y_4=x_4\end{cases},$$

则原二次型的标准形为

$$f=y_1^2-2y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2,$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases}x_1=y_1-2y_2+y_3-y_4\\ x_2=y_2-\frac{3}{2}y_3+y_4\\ x_3=y_3-y_4\\ x_4=y_4\end{cases},$$

故替换矩阵为

$$T=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1\\0&1&-\frac{3}{2}&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

且有

$$T'AT=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

（7）已知 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$，

由配方法可得

$$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\left[x_2^2+2x_2\left(x_1+x_3\right)+\left(x_1+x_3\right)^2\right]-2x_1x_3+2x_3x_4+x_4^2$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2x_1x_3+\left(x_3^2+2x_3x_4+x_4^2\right)-x_3^2$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+\left(x_3+x_4\right)^2-2x_1x_3-x_3^2-x_1^2+x_1^2$$

$$=x_1^2+\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+\left(x_3+x_4\right)^2-\left(x_1+x_3\right)^2,$$

于是可令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 + x_4 \\ y_4 = x_1 + x_3 \end{cases},$$

则原二次型的标准形为

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_2^2 - y_4^2,$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_4 \\ x_3 = -y_1 + y_4 \\ x_4 = y_1 + y_3 - y_4 \end{cases},$$

相应的替换矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

且有

$$T'AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}。$$

（Ⅱ）把上述二次型进一步化为规范形，分实系数、复系数两种情形；并写出所作的非退化线性替换。

解　1）已求得二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

的标准形为

$$f = -y_1^2 + 4y_2^2 + 3y_3^2,$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}y_1 + y_2 + \dfrac{1}{2}y_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}y_1 - y_2 + \dfrac{1}{2}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

（1）　在实数域上，若作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = z_3 \\ y_2 = \dfrac{1}{2} z_2 \\ y_3 = z_1 \end{cases},$$

可得二次型的规范形为

$$f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2。$$

（2） 在复数域上，若作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = iz_1 \\ y_2 = \dfrac{1}{2} z_2 \\ y_3 = z_1 \end{cases},$$

可得二次型的规范形为

$$f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2。$$

2）已求得二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$$

的标准形为

$$f = y_1^2 + y_2^2,$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

故该非退化线性替换已将原二次型化为实数域上的规范形和复数域上的规范形

$$f = y_1^2 + y_2^2。$$

3）已求得二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

的标准形为

$$f = y_1^2 - y_2^2,$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \dfrac{1}{2} y_2 - \dfrac{3}{2} y_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} y_2 - \dfrac{1}{2} y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

（1） 在实数域上，上面所作非退化线性替换已将二次型化为规范形，即

$$f=y_1^2-y_2^2。$$

（2） 在复数域上，若作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=z_1 \\ y_2=iz_2 \\ y_3=z_3 \end{cases}。$$

可得二次型的规范形为

$$f=z_1^2+z_2^2。$$

（3） 已求得二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=8x_1x_2+2x_3x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$$

的标准形为

$$f=-2y_1^2+2y_2^2-2y_3^2+8y_4^2,$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}y_1-\frac{5}{4}y_2-\frac{3}{4}y_3+y_4 \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_2-y_3 \\ x_4=-\frac{1}{2}y_1+y_4 \end{cases},$$

（1） 在实数域上，若作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_4 \\ y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2 \\ y_3=\frac{1}{\sqrt{2}}z_3 \\ y_4=\frac{1}{2\sqrt{2}}z_1 \end{cases},$$

可得二次型的规范形为

$$f=z_1^2+z_2^2-z_3^2-z_2^2。$$

（2）在复数域上，若作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{i}{\sqrt{2}} z_1 \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} z_2 \\ y_3 = \dfrac{i}{\sqrt{2}} z_3 \\ y_4 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} z_4 \end{cases},$$

可得二次型的规范形为

$$f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_2^2。$$

（5）已求得二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

的标准形为

$$f = -y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - \frac{3}{4}y_4^2,$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3 - \dfrac{1}{2}y_4 \\ x_2 = -y_1 + y_2 - y_3 - \dfrac{1}{2}y_4 \\ x_3 = y_3 - \dfrac{1}{2}y_4 \\ x_4 = y_4 \end{cases},$$

（1） 在实数域上，若作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = z_2 \\ y_2 = z_1 \\ y_3 = z_3 \\ y_4 = \dfrac{2}{\sqrt{3}} z_4 \end{cases},$$

可得二次型的规范形为

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2。$$

（2） 在复数域上，若作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = iz_1 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = iz_3 \\ y_4 = \dfrac{2}{\sqrt{3}} iz_4 \end{cases},$$

可得二次型的规范形为

$$f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 。$$

6）已求得二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4$$

$$+ 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

的标准形为

$$f = -y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2 ,$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \\ x_2 = y_2 - \dfrac{3}{2}y_3 + y_4 \\ x_3 = y_3 - y_4 \\ x_4 = y_4 \end{cases} 。$$

（1）在实数域上，若作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = z_2 \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}z_3 \\ y_3 = \sqrt{2}z_1 \\ y_4 = z_4 \end{cases} ,$$

可得二次型的规范形为

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 。$$

（2）在复数域上，若作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = iz_1 \\ y_2 = \dfrac{i}{\sqrt{2}}z_2 \\ y_3 = \sqrt{2}z_3 \\ y_4 = z_4 \end{cases} ,$$

可得二次型的规范形为

$$f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 。$$

7）已求得二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4$$

$$+ 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

的标准形为

$$f=y_1^2+y_2^2+y_2^2-y_4^2，$$

且非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=y_2-y_4 \\ x_3=-y_1+y_4 \\ x_4=y_1+y_3-y_4 \end{cases}。$$

（1）在实数域上，上面所作非退化线性替换已将二次型化为规范形，即

$$f=y_1^2+y_2^2+y_2^2-y_4^2。$$

（2） 在复数域上，若作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=z_1 \\ y_2=z_2 \\ y_3=z_3 \\ y_4=iz_4 \end{cases}，$$

可得二次型的规范形为

$$f=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2。$$

2．证明：秩等于r的对称矩阵可以表成r个秩等于 1 的对称矩阵之和。

证　由题设知$A=A'$且$rank(A)=r$，于是存在可逆矩阵C使

$$C'AC=D，$$

且D为对角阵，又因为$C',C^{-1},\left(C^{-1}\right)'=\left(C'\right)^{-1}$均为可逆矩阵，所以有

$$C'AC=D_1+D_2+\cdots+D_r，$$

其中

$$D_1=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix},D_2=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},\cdots,D_r=\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} A&=\left(C'\right)^{-1}\left(D_1+D_2+\cdots+D_r\right)C^{-1} \\ &=\left(C^{-1}\right)'D_1C^{-1}+\left(C^{-1}\right)'D_2C^{-1}+\cdots+\left(C^{-1}\right)'D_rC^{-1}。\end{aligned}$$

因

$$rank\left(\left(C^{-1}\right)' D_i C^{-1}\right)=1 \qquad (i=1,2,\cdots,r),$$

且

$$\left[\left(C^{-1}\right)' D_i C^{-1}\right]'=\left(C^{-1}\right)' D_i C^{-1}=\left(C^{-1}\right)' D_i C^{-1}。$$

即$\left(C^{-1}\right)' D_i C^{-1}$都是对称矩阵，故$A$可表成$r$个秩为1的对称矩阵之和。

3．证明：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

合同，其中$i_1 i_2 \cdots i_n$是$1,2,\cdots,n$的一个排列。

证　题中两个矩阵分别设为A,B，与它们相应的二次型分别为

$$f_A=\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\cdots+\lambda_n x_n^2,$$

$$f_B=\lambda_{i_1} y_1^2+\lambda_{i_2} y_2^2+\cdots+\lambda_{i_n} y_n^2,$$

作非退化的线性替换

$$y_t=x_{i_t} \qquad (t=1,2,\cdots,n),$$

则f_B可化成f_A。故A与B合同。

4．设A是一个n阶矩阵，证明：

1）A是反对称矩阵当且仅当对任一个n维向量X，有$X'AX=0$。

2）如果A是对称矩阵，且对任一个n维向量X有$X'AX=0$，那么$A=0$。

证　1）必要性。因为$A=-A'$，即$a_{ii}=0, a_{ij}=-a_{ji}(i\neq j)$，所以

$$X'AX=\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j=\sum_{i\neq j}\left(a_{ij}+a_{ji}\right)x_i x_j$$

由于$a_{ij}+a_{ji}=0$，故

$$X'AX=\sum_{i\neq j}\left(a_{ij}+a_{ji}\right)x_i x_j=0。$$

充分性。因为$\forall X\in R^n$，有$X'AX=0$，即

$$a_{11}x_1^2+\left(a_{12}+a_{21}\right)x_1x_2+\cdots+\left(x_{1n}+a_{n1}\right)x_1x_n+a_{22}x_2^2$$

$$+\cdots+(a_{2n}+a_{n2})x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2=0,$$

这说明原式是一个多元零多项式，故有

$$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0,\qquad a_{ij}=-a_{ji}(i\neq j),$$

即 $A'=-A$。

2）由于 A 是对称的，且 $X'AX=0$，即

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2$$

$$+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2=0,$$

这说明 $X'AX$ 为一个多元零多项式，故有

$$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0,$$

$$2a_{ij}=0\Rightarrow a_{ij}=a_{ji}=0,$$

即 $A=0$。

5．如果把实 n 阶对称矩阵按合同分类，即两个实 n 阶对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同，问共有几类？

解　实对称矩阵 A 与 B 合同的充要条件为存在可逆矩阵 T 与 C 使

$$T'BT=C'AC=\begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}=D。$$

下面考虑对角矩阵 D 的相应二次型的合同分类情况，在 $d_i(i=1,2,\cdots,r)$ 中可分为

r	个	正，	0	个	负
$r-1$	个	正，	1	个	负
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2	个	正，	$r-2$	个	负
1	个	正，	$r-1$	个	负
0	个	正，	r	个	负

共计 $r+1$ 个合同类。但秩 r 又可分别取 $n,n-1,\cdots,2,1,0$，故共有

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

个合同类。

6．证明：一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条

件是：它的秩等于 2 且符号差等于 0，或者秩等于 1。

证　必要性。设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n),$$

其中 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为实数。

1） 若上式右边的两个一次式系数成比例，即

$$b_i=ka_i\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

不失一般性，可设 $a_1\neq 0$，则可作非退化线性替换

$$\begin{cases}y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\\ y_i=x_i\qquad(i=2,\cdots,n)\end{cases}$$

使二次型化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=ky_1^2,$$

故二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩为 1。

2） 若两个一次式系数不成比例，不妨设 $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$，则可作非退化线性替换

$$\begin{cases}y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\\ y_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n\\ y_i=x_i\qquad(i=3,\cdots,n)\end{cases},$$

使

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1y_2。$$

再令

$$\begin{cases}y_1=z_1+z_2\\ y_2=z_1-z_2\\ y_i=z_i\qquad(i=3,\cdots,n)\end{cases},$$

则二次型可化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1y_2=z_1^2-z_2^2,$$

故二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩为 2，且符号差为 0。

充分性。1）若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩为 1，则可经非退化线性替换 $Z=CY$ 使二次型化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=ky_1^2,$$

其中y_1为$x_1,x_2,\cdots,x_n$的一次齐次式，即

$$y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

且

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=k(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2$$
$$=(ka_1x_1+ka_2x_2+\cdots+ka_nx_n)(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)。$$

2）若$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩为2，且符号差为0，则可经非退化线性替换$Z=CY$使二次型化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$$
$$=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n),$$

故$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可表成两个一次齐次式的乘积。

7．判断下列二次型是否正定：

1）$99x_1^2-12x_1x_2+48x_1x_3+130x_2^2-60x_2x_3+71x_3^2$；

2）$10x_1^2+8x_1x_2+24x_1x_3+2x_2^2-28x_2x_3+x_3^2$；

3）$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$；

4）$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$。

解　1）二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}99&-6&24\\-6&130&-30\\24&-30&71\end{pmatrix},$$

因为

$$\Delta_1=99>0,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}99&-6\\-6&130\end{vmatrix}>0,\qquad \Delta_3=|A|>0,$$

故原二次型为正定二次型。

2）二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}10&4&12\\4&2&-14\\12&-14&1\end{pmatrix},$$

因为$|A|<0$，所以原二次型非正定。

3）记二次型的矩阵为$A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ \dfrac{1}{2}, & i\neq j\end{cases},$$

即

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

由于A的任意k阶顺序主子式所对应的矩阵A_k与A为同类型的对称矩阵，且

$$|A_k|=\left(\frac{1}{2}\right)^k(k+1)>0 \qquad (k=1,2,\cdots,n),$$

故原二次型为正定二次型。

4）记二次型的矩阵为$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则A的k级顺序主子式为

$$|A_k|=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & \frac{1}{2}\\ & & & \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^k\begin{vmatrix}2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & 1\\ & & & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^k\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{k+1}{k}\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^k(k+1)>0,$$

故原二次型为正定二次型。

8．t 取什么值时，下列二次型是正定的：

1）$x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$

2）$x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$

解　1）二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix},$$

因为 A 的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=1>0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}>0,$$

$$\Delta_3=|A|=\begin{vmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}>0,$$

当原二次型为正定时，有

$$\begin{cases}1-t^2>0\\ -5t^2-4t>0\end{cases},$$

解上面不等式组，可得 $-\dfrac{4}{5}<t<0$。

2）二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & 5\\ t & 4 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

当 A 的所有顺序主子式都大于零时，即

$$\Delta_1=1>0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2>0,$$

$$\Delta_3=|A|=\begin{vmatrix}1 & t & 5\\ t & 4 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}=-t^2+30t-105>0,$$

由原二次型为正定得

$$\begin{cases} 4-t^2>0 \\ -t^2+30t-105>0 \end{cases},$$

但此不等式组无解，即不存在t值使原二次型为正定。

9．证明：如果A是正定矩阵，那么A的主子式全大于零。所谓主子式，就是行指标与列指标相同的子式。

证　设正定矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，作正定二次型$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$，并令

$$x_j=0 \qquad \left(j\neq k_1,k_2,\cdots,k_i,k_1<k_2<\cdots<k_i\right),$$

则可得新二次型

$$\sum_{i=k_1}^{k_i}\sum_{j=k_1}^{k_i}a_{ij}x_i x_j,$$

由正定二次型的定义知该二次型是正定的，故A的一切i级主子式$\left|A_i\right|>0\ \left(i=1,2,\cdots,n\right)$。

10．设A是实对称矩阵，证明：当实数t充分大之后，$tE+A$是正定矩阵。

证

$$tE+A=\begin{pmatrix} t+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & t+a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & t+a_{nn} \end{pmatrix},$$

它的k级顺序主子式为

$$\Delta_k(t)=\begin{vmatrix} t+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & t+a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & t+a_{kk} \end{vmatrix}$$

当t充分大时，$\Delta_k(t)$为严格主对角占优矩阵的行列式，且$t+a_{ii}>\sum_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|\ \left(i=1,2,\cdots,n\right)$，

故$\Delta_k(t)>0\ \left(k=1,2,\cdots,n\right)$，从而$tE+A$是正定的。

11．证明：如果A是正定矩阵，那么A^{-1}也是正定矩阵。

证　因A是正定矩阵，故$X'AX$为正定二次型，作非退化线性替换$X=A^{-1}Y$，又A^{-1}也是对称矩阵，故

$$Y'A^{-1}Y=Y'\left(A^{-1}\right)'AA^{-1}Y=X'AX>0,$$

从而$Y'A^{-1'}Y$为正定二次型，即证A^{-1}为正定矩阵。

（接第二部分，请搜索，谢谢）