名 师 点 拨

学科：奥数

教学内容：集合（一）

内容综述:

本讲先介绍了以下一些重要的概念：集合、子集、两集合相等、真子集、并集、交集、相对补集，然后介绍了著名的容斥原理，接着介绍了以下几个定律：零律、分配律、排中律、吸收律、补交转换律、德·摩根律。

然后通过 6 道例题分析了一部分集合题目的解题方法与技巧，同学们应在熟悉以上定义、定理、定律的基础上仔细分析例题材解法，争取可以独立解决训练题。

要点讲解：

§1．基本理论

除了课内知识外，我们补充以下知识

相对补集：称属于 A 而不属于 B 的全体元素，组成的集合为 B 对 A 的相对补集或差集，记作 A-B。

容斥原理：以 $|A|$ 表示集合 A 中元素的数目，我们有

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i<j}|A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

，其中 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 n 个集合 $|A|$ 称为 A 的阶。

n 阶集合的全部子集数目为 2^n。

A，B，C 为三个集合，就有下面的定律。

（1）分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

（2）零律 $A \cap \varnothing = \varnothing$

（3）排中律 $A\bigcup\overline{A}=I$

（4）吸收律 $A\bigcup(A\bigcap B)=A$

（5）补交转换律 $A-B=A\bigcap\overline{B}$

（6）德·摩根律的相对形式

$$A-(B\bigcup C)=(A-B)\bigcap(A-C)$$
$$A-(B\bigcap C)=(A-B)\bigcup(A-C)$$

例题分析：

例 1：对集合{1，2，…，n}及其每一个非空了集，定义一个唯一确定的“交替和”如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后交替地减或加后继的数所得的结果，例如，集合$\{1,2,4,6,9\}$的“交替和”是 9-6+4-2+1=6. $\{5,6\}$的“交替和”是 6-5=1，$\{2\}$的交替和是 2。那么，对于 n=7。求所有子集的“交替和”的总和。

分析；n=7 时，集合{7，6，5，4，3，2，1}的非空子集有2^7-1个，虽然子集数目有限，但是逐一计算各自的“交替和”再相加，计算量仍然巨大，但是，根据“交替和”的定义，容易看到集合{1，2，3，4，5，6，7}与{1，2，3，4，5，6}的“交替和”是 7；可以想到把一个不含 7 的集和 A 与$A\bigcup\{7\}$的“交替和”之和应为 7。那么，我们也就很容易解决这个问题了。

解：集合{1，2，3，4，5，6，7}的子集中，除去{7}外还有2^7-2个非空子集合，把这2^7-2个非空子集两两结组后分别计算每一组中“交替和”之和，结组原则是设 $A_i=\{7,a_1,a_2,\ldots.\},A_i^1=A_i-\{7\}$这是把 A_i与A_i^1结合为一组，显然，每组中，“交替和”之和应为 7，共有$(2^7-2)/2$组.所以,所有“交替和”之和应该为 $7\times(2^7-2)/2+7=448$。

说明：我们在这道题的证明过程中用了这类题目最典型的解法。就是“对应”的方法，“对应”的方法在解决相等的问题中应用得更多。

例 2： 设 A={1，2，……，2n.}，证明：A 的任意 n+1 阶子集中，存在两个数，一个可被另一个整除。

分析：对于 2n 个数中取 n+1 个数，我们应该有一个直觉就是把这 2n 个数分成 n 组，每组都必然满足题目条件，那么由抽屉原则命题就解决了。

证明： 前 2n 个自然数中，共有 n 个奇数。根据自然数的一种有用的表达形式；n=(2k-1)・2

($k \in N$，L 为非负整数)考查 A 的下列 n 个子集，

$$A_1 = \{1, 1\times 2, 1\times 2^2, \cdots\}$$
$$A_2 = \{3, 3\times 2, 3\times 2^2, \cdots\}$$

……

$$A_n = \{2n-1\}$$

容易看到：$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，且$A_i \cap A_j = \varnothing$

考虑 A 中任意 n+1 个元素，根据抽屉原则知，至少有两个元素是上述 n 个集合中同一个集合中的元素，这两个数中，必有一个可被另一个整除。

说明：把一个集合分成若干个两两不交的子集的并，也则分拆，这种分拆的方法在解决集合的问题时为常用方法之一。

例 3： 某班对数学、物理、化学三科总评成绩统计如下：优秀的人数：数学 21 个，物理 19 个，化学 20 个，数学物理都优秀 9 人，物理化学都优秀 7 人。化学数学都优秀 8 人。这个班有 5 人任何一科都不优秀。那么确定这个班人数以及仅有一科优秀的三科分别有多少个人。

分析： 自然地设 A={数学总评优秀的人}
B={物理总评优秀的人}
C={化学总评优秀的人}
则已知|A|=21 |B|=19 |C|=20

$|A\cap B|=9,|B\cap C|=7,|C\cap A|=8$

因为$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$

所以$|A\cup B\cup C|-|A\cap B\cap C|=36$

而$|A\cap B\cap C|\le \min\{|A\cap B|,|B\cap C|,|C\cap A|\}=7$

所以$36\le|A\cup B\cup C|\le 43$，所以$41\le|I|\le 48$

这表明全班人数在 41 至 48 人之间。

仅数学优秀的人数是

$$|A\cap\overline{B\cup C}|=|A\cup B\cup C|-|B\cup C|$$

$$=|A\cup B\cup C|-|B|-|C|+|B\cap C|=|A\cup B\cup C|-32$$

可见仅数学优秀的人数在 4 至 11 人之间。

同理仅物理优秀的人数在 3 至 10 人之间。

同理仅化学优秀的人数在 5 至 12 人之间。

解：（略）。

说明：先将具体的实际生活中的问题数学化，然后根据数学理论来解决这个问题不仅是竞赛中常见情况，也是在未来学习中数学真正有用的地方。

例 4：n 元集合具有多少个不同的不交子集对？

分析：我们一般想法是对于一个子集，求出与它不交的子集个数，然后就可以求出总的子集对来了。

解：如果子集对是有序的，即在子集对中可以区分第一个子集与第二个子集，则第一个子集若是 k 个元素，第二个子集就由其余 n-k 个元素组成，可能的情况是2^{n-k}种，而这时第一个集合的选取的可能情况应为C_n^k种，那么 k 从 o 变到 n，总的情况可能就是$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot 2^{n-k}=(1+2)^n=3^n$。如果子集对是无序的，即两个子集相同但次序不同的子集对不认为不同，则3^n对有序子集对中有一对是由两个空集组成，而对其它3^n-1个有序对，每一对中交换两个子集的次序，得到的是同一个无序子集对，因此有$(3^n-1)/2$个无序子集对，其中至少有一个子集非空，于是无序子集对的总数为$(3^n-1)/2+1=(3^n+1)/2$

分析二：我们可以从元素的角度来思考问题。对一个元素来说，它有三种不同的选择，在第一个集合中，在第二个集合中，或者不在两个集合中。

解法二：在计算有序对的数目时，对每一个元素来说有三种可能：它或在第一个子集，或在第二个子集，或不在其中任意一个子集，因此不同的不交有序子集对的总数3^n，以下同解法一。

说明：本题为 1973 年捷克的竞赛题，对题目的不同分析使我们得到了差异很大的两个解法，解法一从题目要求想起，很容易想到，但解出最后解却不见得那么简单，而解法二的想法是类似于集合分析的想法，很难想到，但想出后比较容易求解，两个解法对比一下正体现了数学思维的两方面，一个是纯代数想法，以计算的方法替代对题目更深层次的研究，

另一个则是挖掘题目本身的内在关系，找出最合适的解答，我们当然推荐第二种做法。

例 5：1992 位科学家，每人至少与 1329 人合作过，那么，其中一定有四位数学家两两合作过。

分析：在与一个人 A 合作的人中我们找到 B。再说明一定有人与 A 和 B 都合作过为 C。最后再说明有人与 A、B、C 都合作过为 D，那么 A、B、C、D 就是找的人了。

证明：一个人 A。不妨设 B 与之合作。那么 $|\tilde{A}\cap\tilde{B}|=|\tilde{A}|+|\tilde{B}|-|\tilde{A}\cup\tilde{B}|\geq 1329+1329-1992\geq 1$.所以存在$C\in\tilde{A}\cap\tilde{B}$。即 C 与 A 和 B 均合作过，$\tilde{A},\tilde{B}$ 分别表示与 A、B 合作过的人的集合。同样地，

$$|\tilde{A}\cap\tilde{B}\cap\tilde{C}|=|\tilde{A}|+|\tilde{B}|+|\tilde{C}|-|\tilde{A}\cup\tilde{B}|-|\tilde{B}\cup\tilde{C}|-|\tilde{C}\cup\tilde{A}|+|\tilde{A}\cup\tilde{B}\cup\tilde{C}|$$
$$\geq 1392\times 3-1992\times 2\geq 1$$
。

所以存在$D\in\tilde{A}\cap\tilde{B}\cap\tilde{C}$。则 A、B、C、D 就是所求，证毕。

说明：把一个普通的叙述性问题转化为集合的语言描述的问题通常为解题的关键之处，也是同学们需加强的。

例 6：集合 X 由 n 个元素构成，对两个子集 $A_1,A_2\subset X$，求得集合 $A_1\cap A_2$的元素个数，

证明：所有求得个数之和为$n\cdot 4^{n-1}$。

分析：我们先考虑一个简单情况，n=2.这时有四个集合，记为$\varnothing=A_1$.与A_2，$\overline{A}_1$和$\overline{A}_2$。

交集情况就是$|A_1\cap A_2|+|A_1\cap\overline{A}_2|+|\overline{A}_1\cap A_2|+|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2|$。那么对于 n 很大时，我们有的不只是 4 个集合却可以以此形式分组。

证明：因为集合 X 总共有 2^n 个不同子集，所以不同的有序子集对共有 $(2^n)^2=4^n$，将所有子集对分为 4^{n-1}个 4 元组：$(A_1,A_2),(\overline{A}_1,A_2)(A_1,\overline{A}_2),(\overline{A}_1,\overline{A}_2),$ 其中 $\overline{A}$ 表示子集 $A\subset X$ 的补集 X-A。交换子集对的 4 元组中子集对的次序，得到的是同一个四元组，事实上，由子集对 $(\overline{A}_1,A_2)$ 得到的 4 元组与由 (A_1,A_2) 得到的完全相同，且 $|A_1\cap A_2|+|\overline{A}_1\cap A_2|+|A_1\cap\overline{A}_2|+|\overline{A}_1\cap A_2|=n$,所以总和为$n\cdot 4^{n-1}$。

说明：复杂的问题先考虑简单的特殊的情况是一种最常用的方法，从中找到共性后就很容易得到原题目有答案了。

本周强化练习

1．一个集合含有 10 个互不相同的十进制两位数，证明：这个集合必有两个无公共元素的子集合，这两个子集元素和相等。

2．是否存在两个以非页整数为元素的集合 A、B，使得任一个非负整数都可以被 A、B 之中各取一数之和唯一表出。

3．对每个$n \in N$求,最大$k \in N$使得在 n 元集合中，可以取出 k 个子集，其中任意两个的交非合。

4．能否把$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$分成两个积相等的不交集合。

请做完作业后再看答案！Ok?

参考答案

1．10 个元素的集合共有$2^{10}-1=1023$个非空子集，每一个这个集合的非空子集中数字之和小于$10\times 100=1000$， 由抽屉原则知，必有两个子集，它们有相同的元素和，设为A_1, A_2，则$A_1 \cap \overline{A_2}$与$A_2 \cap \overline{A_1}$ 满足题目要求条件。

2．十进制$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1}$中称$a_1$为第 1 位。$a_i$为第 i 位，考虑如下的 A、B:

A 为奇位为 o 的那些非负整数组成。

B 为偶位为 o 的那些非负整数组成。

不难验证这样的 A B 是符合题目要求的。

3．在集合$X=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$中取定一个元素$a_1$，并只考虑含$a_1$的子集，这类子集的个数为集合$\{a_2, a_3, \ldots a_n\}$的子集的个数，即为$2^{n-1}$。因此$k \geq 2^{n-1}$。另一方面，设从集合 X 至少取出$2^{n-1}+1$个子集，将集合 X 的所有子集分成$2^{n-1}$对。每一对由一个子集与它的补集组成，由抽屉原则，所取子集至少有两个组成一对，因此它们不交，于是$k=2^{n-1}$。

4．对 7 取模，由于$n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$均不能为 7 的位数，所以$n \equiv +1$ (mod7).

所以 n·（n+1）·(n+2)·(n+3)·(n+4)·(n+5) $\equiv -1$ (mod7)，而若能拆分应为 $m^2, m^2 \equiv$ 0、1、4、2 （mod7），所以集合 $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ 不能拆成满足要求的集合。

名　师　点　拨

学科：奥数

教学内容：集合(二)

【经验谈】

集合是数学中的重要基础知识，不论是高考还是数学竞赛中都少不了它的一席之地。本文将帮助你彻底掌握集合知识。

【内容综述】

集合是组合数学的基础，也是高中数学竞赛中的重要组成部分。希望大家通过本讲学习开拓思路，灵活解题，另外，要想解好集合题目，相关知识也很重要。

【例题分析】

例 1：设 A_1，A_2，… A_{50} 是有限集合 X 的 50 个子集，每个子集都含有 X 的半数以上的元素，证明：存在子集 $B \subset X$，它至多含 5 个元素，并且和集合 A_1，A_2 … A_{50} 中每一个集合至少有一个公共元。

分析：我们知道，这种题目并没有什么特别好的办法，只能一个一个把这 5 个元素找出来，我们还是可以先将题目简化成简单形式，看是否方便理解一些，但这里我们就不这么做了。

证明：设集合 X 中元素个数为 n，子集 A_1，A_2，… A_{50} 中每一个都含 $n/2$ 以上的元素，即所有这些子集的元素个数大于 $50 \cdot \frac{n}{2} = 25n$ 由抽屉原理，必有集合 X 的元素，它至少属于 26 个子集，同理可证，对每个 $k < 50$，在子集 Ai_1，Ai_2，… Ai_k，中至少有 $\left[\frac{k}{2}\right]+1$ 个子集，它们具有公共元素，在集合 X 中取出一个元素，它至少属于 26 个子集，并作为集

合 B 中五个元素之一，去掉包含这个元素的 26 个子集，在余下 24 个子集中取一个元素，它至少属于 13 个子集，去掉这 13 个子集，在余下的 11 个子集中取一个元素，它至少属于6 个子集，在余下 5 个子集中取一个元素，它属于 3 个子集，剩下两个子集再取一个公共元素就可以了，于是，求得集合 X 的至多 5 个元素（在上述过程中所取的元素可能重复，所以可能小于 5)，它们构成集合 B，而子集 A_1，A_2，… A_{50} 中每一个都至少含有它的一个元素。

说明：这道题目当 n 和 k 均较小时也就可以作为小学生竞赛题，而数目增大以后却成为了英国高中竞赛题目，假设我们在分析较小的数时可以把规律找出，而这是很简单的，那么整道题目也就迎刃而解了，这就告诉我们，做这类整数问题时，应该时时刻刻想到先将数目变小看看规律，然后再做题目本身。

例 2：有 11 人管理一个保险柜，可以在柜上加若干把锁，每把锁可以有若干把钥匙，问：如何加锁和如何分配各锁的钥匙，才能使任何 6 个人可以把保险柜打开，但任意 5 个人却不能。

分析：我们反过来想一下，假设 A_1，A_2，… A_{11} 是 11 个人打不开的锁的集合，从 11 个人中任意找 5 个人的可能性有 $C_{11}^5=462$ 种情况。要想把它们都区别开，也就是说至少要有 462 把锁。那么再对 462 把锁进行构造就可以了。

解：设加 n 把锁，又设 A_1，A_2，… A_{11} 是这 11 个人各自打不开的锁的集合，从 11 个集合中任选 5 个并集都不相同，故至少应有锁 $C_{11}^5=462$ 把，为分配好各锁的钥匙，设锁号依次为 1 号，2 号，…462 号，同时把 11 个人任取 5 个的组合也编上 1 至 462 号，然后把锁和组合一一对应起来，给每个人发钥匙时，他所在的组的号的钥匙不给他，其他钥匙都给他，这时就满足题设了。

说明：这个构造难度很大，这主要原因还是因数目太大了，也应该先从小的数目做起，最后回到原题。

例 3：把 2^n 个元素的集合分为若干个两两不交的子集，按照下述规则将某一个子集中某些元素挪到另一个子集：从前一子集挪到后一子集的元素个数等于后一子集的元素个数（前一子集的元素个数应不小于后一子集的元素个数），证明：可以经过有限次挪动，使得到的子集与原集合相重合。

分析：首先考虑到 2^n 是一个很特殊的数，其次我们发现若两个集合的元素个数除以 2 的若干次幂后若为奇数，那么，它们之间挪后就应为偶数这一事实，若还不能想到解答就试一下 $n=2$，$n=3$ 时的情况，相信解答就不会难找到了。

证明：考虑含奇数个元素的子集（如果有这样的子集），因为所有子集所含元素的个数总和是偶数，所以具有奇数个元素的子集个数也是偶数，任意将所有含有奇数个元素的子集

配成对，对每对子集按题目要求的规则移动：从较大的子集挪出一些元素，添加到较小的子集，挪出的元素个数为较小子集的元素个数，于是得到的所有子集的元素个数都是偶数，现在考虑元素个数不被 4 整除的子集，如果 $n=1$，则总共有两个元素，它们在同一个子集，因此设 $n \geq 2$，因为子集的元素个数的总数被 4 整除，因此这样的子集的个数为偶数，任意将这样的子集配成对，对每一对子集施行满足题目要求的挪动，于是得到的每个子集数均可被 4 整除，依此做下去，最后得到的每个子集元素个数均可被 2^n 整除，也就是只能有一个子集，它的元素个数为 2^n，证毕。

说明：这道题的证明中隐含了一种单一变量在变化时变化方向相同这一性质，就这道题来说，一直在增加的就是各子集元素个数被 2 的多少次幂整除的这个幂次数，这是一大类问题，除了这种变化量，还要经常考虑变化中的不变量。

例 4：给定 1978 个集合，每个集合都含有 40 个元素，已知其中任意两个集合都恰有一个公共元，证明：存在一个元素，它属于全部集合。

分析：我们可以先去找一个属于很多个集合的元素，最好它就是我们要找的那一个。

证明：考虑给定的 1978 个集合中任意一个集合 A，它和其它 1977 个集合都相交，因此，存在 $a \in A$，使得它至少属于其中 50 个集合，否则，集合 A 中每个元素至多属于 49 个集合，而集合 A 恰有 40 个元素，所以除 A 外至多有 1960 个集合，不可能，因此设 a 属于集合 A_1，$A_2 \ldots A_{50}$，下面证明它属于给定的 1978 个集合中任一个。

对于除了 A_1，A_2，$\ldots A_{50}$ 的任一个集合 B，设 $a \notin B$，则 B 与 A，A_1，A_2，$\ldots A_{50}$ 每一个都有至少一个元素的交，它们都与 a 不同，那么，B 就至少要有 51 个元素，不可能，因此 a 属于每个集合。

说明：这种题目最怕把它想难了，想行太难了，就会觉得无从下手，做数学竞赛题就需要一方面在做题之前选好方向，另一方面就是大胆尝试去做。

例 5：在一个含 10 个元素的集合 A 的若干非空子集中，任意两个不同的子集的交集含有 A 中元素的数目不多于 2，这样的子集合有多少个。

分析：A 的一元素子集和二元素子集显然都是满足条件的，三元子集呢？如果有一个多于 3 元的子集，总可以把它拆为三元子集的并，增加子集的数量而不影响性质，而恰恰把全部三元子集都选上也符合题目要求。

解：A 中的单元素子集共 10 个，这 10 个都符合题目的要求。

A中的含两个元素的集合共$C_{10}^{2}=45$个，它们也符合要求。

A中含三个元素的集合共$C_{10}^{3}=120$个，也符合要求。

这表明，A的子集合中，至少有$C_{10}^{1}+C_{10}^{2}+C_{10}^{3}=175$个子集满足条件。

另一方面，假设A的非空子集有多于 175 个具有题目中的条件。设这个子集族为C，其中$C=\{B_1,B_2,\cdots B_M\}$ $m>175$ 则C中必存在含有A中的元素数超过 3 的集合，设$|B_1|>3$，取$b\in B_1$，作差集$B_1-\{b\}$，显然$|B-\{b_1\}|>2$，$|B_1\cap(B_1-\{b\})|>2$，这表明B_1与$B_1-\{b\}$不能同为子集族C中的成员，用$B_1-\{b\}$替换B_1，得到另一个子集族：$C^0=\{B_1-\{b\},B_2,\cdots,B_m\}$ $m>175$，容易看到C^0也符合题目中的条件，并且$|C^0|=|C|$，经过这样的替换后，C中某个元素B_1被含A中元素少于B_1的另一个A的子集$B_1-\{b\}$所替代，因为A，C中的元素数目有限。所以有限次替代后，总可使新的子集族中各元素含有A中的元素数目不超过 3，这就看出$m\le C_{10}^{1}+C_{10}^{2}+C_{10}^{3}=175$与$m>175$矛盾，这表明不存在符合题目条件的多于 175 个的A的子集形成的子集族，即这样的子集族恰有 175 个。

说明：这道题是一类典型问题的代表，这种问题的解法就是先构造，然后证明更多或更少不行。在证明过程中尽量把它往构造出来的方向化规。

例 6：在n个元素组成的集合中取$n+1$个不同的三元子集。证明：其中必有两个，它们恰有一个公共元。

分析：证明恰有一个公共元也许挺难。那么证只有两个或零个公共元不可能是否可行呢？如果具有两个公共元的集合A与B表示为$A\sim B$、那么~有传递性。是否有用呢？

证明：设结论不真。则所给的 3 元子集要么不交，要么恰有两个公共元，如果子集A与B恰有两个公共元，则记$A\sim B$。设A B C是三个子集。可以证明如果$A\sim B$，$B\sim C$，则$A\sim C$，于是所有给定的 3 元子集可以分类，使得同一类中任意两个不同子集都恰有两个公共元。而不同类的子集不相交。于是对每个子集类，有三种可能：（1）恰含 3 个元素的类。（2）恰含 4 个元素的类。（3）至少含 5 个元素的类。

在（1）下，3 元子集类恰由一个 3 元子集组成。

在（2）下，子集类中至多有 4 个子集。

考虑（3） 设$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,d\}$，则还有一个e，由$A\sim C$，$B\sim C$，有

$C=\{a,b,e\}$。因此对子集类中任意子集 D，由 $A\sim D$，$B\sim D$，$C\sim D$ 它包含 a 与 b，于是类中子集个数比类中元素个数少 2，于是，每个类中子集个数不超过元素个数，但是题中条件子集数大于元素个数，矛盾！

说明：此题为 1979 年美国竞赛题。题目难度较大，应该说是应用了高等代数中的一些思想。

本周强化练习

1．求 $\{1,2,\cdots,100\}$ 的所有子集元素的和之和。

2．小明去买东西，现在他有 10 元，希望分成 10 包，使在商店内他能买起的东西都可由 n 包中的钱直接支付。

3．能否把整数集合分成 3 个子集，使得对每个整数 n，$n-50 \cdot n+1987$ 都属于不同的集合。

4．10 名学生按下面的规则组成运动队，规则是：①每人可报名参加任何一个运动队；②每个运动队都不能完全包含于或重合于另一个运动队。问：最多几个队？每队分别多少人？

参考答案

1．我们可以发现对每个数 k，它出现在 2^{99} 个子集之中，因此所有子集中的 k 的和为 $k\cdot 2^{99}$，那么全部元素在全部子集之中的和为 $\sum_{k=1}^{100}(k\cdot 2^{99})=5050\cdot 2^{99}$。

2．利用二进制来考虑此题，小明的前 9 包分别有钱 1 分（2），10 分（2），100 分（2），1000 分（2），10000 分（2），100000 分（2），1000000 分（2），10000000 分（2），100000000 分（2），剩下一包装剩下的钱（以上数皆为二进制）就可以了。

3．不能。反证法。设存在合乎题中条件的一种分法，如果 m 和 k 同属于一个子集，则记为 $m\sim k$，否则记为 $m\Delta k$，对 $\forall n\in Z$，若 (a,b,c) 分在三个集合中则称 (a,b,c) 为好的。

$(n-50,n,n+1987),(n-100,n-50,n+1937),(n+1937,n+1987,n+2\times1987)$ 都是好的。

$n\Delta n-50$，$n\Delta n+1987$，而 $n+1937\,\Delta n-50$　$n+1937\,\Delta n+1987$，故 $n\sim n+1937$

在第二组中用n代替$n+1937$，故$(n-100,n-50,n)$是好的。故$n \sim n-150$。

由此$0 \sim 1937 \sim \cdots \sim 50 \cdot 1937 = 646 \cdot 150 - 50 \sim \cdots \sim -50$ 即$0 \sim 50$，但$0 \Delta 50$。矛盾！

有这样一个结论n阶集合的子集$A_1,\cdots,A_m$若满足$A_i \not\subset A_j$且$A_j \not\subset A_i$则m的最大值为$C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$，代入本题得为$C_{10}^5$。

名　师　点　拨

学科：奥数

教学内容：函数通性训练题

【能力训练】

A 级

选择题

★★1．若 a＞0，a≠1，F(x)是一奇函数，则$G(x)=F(x)(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2})$是　（　）

（A）奇函数　（B）偶函数　（C）非奇非偶函数　（D）奇偶性与 a 有关

★★2．设f(x)是定义在实数集上的周期为 2 的周期函数，且是偶函数。已知当 x∈[2，3] 时，f(x)=x，则当 x∈[-2，0]时，f(x)的解析式是（　）

（A）f(x)=x+4　　(B)f(x)=2-x

（C）f(x)=3-|x+1|　　(D)f(x)=2+|x+1|

★★★3．设f(x)，g(x)是定义在（-∞，+∞）上的两个函数，对任意实数 x，y 满足 f(x＋y)+(x－y)=2f(x)g(x),若 f(0)=0，但 f(x)不恒等于 0，则

（A）f(x)，g(x)都是奇函数　　（B）f(x)，g(x)都是偶函数

（C）f(x)是偶函数，g(x)是奇函数　（D）f(x)是奇函数，g(x)是偶函数。

★★4．奇函数 y=f(x)有反函数$y=f^{-1}(x)$，函数$y=f^{-1}(x)$在[0，+∞]上是减函数，则$y=-f(x)$在$(-\infty,0]$上是　（　）

（A）是增函数

（B）是减函数

（C）有时是增函数，有时是减函数

（D）有时是增函数，有时是减函数，有时是常数函数。

★★5．函数 y=f(x-a)与函数 y=f(a-x)的图象间的关系是 （ ）

（A）关于 y 轴对称　　　　　　（B）关于 x 轴对称

（C）关于直线 x=2a 对称　　　　（D）关于直线 x=a 对称

填空题

★★6．函数 f(x)对一切实数 x 都满足 $f(\frac{1}{2}+x)=f(\frac{1}{2}-x)$，并且方程 f(x)=0 有三个实根，这三个实根的和是________.

★★★★7．设奇函数 y=f(x)的定义域为 R，f(1)=2，且对任意 $x_1,x_2\in R$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，当 x＞0 时，f(x)是增函数，则函数 $y=-f^2(x)$ 在这间[-3，-2]上的最大值是______.

★★8．定义域是实数域的奇函数 f(x)，对任意实数 x 都有 f(x)=f(x+2)则 f(2)+f(4)+f(6)+…+f(1992)+f(1994)=_____。

★★★★9．设函数 f(x)的定义域为(0，+∞)，且单调递增，满足 f(2)=1，f(xy)=f(x)+f(y)

（1）证明：f(1)=0　f(1)=0。

（2）求 f(4)。

（3）若 f(x)+f(x-3)≤2，求 x 的范围。

（4）举出一个符合上述要求的函数 f(x)。

B 级

★★★10．设函数 f(x)对任一实数 x 满足 f(2-x)=f(2+x)，f(7-x)=f(7+x)，且 f(0)=0。求证：f(x)在[-30，30]上至少有 13 个零点，且 f(x)是以 10 为周期的函数。

★★★★11．函数 $f_1(x)=\sin x$ 和 $f_2(x)=\sin\pi x$ 的最小正周期分别为 2π 和 2。证明 f(x)=sinx+sinπx 不是周期函数。

★★★★12．证明：若函数 y=f(x)在 R 上的图解关于点 $A(a,y_0)$ 和直线 x=b(b＞a)皆对称，则 f(x)为周期函数。

★★★★13．设 f 是一个从实数集 R 映射到自身的函数，并且对任何 x∈R 均有|f(x)|≤1，以及 $f(x+\frac{13}{42})+f(x)=f(x+\frac{1}{6})+f(x+\frac{1}{7})$.

证明：f 是周期函数，即存在一个非零实数 C，使得对任何 x∈R，成立 f(x+C)=f(x).

参考答案

【能力训练】

A 级

★1．B。

$$G(x)=F(x)\cdot\frac{a^x+1}{2(a^x-1)},G(-x)=F(-x)\cdot(\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2})=F(x)\cdot\frac{a^x+1}{2(a^x-1)}=G(x)$$，

故 G(x)是偶数。

2．C。当 x∈[－2，－1]时，x+4∈[2，3].f(x)=f(x+2・2)=f(x+4)；当 x∈[－3，－2]时，由于 f(x)为偶函数∴f(x)=－x，∴当 x∈[－1，0]时，f(x)＝f(x－2)= －(x－2)= －x＋2.

3．D。令 x=0，f(－y)=－f（y）；又将－y 代换成 y，f(x－y)+f(x+y)=2f(x)g(－y),∴g(－y)=g(y)

4．A。如果一个函数存在反函数，那么它们的单调状况相同。

5．D。设 (x_0,y_0)是$y=f(x-a)$图 象上任意一点，则

$y_0=f(x_0-a)=f[a-(2a-x_0)]$, ∴点$(2a-x_0,y_0)$在$y=f(a-x)$的图象上;反之也成立.

6．y=f(x)的图象关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称，其中一根必是 $\frac{1}{2}$，另两根之和是 $2\times\frac{1}{2}=1$。故所有实根之和是 1.5。

7．令 $x_1=x_2=0, f(0)=0$, 由 f(x)为奇函数，且在$(0,+\infty)$上为增函数，故在（－∞，0）上也为增函数，且 f(2)=f(1+1)=2f(1)=4, 用定义易知，$y=-f^2(x)$在$(-\infty,0)$上为增函数。故[-3, -2]上的最大值是$-f^2(-2)=-16$.

8．f(x)为 R 上的奇函数，

f(0)=0,且 f(0)=f(2)=f(4)=…=f(1994)=0，故原式为 0。

9.（1）取 x=1，y=2，得 f(2)=f(1・2)=f(1)+f(2).∴f(1)=0

（2）f(4)=f(2)+f(2)=2.

（3）f(x)+f(x+3)=f[x(x-3)]≤2=f(4),

所以

$x^2-3x\le 4, -1\le x\le 4$, 但$x-3>0$, 故$3<x\le 4$.

（4）可取 $f(x)=\log_2 x$.

B 级

10．f(x)关于 x=2 和 x=7 对称。

f(4)＝f(2+2)＝f(2－2)＝f(0)＝0,f(10)＝f(7+3)＝f(7－3)＝f(4)＝0，于是（0，10]上至少有两个零点。

f(x＋10)＝f(7＋3＋x)＝f(7－3－x)＝f(4－x)＝f(2＋2－x)＝f(2－2＋x)＝f(x)，∴f(x)以 10 为周期。f(－30)=f(－30＋3×10)=f(0)=0．综上，f(x)在[－30，30]上至少有 13 个零点。

11．反证，若周期为 T，则 sin（x＋T）＋sin(π(x＋T))=sinx＋sinπx

$$\therefore \sin\frac{T}{2}\cdot\cos\frac{2x+T}{2}=-\sin\frac{\pi T}{2}\cdot\cos\frac{2\pi x+\pi T}{2} \qquad ①$$

存在 $x_0\in R$, 使得 $\cos\frac{2\pi x_0+\pi T}{2}=0$, 而 $\cos\frac{2x_0+T}{2}\neq 0$, 将 x_0 代入①，$\therefore \sin\frac{T}{2}=0$, 于是对每个 $x\in R$，$-\sin\frac{\pi T}{2}\cdot\cos\frac{2\pi x+\pi T}{2}\equiv 0$, 由于 $\cos\frac{2\pi x+\pi T}{2}\not\equiv 0$，故 $-\sin\frac{\pi T}{2}\equiv 0$,，$\therefore \sin\frac{T}{2}=0$, $\sin\frac{\pi T}{2}\equiv 0$, $\frac{T}{2}=k\pi$, $\frac{\pi T}{2}=m\pi$, $k,m\in Z$, 于是 $k\pi=m$，矛盾。

12．提示 4（b—a）是它的一个周期，由已知有 $f(a+x)-y_0=y_0-f(a-x)$① $f(b+x)=f(b-x)$②，

反复利用①、②，可证 $f[x+4(b-a)]=f(x)$

13．

$$f(x+\frac{7}{42})-f(x)=f(x+\frac{13}{42})-f(x+\frac{6}{42})=f(x+\frac{19}{42})-f(x+\frac{12}{42})$$

$$=\cdots=f(x+\frac{49}{42})-f(x+\frac{42}{42})$$

即 $f(x+\frac{42}{42})-f(x)=f(x+\frac{49}{42})-f(x+\frac{7}{42})$ ①

同样，有

$$f(x+\frac{7}{42})-f(x+\frac{1}{42})=f(x+\frac{14}{42})-f(x+\frac{8}{42})=f(x+\frac{21}{42})-f(x+\frac{15}{42})$$

$$=\cdots=f(x+\frac{49}{42})-f(x+\frac{43}{42})$$

即 $f(x+\frac{49}{42})-f(x+\frac{7}{42})=f(x+\frac{43}{42})-f(x+\frac{1}{42})$ ②

由①、②

$$f(x+\frac{42}{42})-f(x)=f(x+\frac{43}{42})-f(x+\frac{1}{42}))$$

$$=f(x+\frac{44}{42})-f(x+\frac{2}{42})=\cdots=f(x+\frac{84}{42})-f(x+\frac{42}{42})$$

即 $f(x+1)-f(x)=f(x+2)-f(x+1)$

$\therefore f(x+n)=f(x)+n(f(x+1)-f(x))$ 对所有 $\pi\in N$ 成立。

又∵f(x)有界，故只有 $f(x+1)-f(x)=0$.

∴$f(x+1)=f(x)$,f(x)为周期函数。

名 师 点 拨

开始学习

学科：奥数

教学内容：有关函数通性的试题选讲

【内容综述】

函数是数学上的一个基本而又重要的概念，在现代数学中，它几乎渗透到各个分支中。

函数的性质主要指函数的对称性、单调性和周期性。

函数图象的对称性反映了函数图象的局部与整体的关系，恰当地运用函数的对称性，往往可使问题简化。函数的奇偶性是对称性中最重要的特殊情形。

函数的单调性可用函数值的比较给出证明，利用函数的单调性，可以比较实数的大小，证明一些不等式和确定某些函数的值域及最值。

设 f 是 D 上的函数，如果存在常数 T≠0，使得对每个 x∈D，都有 f(x+T)=f(x-T)=f(x)成立，则称 f(x)为周期函数，T 为 f(x)的一个周期，如果 f(x)的所有正周期中存在最小值 T_0，称 T_0 为周期函数 f(x)的最小正周期，一般说函数的周期都是指最小正周期。

例题分析：

例 1 已知函数 y=f(x)(x∈R，且 x≠0)，对任意非零实数 x_1,x_2 都有

$f(x_1,x_2)=f(x_1)+(x_2)$，试判定 f(x)的奇偶性。

分析：欲判别 f(x)的奇偶性，即找出 f(-x)与 f(x)之间的关系，可令 $x_1=-1,x_2=x$，

为此必求出 f(-1)，而求 f(-1)，又可令 $x_1=-1$，$x_2=-1$，为此又必先求出 f(1)，而 f(1)不难求得。

解 令 $x_1=x_2=1$，则 f(1)=2f(1)，所以 f(1)=0。

令 $x_1=-1$，$x_2=-1$，则 f(1)=f(-1)+f(-1)，所以 f(-1)=0。

于是，在已知等式中，以-1，x 分别代替 x_1, x_2，则 f(-x)=f(-1)+f(x)，即 f(-x)=f(x)，故 f(x)为偶函数。

说明 在以抽象的函数等为条件的问题中，常常先考虑 x 取 0，-1，1 等的特殊值，再利用 f(0)，f(±1)的值来研究函数 f(x)的性质。

例 2 设 a 是大于 0 的实数，f(x)是定义在全体实数 R 上的一个实函数，并且对每一实数 x 满足条件：

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$$

1．试证明：函数 f(x)是周期函数，也就是，存在一个实数 b＞0，使得对每一 x 都有 f(x+b)=f(x)。

2．就 a=1 举出一个这种函数 f(x)的例子，但 f(x)不能是常数。

分析 这是一道探索存在性的问题，题中给出的已知条件只有唯一的一个含有 a 的方程，直觉告诉我们，f(x)的周期定与 a 有关，于是，我们可从原方程出发，边递推边探索。

解 1，由 $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$ ①

有

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-[f(x-a)]^2}$$ ②

将②代入①

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-[f(x-a)]^2}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-[f(x-a)]^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}+\left|f(x-a)-\frac{1}{2}\right|$$

但 $f(x)\geq\frac{1}{2}$

故 f(x+a)=f(x-a)

$$f[x+2a]=f[(x+a)+a]=f[x+a-a]=f(x)$$

即 f(x)是一个周期函数，且周期 b=2a。

2．现在我们来构造一个周期为 2 的，满足（1）式的函数 f(x)，由于（1）式可化为

$$(2f(x+1)-1)^2+(2f(x)-1)^2=1$$

这使我们想到最熟悉的周期函数：正余弦，但同时应注意到 2f(x)-1 非负、周期为 2，所以可令 $2f(x)-1=\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|$

即 $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$

不难证实它的确满足条件。

说明 f(x)不唯一，显然，函数 $f(x)=\frac{1}{2}(1+\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|)$ 也是满足条件的一个函数。

例 3 证明：函数 $f(x)=3x^2$ 可以表示为两个单调递增的多项式函数之差。

证：注意到恒等式

$$3x^2=(x+1)^3-(x^3+3x+1)$$

而函数 $g(x)=(x+1)^3, h(x)=x^3+3x+1$ 都是单调递增的多项式函数，从而命题得证。

说明 一般地，任意实系数多项式可表示为两个单调递增的多项式函数之差。

例 4 设二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象以 y 轴为对称轴，已知 $a+b=1$，而且若点 (x,y) 在 $y=f(x)$ 的图象上，则点 (x,y^2+1) 在函数 $g(x)=f[f(x)]$ 的图象上。

（1）求 $g(x)$ 的解析式

（2）设 $F(x)=g(x)-\lambda f(x)$，问是否存在实数 λ，使 $F(x)在(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 内是减函数，在 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ 内是增函数。

分析 由已知条件 $g(x)$ 的解析式不难求得，欲求 λ，可按定义分别求出 $F(x)在(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})和(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ 内分别是减函数，增函数的 λ 的范围，求出它们的交即可。

解（1）因 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 y 轴，故 $b=0$，从而 $a=1,f(x)=x^2+c$。

设 (x_o,y_o) 在 $y=f(x)$ 的图象上，即 $y_0=x_0^2+c$，则点 (x_0,y_0^2+1) 在 $y=f[f(x)]$ 的图象上，即 $y_0^2+1=(x_0^2+c)^2+c$。

故 $c=1$，因此，$f(x)=x^2+1,g(x)=(x^2+1)^2+1$。

（2）由（1）可得 $F(x)=g(x)-\lambda f(x)=x^4+(2-\lambda)x^2+2-\lambda$。

设 $x1<x2<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则

$$F(x_1)-F(x_2)=(x_1^2-x_1^2)(x_1^2+x_2^2+2-\lambda)$$

要使 $F(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 内为减函数，只需 $F(x_1)-F(x_2)>0$，但 $x_1^2-x_2^2>0$，故只要 $x_1^2+x_2^2+2-\lambda>0$，所以 $\lambda<x_1^2+x_2^2+2$。

然而当$x_1,x_2\in(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$时，$x_1^2+x_2^2+2>3$，因此，我们只要$\lambda\le 3$，$F(x)$在$(-\infty-\frac{\sqrt{2}}{2})$，内是减函数。

同理，当$\lambda\ge 3$时，$F(x)在(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$内是增函数。

综上讨论，存在唯一的实数$\lambda=3$，使得对应的$F(x)$满足要求。

例 5 奇函数$y=f(x)$的定义域为 R，当$x\ge 0$时，$f(x)=2x-x^2$，设函数$y=f(x)(x\in[a,b])$的值域为$[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]$，$(a\ne b)$，求 a，b 的值。

分析 可先由已知条件写出$f(x)$在 R 上的解析式，再根据二次函数的单调性分情形讨论$f(x)$的最大值和最小值，从而得到关于 a、b 的方程。

解： $\because y=f(x)$是奇函数

$\therefore 当x<0$时，函数式为$y=x^2+2x$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}2x-x^2 & (x\ge 0)\\ x^2+2x & (x<0)\end{cases}$$

因为$[a,b]$与$[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]$同时存在，$a\ne b$

所以$\begin{cases}a<b\\ \frac{1}{b}<\frac{1}{a}\end{cases}$

$\therefore a\cdot b$同号

分以下情形讨论：

（1）$1 \le a < b$时，由

$$\begin{cases} 2a - a^2 = \dfrac{1}{a} \\ 2b - b^2 = \dfrac{1}{b} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} (a-1)(a^2 - a - 1) = 0 \\ (b-1)(b^2 - b - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a = 1, b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

（2）$-2 < a < b \le -1$时，由

$$\begin{cases} 2a + a^2 = \dfrac{1}{a} \\ 2b + b^2 = \dfrac{1}{b} \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, b = -1$$

（3）$0 < a < b < 1$时，由

$$\begin{cases} 2a + a^2 = \dfrac{1}{b} \\ 2b + b^2 = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

无解

（5）$0 < a < 1 < b < 2$时，由

$$\begin{cases}\frac{1}{a}=1,\\ 2a-a^2=\frac{1}{b},\end{cases}$$

$a=1$,与$a<1$矛盾

（6）$-2<a<-1<b<0$，由

$$\begin{cases}\frac{1}{b}=-1\\ 2a+a^2=\frac{1}{a}\end{cases}$$

$b=-1$与$b>-1$矛盾。

综上分析

$$\begin{cases}a=1,\\ b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\qquad\begin{cases}a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ b=-1\end{cases}$$

说明 本题源自第四届“希望杯”第二试解答题，重在考查学生的分类讨论问题能力和运用函数性质的解题能力。

例 6 函数$f(x)$的定义域关于原点对称，但不包括数 0，对定义域中的任意实数 x，在定义域中存在x_1,x_2使$x=x_1-x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，且满足以下 3 个条件。

（1）x_1,x_2中$f(x)$定义域中的数，$f(x_1)\neq f(x_2)$，或$0<|x_1-x_2|<2a$，则

$$f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$$ 。

（2）$f(a)=1$，（a 是一个正常数）

（3）当 0＜x＜2a 时，f(x)＞0。

证明 （i）f(x)是奇函数；（ii）f(x)是周期函数，并求出其周期；（iii）f(x)在（0,4a）内为减函数。

证：（i）对定义域中的 x，由题设知在定义域中存在x_1,x_2使$x=x_1-x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，则

$$f(x)=f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1)\cdot f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}=-f(x_2-x_1)=-f(-x)$$

∴f(x)为奇函数

（ii）因 f(a)=1，∴f(-a)=-f(a)=-1，于是

$$f(-2a)=f(-a-a)=\frac{f(-a)f(a)+1}{f(a)-f(-a)}=0$$

若 f(x)≠0，则

$$f(x+2a)=f[x-(-2a)]=\frac{f(x)f_{(-2a)}+1}{f(-2a)-f(x)}=-\frac{1}{f(x)}$$

$$f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x)$$

若 f(x)=0，则

$$f(x+a)=f[x-(-a)]=\frac{f(x)f(-a)+1}{f(-a)-f(x)}=-1$$

$$f(x+3a)=f[(x+a)+2a]=\frac{1}{-f(x+a)}=1$$

$$f(x+4a)=f[(x+3a)-(-a)]=\frac{f(x+3a)f(-a)+1}{f(-a)-f(x+3a)}=0$$

仍有 f(x+4a)=f(x)。

∴f(x)为周期函数，4a 是它的一个周期。

（iii）先证在（0，2a）内 f(x)为减函数，事实上，设$0<x_1<x_2\le 2a$，则 $0<x_2-x_1<2a$，则$f(x_1)>0, f(x_2)\ge 0$（当$x_2=2a$时$, f(x_2)=-f(-2a)=0$）。

$$\frac{f(x_2)f(x_1)+1}{f(x_1)-f(x_2)}=f(x_2-x_1)>0$$

所以 $f(x_1)>f(x_2)$

当$2a<x_1<x_2<4a$时，

$0<x_1-2a<x_2-2a<2a,\quad f(x_1-2a)>f(x_2-2a)>0$，于是

$$f(x)=f[(x-2a)+2a]=-\frac{1}{f(x-2a)},$$

$$f(x_1)-f(x_2)=-\frac{1}{f(x_1-2a)}+\frac{1}{f(x_2-2a)}>0$$

即在（2a，4a）内，f(x)也是减函数，从而命题得证。

名　师　点　拨

学科：奥数

教学内容：赋值法在函数方程中的应用

赋值法是指给定的关于某些变量的一般关系式，赋予恰当的数值或代数式后，通过运算推理，最后得出结论的一种解题方法。下面介绍它在函数方程中的应用。

一、判断函数的奇偶性

例 1　若 $f（x+y）=f（x）+f（y）$ 中令 $x=y=0$，得 $f（0）=0$。

又在 $f（x+y）=f（x）+f（y）$ 令 $y=-x$，$f（x-x）=f（x）+f（-x）$，

即 $f（0）=f（x）+f（-x）$，又 $f（0）=0$.

所以 $f（-x）=-f（x）$。

由于 $f（x）$ 不恒为零，所以 $f（x）$ 是奇函数。

例 2　已知函数 $y=f（x）（x\in R，x\neq 0）$，对任意非零实数 x_1x_2 都有 $f（x_1x_2）=f（x_1）+f（x_2）$，试判断 $f（x）$ 的奇偶性。

解：取 $x_1=-1$，$x_2=1$ 得

$f（-1）=f（-1）+（1）$，所以 $f（1）=0$

又取 $x_1=x_2=-1$，

得 $f（1）=f（-1）+f（-1）$，

所以 $f（-1）=0$

再取 $x_1=x$，$x_2=-1$，则有 $f（-x）=f（x）$，即 $f（-x）=f（x）$

因为 $f（x）$ 为非零函数，所以 $f（x）$ 为偶函数。

例 3．对任意 x、$y\in R$，有 $（x+y）+f（x-y）=2f（x）\cdot f（y）$，且 $f（0）\neq 0$，判断 $f（x）$ 的奇偶性。

解：令 $x=y=0$ 得 $f（0）+f（0）=2f^2（0）$，因为 $f（0）\neq 0$，所以 $f（0）=1$，又令 $x=0$ 得 $f（y）+f（-y）=2f（y）$，即 $f（-y）=f（y）$。取 $x=y$，得 $f（-x）=f（y）$.所以函数 $y=f（x）$。

二、讨论函数的单调性

例 4．　设 $f（x）$ 定义于实数集 R 上，当 $x>0$ 时，$f（x）>1$，且对任意 x，$y\in R$，有 $f（x+y）=f（x）f（y）$，求证 $f（x）$ 在 R 上为增函数。

证明：由$f(x+y)=f(x)f(y)$中取$x=y=0$得$f(0)=f^2(0)$。

若$f(0)=0$，令$x>0$，$y=0$，则$f(x)=0$，与$f(x)>1$矛盾。

所以$f(0)\neq 0$，即有$f(0)=1$。

当$x>0$时，$f(x)>1>0$，当$x<0$时，$f(-x)>1>0$，而$f(x)=\dfrac{1}{f(-x)}\succ 0$，又$x=0$时，$f(0)=>0$，所以$f(x)\in R$，$f(x)>0$。

设 $x_1<x_2$，则 $x_1<x_2>0$，$f(x_2-x_1)>1$，所以 $f(x_2)=f[x_1+(x_2-x_1)]=f(x_1)\cdot f(x_2-x_1)>f(x_1)$，所以$y=(x)$在$R$上为增函数。

三、求函数的值域

例 5　已知函数$f(x)$在定义域$x\in R^+$上是增函数，且满足$f(xy)=f(x)+f(y)$（x、$y\in R^+$），求$f(x)$的值域。

解：因为$x=y=1$时，$(1)=2f(1)$，所以$f(1)=0$

又因为(x)在定义域R_+上是增函数，所以$x_1>x_2>0$时，令$x_1=mx_2$（$m>1$），则$f(x_1)-f<(x_2)=f(m\cdot x_2)-f(x_2)=f(m)+f(x_2)-f(x_2)=f(m)>0$。

得以对于$x>1$有$f(x)>0$。

又设$x1=mx_2>0$（$0<m<1$），则$0<x_1<x_2$。

所以由函数在$R+$上递增可得$f(x_1)-f(x_2)<0$,即$f(mx_2)-f(x_2)=f(m)+f(x_2)-f(x_2)=f(m)<0$。所以对于$0<x<1$有$f(x)<0$。综上所述：当$x\in R^+$时，$f(x)$的值域为$R$。

四、判断函数的周期性

例 6　函数$f(x)$定义域为R，对任意实数a、$b\in R$，有$f(a+b)=2f(a)f(b)$，

且存在 $c>0$，使 $f\left(\frac{c}{2}\right)=0$，求证 f（x）是周期函数。

证明：令 $a=x=\frac{c}{2}$，$b=\frac{c}{2}$，代入 f（$a+b$）＋ f（$a-b$）=2f（a）f（b）可得：

f（$x+c$）=－f（x）。所以 f（$x+2c$）＝ f[（$x+c$）＋c]=－ f（$x+c$）＝ f（x），即 f（$x+2c$）＝ f（x）。

则 f（x）是以 $2c$ 为周期的函数。

例 7　若对常数 m 和任意 x，等式 $f(x+m)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 成立，求证 f（x）是周期函数。

证明：将已知式中的 x 换成 $x+m$ 得 f（$x+2m$）= f[（$x+m$）＋m]

$=\frac{1+f(x+m)}{1-f(x+m)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$ 又将上式中 $x+2m$ 换成 $x+4m$ 可得

$$f(x+4m)=f[(x+2m)+2m]=-\frac{1}{f(x+2m)}=f(x)$$

故 f（x）是以 $4m$ 为周期的函数

五、求函数的解析式

例 8　设对满足 $|x|\neq 1$ 的所有实数 x，函数 f（x）满足 $f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)=x$，求 f（x）的解析式。

解：将 x 取为 $\frac{x-3}{x+1}$ 代入原等式，有 $f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)+f(x)=\left(\frac{x-3}{x+1}\right)$，　　　　（1）

将 x 取为 $\dfrac{3+x}{1-x}$ 代入原等式，有 $f(x)+f\dfrac{3-x}{1+x}=\dfrac{3+x}{1-x}$。 （2）

（1）＋（2），且将原等式代入即得 $f(x)=\dfrac{x_3+7x}{2-2x_2}(|x|\neq 1)$

例 9　求函数 F（x），当 $x\neq 0$，$x\neq 1$ 时有定义且满足 $F(x)+F\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x.$

解：$F(x)+F\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x$，（1）中以 $\dfrac{x-1}{x}$ 代换 x 得

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(-\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2x-1}{x} \qquad （2）$$

再在（1）中以 $-\dfrac{1}{x+1}$ 代换 x 得

$$F\left(-\frac{1}{x-1}\right)=+F(x)=\frac{x-2}{x-1}, \qquad （3）$$

（1）－（2）＋（3）化简得

$$F(x)=\frac{x_3-x_2-1}{2x(x-1)}.$$

例 10　f（x）的定义域在非负实数集合上并取非负数值的函数，求满足下列所有条件的 f（x）:（1）f[x • f（y）] • f（x）= f（x+y）;（2）f（2）=0;（3）当 $0\leqslant x<2$ 时，f（x）≠0.

解:（Ⅰ）令 x=2，t=2+y，由于 $y\geqslant 0$，故 $t\geqslant 2$。

f[2 f（t—2）] • f（2）= f（t）.

由（2）得 f（2）=0，所以 f（t）=0.

所以当 $t\geqslant 2$ 时，f（x）=0. ①

由（3）的逆命题知：当 f（x）=0 时，$x\geqslant 2$， ②

综合①、②得，f（x）=0 $\Leftrightarrow$ $x\geqslant 2$.

（Ⅱ）考虑 $0\leqslant x<2$，$0\leqslant y<2$，（即 f（x） f（y）≠0）时，（1）两边等于零的特殊情

况。

设 f [x（f（y））　f（x）=0.

因为 f [x（f（y））] f（x）=0.

由（Ⅰ）得：$x f$（y）⩾2，即 $x \ge \dfrac{2}{f(y)}$。设 f（x+y）=0，由（Ⅰ）得；x+y⩾2，即 x⩾2－y，因为 $x \ge \dfrac{2}{f(y)}$，且 x⩾2－y，所以 $\dfrac{2}{f(y)} = 2 - y$，解得 $f(y) = \dfrac{2}{2-y}$.所以当 0⩽x<2 时，f（x）$= f(x) = \dfrac{2}{2-x}$.所以 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-x}, (0 \le x < 2) \\ 0.(x \ge 2) \end{cases}$

例 11　设 S 表示所有大于－1 的实数构成的集合，确定所有的函数 f：S→S，满足以下两个条件：(i) 对于 S 内的所有 x 和 y，有

f [x+ f（y）+$x f$（y）]=y+ f（x）;

(ii) 在区间－1<x<0 与 x>0 的每一个内，$\dfrac{f(x)}{x}$是单调递增的。

解：令 x=y 得：

f（x+ f（x）+$x f$（x）=x+ f（x）+$x f$（x），

又令 x+ f（x）+$x f$（x）=t，则 f（t）=t，在（1）中令 x=t 得

f（t_2+2t）= f [t+ f（t）+$t f$（t）]=t+ f（t）+$t f$（t）=（t+2）t=t_2+2t.

若 t>0，则（t+2）t>t>0，但 $\dfrac{f(t)}{t} = \dfrac{f[(t+2)t]}{(t+2)t} = 1$，与 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 x>0 时单调递增矛盾。

同理，t>0，亦导致矛盾。因此，对任一 x 恒有

x+ f（x）+$x f$（x）=t=0.

从而 $f(x) = -\dfrac{x}{x+1}$。

显然，这一函数满足题设条件。

函数奥赛竞赛练习

一、选择题

1.（2000 年北京市中学生数学竞赛）已知函数 y=f(x)有反函数，现将 y=f(2x-1)的图象向左平移 2 个单位，所得图形表示的函数的反函数是（ ）

A. $y=\dfrac{-3+f^{-1}(x)}{2}$

B. $y=\dfrac{-3-f^{-1}(x)}{2}$

C. $y=\dfrac{3+f^{-1}(x)}{2}$

D. $y=\dfrac{3-f^{-1}(x)}{2}$

二、填空题

2.（2001 年全国高中数学联赛）函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域为_____。

3.（2001 年全国高中数学联赛）不等式$|\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}+2|>\dfrac{3}{2}$的解集为___________。

4.（2001 年北京市中学生数学竞赛）函数 f(x)对于任意非负实数 x、y 都满足 $f(x+y^2)=f(x)+2[f(y)]^2$，且 f(x)≥0，f(1)≠0，则 $f(2+\sqrt{3})$=______。

三、解答题

5.（2000 年北京市中学生数学竞赛）f(x)是定义在 R 上的函数，对任意的 x∈R，都有 f(x+3)≤f(x)+3 和 f(x+2) ≥f(x)+2，设 g(x)=f(x)-x，

（1）求证 g(x)是周期函数；

（2）如果 f(998)=1002，求 f(2000)的值。

6.（2000 年全国高中数学联赛）若函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{13}{2}$ 在区间[a，b]上的最小值为 2a，最大值为 2b，求区间[a，b]。

7.（第一届“希望杯”全国邀请赛试题）求函数

$f(x)=\dfrac{x^4+4x^3+17x^2+26x+106}{x^2+2x+7}$ 在区间[-1，1]上的值域。

8.（第九届“希望杯”全国邀请赛试题）若实数 x 满足不等式

$x^4-2x^3-7x^2+8x+12\le 0$。试求函数 $f(x)=|x+\dfrac{4}{x}|$的最大值。

9.（2000 年莫斯科师范大学数学奥林匹克竞赛）作函数 $y=|2^x-2|+2^x$的图象。

10.（2000 年莫斯科师范大学数学奥林匹克竞赛）函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2-1})$ 是偶函数还是奇函数？

11．（第五届北京高中数学知识应用竞赛）中国青年报 2001 年 3 月 19 日报道：中国移动通信将于 3 月 21 日开始在所属 18 个省、市移动通信公司陆续推出“全球通”移动电话资费“套餐"，这个：“套餐”的最大特点是针对不同用户采取了不同的收费方法。

具体方案如下：

方案代号	基本月租（元）	免费时间（分钟）	超过免费时间的话费（元/分钟）
1	30	48	0．60
2	98	170	0．60
3	168	330	0．50
4	268	600	0．45
5	388	1000	0．40
6	568	1700	0．35
7	788	2588	0．30

原计费方案的基本月租为 50 元，每通话一分钟付 0.4 元，请问：

（1）“套餐”中第 4 种收费方式的月话费 y 与月通话量 t（月通话量是指一个月内每次通话用时之和，每次通话用时以分为单位取整计算，如某次通话时间为 3 分 20 秒，按 4 分钟计通话用时）的函数关系式；

（2）取第 4 种收费方式，通话量多少时比原计费方式的月通话费省钱；

（3）据中国移动 2000 年公布的中期业绩，每户通话平均为每月 320 分钟，若一个用户的通话量恰好是这个平均值，那么选择哪种收费方式更合算，并说明理由。

参考答案

1．A　由于“抽象”没有具体的函数表达式，使题目显得有些难，化难为易的方法因而也就是化抽象为具体，不妨设 f(x)=x+1（这样符合原题“f(x)有反函数”的规定）。于是 以

下种种全具体化了。反函数是$f^{-1}(x)=x-1$，$f(2x-1)=2x$，向左平移2个单位所得图形表示的函数$f_1(x)=2(x+2)=2x+4$。这个函数的反函数$f_1^{-1}(x)=\frac{x}{2}-2$，再与4个选择来对照。

A 项$y=\frac{-3+f^{-1}(x)}{2}$是$y=\frac{-3+x-1}{2}=\frac{x}{2}-2$符合，

B 项$y=\frac{-3-f^{-1}(x)}{2}$是$y=\frac{-3-x+1}{2}=-\frac{x}{2}-1$不合，

C 项$y=\frac{3+f^{-1}(x)}{2}$是$y=\frac{3+x-1}{2}=\frac{x}{2}+1$不合，

D 项$y=\frac{3-f^{-1}(x)}{2}$是$y=\frac{3-x+1}{2}=-\frac{x}{2}+2$不合。故选 A。

2．$[1,\frac{3}{2})\cup[2,+\infty)$

$y=x+\sqrt{x^2-3x+2}\Rightarrow\sqrt{x^2-3x+2}=y-x\geq 0$

两边平方得$(2y-3)x=y^2-2$，从而$y\neq\frac{3}{2}$且$x=\frac{y^2-2}{2y-3}$。

由$y-x=y-\frac{y^2-2}{2y-3}\geq 0\Rightarrow\frac{y^2-3y+2}{2y-3}\geq 0\Rightarrow 1\leq y<\frac{3}{2}$或 y≥2。

任取 y≥2，由$x=\frac{y^2-2}{2y-3}$，易知 x≥2，于是$x^2-3x+2\geq 0$。

任取$1\leq y<\frac{3}{2}$，同样由$x=\frac{y^2-2}{2y-3}$，易知 x≤1。

于是$x^2-3x+2\geq 0$。

因此，所求函数的值域为$[1,\frac{3}{2})\cup[2,+\infty)$。

3．$(0,1)\cup(1,2^{\frac{2}{7}})\cup(4,+\infty)$

$|\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}+2|>\frac{3}{2}$等价于$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}+2>\frac{3}{2}$或$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}+2<-\frac{3}{2}$。即$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}x}>-\frac{1}{2}$或

$\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} < -\dfrac{7}{2}$。

此时，$\log_{\frac{1}{2}} x < -2$ 或 $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ 或 $-\dfrac{2}{7} < \log_{\frac{1}{2}} x < 0$。

∴解为 x>4 或 0<x<1 或 $1 < x < 2^{\frac{2}{7}}$。

即解集为 $(0,1) \cup (1,2^{\frac{2}{7}}) \cup (4,+\infty)$。

4．$1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

这题 f(x)不容易具体化，但是它的值则是可以具体化的。例如设 x=0，y=0。

则由 $f(x+y^2) = f(x) + 2[f(y)]^2$，

得 $f(0) = f(0) + 2[f(0)]^2$，$2[f(0)]^2 = 0$，f(0)=0。

再设 x=0，y=1。

得 $f(1) = f(0) + 2[f(1)]^2$，以 f（0）=0 代入 $2[f(1)]^2 = f(1)$，已知 f(1) ≠0，

∴ $f(1) = \dfrac{1}{2}$。

设 x=1，y=1，

得 $f(2) = f(1) + 2[f(1)]^2$，

即 $f(2) = \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{4} = 1$。

设 x=2，y=1，

得 $f(3) = f(2) + 2[f(1)]^2$，

$f(3) = 1 + 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{2}$。

设 x=0，$y = \sqrt{3}$，得 $\dfrac{3}{2} = 2[f(\sqrt{3})]^2$，

∴ $f(\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

设 x=0，$y = \sqrt[4]{3}$，

得 $f(\sqrt{3}) = f(0) + 2[f(\sqrt[4]{3})]^2$，

即 $\frac{\sqrt{3}}{2}=2[f(\sqrt[4]{3})]^2$，$[f(\sqrt[4]{3})]^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$。

至此可求 $f(2+\sqrt{3})$，

$f(2+\sqrt{3})=f(2)+2[f(\sqrt[4]{3})]^2$

$=1+2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$。

5．解：本例的难度显然又有增加，主要是难以具体化。只能在抽象的层面来解决问题

（1）g(x)=f(x)-x，

可得 g(x+2)=f(x+2)-x-2，

g(x+3)=f(x+3)-x-3，

再以 f(x+3) ≤f(x)+3 和 f(x+2) ≥f(x)+2 代换，可得

$g(x+2)\geq f(x)+2-x-2=f(x)-x$，①

$g(x+3)\leq f(x)+3-x-3=f(x)-x$，②

由①可得 g(x+4) ≥f(x+2)-x-2

≥f(x)+2-x-2=f(x)-x，

g(x+6) ≥f(x+2)-x-2≥f(x)-x。③

由②可得 g(x+6) ≤f(x+3)-x-3≤f(x)-x，④

由③、④知 g(x+6)=f(x)-x=g(x)。

∴g(x)是周期函数获证（6 是它的一个周期）

（2）2000-998=1002 是 6 的整数倍，所以

g(2000)=g(998)，即 f(2000)-2000=f(998)-998

f(2000)=f(998)+1002=1002+1002=2004。

本题的不同之处在于没有“具体化”，而是利用 f(x+3)与 f(x+2)的反复操作以求 g(x+6)与 f(x)的关系，进而得到 g(x+6)=g(x)，以达到证明的目的。

6．解 f(x)的最大值只能是 $f(0)=\frac{13}{2}$，或 f(a)，或 f(b)，f(x)的最小值只能是 f(a)或 f(b)其中之一，令 $y_{\min}=2a$，且 $y_{\max}=2b$，即可得关于 a、b 的方程组，解出 a、b 的值。

当 a 值由负值增大到正值时，区间[a，b]在 x 轴上自左向右移动，因此在求 f(x)的最值时，须按区间[a，b]的位置分类求解。

f(x)图象顶点坐标为 $(0,\frac{13}{2})$

$f(a)=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}$，$f(b)=-\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}$。

（1）当 a<b<0 时，

由 f(x)在[a，b]上单调递增得，f(a)=2a，且 f(b)=2b

即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2a,\\ -\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}=2b.\end{cases}$

于是 a、b 是二次方程 $\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{13}{2}=0$ 的两个负根，但此方程两根异号，故区间[a，b]不存在

（2）当 a<0<b 时，

f(x)在[a，0]上单调递增，在[0，b]上单调递减，因而 f(x)在 x=0 处取得最大值，在区间端点 x=a 或 x=b 处取得最小值，

即 $\begin{cases}f(0)=\frac{13}{2}=2b\text{即}b=\frac{13}{4}\\ f(a)\text{或}f(b)=2a<0.\end{cases}$

则 $f(b)=f(\frac{13}{4})=-\frac{1}{2}(\frac{13}{14})^2+\frac{13}{2}=\frac{39}{32}\neq 2a,$

$\therefore f(a)=-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2a$，

解得 $a=-2-\sqrt{17}$，

于是得区间 $[-2-\sqrt{17},\frac{13}{4}]$。

（3）当 b>a⩾0 时

由 f(x)在[a，b]上单调递减得，f(a)=2b，且 f(b)=2a，

即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2b,\\ -\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}=2a.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases}$（舍去）

即得区间[1，3]。

综上所述，所求区间为[1，3]或$[-2-\sqrt{17},\frac{13}{4}]$

7．解：$f(x)=x^2+2x+7+\frac{64}{x^2+2x+7}-1$。值域为$[15,15\frac{2}{3}]$。

8．解：$x^4-2x^3-7x^2+8x+12=(x-3)(x-2)\cdot(x+1)(x+2)$。$f_{\max}=5$。

9．解：研究 2 种情况。

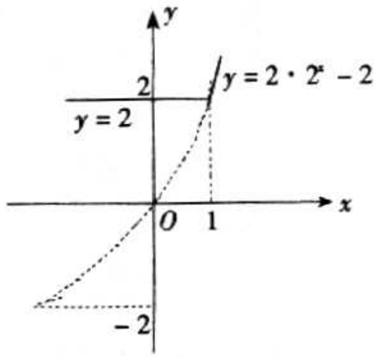
① $2^x-2\geq 0$，即 x≥1。于是

$y=2^x-2+2^x=2\cdot 2^x-2$。

② $2^x-2<0$，即 x<1。于是

$y=-(2^x-2)+2^x=2$。

图象如图所示。



第 9 题图

10．解：很明显对于任一 x∈R，$x+\sqrt{x^2+1}>0$，由此 f(x)的定义域为 R。

研究和 $f(-x)+f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)+\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$

$=\lg[(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)]=\lg 1=0$。

因此，对任何 x∈R，f(-x)=-f(x)，这表明 f(x)是奇函数。

11．解：（1）$y=\begin{cases}268 & 0\leq t\leq 600\\ 268+0.45\times(t-600) & t>600\end{cases}$

（2）当 0≤t≤600 时，解不等式 50+0.4t≥268，得 545≤t≤600（t∈N），

当 t>600 时，解不等式 50+0.4t≥268+0.45(t-600)，得 600<t≤1040(t∈N)，

综上，545≤t≤1040 时（t∈N），第 4 种收费方式比原收费方式的月通话费省钱。

（3）因为按照原来的收费方式，320 分钟收费 178 元（即 50+0.4×320），所以，不会

选择月租费多于 178 元的收费方式，从而只考虑“套餐”中的前三种方式。

第一种方式的话费为：30+0.6×（320-48）=193.2（元）；

第二种方式的话费为：98+0.6×（320-170）=188（元）；

第三种方式的话费为：168 元。

故选择第三种方式。

事实上，相对于原收费方式，当通话时间大于 244 分钟时，第一种方式不合算，当通话时间只有在 120 分钟至 270 分钟时，第二种方式较合算。

名 师 点 拨

开始学习

学科：奥数

教学内容：数论函数

【内容综述】

本讲介绍数论中常见的一些函数的概念、性质及其应用，主要有

除数函数 $T(n)$——自然数 n 的正因数的个数函数；

$S(n)$——自然数 n 的全部正因数的和函数；

欧拉函数 $\varphi(n)$——设 n 是大于 1 的自然数，则欧拉函数 $\varphi(n)$ 是表示与 n 互素且不大于 n 的自然数的个数；（高斯函数或称方括号函数[X]在下讲介绍）为书写清楚，同学们应熟悉连加符号“Σ”与连乘符号“Π”：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n;$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$$

特别是“Σa”表示对称式的和 $a+b+c+\cdots$；

“Πa”表示对称式的积 abc……；

【要点讲解】

§1．约数个数函数 $T(n)$

§2．约数和函数 $S(n)$

§3．欧拉函数 φ(n)

§1. 约数个数函数 $T(n)$

定义 1 设 $n\in N$，则 n 的正约数的个数称为函数 $T(n)$。

定理 1 设 $n\in N$，且 p_i 是质数 $(i=1,2,\cdots,s)$，$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}(\alpha_i\geq 0,i=1,2,\cdots,s)$ 则

$$T(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)$$

略证： 由乘法原理，约数系由 p_1、p_2、…、p_s 的不同取法而生成，它们的取法分别有

$\alpha_1+1,\alpha_2+1,\cdots,\alpha_s+1(\alpha_i\geq 0,i=1,2,\cdots,s)$ 种（含不取该约数的 1 种取法），故得证

$$T(n)=\prod_{i=1}^{s}(\alpha_i+1)(\alpha_i\geq 0,i=1,2,\cdots,s)$$

例 1. 求 24 的正约数个数。

解： $\because 24=2^3\cdot 3^1$

$$\therefore T(24)=(3+1)\cdot(1+1)$$
$$=8$$

事实上，易求得约数分别是 1，2，3，4，6，8，12，24；个数正是 8 个。

§2 约数和函数 $S(n)$

定义 2° 设 $n\in N$，且 p_i 是质数，$i=1,2,\cdots,s$，$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}(\alpha_i\geq 0,i=1,2,\cdots,s)$，则称 n 的正约数和为函数 $S(n)$。

定理 2 自然数 n 的正约数和函数

$$S(n)=\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i^{\alpha_i-1}-1}{p_i-1}=\frac{p_1^{\alpha_1-1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2-1}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_s^{\alpha_s-1}-1}{p_s-1}$$

（其中 p 为 n 的素数，$i=1,2,\cdots,s$）。

略证 注意到（$1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1}$）

$$\bullet(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})$$
$$\bullet(1+p_s+p_s^2+\cdots+p_s^{\alpha_s}),$$

展开后，其项数恰为 n 的约数个数

$$T(n)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_s),$$

又每项皆形如 $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}(0\leq\beta_i^{\alpha}\leq\alpha_i,i=1,2,\cdots,s)$，

可见每项皆自然数 n 的约数且每个约数只出现一次，由此可见该积即 $S(n)$，于是有

$$S(n)=\sum_{i=1}^{s}p_1^{\alpha_i}\cdot\sum_{i=1}^{s}p_2^{\alpha_i}\cdot\cdots\cdot\sum_{i=1}^{s}p_s^{\alpha_i}$$
$$=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_1+1}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_s^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1}$$
$$=\prod_{k=1}^{s}\frac{p_k^{\alpha_k-1}}{p_k-1}(x_k\geq 0,p_k\text{质数})$$

例 2. 求 780 的正约数和 $S(780)$。

解： $\because 780=2^2\times3\times5\times13$

$$\therefore S(780)=\frac{2^3-1}{2-1}\times\frac{3^2-1}{3-1}\times\frac{5^2-1}{5-1}\times\frac{13^2-1}{13-1}$$
$$=7\times4\times6\times14$$
$$=2352$$

定理 3 若 a 、b 是互质的自然数，即(a，b)=1，则

$$T(a,b)=T(a)T(b),$$
$$S(a,b)=S(a)S(b)$$

证明： 设 $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_s^{\alpha_s}$， $b=q_1^{\beta_1}\cdot q_2^{\beta_2}\cdot\cdots\cdot q_m^{\beta_m}$，

$\because(a,b)=1$，故 p_i 与 q_j 各不相同（i=1，2，…，j=1，2，…，m）

$$T(ab)=\prod_{i=1}^{s}(\alpha_i+1)\cdot\prod_{g=1}^{m}(\beta_g+1)$$
$$=T(a)\cdot T(b)$$
$$S(ab)=S(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_s^{\alpha_s}\cdot q_1^{\beta_1}\cdot q_2^{\beta_2}q_3^{\beta_3}\cdot\cdots\cdot q_m^{\beta_m})$$
$$=\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\cdot\prod_{j=1}^{m}\frac{q_g^{\beta+1}-1}{q_g-1}$$
$$=S(a)\cdot S(b)$$

§3.欧拉函数 $n\in N$

定义 设 $n>1$ 且 $n\in N$，则与 n 互素且不大于 n 的自然数的个数(n),称为欧拉函数。

如 $\varphi(1)=1,\varphi(2)=1,\varphi(3)=2,\varphi(4)=2,\varphi(5)=4,\varphi(6)=2,\cdots$，易证 n 是素数 $\Leftrightarrow\varphi(n)=n-1$ （$\because$ 每个小于 n 的自然数都与它互素）；反之可见，若 n 是合数，必有 $\varphi(n)\le n-2$。

关于欧拉函数 $\varphi(x)$，有以下性质定理

定理 4 设 P 是素数，且 $k>0$ 则 $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}=p^k(1-\frac{1}{p})$

证明 $\because$P 是素数，显然有 n 与 p^k 互素的充要条件是 $p\nmid n$，即有：$(n,p^k)=1\Rightarrow p\nmid n$，反之若 $p\nmid n\Rightarrow(n,p^k)=1$，且知在 1 和 p^k 之间，有以下 p^{k-1} 个数是 p 的倍数：

$p,2p,\cdots,p^{k-1}\cdot p$，而其余的数都与 p^k 互素，从而可知不超过 p^k 且与 p^k 互素的自然数个数。

$$\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}=p^k(1-\frac{1}{p})$$

当自然数 n 的素因数分解式中，不只包含一个素因数时，有

定理 5 设大于 1 的自然数的素因数分解式为

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_r^{\alpha_r},$$

其中 p_i 是素数 $(i=1,2,\cdots,r)$, $\alpha_i\ge0(i=1,2,\cdots,r)$, 则有

$$\varphi(n)=(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1})\cdots(p_r^{\alpha_r}-p_r^{\alpha_r-1})$$
$$=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_r})$$

即 $\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{p_i})$

证明：因为素因数的个数$r\in N$，故考虑采用数学归纳法（下设n_k表有 k 个素因数的自然数n）。

（i）当 $r=1时,由定理4知\ \varphi(n)=n(1-\frac{1}{p})成立$；

（ii）设 $r=k时,\ \varphi(n_k)=n\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})成立$；

注意到加入第个 k+1 素因数p_{k+1}后，有

$(p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k},p_{k+1}^{\alpha_{k+1}})=1$，

且当$(m,n)=1时,\varphi(m\cdot n)=\varphi(m)\cdot\varphi(n);(*)$

于是由归纳假设就有

$$\varphi(n_{k+1})=\varphi[(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k})\cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}]$$
$$=\varphi(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k})\cdot\varphi(p_{k+1}^{\alpha_{k+1}})$$
$$=n_k\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})\cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\cdot(1-\frac{1}{p_{k+1}})$$
$$=n_k\cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\cdot\prod_{i=1}^{k+1}(1-\frac{1}{p_i})$$
$$=n_{k+1}\prod_{i=1}^{k+1}(1-\frac{1}{p_i})$$

从而$r=k+1$时，定理成立；

综上，对任意 $r\in N,都有\ \varphi(n)=n\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{p_i})$

（★的补证： 引理 设a、b、c∈N，则$(a,bc)=1\Leftrightarrow(a,b)=1$ 且$(a,c)=1$

(i)若$(a,bc)=1,记(a,b)=d$,则

$d\mid a且d\mid b$，

从而$d\mid bc$

可见$(a,bc)\geq d=1$

故 $d=1$

同理可证 $(a,c)=1$

（ii）若 $(a,b)=1,且(a,c)=1,记(a,bc)=d'>1$，则存在素因数 $p\mid d'$，由

$d'\mid a且d'\mid bc又p\mid d',p>1$

$\Rightarrow p\mid bc且p\mid a(p>1)$

$则p\mid b或p\mid c;(p>1)$

$若p\mid b,\because p\mid a\Rightarrow(a,b)\geq p>1,此与(a,b)=1矛盾$

同理，若 $p\mid c\Rightarrow(a,c)\geq p>1,也不可能,故d'=1,即(a,bc)=1$

再证定理 若 $(m,n)=1$，则

$\varphi(m,n)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$ （★★）

注意到 $\varphi(1)=1$，故 m,n 中有一个数为 1 时，（★★）显然成立，现假设 $m>1且n>1$ 并把从 1 到 mn 的自然数排成长 $n\times m$ 方阵：

1	2	……	r	……	m
m+1	m+2	……	m+r	……	2m
2m+1	2m+2	……	2m+r	……	3m
		……			
(n-1)m+1	(n-1)m+2	……	(n-1)m+r		nm

则 $\varphi(m,n)$ 为上面这组数中与 mn 互素的自然数的个数，由引理知它等于这组数中同时与 m,n 都互素的自然数个数。

注意到(km+r，m)=(r，m)，

所以当 $(r,m)=1$ 时，第 r 列中的每一个数都与 m 互素，从而这 m 列数中共有 $\varphi(m)$ 列数与 m 互素。

下面再证这 $\varphi(m)$ 列的每列数中，恰好有 $\varphi(m)$ 个自然数与 n 互素，这样就能证明共有 $\varphi(m)\cdot\varphi(n)$ 个数，既与 m 互素，也与 n 互素，即定理为真。

事实上，从第 r 列看，$\because(r,m)=1$，

$\therefore$ 这列中的 n 个数中，任意两个数被 n 除时，所得余数都不会相同。

（若不然，设 $km+r和jm+r被$ n 除同余，则

$(km+r)-(jm+r)=l\ n$，

其中 $0\leq j<k<n,l\in N$，于是有 $(k-j)m=l\ n$

因题设 $(m,n)=1,故n\mid(k-j),但这不可能!$）

可见这第 r 列中的 n 个数被 n 除的余数分别是 0，1，2，3，…，（n-1）（不计顺

序），而这 n 个数中与 n 互素的自然数个数正是 $\varphi(n)$，即第 r 列中存在 $\varphi(n)$ 个与 n 互素的数。

这就证明了 $\varphi(m\cdot n)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$。

例 3　求与 300 互素且不超过 300 的自然数的个数。

解　所求的数即 $\varphi(300)$，$\because 300=2^2\times3\times5^2$

$$\begin{aligned}\therefore \varphi(300)&=\varphi(2^2\times3\times5^2)\\&=300\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{5})\\&=80\end{aligned}$$

★★★例 4. 试判断是否存在自然数 m，使 $\varphi(m)=14$

解　设 $m\in N$存在，且$m=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_r^{\alpha_r}$，(其中$p_i$是素数，$\alpha_i\ge0(i=1,2,\cdots,r)$)

则 $\because \varphi(m)=m(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_r})$

$$\therefore 14=\frac{m}{p_1p_2\cdots p_r}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)$$

即 $14=p_1^{\alpha_1-1}\cdot p_2^{\alpha_2-1}\cdot\cdots\cdot p_r^{\alpha_r-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)$

这里应估计到 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 中必有一个是奇数（否则若它们全是偶数，则 $m=L^\alpha$，于是

$$\begin{aligned}\varphi(m)&=\varphi(2^\alpha)\\&=2^\alpha(1-\frac{1}{2})\\&=2^{\alpha-1}\end{aligned}$$

但 $2^{\alpha-1}\ne14$，因而$(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)$必是 2 的倍数，但它不等于 14，（否则 $p_1^{\alpha_1-1}\cdot p_2^{\alpha_2-1}\cdot\cdots\cdot p_r^{\alpha_r-1}=1$，只有 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=1$，则$m=p_1p_2\cdots p_r$，且 $(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)=14$，不妨令 $p_1=3$，则$(p_2-1)\cdots(p_r-1)=7$　（★★★）

而 7 是素数，★★★式中$p_2,p_3,\cdots p_r$也是素数，因而不可能成立！），于是只能是

$$p_1^{\alpha_1-1}\cdot p_2^{\alpha_2-1}\cdot\cdots\cdot p_r^{\alpha_r-1}=7$$

$$\therefore r=1即p_1^{\alpha_1-1}=7$$

$$\because \alpha_1是非负整数，p_1是素数，\therefore p_1=7$$

$$\alpha_1=2，\therefore m=7^2=49，但\ \varphi(49)=42\ne14，$$

因此也不是成立的！

综上知，不存在$m\in N$，使 $\varphi(m)=14$。

例 5. 试证：

$$\varphi(2n)=\begin{cases}\varphi(n)，n是奇数;\\2\varphi(n)，n是偶数\end{cases}$$

证明：

（i）当 n 是奇数时，$(2,n)=1$，注意到 $\varphi(2)=1$，于是

$\varphi(2n)=\varphi(2)\cdot\varphi(n)=\varphi(n)$;

（ii）当 n 是偶数时，不妨设 $n=2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$

则 $\varphi(2n)=\varphi(2^{\alpha_1+1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_r^{\alpha_4})$

$=2n(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_r})$;

而 $2\varphi(n)=2\varphi(2^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_r^{\alpha_r})$

$=2n(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_r})$

故 $\varphi(2n)=2\varphi(n)$

综 i,ii，原命题成立。

例 6. 证明 $\varphi(n)$ 的值或者是 1 或者是偶数，其中 $n\in N$。

证明： （i）当 n=1，2 时，φ（n）=1;

（ii）当 n>2 时，若 $n=2^{\alpha}(\alpha\geq 2)$,则

$\varphi(m)=\varphi(2^{\alpha})=2^{\alpha}(1-\frac{1}{2})=2^{\alpha-1}$ 是偶数;

若 $n\neq 2^{\alpha}$,则 $n=p^{\alpha}\cdot m$(其中 p 为奇数)且 $(p^{\alpha},m)=1,\alpha\geq 1)$，于是

$\varphi(n)=\varphi(p^{\alpha})\cdot\varphi(m)$

$=p^{\alpha-1}(p-1)\cdot\varphi(m)$

$\because p-1$ 是偶数,从而 $\varphi(n)$ 也是偶数;

总之,$n>2$ 时 $\varphi(n)$ 是偶数

本周强化练习

【能力训练】

1．证明自然数 n 的所有正约数的欧拉函数值的和为 n（即 $n\in N,n\geq 1$,求证 $\sum\limits_{d/n}\varphi(d)=n$）

2．设 $(m,n)=d$,则 $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)\cdot\dfrac{d}{\varphi(d)}$.。

3．记不大于自然数 n 而与 n 互素的数（共 $\varphi(n)$ 个)之和为 $\sigma(n)$,如 $\sigma(15)=1+2+4+7+8+11+13+14=60$，求证当 $n>1$ 时, $\sigma(n)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot\varphi(n)$。

参考答案

【能力训练】

1．首先注意，若自然数

$n=\alpha\cdot\beta,(\alpha,\beta\in N)$,则不大于$n$而以$\alpha$为最大公约数的共有$\varphi(\beta)$个。

这是因为不大于n而与n有公约数α的数只能是$\alpha,2\alpha,\cdots,\beta\alpha$,若$(x\alpha,n)=\alpha$，即$(x\alpha,\beta\alpha)=x$,必须$(x,\beta)=1$,满足条件的$x$共有$\Phi(\beta)$个。

现记$d_1,d_2,\cdots,d_r$为n的全体约数,并令$1=d_1<d_2<\cdots<d_{r-1}<d_r=n$，并注意到:$n=d_1d_r=d_2d_{r-1}=\cdots=d_rd_1$，于是有

不大于n而与n以d_1为最大公约数的数有$\varphi(d_r)$个；

不大于n而与n以d_2为最大公约数的数有$\varphi(d_{r-1})$个；

……

不大于n而与n以d_r为最大公约数的数有$\varphi(d_1)$个；

而任何一个不大于n的数与n有且只有的一个最大公约数只能是$d_1,d_2,\cdots d_r$之一,

于是$n=\sum\limits_{i=1}^{r}\varphi(d_r)$, 即$n=\sum\limits_{d/n}\varphi(d)$.

2．注意

$$\frac{\varphi(mn)}{mn}=\prod_{p/mn}(1-\frac{1}{p})=\frac{\prod\limits_{p/m}(1-\frac{1}{p})\prod\limits_{p/n}(1-\frac{1}{p})}{\prod\limits_{p/(mn)}(1-\frac{1}{p})}$$

$$=\frac{\frac{\varphi(m)}{m}\cdot\frac{\varphi(n)}{n}}{\frac{\varphi(d)}{d}}(\text{其中}p\text{是素数});$$

3.由$\sigma(15)=60$可见，1 与 15-1；2 与 15-2；4 与 15-4；都是小于 15 且互素的数，一般而言，若$(n,a)=1(a<n)$,则有$(n,n-a)=1$（若不然，设$(n,n-a)=d\neq1$,则$d\mid n-a\Rightarrow d\mid a$，于是$d\mid(n,a)(=1)\Rightarrow d=1$,矛盾）。

记$a_1<a_2<\cdots<a_{\varphi(n)}$为不大于$n$且与$n$互素的所有自然数，则

$n-a_1>n-a_2>\cdots>n-a_{\varphi(n)}$

也是不大于n且与n互素的所有自然数,从而

$$\begin{cases} \sigma(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\varphi(n)} \\ \sigma(n) = (n - a_1) + (n - a_2) + \cdots + (n - a_{\varphi(n)}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma(n) = \frac{1}{2} n \varphi(n)$$

数列奥赛竞赛练兵

一、选择题

1.（2000 年全国高中数学联赛）给定正数 p，q，a，b，c，其中 p≠q。若 p，a，q 是等比数列，p，b，c，q 是等差数列，则一元二次方程 $bx^2 - 2ax + c = 0$（　　）

A．无实根　　　　　　B．有两个相等实根

C．有两个同号相异实根　　　　　　D．有两个异号实根

二、填空题

2.（2000 年全国高中数学联赛）等比数列 $a + \log_2 3$，$a + \log_4 3$，$a + \log_8 3$ 的公比是_________。

三、解答题

3．（2000 年全国高中数学联赛）设 $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$，n ∈ N。求 $f(n) = \dfrac{S_n}{(n+32)S_{n+1}}$ 的最大值。

4.（第五届北京高中数学知识应用竞赛）PC505 型文曲星具有选定一组或多组英文单词，根据科学记忆曲线在十四天内进行初记和强化复习的功能。对于每一组单词（词量自定），初记完成后，文曲星提示“立即复习一遍”，然后在第二、第四天、第七天、第九天、第十

天、第十四天，“每天复习一遍”该组单词，其他天无须复习，当你在这十四天内，按时正确地拼写这组单词后，文曲星就不再提示对该组单词的记忆。高中《英语》第一册（下）生词表中，UNIT17~UNIT20 共 99 个单词，请你将这 99 个单词适当分组，利用文曲星的强化复习功能，制定一个在 20 天内记忆 99 个单词的计划，把每天需要初记的单词数和每天需要初记和复习的单词总数填入下表中，使得每天初记和复习的单词总数不少于 10 个，且不多于 50 个。

天数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
初记单词数																				
初记和复习单词总数																				

5．（第十一届美国数学邀请赛（AIME）试题第九题）在一圆周上给定 2000 个点，取其中一点标记上数 1，从这点开始按顺时针方向到第二个点标记上数 2，从标记上 2 的点开始按顺时针方向数到第三个点标记上数 3（如图 3－3），继续这个过程直到 1，2，3，…，1993 都被标记到点上，圆周上这些点中有些会标记上不止一个数，也有一些点未标记上任何数，在标上 1993 的那一点上所有标数中最小的数是什么？

图 3－3

6．（第五届北京高中数学知识应用竞赛）电子器件厂兼营生产和销售某种电子器件，流水线启动后每天生产 p＝500 个产品，可销售 q＝400 个产品，未售出的产品存入库房，每件产品在库房内每过一夜将支付存储费用 r＝0.2 元。该流水线在开机生产一段时间后将停机销售，待所有库存产品销完再开机生产，流水线启动的费用是 c＝1000 元（与产品数量无关）。这样，开机生产——停机销售——产品售完构成了一个产销周期。为管理方便，流水线的生产和停机的时间均以天为单位安排。请你设计一个产销周期，即开机生产多少天，停机销售多少天，使得平均每件产品用于流水线启动和存储的费用最少？

参考答案

1．A　由题意知 $pq=a^2$，2b＝p＋c，2c＝q＋b，

由后二式得

$b=\dfrac{2p+q}{3}$，$c=\dfrac{p+2q}{3}$。

于是有 $bc=\dfrac{1}{3}(p+q+q)\cdot\dfrac{1}{3}(p+p+q)\geq\sqrt[3]{pq^2}\cdot\sqrt[3]{p^2q}=pq=a^2$。

因为 p≠q，

故 $bc>a^2$，

方程的判别式 $\Delta=4a^2-4bc<0$。

因此方程无实根。故选 A。

2．$\dfrac{1}{3}$

设公比为 q，由已知条件知，

$$q=\frac{a+\log_4 3}{a+\log_2 3}=\frac{a+\log_8 3}{a+\log_4 3},$$

由比例性质，

$$q=\frac{a+\log_4 3-(a+\log_8 3)}{a+\log_2 3-(a+\log_4 3)}=\frac{\log_4 3-\log_8 3}{\log_2 3-\log_4 3}=\frac{\frac{1}{2}\log_2 3-\frac{1}{3}\log_2 3}{\log_2 3-\frac{1}{2}\log_2 3}=\frac{1}{3}。$$

3．解：由已知，对任何 n∈N，有

$$f(n)=\frac{S_n}{(n+32)S_{n+1}}=\frac{n}{(n+32)(n+2)}$$

$$=\frac{n}{n^2+34n+64}=\frac{1}{n+\frac{64}{n}+34},$$

又因 $n+\dfrac{64}{n}+34\geq 2\sqrt{n\cdot\dfrac{64}{n}}+34=50$，

故对任意 x∈N，有

$$f(n)=\frac{1}{n+\frac{64}{n}+34}\leq\frac{1}{50}。$$

由于 $f(8)=\frac{1}{50}$，

故 f（n）的最大值为 $\frac{1}{50}$。

4．解：制定方案的原则可以是：

第一条：为了能在 20 天内完成 99 个单词的复习任务，最后一组初记单词最晚在第 7 天输入；设第 i 天初记的单词量为 a_i，则有下表

天数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
第一组	a_1	a_1		a_1			a_1		a_1	a_1				a_1						
第二组		a_2	a_2		a_2			a_2		a_2	a_2				a_2					
第三组			a_3	a_3		a_3			a_3		a_3	a_3				a_3				
第四组				a_4	a_4		a_4			a_4		a_4	a_4				a_4			
第五组					a_5	a_5		a_5			a_5		a_5	a_5				a_5		
第六组						a_6	a_6		a_6			a_6		a_6	a_6				a_6	
第七组							a_7	a_7		a_7			a_7		a_7	a_7				a_7

第二条：易知，只有第 7 天和第 10 天初记和复习单词的组数最多，是4 组，为了方便，先确定这两天的记忆总数。

此题答案不惟一，下面是一个解法。

因为 10≤每天初记和复习的单词总数≤50，可知 a_1，a_4，a_5，a_6，a_7 均小于 10。

在第 7 天，$a_1+a_4+a_6+a_7\le 50$，则 $a_1\le 20$，不妨设 $a_1=20$。

于是 $a_4=a_6=a_7=10$。

在第 10 天，$a_1+a_2+a_4+a_7\le 50$，则 $a_2=10$。

据已知，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=99$，得 $a_3+a_5=39$。在第 4 天，

$a_1+a_3+a_4\le 50$，则 $a_3\le 20$，在第 14 天，$a_1+a_5+a_6\le 50$，则 $a_5\le 20$，于是 $a_3=19$，$a_5=20$。

这样，a_i（i=1，2，3，4，5，6，7）均已确定。经验证，符合题目要求，产生下表

天数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
初记单词数	20	10	19	10	20	10	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
初记和复习单词总数	20	30	29	49	40	49	50	40	49	50	49	39	40	50	30	29	10	20	10	10

5．解：从标上数 1 的那点数起，标记上数 1 数过的点个数为 1，标记上数 2 的点数为 1＋2，标记上数 3 的点数为 1＋2＋3，…。

由归纳推理得出，标上数字 n 的数过的点数符合关系式 $f(n)=\frac{n(n+1)}{2}$，由此得到上数 1993 数过的点个数为：$1+2+3+\cdots+1993=\frac{1}{2}1993\times1994=1993\times997=1987021$，用 2000 除 1987021 余数为 1021，$1021=\frac{1}{2}n(n+1)$ 无整数解，再考虑末四位数 7021，

$7021=\frac{1}{2}n(n+1)\Rightarrow14042=n(n+1)$，解出得 n＝118。

故可知符合条件的最小整数为 118。

6．解：设流水线开机生产 n_1 天，停机销售 n_2 天，为了除低存储费用，在产品足够的情况下，每天销售 q 个产品，则生产期间最高库存量为 $(p-q)n_1$。由题意，它要在 n_2 天内全部售完，故有 $(p-q)n_1=q(n_2-1)+a$，其中 a 取值为 100，200，300，400。

即 $n_2=\frac{p-q}{q}n_1+\frac{q-a}{q}$。

这时在生产期间库存产品的存储费用为

$(p-q)[n_1+(n_1-1)+\cdots+1]r$，即 $\frac{r(p-q)n_1(n_1+1)}{2}$。

在停机销售期间库存产品用于存储的费用为

$\{[(p-q)n_1-q]+[(p-q)n_1-2q]+\cdots+[(p-q)n_1-(n_2-1)q]\}r$，

将 $n_2=\frac{p-q}{q}n_1+\frac{q-a}{q}$ 代入，上式变为 $\frac{[(p-q)n_1-a][(p-q)n_1-q+a]r}{2q}$。

于是在整个产销周期内用于启动流水线和存储的总费用为

$$S=c+\frac{r(p-q)n_1(n_1+1)}{2}+\frac{[(p-q)n_1-a][(p-q)n_1-q+a]r}{2q}$$

$$=c+\frac{(p-q)n_1^2pr}{2q}+\frac{(q-a)ar}{2q}。$$

平均每件产品所负担的流水线启动和存储的费用为

$$s=\frac{S}{n_1p}=An_1+B\frac{1}{n_1},$$

其中 $A=\frac{r(p-q)}{2q}$，$B=\frac{c}{p}+\frac{(q-a)ar}{2pq}$。

当 a＝100 时，$s=\frac{n_1}{40}+\frac{403}{200n_1}$；

当 a＝200 时，$s=\frac{n_1}{40}+\frac{101}{50n_1}$；

当 a＝300 时，$s=\frac{n_1}{40}+\frac{403}{200n_1}$；

当 a＝400 时，$s=\frac{n_1}{40}+\frac{2}{n_1}$。

考虑函数 $s(x)=Ax+B\frac{1}{x}$，它有最小值，且只有一个最小值点，在最小值点的左侧，函数是单调递减的，在最小值点的右侧，函数是单调递增的。分别取 a＝100，200，300，400，求得 s（x）的最小值点 x_a，那么 $s=An_1+B\frac{1}{n_1}$ 的最小值在 x_a 的左侧或右侧的相邻可取整数处取得。

由以上可得，对于 a＝400，s 最小值在 $n_1=8$ 或 12 时取得，经检验，$n_1=8$ 时，s 取得最小值为 0.45，即生产 8 天，停机销售 2 天，费用最少。

同理，对于 $a=200$，s 最小值在 $n_1=6$ 或 10 时取得，经检验，$n_1=10$ 时，s 取得最小值为 0.452，即生产 10 天，停机销售 3 天，费用最少。

当 a＝100，a＝300 时，s 关于 n_1 的表达式相同，所以其最小值在 $n_1=7$ 或 9 时取得。经检验，$n_1=9$ 时，s 取得最小值为 0.448，即生产 9 天，停机销售 3 天，费用最少。

综上所述，这三个方案差距不大，其中生产 9 天，停机销售 3 天方案略好些。

名 师 点 拨

学科：奥数

教学内容：竞赛中的三角函数例题选讲

【内容综述】

一．三角函数的性质

1．正，余弦函数的有界性

对任意角α，$|\sin\alpha|\le 1, |\cos\alpha|\le 1$，　$|A\sin\alpha+B\cos\alpha|\le\sqrt{A^2+B^2}$

2．奇偶性与图象的对称性

正弦函数，正切函数和余切函数都是奇函数，它们的图象关于原点对称，并且 y=sinx 的图象还关于直线$x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in z$对称：余弦函数是偶函数，从而 y=cosx 的图象关于 y 轴对称，并且其图象还关于直线$x=k\pi, k\in z$对称

3．单调性

y=sinx 在$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in z)$上单调递增，在$[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi](k\in z)$上单调递减：y=cosx 在$[2k\pi+\pi, 2k\pi+2\pi](k\in z)$上单调递增，在$[2k\pi, 2k\pi+\pi](k\in z)$上单调递减；y=tanx 在$(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)(k\in z)$上都是单调递增的；y=cotx 在$(k\pi, k\pi+\pi)(k\in z)$上都是单调递减的。

4．周期性

y=sinx 与 y=cosx 的最小正周期是2π，y=tanx 与 y=cosxr 的最小正周期是π。

【例题分析】

例 1 已知圆$x^2+y^2=k^2$至少覆盖函数$f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{k}$的一个最大值点与一个最小值点，求实数 k 的取值范围。

解 因为$f_{(x)}=\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{k}$是一个奇函数，其图象关于原点对称，而圆$x^2+y^2=k^2$也关于原点对称，所以，图$x^2+y^2=k^2$只需覆盖$f_{(x)}$的一个最值点即可。

令$\frac{\pi x}{k}=\frac{\pi}{2}$，可解得$y=f_{(x)}$的图象上距原点最近的一个最大值点$P(\frac{k}{2},\sqrt{3})$，依题意，此点到原点的距离不超过|k|，即

$k^2\ge(\frac{k}{2})^2+(\sqrt{3})^2$

$\therefore |k|\ge 2$

综上可知，所求的 K 为满足$|k|\ge 2$的一切实数。

例 2 已知$x, y\in[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}], a\in k$，且

$$\begin{cases} x^3+\sin x-2a=0, \\ 4y^3+\frac{1}{2}\sin 2y+a=0, \end{cases}$$

求 cos(x+2y)的值。

解 原方程组可化为

$$\begin{cases} x^3+\sin x=2a, \\ (-2y)^3+\sin(-2y)=2a. \end{cases}$$

因为 $x,y\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$, 所以 $x,-2y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 令 $f(t)=t^3+\sin t$，则 $f(t)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上是单调递增的，于是由 $x^3+\sin x=(-2y)^3+\sin(-2y)$

得 f(x)=f(-2y)

得 x=-2y

即 x+2y=0

$\therefore \cos(x+2y)=1$

例 3 求出（并予以证明）函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$

解 首先，对任意 $x\in R$，均有

$|\sin(x+\frac{\pi}{2})|+|\cos(x+\frac{\pi}{2})|$

$=|\cos x|+|-\sin x|=|\sin x|+|\cos x|.$

这表明，$\frac{\pi}{2}$ 是函数 f(x)的一个周期

其次，设 $0<T<\frac{\pi}{2}$，T 是 f(x)的一个周期，则对任意 $x\in R$，均有

$|\sin(x+T)|+|\cos(x+T)|=|\sin x|+|\cos x|.$

在上式中，令 x=0，则有

$|\sin T|+|\cos T|=1$。

两边平方，可知

$\sin^2 T+2|\sin T\cos T|+\cos^2 T=1.$

即 $|\sin 2T|=0$, sin2T=0，这表明 $2T=k\pi(k\in z)$, $T=\frac{k\pi}{2}$，与 $0<T<\frac{\pi}{2}$ 矛盾。

综上可知，函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$。

例 3 求证：在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内存在唯一的两个数 $0<c<d\le 1$，使得

sin(cosc)=c, cos(sind)=d

证，构造函数

f(x)=cos(sinx)-x

f(x)在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内是单调递减的，由于

f(0)=cos(sin0)-0=1>0.

$f(1)=\cos(\sin 1)-\frac{\pi}{2}=\cos 1-\frac{\pi}{2}<0.$

故存在唯一的 $d\in(0,1]$，使 f(d)=0，即

cos(sind)=d

对上述两边取正弦，并令 c=sind，有

sin(cos(sind))=sind

sin(cosc)=c

显然$c\in(0,1]$，由于 y=sinx 在$(0,\frac{\pi}{2})$是单调递增的，且 d 是唯一的，所以 c 也是唯一的，且$c=\sin d<d\le 1$

例 4 已知对任意实数 x，均有

$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-Acox2x-B\sin 2x\ge 0,$

求证：$A^2+B^2\le 1,\quad a^2+b^2\le 2$

证 首先，f(x)可以写成

$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)-\sqrt{A^2+B^2}\cos 2(x-\beta),$①

其中α,β是常数，且$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

$\cos 2\beta=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\ \sin 2\beta=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

在①式中，分别令$x=\alpha+\frac{\pi}{4}$和$\alpha-\frac{\pi}{4}$得

$1-\sqrt{a^2+b^2}\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{A^2+B^2}\cos 2(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4})\ge 0$②

$1-\sqrt{a^2+b^2}\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{A^2+B^2}\cos 2(\alpha-\beta-\frac{\pi}{4})\ge 0$③

②+③，得

$2-2\sqrt{a^2+b^2}\cos\frac{\pi}{4}\ge 0$

$\therefore a^2+b^2\le 2$

又在①式中分别令$x=\beta$和$\beta+\pi$，得

$1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(\beta-\alpha)-\sqrt{A^2+B^2}\ge 0.$④

$1-\sqrt{a^2+b^2}\cos(\beta-\alpha+\pi)-\sqrt{A^2+B^2}\ge 0.$⑤

由④+⑤，得

$2-2\sqrt{A^2+B^2}\ge 0$

$\therefore A^2+B^2\le 1$

本周强化练习

【能力训练】

（A 组）

1．求函数$y=2\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$的单调递增区间

2．已知$f(x)=\sqrt{3}\sin(x+\theta)+\cos(x-\theta)$是偶函数，$0<\theta<\pi$，求$\theta$

3．设 $x\in(-\frac{1}{2},0)$，$a_1=\cos(\sin x\pi)$，$a_2=\sin(\cos x\pi)$ $a_3=\cos(x+1)\pi$ 试比较 a_1,a_2,a_3 的大小。

4．证明：对所以实数 x, y，均有

$\cos x^2+\cos y^2-\cos xy<3.$

5．已知 $f(x)=\sin x+\cos(x+t)$ 为偶函数，且 t 满足不等式 $t^2-3t-4<0$，求 t 的值。

（B 组）

6．已知 $a,b,c\in R$，$f(x)=a\sin^2 x+b\sin x+c,$ 且满足：

（1）$f(\frac{\pi}{6})=381$；（2）$[f(x)]_{max}=444$；

（3）$[f(x)]_{min}=364$。

求 f(x)的解析式

7．证明：对任意正实数 x, y 以及实数 α 均有不等式

$x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}<x+y$

8．已知当 $x\in[0,1]$ 时，不等式

$x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$

恒成立，求 θ 的取值范围。

9．设 $x\geq y\geq z\geq\frac{\pi}{12}$，$x+y+z=\frac{\pi}{2}$，求乘积 $\cos x\sin y coxz$ 的最大值和最小值。

参考答案

【能力训练】

A 组

1．$[k\pi-\frac{7\pi}{12},k\pi-\frac{\pi}{12}](k\in z)$

2．由偶函数的定义，有

$f(x)=\sqrt{3}\sin(x+\theta)+\cos(x-\theta)$

$=\sqrt{3}\sin(-x+\theta)+\cos(-x-\theta)$

$\therefore\sqrt{3}\sin x\cos\theta+\sin x\sin\theta=0$

上式对任意 $x\in R$ 成立，故

$\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=0$

所以 $2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=0,\quad \theta=\frac{2\pi}{3}$

3．首先，$a_1>0,a_2>0,a_3<0$ 又

$1<\sin(-x\pi)+\cos(-x\pi)\le\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$

$0<\sin(-x\pi)<\frac{\pi}{2}-\cos(-x\pi)<\frac{\pi}{2}$

$\cos[\sin(-x\pi)]>\cos[\frac{\pi}{2}-\cos(-x\pi)]=\sin[\cos(-x\pi)]$，

即 $a_1>a_2>a_3$

4．只需证明 $\cos x^2=1,\cos y^2=1,\cos xy=-1$ 不能同时成立，若不然，则存在整数m,n,k,使得

$x^2=2m\pi,\quad y^2=2n\pi,xy=(2k+1)\pi$

$\therefore(2m\pi)(2n\pi)=(2k+1)^2\pi^2.$

即 $4mn=(2k+1)^2.$

矛盾

5．由题设，得

$\sin(-x)+\cos(t-x)=\sin x+\cos(t+x),$

即 $\sin t\sin x=\sin x$

由于上式对任意 x 成立，故 sint=1，结合 $t^2-3t-4<0$，即-1<t<4 可知 $t=\frac{\pi}{2}$

B 组

6．由 $f(\frac{\pi}{6})=381$ 可得 a+2b+4c=1524①

（1）当 $|\frac{b}{2a}|\ge 1$ 且 b>0 时，有

$$\begin{cases}a+b+c=444,\\a-b+c=364,\end{cases}$$

此方程组与①联立后无解

（2）当 $|\frac{b}{2a}|\ge 1$ 且 b<0 有

$$\begin{cases}a+b+c=364,\\a-b+c=444.\end{cases}$$

此时 a=4,b=-40, c=400

（3）当 a>0 且 $|\frac{b}{2a}|<1$ 有

$$\begin{cases}\dfrac{4ac-b^2}{4a}=364,\\ a\pm b+c=444.\end{cases}$$

此方程组与①联立后无解。

（4）当 a<0 且 $|\dfrac{b}{2a}|<1$，有

$$\begin{cases}\dfrac{4ac-b^2}{4a}=444\\ a\pm b+c=364\end{cases}$$

此方程组与①联立后无解，

得上可知，$f(x)=4\sin^2 x-40\sin x+400$。

7．原不等式等价于

$$(\frac{x}{y})^{\sin 2x}<\frac{x}{y}+1.$$

若 $0<\dfrac{x}{y}<1$，则 $(\dfrac{x}{y})^{\sin^2\alpha}<1<\dfrac{x}{y}+1.$

若 $\dfrac{x}{y}\geq 1,$则$(\dfrac{x}{y})\sin^{\sin^2\alpha}\leq\dfrac{x}{y}<\dfrac{x}{y}+1.$

故原不等式成立

8．令 $x=0,x=1$，由条件可得 $\sin\theta>0,\cos\theta>0$ 所以 θ 在第 I 象限，原不等式可化为

$$(1+\cos\theta+\sin\theta)x^2-(1+2\sin\theta)x+\sin\theta>0.$$

由于 $1+\cos\theta+\sin\theta>0$ $0<\dfrac{1+2\sin\theta}{2(1+\cos\theta+\sin\theta)}<1,$ 结合原不等式对任意 x∈[0，1]都成立，可知取最小值亦成立，即

$$\begin{cases}\sin\theta>0\\ \cos\theta>0\\ \dfrac{4(1+\cos\theta+\sin\theta)\sin\theta-(1+2\sin\theta)^2}{4(1+\cos\theta+\sin\theta)}>0.\end{cases}.$$

$$\therefore\begin{cases}\sin\theta>0,\\ \cos\theta>0,\\ \sin 2\theta>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\therefore 2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in z$$

9．由条件知 $x=\dfrac{\pi}{2}-(y+z)\leq\dfrac{\pi}{2}-(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{12})=\dfrac{\pi}{3}$，于是

$$\cos x \sin y \cos z = \frac{1}{2}\cos x[\sin(y+z)+\sin(y-z)]$$

名　师　点　拨

开始学习

学科：奥数

教学内容：动点轨迹方程的求法

一、直接法

按求动点轨迹方程的一般步骤求，其过程是建系设点，列出几何等式，坐标代换，化简整理，主要用于动点具有的几何条件比较明显时．

例 1（1994 年全国）已知直角坐标平面上点 Q（2，0）和圆 C：$x^2+y^2=1$，动点 M 到圆 C 的切线长与 $|MQ|$ 的比等于常数 $\lambda(\lambda>0)$（如图），求动点 M 的轨迹方程，说明它表示什么曲线．

解：设 M（x，y），直线 MN 切圆 C 于 N，

则有 $\dfrac{|MN|}{|MQ|}=\lambda$，

即 $\dfrac{\sqrt{|MO|^2-|ON|^2}}{|MQ|}=\lambda$，

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}=\lambda .$$

整理得 $(\lambda^2-1)x^2+(\lambda^2-1)y^2-4\lambda^2x+(1+4\lambda^2)=0$，这就是动点 M 的轨迹方程．

若 $\lambda=1$，方程化为 $x=\dfrac{5}{4}$，它表示过点 $(\dfrac{5}{4},0)$ 和 x 轴垂直的一条直线；

若 $\lambda\neq1$，方程化为 $(x-\dfrac{2\lambda^2}{\lambda^2-1})^2+y^2=\dfrac{1+3\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}$，它表示以 $(\dfrac{2\lambda^2}{\lambda^2-1},0)$ 为圆心，

$\dfrac{\sqrt{1+3\lambda^2}}{\left|\lambda^2-1\right|}$为半径的圆.

二、代入法

若动点 M（x，y）依赖已知曲线上的动点 N 而运动，则可将转化后的动点 N 的坐标入已知曲线的方程或满足的几何条件，从而求得动点 M 的轨迹方程，此法称为代入法，一般用于两个或两个以上动点的情况.

例 2 （1986 年全国）已知抛物线 $y^2=x+1$，定点 A（3，1），B 为抛物线上任意一点，点 P 在线段 AB 上，且有 $BP:PA=1:2$，当点 B 在抛物线上变动时，求点 P 的轨迹方程，并指出这个轨迹为哪种曲线.

解：设 $P(x,y),B(x_1,y_1)$，由题设，P 分线段 AB 的比 $\lambda=\dfrac{AP}{PB}=2$，

$$\therefore\quad x=\frac{3+2x_1}{1+2},y=\frac{1+2y_1}{1+2}.$$

解得 $x_1=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2},y_1=\dfrac{3}{2}y-\dfrac{1}{2}.$

又点 B 在抛物线 $y^2=x+1$ 上，其坐标适合抛物线方程，

$$\therefore\quad (\frac{3}{2}y-\frac{1}{2})^2=(\frac{3}{2}x-\frac{3}{2})+1.$$

整理得点 P 的轨迹方程为

$$(y-\frac{1}{3})^2=\frac{2}{3}(x-\frac{1}{3}),$$

其轨迹为抛物线.

三、定义法

若动点运动的规律满足某种曲线的定义，则可根据曲线的定义直接写出动点的轨迹方程．此法一般用于求圆锥曲线的方程，在高考中常填空、选择题的形式出现.

例 3 （1986 年广东）若动圆与圆 $(x+2)^2+y^2=4$ 外切且与直线 $x=2$ 相切，则动圆圆心的轨迹方程是

（A） $y^2-12x+12=0$

（B） $y^2+12x-12=0$

（C） $y^2+8x=0$

（D） $y^2-8x=0$

解：如图，设动圆圆心为 M，由题意，动点 M 到定圆圆心（－2，0）的距离等于它到定直线 $x=4$ 的距离，故所求轨迹是以（－2，0）为焦点，直线 $x=4$ 为准线的抛物线，并且 $p=6$,

顶点是（1，0），开口向左，所以方程是 $y^2=-12(x-1)$．选（B）．

例 4 （1993 年全国）一动圆与两圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切，则动圆圆心轨迹为

（A）抛物线　　　　　（B）圆

（C）双曲线的一支　　（D）椭圆

解：如图，设动圆圆心为 M，半径为 r，则有

$$|MO|=r+1,$$

$$|MC|=r+2,$$

$$|MC|-|MO|=1.$$

动点 M 到两定点的距离之差为 1，由双曲线定义知，其轨迹是以 O、C 为焦点的双曲线的左支，选（C）．

四、参数法

若动点 P（x，y）的坐标 x 与 y 之间的关系不易直接找到，而动点变化受到另一变量的制约，则可求出 x、y 关于另一变量的参数方程，再化为普通方程．

例 5 （1994 年上海）设椭圆中心为原点 O，一个焦点为 F（0，1），长轴和短轴的长度之比为 t.

（*A*）求椭圆的方程；

（2）设经过原点且斜率为 t 的直线与椭圆在 y 轴右边部分的交点为 Q，点 P 在该直线上，且 $\dfrac{|OP|}{|OQ|}=t\sqrt{t^2-1}$，当 t 变化时，求点 P 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形．

解：（1）设所求椭圆方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

由题意得 $\begin{cases}\sqrt{a^2-b^2}=1,\\ \dfrac{a}{b}=t,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a^2=\dfrac{t^2}{t^2-1}.\\ b^2=\dfrac{1}{t^2-1}.\end{cases}$

所以椭圆方程为

$$t^2(t^2-1)x^2+(t^2-1)y^2=t^2.$$

(2)设点 $P(x,y),Q(x_1,y_1)$, 解方程组

$$\begin{cases} t^2(t^2-1)x_1^2+(t^2-1)y_1^2=t^2, \\ y_1=tx_1, \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2(t^2-1)}}, \\ y_1=\dfrac{t}{\sqrt{2(t^2-1)}}. \end{cases}$$

由 $\dfrac{|OP|}{|OQ|}=t\sqrt{t^2-1}$ 和 $\dfrac{|OP|}{|OQ|}=\dfrac{|x|}{|x_1|}$ 得

$$\begin{cases} x=\dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}, \end{cases} 或 \begin{cases} x=-\dfrac{t}{\sqrt{2}}, \\ y=-\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

其中 $t>1$.

消去 t，得点 P 轨迹方程为

$$x^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y(x>\frac{\sqrt{2}}{2})$$

和 $x^2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y(x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

其轨迹为抛物线 $x^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y$ 在直线 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 右侧的部分和抛物线 $x^2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y$ 在直线 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 在侧的部分.

五、交轨法

一般用于求二动曲线交点的轨迹方程．其过程是选出一个适当的参数，求出二动曲线的方程或动点坐标适合的含参数的等式，再消去参数，即得所求动点轨迹的方程.

例 6 （1985 年全国）已知两点 $P(-2,2),Q(0,2)$ 以及一条直线 ι：$y=x$，设长为 $\sqrt{2}$ 的线段 AB 在直线 λ 上移动，求直线 PA 和 QB 交点 M 的轨迹方程.

解：PA 和 QB 的交点 M（x，y）随 A、B 的移动而变化，故可设 $A(t,t),B(t+1,t+1)$，则

PA:　$y-2=\dfrac{t-2}{t+2}(x+2)(t\neq-2),$

QB:　$y-2=\dfrac{t-1}{t+1}x(t\neq-1).$

消去 t，得 $x^2-y^2+2x-2y+8=0.$

当 t=－2，或 t=－1 时，PA 与 QB 的交点坐标也满足上式，所以点 M 的轨迹方程是

$x^2-y^2+2x-2x-2y+8=0.$

以上是求动点轨迹方程的主要方法，也是常用方法，如果动点的运动和角度有明显的关系，还可考虑用复数法或极坐标法求轨迹方程．但无论用何方法，都要注意所求轨迹方程中变量的取值范围．

名 师 点 拨

学科：奥数

教学内容：几何不等式测试题

1．在△ABC 中，M 为 BC 边的中点，∠B=2∠C，∠C 的平分线交 AM 于 D。

证明：∠MDC≤45°。

2．设 NS 是圆 O 的直径，弦 AB⊥NS 于 M，P 为弧 $\overset{\frown}{ANB}$ 上异与 N 的任一点，PS 交 AB 于R，PM 的延长线交圆 O 于 Q，求证：RS＞MQ。

3．在△ABC 中，设∠A，∠B，∠C 的平分线交外接圆于 P、Q、R。

证明：AP+BQ+CR＞BC+CA+AB。

4．过△ABC 内一点 O 引三边的平行线，DE∥BC，FG∥CA，HI∥AB，点 D、E、F、G、I 都在△ABC 的边上，S_1 表示六边形 DGHEFI 的面积，S_2 表示△ABC 的面积。

求证：$S_1 \geq \frac{2}{3}S_2$。

5．求证：△ABC 的内心 I 到各顶点的距离之和不小于重心 G 到各边距离之和的 2 倍。

6．凸四边形 ABCD 具有性质：（1）AB=AD+BC，（2）在其内部有点 P，P 点到 CD 的距离为 h，并使 AP=h+AD，BP=h+BC，求证：$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}}+\frac{1}{\sqrt{BC}}$。

7．设 H 为锐角△ABC 的垂心，A_1，B_1，C_1，分别为 AH，BH，CH 与△ABC 外接圆的交点。

求证：$HA_1+HB_1+HC_1 \leq HA+HB+HC$。其中等号当且仅当△ABC 为正三角形时成立。

8．一凸四边形内接于半径为 1 的圆。证明：四边形周长与其对角线之和的差值 u，满足 0<u<2。

9.已知过锐角△ABC 顶点 A、B、C 的垂线分别交对边于 D、E、F，AB>AC，直线 EF 交 BC 于 P，过点 D 且平行于 EF 的直线分别交 AC、AB 于 Q、R。N 是 BC 上的一点，且∠NQP+∠NRP＜180°，求证：BN>CN。

参考答案

【同步达纲练习】

1．设∠B 的平分线交 AC 于 E，易证 EM⊥BC 作 EF⊥AB 于 F，则有 EF=EM，
∴AE≥EF=EM，从而∠EMA≥∠EAM，即 90°－∠AMB≥∠EAM。又
2∠MDC=2（∠MAC+∠ACD）=2∠MAC+∠ACM=∠MAC+∠AMB，
∴90°≥∠AMD+∠MAC=2∠MDC，∴∠MDC≤45°。

2．连结 NQ 交 AB 于 C，连结 SC、SQ。易知 C、Q、S、M 四点共圆，且 CS 是该圆的直径，于是 CS>MQ。再证 Rt△SMC≌Rt△SMR，从而 CS=RS，故有 RS>MQ.

3．设ΔABC的内心为 I，由 IA+IB>AB, IB+IC>BC,

$$IC + IA > CA \Rightarrow 2(IA + IB + IC) > AB + BC + CA$$

即 2（AP-IP+BQ-IQ+CR-IR）＞AB+BC+CA

$$\therefore AP + BQ + CR > \frac{1}{2}(AB + BC + CA) + IP + IQ + IR \quad (1)$$

连 AR，∵∠AIR=∠IAR，∴IR=AR，又 AR=BR，

$$\therefore IR = \frac{1}{2}(AR + BR) > \frac{1}{2}AB.$$

同理 $IP > \frac{1}{2}BC, IQ > \frac{1}{2}CA$

$$\therefore IP + IQ + IR > \frac{1}{2}(AB + BC + CA) \quad (2)$$

由（1）、（2）即得 AP+BQ+CR>AB+BC+CA。

4．如图 8。

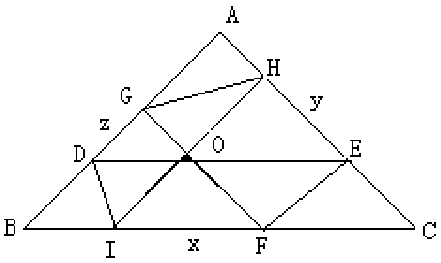


图8

设ΔABC三边长分别为 a、b、c，IF=x，EH=y，DG=z，则依题意有

$\backsim \Delta BAC$，$\frac{y}{b} = \frac{OE}{a} = \frac{CF}{a}$，（易知 OE=CF）

同理$\dfrac{z}{c}=\dfrac{BI}{a}$，所以，

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{IF+CF+BI}{a}=1$$

由柯西不等式$(\dfrac{x}{a}\cdot 1+\dfrac{y}{b}\cdot 1+\dfrac{z}{c}\cdot 1)^2\le 3(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2})$，从而

$$S_{\Delta OIF}+S_{\Delta DEH}+S_{\Delta OGD}\ge\frac{1}{3}S_2,\quad S_{\Delta AGH}+S_{\Delta BDI}+S_{\Delta EFC}\le\frac{1}{2}(S_2-\frac{1}{3}S_2)=\frac{S_2}{3}$$

于是$S_1=S_2-(S_{\Delta AGH}+S_{\Delta BDI}+S_{\Delta EFC})\ge\dfrac{2}{3}S_2$

5．设 G 到各边距离为$r_1=\dfrac{h_a}{3},r_2=\dfrac{h_b}{3},r_3=\dfrac{h_c}{3}.$由

$h_a\le AI+r,h_b\le BI+r,h_c=CI+r$

（r 为内切圆半径），得$r_1+r_2+r_3=\dfrac{1}{3}(h_a+h_b+h_c)\le\dfrac{1}{3}(AI+BI+CI)+r,$又

$r=\dfrac{1}{3}(3r)\le\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}(AI+BI+CI)$（艾尔多斯——莫德尔不等式）。故

$$r_1+r_2+r_3\le\frac{1}{3}(AI+BI+CI)+\frac{1}{6}(AI+BI+CI)=\frac{1}{2}(AI+BI+CI).$$

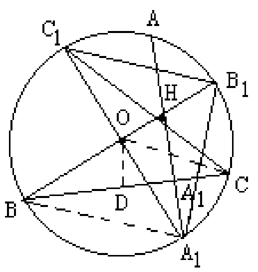
即 AI+BI+CI≥2($r_1+r_2+r_3$)

6．分别以 A、B、P 为圆心，AD、BC、h 为半径作圆，三圆两两外切，EF 为⊙A、⊙B 外公切线，⊙P 与 EF 相切时 h 最大，此时设 AD=r,BC=R,⊙P 半径为 m，则

$\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=\sqrt{(R+m)^2-(R-m)^2}+\sqrt{(r+m)^2-(r-m)^2}$化简得

$\sqrt{Rr}=\sqrt{Rm}+\sqrt{rm}$，即$\dfrac{1}{\sqrt{m}}=\dfrac{1}{\sqrt{R}}+\dfrac{1}{\sqrt{r}}$

由$\dfrac{1}{\sqrt{h}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{m}}$知命题成立。



第 7 题

7．由外接圆心 O 向 BC 作垂线 OD 于 D，

则 AH=2·OD，∠DOC=∠A，故

HA=2OD=2RcosA。同理 HB=2RcosB,HC=2RcosC,由 BC 是HA_1的垂直平分线，

$\angle BA_1A=\angle C$，得

同理$HB_1=4R\cos A\cos C,HC_1=4R\cos A\cos B$。于是原不等式等价于

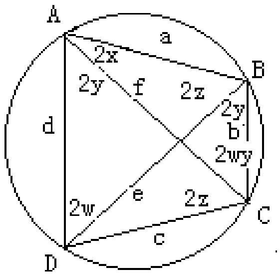
$\cos A+\cos B+\cos C\ge 2(\cos B\cos C+\cos C\cos A+\cos A\cos B$

而 $1<\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$,

∴2(cosBcosC+cosCcosA+cosAcosB)

$\le\frac{2}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)^2\le\cos A+\cos B+\cos C$

故 $HA_1+HB_1+HC_1\le HA+HB+HC$.



8．如图，

引进有关边长、对角线、角的记号，则 a+d>e, d+c>f, c+b>e, b+a>f, 四式相加得

a+b+c+d>e+f, 即 u=(a+b+c+d)-(e+f)>0. 又四边形至少有一角 $\le\frac{\pi}{2}$，不妨设 $A\le\frac{\pi}{2}$，则

$x+y\le\frac{\pi}{4}$, 且 $x+y+z+\omega=\frac{\pi}{2}$，同样可设 $z\le\omega$，由圆的半径为 1 及正弦定理得

$a=2\sin 2\omega, b=2\sin 2x, c=2\sin 2y, d=2\sin 2z, e=2\sin 2(x+y), f=2\sin 2(\omega+x)$.

于是 u<2 等价于证明：

$1+\sin 2(x+y)+\sin 2(\omega+x)>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z+\sin 2\omega$

下面证明更强的结论：

$\sin 2(x+y)+\sin 2(y+z)+\sin 2(z+x)>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z+\sin 2(x+y+z)$

由于

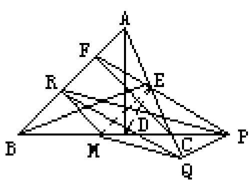
$x+y<x+y+2z\le\frac{\pi}{2}$,

$\therefore[\sin(x+y+2z)-\sin(x+y)][\cos(x-y)-\cos(x+y)]>0$

$\therefore\sin(x+y)\cos(x+y)+\sin(x+y+2z)\cos(x-y)>$

$\sin(x+y)\cos(x-y)+\sin(x+y+2z)\cos(x+y)$ 故结论成立。

9．取 BC 中点 M，只需证∠MRP+∠MQP=180°，即 R、M、Q、P 四点共圆。



第10题

如图，连结 ED，易知∠PEC=∠DEC，∠DEB=∠FEB，有 $\frac{PC}{CD}=\frac{PE}{ED}=\frac{PB}{BD}$ 连结 ME。

∠EMC=180°-2∠ACB，∠EDP=180°-∠ACB-∠CED。

∴∠MED=∠ACB-∠CED=∠EPC

∴△MDE∽△MEP，从而 $ME^2=MD\cdot MP=MC^2$ 又∵RQ∥FP，

∴∠BRD=∠BFE=∠DCQ　∴B、R、C、Q 四点共圆。

$RD\cdot DQ=BD\cdot CD=(BM+MD)(CM-MD)=MC^2-MD^2=MD\cdot MP-MD^2=MD\cdot PD$

∴R、M、Q、P 四点共圆。

即∠MRP+∠MQP=180°，当N∈BC，且∠NQP+∠NRP＜180°时，N必在M右侧，故BN>CN。

名　师　点　拨

学科：奥数

教学内容：三垂线法作二面角的平面角的技巧

求二面角的大小是考试中经常出现的问题，而用三垂线法作二面角的平面角是求二面角大小的一个重要方法，许多同学在解题过程中由于没有有效地利用三垂线定理(或逆定理)作出二面角的平面角，使得解题受阻．

我们把用三垂线定理(或逆定理)作二面角的平面角的方法称为三垂线法，其作图模型为：

如图 1，在二面角 $\alpha—l—\beta$ 中，过平面 α 内一点 A 作 AO⊥平面 β，垂足为 O，过点 O 作 $OB\perp l$ 于 B(过 A 点作 AB⊥于 B)，连结 AB(或 OB)，由三垂线定理(或逆定理)知 $AB\perp l$(或 $OB\perp l$)，则∠ABO 为二面角。$\alpha—l—\beta$ 的平面角．

作图过程中，作出了两条垂线 AO 与 OB(或 AB)，后连结 AB 两点(或 OB 两点)，这一过程可简记为“两垂一连”，其中 AO 为“第一垂线”．“第一垂线”能否顺利找到或恰当作出是用三垂线法作二面角的平面角的关键，在具体解题过程中要注意以下几点：

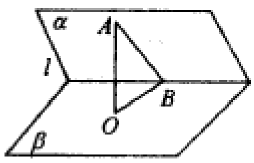


图1

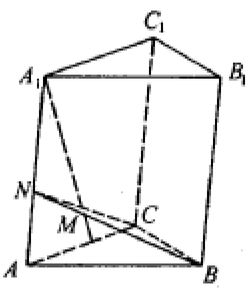


图2

1．善于利用图中已有的“第一垂线”

例 1　已知斜三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 中，∠BCA=90°，$AC=BC$，A_1 在底面 ABC 的射影恰为 AC 的中点 M，又知 AA_1 与底面 ABC 所成的角为 60°．

(1)求证：$BC\perp$平面 AA_1CC_1；

(2)求二面角 B一AA_1—C的大小.

剖析：注意该题的第(1)问，事实上本题已经暗示了 BC 就是我们要寻求的“第一垂线”.

略解 2　A_1A 与底面 AB 成的角为 60°，所以$\angle A_1AC=60°$，又 M 是 AC 中点，所以$\triangle AA_1C$是正三角形，作 $CN\perp AA_1$于 N，点 N为 A_1A 的中点，连结 BN，由 $BC\perp$平面 AA_1CC_1，$BN\perp AA_1$，则$\angle BNC$为二面角 B一AA_1一 C的平面角．设 $AC=BC=a$，正$\triangle AA_1C$的边长为 a，所以 $CN=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，在 Rt$\triangle BNC$ 中，$\tan\angle BNC=\dfrac{BC}{NC}=\dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，即$\angle BNC=\arctan\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

例 2　如图 3，在底面是直角梯形的四棱锥 S—$ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，$SA\perp$面 $ABCD$，$SA=AB=BC=1$，$AD=\dfrac{1}{2}$

(1)求四棱锥 S—$ABCD$ 的体积；

(2)求面 SCD 与面 SBA 所成的二面角的正切值.

剖析：由 $SA\perp$面 $ABCD$ 及$\angle ABC=90°$，不难发现，BC 即为“第一垂线”，但是，本题要作二面角的平面角，还需首先作出二面角的棱.

略解 2　延长 BA、CD 相交于点 E，连结 SE，则 SE 是所求二面角的棱，因为 $AD\parallel BC$，$BC=2AD$，所以 $EA=AB=SA$，所以 $SE\perp SB$，因为 $SA\perp$面 $ABCD$，得面 $SEB\perp$面 EBC，EB 是交线，又 $BC\perp EB$，所以 $BC\perp$面 SEB，故 SB 是 CS 在面 SEB 上的射影，所以 $CS\perp SE$，所以$\angle BSC$是所求二面角的平面角，因为 $SB=SA^2+AB^2=\sqrt{2}$，$BC=1$，$BC\perp SB$，因为 $\tan\angle BSC==\dfrac{BC}{SB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即所求二面角的正切值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

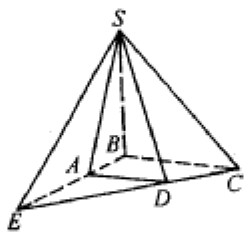


图3

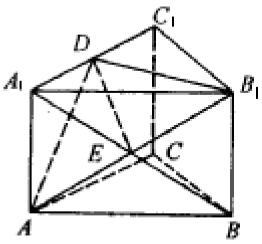


图4

2．借助第三个平面，作“第一垂线”

例 3　如图 4，正三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$ 的底边长为 a，侧棱长为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，若经过对角线 AB_1 且与对角线 BC_1 平行的平面交上底面一边 A_1C_1 于点 D.

(1)确定点 D 的位置，并证明你的结论；

(2)求二面角 A_1—AB_1—D 的大小.

剖析：由线面平行的性质定理及三角形中位线性质，易知 D 是 A_1C_1 中点．二面角 A_1—AB_1一 D 的放置属于非常规位置的图形，但是，容易发现，平面 $A_1B_1C_1$ 过点 D 且与平面

A_1AB_1 垂直，这样的平面相对于二面角的两个平面而言，我们称为第三个平面．过 D 作 $DF\perp A_1B_1$，由面面垂直的性质知，$DF\perp$ 面 A_1AB_1，即 DF 为我们要作的“第一垂线”．

略解 2　在平面 $A_1B_1C_1$ 内，作 $CF\perp A_1B_1$ 于 F，连 DC，由三垂线定理可证 $AB_1\perp DG$，$\angle DGF$ 就是二面角 $A_1—AB_1$ 一 D 的平面角，在正 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，因为 D 是 A_1C_1 中点，$A_1B_1=a$，所以 $B_1F=\dfrac{3}{4}a$，$DF=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$，在 Rt$\triangle DFG$，可求得 $\angle DCF=45°$ ．

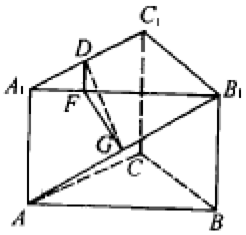


图 5

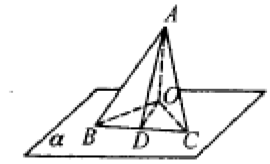


图 6

3．利用特殊图形的定义、性质作“第一垂线”

例 4　已知：Rt$\triangle ABC$的斜边 BC在平面 α 内，AB、AC分别与平面。成30° 和 45° 角，求平面 α 与$\triangle ABC$所在平面所成二面角的大小．

剖析：本题中没有相对于二面角的两个平面的第三个平面可以借助，但是，我们注意到 AB、AC与平面 α 所成的角均已给出，只要过 A 作 $AO\perp\alpha$ 于 O，就可以同时找到 AB、AC 在平面 α 内的射影，无疑这样得到的“第一垂线"AO有着非常特殊的位置，有利于二面角大小的计算．

解：作 $AO\perp\alpha$ 于 O，$OD\perp BC$ 于 D，连 OB，AD，OC，由三垂线定理得：$AD\perp BC$，所以$\angle ADO$是二面角 $A—BC—O$ 的平面角，令 $AO=x$，在 Rt$\triangle AOB$ 中，$\angle ABO=30°$ ，所以 AB＝$2x$，在 Rt$\triangle AOC$中，$\angle ACO=45°$ ，所以 $AC=\sqrt{2}x$，因为 $\angle BAC=90°$ ，所以

$BC=\sqrt{6}x$，所以 $AD=\dfrac{2x\cdot\sqrt{2}x}{\sqrt{6}x}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$。

在 Rt$\triangle AOD$ 中，$\sin\angle ADO=\dfrac{AO}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\angle ADO=60°$ ，所以三角形 ABC与面 α 成 60° 或 120° 的二面角．

名　师　点　拨

学科：奥数

教学内容：数学竞赛训练题

一．选择题（以下每题的四个选择支中，仅有一个是正确的）

1．－7 的绝对值是（ ）

（A）－7 （B）7 （C）$-\frac{1}{7}$ （D）$\frac{1}{7}$

2．1999－$\{1998-[1999-(1998-1999)]\}$ 的值等于（ ）

（A）－2001 （B）1997 （C）2001 （D）1999

3．下面有 4 个命题：

①存在并且只存在一个正整数和它的相反数相同。

②存在并且只存在一个有理数和它的相反数相同。

③存在并且只存在一个正整数和它的倒数相同。

④存在并且只存在一个有理数和它的倒数相同。

其中正确的命题是：（ ）

（A）①和② （B）②和③

（C）③和④ （D）④和①

4. $4ab^2c^3$的同类项是（ ）

（A）$4bc^2a^2$ （B）$4ca^2b^3$ （C）$\frac{1}{4}ac^3b^2$ （D）$\frac{1}{4}ac^2b^3$

5．某工厂七月份生产某产品的产量比六月份减少了 20％，若八月份产品要达到六月份的产量，则八月份的产量比七月份要增加（ ）

（A）20％ （B）25％ （C）80％ （D）75％

6．$\frac{1}{2}$，$\frac{6}{11}$，$\frac{8}{15}$，$\frac{13}{24}$四个数中，与$\frac{7}{13}$的差的绝对值最小的数是（ ）

（A）$\frac{1}{2}$ （B）$\frac{6}{11}$ （C）$\frac{8}{15}$ （D）$\frac{13}{24}$

7．如果 $x=-\frac{1}{4}$，Y=0.5，那么 X^2-Y^2-2X 的值是（ ）

(A) 0 (B) $\frac{13}{16}$ (C) $\frac{5}{16}$ (D) $-\frac{5}{16}$

8. $ax+b=0$ 和 $mx+n=0$ 关于未知数 x 的同解方程，则有（　）

（A）$a^2+m^2>0$.　　　　（B）$mb\geqslant an$.

（C）$mb\leqslant an$.　　　　（D）$mb=an$.

9.（－1）＋（－1）－（－1）×（－1）÷（－1）的结果是（　）
（A）－1　（B）1　（C）0　（D）2

10．下列运算中，错误的是（　）

（A）$2X^2+3X^2=5X^2$　　　（B）$2X^2-3X^2=-1$

（C）$2X^2\cdot 3X^2=6X^4$　　　（D）$2X^4\div 4X^3=\frac{X}{2}$

11．已知 $a<0$，化简 $\frac{|a|-a}{a}$，得(　)
(A) 2　(B) 1　(C) 0　(D) －2

12．计算 $(-1)^{2000}+(-1)^{1999}\div|-1|$ 的结果是（　）
（A）0　（B）1　（C）－1　（D）2

13．下列式子中，正确的是（　）

（A）$a^2\cdot a^3=a^6$.　　（B）$(x^3)^3=x^6$.

（C）$3^3=9$.　　（D）$3b\cdot 3c=9bc$.

14. $-|-3|$ 的相反数的负倒数是（　）

（A）$-\frac{1}{3}$　（B）$\frac{1}{3}$　（C）－3　（D）3

15．十月一日亲朋聚会，小明统计大家的平均年龄恰是 38 岁，老爷爷说，两年前的十月一日也是这些人相聚，那么两年前相聚时大家的平均年龄是（　）岁。
（A）38　（B）37　（C）36　（D）35

16．若 $a<0$，则 $4a+7|a|$ 等于(　)
(A) 11a　(B)－11a　(C) －3a　(D)3a

17．若有理数 x．y 满足 $|2x-1|+(y+2)^2=0$，则 x．y 的值等于（　）

（A）－1　　（B）1　　　（C）－2　　（D）2

18．有理数 a，b，c 在数轴上对应的点如图所示：则下面式子中正确的是（　）

（A）c + b > a + b.　　（C)ac > ab

(B)cb < ab.　　　　（D)　cb > ab

19．不等式 $\frac{4x-5}{12}$ < 1 的正整数解有（　）个。

（A）2　（B）3　（C）4　　（D）5

20．某计算机系统在同一时间只能执行一项任务，且完成该任务后才能执行下一项任务，现有 U，V，W 的时间分别为 10 秒，2 分和 15 分，一项任务的相对等待时间为提交任务到完成该任务的时间与计算机系统执行该任务的时间之比，则下面四种执行顺序中使三项任务相对等候时间之和最小的执行是（　）。

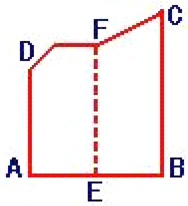
（A）U，V，W.　　　　（B）V，W，U

（C）W，U，V.　　　　（D）U，W，V

21．如图，线段 AD，AB，BC 和 EF 的长分别为 1，8，3，2，5 和 2，记闭合折线 AEBCFD 的面积为 S，则下面四个选择中正确的是（　　）

(A)　S=7.5　　　　(B)　S=5.4

(C)　5.4<S<7.5　　　(D)4<S<5.4.



22．第一届希望杯的参赛人数是 11 万，第十届为 148 万，则第届参赛人数的平均增长率最接近的数值是（　）。

（A）21.8%.　　(B)　33.5%　　(C)45%　　(D)　50%

23．已知 X 和 YI 满足 3X＋4Y＝2，X－Y<1，则（　）。

（A）X＝$\frac{6}{7}$　　　　（B）Y＝－$\frac{1}{7}$

（C）X>$\frac{6}{7}$　　　　(D)　Y>－$\frac{1}{7}$

24．下面的四句话中正确的是（　）

A．正整数 a 和 b 的最大公约数大于等于 a。

B．正整数 a 和 b 的最小公倍数大于等于 ab。

C．正整数 a 和 b 的最大公约数小于等于 a。
D．正整数 a 和 b 的公倍数大于等于 ab。

25．已知 a≤2，b≥－3，c≤5,且 a－b＋c＝10，则 a＋b＋c 的值等于（　）。
（A）10　　（B）8　　（C）6　　　（D）4

答案与提示：

1．　－7 的绝对值是它的相反数 7。　选 B。

2．1999－$\{1998-[1999-(1998-1999)]\}$

$=1999-1998+[1999-(-1)]$

＝1＋2000＝2001　　　选 C。

3．既然只有零和它的相反数相同，所以①不正确，②是正确的，另外 1 与－1 都等于其倒数，因此④不正确，③是正确的。所以选择 B。

4．根据同类项定义判定。选择 C。

5．设六月份产量为 A，则七月份产量为$a(1-20\%)=a\times80\%$。

设八月份比七月份要增加 X 才能达到六月份产量 A，则$a\times80\%\times(1+x)=a$，解得

$x=0.25$.所以八月份的产量要比七月份的增加25%。选 B。

6．$\frac{13}{24}-\frac{7}{18}=\frac{1}{24\times13},\frac{7}{13}-\frac{8}{15}=\frac{1}{15\times13},\frac{7}{13}-\frac{6}{11}=\frac{-1}{11\times13},\frac{7}{13}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\times13}$.其实，要比较$\frac{1}{24\times13},\frac{1}{15\times13},\frac{1}{11\times13},\frac{1}{2\times13}$的大小，易知$\frac{1}{24\times13}$最小，与$\frac{7}{13}$的差的绝对值最小的数是$\frac{13}{24}$.　选 D。

7．$x^2-y^2-2x\Big|_{\substack{x=-\frac{1}{4}\\ y=0.5}}$

$=(-\frac{1}{4})^2-(0.5)^2-2\times(-\frac{1}{4})$

$=\frac{1}{16}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{16}.$　　选 C

8.（1）若 $a\neq 0$ 则 $m\neq 0$，因此 $x=-\frac{b}{a}=-\frac{n}{m}.$ 所以有 $mb=na.$

（2）若 $a=0,$ 则必有 $m=0,$ 则也有 $mb=an.$　故选 D。

9.（－1）＋（－1）－（－1）×（－1）÷（－1）＝（－2）－（－1）＝－1　　选 A。

10．其中（A)、(C)、(D）运算都是正确的，而（B）的运算 $2x^2-3x^2=-1.$ 是错误的，事实上正确运算应为 $2x^2-3x\ \ =-x^2$。　选 B。

11．当 a <0 时，$|a|=-a.$

$\therefore \frac{|a|-a}{a}=\frac{-a-a}{a}=\frac{-2a}{a}=-2.$　　选 D。

12．$(-1)^{2000}+(-1)^{1999}\div|-1|=(+1)+(-1)\div(+1)=1-1=0.$　　选 A。

13．由于 $a^2\cdot a^3=a^5$，所以 A 不正确；又 $(x^3)^3=x^9$，所以 B 不正确；$3^3=3\times3\times3=27,$ 所以 C 不正确；$3b\times3c=9bc,$ D 是正确的。　选 D。

14．－$|-3|$ 的相反数 $|-3|,$ －$|-3|$ 的相反数的负倒数，也就是 $|-3|,$ 的负倒数，等于 $-\frac{1}{|-3|}=-\frac{1}{3}.$　　选 A。

15．设参加聚会共 n 个人，其年龄分别为 $a_1,a_2,a_3\Lambda\ ,a_n,$ 则 $\frac{a_1+a_2+a_3+\Lambda\ a_n}{n}=38,$ 即 $a_1+a_2+a_3+\Lambda\ a_n=38n.$

两年前，这n个人的年龄依次为$a_1-2, a_2-2, a_3-2, \Lambda, a_n-2,$所以其平均年龄为：

$$\frac{(a_1-2)+(a_2-2)+(a_3-2)+\Lambda+(a_n-2)}{n}=\frac{(a_1+a_2+a_3+\Lambda+a_n)-2n}{n}$$

＝$\frac{38n-2n}{n}=36.$　　所以选 C。

16．$\because a<0$,　　$\therefore |a|=-a.$　　$4a+7|a|=4a+7|-a|=4a-7a=-3a.$ 选 C。

17．由$|2x-1|+(y+2)^2=0,$可知$x=\frac{1}{2}, y=-2.$ 所以$xy=\frac{1}{2}\times(-2)=-1.$ 选 A。

18．图中可见$c<b<0<1<a$，由$c<a$,则有$c+b<a+b$,(A)不真；由$c<b$ 且$a>0$,则有$ac<ab$,(C)　不真；由 c<a 且 b<0,则有$cb>ab$不真而真，所以选 D。

19．由$\frac{4x-5}{12}<1\Rightarrow 4x-5<12\Rightarrow 4x<17, x<4.25,$ $\therefore x$的正整数角为 1，2，3，4 共 4 个，选 C。

20．顺序 A 的三项任务相对等待时间之和为

$$S_A=\frac{10}{10}+\frac{10+120}{120}+\frac{10+120+900}{900}=\frac{180+195+206}{180}=\frac{581}{180}$$

顺序 B 的三项任务相对等待时间之和为

$$S_B=\frac{10+120+900}{10}+\frac{120}{120}+\frac{120+900}{900}=\frac{1545+15+17}{15}=\frac{1577}{15}$$

顺序 C 的三项任务相对等待时间之和为

$$S_C=\frac{10+900}{10}+\frac{10+120+900}{12}+\frac{900}{900}=\frac{1092+103+12}{12}=\frac{1207}{12}$$

顺序 D 的三项任务相对等待时间之和为

$$S_D=\frac{10}{10}+\frac{10+120+900}{120}+\frac{10+900}{900}=\frac{180+1545+182}{180}=\frac{1907}{180}$$ 比较知S_A最小。选 A

21．由图可知 S 小于宽为 2.5，长为 3 的矩形的面积，大于宽为 1.8 ，长为 3 的矩形面积，即　$5.4<S<7.5$。　选 C

22．设每届参赛人数的平均增长率为 x，由题意知，x满足关系式 11$(1+x)^9$＝148，所以

$(1+x)^9=\frac{148}{11}=13.4545\cdots$，即 $13.4<(1+x)^9<13.5$.

而 $(1+30\%)^9=1.3^9<2.2^3=10.648<13.4$，$(1+40\%)^9=1.4^9>2.7^3=19.683<13.5$，

可见 30％$<x<40\%$. 选 B。

23．因为$3x+4y=2$,所以 $x=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}y$, $y=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x$，代入 $x-y<1$，得出

$\frac{2}{3}-\frac{4}{3}y-y<1,\Rightarrow -\frac{7}{3}y<\frac{1}{3},y>-\frac{1}{7}$. $x-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x<1\Rightarrow\frac{7}{4}x<\frac{3}{2},x<\frac{6}{7}$.

24．3 是 6 和 9 的公约数，小于 6，所以排除 A；6 和 9 的最小公倍数是 18，小于 54，所以排除 B、D。自然数a与b的最大公约数小于等于a是成立的。

选 C

25．由 $b\geq-3$ 得 $-b\leq3$. 如果 $a<2,-b<3,c<5$ 中有一个成立，则 $a-b+c<10$. 所以，当 $a-b+c=10$时，只能$a=2,-b=3,c=5$. 进而$a+b+c=4$。

选 D

名 师 点 拨

学科：奥数

教学内容：数学学习中的学法指导

【内容综述】

本讲就数学学法中常用的几个策略作了介绍，第一就是要不断掌握有用的先进武器——数学公式、定理；第二，要加强对数学概念的学习理解，在一些利用概念分析，可能减少计

算一的试题中，应尽量减少计长算量，提高解题效率；第三，提供了一个面对较难试题的思维策略：反客为主，欲擒故纵……第四，其它

【要点讲解】

§1. 武器精,巧解题

若能不断掌握一些有用的课外公式,无论是解高考试题,还是解数竞试题都是有用的，尤其是高考现今强调创新，出活题考能力；而高中数竞一试又往高考靠，并且数竞从来就是在出活题考能力（当然它要求的知识面更广，基础更坚深），二者关系极为密切，这一节，我们介绍两个课外的有用公式实理，供大家参考。

1．等差数列$\{a_n\}$中，

$$a_n=\frac{S_{2n-1}}{2n-1} \qquad ①$$

证明 $\because S_{2n-1}=\frac{(a_1+a_{2n-1})(2n-1)}{2}=\frac{2an}{2}\cdot(2n-1),$

$$\therefore a_n=\frac{S_{2n-1}}{2n-1}$$

例 1.设等差数列$\{a_n\}$满足$3a_8=5a_{13}$且$a_1>0,$ S_n为其前 n 项之和，求 Sn 中最大者。（1995 高中全国数竞赛题）

分析：若等差数列$\{a_n\}$中，满足

$$\begin{cases}a_n\ \geq 0,\\ a_{n+1}<0.\end{cases}$$

则 S_n 最大。或当 $S_n=S_m$ 时，$S\frac{n+m}{2}$ 取最大值

解：$\because a_8=\frac{S_{15}}{15}, a_{13}=\frac{S_{25}}{25},$

由题设：$3a_8=5a_{13}$得

$$S_{15}=S_{25},$$

故由等差数列前 n 项和是二次函数，可见S_{20}是最大和

说明 本题若用常规解法，就需由题设$3a_8=5a_{13}$，求得$a_1=-19.5>0,$再去解

$$\begin{cases}a_1+nd<0,\\ a_1+(n-1)d\geq 0.\end{cases}$$

求得 n=20.计算量较大。

例 2.等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 Sn 与 T_n，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$（1995 年全国高考试题）

分析 本题若按解答题做，推理、论证计算相当繁杂，但若利用公式①就非常简单

解 $\because \frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1},$

$\therefore \dfrac{a_n}{T_n}=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{2(2n-1)}{3(2n-1)+1}=\dfrac{4n-2}{6n-2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{T_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-2}{6n-2}=\dfrac{2}{3}$.

例 3.设等差数列的前 n 项和为 S_n,已知 $a_3=12,\ S_{12}>0,\ S_{13}<0.$ 求公差 d 的取值范围.

解: $\because S_{13}<0,\ a_3=12$

$\therefore a_7=\dfrac{S_{2\times7-1}}{13}<0;$

即 $a_3+4d<0$

$\Rightarrow$ b<-3.

又 $\because S_{12}=6(a_6+a_7)$

$=6(2a_3+7d)>0,$

$\Rightarrow d>\dfrac{-24}{7}$

故 $-\dfrac{24}{7}<d<-3.$

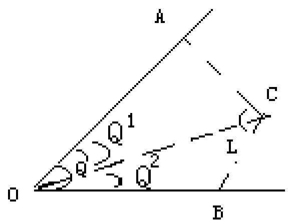
2．三面角余弦公式

在如图三面角 O—ABC 中。设面角∠AOB=Q,

∠AOC=Q_1，∠BOC=Q_2, 二面角 A—OC—B

大小为α，则有公式

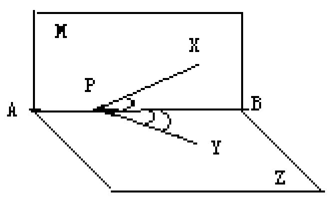
$\cos Q=\cos Q_1\cos Q_2+\sin Q_1\cdot\sin Q_2\cdot\cos\alpha$, ②



称为三面角余弦公式或三射线定理。当$\alpha=90^\circ$时，就是主几课本中复习题的公式。它的证明可在如图的基础上，作 CA、CB 分别垂直 OC、于 C、连 AB，分别在△AOB、△AOC、△BOC 得用三角函数可分别将 AB、BC、AC 用 Q、Q_1、Q_2及 OC 的关系表出，最后再在△ABC 中利用余弦定理求得公式②

本公式无论在高考试题还是竞赛试题,多有应用。

例 4.已知二面角 M—AB—N 是直二面角，P 是棱上一点，PX、PY 分别在平面 M、N 内，且$\angle XPB=\angle YPB=45^o$。求$\angle XPY$大小?(1964,北京赛题)



解:利用三面角余弦公式

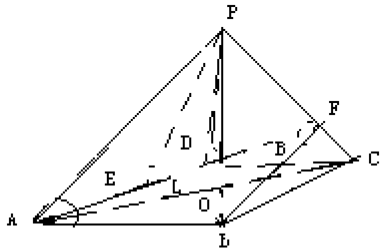
得

$$\cos\angle XPY=\cos\angle BPY\cdot\cos\angle BPX+\sin\angle BPY\cdot\sin\angle BPX\cdot\sin 90^{o}$$

$$=\cos 40^{o}\cdot\cos 45^{o}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore\angle XPY=60^{o}.$

例 5. 已知四面体 S—ABC 中，$\angle ASB=\frac{\pi}{2},\angle ASC=\alpha\left(\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})\right)$，$\angle BSC=\beta\left(\beta\in(O,\frac{\pi}{2})\right)$，设以 SC 为棱的二面角为 θ，求 θ 与 α、β 关系。



解：由三面角余弦公式及题设，得

$$\cos ASB=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\theta,$$

$\because\angle ASB=\frac{\pi}{2}$，故有

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cdot\cos\theta=0$$

解之，得

$$\cos\theta=-ctg\alpha\cdot ctg\beta,$$

$$\theta=\Pi-\arccos(ctg\alpha\cdot ctg\beta).$$

例 6.已知正四棱锥 P—ABCD 的侧面与底面夹角为 L，相邻两侧面的夹角为 β,求证：

$\cos\beta=-\cos^{2}$ （1981 上海竞赛题）

证：设 PO 是棱锥的高，O 是底面 ABCD 的对角线交点

作 OE⊥AD，

则 PE⊥AD，

从而∠PEO 是侧面与底面所成角 α；

作 BF⊥PC，连 DF，易证∠DFB 即两侧面间所成二面角的平面角β.

设侧棱长为 a，底面边长为 b。则侧高为 $\sqrt{a^{2}-\frac{b^{2}}{4}}$，则由三面角余弦公式有

$$\cos\angle PAB=\cos\angle BAE\cdot\cos\angle PAE+\sin\angle BAE\cdot\sin\angle PAE\cdot\cos\alpha$$

$$=0+\sin\angle PAE\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos\angle PAB}{\sin\angle PAE}$$

$$=ctg\angle PAD(\because\angle PAB=\angle PAE)$$

$$=\frac{AE}{PE}$$

$$=\frac{b}{2\sqrt{a^2-\frac{b2}{4}}}$$

$$=\frac{b}{\sqrt{4a^2-b^2}}.$$

又由三面角 P—BCD 知

$$\begin{aligned}\cos\angle BPD &= \cos\angle BPC\cdot\cos\angle DPC+\\ &+\sin\angle BPC\cdot\cos\angle DPC\cdot\cos\beta\\ &=\cos^2\angle BPC+\sin^2\angle BPC\cdot\cos\beta\end{aligned}$$

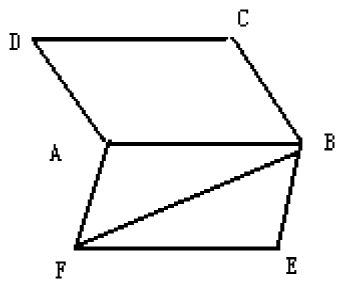
$$\therefore\ \cos\beta=\frac{\cos\angle BPD-\cos^2\angle BPC}{\sin^2\angle BPC}$$

$$=\frac{\frac{2a^2-2b^2}{2a^2}-(\frac{2a^2-b^2}{2a^2})^2}{1-(\frac{2a^2-b^2}{2a^2})^2}$$

$$=-\frac{b^2}{4a^2-b^2}$$

$$=-\cos^2\alpha$$

例 7.如图正方形 ABCD 所在平面与正方形 ABEF 所在平面成60^o面角，则异面直线 AD 与 BF 所成角的余弦是______________。（1996 年全国高考试题）



解 ∵AD，BF 所成角，即 BC 与 BF 所成角，由三面角余弦公式，有

$$\begin{aligned}\cos\angle CBF &= \cos\angle CBA\cdot\cos\angle ABF+\\ &+\sin\angle CBA\cdot\sin\angle ABF\cdot\cos 60^o\\ &=1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

说明：由上面几道在高中竞赛或全国高考试题解答中，显然课外的公式，担供了极其简捷的解法，若不用这二公式，尽管问题也能解决，但要繁杂得多

这里我们才给了两个课外的有用公式，在本教程的其它章节，更介绍了许多有用的方法和公式定理，也希望同学们在今后的解题实践中，不断总结，发现更多更好的解题方法，策略和武器，为不好数学，争取得更大成绩而努力，

§2 大概念 小计算

要学好数学，一定要重视概念的学习

例 8.已知集合$M=\{x,xy,\lg(xy)\}$,

$N=\{0,|x|,y\}$,且$M=N$.求$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2001}+\frac{1}{y2001})$的值。

（1987. 全国赛题改编）

分析：根据集合元素的互异性，由 N 知 X，Y 皆不为 0，又由 M=N，故知$0\in M$可见$\lg(xy)=0$,，从而 xy=1，进而 x、y 可求

解：由题设知 x、y≠且 xy=1，$\because 1\in M$,且 M=N，$\therefore 1\in N$解方程组

$\begin{cases}xy=1,\\|x|=1.\end{cases}$或$\begin{cases}xy=1\\y=1\end{cases}$

得 x=y=-1，舍去 x=y=1(∵与元素互异矛盾)

代入原式=-2+2-2+…-2= -2.

说明：这时重在概念分析，计算量较小。

也可发先就 x、y 是否为 1 讨论后得出原式=4002

或$\frac{x-x^{n+1}}{1-x}+\frac{y^{n+1}-1}{y^n(1-y)}$；进而去求 x、y 的值，舍去 4002-解，得出-2 的正确结论。

例 9.过抛物线$y=ax^2(a>0)$的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q，求$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$的值

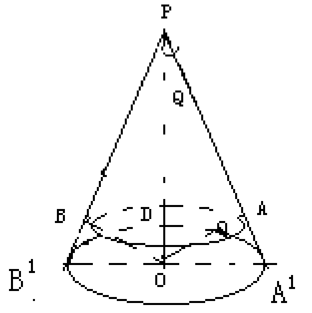
（2000 年全国高考）

分析：本题若按解答题作，需对一般情况进行计算，比较繁杂，而若概念清楚，再结合抛物线道径长，可见令 p=q 即可迅速求解。

解 令 p=q，则$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{p}$

由抛物线$x^2=\frac{1}{a}y$，可见$F(0,\frac{1}{4a})$，根据通径长为$\frac{1}{a}-2p$,故$p=\frac{1}{2a}$,即$\frac{2}{p}=4a$，应选 C。

例 10 如图，OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线，OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分。求母线与轴的夹角的余弦值



分析 若能洞察旋转体体积求法真谛，本题从题设可转化为以PO原圆锥体积之半，于是可轻松地得出方程

$$V_{PAOB}=\frac{1}{2}V_{PAOB}$$

解 设原圆锥母线长为1，则底半径经$r=\sin\theta$，（θ为圆锥顶角之半），高$PO=\cos\theta$，$OA=\cos\theta\cdot\sin\theta$，设AD⊥PO于D，则

$r'=AD=OA\cdot\cos\theta=\cos^2\theta\sin\theta$于是

$$V_{PAOB}=\frac{1}{3}\Pi r'^2\cdot PO=\frac{1}{3}\Pi\cdot\cos^4\theta\sin^2\theta\cdot\cos\theta$$

$$V_{PA^1B^1}=\frac{1}{3}\Pi\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta$$

由 $V_{PAOB}=\frac{1}{2}V_{PA^1B^1}$，得

解得 $\frac{1}{3}\Pi\cos^5\theta\sin^2\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Pi\sin^2\theta\cdot\cos\theta$，

$$\cos^4\theta=\frac{1}{2},$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

应选 C

说明：在这一节中，我们主要介绍了解题中减少计算量的一种方法，希望同学们加强概念理解，尽量通过多思，找到巧解妙算解决问题的办法。在今后的章节中，我们还会介绍更多的不同于课内知识的数学概念和方法，希望大家能够认真学习，掌握各类问题的解法。

§3 反客为主，欲擒故纵

数学习题的解决，往往都不是一帆风顺而是充满艰险的。

例 11.若 $\begin{cases}1+\cos\alpha-\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta=0 & ①\\ 1-\cos\alpha-\cos\beta+\sin\alpha\cos\beta=0 & ②\end{cases}$

试求$\sin\alpha$的值

分析 欲求有关α的下弦，要先去求有关β的函数关系β(α),然后再消去β从而得出α的欲求值,这种策略,不妨称之为“反客为主，欲擒故纵,”在很我场合这种策略行之有效。

解 由①得

$$\sin\beta=\frac{1+\cos}{1-\sin\alpha},$$

由②得

$$\cos\beta=\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}.$$

于是

$$\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)^2=1,$$

化简得

$$3\sin^2\alpha-2\sin\alpha-3=0,$$

$\therefore$ $\sin\alpha=\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$ (已舍绝对值>1 的另根)

例 12.已知 $\begin{cases}a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=C\\ a\csc^2\theta+b\sec^2\theta=C\end{cases}$

求证： $\dfrac{c}{a-b}+\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}=0.$

分析 题设中有 θ 的三角函数，并有参数 a、b、c。但题断中不含 θ 的三角函数，可见应设法消去 θ，为此应先求出 $\cos\theta,\sin\theta$ 关于 a、b、c 的关系，再设法消去 $\cos\theta,\sin\theta$。

证：由已知易得

$$\begin{cases}a\sin\theta+b(1-\sin^2\theta)=C & ①\\ \dfrac{a}{\sin^2\theta}+\dfrac{b}{\cos^2\theta}=C & ②\end{cases}$$

由①可见

$$\begin{cases}\sin^2\theta=\dfrac{c-b}{a-b},\\ \cos^2\theta=\dfrac{a-c}{a-b}.\end{cases}$$

代入②，再化简即得

$$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}=0.$$

说明：这一节，我们介绍了一种遇到疑难问题时，可能采用的解决问题的思想方法，也即是战争中的正面强改不下时，就考虑迂回进攻的战略战术，在数学竞赛试题的解决中，应时刻准备应予这种情况的出现。

例 13.当 x=-1, x=0, x=1, x=2 时，多项式 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 取整数值，求证：对于所有整数 X，这个多项式都取整数值。(1988 俄)

证：注意到 $P(x)=6a\cdot\dfrac{(x-1)x(x+1)}{6}+2b\cdot\dfrac{x(x-1)}{2}+(a+b+c)x+d$ （★）

由题设知

d=p(0), a+b+c+d=p(1),

都是整数，故 a+b+c 也是整数。又

p(-1)=2b-(a+b+c)+d

是整数，故 2b 也是整数，而

p(2)=6a+2b+2(a+b+c)+d

是整数，可见 6a 也是整数。又易证 $\frac{(x-1)x(x+1)}{6}$ 和 $\frac{x(x-1)}{2}$ 是整数，从而由（★）可证各 P(x)是整数。

说明 为证 P（x）是整数，就需证明 a、b、c、d 是整数系数，这里借助于构造★式,转证 6a、2b，a+b+c，d 为整数，从而证出 p（x）是整数，这也是迂回证法，竞赛数字中采用的方法很多，希望大家认真,能认真坚持学习。

本周强化练习

【同步达纲练习】

1．①试通过已知锥体,台体公式，概括出一般的拟柱体公式

$$V=\frac{1}{6}h(S_{上}+4S_{中}+S_{下})$$

其中 $S_{上},S_{下}$ 分别表示上、下底面积，$S_{中}$ 表示中截面积。

②用上述公式求解

若三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$ 中，若 E、F 分别为 AB，AC 中点，平面 EB_1C_1F 将三棱柱分成体积为 V_1，V_2 的两部分,则 V_1：V_2=________．（1990 年全国高考题）

★★2. 设|m|≤2，试求关于 x 的不等式

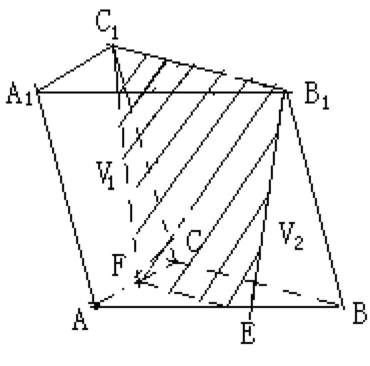
$$2x-1>m(x^2-1)$$

恒成立的 x 取值范围

★★3. 关于 x 的方程

$$\sin^2x-2a\sin x+3a=0$$

有实根,求实数 a 的取值范围.



参考答案

【同步达纲练习】

1．①注意利用 $\sqrt{S_{中}}=\dfrac{\sqrt{S_{上}}+\sqrt{S_{下}}}{2}$；

②特殊化原三棱柱为边长为 2 的正三棱柱，易求得 $S=\dfrac{9\sqrt{3}}{16}, S_{2中}=\dfrac{7\sqrt{3}}{16}$，代入拟柱体公式，得 $V_1:V_2=7:5$

2．构造函数 $f(m)=(x^2-1)m-2x+1, \because f(m)<0$且$|m|\le 2$，求系数 x 范围。

(Ⅰ)当|x|>1 时，$x\in(1,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2});$

(Ⅱ)当|x|<1 时，$x\in(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2},1)$

(Ⅲ) |x|=1 时，X=1

综上，$x\in(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2},\dfrac{1+\sqrt{3}}{2})$，原命题成立。

3．解关于 a 的方程，得 $a=\dfrac{\sin^2 x}{2\sin x-3}$

(Ⅰ)当 $\sin x=0$时$,a=0$

(Ⅱ) $\sin x\neq 0$ 时，

$$a=\sin x\cdot\frac{1}{2-\dfrac{3}{\sin x}},$$ 当 $\sin x\to 0$时$,a\to 0$

(Ⅲ) 又由

$$a=\frac{1}{\dfrac{-3}{\sin^2 x}+2\cdot\dfrac{1}{\sin x}}=\frac{1}{-3(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{1}{3}}$$

可见 $\sin x=1$ 时 $a_{\min}=-1,$故 $a\in[-1,0]$