目　　录

第　一　章　随机事件极其概率

1.1 解:（1）$\Omega=\{$(正，正)，（正，反）（反，正）（反，反）$\}$.

（2）$\Omega=\{3,4,5,6,7,8,9\}$

（3）　①$\Omega=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$；

②$\Omega=\{(1,1)(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$；

③$\Omega=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

1.2 解:(1) $A\overline{B}\overline{C}$ ；(2) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ；(3) $\overline{A}(B\cup C)$；

(4) $A\cup B\cup C$ ；　(5) $\overline{A}\overline{B}\cup\overline{B}\overline{C}\cup\overline{C}\overline{A}$.

1.3 解:样本点ω_i表示"出现i点"，　$i=1,2,\cdots,6$

$\overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$,表示"出现奇数点"

$\overline{B}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_5\}$，　表示"出现的点数不能被 3整除"

$A\cup B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$，　表示"出现的点数能被2或3整除"

$\overline{A\cup B}=\{\omega_1,\omega_5\}$，　表示"出现的点数既不能被2整除也不能被3整除"

$AB=\{\omega_6\}$，　表示"出现的点数能被 6整除"

1.4 解:若事件A表示抽到的两张都是前 10 号考签

$$P(A)=\frac{C_{10}^2}{C_{50}^2}=0.037$$

1.5 解: (1)　$P(A)=\dfrac{6\times5\times4\times3}{6^4}=0.2778$

(2)　$P(B)=\dfrac{C_4^2\times6\times5\times4}{6^4}=0.5556$

(3)　$P(D)=\dfrac{C_4^3\times6\times5}{6^4}=0.0926$

(4)　$P(E)=\dfrac{6}{6^4}=0.0046$

1.6 解: $P(A)=\dfrac{[\frac{100}{2}]+[\frac{100}{3}]+[\frac{100}{5}]-[\frac{100}{6}]-[\frac{100}{10}]-[\frac{100}{15}]+[\frac{100}{30}]}{100}=0.74$

1.7 解:方法 1：若设 A 表示取出的 3 个产品中有次品,

A_i 是取出的 3 个产品中恰有 i 个次品（i=1,2,3）， $A=A_1+A_2+A_3$

$P(A_1)=\dfrac{C_5^1C_{45}^2}{C_{50}^3}=0.2526$ ， $P(A_2)=\dfrac{C_5^2C_{45}^1}{C_{50}^3}=0.0230$, $P(A_3)=\dfrac{C_5^3}{C_{50}^3}=0.0005$

$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.276$

方法 2： $\overline{A}$ 就是取出的 3 个产品全是合格品

$$P(\overline{A})=\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}=0.724 \qquad P(A)=1-P(\overline{A})=0.276$$

1.8 解:基本事件的总数为 $(2n)!$ ，每对恰好排在一起可分为两步，第一步确定各对之间的排序，共有 $n!$ 种，然后每对新人内部均有 2 种排序，于是由乘法规则每对每对新人每对恰好排在一起的排法共有 $2^n n!$ 种，从而其概率为 $\dfrac{2^n n!}{(2n)!}$

1.9 解: $P(A)=\dfrac{10}{16}=0.625$

1.10 解: $P(A)=\dfrac{3!\times 8!}{10!}=0.067$

1.11 解: $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{5}{6}$ ；

1.12 解: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{15}{30}+\dfrac{10}{30}-\dfrac{5}{30}=\dfrac{2}{3}$

1.13 解: A_1 、 A_2 、 A_3 分别表示甲、乙、丙三厂生产； C 表示次品. 则

$P(C)=\dfrac{1}{2}\times 0.02+\dfrac{1}{3}\times 0.06+\dfrac{1}{6}\times 0.03=0.035$

1.14 解:设 A 表示“考生选出正确答案”； B 表示“考生会解这道题”；

则全概率公式： $P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})\ =0.8\times 1+0.2\times 0.25\ =0.85$

1.15 解:用 A_1,A_2,A_3 分别表示“玻璃杯在第一、二、三次掉下时被摔碎”； B 表示“玻璃杯被摔碎”. 则 $B=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ ，由于 $A_1,\overline{A}_1A_2,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 互不相容，所以

$$P(B)=P(A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(A_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=0.6+(1-0.6)0.8+(1-0.6)(1-0.8)0.9=0.992$$

1.16 解：设事件 B 表示“出现次品”，A_i 表示从第 i 个工厂所进商品

$P(A_1)=0.2$，$P(A_2)=0.45$，$P(A_3)=0.25$，$P(A_4)=0.1$

$P(B|A_1)=0.05$，$P(B|A_2)=0.03$，$P(B|A_3)=0.01$，$P(B|A_4)=0.04$

$$P(B)=0.2\times0.05+0.45\times0.03+0.25\times0.01+0.1\times0.04=0.03$$

1.17 解：设 A_i 分别表示事件“报名表是第 i 个地区考生的” $(i=1,2,3)$；B 表示“抽到的报名表是女生的”. 则

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}，\quad P(B \mid A_1)=\frac{3}{10}, P(B \mid A_2)=\frac{7}{15}, P(B \mid A_3)=\frac{1}{5}$$

$$P(B)=P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)+P(A_3)P(B \mid A_3)=\frac{29}{90}$$

1.18 解：设事件 A 是试验结果呈阳性反应，事件 B 是被检查者患有癌症.

$$P(B)=0.004, P(A \mid B)=0.95, P(\overline{A} \mid \overline{B})=0.96$$

$$P(\overline{B})=0.996, P(\overline{A} \mid B)=0.05, P(A \mid \overline{B})=0.04$$

（1）$P(B \mid A)=\dfrac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B)+P(\overline{B})P(A \mid \overline{B})}$=0.0871

故试验结果呈阳性的被检者患癌的可能性不大，要进一步检查才能确诊。

（2）$P(\overline{B} \mid \overline{A})=\dfrac{P(\overline{B})P(\overline{A} \mid \overline{B})}{P(B)P(\overline{A} \mid B)+P(\overline{B})P(\overline{A} \mid \overline{B})}$=0.9998

这表明试验结果呈阴性反应的被检查者未患癌症的可能性极大.

1.19 解：设 A_i 表示第 i 台不需要工人照看，$i=1,2,3$

B 表示一小时内至多有一台需要工人照看

$P(A_1)=0.9 \qquad P(A_2)=0.8 \qquad P(A_3)=0.7$

$$P(A_1A_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3)=0.902$$

1.20 解：$\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A\overline{B})}{1-P(B)}$

$$P(AB)-P(AB)P(B)=P(A\overline{B})P(B)$$

$$P(AB)=P(B)[P(AB)+P(A\overline{B})]=P(A)P(B)$$

1.21 解:设 A_i :第 i 次取得次品（ $i=1,2$ ）, 则 $P\left(\overline{A_1}A_2\right)=\dfrac{8}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{8}{45}$

1.22　解: $P_6(10)=C_{10}^6\times0.2^6\times0.8^4=0.0055$

1.23 解:设 B ：三次射击中恰好有一次命中

C：三次射击中至少有一次命中， A_i：第 i 次命中， i=1，2，3

则 $B=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$， $C=A_1\cup A_2\cup A_3$

$$P(B)=P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\right)+P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)=0.36$$

$$P(C)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P\left(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=0.91$$

1.24 解:设 A_i 是甲投中 i 次， B_i 是乙投中 i 次

$$P(A_0B_0)=(C_3^0\times0.7^0\times0.3^3)\times(C_3^0\times0.6^0\times0.4^3)=0.027\times0.064$$

$$P(A_1B_1)=(C_3^1\times0.7^1\times0.3^2)\times(C_3^1\times0.6^1\times0.4^2)=0.189\times0.288$$

$$P(A_2B_2)=(C_3^2\times0.7^2\times0.3^1)\times(C_3^2\times0.6^2\times0.4^1)=0.441\times0.432$$

$$P(A_3B_3)=(C_3^3\times0.7^3\times0.3^0)\times(C_3^3\times0.6^3\times0.4^0)=0.343\times0.216$$

$$P(C)=P(A_0B_0)+P(A_1B_1)+P(A_2B_2)+P(A_3B_3)=0.321$$

第 二 章 一维随机变量及其分布

2.1 解: ξ 的取值为 0,1,2,3,4,5。 $p(\xi=0)=\frac{C_{95}^{20}}{C_{100}^{20}}$, $p(\xi=1)=\frac{C_{95}^{19}C_{5}^{1}}{C_{100}^{20}}$, $p(\xi=2)=\frac{C_{95}^{18}C_{5}^{2}}{C_{100}^{20}}$,

$p(\xi=3)=\frac{C_{95}^{17}C_{5}^{3}}{C_{100}^{20}}$, $p(\xi=4)=\frac{C_{95}^{16}C_{5}^{4}}{C_{100}^{20}}$, $p(\xi=5)=\frac{C_{5}^{5}C_{95}^{19}}{C_{100}^{20}}$, ξ 的分布列：

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{C_{95}^{20}}{C_{100}^{20}}$	$\frac{C_{95}^{19}C_{5}^{1}}{C_{100}^{20}}$	$\frac{C_{95}^{18}C_{5}^{2}}{C_{100}^{20}}$	$\frac{C_{95}^{17}C_{5}^{3}}{C_{100}^{20}}$	$\frac{C_{95}^{16}C_{5}^{4}}{C_{100}^{20}}$	$\frac{C_{5}^{5}C_{95}^{19}}{C_{100}^{20}}$

2.2 解: $P(c\le x<b)=P(a\le x<b)+P(c\le x<d)-P(a\le x<d)=0$

2.3 解: ξ 的取值为 1,2,3,4。 $p(\xi=1)=\frac{C_{10}^{1}}{C_{13}^{1}}=\frac{10}{13}$, $p(\xi=2)=\frac{3\times 11}{13\times 13}=\frac{33}{169}$,

$p(\xi=3)=\frac{3\times 2\times 12}{13^3}=\frac{72}{2197}$, $p(\xi=4)=\frac{3\times 2\times 1}{13^3}=\frac{6}{2197}$,

ξ 的分布列：

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{10}{13}$	$\frac{33}{169}$	$\frac{72}{2197}$	$\frac{6}{2197}$

分布函数为：

$$F(x)=P(\xi\le x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{10}{13} & 1\le x<2\\ \frac{10}{13}+\frac{33}{169}=\frac{163}{169} & 2\le x<3\\ \frac{163}{169}+\frac{72}{2197}=\frac{2191}{2197} & 3\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

2.4 解: ξ 的分布列：

ξ	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

所以分布函数为

$$F(x)=P(\xi\le x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \dfrac{2}{5} & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}.$$

2.5 解: $A(\frac{2}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{2}{n})=1 \quad A=\frac{1}{2}$.

2.6 解: ξ 的取值为 1,2,3,4。$p(\xi=1)=\frac{C_4^1}{C_7^1}=\frac{4}{7}, p(\xi=2)=\frac{3\times 4}{7\times 6}=\frac{12}{42}$,

$p(\xi=3)=\frac{3\times 2\times 4}{7\times 6\times 5}=\frac{24}{210}, p(\xi=4)=\frac{3\times 2\times 1\times 4}{7\times 6\times 5\times 4}=\frac{6}{210}$,

ξ 的分布列：

ξ	1	2	3	4
p	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{210}$	$\frac{6}{210}$

2.7 解: 设随机变量 ξ 表示射中次数，$p(\xi=0)=(0.98)^{400}$，$p(\xi=1)=C_{400}^1(0.02)^1(0.98)^{399}$

$$p(\xi\ge 2)=1-p(\xi=0)-p(\xi=1)=0.997.$$

2.8 解: 由题意知 $\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$，可得 $\lambda=2$. 所以 $p(\xi=4)=\frac{2^4}{4!}e^{-2}=\frac{2}{3}e^{-2}$.

2.9 解: 由题意知

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5} & 0\le x\le 5\\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

$$p(\xi\le 3)=\int_0^3\frac{1}{5}dx=\frac{3}{5}.$$

2.10 解: (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{e^x+e^{-x}}dx=1$ 可得 $A=\frac{2}{\pi}$；

(2) $p\left(0<X<\frac{1}{2}\ln 3\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\frac{1}{6}$；

(3) $F(x)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{e^t+e^{-t}}dt=\frac{2}{\pi}\arctan e^x$.

2.11 解: $(1)\ F(-\infty)=A-\frac{\pi}{2}B=0, F(+\infty)=A+\frac{\pi}{2}B=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{\pi}$;

$(2)\ p(|\xi|<1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1-[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(-1)]=\frac{1}{2}$;

$(3)\ f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

2.12 解: $(1)\ p(7<\xi<15)=p\left(\frac{7-10}{2}<\frac{\xi-10}{2}<\frac{15-10}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
&=\Phi(2.5)-\Phi(-1.5)\\
&=0.9938-(1-0.9332)\\
&=0.927
\end{aligned}
$$

$(2)\ \ p(|\xi-10|<d)=p\left(\frac{|\xi-10|}{2}<\frac{d}{2}\right)=2\Phi(\frac{d}{2})-1=0.9$, 则

d=3.29.

2.13 解: $p(\xi<60)=p\left(\frac{\xi-70}{10}<\frac{60-70}{10}\right)=\Phi(-1)=0.1587=15.9\%$;

$p(\xi\ge 85)=p\left(\frac{\xi-70}{10}\ge\frac{85-70}{10}\right)=1-\Phi(1.5)=0.0668=7\%$.

2. 14 解: $p(\xi\ge 250)=1-p(\xi<250)=1-\Phi(\frac{250-300}{35})=0.9236$;

$p(300-x<\xi<300+x)=\Phi(\frac{x}{35})-\Phi(\frac{-x}{35})=0.9\Rightarrow x=57.75$，即区间为

$[242.25, 357.75]$.

2.15 解: $\eta=\frac{\pi\xi^2}{4}$,其中ξ的概率密度为

$$
f_\xi(x)=\begin{cases}1 & 5\le x\le 6\\ 0 & \text{其它}\end{cases},
$$

$F_\eta(y)=p(\eta\le y)=p(\frac{\pi\xi^2}{4}\le y)=p(\xi\le\sqrt{\frac{4y}{\pi}})$,

当$y<\frac{25}{4}\pi$, $F_\eta(y)$=0,

当$\frac{25}{4}\pi\le y\le 9\pi$, $F_\eta(y)=\int_5^{\sqrt{\frac{4y}{\pi}}}dx=\sqrt{\frac{4y}{\pi}}-5$,

当 $y>9\pi$，$F_\eta(y)=1$，

所以 $f_\eta(y)=F'_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}},\dfrac{25}{4}\pi\le y\le 9\pi\\ 0，其它\end{cases}$.

2.16 解: $F_\eta(y)=p(\eta\le y)=p(a+b\xi\le y)=p(\xi\le\dfrac{y-a}{b})=\int_{-\infty}^{\frac{y-a}{b}}f_\xi(x)dx$,

$$f_\eta(y)=F'_\eta(y)=f_\xi\left(\frac{y-a}{b}\right)\left(\frac{y-a}{b}\right)'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}b\sigma}e^{-\frac{(y-a-b\mu)^2}{2b^2\sigma^2}}.$$

2.17 解: η 的取值为 2,5,10,17，

η 的分布列：

η	2	5	10	17
p	0.2	0.5	0.1	0.2

.

2.18 解: $F_\eta(y)=p(\eta\le y)=p(\xi^2\le y)=p(\xi\le\sqrt{y})$,

当 $y<0$, $F_\eta(y)$ =0,

当 $0\le y\le 4$, $F_\eta(y)=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}xdx$,

当 $y>4$，$F_\eta(y)=1$，

所以 $f_\eta(y)=F'_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4},0\le y\le 4\\ 0，其它\end{cases}$.

2.19 解: ξ 的取值为 0,1,2，

$p(\xi=0)=C_2^0(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$,　　$p(\xi=1)=C_2^1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$p(\xi=2)=C_2^2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^0=\frac{1}{4}$,

ξ 的分布列：

ξ	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

.

2.20 解: ξ 的取值为 1,2,3,4,5。

$p(\xi=1)=0.9$,　　$p(\xi=2)=0.1\times0.9=0.09$,

$p(\xi=3)=0.1^2\times0.9=0.009$,　　$p(\xi=4)=0.1^3\times0.9=0.0009$,

$p(\xi=5)=0.1^4\times 0.9+0.1^5=0.0001$,

ξ 的分布列：

ξ	1	2	3	4	5
p	0.9	0.09	0.009	0.0009	0.0001

.

2.21 解：(1) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1\\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$;

(2) $p(-1\le\xi\le 1)=F(1)-F(-1)=\frac{3}{4}$;

(3) $p(\xi\ge 1)=p(\xi=1)+p(\xi=2)=\frac{3}{4}$.

2.22 解: $p=2(1-p), p=\frac{2}{3}$

ξ 的取值为 0,1。

$p(\xi=0)=\frac{1}{3},\qquad p(\xi=1)=\frac{2}{3}$,

ξ 的分布列：

ξ	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

.

2.23 解: (1) $\xi\sim B(4,0.8)$;

(2) $p(\xi\ge 1)=1-p(\xi<1)=1-(0.2)^4=0.9984$.

2.24 解: (1) $C_{10}^3(0.7)^3(0.3)^7$;

(2) $\sum_{i=3}^{10}C_{10}^i(0.7)^i(0.3)^{10-i}$.

2.25 解：(1) $C_5^2(0.1)^2(0.9)^3=0.0729$;

(2) $1-C_5^0(0.1)^0(0.9)^5=0.4095$.

2.26 解：(1) $p(\xi=8)=\frac{4^8}{8!}e^{-4}$;

$(2)\, 1-p(\xi=0)-p(\xi=1)-p(\xi=2)=1-\frac{4^0}{0!}e^{-4}-\frac{4^1}{1!}e^{-4}-\frac{4^2}{2!}e^{-4}=1-13e^{-4}$.

2.27 解：设挑选了 n 件产品,则至少有一次次品的概率为

$$1-(1-0.01)^n,$$

即 $1-(1-0.01)^n>0.95$, $n\geq 299$.

2.28 解：当 $x<0$, $F(x)=0$=0,

当 $0\leq x<1$, $F(x)=\int_0^x xdx=\frac{1}{2}x^2$,

当 $1\leq x<2$, $F(x)=\int_0^1 xdx+\int_1^x(2-x)dx=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$,

当 $x>2$，$F(x)=1$,

所以

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}x^2, & 0\leq x<1\\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1, & 1\leq x<2\\ 1, & x\geq 2\end{cases}.$$

2.29 解：$p(\xi\leq 1)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$,

即 $\int_0^1\frac{3x^2}{\theta^3}dx=\frac{1}{8}$, 所以 $\theta=2$.

2.30 解：$(1)\, 2\int_0^{\infty}ce^{-x}dx=1\Rightarrow c=\frac{1}{2}$;

$(2)\, p(-1<\xi<1)=2\int_0^1\frac{1}{2}e^{-x}dx=1-e^{-1}$;

(3)当$x<0$时,$F(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{2}e^xdx=\frac{1}{2}e^x$,

当$x\geq 0$时,$F(x)=\int_{-\infty}^0\frac{1}{2}e^xdx+\int_0^x\frac{1}{2}e^{-x}dx+=1-\frac{1}{2}e^{-x}$,

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^x, x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, x\geq 0\end{cases}.$$

2.31 解：(1) 当 $x<0$, $F(x)=0$=0,

当$0 \le x < 1$, $F(x)=\int_0^x (12x^2-12x+3)dx = 4x^3-6x^2+3x$,

当$x \ge 1$, $F(x)=1$, 所以 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ 4x^3-6x^2+3x, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1\end{cases}$;

(2) $p(\xi < 0.2) = F(0.2) = 0.392$;

(3) $p(0.1<\xi<0.5) = F(0.5)-F(0.1) = 0.256$.

2.32 解: (1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$;

(2) $p\left(0<\xi<\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos x dx = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

2.33 解: (1) $A=1$;

(2) $f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1 \\ 0, 其它\end{cases}$;

(3) $p(0.3<\xi<0.7) = F(0.7)-F(0.3) = 0.4$.

2.34 解: $p(\xi<2.35) = \Phi(2.35) = 0.9906$, $p(\xi < -1.24) = 1-\Phi(1.24) = 0.1075$,

$p(|\xi|<1.54) = \Phi(1.54)-\Phi(-1.54) = 2\Phi(1.54)-1 = 0.8764$.

2.35 解: $p(2\le\xi\le 5) = p\left(\frac{2-3}{2} \le \frac{\xi-3}{2} \le \frac{5-3}{2}\right) = \Phi(1)-\Phi(-0.5) = 0.5328$,

$p(\xi>-4) = 1-p(\xi\le -4) = 1-p\left(\frac{\xi-3}{2} \le \frac{-4-3}{2}\right) = 1-\Phi(-3.5) = \Phi(3.5) \approx 1$,

$p(|\xi|<7) = p\left(\frac{-7-3}{2} \le \frac{\xi-3}{2} \le \frac{7-3}{2}\right) = \Phi(2)-\Phi(-5) \approx 1$.

2.3 解: $p(\xi \ge 180) = 1-p(\xi<180) = 1-p\left(\frac{\xi-200}{18} \le \frac{180-200}{18}\right) = 1-\Phi(\frac{10}{9}) = 0.8665$.

2.37 $F_\eta(y) = p(\eta<y) = p(\alpha\xi+b<y) = p(\xi > \frac{y-b}{a}) = \int_{\frac{y-b}{a}}^{+\infty} f(x)dx$,

$$f_\eta(y)=F_\eta'(y)=\left(\int_{\frac{y-b}{a}}^{+\infty}f(x)dx\right)'=-\frac{1}{a}f(\frac{y-b}{a}).$$

第　三　章　二维随机变量及其分布

3.1 解：$(1)\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}ke^{-(3x+4y)}dxdy=1\Rightarrow k=12$；

$(2)\, p(0\le\xi\le1,0\le\eta\le2)=\int_0^2dy\int_0^1 12e^{-(3x+4y)}dx=0.9499$.

3.2 解：$p(\xi_1=0,\xi_2=0)=\frac{2\times2}{4\times4}=\frac{4}{16}$，　$p(\xi_1=1,\xi_2=0)=\frac{C_2^1\times2}{4\times4}=\frac{4}{16}$,

$p(\xi_1=2,\xi_2=0)=\frac{C_2^1}{4\times4}=\frac{2}{16}$，　$p(\xi_1=0,\xi_2=1)=\frac{C_2^1\times2}{4\times4}=\frac{4}{16}$,

$p(\xi_1=1,\xi_2=1)=\frac{1}{4\times4}=\frac{1}{16}$，　$p(\xi_1=2,\xi_2=1)=0$,

$p(\xi_1=0,\xi_2=2)=\frac{1}{4\times4}=\frac{1}{16}$，　$p(\xi_1=1,\xi_2=2)=0$,

$p(\xi_1=2,\xi_2=2)=0$,

则联合概率分布表为:

ξ_1 \ ξ_2	0	1	2
0	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	0
2	$\frac{1}{16}$	0	0

3.3 解：　$p(\xi_1=0,\xi_2=0)=0$，　$p(\xi_1=1,\xi_2=0)=\frac{C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}$,

$p(\xi_1=2,\xi_2=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}$，　$p(\xi_1=0,\xi_2=1)=\frac{C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15}$,

$p(\xi_1=1,\xi_2=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{6}{15}$，　$p(\xi_1=2,\xi_2=1)=0$,

$$p(\xi_1=0,\xi_2=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15},\qquad p(\xi_1=1,\xi_2=2)=0,\ p(\xi_1=2,\xi_2=2)=0,$$

则联合概率分布表为:

ξ_1 \ ξ_2	0	1	2
0	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	0
2	$\frac{3}{15}$	0	0

3.4 解: $(1)\ f(x,y)=F''_{xy}(x,y)=\left(\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)\right)''_{xy}$

$$=\frac{6}{\pi^2\left(4+x^2\right)\left(9+y^2\right)};$$

$$(2)\ p(0\le\xi<2,\eta<3)=\int_{-\infty}^{3}dy\int_0^2\frac{6}{\pi^2\left(4+x^2\right)\left(9+y^2\right)}dx=\frac{3}{16}.$$

3.5 解: $(1)\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ae^{-(2x+3y)}dxdy=1\Rightarrow A=6;$

$$(2)\ F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}6e^{-(2x+3y)}dxdy=\begin{cases}\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-3y}\right), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases};$$

$$(3)\ p(-1\le\xi\le1,-2\le\eta\le2)=\int_0^2dy\int_0^1 6e^{-(2x+3y)}dx=\left(1-e^{-2}\right)\left(1-e^{-6}\right).$$

3.6 解: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi ab},(x,y)\in D\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}.$

3.7 解: (ξ_1,ξ_2)联合概率分布表为:

ξ_1 \ ξ_2	0	1	2
0	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

1	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	0
2	$\frac{1}{16}$	0	0

所以

ξ_1	0	1	2
p	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

ξ_2	0	1	2
p	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

3.8

解: (1) $p(\xi=0,\eta=1)=\frac{1}{4}\times 0.4=0.1,\qquad p(\xi=0,\eta=2)=\frac{1}{2}\times 0.4=0.2,$

$p(\xi=0,\eta=3)=\frac{1}{4}\times 0.4=0.1,\qquad p(\xi=1,\eta=1)=\frac{1}{2}\times 0.6=0.3,$

$p(\xi=1,\eta=2)=\frac{1}{6}\times 0.6=0.1,\qquad p(\xi=1,\eta=3)=\frac{1}{3}\times 0.6=0.2,$

ξ \ η	1	2	3
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

(2) $p(\xi=0|\eta\neq 1)=\frac{p(\xi=0,\eta\neq 1)}{p(\eta\neq 1)}=\frac{0.2+0.1}{0.3+0.3}=\frac{1}{2}$.

3.9 解: (1) $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ae^{-(2x+3y)}dxdy=1\Rightarrow A=6$;

(2) 当 $x\le 0$ 时, $f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$,

当 $x>0$ 时，$f_\xi(x)=\int_0^{+\infty}6e^{-(2x+3y)}dy=2e^{-2x}$， 所以 $f_\xi(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$，

当 $y\le 0$ 时，$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$，

当 $y>0$ 时，$f_\eta(y)=\int_0^{+\infty}6e^{-(2x+3y)}dx=3e^{-3y}$， 所以 $f_\eta(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases}$.

3.10 解：(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi a^2}, x^2+y^2\le a^2\\ 0, \quad 其它\end{cases}$；

(2) 当 $|x|>a$ 时，$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$，

当 $|x|\le a$ 时，$f_\xi(x)=\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\dfrac{1}{\pi a^2}dy=\dfrac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}$，

所以 $f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}, -a\le x\le a\\ 0, \quad 其它\end{cases}$，

当 $|y|>a$ 时，$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$，

当 $|y|\le a$ 时，$f_\xi(x)=\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\dfrac{1}{\pi a^2}dx=\dfrac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-y^2}$，

所以 $f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-y^2}, -a\le y\le a\\ 0, \quad 其它\end{cases}$；

(3) $f_{\xi/\eta}\left(x/y\right)=\dfrac{f(x,y)}{f_\eta(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-y^2}}, -\sqrt{a^2-y^2}\le x\le\sqrt{a^2-y^2}\\ 0, \quad 其它\end{cases}$；

$f_{\eta/\xi}\left(y/x\right)=\dfrac{f(x,y)}{f_\xi(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}, -\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2}\\ 0, \quad 其它\end{cases}$.

3.11 解：当 $x<0, x>1$ 时，$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$，

当 $0\le x\le 1$ 时，$f_\xi(x)=\int_{-x}^{x}1dy=2x$，所以 $f_\xi(x)=\begin{cases}2x, 0\le x\le 1\\ 0, \quad 其它\end{cases}$；

当 $y<-1,y>1$ 时，$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$，

当 $-1\le y<0$ 时，$f_\eta(y)=\int_{-y}^{1}1dx=1+y$，

当 $0\le y\le 1$ 时，$f_\eta(y)=\int_{y}^{1}1dx=1-y$，所以 $f_\eta(y)=\begin{cases}1+y,-1\le y<0\\1-y,0\le y\le 1\\0,\quad 其它\end{cases}$.

3.12(1) 当 $x<0,x>1$ 时，$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$，

当 $0\le x\le 1$ 时，$f_\xi(x)=\int_0^{1-x}2dy=2-2x$，所以 $f_\xi(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0\le x\le 1\\0, & 其它\end{cases}$，

当 $y<0,y>1$ 时，$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$，

当 $0\le y\le 1$ 时，$f_\eta(y)=\int_0^{1-y}2dx=2-2y$,所以 $f_\eta(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0\le y\le 1\\0, & 其它\end{cases}$；

(2) $f(x,y)\ne f_\xi(x)f_\eta(y)$，　所以不独立。

3.13 解:当 $x<0,x>1$ 时，$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$，

当 $0\le x\le 1$ 时，$f_\xi(x)=\int_0^{x}8xydy=4x^3$,所以 $f_\xi(x)=\begin{cases}4x^3, & 0\le x\le 1\\0, & 其它\end{cases}$；

当 $y<0,y>1$ 时，$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$，

当 $0\le y\le 1$ 时，$f_\eta(y)=\int_y^{1}8xydx=4y-4y^3$,所以 $f_\eta(y)=\begin{cases}4y-4y^3, & 0\le y\le 1\\0, & 其它\end{cases}$，

因为 $f(x,y)\ne f_\xi(x)f_\eta(y)$，　所以不独立。

3.14 解: $f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)=f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1,y>0\\0, & 其它\end{cases}$.

3.15 解: $f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0\\0, & x\le 0\end{cases}$，$f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}y}, & y>0\\0, & y\le 0\end{cases}$，

当 $z\le 0$ 时，$f_Z(z)=0$，

当 $z>0$ 时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\,dx=\int_0^z \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}(z-x)}dx$$

$$=\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{3}z}\int_0^z e^{-\frac{1}{6}x}dx=e^{-\frac{z}{3}}\left(1-e^{-\frac{z}{6}}\right),$$

所以 $f_z(z)=\begin{cases} e^{-\frac{z}{3}}\left(1-e^{-\frac{z}{6}}\right), & z>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$.

3.16 解: $(1)\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ae^{-(2x+3y)}dxdy=1 \Rightarrow A=6$

$(2)\ p=\int_0^3 dx\int_0^{\frac{6-2x}{3}} 6e^{-(2x+3y)}dy=0.983$

$(3)\ F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 6e^{-(2x+3y)}dxdy=\begin{cases}\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-3y}\right), x>0, y>0 \\ 0, & 其它\end{cases}$

3.17 解:

ξ	0	1
p	$\frac{11}{21}$	$\frac{10}{21}$

ξ	0	1
p	$\frac{14}{21}$	$\frac{7}{21}$

3.18 解: (1) 当 $x\le 0$ 时, $f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$,

当 $x>0$ 时, $f_\xi(x)=\int_0^{+\infty}4xye^{-x^2-y^2}dy=2xe^{-x^2}$,所以 $f_\xi(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}, x\ge 0\\ 0, \quad x<0\end{cases}$,

当 $y\le 0$ 时, $f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$,

当 $y>0$ 时, $f_\eta(y)=\int_0^{+\infty}4xye^{-x^2-y^2}dx=2ye^{-y^2}$ 所以 $f_\eta(y)=\begin{cases}2ye^{-y^2}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases}$;

(2) 因为 $f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$, 所以独立。

3.19 解:

η \ ξ	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0

3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

3.20 解: $p(\xi<\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_0^x\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dy=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr=0.5$.

3.21 解: $p(\xi+\eta\ge 1)=\int_0^1dx\int_{1-x}^2(x^2+\frac{xy}{3})dy=\frac{65}{72}$.

3.22 解: (1) $f_\xi(x)=\begin{cases}5, & 0<x<0.2\\ 0, & 其它\end{cases}$, $f_\eta(y)=\begin{cases}5e^{-5y}, y>0\\ 0, \quad 其它\end{cases}$,

$$f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)=\begin{cases}25e^{-5y}, 0\le x\le 0.2, y>0\\ 0, \quad 其它\end{cases};$$

(2) $p(\eta\le x)=\int_0^{0.2}dx\int_0^x 25e^{-5y}dy=0.3679$.

3.23 解: $(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}dxdy=1\Rightarrow A=20$

$$(2)F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}dxdy$$
$$=\left(\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{5}+\frac{1}{2}\right)$$

3.24 解: 当 $z\le 0$ 时，$f_Z(z)=0$,

当 $z>0$ 时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x^2+y^2\le z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr=e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}-1,$$

所以 $f_z(z)=F_z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}, z>0\\ 0, \quad z\le 0\end{cases}$.

3.25 解: 当 $z<0, z>1$ 时，$f_Z(z)=0$,

当 $0\le z\le 1$ 时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x-y\le z,0<x<1,0<y<x} 3xdxdy=\int_0^z dx\int_0^x 3xdy+\int_z^1 dx\int_{x-z}^x 3xdy=\frac{3z}{2}-\frac{z^3}{2},$$

所以 $f_z(z)=F_z'(z)=\begin{cases}\frac{3}{2}\left(1-z^2\right),0\le z\le 1\\ 0, \quad 其它\end{cases}$.

3.26 解：当 $x<0,x>1$ 时，$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0$，

当 $0\le x\le 1$ 时，$f_\xi(x)=\int_0^1 4xydy=2x$,所以 $f_\xi(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$,

当 $y<0,y>1$ 时，$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$，

当 $0\le y\le 1$ 时，$f_\eta(y)=\int_0^1 4xydx=2y$,所以 $f_\eta(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$,

因为 $f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$,所以独立。

3.27. 解：证明：由 $X\sim P(\lambda_1),Y\sim P(\lambda_2)$，可知 Z 取一切非负整数，且

$p(Z=k)=p(X+Y=k)$，$k=0,1,2,\cdots$

$$=\sum_{i=0}^{k}p(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}p(X=i)\cdot p(Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1{}^i e^{-\lambda_1}}{i!}\cdot\frac{\lambda_2{}^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1{}^i\lambda_2{}^{k-i}}{i!(k-i)!}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\cdot\lambda_1{}^i\lambda_2{}^{k-i}\cdot\frac{1}{k!}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

即 $Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

第　四　章　　随机变量的数字特征

4.1 解: $E(X)=(-1)\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}.$

$$E(-X+1)=-E(X)+1=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2)=(-1)^2\cdot\frac{1}{3}+0^2\cdot\frac{1}{6}+(\frac{1}{2})^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{1}{12}+2^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{35}{24}.$$

4.2 解:由题知

$$\begin{cases}P(X=-1)+P(X=0)+P(X=-1)+P(X=1)=1\\-P(X=-1)+P(X=1)=0.1\\P(X=-1)+P(X=1)=0.9\end{cases}$$

解之得 $P(X=-1)=0.4,\ P(X=0)=0.1,\ P(X=1)=0.5.$

4.3 解:引入随机变量 X_i:

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{在第i层有乘客下电梯，}\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$$

则

X_i	0	1
P	$(1-\frac{1}{n})^m$	$1-(1-\frac{1}{n})^m$

又 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 且 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 相互独立，故

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=n\cdot\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right]$$

4.4 解: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)dx=\frac{1}{3}.$

4.5 解: $E(2X)=\int_0^{+\infty}2xe^{-x}dx=2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=2.$

$$E(e^{-2x})=\int_0^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx=\frac{1}{3}.$$

4.6 解: 设球的直径为 Y，则球的体积为 $X=\frac{1}{6}\pi Y^3$. 由于 Y 在 $[a,b]$ 上均匀分布，故

$$E(X)=E(\frac{1}{6}\pi Y^3)=\frac{\pi}{6}E(Y^3)=\frac{\pi}{6}\int_a^b y^3\cdot\frac{1}{b-a}dy=\frac{\pi}{24}(a+b)(a^2+b^2).$$

4.7 解: 设第 i 个人摸到红球数为 $X_i, i=1,2,\cdots,n,$ 则 n 个人总共摸到红球数为 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，

且 X_i 相互独立，由于

$$P(X_i=0)=\frac{C_3^2}{C_5^2},P(X_i=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2},P(X_i=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2},$$

所以 $E(X_i)=0.8, DX_i=0.36,$

从而 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=0.8n, D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=0.36n$

4.8 解: 由题意知试开次数 X 的分布为 $P(X=i)=\frac{1}{n}, i=1,2,\cdots,n.$ 故

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}i\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\sum_{i=1}^{n} i^2\cdot\frac{1}{n}-(\frac{n+1}{2})^2$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{n^2-1}{12}.$$

4.9 解：利用 X 与 Y 相互独立知

$$E(XY)=EX\cdot EY=\int_0^1 x\cdot 2xdx\cdot\int_5^{\infty} y\cdot e^{-(y-5)}dy=\frac{2}{3}\times 6=4.$$

4.10 解:由定义知 $E(X)=\int_{-1}^{1} x\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=0.$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X^2)=\int_{-1}^{1} x^2\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

直接计算得 $\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{4}$.所以 $D(X)=\frac{1}{2}$.

4.11 解： $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\int_0^{\infty} x\cdot 2e^{-2x}dx+\int_0^{\infty} y\cdot 4e^{-4y}dy=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$

$$E(2X-3Y^2)=2E(X)-3E(Y^2)=2\int_0^{\infty} x\cdot 2e^{-2x}dx-3\int_0^{\infty} y^2\cdot 4e^{-4y}dy$$

$$=1-3\times\frac{2}{4^2}=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}.$$

4.12 解:设 X_i 为第 i 次掷出的点数，则点数之和为 $X=\sum_{i=1}^{12} X_i$，并且 X_i 相互独立，由此

可知 $E(X)=\sum_{i=1}^{12} E(X_i),\ D(X)=\sum_{i=1}^{12} D(X_i).$

由于 $P(X_i=k)=\frac{1}{6},k=1,2,\cdots,6,$

所以 $E(X_i)=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2},\ D(X_i)=\frac{36-1}{12}=\frac{35}{12}.$

从而 $E(X)=12\cdot\frac{7}{2}=42,\ D(X)=12\cdot\frac{35}{12}=35.$

4.13 解:由定义知

$$E(X)=\sum_{i,j} x_i p_{ij}=0(0.1+0.2)+1(0.3+0.4)=0.7.$$

$$E(Y)=\sum_{i,j} y_j p_{ij}=0(0.1+0.3)+1(0.2+0.4)=0.6.$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0.7-(0.7)^2=0.21.$$

$$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=0.6-(0.6)^2=0.24.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\sum_{i,j}x_iy_jp_{ij}-0.6\cdot 0.7=0.4-0.6\cdot 0.7=-0.02.$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-0.02}{\sqrt{0.21}\sqrt{0.24}}=-0.09.$$

4.14 解:由定义知 $E(X)=\int_0^2\int_0^2 x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2\int_0^2(x^2+xy)dxdy=\frac{1}{8}\int_0^2 dx\int_0^2(x^2+xy)dy$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^2[x^2y+\frac{1}{2}xy^2]_0^2dx=\frac{1}{4}\int_0^2(x^2+x)dx=\frac{7}{6}.$$

同理可算 $E(Y)=\frac{7}{6}$.

$$E(X^2)=\int_0^2\int_0^2x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy=\frac{1}{8}\int_0^2\int_0^2(x^3+x^2y)dxdy$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^2(x^3+x^2)dx=\frac{5}{3}.$$

所以 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36}$.

同理可算得 $D(Y)=\frac{11}{36}$

由于 $E(XY)=\int_0^2\int_0^2xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy=\frac{1}{8}\int_0^2\int_0^2(x^3y+xy^2)dxdy=\frac{4}{3}$.

所以 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{49}{36}=-\frac{1}{36}$.

从而 $\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{11}$.

4.15 解:利用 X 与 Y 相互独立,

$$E((X+Y)^2)=E(X^2+Y^2+2XY)=E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)$$
$$=E(X^2)+E(Y^2)+2E(X)E(Y)=D(X)+(EX)^2+D(Y)+(EY)^2+2E(X)E(Y)$$
$$=1+0^2+1+0^2+2\times 0\times 0=2.$$

4.16 解:由于 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$

$$=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}$$

所以 $D(X+Y)=25+36+2\cdot 0.4\cdot\sqrt{25\times 36}=85$

类似地, $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\rho_{XY}\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}$,

所以 $D(X-Y)=25+36-2\cdot 0.4\cdot\sqrt{25\cdot 36}=37$.

4.17 解:设

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{号球放入第}i\text{号盒内}\\ 0 & \text{否则}\end{cases},i=1,2,\cdots,n.$$

则 $P(X_i=1)=\dfrac{1}{n}$, 因此 $EX_i=\dfrac{1}{n}$. 由于 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，所以 $EX=\sum_{i=1}^{n}EX_i=1$

4.18 解:由 (X,Y) 的分布律易算得

$$E(XY)=\sum_{i,j}x_iy_jp_{ij}=0,\ E(X)=\sum_{i,j}x_ip_{ij}=0,\ E(Y)=\sum_{i,j}y_jp_{ij}=0.$$

故 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$，从而知 X 与 Y 是不相关的。但由于

$$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{8},P(X=1)=\frac{3}{8},P(Y=1)=\frac{3}{8},$$

可得 $P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)P(Y=1)$，故 X 与 Y 不是相互独立的。

4.19 解:由于 X 和 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，所以

$$\begin{aligned}&\operatorname{cov}(U,V)=E(UV)-E(U)\cdot E(V)\\&=E(aX+bY)(aX-bY)-(aEX+bEY)(aEX-bEY)\\&=a^2E(X^2)-b^2E(Y^2)-a^2(EX)^2+b^2(EY)^2\\&=a^2D(X)-b^2D(Y)=(a^2-b^2)\sigma^2,\end{aligned}$$

$$D(U)=a^2D(X)+b^2D(Y)=(a^2+b^2)\sigma^2$$

$$D(V)=a^2D(X)+b^2D(Y)=(a^2+b^2)\sigma^2$$

从而得 $\rho_{UV}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$

4.20 解: X 的 k 阶原点矩 $E\left(X^k\right)=\dfrac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^ke^{-\frac{x}{\theta}}dx$，

作变量替换 $\dfrac{x}{\theta}=t$，则 $dx=\theta dt$，得 $E\left(X^k\right)=\theta^k\int_0^{+\infty}t^ke^{-t}dt=\theta^k\Gamma(k+1)=k!\theta^k$.

第 五 章 大数定律及中心极限定理

5.1 解:设 X 表示 n 次重复独立试验中事件 A 出现的次数，则 $X \sim B(n,0.8)$， A 出现的频率为 $\frac{X}{n}$， $E(X)=0.8n, D(X)=0.8\times 0.2n=0.16n$，则

$$P\left(0.79<\frac{X}{n}<0.81\right)=P\left(|X-0.8n|<0.01n\right)$$

$$\geq 1-\frac{D(X)}{(0.01n)^2}=1-\frac{0.16n}{0.0001n^2}$$

$$=1-\frac{1600}{n}.$$

由题意得

$$1-\frac{1600}{n}\geq 0.95,\quad n\geq 32000.$$

可见做 32000 次重复独立试验中可使事件 A 发生的频率在 0.79～0.81 之间的概率至少为 0.95.

5.2 解：证明：随机变量的数字特征为

$$E\left(X_k\right)=\sqrt{lnk}\times\frac{1}{2}+\left(-\sqrt{lnk}\right)\times\frac{1}{2}=0,$$

$$D\left(X_k\right)=E\left(\sqrt{X_k^2}\right)=Lnk\times\frac{1}{2}+Lnk\times\frac{1}{2}=Lnk,$$

$$E\left(\bar{X}_n\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=0,$$

$$D\left(\bar{X}_n\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\left(X_k\right)=\frac{1}{n^2}\left(Ln1+Ln2+\ldots+Lnn\right)\le\frac{n}{n^2}Lnn=\frac{Lnn}{n}.$$

对于任意给定的正数 ε，由切比雪夫不等式知

$$P\left(\left|\bar{X}_n-0\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{1}{\varepsilon^2}D\left(\bar{X}_n\right)\le\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{Lnn}{n},$$

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\left|\bar{X}_n\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{1}{\varepsilon^2}\lim_{n\to+\infty}\frac{Lnn}{n}=0.$$

所以 $\left\{X_n\right\}$ 服从大数定律.

5.3 解：证明：任给 n，$a<X_{(n)}<b$，且 $X_i\sim U\left(a,\ b\right)\left(a>0\right)$，$i=1,2,\cdots$，则

当 $a<x<b$ 时，有

$$P\left(X_{(n)}\le x\right)=P\left(\max\left\{X_1,\ldots X_n\right\}\le x\right)=P\left(X_1\le X\right)\cdots P\left(X_n\le x\right)=\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n;$$

当 $x\le a$ 时，有 $P\left(X_{(n)}\le x\right)=0$；

当 $x\ge b$ 时，有 $P\left(X_{(n)}\le x\right)=1$.

任给 $\varepsilon>0\left(\varepsilon<b\right)$，有

$$P\left(\left|X_{(n)}-b\right|>\varepsilon\right)=P\left(X_{(n)}<b-\varepsilon\right)+P\left(X_{(n)}>b+\varepsilon\right)=P\left(X_{(n)}<b-\varepsilon\right)$$

若 $b-\varepsilon\le a$，则 $P\left(\left|X_{(n)}-b\right|>\varepsilon\right)=0$ ，故

$$P\left(\left|X_{(n)}-b\right|>\varepsilon\right)\to0,n\to\infty;$$

若 $b-\varepsilon>a$,则

$$P\left(\left|X_{(n)}-b\right|>\varepsilon\right)=\left(\frac{b-\varepsilon-a}{b-a}\right)^n\to 0,\quad n\to\infty.$$

所以任给$\varepsilon>0\left(\varepsilon<b\right)$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|X_n-b\right|>\varepsilon\right)=0,$$

从而证得$\{X_n\}\xrightarrow{P}b$.

5.4 解：记$n=\{$检查灯泡的数量$\}$，$X_i=\{$第i个灯泡的寿命$\}$，则

$$E\left(X_i\right)=2250,D\left(X_i\right)=250^2,$$

记$X=\{$检查灯泡的总寿命$\}$，则

$$E\left(X\right)=2250n,D\left(X\right)=250^2 n,$$

则通过检查的概率为：

$$P\left(X\geq 2200n\right)=1-P\left(X<2200n\right)$$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{2200n-2250n}{250\sqrt{n}}\right)\geq 0.997,$$

即 $$\frac{1}{5}\sqrt{n}\geq 2.75\Rightarrow n\geq 189.06.$$

因此，要使检查通过的概率不小于 0.997，应至少检查 190 只灯泡.

5.5 解：记$X_i=\{$第i个加工产生的误差$i=1,2,\cdots,100\}$，则

$$E\left(X_i\right)=0,D\left(X_i\right)=\frac{1}{12}.$$

记S=\{100 次计算产生的误差\}，则

$$S=\sum_{i=1}^{100}X_i\Big/100,$$

则 $$E\left(S\right)=0,D\left(S\right)=\frac{1}{1200},$$

根据中心极限定理得：

$$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{20}<S<\frac{\sqrt{3}}{20}\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{20}\Big/\sqrt{\frac{1}{1200}}\right)-1=2\Phi\left(3\right)-1=0.9974.$$

5.6 解：随机变量X服从二项分布B(1000+a，0.014)，由棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理有

$P(0 \le X \le a)$

$= P\left(\frac{0-(1000+a)\times 0.014}{\sqrt{(1000+a)\times 0.014\times 0.986}} \le \frac{X-(1000+a)\times 0.014}{\sqrt{(1000+a)\times 0.014\times 0.986}} \le \frac{a-(1000+a)\times 0.014}{\sqrt{(1000+a)\times 0.014\times 0.986}} \right)$

$\approx \Phi\left(\frac{0.986a-14}{\sqrt{(1000+a)\times 0.013804}} \right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{(1000+a)\times 7}{493}} \right)$

而$\Phi\left(-\sqrt{\frac{(1000+a)\times 7}{493}} \right) \approx 0$，于是

$$P(0 \le X \le a) \approx \Phi\left(\frac{0.986a-14}{\sqrt{(1000+a)\times 0.013804}} \right) > 0.90,$$

查表得$\Phi(1.28)=0.90$，所以$\frac{0.986a-14}{\sqrt{(1000+a)\times 0.013804}} > 1.28$，可得$a \ge 19$.

5.7 解:设第k位顾客的消费额为$X_k\,(k=1,2,\cdots,10000)$，商场日销售额为$X$，则

$$X=\sum_{k=1}^{10000} X_k,$$

因为X_k在$[100,1000]$上服从均匀分布，所以

$$E(X_k)=\frac{1}{2}(100+1000)=550,\quad D(X_k)=\frac{(1000-100)^2}{12}=\frac{900^2}{12}.$$

日平均销售额和销售额方差分别为:

$$E(X)=\sum_{\mathrm{k}=1}^{10000} E(X_{\mathrm{k}})=10000\times 550=55\times 10^5,$$

$$D(X)=\sum_{\mathrm{k}=1}^{10000} D(X_{\mathrm{k}})=10000\times \frac{900^2}{12}.$$

由于$X_k(k=1,2,\cdots,10000)$独立同分布，由列维定理，有

$$\begin{aligned}
&P\left(55\times 10^5-20000 \le X \le 55\times 10^5+20000\right)\\
&=P\left(-20000 \le X-55\times 10^5 \le 20000\right)\\
&=P\left(\frac{-20000}{100\times 900/\sqrt{12}} \le \frac{X-55\times 10^5}{100\times 900/\sqrt{12}} \le \frac{20000}{100\times 900/\sqrt{12}} \right)\\
&\approx 2\Phi\left(\frac{20000}{100\times 900/\sqrt{12}} \right)-1 \approx 2\Phi(0.77)-1=0.56.
\end{aligned}$$

因此，日销售额在$\left[55\times10^5-2\times10^4, 55\times10^5+2\times10^4\right]$的概率为$0.56$.

5.8 解：设 X_i, Y_i 分别表示在第 i 个小单元内，轰炸机和歼击机被打下的架数（$i=1,2,\cdots,50$），其分布规律分别为：

$$P\left(X_i=0\right)=0.6, P\left(X_i=1\right)=0.4, \left(i=1,2,\cdots,50\right),$$

$$P\left(Y_i=0\right)=0.3, P\left(Y_i=1\right)=0.5, P\left(Y_i=2\right)=0.2, \left(i=1,2,\cdots,50\right),$$

数学期望和方差分别为：

$$E\left(X_i\right)=0.4,\ D\left(X_i\right)=0.24,\ E\left(Y_i\right)=0.9,\ D\left(Y_i\right)=0.49, \left(i=1,2,\cdots,50\right).$$

设X_n，Y_n分别表示在一次空战中轰炸机以及歼击机被打下的架数，则有

$$X_n=\sum_{i=1}^{50}X_i,\quad Y_n=\sum_{i=1}^{50}Y_i.$$

因为$X_1,\cdots,X_{50}$；$Y_1,\cdots,Y_{50}$是相互独立的随机变量，所以

$$E\left(X_n\right)=\sum_{i=1}^{50}E\left(X_i\right)=50\times0.4=20, D\left(X_n\right)=\sum_{i=1}^{50}D\left(X_i\right)=50\times0.24=12,$$

$$E\left(Y_n\right)=\sum_{i=1}^{50}E\left(Y_i\right)=50\times0.9=45, D\left(Y_n\right)=\sum_{i=1}^{50}D\left(Y_i\right)=50\times0.49=24.5.$$

由列维定理知

$$X_n=\sum_{i=1}^{50}X_i\text{近似服从正态分布}N(20,12),$$
$$Y_n=\sum_{i=1}^{50}Y_i\text{近似服从正态分布}N(45,24.5).$$

(1)事件“空战中，有不少于 35%的轰炸机被打下”即 $X_n\geq50\times35\%$，则

$$\begin{aligned}P\left(X_n\geq50\times35\%\right)&=P\left(X_n\geq17\right)\\&=P\left(\frac{X_n-20}{\sqrt{12}}\geq\frac{17-20}{\sqrt{12}}\right)\\&\approx1-\Phi\left(-0.866\right)=\Phi\left(0.866\right)=0.806.\end{aligned}$$

(2)记 M 为歼击机被打下来的最大架数，则得

$$P\left(0 \le Y_n \le M\right) = P\left(\frac{0-45}{\sqrt{24.5}} \le \frac{Y_n-45}{\sqrt{24.5}} \le \frac{M-45}{\sqrt{24.5}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{M-45}{\sqrt{24.5}}\right) - \Phi\left(-\frac{45}{\sqrt{24.5}}\right).$$

而$\Phi\left(\frac{45}{\sqrt{24.5}}\right) = \Phi\left(-9.09\right) \approx 0$，于是$\Phi\left(\frac{M-45}{\sqrt{24.5}}\right) = 0.90$，查表得 $\frac{M-45}{\sqrt{24.5}} = 1.28$，

因为M为正整数，且$M \ge 51.34$　所以取$M = 52$

第　六　章　　数理统计的基本定理

6.1 解:（1）20.25;（2）1.165

6.2 解:（1） $\overline{X} \sim N(10, \frac{3}{2})$，（2）0.261

6.3 解: $P(\sum_{i=1}^{6} X_i > 6.54) = P(\sum_{i=1}^{6} (\frac{X_i}{2})^2 > 1.635) = 0.95$

6.4 解:（1）3.325;（2）2.088;（3）27.488;（4）6.262.

6.5 解: （1）2.228;（2）1.813;（3）1.813;（4）-2.764.

6.6 解:（1）3.23;（2）$\dfrac{1}{3.39}$;（3）$\dfrac{1}{2.85}$; （4）2.06.

6.7 解:（1）$f(x_1,x_2,\cdots,x_6)=\begin{cases}\theta^{-6} & 0<x_1,x_2,\cdots,x_6<\theta \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（2）T_1，T_4是，T_2，T_3不是。因为T_1，T_4中不含总体中的唯一未知参数θ，而 T_2，T_3 中含有未知参数θ

6.8 解:（1）易见，$X_1^2+X_2^2$即为二个独立的服从N(0,1)的随机变量平方和，服从χ^2(2)分布，即$c=1$；自由度为2.

（2）由于$X_1+X_2\sim N(0,2)$，则$\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$.

又 $X_3^2+X_4^2+X_5^2\sim\chi^2(3)$，$\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ 与 $X_3^2+X_4^2+X_5^2$ 相互独立，则 $\dfrac{(X_1+X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/3}}\sim t(3)$ 即 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}\sim t(3)$

即$d=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，自由度为3.

6.9 解: $X_1-2X_2\sim N(0,5\times 2^2)$，$3X_3-4X_4\sim N(0,25\times 2^2)$ $\dfrac{3X_3-4X_4}{10}\sim N(0,1)$，

$$(\frac{X_1-2X_2}{2\sqrt{5}})^2+(\frac{3X_3-4X_4}{10})^2\sim\chi^2(2)$$

所以$a=\dfrac{1}{20},b=\dfrac{1}{100}$自由度为2

6.10 解: $\sum_{i=1}^{10}(\dfrac{X_i}{2})\sim\chi^2(10)$，$\sum_{i=11}^{15}(\dfrac{X_i}{2})\sim\chi^2(5)$ $Y=\dfrac{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{10}\frac{X_i^2}{10}}{\frac{1}{4}\sum_{i=11}^{15}\frac{X_i^2}{5}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}X_i^2}{\sum_{i=11}^{15}\frac{X_i}{5}}\sim F(10,5)$

第 七 章　　参数估计

7.1 解: 由两点分布可知， $E(X)=p,\bar{x}=E(X)$,而

$\bar{x}=\dfrac{1}{6}(1+1+0+1+1+1)=\dfrac{5}{6}$, 所以$\hat{p}=\dfrac{5}{6}$.由$p=r/100$，于是$\hat{r}=100\hat{p}=100\times\dfrac{5}{6}\approx 83$.

故红球的矩估计值为 $\hat{r}=83$个.

7.2 解: 已知$\mu=E(X),\sigma^2=D(X)=E(X^2)-E^2(X)$.

因此可用样本一阶原点矩和二阶原点矩去估计.

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X},\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

7.3 解: $E(X)=\dfrac{\theta}{2},$ 因此 $\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}.$

所以 $\hat{\theta}=2\overline{X},$ 就是 θ 的矩估计量.

7.4 解: X 的分布密度 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}(\dfrac{1}{\theta})^n, & 0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

由此式可见，要 L 最大，只要 θ 最小，而由 L 的表达式知，当 $\hat{\theta}=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 时，θ 为最小，此时 L 最大.故 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，而似然估计量为

$$\hat{\theta}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

7.5 解：设总体 X 的分布的期望 $E(X)=\theta$，每个样本 X_i 的分布与总体分布相同，因此其均值 $E(X_i)=\theta$，而 $E(\overline{X})=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{E(X_i)}{n}=n\cdot\dfrac{\theta}{n}=\theta,$

因此，样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值的无偏估计量.

7.6 解:设总体期望为 μ ,方差为 σ^2 .样本与总体同分布.所以

$E(X_n)=\mu, E(\overline{X_n})=\mu, E(\overline{X_{n+1}})=\mu,$ 三者均是 μ 的无偏估计.

$$D(X_n)=D(X)=\sigma^2,\ D(\overline{X_n})=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n},$$

$$D(\overline{X_{n+1}})=\frac{1}{(n+1)^2}\cdot(n+1)\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n+1}.$$

三者比较，$\overline{X_{n+1}}$ 的方差最小，故为最有效.

7.7 解: （1）λ 已知，写出似然函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}, & x_i\geq\mu(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\ln L=\begin{cases}n\ln\lambda-\lambda(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\mu), & x_i\geq\mu(i=1,2,\cdots,n),\\ -\infty, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\frac{d\ln L}{d\mu}=n\lambda>0.$$

这说明 $\ln L$ 是随 μ 的增加而增加的.由于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均大于等于 μ，所以要使 $\ln L$ 最大，只须 μ 最大，而 $\mu_{\max}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,此值即为 μ 的极大似然估计，即 $\hat{\mu}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

（2）直接求 $E(X)$

$$E(X)=\int_{\mu}^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda(x-\mu)}dx=\int_0^{+\infty}(y+\mu)\lambda e^{-\lambda y}dy=\frac{1}{\lambda}+\mu.$$

由矩估计法，这里 μ 已知，故 λ 的矩估计为 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}-\mu}$, 其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

7.8 解: 设随机变量 $Y=X-1$ 因为 $X\sim N(1,\sigma^2)$,所以 $Y\sim N(0,\sigma^2)$,

$$E|X-1|=E|Y|=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}dy$$

$$=2\int_0^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=2\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

$$E(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i-1|)=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot nE|X-1|=\sigma.$$

（因为样本 X_i 与总体 X 同分布），故 $\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i-1|$ 为 σ 的无偏估计.

7.9 解: $E(\hat{\theta})=E(2\overline{X})=2E(\overline{X})=2\times\dfrac{\theta}{2}=\theta$, 所以 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

由于 $\hat{\theta}_L=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立与总体 X 同分布.由已知

$X \sim U[0,\theta]$，所以 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & 其他.\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<0, \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0 \le x \le \theta, \\ 1, & x>\theta.\end{cases}$

$$F_\theta(z)=F_{x_1}(z)F_{x_2}(z)\cdots F_{x_n}(z)=[F(z)]^n,$$

$$f_\theta(z)=F_\theta{}'(z)=nF^{n-1}(z), \qquad f(z)=\begin{cases}n\dfrac{z^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le z \le \theta, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$E(\hat{\theta}_L)=\int_0^\theta zn\frac{z^{n-1}}{\theta^n}dz=\frac{n}{\theta^n}\frac{1}{n+1}z^{n+1}\Big|_0^\theta=\frac{n}{n+1}\theta.$$

因为 $E(\hat{\theta}_L) \ne \theta$，所以 $\hat{\theta}_L$ 不是无偏估计.

7.10 解：设 $\hat{\theta}_1=\frac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3}X_i=\frac{4}{3}M$，$\hat{\theta}_2=4\min\limits_{1\le i\le 3}X_i=4N$.由于

$$F(x,\theta)=\begin{cases}1, & x\ge\theta, \\ \dfrac{x}{\theta}, & x\in(0,\theta), \\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

故统计量 M 的分布函数为

$$F_M(x)=[F(x,\theta)]^3=\begin{cases}1, & x\ge\theta, \\ (\dfrac{x}{\theta})^3, & x\in(0,\theta), \\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

而统计量 N 的分布函数为

$$F_N(x)=1-(1-F(x,\theta))^3=\begin{cases}1, & x\ge\theta, \\ 1-(1-\dfrac{x}{\theta})^3, & x\in(0,\theta), \\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

从而 $M=\max\limits_{1\le i\le 3}X_i$，$N=\min\limits_{1\le i\le 3}X_i$ 的密度函数分别为

$$f_M(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3} & x\in(0,\theta) \\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f_N(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{\theta}(1-\dfrac{x}{\theta})^2 & x\in(0,\theta) \\ 0 & 其他\end{cases}$$

故 $E(M)=\int_0^\theta x\dfrac{3x^2}{\theta^3}dx=\dfrac{3}{4}\theta$

$$E(N)=\int_0^\theta x\frac{3}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})^2\,dx=\frac{1}{4}\theta$$

因此　$E(\hat{\theta}_1)=E(\frac{4}{3}M)=\theta.\ E(\hat{\theta}_2)=E(4N)=\theta.$

故$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 均为无偏估计.

$$D(M)=E(M^2)-E^2(M)=\int_0^\theta x^2\frac{3x^2}{\theta^3}\,dx-(\frac{3}{4}\theta)^2=\frac{3}{80}\theta^2,$$

$$D(N)=E(N^2)-E^2(N)=\int_0^\theta x^2\frac{3}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})^2\,dx-(\frac{1}{4}\theta)^2=\frac{3}{80}\theta^2,$$

因此　$D(\hat{\theta}_1)=D(\frac{4}{3}M)=\frac{16}{9}D(M)=\frac{16}{9}\frac{3}{80}\theta^2=\frac{1}{15}\theta^2,.$

$$D(\hat{\theta}_2)=D(4N)=16D(N)=16\times\frac{3}{80}\theta^2=\frac{3}{5}\theta^2.$$

由于 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$,所以 $\hat{\theta}_1$ 较$\hat{\theta}_2$ 更有效.

7.11 解:设一组样本值为$x_1,x_2,\cdots,x_n$,似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\lambda^n\alpha^n x^{n(\alpha-1)}e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i^\alpha},$$

$$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=n\ln\lambda+n\ln\alpha+n(\alpha-1)\ln x-\lambda\sum_{i=1}^n x_i^\alpha,$$

令 $\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^n x_i^\alpha=0$得$\lambda=n/\sum_{i=1}^n x_i^\alpha$,即为$\lambda$ 的极大似然估计值.将样本值以样本随机变量替代，则得λ 的极大似然估计量为$\hat{\lambda}=n/\sum_{i=1}^n X_i^\alpha$.

7.12 解:　$T_1=\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$

$$E(T_1)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}E(X_i)=\frac{1}{2n}2n\mu=\mu,$$

$$E(T_2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_{2i})=\frac{1}{n}(E(X_2)+E(X_4)+\cdots+E(X_{2n}))\frac{1}{n}n\mu=\mu.$$

故T_1,T_2均是μ 的无偏估计量.

$$D(T_1)=D(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i)=\frac{1}{4n^2}2nD(X)=\frac{1}{4n^2}2n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{2n},$$

$$D(T_2)=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{2i})=\frac{1}{n^2}nD(X)=\frac{\sigma^2}{n}.$$

故 $D(T_1)<D(T_2)$, T_1 比 T_2 更为有效.

7.13 解: $E(T)=E(a\sum_{i=1}^{n}X_i+b\sum_{j=1}^{m}Y_j)=a\sum_{i=1}^{n}E(X_i)+b\sum_{j=1}^{m}E(Y_j)$

$$an\mu+bm\mu=(an+bm)\mu.$$

当 $an+bm=1$时，$E(T)=\mu$ 故 a,b间应满足 $an+bm=1$的条件.

$$D(T)=a^2\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+b^2\sum_{j=1}^{m}D(Y_j)=a^2n+b^2 4m,$$

代入 $an+bm=1$关系式，得

$$D(T)=(1-bm)^2/n+b^2 4m.$$

求 $\frac{dD(T)}{db}=-\frac{2m}{n}(1-bm)+8bm=0$, 得

$$b=\frac{1}{m+4n},\ a=(1-bm)/n=4/m+4n=4b.$$

因为 $\frac{d^2D(T)}{db^2}=\frac{2m^2}{n}+8m>0$,

故当 $b=\frac{1}{m+4n}, a=4b$时，$D(T)$最小.即此时估计量 T 最有效.

7.14 解: μ 的置信区间为

$$[\bar{x}-t_{0.025}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{0.025}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}].$$

而 $n=5$, $\bar{x}=\frac{1}{5}(1250+\cdots+1275)=1259$,

$$S^2=\frac{1}{5-1}[(1250-1259)^2+\cdots+(1275-1259)^2]=\frac{570}{4}$$

于是 $\sqrt{\frac{S^2}{n}}=\sqrt{\frac{570}{4\times 5}}=5.339$, $n-1=4$. 查 t 分布表得 $t_{0.025}(4)=2.78$, 故

$$t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}=2.78\times 5.339=14.8$$

$$\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}=1259-14.8=1244.2,$$

$$\bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}=1259+14.8=1273.8.$$

于是温度真值 μ 的置信区间为 $[1244.2,1273.8]$.

7.15 解:因为 $X\sim N(\mu,0.01^2)$，所以方差 σ^2 已知，求数学期望 μ 的置信区间。

$\overline{X}=2.125,\ \sigma=0.01,\ n=16,\ \alpha=0.1$.查标准正态分布表，得 $u_{\alpha/2}=u_{0.05}=1.645$, 有

置信上限为 $\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.05}=2.121,$

置信下限为 $\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.05}=2.129,$

因此，μ 的置信区间为 $(2.121,2.129)$.

7.16 解: 因为 σ^2 未知，故只用 t 分布.此时，$\bar{x}=2.125, s=0.01713,\ n=16,\alpha=0.1$. 查 t 分布表，得 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.05}(15)=1.753$, 有

置信上限为：$\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.05}(15)=2.118$，

置信下限为：$\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.05}(15)=2.133$.

因此，μ 的置信区间为（2.118，2.133）

7.17 解：由于 μ,σ^2 均未知，故选随机变量 $t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$

从而有 $$P(|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}|<t_{0.025}(8))=0.95.$$

由 $n=9$ 查 t 分布表得 $t_{0.025}(8)=2.31$, 算得 $\bar{x}=6$

$$S^2=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2=0.33.$$

得 μ 的置信区间为 $(\bar{x}-t_{0.025}(8)\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{0.025}(8)\frac{S}{\sqrt{n}})=(5.56,6.44).$

7.18 解: 已知方差 $\sigma^2=16$, 且为 $N(\mu,16)$ 总体，应选随机变量

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

已知$1-\alpha=0.95,$故有$P(|U|<U_{\alpha/2})=1-\alpha,$即 $P(|U|<U_{0.025})=0.95.$

查表得$u_{0.025}=1.96,$置信区间为$[\bar{x}-u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}],$置信区间长度

$L=2u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$

问题要求$L<1.2,$由此得 $2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<1.2$

所以 $n\geq(\frac{2\times1.96\times\sigma}{1.2})^2=\frac{2^2\times1.96^2\times16}{1.2^2}=171.$

故至少应抽查171名男生的身高.

7.19 解：由已知条件，选随机变量U， $U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$

而$1-\alpha=0.99,$置信区间为$[\bar{x}-u_{0.005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+u_{0.005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}],$

查标准正态分布表，得$u_{0.005}=2.57,n=400,\sigma=4,\bar{x}=166,$算得置信区间为

$$[166-2.57\frac{4}{\sqrt{400}},166-2.57\frac{4}{\sqrt{400}}]$$

$$=[166-\frac{2.57}{5},166+\frac{2.57}{5}]=[165.486,166.514].$$

7.20 解： $n=10,\ S^2=75.73,\ \alpha=0.05,$查$\chi^2$分布表，有

$\chi_{0.025}{}^2(9)=19.0,\ \chi_{0.975}{}^2(9)=2.70,\ \sigma^2$的置信限为

置信下限：$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(9)}=\frac{9\times75.73}{19.0}=35.87$，

置信上限：$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(9)}=\frac{9\times75.73}{2.70}=252.433$，

于是，σ^2的置信度为0.95的置信区间为$(35.87,252.433)$.

易得σ的置信度为0.95的置信区间为$(5.989,15.888)$.

7.21 解：选 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, 因为 $1-\alpha=0.95$, 取双侧置信区间，使

$$P(\lambda_1<\chi^2<\lambda_2)=0.95.$$

取 $\lambda_1=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),\lambda_2=\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$, 解不等式得 σ 的置信区间为

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\lambda_1}},\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\lambda_2}}\right]$$

查 χ^2 分布表得 $\lambda_1=\chi^2_{0.975}(19)=8.91,\ \lambda_2=\chi^2_{0.025}(19)=32.9,$

得置信区间为 $\left[\sqrt{\dfrac{19\times0.11^2}{32.9}},\sqrt{\dfrac{19\times0.11^2}{8.91}}\right]=[0.084,0.161].$

7.22 解：这是一个在两个正态总体方差未知且相等的情况下，求两总体均值差的置信区间问题。本题中，$n_1=10,n_2=15$，$\overline{X}=507,\overline{Y}=498,\ S_1=1.04,\ S_2=1.17,$ 计算 S_w，得

$$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S^2+(n_2-1)S^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{9\times1.04^2+14\times1.17^2}{23}}=1.121$$

$$\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}=0.4082$$

查 t 分布表，得 $t_{\alpha/2}(n_1+n_1-2)=t_{0.025}(23)=2.07$，得置信限为

$$\overline{X}-\overline{Y}-S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{0.025}(23)=507-498-1.121\times0.4082\times2.07=8.053,$$

$$\overline{X}-\overline{Y}+S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{0.025}(23)=507-498+1.121\times0.4082\times2.07=9.947.$$

于是，$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(8.053,9.947)$.

7.23 解：$S_1^2=0.245,S_2^2=0.375,n_1=6,n_2=9$

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(5,8)=4.82$$

$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(5,8)=\dfrac{1}{F_{0.025}(8,5)}=\dfrac{1}{6.76}$，置信限为

置信上限 $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}=\dfrac{0.245}{0.375\times4.82}=0.136$，

置信下限 $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}=\dfrac{0.245\times 6.76}{0.375}=4.417$，

故σ_1^2/σ_2^2的置信度为 0.95 的置信区间为$(0.136,4.417)$.

7.24 解：将$\overline{X}=1160$和$S=99.75$代入，得材料强度均值μ的 0.99 的置信下限为

$$\hat{\theta}_1=\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.01}(4)=1160-\frac{99.75}{\sqrt{5}}\times 3.75=992.7$$

这说明这批材料强度有 99%可能超过$992.7kg/cm^2$.

第　八　章　　假设检验

8.1 解：待检验假设$H_0:\mu=\mu_0=78.5, H_1:\mu\neq\mu_0$.

选检验统计量U，在H_0成立条件下，有

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

给定$\alpha=0.05$，于是否定域为

$$R_\alpha=\{|U|>u_{\alpha/2}\}=\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{\alpha/2}\}$$

查标准正态分布表，得$u_{0.025}=1.96.$

计算U值 $U=\frac{|76.4-78.5|}{7.6/\sqrt{40}}=1.75.$

因为$1.75<1.96$，故可以认为这届学生的语文水平和历届学生相比不相上下.

8.2 解:本题是已知方差，检验均值μ是否等于 8kg 的问题.因为有 50 条样本，比较大，因此总体可近似为正态分布$N(\mu,\sigma^2),\ \mu_0=8kg,\sigma_0=0.5kg.$

题中待检验假设为$H_0:\mu=\mu_0=8kg,H_1:\mu\neq\mu_0.$

在H_0成立条件下，选检验统计量$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$

$\alpha=0.01$，得此问题的否定域为

$$R_{0.01}=(U>u_{0.005}\text{或}U<-u_{0.005})$$

查标准正态分布表，得$u_{\alpha/2}=u_{0.005}=2.575.$

由样本数据，得

$$\overline{x}=7.8,n=50,\sigma_0=0.5.$$

算得U值为 $U=\frac{7.8-8.0}{0.5/\sqrt{50}}=-2.83$

由于$-2.83<-2.575$，样本落入否定域，故应否定H_0，即认为平均切断力不等于 8kg.，

8.3 解:本题是考察某项指标的差异显著性问题。

假设$H_0:\mu=23.0,H_1:\mu\neq23.0$

由显著性水平α，查t分布表，得$t_{0.005}(4)=4.60,$拒绝域为

$$W=\{|T|\geq t_{0.005}(4)=4.60\}$$

已知 $n=5,\alpha=0.01$，由样本值计算得 $\overline{X}=21.8,\ S^2=0.135,$ 代入得统计量观察值为

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{21.8-23.0}{\sqrt{0.135}/\sqrt{5}}=-7.30$$

因 $|T|=7.30>4.60,$ 故拒绝 H_0，从而认为这批抗菌素的某项指标与 23.0 有显著的差异，即该日生产不正常。

8.4 解：在 H_0 成立条件下，$\mu=0,\dfrac{\overline{X}-0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$

已知 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$ 也就是 $\dfrac{Q^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$

且相互独立，故 $T=\dfrac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}/\sqrt{\dfrac{Q^2}{\sigma^2(n-1)}}=\dfrac{\overline{X}\sqrt{n(n-1)}}{Q}\sim t(0,1).$

故应填 $T=\dfrac{\overline{X}\sqrt{n(n-1)}}{Q}.$

8.5 解:由题意知要检验的假设为

$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=0.048^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2=0.048^2$ 因为 μ 未知，用 χ^2 检验法，故统计量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}.$

在 H_0 成立的条件下，$\chi^2\sim\chi^2(n-1).$ 这里 $n=9,\alpha=0.05$，查 χ^2 分布表，有 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(8)=17.5,$

$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(8)=2.18,$ 由样本值计算得 $S^2=0.003653,$ 由此得

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{0.029224}{0.048^2}=12.684,$$

因 $2.18<12.684<17.5$，故接受 H_0，即认为这批维尼龙纤度的方差没有显著性的变化.

8.6 解： 本题为方差已知，检验元件平均使用寿命是否低于 $1000h$，属于单侧假设检验。根据题设

假设 $H_0:\mu\geq\mu_0=1000,\ H_1:\mu<1000.$

检验统计量为 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$，查表得临界值 $u_\alpha=u_{0.05}=1.645,$

将 $\overline{X}=950,\sigma=100$ 代入求得统计量的观察值为

$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=\dfrac{950-1000}{100/\sqrt{25}}=-2.5<-1.645$，故拒绝 H_0，即认为这批元件不合格.

8.7 解：本题为方差未知，判断在新工艺下生产的合金弦抗拉强度是否提高，属于单侧检验问题。

假设 $H_0:\mu\leq 10560,\ H_1:\mu>10560.$

检验统计量为$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，对显著性水平$\alpha$，

查H_0 ：$\mu \le 10560,\ H_1$ ：$\mu > 10560.$分布表得临界值$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(9)=1.833,$
由样本观察值得

$$\overline{X}=10631.4, S^2=6560.44,\ T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{10631.4-10560}{\sqrt{6560.44}/\sqrt{10}}=2.788>1.833$$

故拒绝H_0，即认为改进工艺后合金弦的抗拉强度有明显提高.

8.8 解：按题意检验假设 $H_0:\sigma^2 \le (0.005)^2, H_1:\sigma^2>(0.005)^2.$

选择检验统计量$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$，对于给定的显著性水平$\alpha$，

查表得临界值$\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(8)=15.5,$由题中提供的样本值计算统计量的值

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{8\times(0.007)^2}{(0.005)^2}=15.68.$$

由于$15.68>15.5$，故拒绝H_0，即认为这批导线的电阻标准差显著地偏大.

8.9 解： $H_0:\mu=\mu_0=19, H_1:\mu<\mu_0$

在H_0成立下，选检验统计量$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(9)$

对给定的检验水平α，此问题的拒绝域为

$$W_\alpha=\{T<-t_\alpha(n-1)\}.$$

查t分布表，得$t_{0.05}(9)=1.833.$

计算T值，$\overline{x}=17.1, S^2=\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2=8.544$

$$S=2.923, T=\frac{17.1-19}{2.923/\sqrt{10}}=-2.06<-1.833$$

T值落入拒绝域，故拒绝域H_0，而接受H_1，因此可以认为新法比老办法效果好.

8.10 解：待检验假设$H_0:\mu=\mu_0=2.6, H_1:\mu>\mu_0.$

已知样本容量$n=20, \overline{X}=3.0, S=0.11.$

选检验统计量T，在H_0成立条件下，有

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

给定$\alpha=0.05$，故否定域为

$$R_\alpha=\{|T|>t_\alpha(n-1)\}=\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|>t_\alpha(n-1)\}.$$

计算T值，查t分布表得

$$t_{0.05}(19)=1.729,\ T=\frac{3.0-2.6}{0.11/\sqrt{20}}=16.26.$$

由于$T>1.729$，故否定H_0，认为换材料后电阻平均值有明显提高.

8.11 解: 待检验假设$H_0:\mu=\mu_0=0.005,\ H_1:\mu<\mu_0$.

若H_0成立条件下，选统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$

对$\alpha=0.05$，单侧检验的否定域应选左侧，即

$$R_\alpha=\{T<-t_\alpha(n-1)\}.$$

算得T值，$T=\dfrac{0.00451-0.005}{0.00039/\sqrt{9}}=-\dfrac{49}{13}=-3.77.$

查t分布表可得$t_{0.05}(8)=1.860.$

由于$T<-1.860$，在否定域内，故否定H_0，即认为溶液水分含量低于0.5%，不合格.

8.12 解:设X和Y分别表示甲、乙两厂生产的灯泡寿命，由题意，

$X\sim N(\mu_1,84^2),Y\sim N(\mu_2,96^2)$，两厂灯泡寿命是否有显著性差异可表示为检验假设

$H_0:\mu_1=\mu_2,H_1:\mu_1\neq\mu_2$.

由于方差已知，故用U检验法。由$n_1=60,n_2=70,\overline{X}=1295,\overline{Y}=1230$，

$\sigma_1^2=84^2,\sigma_2^2=96^2$，由此得检验统计量的值为

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{1295-1230}{\sqrt{\dfrac{84^2}{60}+\dfrac{96^2}{70}}}=4.11$$

对$\alpha=0.05$，查标准正态分布表，得临界值$U_{\alpha/2}=U_{0.025}=1.96$.

由于$|U|=4.11>1.96$，故拒绝H_0，即认为两厂生产的灯泡的寿命有显著差异.

8.13 解:设X和Y分别表示处理前后的含脂率，则$X\sim N(\mu_1,\sigma^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，依题意，需检验假设

$H_0:\mu_1=\mu_2,H_1:\mu_1\neq\mu_2$

由样本值分别计算出处理前后样本均值和样本方差等数据如下：

$n_1=10,\overline{X}=0.723,S_1^2=0.005$，

$n_2 = 11, \overline{Y} = 0.141, S_2^2 = 0.00477.$

$$S_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{9\times 0.005 + 10\times 0.00477}{19}} = \sqrt{0.00488},$$

$$t_{0.025}(19) = 2.09$$

由于统计量的绝对值$|T| = \left|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right| = \frac{0.273-0.141}{\sqrt{0.00488\times(\frac{1}{10}+\frac{1}{11})}} = 4.3 > 2.09$

所以拒绝H_0即认为处理前后的含脂率有显著性的不同.

8.14 解：检验假设$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 2, H_1: \mu_1 - \mu_2 > 2.$

在H_0成立条件下，选检验统计量为

$$T = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - 2}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

而$\alpha = 0.05$，使$P(T > t_\alpha) = \alpha$成立，问题的否定域为

$$R_\alpha = \{T > t_\alpha\} = \{T > t_{005}(20)\}.$$

查t分布表得$t_{0.05}(20) = 1.725$. 算得T值

$$S_w = \sqrt{\frac{(12-1)\times 4^2 + (10-1)\times 5^2}{12+10-2}} = 4.478,$$

$$T = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2 - 2}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(85-81)-2}{4.478\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}}} = 1.04.$$

由于$1.04 < 1.725$，T未落入否定域，故接受H_0认为材料 1 比材料 2 的磨损深度并未超过 2 个单位.

8.15 解：解：设甲机器加工的零件尺寸为X，乙机器加工的零件尺寸为Y，并设

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$

检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$

选检验统计量F，在H_0成立条件下，

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\overline{x})^2}{\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\overline{y})^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

本题中，$n_1=11,n_2=9$ 算得 $S_1^2=0.064,S_2^2=0.030$

$$F=\frac{0.064}{0.030}=2.13$$

查F分布表，得$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(10,8)=4.30,$

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)}=\frac{1}{F_{0.025}(8,10)}=\frac{1}{3.85},$$

而$\frac{1}{3.85}<2.13<4.30,$ 故H_0相容，即没有发现两台机器加工零件的尺寸的精度有显著性差别.

8.16 解：根据题设，需检验假设$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2,$

由给定的样本值得$n_1=6,n_2=9$，$S_1^2=0.345,S_2^2=0.357,$ 统计量的值为

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{0.345}{0.357}=0.966,$$

查F分布表得 $F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.025}(5,8)=4.82,$

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.975}(5,8)=\frac{1}{F_{0.025}(8,5)}=\frac{1}{6.76}=0.1479,$$

因$0.1479<0.966<4.82,$ 故接受H_0，即在水平$\alpha=0.05$下认为两个总体的方差相等.

8.17 解:判断两批电子器材的电阻值是否有显著性差异，就需要检验

$$H_0:\mu_1=\mu_2,H_1:\mu_1\neq\mu_2,$$

但前提是$\sigma_1^2=\sigma_2^2$必须成立。而题中并不知道两总体的方差是否相等。因此，首先需检验

$$H_0^{'}:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1^{'}:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2,$$

选取$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$为检验统计量，$n_1=n_2=6$，

由给定的样本值得$S_1^2=7.87\times10^{-6},S_2^2=7.1\times10^{-6}$. 统计量$F$的值为

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{7.87\times10^{-6}}{7.1\times10^{-6}}=1.0803,$$

由$\alpha=0.05$，得临界值 $F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-2)=F_{0.025}(5,5)=7.15,$

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-2)=F_{0.975}(5,5)=\frac{1}{F_{0.025}(5,5)}=\frac{1}{7.15}=0.1399,,$$

由于 $0.1399 < 1.0803 < 7.15$, 故接受 $H_0^{'}$，即认为两总体方差相等。

下面检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$，

为此，取检验统计量 $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$，其中 $S_w = \sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$，由给定的样本值计算各统计量的值为

$\overline{X} = 0.1407, \overline{Y} = 0.1385,$

$S_w = \sqrt{\dfrac{5\times 7.87\times 10^{-6} + 5\times 7.1\times 10^{-6}}{10}} = 0.002718$，

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \frac{0.1407 - 0.1385}{0.002718\times\sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}}} = 1.402.$$

对给定的 $\alpha = 0.05$，查 t 分布表得临界值 $t_{\alpha/2}(n+n-2) = t_{0.025}(10) = 2.23.$

因 $1.402 < 2.23$, 所以接受 H_0，即认为两批电子器材的电阻值无显著性差异.

8.18 解: $S_1^2 = \dfrac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 - \dfrac{1}{n_1(n_1-1)}(\sum_{i=1}^{n_1} x_i)^2 = 0.4013,$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{j=1}^{n_2} y_j^2 - \frac{1}{n_2(n_2-1)}(\sum_{j=1}^{n_2} y_j)^2 = 0.4140.$$

(1) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$

选 F 检验，在 H_0 成立条件下

$$F = S_1^2 / S_2^2 \sim F(n_1-1, n_2-1) = F(8,5).$$

$\alpha = 0.05$，此检验法的否定域为

$$R_\alpha = \{F > F_{\alpha/2}(8,5) \text{或} F < F_{1-\alpha/2}(8,5)\}.$$

查 F 分布表，得 $F_{0.025}(8,5) = 6.76,$

$$F_{0.975} = 1/F_{0.025}(5,8) = 1/4.82 = 0.207$$

算 F 值，$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} = \dfrac{0.4013}{0.4140} = 0.9693.$

$0.207 < F < 6.76$ 不在否定域.故接受 H_0，认为 X 和 Y 的方差无明显差异.

（2）利用（1）的结果，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 但未知，故选随机变量

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2).$$

记 $l=t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$,其 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$[\overline{X}-\overline{Y}-lS_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\overline{X}-\overline{Y}+lS_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}].$$

由观测值计算 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

$$=\frac{(9-1)\times 0.4013+(6-1)\times 0.4140}{9+6-2}=0.4062,$$

$$S_w=0.6373.$$

查 t 分布表，得 $t_{0.025}(13)=2.16.$

$\mu_1-\mu_2$ 的 95% 的置信区间为

$$(41.2-34.1\pm 2.16\times 0.6373\times\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{6}})$$
$$\approx(7.10\pm 0.73)=(6.37,7.83).$$

8.19 解:本题中的数据是成对的，即对同一试块测出一对数据，两个数据的差异则可看成是仅由这两台仪器的性能的差异所引起的.

各对数据的差记为 $d_i=x_i-y_i$ 假设 $d_1,d_2,\cdots,d_9$ 来自正态总体 $N(\mu_d,\sigma^2)$，这里的 μ_d,σ^2 均未知，如果两台仪器的性能一样，则各对数据的差异 $d_1,d_2,\cdots,d_9$ 属随机误差，　　而随机误差可以认为服从正态分布，其均值为零.因此本题归结为检验假设

$$H_0:\mu_d=0,\qquad H_1:\mu_d\neq 0.$$

数据 $d_1,d_2,\cdots,d_9$ 的样本均值为 $\overline{d}$，样本方差为 S^2 由于 μ_d,σ^2 均未知，故用 t 检验法，在 H_0 成立条件下　　$t=\dfrac{\overline{d}-0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

此检验法的否定域为　$|t|=\left|\dfrac{\overline{d}-0}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{\alpha/2}(n-1)$

现在 $n=9,\ t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.005}(8)=3.36$,由观察值得 $\overline{d}=0.06,\ S=0.1227,$ 故

$$|t|=\frac{0.06}{0.1227/\sqrt{9}}=1.467<3.36.$$

$|t|$ 的值未落入否定域内，故接受 H_0，认为两台仪器的测量结果无显著性差异.

第　九　章　线性统计模型

9.1 解:（1）求 y 对 x 的回归方程

由已知数据可算出：

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 68 + 53 + \cdots + 64 = 675$$

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 67.5$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 288 + 293 + \cdots + 286 = 3150$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = 315$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 68^2 + 53^2 + \cdots + 64^2 = 46659$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 288^2 + 293^2 + \cdots + 286^2 = 1000120$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 68\times 288 + 53\times 293 + \cdots + 64\times 286 = 214672$$

进而可以计算出

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10} x_i)^2 = 46659 - \frac{1}{10}\times 675^2 = 1096.5\text{,}$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - \frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10} y_i)^2 = 1000120 - \frac{1}{10}\times 3150^2 = 7870\text{,}$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10} x_i)(\sum_{i=1}^{10} y_i) = 214672 - \frac{1}{10}\times 675\times 3150 = 2047$$

于是

$$\hat{b} = \frac{2047}{1096.5} = 1.87\text{,}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 315 - 1.87\times 67.5 = 188.78$$

回归方程为：$\hat{y} = 188.78 + 1.87x$

⑵相关性检验　　$U = 1.87\times 2047 = 3827.89$

$$Q = 7870 - 3827.89 = 4042.11$$

$$F = \frac{U}{Q}(n-2) = \frac{3827.89 \times 8}{4042.11} = 7.58$$

对于给定的显著性水平$\alpha = 0.05$，查表，

$$F_{1-\alpha}(1, n-2) = F_{0.95}(1, 8) = 5.32$$

由于$F = 7.58 > 5.32$，所以认为铝的抗张强度与硬度之间有显著的线性相关关系，回归方程显著有效.

(3)求当$x = 65$时，y的预报区间

查表，$t_{1-\alpha/2}(n-2) = t_{0.975}(8) = 2.306$，

$\hat{\sigma} = \sqrt{\dfrac{Q}{n-2}} = \sqrt{\dfrac{4042.11}{8}} = 22.48$.

当$x = 65$时，$\hat{y} = 188.78 + 1.87 \times 65 = 310.33$，

$$\sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(65-67.5)^2}{1096.5}} = 1.05,$$

$$\delta(65) = 2.306 \times 22.48 \times 1.05 = 54.43.$$

得当$x = 65$时，y的95%的预报区间为

$$(310.33 - 54.43, 310.33 + 54.43)$$

$$= (255.90, 364.76)$$

9.2 解：（1）求裤长y对身高x的回归方程

$\sum_{i=1}^{30} x_i = 168 + 162 + \cdots + 155 = 4797$， $\bar{x} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i = 159.9$，

$\sum_{i=1}^{30} y_i = 107 + 103 + \cdots + 99 = 3068$， $\bar{y} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} y_i = 102.3$，

$$\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 168^2 + 162^2 + \cdots + 155^2 = 767949$$

$$\sum_{i=1}^{30} y_i^2 = 107^2 + 103^2 + \cdots + 99^2 = 314112$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i y_i = 168\times107+162\times103+\cdots+155\times99=491124$$

进而可以计算出

$$\sum_{i=1}^{30} x_i^2 - \frac{1}{30}(\sum_{i=1}^{30} x_i)^2 = 767949 - \frac{1}{30}\times4797^2 = 908.7\text{，}$$

$$\sum_{i=1}^{30} y_i^2 - \frac{1}{30}(\sum_{i=1}^{30} y_i)^2 = 314112 - \frac{1}{30}\times3068^2 = 357.87\text{，}$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i y_i - \frac{1}{30}(\sum_{i=1}^{30} x_i)(\sum_{i=1}^{30} y_i) = 491124 - \frac{1}{30}\times4797\times3068 = 550.8$$

于是

$$\hat{b} = \frac{550.8}{908.7} = 0.61\text{，}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 102.3 - 0.61\times159.9 = 5.4$$

回归方程为：$\hat{y} = 5.4 + 0.61x$

(2)相关性检验

$$U = 0.61\times550.8 = 335.99$$

$$Q = 357.87 - 335.99 = 21.88$$

$$F = \frac{U}{Q}(n-2) = \frac{335.99\times28}{21.88} = 429.96$$

对于给定的显著性水平$\alpha = 0.01$，查表，

$$F_{1-\alpha}(1\,, n-2) = F_{0.99}(1\,, 28) = 7.64$$

由于$F = 429.96 > 7.64$，所以认为裤长和身高有显著的线性相关关系，回归方程高度显著的有效.

9.3解：9.3（1）简化数据

取$c_1 = 100,\quad c_2 = 15,\quad c = 80,\quad d = 10$，

令$\begin{aligned}&x'_{1i} = (x_{1i} - c_1)d = (x_{1i} - 100)\times10,\ x'_{2i} = (x_{2i} - c_2)d = (x_{2i} - 15)\times10,\\&y'_i = (y_i - c)d = (y_i - 80)\times10\end{aligned}$

得数据如表所示，

i	x_1'	x_2'	y'	i	x_1'	x_2'	y'	i	x_1'	x_2'	y'
1	153	−8	35	7	14	−15	40	13	−120	14	15
2	−35	−4	−20	8	98	50	0	14	−120	31	57
3	−431	−1	−70	9	34	−20	80	15	89	4	19
4	10	−1	114	10	106	3	65	16	−105	33	−9
5	29	32	34	11	−197	−21	10	17	−44	−12	99
6	−121	−18	20	12	−70	−3	86	18	19	−28	6

(2)计算

$$\sum_{i=1}^{18} x_{1i}' = -603,\ \sum_{i=1}^{18} x_{1i}'^2 = 341921,\ \overline{x_1'} = -33.5,\ \bar{x}_1 = 100 + 0.1\overline{x_1'} = 96.65$$

$$\sum_{i=1}^{18} x_{2i}' = 36,\ \sum_{i=1}^{18} x_{2i}'^2 = 8204,\ \overline{x_2'} = 2,\ \bar{x}_2 = 15 + 0.1\overline{x_2'} = 15.2$$

$$\sum_{i=1}^{18} y_i' = 581,\ \sum_{i=1}^{18} y_i'^2 = 54551,\ \overline{y'} = 32.28,\ \bar{y} = 80 + 0.1\overline{y'} = 83.23$$

$$0.01[\sum_{i=1}^{18} x_{1i}'^2 - \frac{1}{18}(\sum_{i=1}^{18} x_{1i}')^2] = 3217.2 \overset{\text{记为}}{=} l_{11}$$,

$$\sum_{i=1}^{18} x_{1i}' x_{2i}' = 1549,\ 0.01[\sum_{i=1}^{18} x_{1i}' x_{2i}' - \frac{1}{18}(\sum_{i=1}^{18} x_{1i}')(\sum_{i=1}^{18} x_{2i}')] = 27.55 \overset{\text{记为}}{=} l_{12} = l_{21}$$

$$0.01[\sum_{i=1}^{18} x_{2i}'^2 - \frac{1}{18}(\sum_{i=1}^{18} x_{2i}')^2] = 81.32 \overset{\text{记为}}{=} l_{22}$$

$$\sum_{i=1}^{18} x_{1i}' y_i' = 36571,\ 0.01[\sum_{i=1}^{18} x_{1i}' y_i' - \frac{1}{18}(\sum_{i=1}^{18} x_{1i}')(\sum_{i=1}^{18} y_i')] = 560.4 \overset{\text{记为}}{=} l_{1y}$$

$$\sum_{i=1}^{18} x_{2i}' y_i' = -1589,\ 0.01[\sum_{i=1}^{18} x_{2i}' y_i' - \frac{1}{18}(\sum_{i=1}^{18} x_{2i}')(\sum_{i=1}^{18} y_i')] = -27.51 \overset{\text{记为}}{=} l_{2y}$$

$$0.01[\sum_{i=1}^{18} y_i'^2 - \frac{1}{18}(\sum_{i=1}^{18} y_i')^2] = 357.98 \overset{\text{记为}}{=} l_{yy}$$

（3）经验公式正规方程为

$$\begin{cases} b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 \\ l_{11}b_1 + l_{12}b_2 = l_{1y} \\ l_{21}b_1 + l_{22}b_2 = l_{2y} \end{cases},$$

得

$$\hat{b}_1 = \frac{l_{1y}l_{22} - l_{2y}l_{12}}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2} = 0.1776, \hat{b}_2 = \frac{l_{11}l_{2y} - l_{21}l_{1y}}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2} = -0.3985, \hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1\bar{x}_1 - \hat{b}_2\bar{x}_2 = 72.12$$

于是得回归方程 $\bar{y} = 72.12 + 0.1776x_1 - 0.3985x_2$

(4)相关性检验

在显著性水平 $\alpha = 0.10$ 下，分位数 $F_{1-\alpha}(k, n-k-1) = F_{0.90}(2,15) = 2.70$

$$\text{而} U = \hat{b}_1 l_{1y} + \hat{b}_2 l_{2y} = 110.49, \quad Q = l_{yy} - U = 247.49$$

$$\text{于是} F = \frac{U/k}{Q/(n-k-1)} = \frac{110.49/2}{247.49/15} = 3.35 > 2.70$$

所以认为回归方程是显著的。（在显著性水平 $\alpha = 0.10$ 下）。

9.4 解：本题为单因素试验的方差分析，考虑的因素是生产的工厂，有 3 个水平 A, B, C，设电池的寿命的均值分别为 μ_1, μ_2, μ_3.

原假设 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

(1)计算 $T_j = \sum_{i=0}^{n_j} x_{ij}, j = 1,2,3,$ 和 $T = \sum_{j=1}^{3} T_j$. 计算结果为：

$T_1 = 213, T_2 = 150, \ T_3 = 222, T = 585$

$n_1 = 5, n_2 = 5, \ n_3 = 5, n = 15$

$\overline{X}_{.1} = 42.6, \overline{X}_{.2} = 30.0, \ \overline{X}_{.3} = 44.4, \overline{X} = 117$

(2)计算平方和

$$s = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 5, n = 15,$$

$$CT = \frac{1}{15}T^2 = \frac{1}{15} \times 585^2 = 22815,$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5} x_{ij}^2 = (40^2 + 48^2 + \cdots 50^2) = 23647$$

$$\sum_{j=1}^{3} T_J^2 \Big/ n_j = \frac{1}{5}(213^2 + 150^2 + \cdots 222^2) = 23430.6 \cdot$$

于是

$$S_T = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5} x_{ij}^2 - CT = 23647 - 22815 = 832 \text{ ，}$$

$$S_A = \sum_{j=1}^{3} T_j^2 \Big/ n_j - CT = 615.6$$

$$S_E = S_T - S_A = 832 - 615.6 = 216.4$$

(3)确定自由度.

S_T 的自由度为 $n-1=15-1=14$ ， S_A 的自由度为 $s-1=2$ ， S_E 的自由度为 $n-s=15-3=12$

(4)计算 F 值.

$$F = \frac{(n-s)S_A}{(s-1)S_E} = \frac{12\times 615.6}{2\times 216.4} = 17.07 .$$

(5)查表.

对于给定的 $\alpha = 0.05$ ， $F_{0.95}(2\,,12) = 3.89$.

结论：由于 $F_A = 17.07 > 3.89$，落入否定域，所以认为不同工厂生产的电池的平均寿命有显著差异. 方差分析表如表所示.

方差来源	平方和	自由度	F 值	分位数	显著性
寿命 误差	615.6 216.4	2 12	17.07	$F_{0.95}(2\,,12) = 3.89$	*
合计	832	14			

9.5 解： 本题为单因素试验的方差分析，考虑的因素是接种的菌型，有 3 个水平，设平均存活日数分别为 μ_1, μ_2, μ_3 .

原假设 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

(1) 计算 $T_j = \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}, j = 1,2,3,$ 和 $T = \sum_{j=1}^{3} T_j$. 计算结果：

$$T_1 = 40, T_2 = 65, T_3 = 80, T = 185$$

$$n_1 = 10, n_2 = 9, n_3 = 11, n = 30$$

$$\overline{X}_{\bullet 1} = 4, \overline{X}_{\bullet 2} = 7.2, \overline{X}_{\bullet 3} = 7.2, \overline{X} = 18.4$$

(2)计算平方和

$$CT = \frac{1}{30}T^2 = \frac{1}{30} \times 185^2 = 1140.8,$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 = (2^2 + 4^2 + \cdots 10^2) = 1349;$$

$$\sum_{j=1}^{3} T_j^2 \big/ n_j = (40^2/10 + 65^2/9 + 80^2/11) = 1211.2\cdot$$

于是

$$S_T = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - CT = 1349 - 1140.8 = 208.2,$$

$$S_A = \sum_{j=1}^{3} T_j^2 \big/ n_j - CT = 70.4$$

$$S_E = S_T - S_A = 208.2 - 70.4 = 137.8$$

(3) 确定自由度

S_T 的自由度为 $n-1=30-1=29$，S_A 的自由度为 $s-1=2$，S_E 的自由度为 $n-s=30-3=27$

(4)计算 F 值

$$F = \frac{(n-s)S_A}{(S-1)S_E} = \frac{27 \times 70.4}{2 \times 137.8} = 6.9.$$

(5)查表

对于的 $\alpha = 0.05$，$\alpha = 0.01$，$F_{0.95}(2, 27) = 3.35$. $F_{0.99}(2, 27) = 5.49$

结论：由于 $F_A = 6.9 > 5.49$，所以菌型对平均存活日数有显著影响.

方差分析表如表所示.

方差来源	平方和	自由度	F 值	分位数	显著性
存活日期	70.4	2	6.9	$F_{0.95}(2, 12) = 3.89$	*
误差	137.8	27		$F_{0.99}(2, 27) = 5.49$	**

合计	208.2	29			

9.6 解：本题为单因素试验的方差分析，考虑的因素是饲料，水平数 $s=4$，在各水平下的试验数 $n_j=5(1\le j\le 4)$，总试验数 $n=20$. 设喂这四种饲料使猪仔增重的均值分别为 μ_1,μ_2,μ_3,μ_4.

原假设 $H_0:\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$.

(1) 计算 $T_j=\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}, j=1,2,3,$ 和 $T=\sum_{j=1}^{4}T_j$. 计算结果：

$$T_1=317, T_2=345, T_3=504, T_4=402, T=1568$$

$$n_1=5, n_2=5, n_3=5, n_4=5, n=20$$

(2) 计算平方和

$$CT=\frac{1}{20}(\sum_{j=1}^{4}T^2)=\frac{1}{20}\times 1568^2=122931.2,$$

$$\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{5}x_{ij}^2=60^2+65^2+\cdots 84^2+87^2=128112,$$

$$\sum_{j=1}^{3}T_j^2\big/n_j=\frac{1}{5}(317^2+345^2++504^2+402^2)=127026.8\cdot$$

于是

$$S_T=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}^2-CT=128112-122931.2=5180.8,$$

$$S_A=\frac{1}{5}\sum_{j=1}^{4}T_{i.}^2-CT=127026.8-122931.2=4095.6$$

$$S_E=S_T-S_A=5180.8-4095.6=1085.2$$

(3)确定自由度

$$f_A=s-1=4-1=3,$$

$$f_E=n-s=16$$

$$f_T=n-1=19$$

(4)计算 F 值

$$F_A = \frac{f_E S_A}{f_A S_E} = 1085.2 = 20.1\,.$$

(5)查表

对于的$\alpha = 0.05$， $F_{0.95}(3\,,16\,) = 3.24$.

结论：由于$F_A = 20.1 > 3.24$，落入否定域，所以否定H_0，认为饲料对猪仔的增重有高度显著的影响.方差分析表如表所示.

方差来源	平方和	自由度	F值	分位数	显著性
饲料	4095.6	f_A=3	$F_A = 20.1$	$F_{0.95}(3\,,16\,) = 3.24$	*
误差	1085.2	f_E=16			
合计	5180.8	19			