



第2章 控制系统的数学模型

数学模型：描述系统输入输出变量及内部各变量间关系的数学表达式

数学模型的形式：

连续系统：微分方程，方框图，传递函数，频率特性，状态方程等

离散系统：差分方程，脉冲传递函数，状态方程

数学模型的建立方法：解析法和实验法



2-1 控制系统的时域数学模型

2-1-1 元件和系统的微分方程

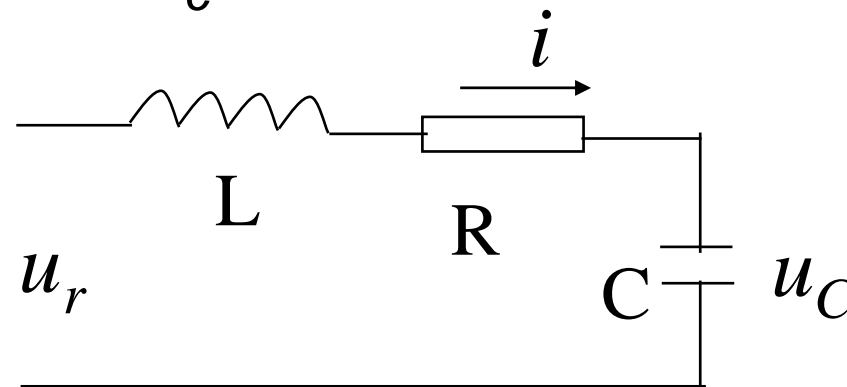
- **电气元件组成的系统（电路系统）**

列写系统运动方程前，要先确定输入变量、输出变量



• R-L-C串联电路

输入变量: u_r 输出变量: u_C



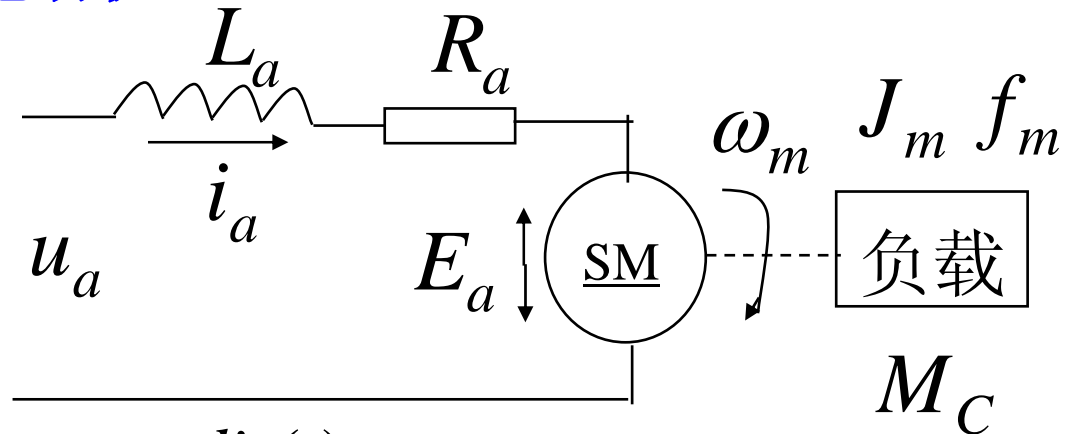
$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) = u_r(t), \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_r(t)$$



机电系统微分方程

电枢电压控制直流电动机



电枢回路电压平衡方程 $L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + E_a(t) = u_a(t)$

$$E_a(t) = C_e \omega_m(t)$$

电磁转矩方程 $M_m = C_m i_a(t)$

电动机轴上转矩平衡方程 $J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_m \omega_m(t) = M_m - M_C(t)$



- 若以角速度 ω_m 为输出量、电枢电压 u_a 为输入量，消去中间变量，直流电动机的微分方程为

$$L_a J_m \frac{d^2 \omega_m(t)}{dt^2} + (L_a f_m + R_a J_m) \frac{d\omega_m(t)}{dt} +$$

$$(R_a f_m + C_m C_e) \omega_m(t) = C_m u_a(t) - L_a \frac{dM_C(t)}{dt} - R_a M_C(t)$$

$$\frac{L_a J_m}{R_a f_m + C_m C_e} \frac{d^2 \omega_m(t)}{dt^2} + \frac{L_a f_m + R_a J_m}{R_a f_m + C_m C_e} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t)$$

$$= \frac{C_m}{R_a f_m + C_m C_e} u_a(t) - \frac{L_a}{R_a f_m + C_m C_e} \frac{dM_C(t)}{dt} - \frac{R_a}{R_a f_m + C_m C_e} M_C(t)$$



$$\begin{aligned} T_L T_m \frac{d^2 \omega_m(t)}{dt^2} + (T_L \frac{R_a f_m}{R_a f_m + C_m C_e} + T_m) \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) \\ = K_1 u_a(t) - K_3 \frac{dM_C(t)}{dt} - K_2 M_C(t) \end{aligned}$$

$$T_m = \frac{R_a J_m}{(R_a f_m + C_m C_e)}, \quad K_1 = \frac{C_m}{(R_a f_m + C_m C_e)}$$

$$K_2 = \frac{R_a}{(R_a f_m + C_m C_e)}, \quad K_3 = \frac{L_a}{(R_a f_m + C_m C_e)}, \quad T_L = \frac{L_a}{R_a},$$



若电枢回路的电感可以忽略不计

$$T_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_1 u_a(t) - K_2 M_C(t)$$

$$T_m = \frac{R_a J_m}{(R_a f_m + C_m C_e)}, \quad K_1 = \frac{C_m}{(R_a f_m + C_m C_e)}$$

$$K_2 = \frac{R_a}{(R_a f_m + C_m C_e)}$$

若电枢回路电阻和电动机的转动惯量都很小，可忽略不计，则上式可进一步简化

$$\omega_m(t) = \frac{1}{C_e} u_a(t)$$



若以 θ 为输出

$$T_m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d \theta}{dt} = K_1 u_a(t) - K_2 M_C$$

负载忽略不计

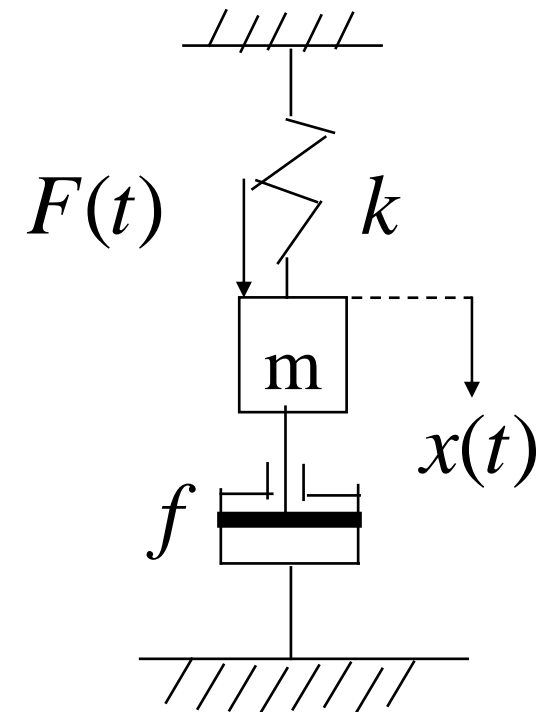
$$T_m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d \theta}{dt} = K_1 u_a(t)$$



弹簧-质量-阻尼器 (S-M-D) 机械位移系统

- 求质量 m 在外力 F 的作用下，质量 m 的位移 x 的运动。
设系统已处于平衡状态，
相对于初始状态的
位移、速度、加速度

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &= F(t) - F_1(t) - F_2(t) \\ &= F(t) - f \frac{dx(t)}{dt} - Kx(t) \end{aligned}$$



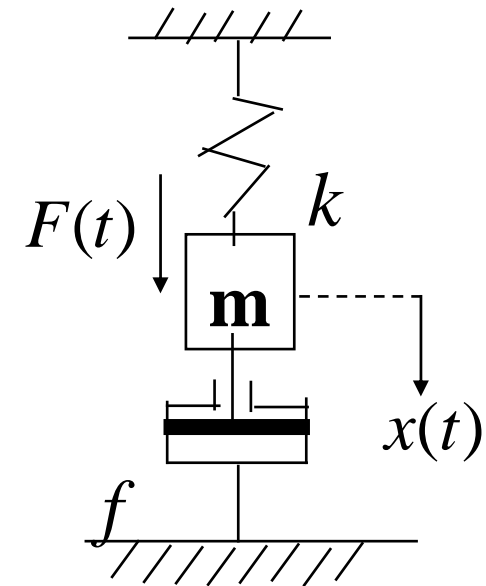


$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = F(t)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{K} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{f}{K} \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \frac{1}{K} F(t)$$

$$T^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \frac{1}{K} F(t)$$

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \zeta = \frac{f}{2\sqrt{mk}}$$





* 比较 R-L-C 电路运动方程与 M-S-D 机械系统运动方程

相似性

R-L-C 电路系统:

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_r(t)$$

相似系统: 揭示了不同物理现象之间的相似关系

M-S-D 机械系统:

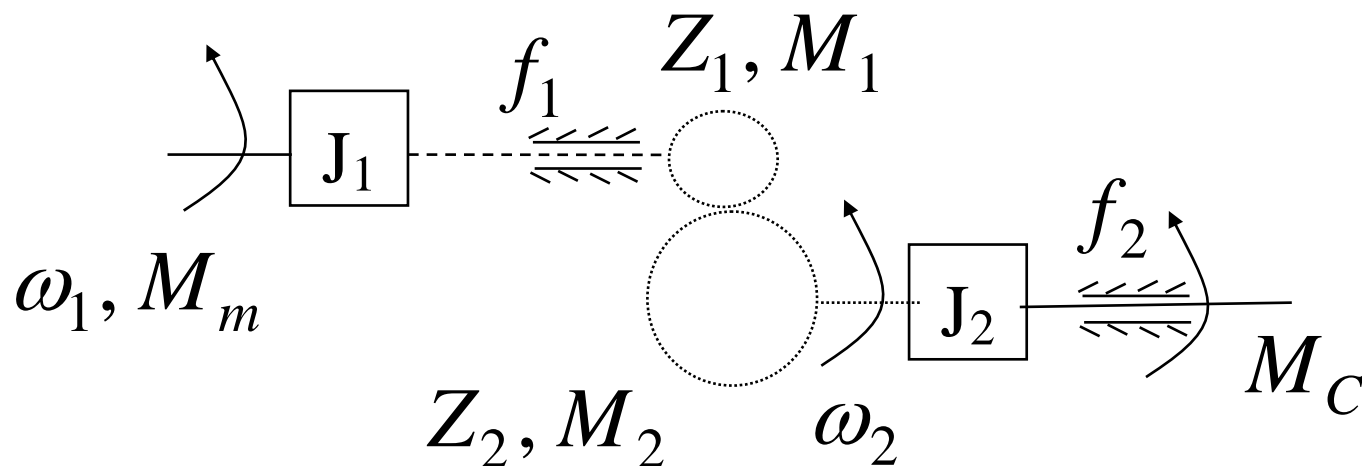
$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = F(t)$$

$$\frac{m}{K} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{f}{K} \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \frac{1}{K} F(t)$$

齿轮系的运动方程



用途: 齿轮系常用来实现减速和增大力矩的目的



基本关系式

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2 \quad , \quad \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}$$
$$\omega_2 = \frac{z_1}{z_2} \omega_1 \quad , \quad M_1 = \frac{z_1}{z_2} M_2$$



齿轮1和齿轮2的运动方程

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + f_1 \omega_1 + M_1 = M_m \quad (1)$$

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + f_2 \omega_2 + M_C = M_2 \quad (2)$$

(1) 以齿轮1的角速度 ω_1 为输出，外部 M_m 为输入

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + f_1 \omega_1 + \frac{z_1}{z_2} M_2 = M_m \quad J_2 \frac{z_1}{z_2} \frac{d\omega_1}{dt} + f_2 \frac{z_1}{z_2} \omega_1 + M_C = M_2$$

$$\left[J_1 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 J_2 \right] \frac{d\omega_1}{dt} + \left[f_1 + \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 f_2 \right] \omega_1 = M_m - \left(\frac{z_1}{z_2} \right) M_C$$



$$J \frac{d\omega_1}{dt} + f\omega_1 = M_m - M'_C$$

$$J = J_1 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 J_2 \quad M'_C = \frac{z_2}{z_1} M_C \quad f = f_1 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 f_2$$

J , f , M'_C 分别是折算到齿轮1的等效转动惯量、等效粘性摩擦系数及等效负载转矩。当速比越大，折算的等效系数就越小。在一定条件下，后级的负载效应可忽略不计。

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + f_1\omega_1 = M_m$$



(2) 以齿轮2的角速度 ω_2 为输出，外部 M_m 为输入

$$\left[J_2 + \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 J_1 \right] \frac{d\omega_2}{dt} + \left[f_2 + \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 f_1 \right] \omega_2 = \left(\frac{z_2}{z_1} \right) M_m - M_C$$

- 列写元件微分方程的步骤：
 - (1) 确定元件的输入量、输出量
 - (2) 由物理或化学规律，列写微分方程；
 - (3) 消去中间变量，得到输入、输出之间关系的微分方程

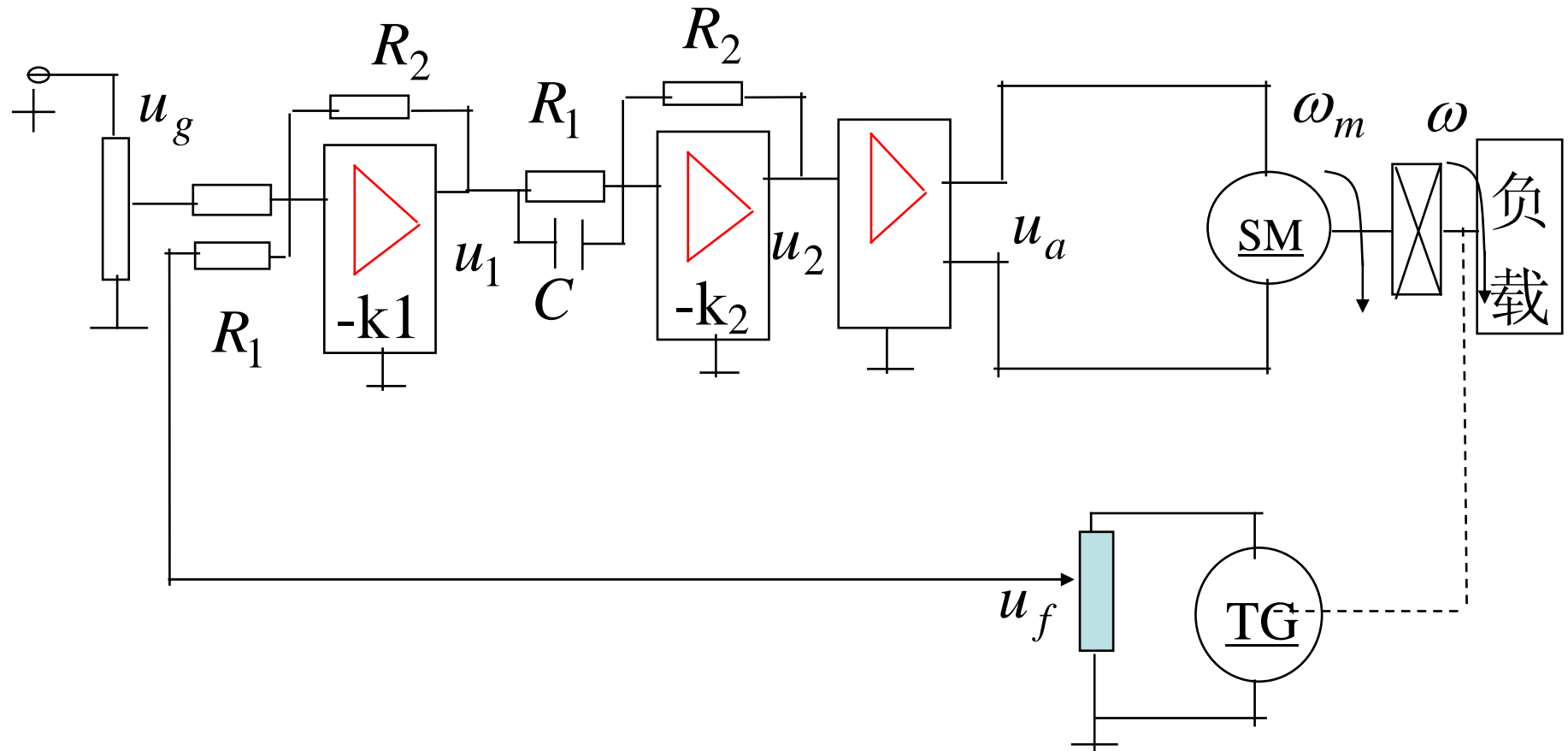


基本步骤:

- (1) 由系统原理图画出系统方框图或直接确定系统中各个基本部件（元件）
- (2) 列写各方框图的输入输出之间的微分方程，要注意前后连接的两个元件中，后级元件对前级元件的负载效应
- (3) 消去中间变量



速度控制系统的微分方程





系统输出： ω 系统输入参考量： u_g

控制系统的主要部件（元件）： 给定电位器、运放1、运放2、功率放大器、直流电动机、减速器、测速发电机

运放1 $u_1 = K_1(u_g - u_f) = K_1 u_e$, $K_1 = \frac{R_2}{R_1}$

运放2 $u_2 = K_2\left(\tau \frac{du_1}{dt} + u_1\right)$, $\tau = R_1 C$, $K_2 = \frac{R_2}{R_1}$

功放 $u_a = K_3 u_2$

直流电动机 $T_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_m = K_m u_a - K_C M'_C$



減速器（齿轮系）

$$\omega = \frac{1}{i} \omega_m$$

测速发电机

$$u_t = K_t \omega$$

消去中间变量

$$u_t \quad u_1 \quad u_2 \quad u_a \quad \omega_m$$

控制系统数学模型（微分方程），令以下的参数为

$$T'_m = \frac{(iT_m + K_1 K_2 K_3 K_m K_t \tau)}{(i + K_1 K_2 K_3 K_m K_t)}$$

$$K'_g = \frac{K_1 K_2 K_3 K_m \tau}{(i + K_1 K_2 K_3 K_m K_t)}$$

$$K_g = \frac{K_1 K_2 K_3 K_m}{(i + K_1 K_2 K_3 K_m K_t)}$$



$$K'_C = \frac{K_C}{(i + K_1 K_2 K_3 K_m K_t)}$$

$$T'_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = K'_g \frac{du_g}{dt} + K_g u_g - K'_C M'_C$$



线性系统的性质: 具有可叠加性、均匀性 (齐次性)

线性定常微分方程求解方法

直接求解法: 通解+特解

自由解+强迫解 (零输入响应+零状态响应)

变换域求解法: Laplace 变换方法



- 实际的物理元件都存在一定的非线性，例如
弹簧系数是位移的函数 $K(x)$
电阻、电容、电感与工作环境、工作电流有关
电动本身的摩擦、死区

小偏差线性化法 设连续变化的非线性函数 $y = f(x)$

平衡状态A为工作点

$$y_0 = f(x_0), x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$$

$y = f(x)$ 在平衡状态点运用台劳级数展开为



$$y = f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right)_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0) \quad \longrightarrow \quad \Delta y = K \Delta x$$

- 具有两个自变量的非线性函数的线性化

$$y = f(x_1, x_2) \approx f(x_{10}, x_{20}) + \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right)_{(x_{10}, x_{20})} (x_1 - x_{10}) \\ + \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right)_{(x_{10}, x_{20})} (x_2 - x_{20})$$

增量线性方程 $\Delta y = K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_2$



- 微分方程的解：齐次方程的通解+特解
- 通解由特征根所决定，若n阶微分方程的特征根均为单根， $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$
称 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ 为该微分方程的运动模态

- 特征根具有重根的情况时的运动模态

$$t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots$$

- 特征根具有共轭复根时的运动模态

$$e^{(\sigma + j\omega)t}, e^{(\sigma - j\omega)t} \quad e^{\sigma t} \sin \omega t, e^{\sigma t} \cos \omega t$$

2-2 控制系统的复域数学模型



复域数学模型 \longleftrightarrow 传递函数

传递函数是经典控制理论中最基本和最重要的概念
频率法、根轨迹法

一、传递函数的定义与性质

定义：设线性定常系统由n阶线性定常微分方程描述：

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} c(t) + a_n c(t) \\ & = b_0 \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_{m-1} \frac{d}{dt} r(t) + b_m r(t) \end{aligned}$$



在零初始条件下，由传递函数的定义得

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

例1：试求：*RLC* 串联无源网络的传递函数 $G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)}$

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_r(t)$$

$$(LCs^2 + RCs + 1)U_c(s) = U_r(s) \quad G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



例2 试求：电枢控制直流电动机的传递函数

$$G(s) = \frac{\Omega_m(s)}{U_a(s)} \quad T_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_1 u_a(t) - K_2 M_C(t)$$

根据线性叠加原理，分别研究 $U_a(t)$ 到 $\omega_m(t)$ 和 $M_c(t)$ 到 $\omega_m(t)$ 的传递函数

$$G(s) = \frac{\Omega_m(s)}{U_a(s)} = \frac{K_1}{T_m s + 1} \quad G_m(s) = \frac{\Omega_m(s)}{M_c(s)} = \frac{-K_2}{T_m s + 1}$$

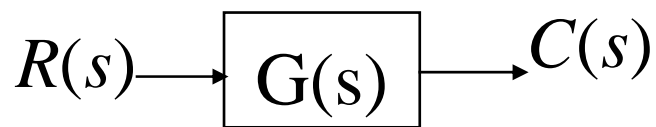


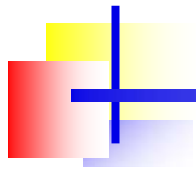
$$\begin{aligned}\omega_m(t) &= L^{-1}[\Omega_m(s)] = L^{-1}\left[\frac{K_1}{T_m s + 1} U_a(s) - \frac{K_2}{T_m s + 1} M_c(s)\right] \\ &= L^{-1}\left[\frac{K_1}{T_m s + 1} U_a(s)\right] + L^{-1}\left[-\frac{K_2}{T_m s + 1} M_c(s)\right] = \omega_1(t) + \omega_2(t)\end{aligned}$$

传递函数的性质

(1) 因果系统的传递函数是s的有理真分式函数，具有复变函数的性质。

(2) 传递函数取决于系统或元件的结构和参数，与输入信号的形式无关。





(3) 传递函数与微分方程可相互转换。 $\frac{d}{dt} = p, \quad p \Leftrightarrow s$

(4) 传递函数 $G(s)$ 的Laplace反变换是系统的脉冲响应 $g(t)$ 。

二、传递函数的零点与极点

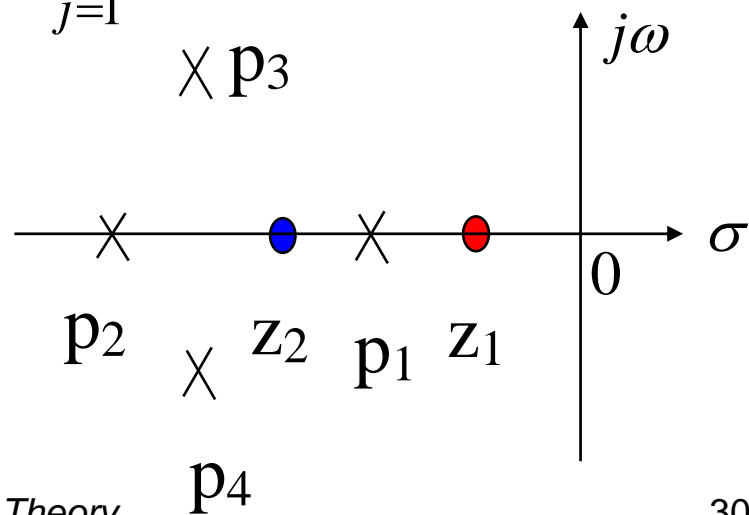


$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$= \frac{b_0 (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_0 (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$$K^* = \frac{b_0}{a_0}$$

称为传递系数或根轨迹系数





传递函数写成因子连乘积的形式

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \\ &= \frac{b_m (\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\zeta_2 \tau_2 s + 1) \cdots (\tau_i s + 1)}{a_n (T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1) \cdots (T_j s + 1)} \end{aligned}$$

传递函数增益（或传递系数或放大系数）：

$$K = \frac{b_m}{a_n} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)}, \quad s = 0$$



三、传递函数极点和零点对输出的影响

传递函数的极点就是微分方程的特征根，极点决定了系统自由运动的模态，而且在强迫运动中也会包含这些自由运动的模态。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)}, \quad z_1 = -3, \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -2$$

自由运动的模态 e^{-t}, e^{-2t} 输入函数 $r(t) = r_1 + r_2 e^{-5t}$

$$R(s) = \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+5}$$



零状态响应 $c(t) = L^{-1}[G(s)R(s)] = L^{-1}\left[\frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)}\left(\frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+5}\right)\right]$

$$= 9r_1 - r_2 e^{-5t} + (3r_2 - 12r_1)e^{-t} + (3r_1 - 2r_2)e^{-2t}$$

前两项具有与输入函数相同的模态

后两项由极点决定的自由运动模态，其系数与输入函数有关

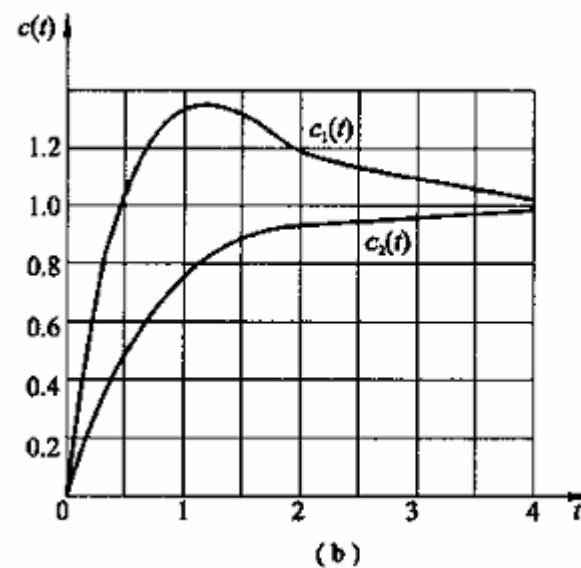
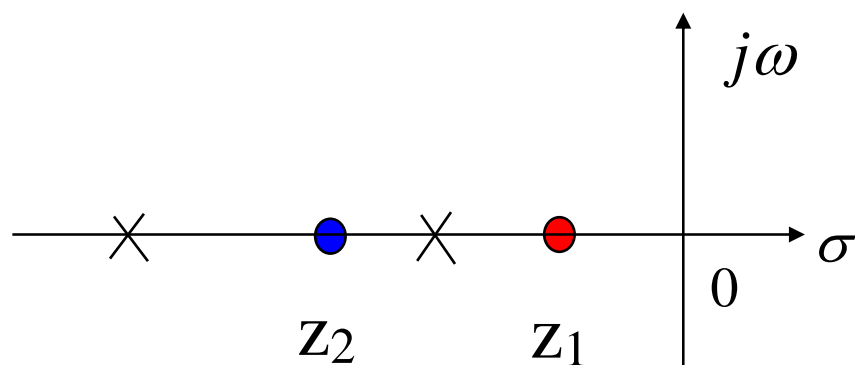


传递函数的零点影响各模态在响应中所占的比重，例如

$$G_1(s) = \frac{4s+2}{(s+1)(s+2)} \quad z_1 = -0.5, \quad G_2(s) = \frac{1.5s+2}{(s+1)(s+2)} \quad z_2 = -1.33$$

输入信号 $r(t) = 1(t)$ ，零状态响应分别为

$$c_1(t) = 1 + 2e^{-t} - 3e^{-2t}, \quad c_2(t) = 1 - 0.5e^{-t} - 0.5e^{-2t}$$





各个模态在两个系统输出响应中所占的比重不同，取决于零点相对于极点的距离。

例如：
$$G(s) = K^* \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2}$$

$$A_1 = (s - p_1)G(s) \Big|_{s=p_1} = K^* (-z_1) / (-p_2) = K^* \frac{z_1}{p_2}$$

$$A_2 = (s - p_2)G(s) \Big|_{s=p_2} = K^* (-z_1) / (-p_1) = K^* \frac{z_1}{p_1}$$

四、典型元部件的传递函数



电位器 一种线位移或角位移变换为电压量的装置

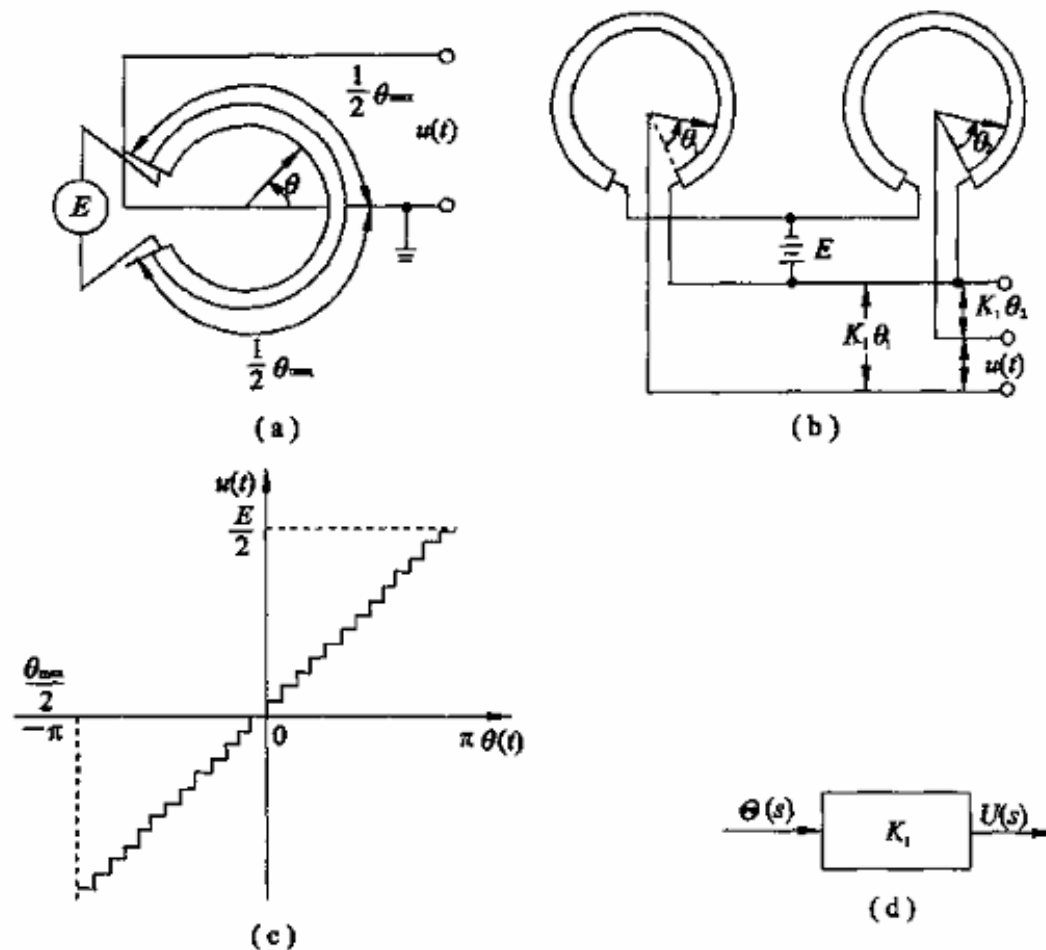


图 2-10 电位器及其特性



单个线绕式圆环电位器（角位移型）空载时的传递函数

$$u(t) = K_1 \theta(t) , \quad K_1 = E / \theta_{\max}, \quad G(s) = \frac{U(s)}{\Theta(s)} = K_1 \quad (V / rad)$$

由一对电位器组构成的误差检测器，空载时的传递函数

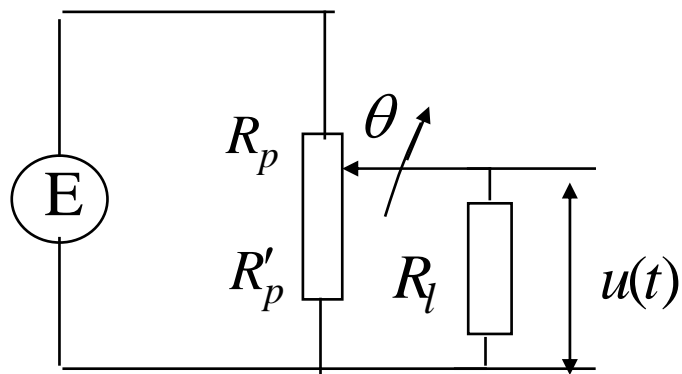
$$u(t) = u_1(t) - u_2(t) = K_1 [\theta_1(t) - \theta_2(t)] = K_1 \Delta \theta(t)$$

$$G(s) = \frac{U(s)}{\Delta \Theta(s)} = K_1$$



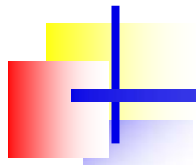
当负载不能忽略时，必须考虑负载效应。

考虑具有负载效应时的电位器输入输出关系



$$u(t) = E \frac{(R'_p // R_l)}{(R'_p // R_l) + (R_p - R'_p)}$$

$$R'_p // R_l = \frac{R'_p R_l}{R'_p + R_l}$$



$$\begin{aligned} u(t) &= E \frac{R'_p R_l}{R'_p R_p + R_l R_p - R_p'^2} = \frac{E}{\frac{R_p}{R'_p} + \frac{R_p}{R_l} \left(1 - \frac{R'_p}{R_p}\right)} \\ &= \frac{E \theta(t)}{\theta_{\max} \left[1 + \frac{R_p}{R_l} \frac{\theta(t)}{\theta_{\max}} \left(1 - \frac{\theta(t)}{\theta_{\max}}\right)\right]} \end{aligned}$$

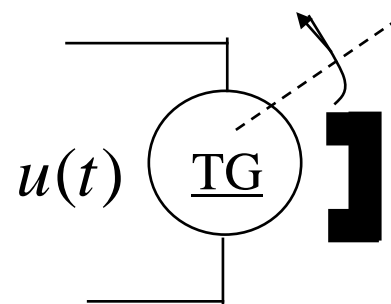
$u(t) \sim \theta(t)$ 不再具有线性关系，若 R_l 很大，例如

$$R_l \geq 10R_p, \quad \text{则有} \quad u(t) \approx E\theta(t) / \theta_{\max} = K_1\theta(t)$$

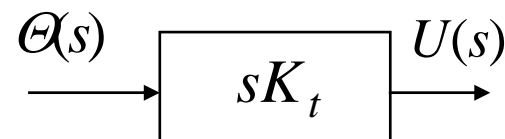


测速发电机 测量角速度并转换为电压量的装置，一般有交流和直流两种。

* 永磁式直流测速发电机:



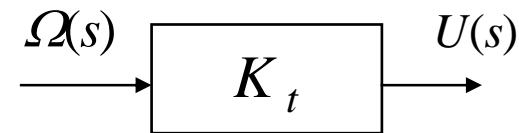
$$u(t) = K_t \omega(t) = K_t \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (mV / rad / s)$$



$$G(s) = \frac{U(s)}{\Theta(s)} = K_t s$$

或

$$G(s) = \frac{U(s)}{\Omega(s)} = K_t$$



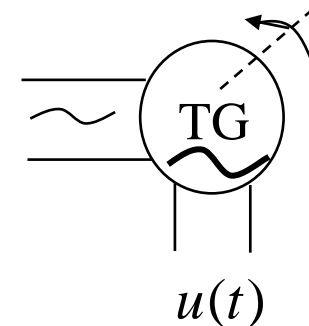


交流测速发电机 在定子上有两个互相垂直放置的线圈

激磁线圈：输入频率一定、电压一定

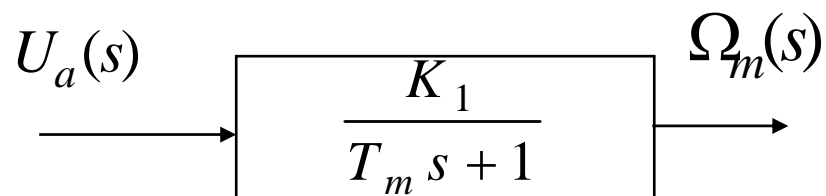
输出线圈：产生与角速度成比例的交流电压 $u(t)$

$$u(t) = K_t \omega(t) = K_t \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (mV / rad / s)$$

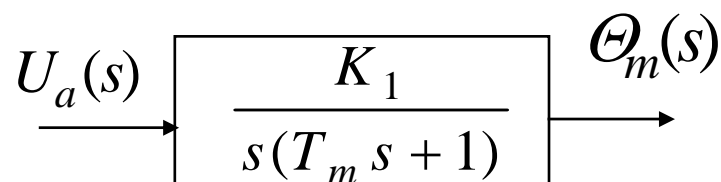




电枢控制直流伺服电动机

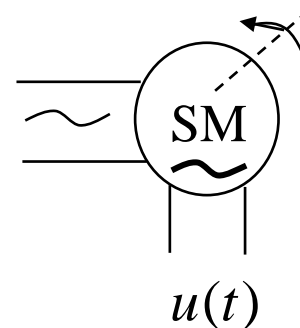


$$G(s) = \frac{\Omega_m(s)}{U_a(s)} = \frac{K_1}{T_m s + 1}$$



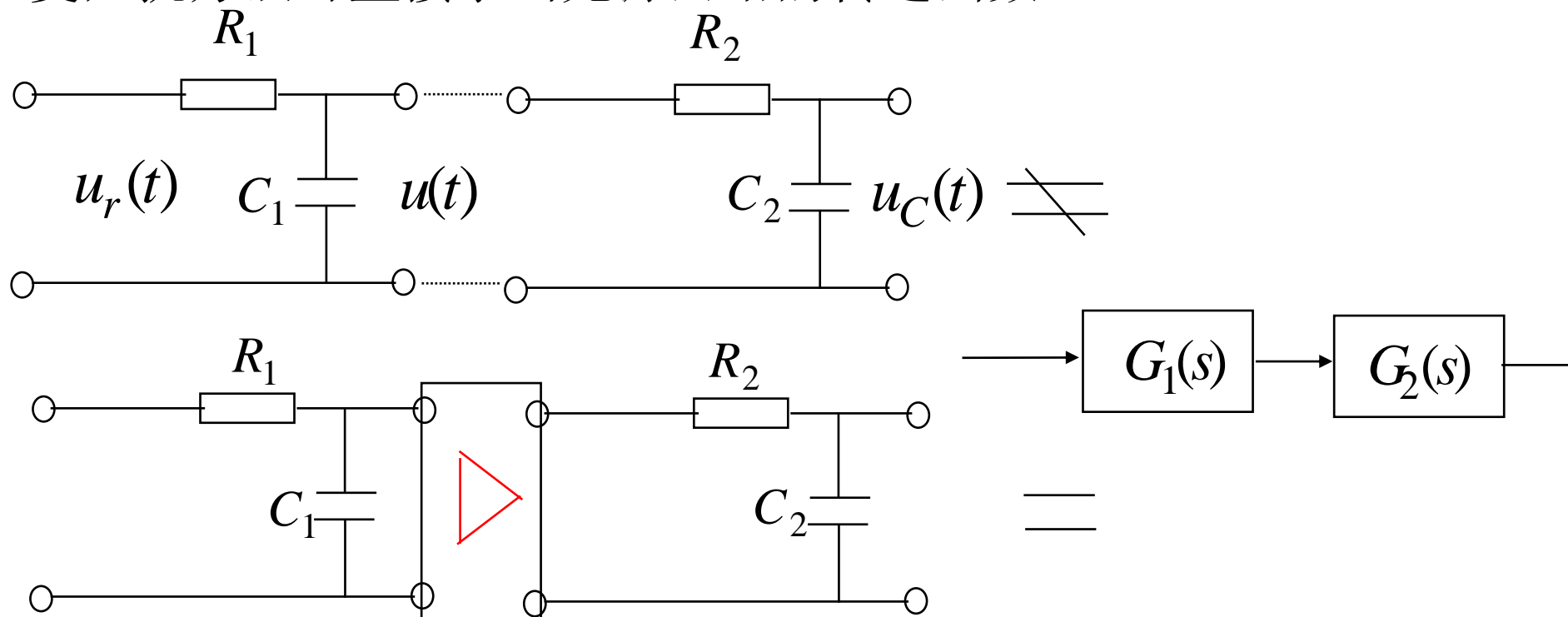
$$G(s) = \frac{\Theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{K_1}{s(T_m s + 1)}$$

两相交流伺服电动机 (略)





无源网络 用途：在控制系统中引入无源网络作为校正元件，用复阻抗方法可直接求出无源网络的传递函数



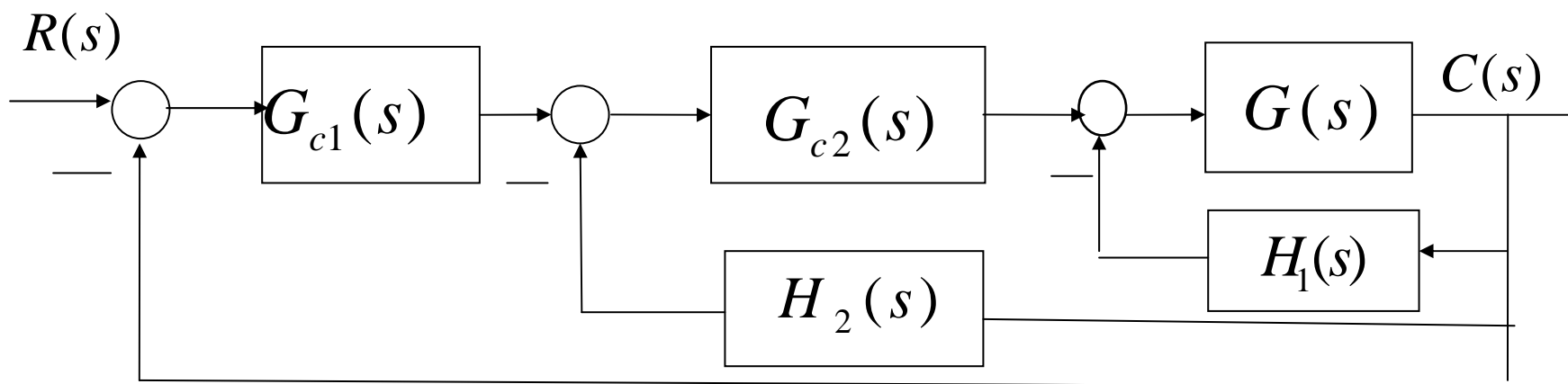


2-3 控制系统的结构图与信号流图

控制系统的结构图和信号流图：

描述系统各元部件之间的信号传递关系的一种图形化表示

对于复杂控制系统的信号传递过程给出了一种直观的描述





系统结构图的组成与绘制

系统结构图一般有四个基本单元组成：

- (1) 信号线；
- (2) 引出点（或测量点）；
- (3) 比较点（或信号综合点）表示对信号进行叠加；
- (4) 方框（或环节）表示对信号进行变换，方框中写入元部件或系统的传递函数。



电压测量装置方框结构图

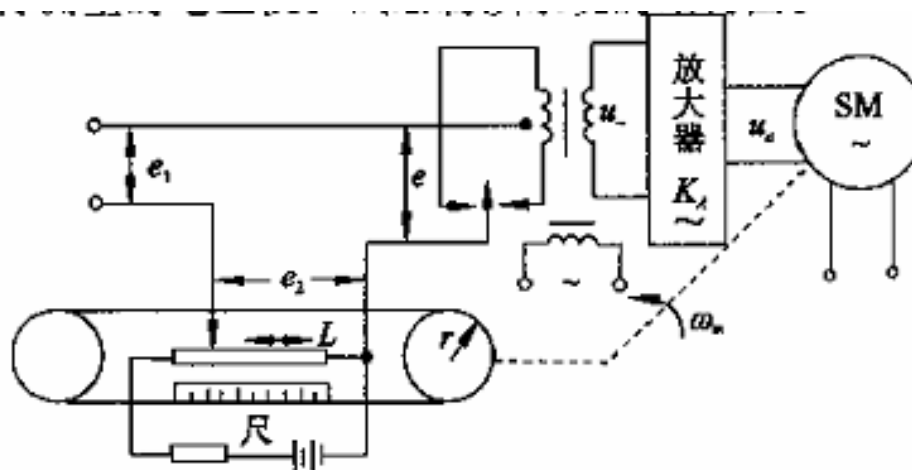


图 2 22 电压测量装置原理图

被测电压： e_1 指示的测量电压： e_2

电压测量误差： $e = e_1 - e_2$

系统组成：

比较电路、机械调制器、放大器、两相交流伺服电动机、指针机构



比较电路: $E(s) = E_1(s) - E_2(s)$

调制器: $U_{\sim}(s) = E(s)$

放大器: $U_A(s) = K_A E(s)$

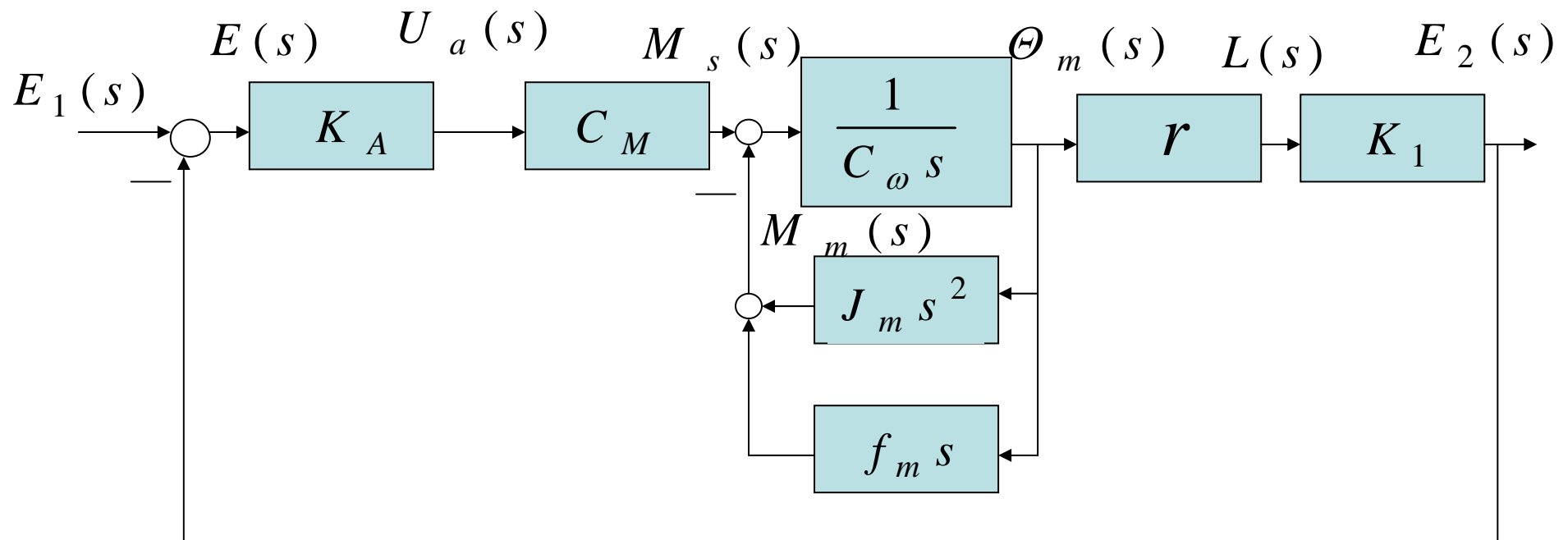
两相伺服电动机: $M_m(s) = -C_{\omega} s \Theta_m(s) + M_s$

$M_s = C_M U_a(s)$ $M_m = J_m s^2 \Theta_m(s) + f_m s \Theta_m(s)$



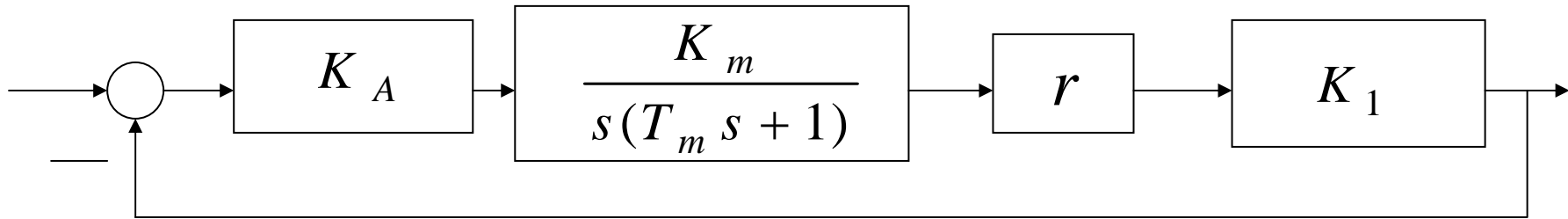
绳轮传动机构: $L(s) = r \Theta_m(s)$

测量电位器: $E_2(s) = K_1 L(s)$





系统结构图





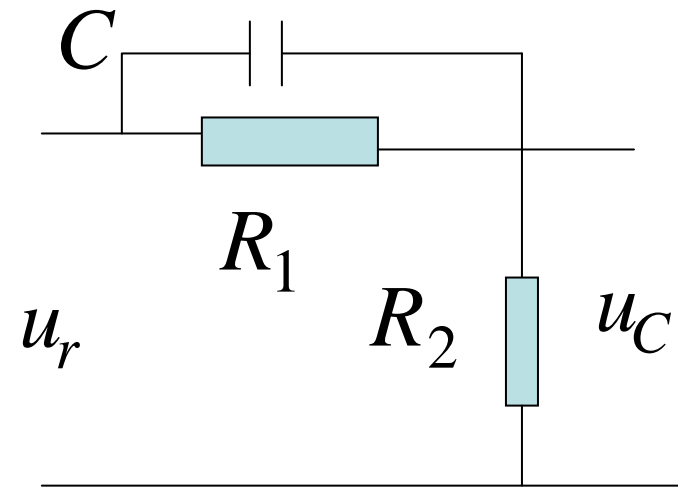
无源网络的方框结构图

$$U_r(s) = I_1(s)R_1 + U_C(s)$$

$$U_C(s) = I(s)R_2$$

$$I_2(s) \frac{1}{Cs} = I_1(s)R_1$$

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$



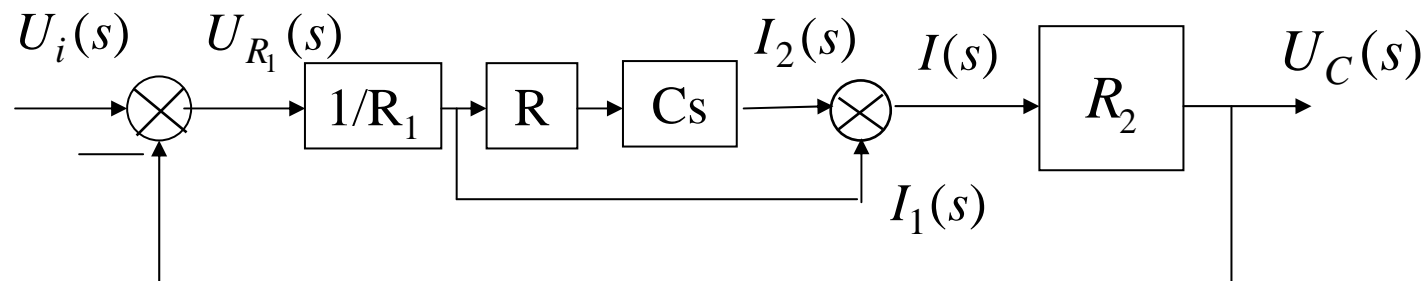


$$U_r(s) = I_1(s)R_1 + U_C(s)$$

$$U_C(s) = I(s)R_2$$

$$I_2(s) \frac{1}{Cs} = I_1(s)R_1$$

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$



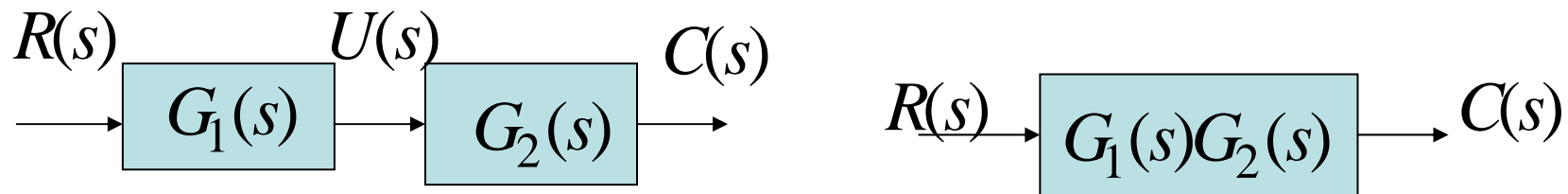
1、结构图的等效变换和简化



任何复杂的系统结构图，各方框之间的基本连接方式只有串联、并联和反馈连接三种。方框结构图的简化是通过移动引出点、比较点，交换比较点，进行方框运算后，将串联、并联和反馈连接的方框合并。

等效变换的原则：变换前后的变量之间关系保持不变

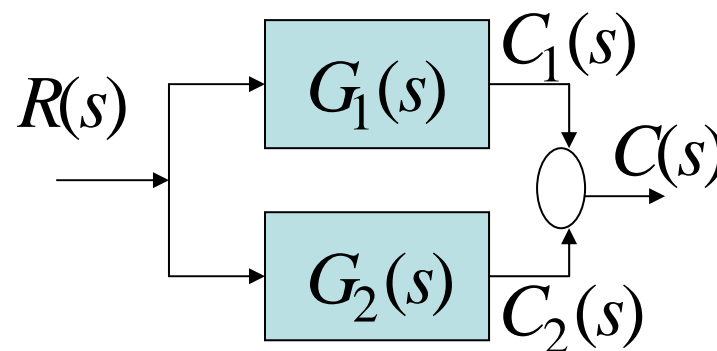
(1) 串联等效



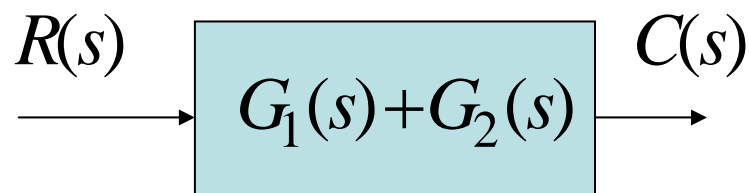
$$C(s) = G_2(s)U(s) = G_2(s)G_1(s)R(s) \quad G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s)$$



(2) 并联等效



$$C(s) = G_1(s)R(s) + G_2(s)R(s) = [G_1(s) + G_2(s)]R(s)$$

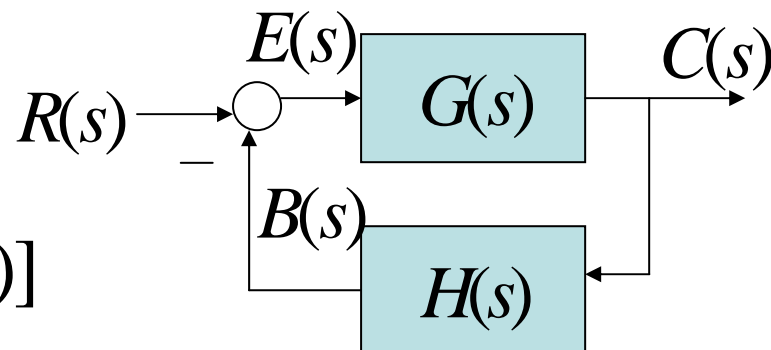


$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$



(3) 反馈等效

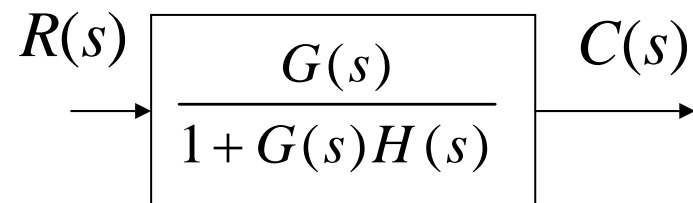
负反馈:



$$C(s) = G(s)E(s) = G(s)[R(s) - B(s)]$$

$$= G(s)R(s) - G(s)H(s)C(s)$$

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) = \Phi(s)R(s)$$



负反馈时闭环传递函数: $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$

正反馈时闭环传递函数: $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$



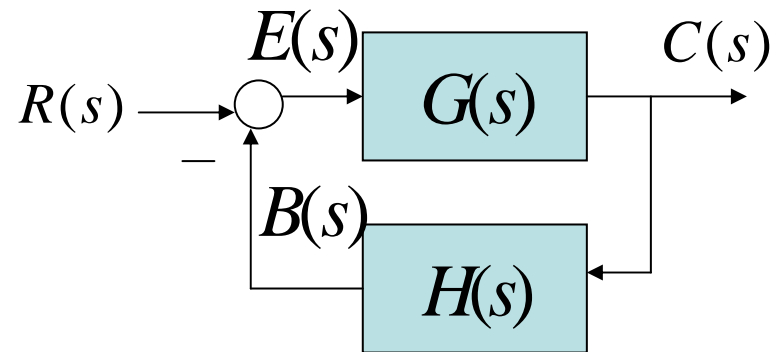
闭环传递函数：
$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$

前向通道传递函数： 输入端对应比较器输出 $E(s)$ 到输出端输出 $C(s)$ 所有传递函数的乘积，记为 $G(s)$

反馈通道传递函数： 输出 $C(s)$ 到输入端比较器的反馈信号 $B(s)$ 之间的所有传递函数之乘积，记为 $H(s)$

开环传递函数： 反馈引入点断开时，输入端对应比较器输出 $E(s)$ 到输入端对应的比较器的反馈信号 $B(s)$ 之间所有传递函数的乘积，记为 $G_K(s)$, $G_K(s) = G(s)H(s)$

$$B(s)/E(s) = G_k(s) = H(s)G(s)$$





(4) 比较点和引出点的移动

移动前后保持信号的等效性

* p.49 表2-1 结构图等效变换的规则

p.50 例2-14 简化系统结构图，并求系统传递函数 $C(s)/R(s)$

简化过程：

(1) $G_3(s)$ 和 $G_4(s)$ 之间的引出点后移，由 $G_3(s)$ 、 $G_4(s)$ 和 $H_3(s)$ 组成的内反馈回路计算等效传递函数：

$$G_{34}(s) = \frac{G_3(s)G_4(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)H_3(s)}$$



(2) 将 $G_2(s)$ 、 $G_{34}(s)$ 和 $H_2(s) \times 1/ G_4(s)$ 组成的内反馈回路简化, 计算等效传递函数

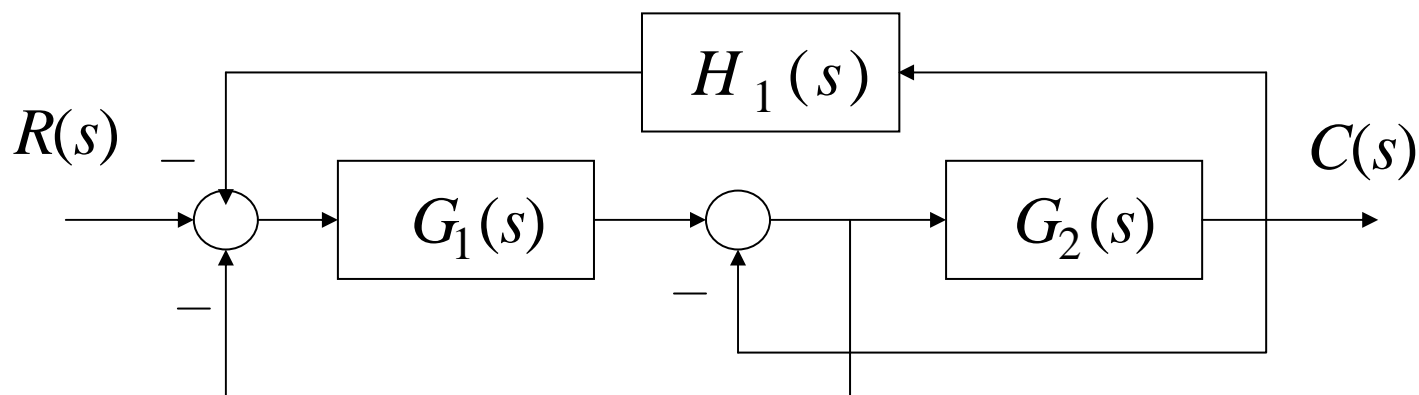
$$G_{23}(s) = \frac{G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)H_3(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s)}$$

(3) 将 $G_1(s)$ 、 $G_{23}(s)$ 和 $H_1(s)$ 组成的主反馈回路简化, 计算系统的传递函数

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_{23}(s)}{1 + G_1(s)G_{23}(s)H_1(s)} \\ &= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)H_1(s) + G_3(s)G_4(s)H_3(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s)}\end{aligned}$$



例2-15 试简化图示系统结构图，并求系统传递函数。



$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s) + G_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

例2-16 (P.52) 试简化图示系统结构图，并求系统传递函数。

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = [G_1(s)G_3(s) + G_2(s)G_4(s)] \frac{G_5(s)}{1 + G_3(s)H(s) + G_4(s)H(s)}$$

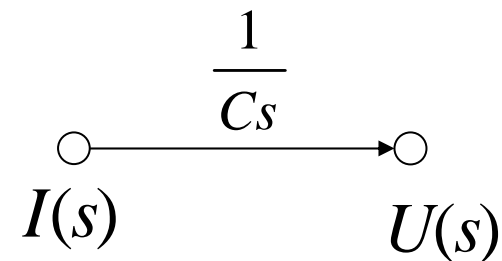
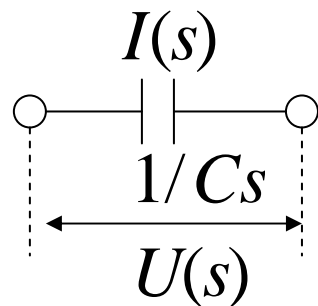
2、信号流图的组成及性质



信号流图是利用图示法来描述一个或一组线性代数方程式，由节点和支路组成的一种信号传递网络。

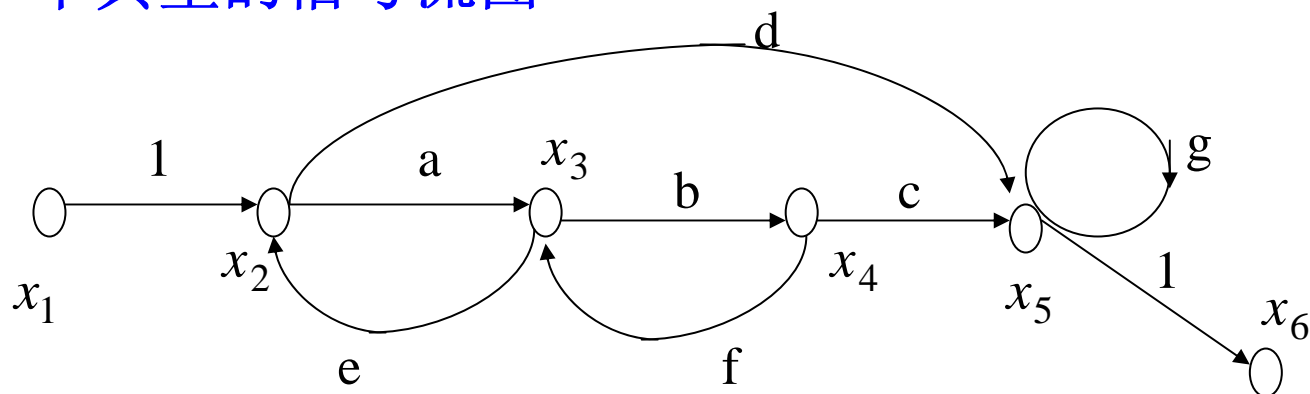
节点：表示方程式中的变量。

支路：连接两个节点的定向线段，用支路增益表示方程式中两个变量的因果关系。





一个典型的信号流图



$$x_1 = x_1, \quad x_2 = x_1 + e x_3, \quad x_3 = a x_2 + f x_4$$

$$x_4 = b x_3, \quad x_5 = d x_2 + c x_4 + g x_5, \quad x_6 = x_5$$

信号流图的基本性质:

- (1) 节点标志了系统的变量
- (2) 支路相当于乘法器



- (3) 信号在支路上，只能沿箭头单向传递
- (4) 对于给定的系统，节点变量的设置是任意的。因此，信号流图不唯一。

名词术语：

•源节点（输入节点）

•阱节点（输出节点）

•混合节点 若从混合节点引出一条具有单位增益的支路可将混合节点变为阱节点，成为系统的输出变量。

•前向通路 信号从输入节点到输出节点传递时，每个节点只通过一次的通路。前向通路上各支路增益之乘积，称为前向通道总增益，用 p_k 表示。



- **回路** 起点和终点同在一个节点上，而且信号通过每个节点不多于一次的闭合通路（单独回路）。
- **不接触回路** 回路之间没有公共节点时，该回路称为不接触回路。

信号流图的绘制

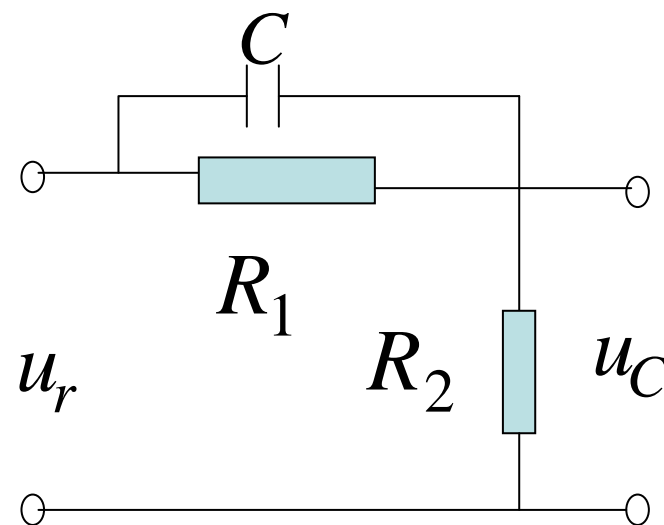
(1) 由微分方程绘制信号流图: RC串联电路的信号流图

$$u_r(t) = i_1(t)R_1 + u_c(t)$$

$$u_c(t) = i(t)R_2$$

$$\frac{1}{C} \int i_2(t)dt = i_1(t)R_1 = u_1(t)$$

$$i_1(t) + i_2(t) = i(t)$$



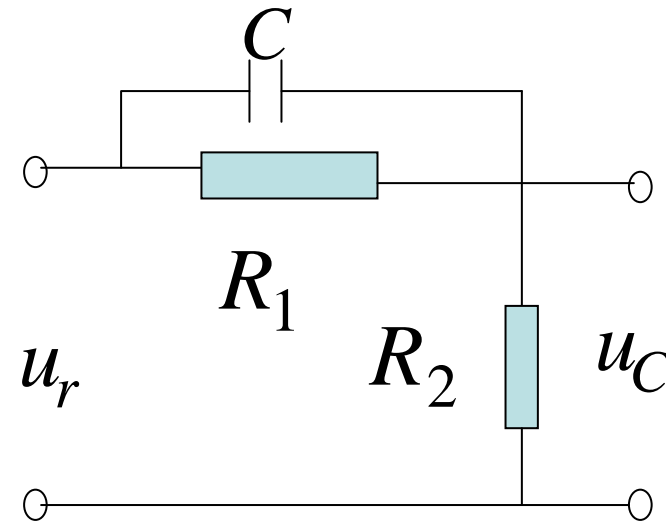


$$U_r(s) = I_1(s)R_1 + U_c(s)$$

$$U_c(s) = I(s)R_2$$

$$\frac{1}{Cs} I_2(s) + \frac{u_1(0)}{s} = I_1(s)R_1$$

$$I_1(s) + I_2(s) = I(s)$$



$$I_1(s) = \frac{U_r(s) - U_c(s)}{R_1}$$

$$U_c(s) = I(s)R_2$$

$$I_2(s) = sR_1CI_1(s) - Cu_1(0)$$

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$

信号流图（见p.56, 例2-17）



(2) 由系统结构图绘制信号流图

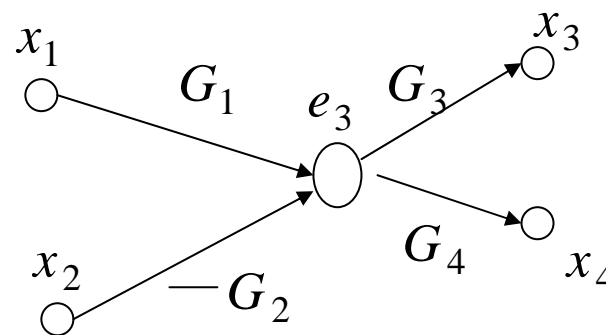
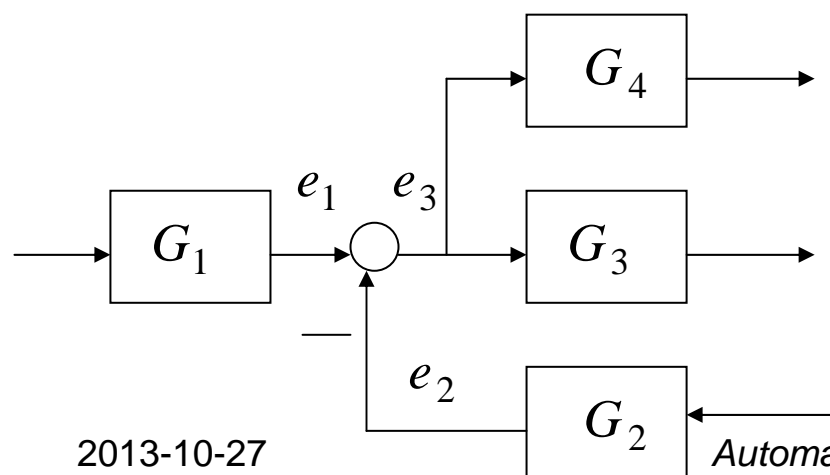
在方框结构图中，信号（变量）标记在信号线上，通过方框是对变量进行变换或运算。

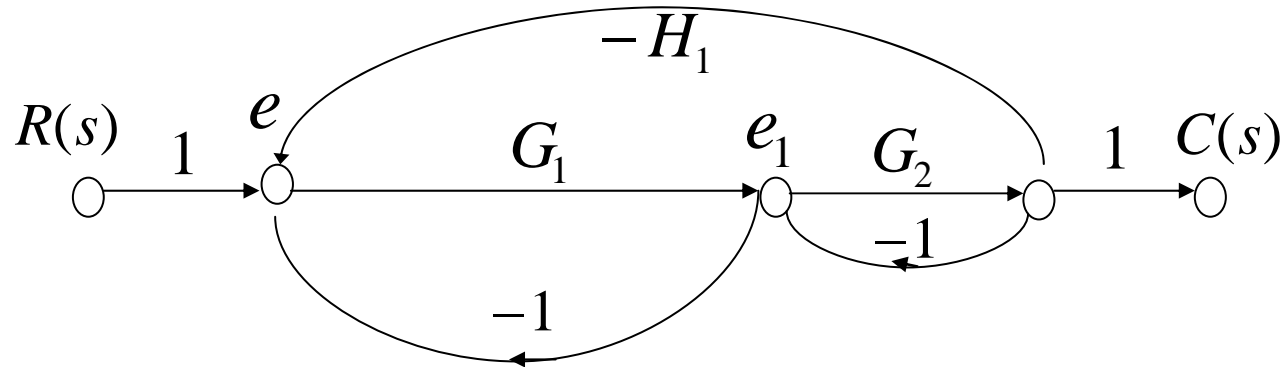
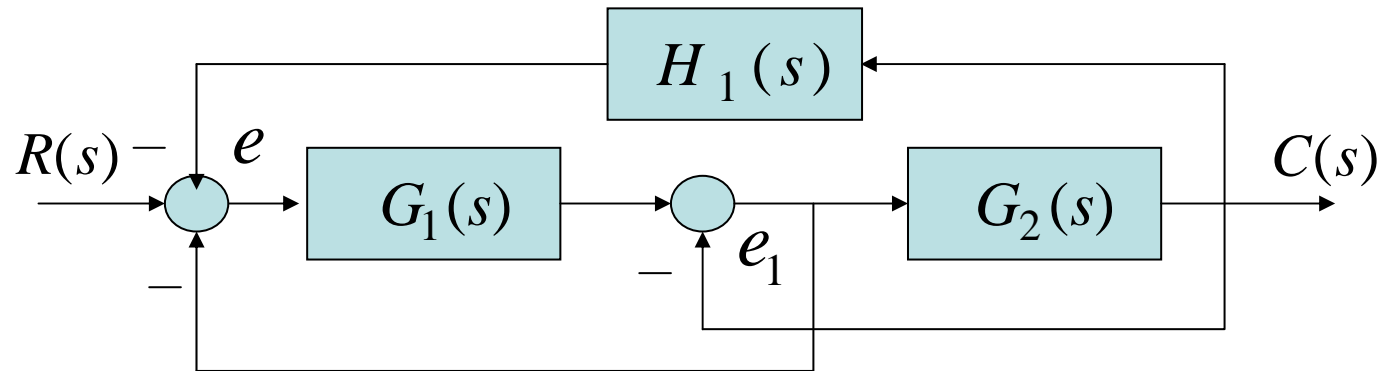
在信号流图中，信号（变量）标记在节点上，通过支路增益对变量进行变换。

结构图与信号流图的对应关系：

信号线 \longleftrightarrow 节点

方框 \longleftrightarrow 支路增益





若比较点之前有引出点，就需在引出点和比较点各设一个节点，分别标志两个变量。



MASON 增益公式

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n p_k \Delta_k$$

P 从源点到阱点的传递函数（或总增益）

n 从源点到阱点的前向通路总数

P_k 从源点到阱点的第 k 条前向通路总增益

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots \quad \text{流图特征式}$$

$\sum L_a$ 所有单独回路之和

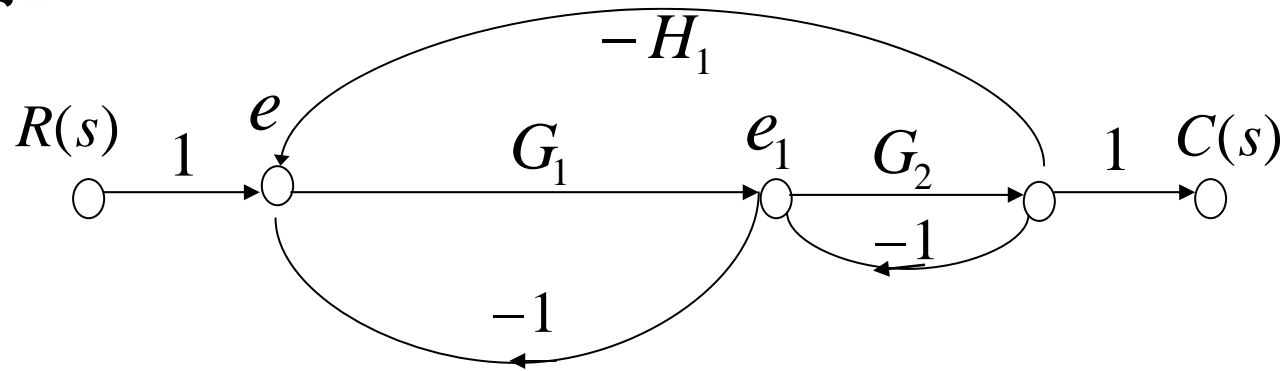
$\sum L_b L_c$ 两、两不接触回路增益的乘积之和

$\sum L_d L_e L_f$ 三、三不接触回路增益的乘积之和

Δ_k 流图余因子



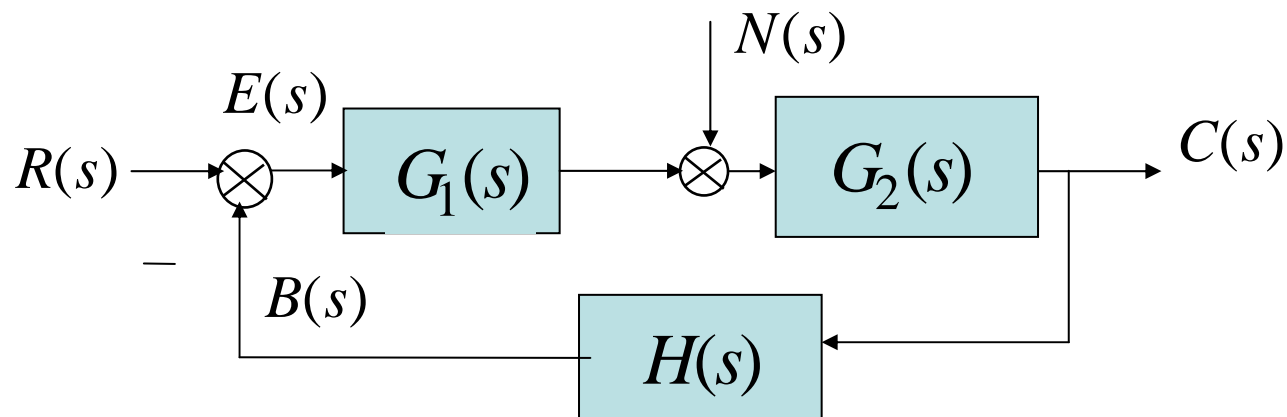
例1



$$P_1 = G_1 G_2 \quad L_1 = -G_1 G_2 H_1 \quad L_2 = -G_1 \quad L_3 = -G_2$$

$$\Delta = 1 + G_1 + G_2 + G_1 G_2 H_1 \quad \Delta_1 = 1$$

$$\frac{c(s)}{R(s)} = P_{RC} = \frac{1}{\Delta} p_1 \Delta_1 = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 + G_2 + G_1 G_2 H_1}$$



- 输入信号作用下的闭环传递函数： 令 $N(s) = 0$

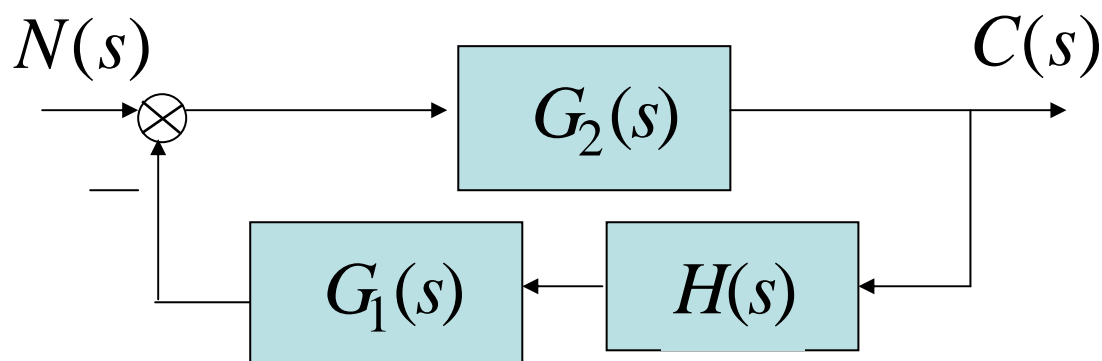
$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s)$$



• 扰动作用下的闭环传递函数

令 $R(s) = 0$



$$\Phi_N(s) = \frac{C_N(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$C_N(s) = \Phi_N(s)N(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$



- 输入和扰动共同作用下，系统输出响应为

$$C(s) = C_R(s) + C_N(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)R(s) + N(s)]$$

若 $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$ ， 并且 $|G_1(s)H(s)| \gg 1$

则有
$$C(s) \approx \frac{1}{H(s)} R(s)$$

- 闭环系统的误差传递函数，指 $E(s)$ 为输出量时的传递函数

$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$\Phi_{EN}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



2-4 数学模型的实验测定法(略)

问题的提出:

(1) 在实际应用中,工业对象结构以及内部工艺过程复杂,使得按对象内部发生的物理、化学过程非常复杂,确定过程或系统的微分方程十分困难。

(2) 运用分析法确定对象以及控制系统数学模型时,通常需要一些假设和近似。对于复杂对象,这些假设或近似会对近似确定的数学模型产生估计不到的影响。



实验测定法：（1）建立复杂对象的输入、输出关系；（2）检验分析法得到的数学模型的“可用性”。

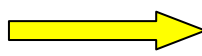
实验测定法的局限性：对于正常运行的被控对象或控制系统，用实验方法测定系统的动态特性时，对正常生产会有一些的影响，得到的结果也是大致的。



数学模型实验测定的主要方法

1、实验测定法一般只适用于建立被测对象或系统的输入 / 输出模型。

2、用实验方法要获得被测对象或系统的动特性，为了获得对象的动态特性，要求被研究的对象/过程处于被激励状态。根据所加入的激励信号和结果的分析方法不同，测试的动态特性的实验方法也不同。主要形式有：

时域测定法：对象或系统的输入端施加阶跃扰动或脉冲扰动，记录相应的输出响应曲线  传递函数。

特点：测试设备简单，测试工作量小，但测试精度不高。



频域测定法:对象或系统的输入端施加不同频率的正弦波 \longrightarrow 测出输入信号和输出信号之间的幅值比和相位差 \longrightarrow 对象或系统的频率特性。

特点：原理、方法、数据处理比较简单，测试精度高于时域法，但需要专用的超低频测试设备。

统计相关测定法:对被研究对象施加一个随机信号,根据被测对象的各参数变化,采用统计相关法确定被测对象的动特性。

特点：在被测试对象正常运行状态下进行在线辨识，测试结果精度较高，但需要采集大量的数据，需要用“相关仪”和计算机进行数据处理。



2、时域法的输入测试信号的选择

阶跃扰动信号、脉冲扰动信号

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad u_2(t) = -u_1(t - \Delta t)$$

输出的脉冲响应 $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = y_1(t) - y_1(t - \Delta t)$

如何从脉冲响应得到阶跃响应? $y_1(t) = y(t) - y_1(t - \Delta t)$

$$[0, t_0 + \Delta t] \quad y_1(t) = y(t)$$

$$(t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t] \quad y_1(t) = y(t) + y_1(t - \Delta t)$$

依次类推，最后得到完整的阶跃响应曲线。



3、测定实验注意的事项

4、实验结果的数据处理

具有延迟的一阶惯性环节

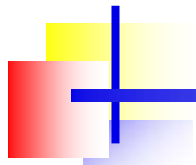
$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau s}$$

具有延迟的二阶惯性环节

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} e^{-\tau s}$$

具有延迟的n阶惯性环节

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n} e^{-\tau s}$$



- (1) 具有延迟的一阶惯性环节拟合的近似法
- (2) 具有延迟的一阶惯性环节拟合的两点法
- (3) 具有延迟的二阶惯性环节拟合的两点法
- (4) 具有延迟的 n 阶惯性环节拟合的两点法

2-5 控制系统建模实例



磁盘驱动读取系统

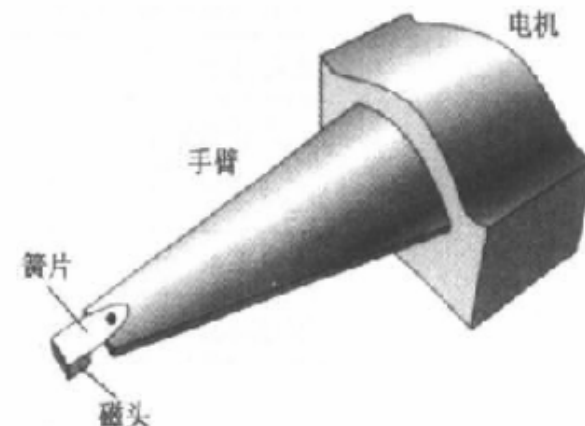
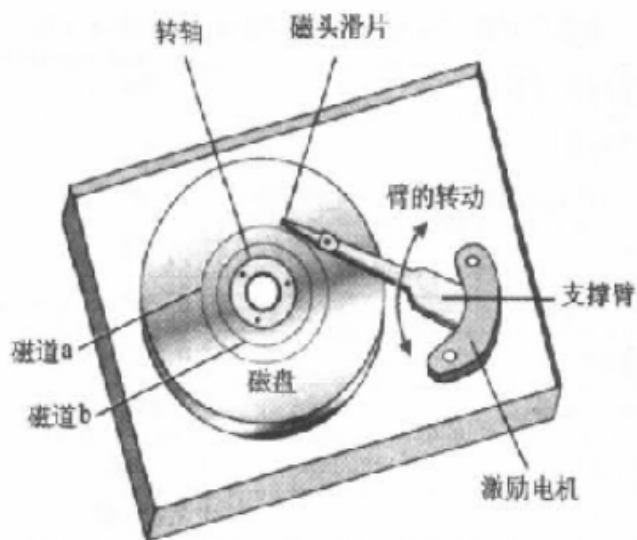


图 2.61 磁头安装结构图

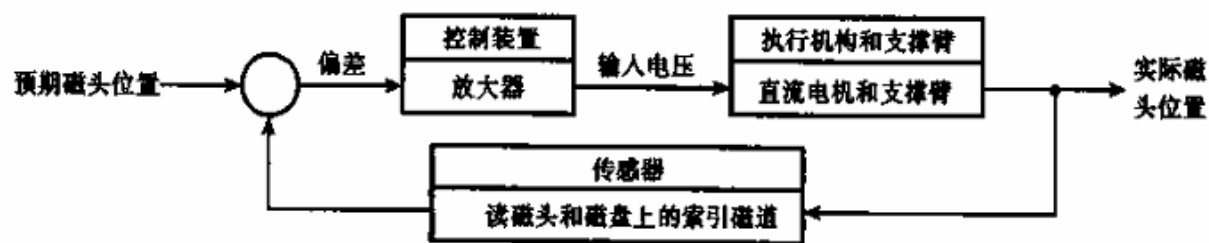


图 0.1 磁盘驱动读取控制系统



永磁直流电机模型

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + E_a(t) = u_a(t)$$

$$E_a(t) = C_e \omega_m(t)$$

$$M_m = C_m i_a(t)$$

输出变量：角位移

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_m \omega_m(t) = M_m - M_C(t)$$

空载，反电势近似为零 $C_e = 0$

$$C_m = K_m \quad f_m = f \quad J_m = J \quad R_a = R$$

$$(Ls + R)I(s) = U(s)$$

$$(Js + f)s\Theta(s) = K_m I(s)$$

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K_m}{s(Js + f)(Ls + R)}$$



传感器: $H = 1$

放大器: $K_a = 1$

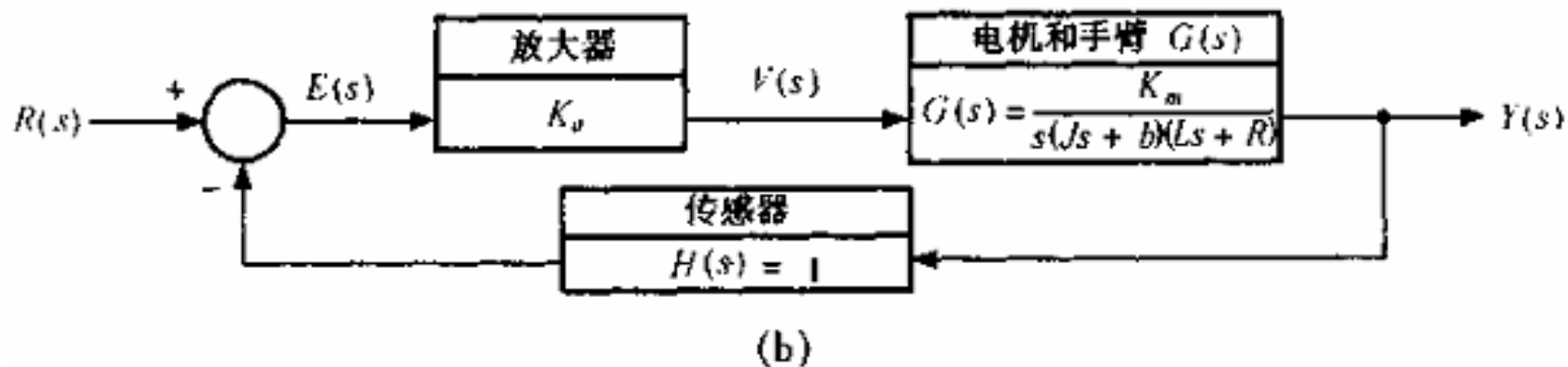


图 2.62 磁盘驱动读取系统框图模型

表 2.11 磁盘驱动器读取系统典型参数

参数	符号	典型值
手臂与磁头的转动惯量	J	$1 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2/\text{rad}$
摩擦系数	b	20 kg/m/s
放大器系数	K_a	$10\sim 1000$
电枢电阻	R	1Ω
电机系数	K_m	$5 \text{ N}\cdot\text{m/A}$
电枢电感	L	1 mH



$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{5000}{s(s+20)(s+1000)}$$

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K_m / fR}{s[(J/f)s+1][(L/R)s+1]} = \frac{K}{s(T_J s+1)(T_L s+1)}$$

$$K = K_m / fR, \quad T_J = J / f, \quad T_L = L / R$$

$$G(s) = \frac{K}{s(T_J s+1)(T_L s+1)} = \frac{0.25}{s(0.05s+1)(0.001s+1)}$$

$$G(s) \approx \frac{K}{s(T_J s+1)} = \frac{0.25}{s(0.05s+1)} = \frac{5}{s(s+20)}$$

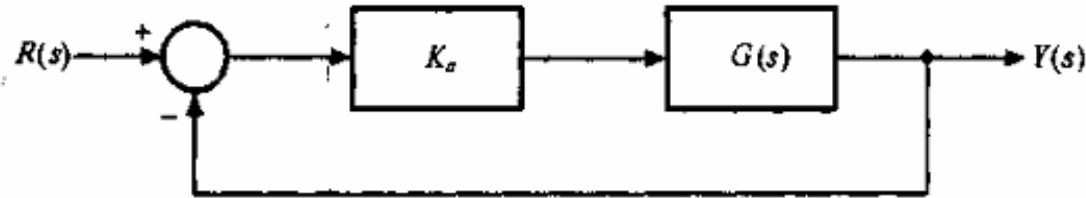


图 2.63 闭环系统的框图模型

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_a G(s)}{1 + K_a G(s)} = \frac{5K_a}{s^2 + 20s + 5K_a} = \frac{200}{s^2 + 20s + 200} \quad K_a = 40$$

$$C(s) = \frac{200}{s^2 + 20s + 200} R(s) \quad R(s) = 0.1 \text{ rad}$$



MATLAB编程:

$$Ka = 40$$

$$G = zpk([], [0, -20], 5)$$

$$sys = feedback(Ka * G, 1)$$

$$t = 0:0.01:1$$

$$step(sys, 1)$$

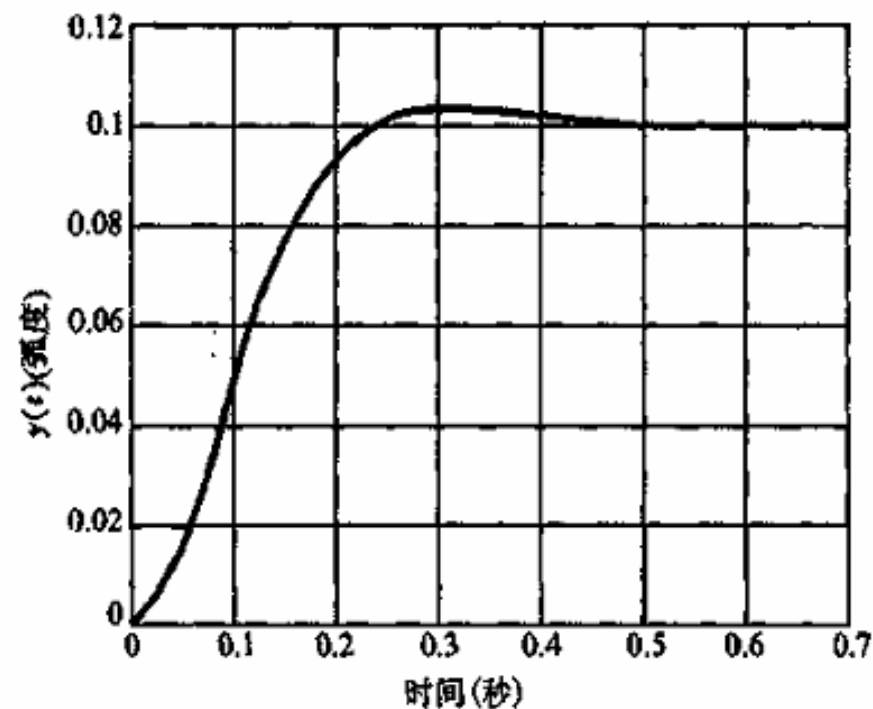


图 2.64 $R(s) = \frac{0.1}{s}$ 时, 图 2.63 所示系统的时间响应