2008年硕士入学试题参考答案

科目：信号与系统

试题一、(共18分)

解：

1. 根据采样定理有：$f_{S\min}=2B=2f_h=2\times 4000=8000Hz=8kHz$

2. 设输入信号为$A\cos\omega t$，由最大信号不溢出条件有$A_{\max}=V$。

最小信号应满足系统指标。于是

$$\frac{A_{\max}^2/2}{A_{\min}^2/2}=10 \quad\Rightarrow\quad (x_{rms})_{\min}=\sqrt{A_{\min}^2/2}=\sqrt{A_{\max}^2/20}=V/\sqrt{20}$$

$$SNR=6.02n+4.77+20\log\left(\frac{(x_{rms})_{\min}}{V}\right)=6.02n+4.77+20\log\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right)$$

$$n=\frac{SNR-4.77-20\log\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right)}{6.02}=\frac{35-4.77+13.01}{6.02}\approx 7.18$$

进位取整得 n＝8。一个PCM码字中所含n比特数据。

3.

$$R=nf_S=8\times 8000=64000\ \ bps$$
$$(B_{PCM})_{\min}=R/2=32000Hz=32kHz$$

试题二、(共17分)

解：

1. 由卡森公式有 $B_{FM}=2(1+\beta)B=2\times(1+1)\times 4000=16000Hz=16kHz$

2. 由45MHz载波的上边带调制后，载波频率为

$f_c+f_0=5MHz+45MHz=50MHz$，带宽不变，因此

BPF的中心频率为50MHz，带宽16kHz。

3. 设带通滤波器输出的FM信号为

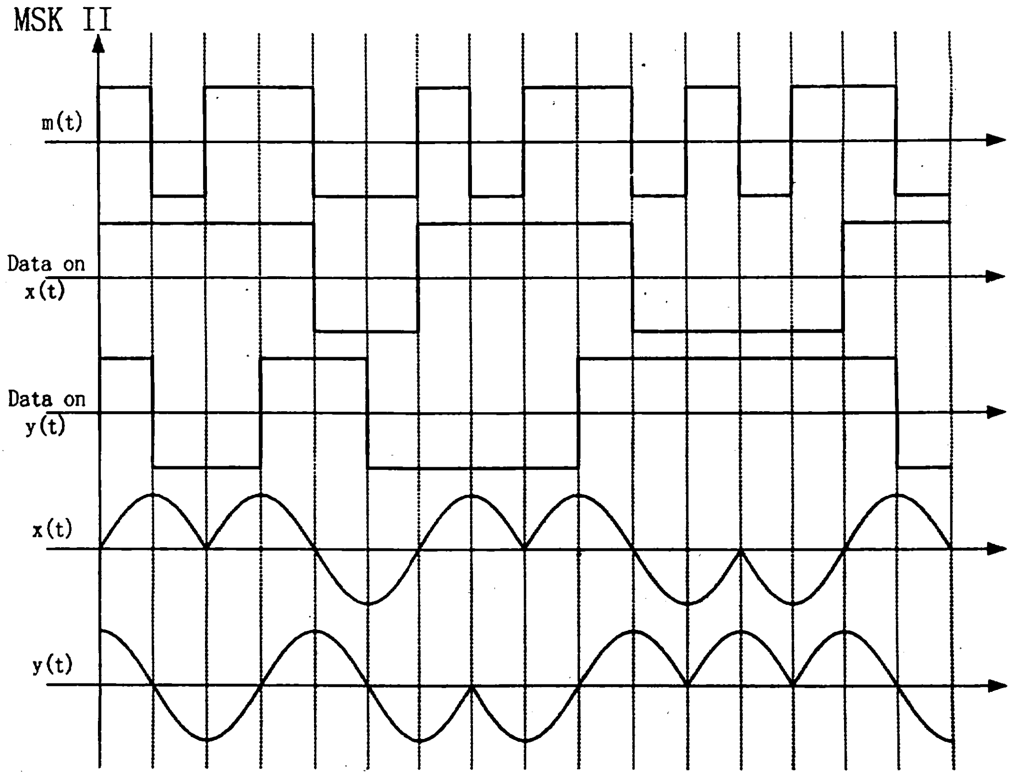
$\cos[2\pi f_1 t+D_f\int_{-\infty}^{t}m(\lambda)d\lambda]$ 其中：$f_1=50MHz$

则10倍频后的信号为$\cos[10\times 2\pi f_1 t+10\times D_f\int_{-\infty}^{t}m(\lambda)d\lambda]$

因此，输出信号的中心频率为$10\times f_1=500MHz$，

带宽为$10\times B_{BPF}=160kHz$

试题三、（共10分）解：



试题四、（10分）解：

（1） $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$$S_y=\int_{-\infty}^{\infty}\{\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\}dt$$

交换积分顺序，得：

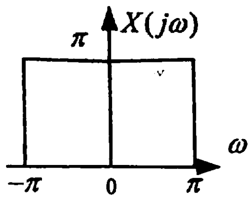
$$S_y=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\{\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)dt\}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\{S_h\}d\tau$$

$$=S_h\times\{\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)d\tau\}=S_h\times S_x$$

（5 分）

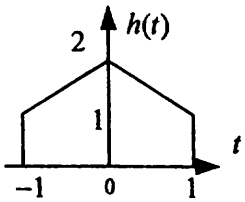
（2）设 $x(t)=\pi\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\xleftrightarrow{FT}X(j\omega)$ 如图所示，

$S_x=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt=X(j0)=\pi$，



$h(t)=(2-|t|)[u(t+1)-u(t-1)]$，如图所示，

$$S_h=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)dt=3$$



计算 S_y 的值：$S_y=S_x\times S_h=3\pi$。

（5 分）

注意：用其它方法证明、计算正确者，不扣分。

试题五、（共 15 分）解：

（1） 用 Parseval 关系式计算 $f(t)$ 的能量。

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F^2(\omega)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|\omega|}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-2\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}$$

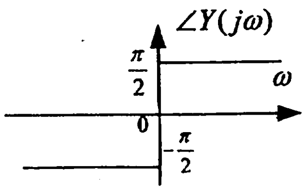
（4 分）

(2) 从 $e^{-|t|}\xleftrightarrow{FT}\dfrac{2}{1+\omega^2}$，利用傅立叶变换对偶性得：

$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{2}{1+t^2}\xleftrightarrow{FT}F(\omega)=e^{-|\omega|}$。（3 分）

$y(t)$ 的表达式 $y(t)=\dfrac{d}{dt}f(t)$，其傅立叶变换 $Y(j\omega)=j\omega F(\omega)=j\omega e^{-|\omega|}$。

$Y(j\omega)$ 的相位频谱 $\angle Y(j\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & ,\omega>0\\ -\dfrac{\pi}{2} & ,\omega<0\end{cases}$，画出其图形。



（3 分）

（3）令 $g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT)$，则

$$g(t)=f(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\xleftrightarrow{FT}G(j\omega)=F(\omega)\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$$

$$\therefore G(j\omega)=e^{-|\omega|}\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\left|k\frac{2\pi}{T}\right|}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$$

令 $T=2\pi$，$\therefore G(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-|k|}\delta(\omega-k)$　　（A）（2 分）

由傅立叶逆变换定义式　$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ 计算 $g(0)$ 数值为

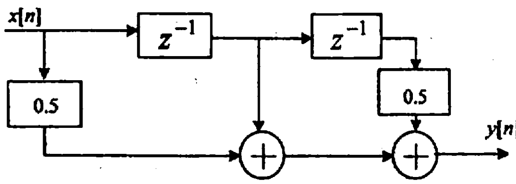
$g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(j\omega)d\omega$，代入（A）式，得：

$$g(0)=\frac{1}{2\pi}[\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-|k|}]=\frac{1}{2\pi}[1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}]=\frac{1}{2\pi}[1+2\times\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}]=\frac{1}{2\pi}[\frac{1+e^{-1}}{1-e^{-1}}]$$ 。（3 分）

注意：用其它方法计算正确者，不扣分。

试题六、（共 15 分）解

（1） 令 $x[n]=\delta[n]$，单位冲激响应 $h[n]=\frac{1}{2}\delta[n]+\delta[n-1]+\frac{1}{2}\delta[n-2]$，（2 分）则系统函数为 $H(z)=\frac{1}{2}+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}$。画出系统实现的方框图如图所示。



（3 分）

（2）系统频率响应为
$$H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1}{2}+e^{-j\omega}+\frac{1}{2}e^{-j\omega 2}=\frac{1}{2}[1+2e^{-j\omega}+e^{-j\omega 2}]$$
$$=\frac{1}{2}[1+e^{-j\omega}]^2=\frac{1}{2}[e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2}]^2e^{-j\omega}=2\cos^2(\frac{\omega}{2})e^{-j\omega}$$

对比 $H(e^{j\omega})=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\theta(\omega)}$，求出 $\left|H(e^{j\omega})\right|=2\cos^2(\frac{\omega}{2})$。（3 分）

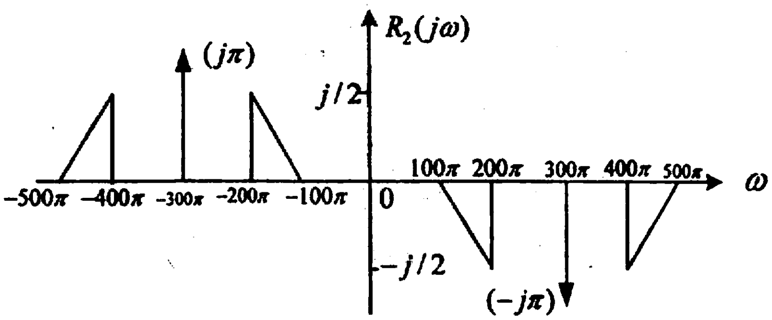
$\theta(\omega)=-\omega$。（3 分）

（3）当 $x[n]=\cos(\pi n),-\infty<n<\infty$ 时，$x[n]=(-1)^n,-\infty<n<\infty$，系统的响应 $y[n]=H(-1)(-1)^n=0$。因为系统函数为 $H(z)=\frac{1}{2}+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}$，$H(-1)=0$。（4 分）

注意：思路正确，但计算错误酌情扣分。

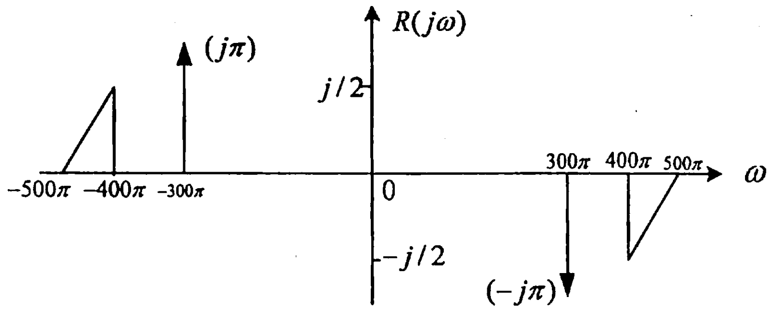
试题七、（共 20 分）解（1）

$$r_2(t)=[x(t)+1]\sin(300\pi t)\xleftrightarrow{FT}R_2(j\omega)=\frac{1}{2}jX(j(\omega+300\pi))-\frac{1}{2}jX(j(\omega-300\pi))+\pi j\delta(\omega+300\pi)-\pi j\delta(\omega-300\pi)$$



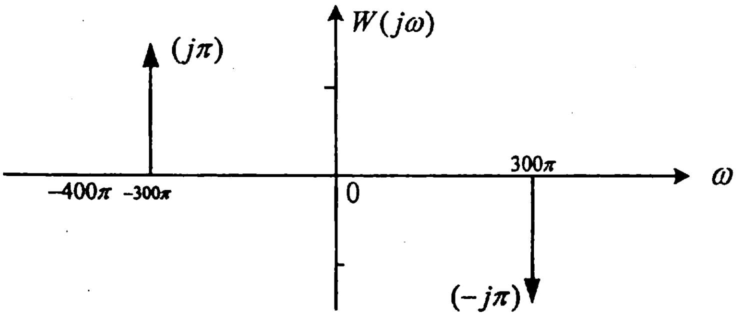
（3 分）

则 $r(t)\xleftrightarrow{FT}R(j\omega)=R_2(j\omega)H(j\omega)$



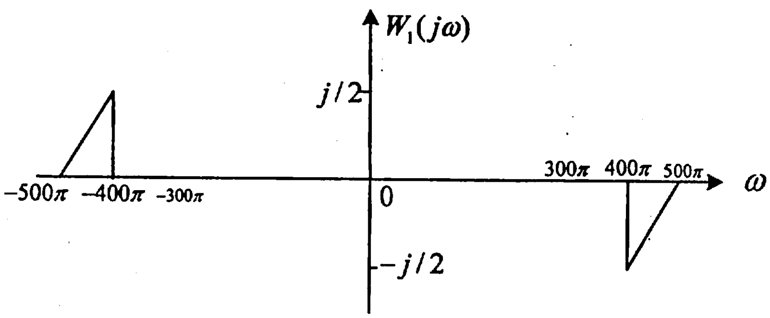
（3 分）

$w(t) \xleftrightarrow{FT} W(\omega) = R(j\omega)H_2(j\omega) = \pi j\delta(\omega+300\pi) - \pi j\delta(\omega-300\pi)$



$w(t) = \sin(300\pi t)$。（2 分）

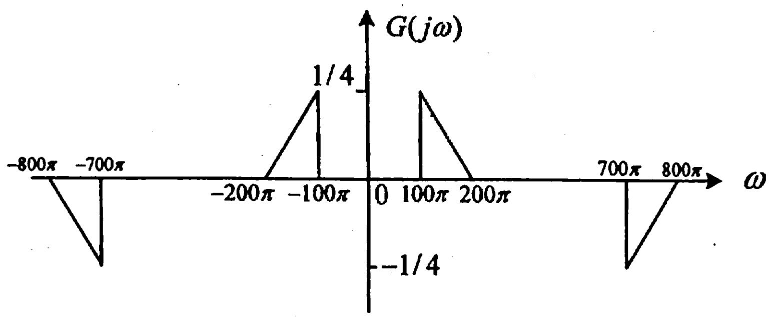
(2) $w_1(t) \xleftrightarrow{FT} W_1(\omega) = R(j\omega)H_1(j\omega)$



（4 分）

$g(t) = w_1(t)w(t)$，又 $w(t) = \sin(300\pi t)$，所以

$$g(t) = w_1(t)\sin(300\pi t) \xleftrightarrow{FT} G(j\omega) = \frac{1}{2} jW_1(j(\omega + 300\pi)) - \frac{1}{2} jW_1(j(\omega - 300\pi))$$

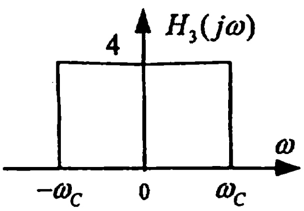


（4分）

（3）设计理想低通滤波器 $H_3(j\omega)$，使 $y(t)=x(t)$。则

$$y(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = G(j\omega)H_3(j\omega) = X(j\omega)$$

给出 $H_3(j\omega)$ 的图形和截止频率的可选范围。



$200\pi < \omega_C < 700\pi$。

（4分）

注意：思路正确，但计算错误酌情扣分。

试题八、（15分）．解 （1） 由零、极点图可得系统函数

$$X(s) = \frac{K(s+4)}{(s+2)(s-1)}, \mathrm{Re}[s]:(\alpha,\beta) \qquad （2分）$$

由 $X(0)=1$ 得：$X(0) = \dfrac{K(0+4)}{(0+2)(0-1)} = 1,\ K = -2$（2分）

$$X(s)=\frac{-2(s+4)}{(s+2)(s-1)},\mathrm{Re}[s]:(-2,1)$$

（2分）

$$=\frac{4/3}{s+2}+\frac{-10/3}{s-1}$$

反 LT 得 $x(t)=\frac{4}{3}e^{-2t}u(t)+\frac{10}{3}e^{t}u(-t)$

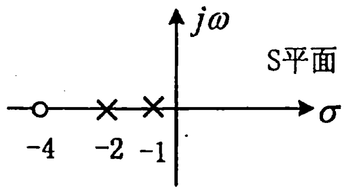
（2分）

（2）引入全通函数 $A(s)=\frac{(s-1)}{(s+1)},\mathrm{Re}[s]:(-1,\infty)$，则 $|A(j\omega)|=1$。

$$G(s)=X(s)A(s)=\frac{-2(s+4)}{(s+2)(s+1)},\mathrm{Re}[s]:(-1,\infty)$$

$$=\frac{4}{s+2}+\frac{-6}{s+1}$$

（3分）



（2分）

$$g(t)=4e^{-2t}u(t)-6e^{-t}u(t)$$

显然，因果信号 $g(t)$ 与 $x(t)$ 有相同的幅度频谱，即 $|G(j\omega)|=|X(j\omega)|$。

显然，$-g(t)$ 也是另一个正确答案。（2分）

注意：思路正确，但计算错误酌情给分。仅答 $g(t)$ 或 $-g(t)$ 不扣分。

试题九、（共15分）解

（1）　　单位冲激响应

$h(t)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t}[\delta(\tau)-\delta(\tau-T)]\,d\tau=\frac{1}{T}[u(t)-u(t-T)]$，其波形如图9所示。

单位阶跃响应：$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\frac{1}{T}[tu(t)-(t-T)u(t-T)]$

画出其波形如图9-1所示。（5分）

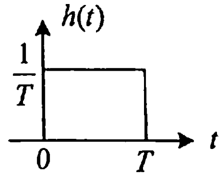


图9

（2）　$x(t)=u(t)-u(t-2T)$，响应

$y(t)=x(t)*h(t)$，画出其波形如图 9-2 所示。（5 分）

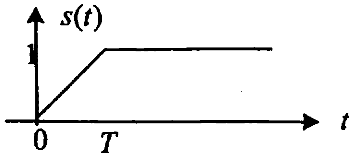


图9-1

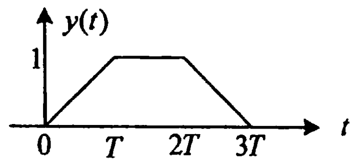


图9-2

（3）若系统响应 $y(t)$，$=u(t)-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t-nT)$ 输入 $x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta(t-nT)$，响应的拉普拉斯变换表达式为

$$Y(s)=X(s)H(s)$$

$$H(s)=\frac{1}{Ts}(1-e^{-sT}),\mathrm{Re}[s]:(-\infty,\infty),\quad F(s)=\frac{1}{1+e^{-sT}},\mathrm{Re}[s]>0$$

$$Y(s)=X(s)H(s)=\frac{1}{Ts}(1-e^{-sT})\times\frac{1}{1+e^{-sT}},\mathrm{Re}[s]>0$$

（5 分）

注意：思路正确，但计算错误酌情给分。

试题十、（共 15 分）解

（1） 因为：

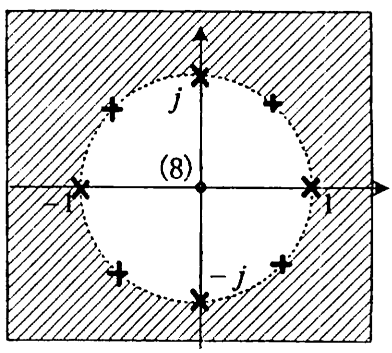
$$\frac{1}{8}\sum_{\ell=0}^{7}e^{j\frac{2\pi}{8}n\ell}=\frac{1}{8}\times\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{8}n\times 8}}{1-e^{j\frac{2\pi}{8}n}}=\begin{cases}1, & n=8r\\ 0 & n\neq 8r\end{cases}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-8r],r\text{ 为整数。（2 分）}$$

所以 $x[n]=[\sum_{\ell=0}^{7}e^{j\frac{2\pi}{8}n\ell}]u[n]=\sum_{r=0}^{\infty}\delta[n-8r]$。Z 变换表达式为

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-8}},|z|>1,\qquad \text{（3 分）}$$

零点：z=0（8 阶），极点 $z_k=e^{j\frac{2\pi}{8}k},k=0,1,2,\dots,7$。

画出其收敛区、和分布图。（4 分）



Z-Plane

（2） 将$x[n]$输入一差分方程如下的因果系统，

$$y[n]+0.5y[n-1]=x[n]$$

求出系统的单位冲激响应$h[n]=(-0.5)^n u[n]$，（3 分）

计算该系统零状态响应在$n=10$处的数值。

$$y[10]=\sum_{m=0}^{10}x[m]h[10-m]=x[0]h[10]+x[8]h[2]=(-0.5)^{10}+(-0.5)^{2}$$

$$=\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{2}}=\frac{1+2^{8}}{2^{10}}=\frac{257}{1024}$$

（3 分）

注意：思路正确，但计算错误酌情给分。