

# 链条滚子反挤压刚塑性有限元模拟研究

## 摘 要

本文采用刚塑性有限元法对链条滚子成形关键工序一反挤压工序进行了数值模拟研究，并引入节理单元对接触摩擦区进行模拟。

本文根据有限单元法的基本原理，并结合刚塑性流动的基本理论，推导出本体部分的刚塑性有限元矩阵方程，采用将节理单元部分与本体单元部分进行耦合的方法，进一步推导出引入节理单元进行接触摩擦处理后的有限元耦合方程。

本文也据此开发了一套可以有效运行的模拟程序系统，该系统可将模拟计算结果进行可视化显示。同时，对数值模拟中的一些关键技术问题，如粘摩系数的获取、初始速度场的选取、迭代收敛判据、奇异点的处理和网格重划技术等，进行了分析和探讨。

文中针对反挤压过程网格畸变严重的特点，运用 Marc 软件 对整个反挤压过程进行了网格重划处理，更真实地显示了网格畸变后的变形情况。

最后，本文还进行了实验研究，并将有限元数值模拟的结果与实验所得结果进行比较分析，从而验证理论的可行性和程序系统的可靠性。

关键词:

链条滚子 ✓

反挤压 ✓

刚塑性 ✓

节理单元 ✓

耦合

✗

# **A Study of Rigid-Plastic Finite Element Method Simulation of Chain Roller's Backward Extrusion Process**

## **Abstract**

In this paper, rigid-plastic finite element method (FEM) was used to simulate the critical forming process of chain roller--backward extrusion process, and joint-element was introduced into the simulation of contact friction area in plastic forming.

The matrix equations of rigid-plastic finite element method in noumenon zone were deduced from the basic theory of FEM, combined with the basic theory of rigid-plastic flow rule. The matrix equation of joint-element zone and noumenon-element zone were assembled into a unitary coupling matrix equation through coupling method.

According to the coupling matrix equation, we developed an effective program system for simulating the backward extrusion process which gived visible drawing of simulation results.

Some special problems in numerical simulation, such as the aquation of Visc-friction factor , the choice of initial velocity field, the convergence criterion of iteration, the treatment of singular point, remesh technique, etc., were analyzed in this paper.

Because the initial mesh distorted heavily in the backward extrusion forming process, Marc software was used in this paper to realize the remesh process which made the simulation results more accurate.

Then, the forming process of backward extrusion was studied by experiment, and the result of experiment was compared with the datum of the numerical simulation. It is proved that the theory and the program system for rigid-plastic FEM numerical simulation in backward extrusion process is reliable and utility.

### **Keywords:**

chain roller    backward extrusion    rigid-plastic  
joint-element    coupling

## 致 谢

在本文即将完成之际，首先向我的导师洪深泽教授致以崇高的敬意和最诚挚的谢意。在本人的学习阶段和论文撰写过程中，得到了导师在生活上的亲切关怀和学术上的悉心指导。洪教授是为人师表的楷模，其严谨的治学态度和渊博的专业知识使我受益颇深。

同时也要感谢本专业的刘全坤教授、王雷刚教授、董定福副教授对我的帮助。在课题研究期间，还得到了汤勇、周明智、张君、张远斌、庄晓辉等同学的热情关心和帮助，在此一并向他们表示衷心的感谢。

感谢我的父母和姐姐对我的支持和无私的付出。

最后，再次衷心感谢关心和帮助过我的所有老师和同学。

作者

2003. 3



## 符号清单

$\dot{u}_0$ ——初始速度

$K_f$ ——材料的流动应力

$\dot{\bar{\epsilon}}$ ——等效应变速率

$\bar{\sigma}$ ——等效应力

$\sigma_{ij}$ ——应力张量

$\sigma'_{ij}$ ——应力偏张量

$\sigma_m$ ——静水压力

$\dot{\epsilon}_{ij}$ ——应变速率张量

$\dot{\epsilon}_v$ ——体积应变速率

$[N]$ ——形函数矩阵

$[B]$ ——应变矩阵

$[k]$ ——单元刚度矩阵

$[K']$ ——节理单元部分总刚

$[K'']$ ——本体部分总刚

$[K]$ ——耦合方程总刚

$\Pi$ ——总体能量泛函

$\lambda_n$ ——节理单元的法向粘摩系数

$\lambda_s$ ——节理单元的切向粘摩系数

$\tau$ ——节理单元上的剪应力

$e$ ——节理单元的厚度

$V$ ——体积

$S$ ——表面积

$X/Y$ ——总体坐标

$\xi, \eta$ ——局部坐标

$|J|$ ——雅可比矩阵行列式

$\{\dot{u}\}$ ——单元内速度场

$\{a_e\}$ ——节点速度矢量

$\{R'\}$ ——节理单元部分载荷列阵

$\{R''\}$ ——本体部分载荷列阵

$\{R\}$ ——耦合方程载荷列阵

# 第一章 概 述

## 1.1 引言

传统的链条滚子属套筒类零件，它的生产工艺是利用金属带钢退火后送入压力机，经落料、拉深、整形、冲底等冲压成形生产成零件，生产工序如图 1.1 所示。

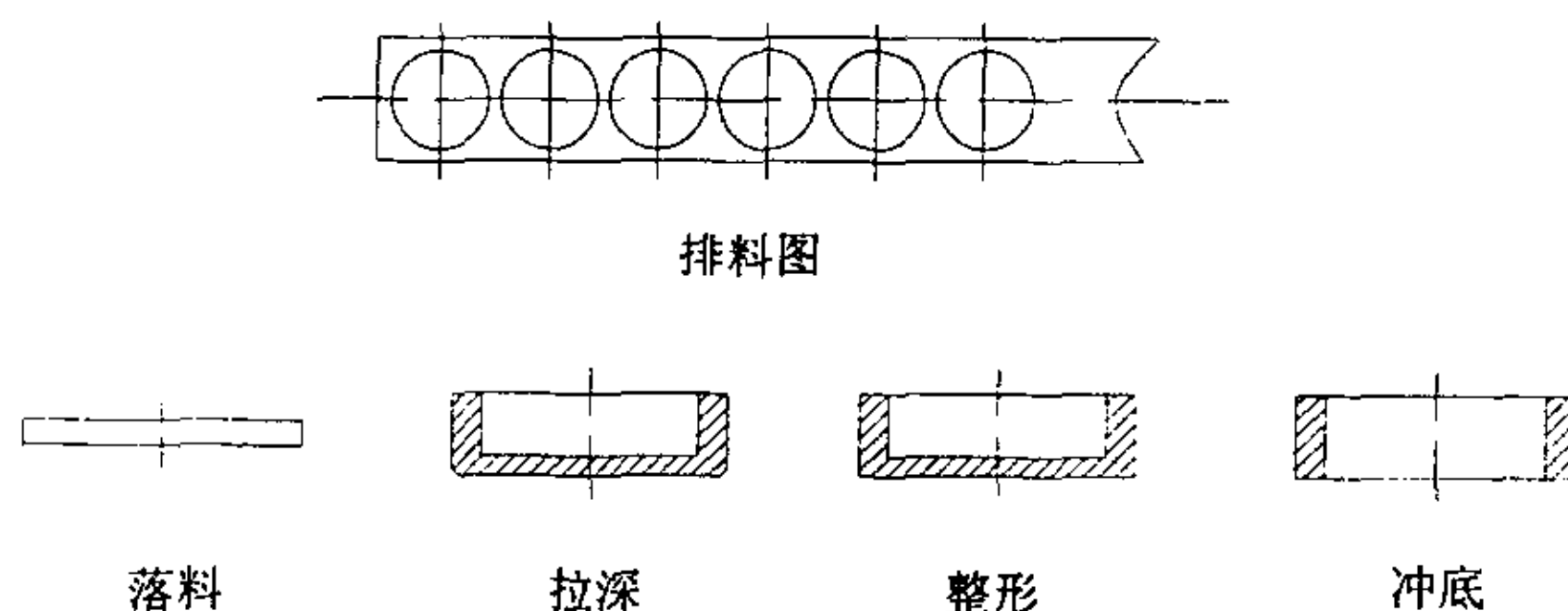


图 1.1 传统生产工艺图

由于传统工艺用带钢冲压成形，材料利用率低，不超过 50%，这些因素都导致了生产成本的提高。

为了改善传统工艺生产方法带来的这些缺点，拟采用一种新的工艺方案。新方案以普通圆钢为原材料，以精密挤压成形为主要成形方法，充分利用企业现有的通用压力机成形。新方案的成形工序如图 1.2 所示。

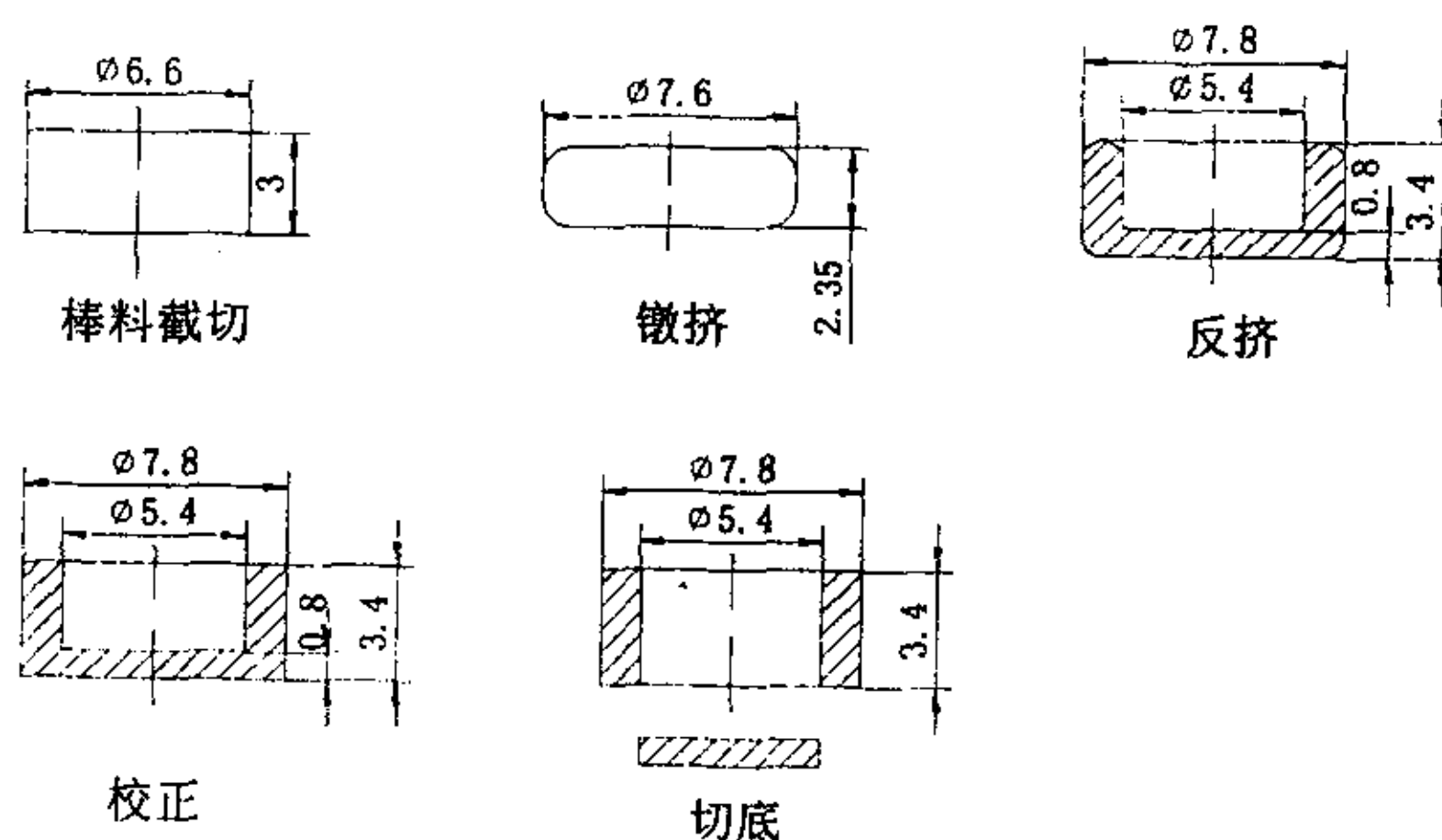


图 1.2 新工艺方案图

新方案有如下优点：

1. 材料利用率可高达 85%；
2. 实现新工艺的设备是根据普通压力机进行改造的，一次性投资少；
3. 用普通圆钢代替专用带钢，原材料的费用降低；

综上所述，与传统的滚子生产工艺相比，新工艺方案的综合效益有显著的提高。

本论文主要针对链条滚子关键成形工序—反挤压工序进行刚塑性有限元数值模拟研究。

## 1.2 有限元的发展历史

有限元是随着计算机技术的飞速发展和普及而发展起来的，并以其巨大的潜力被广泛应用于航空航天、汽车、土木、机械及材料科学及其成形等多种工程领域。

有限元法之所以能得到如此迅猛的发展，是因为它与经典解析法相比具有许多优点。主要表现在以下三个方面<sup>[1]</sup>。

1. 有限元法有很强的适用性，应用范围极为广泛。

有限元法可以处理任意形状的变形体、任意复杂的边界条件、各向异性材料、几何非线性、材料非线性、热力学及动力学等各种复杂问题。而且随着其理论基础的完善和计算机技术的发展，它还可以成功地求解诸如流体力学、电磁场领域的许多问题。

2. 有限元法具有较高的精度。

有限元法只需将单元分细，其解可以逐渐逼近真实解。一般情况下，其精度受所选场值的插值模式、计算机字长及精度的制约，误差多在 10%以内，能够满足工程实际需要。例如，在模具设计上，如果不采用有限元法，单凭过去的经验和传统方式，不仅技术上得不到保障，成本上无优势可言，而且模具开发周期太长也会大大丧失竞争力。

3. 有限元法采用矩阵形式表示，便于计算机的应用。

近年来，一些通用和专用的分析软件相继开发成功并进入实用阶段，如 PAM-STAMP、LS-DYNA3D、OPTRIS、DEFORM，国外一些著名公司还开发出自己专门的 FEM 软件，如 Ford 的 MTLFRM、Chrysler 的 CFORM 等。

随着计算机辅助设计 / 制造 / 工程 (CAD/CAM/CAE) 技术的广泛应用，采用有限元法进行数值模拟已成为一种重要的分析手段。现在，日益完善的塑性有限元及相对成熟的弹性有限元数值模拟技术已成为各种人工智能、专家系统的最基本的核心部分，并推动人工智能、专家系统实现质的飞跃。

从应用数学角度来看，有限元法基本思想的提出，可以追溯到 Courant<sup>[2]</sup> 在 1943 年的工作，他第一次尝试应用定义在三角形区域上的分片连续函数和最小



位能原理相结合,来求解 St.Venant 扭转问题。一些应用数学家、物理学家和工程师由于各种原因都涉足过有限元法的概念。但是直到 1960 年以后,随着电子计算机的广泛应用和发展,有限元法的发展速度才显著加快。

现代有限元法的第一个成功尝试,是将刚架位移法推广应用于弹性力学平面问题,这是 Turner,Clough<sup>[3]</sup> 等人在分析飞机结构时于 1965 年得到的成果。他们第一次给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答。三角形单元的单元特性是由弹性理论方程来确定的,采用的是直接刚度法。他们的研究打开了利用电子计算机求解复杂平面弹性问题的新局面。1960 年 Clough<sup>[4]</sup> 进一步处理了平面弹性问题,并第一次提出了“有限单元法”的名称,使人们开始认识了有限元法的功效。

三十多年来,有限单元法的理论和应用得到持续不断的发展。从确定单元特性和建立求解方程的理论基础和途径来说,如上所述,Turner、Clough 等人开始提出有限单元法时是利用直接刚度法,它来源于结构分析的刚度法,这时明确提出有限单元法的一些物理概念是很有帮助的,但是它只能处理一些比较简单的实际问题。

1963-1964 年, Besseling<sup>[5]</sup>, Melosh<sup>[6]</sup> 和 Jones<sup>[7]</sup> 等人证明了有限元法是基于变分原理的里兹(Ritz)法的另一种形式,从而使里兹法分析的所有理论基础都适用于有限元法,确认了有限元法是处理连续介质问题的一种普遍方法。利用变分原理建立有限元方程和经典里兹法的主要区别是有限元法假设的近似函数不是在全求解域而是在单元上规定的,而且事先不要满足任何边界条件,因而它可以用来处理很复杂的连续介质问题。从 60 年代后期开始,利用加权余量法来确定单元特性和建立有限元求解方程,进一步扩大了有限元法的应用领域。

### 1.3 金属塑性成形有限元的发展概况及应用前景

金属塑性成形过程是一个很复杂的过程,材料特性、变形速度、温度、摩擦条件、坯料形状及尺寸、模具形状对成形过程都有影响,而这些因素及作用是我们研究的主要对象。综合目前已有的金属塑性成形过程数值模拟方法不难看出,有限元法是应用最广泛的数值方法。

以前的数值模拟方法或解析方法,如主应力法、滑移线法及上限法,尽管能预测应力、应变、材料流动及成形载荷,但只适用于刚塑性材料及稳态成形过程,并且解决问题的范围、复杂程度和精度都受到很大限制。而有限元法功能强,精度高,解决问题的范围广,可以用不同大小、不同形状和不同类型的单元来描述任意形状的变形体,适应于任意速度边界条件,可以方便合理的处理模具形状、工件与模具之间摩擦、材料硬化效应、温度等各种工艺参数对成形过程的影响,能够模拟整个成形过程中金属流动规律及变形力学特性,获得成形过程中任意时



刻的力学信息和流动信息,如应力场、应变场、温度场及预测缺陷的生成与扩展等。可见,用有限元法分析塑性加工工艺过程已成为塑性加工理论分析的核心工作。

塑性有限元分为两大类<sup>[8]</sup>:

一类是流动型塑性有限元 (Flow Formulation), 包括刚塑性有限元和刚粘塑性有限元。这类有限元忽略了塑性变形时的弹性应变。刚塑性有限元法采用 Levy-Mises 方程为本构方程, 满足体积不变条件, 求解变量是单元节点的速度增量。

另一类是固体型塑性有限元 (Solid Formulation), 包括弹塑性有限元和弹粘塑性有限元。这类有限元同时考虑了弹性变形和塑性变形, 因此它不仅可以分析加载过程, 还可以分析卸载过程, 也可以计算残余应力、残余应变及回弹, 可以用来处理非线性和非稳态问题。但这类有限元所取增量步长不能过大, 其计算量和累计误差大, 而且计算相当复杂。

就压力加工成形工艺的分析而言, 弹塑性有限元适合分析板料成形, 如拉延、弯曲等。因为板料成形时弹性变形不能忽略, 否则回弹、残余应力和残余应变无法获得, 而这些指标是板料成形分析的重要对象。对于锻造、挤压、轧制等体积成形工艺, 采用刚塑性有限元较弹塑性有限元更具优越性。

弹塑性有限元法始于 60 年度末, 根据 P.V.Marcial 和山田嘉昭的论述, 推导出弹塑性矩阵的显式表示而发展起来。随后, 不少学者采用这一理论对各种塑性成形问题进行了研究, 取得过不少结果, 但由于这种方法固有的缺点, 计算工作量大, 使其在压力加工领域应用范围相对较窄, 直到 1973 年, 小林史郎和 C.H.Lee 提出了刚塑性有限元法<sup>[9]</sup>, 金属塑性成形有限元法的发展才取得了根本性转变, 向前迈出了一大步, 它已在塑性成形工艺的数值模拟中显示了巨大的潜力。

1973 年, Lee 和 Kobayashi 以矩阵分析的名义导出刚塑性有限元中 Lagrange 法的矩阵方程, 刚塑性有限元自此在塑性成形工艺的数值模拟中显示了巨大的潜力, 成为塑性成形工艺的重要分析工具。Kobayashi 及其合作者用刚塑性有限元和刚粘塑性有限元分析了镦粗、挤压、轧制、锻造等体积成形以及胀型、冲孔、方盒拉延等板料成形<sup>[10]</sup>。Zienkiewicz<sup>[11]</sup>于 1975 年提出了刚塑性有限元中的罚函数法, 并利用这些方法模拟了热态挤压、轧制及板料成形。

1982 年 Mori 和 Osakada 提出了刚塑性有限元中的材料可压缩法<sup>[12]</sup>, 对多孔类可压缩材料的成形工艺进行了模拟分析。Altan 等利用大型刚塑性有限元分析程序 ALPID (Analysis of Plastic Incremental Deformation) 对各类塑性成形的问题进行了模拟分析。近年来, 一些学者对三维成形问题进行了刚塑性有限元分析。Kikuchi, Cheng, Schroeder, Shephard 等对有限元分析中的网格自动生成方法进行了研究, 进一步提高了有限元分析的自动化。Cheng, Yang, Badawy, Gelton 等研究了网格再划分问题。Kobayashi 等人还提出



刚塑性有限元的反向模拟技术,并用此技术对一些简单的成形问题进行了预成形设计<sup>[14]</sup>,这些工作都丰富和发展了塑性有限元的具体处理技术和应用范围。另外, Pillinger, Cherot, Shiau 和 Kobayashi 考虑了塑性成形时工件的摩擦边界情况,使刚塑性有限元分析塑性加工问题时更符合实际<sup>[14-16]</sup>。

在金属塑性成形中润滑模型方面的研究,国内学者陈翰、孙大成等根据金属塑性变形的特点对拉拔、挤压及轧制等工艺中润滑状态进行了油膜分区,对各个区域内油膜厚度和压力进行了简单的估算<sup>[17]</sup>。Meng Y. G 提出了冷锻过程塑性流体动力润滑模型,结合刚塑性有限元模拟圆柱冷锻过程中润滑油膜厚度和压力分布规律<sup>[18]</sup>;宋翼生、罗春晖和张辉等提出了轧制工艺摩擦、磨损及润滑模型,用刚塑性有限元模拟平辊轧制接触应力分布<sup>[19-20]</sup>。

国外方面, Wilson 和 Gecim 等应用弹性流体动力润滑的结果对拉拔及轧制等弹性动力润滑系统入口区的情况作了理论分析,并与钢板轧制实验的测量结果进行了比较。结果表明,在轧制速度较大的情况下,理论值与实验值仍有很大的差距。Keife 和 Tabary 等提出了冷扎铝材的摩擦模型; Klimczak 和 Mahdavian 分析拉深工艺等粘度流体动力润滑状态,计算了润滑油膜厚度和压力,测量了拉深过程真实接触区的表面形貌与真实应力的关系。至于用数值方法计算金属塑性成形工艺中流体动力润滑的油膜压力和工件变形力,仅有少数学者应用刚塑性有限元进行了分析,一般均用简化的解析法进行简单的估算,与实际生产情况相差较大。目前,中外学者在分析金属成形中弹塑性流体动力润滑问题时,大多分析轧制、拉拔这样的稳定过程,而对如挤压这样的非稳定过程的润滑问题分析较少。

上述情况表明,对金属塑性成形工艺中的流体动力润滑特性的研究尚不成熟,况且对大多数金属塑性成形而言,能否形成或在多大程度上形成流体动力润滑尚有待商榷。因此,多数学者在研究非稳态塑性成形过程时大都采用为人们所熟悉的摩擦模型。

随着以信息技术为代表的高新技术的迅猛发展、知识经济和全球化制造的兴起,塑性加工理论和模拟技术的发展呈现出交叉性、前沿性和实用性的特点。借助于数值模拟技术的,塑性加工理论的成果可投入到实际应用中去。在应用需求的推动下,塑性成形数值模拟技术的发展呈现出如下特点:

一方面,不断改进计算模型和计算方法,以提高求解精度,扩展数值模拟技术的应用范围;

另一方面,将数值模拟与成形工艺优化相结合,与 CAD/CAM 集成,形成智能化的成形工艺和模具设计方法。

塑性成形过程的数值模拟在发达国家已进入应用普及阶段。在我国,数值模拟技术近几十年来有一定的发展,在工业中的应用也日趋广泛。国内外学者先后研制了各种工艺和模具的 CAD/CAM 系统,在 CAD/CAM 系统中采用有限元法进行成形过程的数值模拟占有非常重要的地位,它能获得金属在成形过程中的流动规律

及变形力学特性,可为工艺过程设计及优化工作参数,为模具设计及优化模具参数提供强有力的理论依据。随着人工智能的发展,专家系统技术的应用和发展,计算机数值模拟已成为不可或缺的重要分析工具。

回顾塑性有限元在塑性加工方面的应用和发展,塑性成形有限元及其应用研究可以归纳为三个发展方向<sup>[21]</sup>:

第一,更加系统深入的研究数值模拟的理论分析及模拟方法,使模拟成形全过程更为科学、完善;

第二,针对具体问题开发专用程序,并组织力量开发一些通用方便、功能较强的数值模拟软件,以便快速、有效的解决一些有价值的工程技术问题;

第三,采用数值模拟技术建立宏观变形与微观组织之间的关系以控制产品质量,为现代工业发展服务。

尽管塑性有限元理论及技术都有了较大的发展,但由于塑性成形自身的特点,有限元在该领域中的应用仍存在许多具体问题和数学处理上的困难,在这些方面还缺乏全面、系统的研究。总而言之,塑性有限元理论仍有待进一步完善和发展,在这一领域尚有许多问题有待进一步的开发研究。

#### 1.4 本文主要研究内容

本课题来源于安徽省教委自然科学研究项目《链条滚子精密成形工艺及模具设计》。本文采用刚塑性有限元法对滚子成形方案中的反挤压工序进行较为深入的数值模拟研究,再现反挤压成形时的金属流动规律。

由于金属塑性成形过程中摩擦状况比较复杂,且不易于进行分析和实验研究,而摩擦问题又是金属塑性成形中分析、计算和设计所无法回避的问题。就如何更准确的模拟具有接触摩擦的金属塑性成形过程这个问题,本校 2000 届研究生徐文建将地质学领域中岩石力学的节理单元概念引入了数值模拟中。但在实际分析过程中,由于节理单元的引入,将使变形体中存在两个不同类型的单元,如何将两个不同类型的单元组装成一个整体,这是本文在接触摩擦模拟方面所做的主要工作,本文对此进行了论述和初步探索。

本文主要包括以下几个部分的内容:

第一章:概述链条滚子新旧工艺、塑性成形有限元数值模拟的发展历史、应用前景及本课题的主要内容;

第二章:详细阐述刚塑性有限元法的基本原理和本体部分矩阵方程的建立;

第三章:介绍节理单元,并着重对节理单元与本体单元耦合关系的建立进行研究,推导出耦合后的整体矩阵方程;

第四章:对程序实施过程中的一些关键问题进行处理,其中主要的有关问题有:粘摩系数的选取、初始速度场的选取、收敛判据、刚性区的处理、奇异点的

处理、网格再划分及数据传递的处理等；

第五章：详细说明滚子反挤压成形工序的有限元数值模拟程序系统，并给出了程序流程框图和各场量等值线图；

第六章：介绍用 Marc 软件进行网格重划技术；

第七章：主要介绍实验研究方面的内容。由于链条滚子尺寸较小，要将其线性尺寸放大五倍后制成坯料在压力机上进行实验。根据实验中记录的压力、行程数值，绘制压力-行程曲线，并将其与数值模拟的结果进行对比分析；

第八章：是对本文全部工作的总结，得出研究结论，并分析不足之处。



## 第二章 刚塑性有限元法的基本原理及本体部分矩阵方程的建立

本章主要介绍了刚塑性有限元法的基本原理和方法,并用罚函数法建立了刚塑性本体单元部分的非线性方程组,采用以时间为增量步进的 Newton-Raphson 迭代法对非线性方程组进行了线性化。

### 2.1 刚塑性变形力学基本方程

#### 一. 刚塑性材料的基本假设

金属塑性成形时,弹性应变仅占总应变的极小的一部分,因而可忽略弹性应变,将变形金属视为刚塑性体。这样给解题过程带来了许多方便。用刚塑性有限元法分析大变形问题时材料满足下列假设:

1. 忽略材料的弹性变形
2. 本构方程采用 Levy-Mises 方程
3. 材质各向同性
4. 体积不可压缩
5. 不计体力与惯性力

#### 二. 刚塑性变形力学基本方程

刚塑性材料在产生塑性变形时应满足下列基本方程:

1. 平衡微分方程 (运动方程)

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2-1)$$

2. 本构方程

采用 Levy-Mises 应力—应变速率关系表示为:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \sigma'_{ij} \quad (2-2)$$

其中

$$\dot{\lambda} = \frac{3\dot{\bar{\epsilon}}}{2\bar{\sigma}} \quad (2-3)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \text{ 为等效应变速率}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \text{ 为等效应力}$$

应力—应变速率关系也可表示为:

$$\sigma'_{ij} = \phi \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2-4)$$

$$\phi = \frac{2}{3} \frac{K_f}{\dot{\epsilon}} \quad (2-5)$$

式中：  $K_f$  为材料的流动应力，由实验而得。

### 3. 几何方程

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (2-6)$$

### 4. 流动条件（屈服条件）

$$\bar{\sigma} < K_f \quad \text{不产生塑性流动}$$

$$\bar{\sigma} = K_f \quad \text{开始产生塑性流动}$$

当变形体处于塑性流动状态时，应满足：

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sigma'_{ij} / \phi \quad (2-7)$$

当变形体没有产生塑性流动（即变形体为刚体）时，应满足：

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 0 \quad (2-8)$$

### 5. 体积不可压缩条件

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{ii} = 0 \quad (2-9)$$

### 6. 边界条件

力学边界条件，在  $S_F$  上满足：

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = F_i \quad (2-10)$$

速度边界条件，在  $S_v$  上满足：

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^0 \quad (2-11)$$

## 2.2 刚塑性有限元变分原理

设刚塑性变形体的体积为  $V$ ，表面积为  $S$ ，在  $S_F$  上给定表面力  $F_i$ ，在  $S_v$  上给定速度  $\dot{u}_i$ 。在满足变形几何条件式 (2-6)，体积不变条件式 (2-9) 和边界速度条件式 (2-11) 的一切容许速度场  $\dot{u}_i^*$  中，真实速度场使泛函

$$\Phi^* = \int_V \bar{\sigma} \dot{\epsilon}^* dV - \int_{S_F} F_i \dot{u}_i^* dS \quad (2-12)$$

取得极小值，即使  $\delta \Phi^* = 0$ ，这就是 Markov 变分原理。

Markov 变分原理可由下述过程来推导。

首先设  $(\dot{u}_i, \sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij})$  为真解的速度场、应力场、应变速率场，而  $(\dot{u}_i^*, \sigma_{ij}^*, \dot{\epsilon}_{ij}^*)$

为容许的速度场、应力场、应变速率场。

由 Shwarz 不等式得：

$$\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* \leq \sqrt{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^*} \quad (2-13)$$

由体积不变条件，知：

$$\delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* = \dot{\epsilon}_{ij}^* = 0$$

所以有

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* &= (\sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^* \\ &= \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* - \sigma_m \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^*\end{aligned}$$

即

$$\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* \quad (2-14)$$

同理有

$$\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2-15)$$

由 Levy—Mises 方程，及式 (2-4) 和 (2-5)，得：

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} &= \Phi^2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \Phi^2 \dot{\bar{\epsilon}}^2 \\ &= \frac{3}{2} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{K_f}{\dot{\bar{\epsilon}}} \right)^2 \dot{\bar{\epsilon}}^2 \\ &= \frac{2}{3} K_f^2\end{aligned}$$

即

$$\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{2}{3} K_f^2 \quad (2-16)$$

这样，把式 (2-4)、式 (2-14) 代入式 (2-13) 得：

$$\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* \leq \sqrt{\frac{2}{3} K_f^2} \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^*} = K_f \dot{\bar{\epsilon}}^* \quad (2-17)$$

式中， $\dot{\bar{\epsilon}}^* = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^*}$  为容许速度场中的等效应变速率。

对式 (2-17) 作整个体积积分，得

$$\int_V \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV \leq \int_V K_f \dot{\bar{\epsilon}}^* dV \quad (2-18)$$

在式 (2-1) 的两边同乘以  $\dot{\epsilon}_{ij}$ ，并注意到式 (2-15) 得：

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} &= \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \Phi \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{2K_f}{3 \dot{\bar{\epsilon}}} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \\ &= K_f \dot{\bar{\epsilon}}\end{aligned} \quad (2-19)$$



再对上式作整体体积积分得：

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V K_f \dot{\epsilon} dV \quad (2-20)$$

把式 (2-18) 和式 (2-20) 相减并简化得：

$$\int_V K_f \dot{\epsilon}^* dV - \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV \geq \int_V K_f \dot{\epsilon} dV - \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV$$

根据高斯定理，可将上式改为：

$$\int_V K_f \dot{\epsilon}^* dV - \int_{S_F} F_i \dot{u}_i dS \geq \int_V K_f \dot{\epsilon} dV - \int_{S_F} F_i \dot{u}_i dV \quad (2-21)$$

为了求解速度场，须使上式右边为极小值，即使泛函式 (2-12) 取极小值，亦即使上述泛函变分：

$$\delta \Phi^* = 0$$

这就是 Markov 变分原理的基本过程。

刚塑性有限元法的理论基础是 Markov 变分原理。它认为在所有动可容的速度场中，使泛函取得极值的速度场就是真实的速度场。

由于要找到既满足边界条件又满足体积不变条件的速度场是很困难的，而仅满足边界条件的速度场则很容易找到。因此，在实际求解时，往往用 Lagrange 乘子法或罚函数法将体积不变条件引入式 (2-12)，建立新的泛函。从而使原来求泛函的条件极值的问题转化为求新泛函的部分条件极值问题（这种变分称之为不完全广义变分）。

拉格朗日乘子法是在原函数中引入拉格朗日乘子  $\lambda$ ，这种方法的特点是在假设初始速度场时，可以不满足体积不可压缩条件，这给初始速度场的选择带来了方便；拉格朗日乘子有明确的物理意义： $\lambda = \sigma_m$ （静水压力）<sup>[22]</sup>。收敛时的拉格朗日乘子不能太大，且每次的修正量要小，否则影响收敛。拉格朗日乘子法在求解过程中增加了未知量，从而加大了计算量。

罚函数法<sup>[23]</sup>是以一个很大的正惩罚因子  $\alpha$ （一般取  $10^5$ — $10^7$ ）乘以体积应变率平方的积分后引入泛函。体积不变条件满足时，罚项的值将会很大，这相当于对泛函违反约束条件的“惩罚”。随着泛函极小化过程的进行，惩罚项作用逐渐消失，而速度场也逐渐向精确解逼近。罚函数法收敛速度快，可节约内存和计算时间，是求解真实速度场的一个有效的方法。

本文中采用罚函数法将体积不变条件引入泛函式中得到新的泛函为：

$$\Phi = \int_V K_f \dot{\epsilon} dV + \frac{\alpha}{2} \int_V (\dot{\epsilon}_v)^2 dV - \int_{S_F} F_i \dot{u}_i dS \quad (2-22)$$

这样，使新泛函取极值，即：

$$\delta \Phi = 0 \quad (2-23)$$

在变形体内利用上式进行数值求解，即可求得真实速度场。

## 2.3 本体部分矩阵方程组的建立

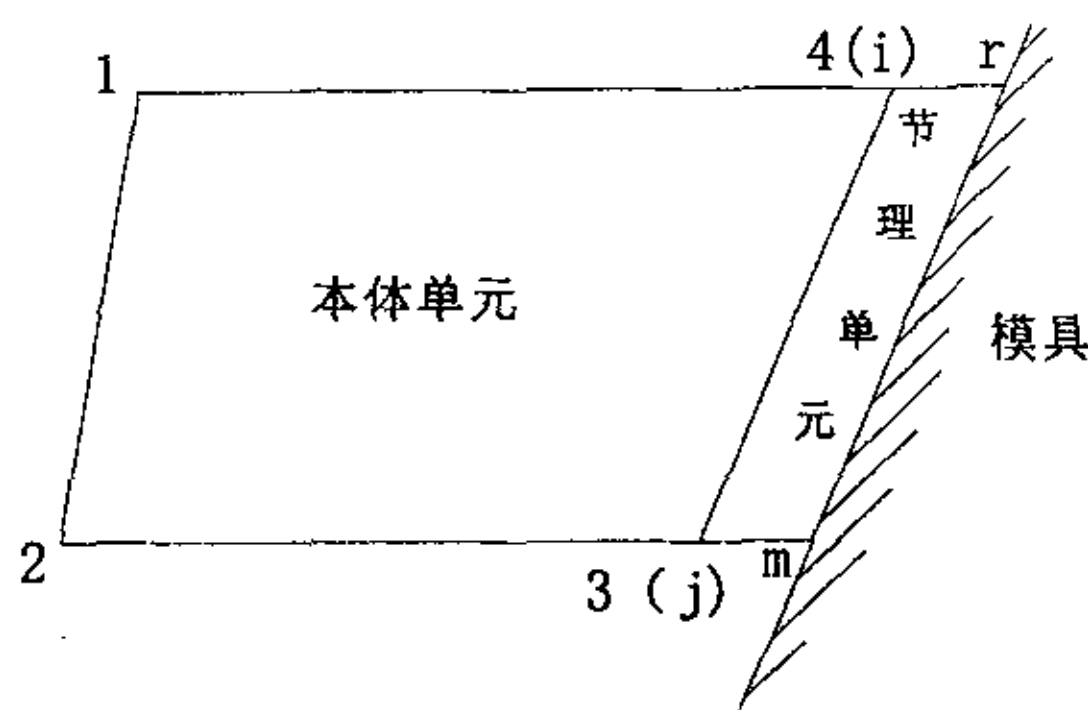


图 2.1 本体单元示意图

本文采用节理单元模拟接触摩擦，如图 2.1 所示，凸模与变形体接触面上的单元称为节理单元，变形体内不与凸模接触的部分采用刚塑性有限元法进行模拟，本文中称其为本体单元。本节将讨论本体部分矩阵方程组的建立方法，节理单元在第三章进行详述。

### 一、结构离散化

合理选择单元类型是离散化的首要任务。对于非稳态成形问题，由于塑性变形剧烈，单元畸变严重，往往需要重新划分单元，新老单元之间通过插值传递力学性能，计算较繁，因此不宜采用高阶单元。一般地，四边形四节点等参元，其计算简单，程序处理较容易，常在塑性成形有限元中应用。

本文采用四节点四边形等参元，如图 2.2 所示，总体坐标选用笛卡尔坐标系，在计算单元特性时，采用局部坐标。单元内任意一点的总体坐标与局部坐标之间通过形函数插值实现相互转化。

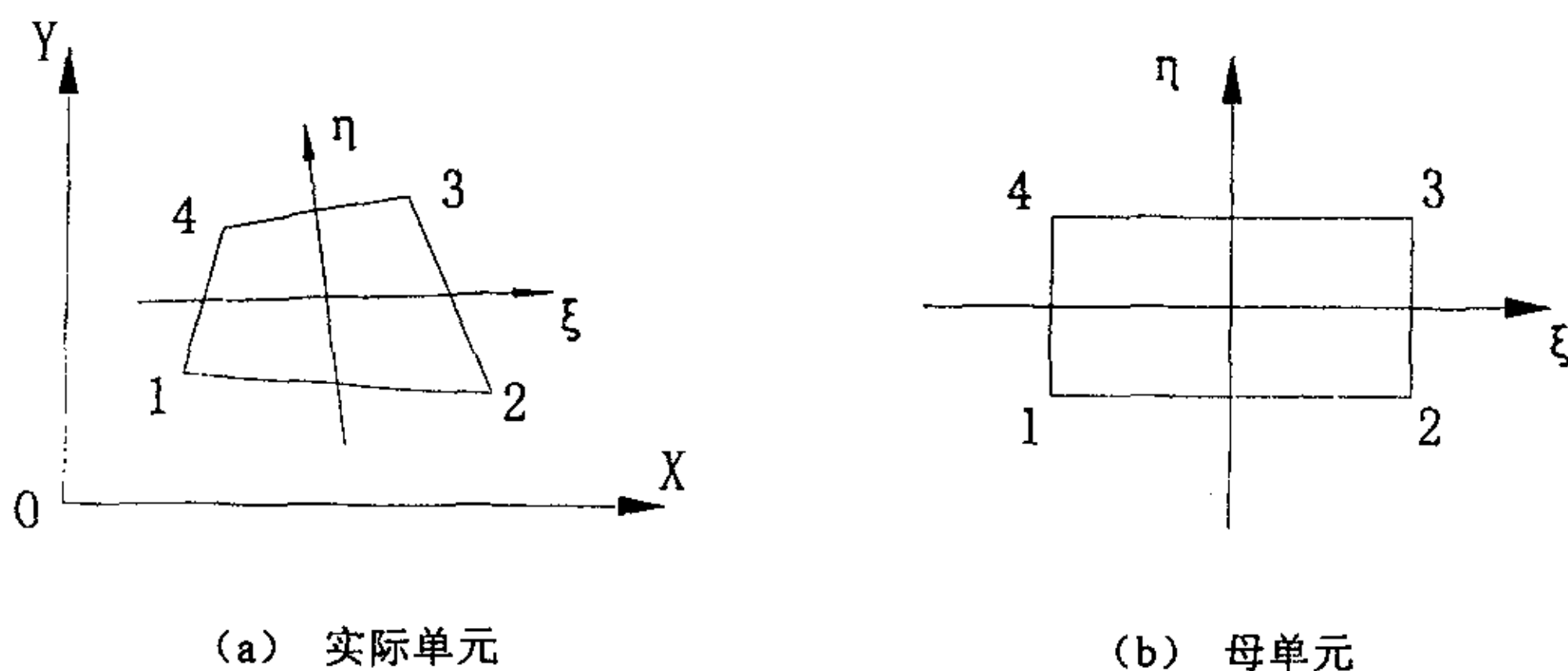


图 2.2 四边形四节点等参元

设单元内部的速度场为  $\{\dot{u}\}$ , 单元节点速度分量列阵为  $\{a_e\}$ 。现任取一单元, 如图 2.2 所示。单元内任一点 P 的总体坐标为  $(x, y)$ , 局部坐标为  $(\xi, \eta)$ , 单元节点总体坐标为  $(x_i, y_i)$ , 局部坐标为  $(\xi_i, \eta_i)$ , 则其形函数双线性函数, 即:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi) \cdot (1 + \eta_i \eta) \quad (2-24)$$

$N_i$  为单元第  $i$  个节点的形函数 ( $i=1, 2, 3, 4$ )。

坐标变换式为:

$$x = \sum N_i x_i \quad y = \sum N_i y_i \quad (2-25)$$

单元内速度场为:

$$\{\dot{u}\} = [N]\{a_e\} \quad (2-26)$$

其中,

$$\{a_e\} = \{\dot{u}_1 \quad \dot{v}_1 \quad \dot{u}_2 \quad \dot{v}_2 \quad \dot{u}_3 \quad \dot{v}_3 \quad \dot{u}_4 \quad \dot{v}_4\}^T$$

$[N]$  为形函数矩阵,

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

几何方程可写成下列形式:

$$\{\dot{\epsilon}\} = [L][N]\{a_e\} = [B]\{a_e\} \quad (2-27)$$

上式中,  $[L]$  为微分算子,  $\{\dot{\epsilon}\}$  为单元应变速率列阵。具体为:

(1) 对于轴对称问题有

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{1}{r} & \frac{\partial}{\sqrt{2}\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\sqrt{2}\partial r} \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

$$\{\dot{\epsilon}\} = \left[ \dot{\epsilon}_R \quad \dot{\epsilon}_z \quad \dot{\epsilon}_\theta \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{\gamma}_r \right]^T \quad (2-29)$$

(2) 对于平面问题有

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

$$\{\dot{\epsilon}\} = \left[ \dot{\epsilon}_x \quad \dot{\epsilon}_y \quad \dot{\epsilon}_z \quad \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} \right]^T \quad (2-31)$$

其中,  $\dot{\gamma}_r$  和  $\dot{\gamma}_{xy}$  为工程剪应变速率, 其值为应变速率张量  $\dot{\epsilon}_{ij}$  的相应剪应变速率的两倍。



[B]为应变速度与节点速度之间的转化矩阵，称之为应变矩阵，且有：

$$[B]=[L][N]$$

将等效应变速率用矩阵表示如下为：

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \{\dot{\epsilon}\}^T \{\dot{\epsilon}\}} \quad (2-32)$$

将式 (2-27) 代入上式得：

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \{a_e\}^T [B]^T [B] \{a_e\}} = \sqrt{\frac{2}{3} \{a_e\}^T [k] \{a_e\}} \quad (2-33)$$

式中， $[k]=[B]^T[B]$

体积应变速率用矩阵表示为：

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_y \delta_y = \{\dot{\epsilon}\}^T \{c\} \quad (2-34)$$

式中：

$$\text{三维问题:} \quad \{c\} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\text{轴对称问题:} \quad \{c\} = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$$

$$\text{平面问题:} \quad \{c\} = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

将连续体离散化后，则在每个单元内利用式 (2-24) 进行插值，就有一个假定分布的速度场，对应于这个速度场，设单元泛函为  $\Phi^e$ 。由式 (2-22)，(2-33) 和式 (2-34) 得：

$$\Phi^e = \int_{V^e} \bar{\sigma} \sqrt{\frac{2}{3} \{a_e\}^T [k] \{a_e\}} dV + \frac{\alpha}{2} \int_{V^e} (\{\dot{\epsilon}\} \{c\})^2 dV - \int_{S_F^e} \{a_e\}^T \{F\} dS \quad (2-35)$$

对于有加工硬化的材料， $\bar{\sigma}$  是变形历史的函数。此时，必须采用阶梯硬化的概念，即在每一加载步中，认为等效应力  $\bar{\sigma}$  为常数进行迭代。但应注意，必须严格地控制每一步的加载量以保证小变形条件及阶段硬化精度。

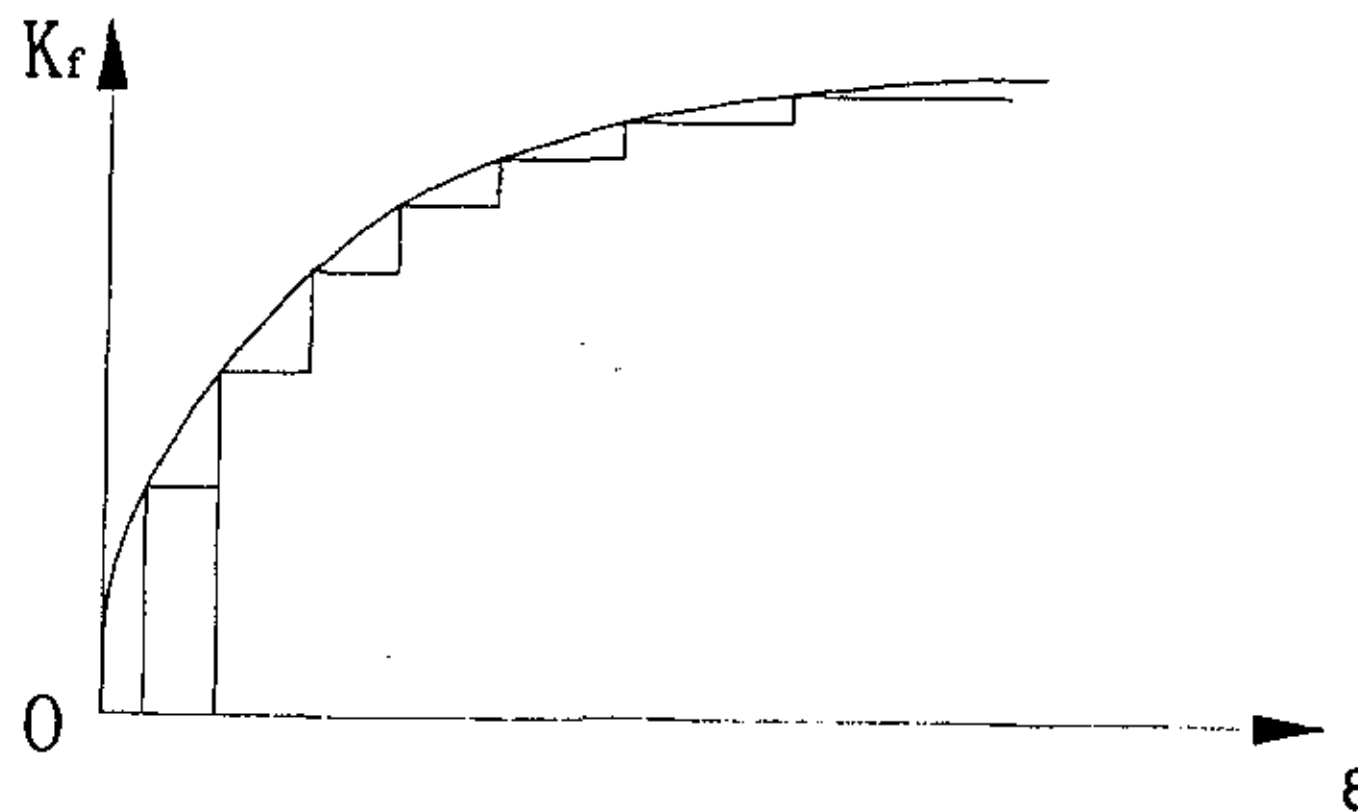


图 2.3 真实硬化曲线与阶梯硬化曲线图

在计算过程中可视单元内的  $\bar{\sigma}$  为常数，则式 (2-35) 可写成：

$$\Phi^e = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma} \int_{V^e} \sqrt{\{a_e\}^T [k] \{a_e\}} dV + \frac{\alpha}{2} \int_{V^e} (\{\dot{\varepsilon}\} \{c\})^2 dV - \int_{S_f^e} \{a_e\}^T \{F\} dS \quad (2-36)$$

## 二. 组装成整体方程

变形体整体泛函变分为各单元泛函变分之和, 即:

$$\Phi = \sum_e \Phi^e = \Phi(\dot{u}_1 \quad \dot{u}_2 \quad \dots \quad \dot{u}_{kN}) \quad (2-37)$$

即总体泛函  $\Phi$  是各节点速度的函数, 其中  $k$  为问题的维数,  $kN$  为节点速度分量总数。

由变分原理, 对上式求极值, 即  $\delta\Phi = 0$ , 可得:

$$\delta\Phi = \sum_e \frac{\partial \Phi^e}{\partial \dot{u}_i} \delta \dot{u}_i = 0 \quad (2-38)$$

由于  $\delta \dot{u}_i$  的任意性, 可得:

$$\sum_e \frac{\partial \Phi^e}{\partial \dot{u}_i} = 0 \quad (2-39)$$

由式(2-36)得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^e}{\partial \{a_e\}} &= \bar{\sigma} \int_{V^e} \frac{\frac{2}{3} [k] \{a_e\}}{\sqrt{\frac{2}{3} \{a_e\}^T [k] \{a_e\}}} dV + (\alpha \int_{V^e} [B]^T \{c\} \{c\}^T [B] dV) \{a_e\} - \int_{S_f^e} [N]^T \{F\} dS \\ &= \{0\} \end{aligned} \quad (2-40)$$

$$\text{令} \quad [M] = \alpha \int_{V^e} [B]^T \{c\} \{c\}^T [B] dV$$

$$\{f\} = \int_{S_f^e} [N]^T \{F\} dS$$

式(2-40)可简写为:

$$\frac{\partial \Phi^e}{\partial \{a_e\}} = \frac{2}{3} \bar{\sigma} \int_{V^e} \frac{[k] \{a_e\}}{\sqrt{\frac{2}{3} \{a_e\}^T [k] \{a_e\}}} dV + [M] \{a_e\} - \{f\} = \{0\} \quad (2-41)$$

由式(2-41), 可得到单元的刚塑性流动方程:

$$\{c\} \{a_e\} + \{d\} \{a_e\} = \{r\} \quad (2-42)$$

$$\text{式中: } \{c\} = \frac{2}{3} \bar{\sigma} \int_{V^e} \frac{[k]}{\sqrt{\frac{2}{3} \{a_e\}^T [k] \{a_e\}}} dV$$

$$\{d\} = [M] = \alpha \int_V [B]^T \{c\} \{c\}^T [B] dV$$

$$\{r\} = \{f\} = \int_{S_f} [N]^T \{F\} dS$$

令  $\{s\} = \{c\}\{a_e\} + \{d\}\{a_e\}$ , 得:

$$\{r\} - \{s\} = \{0\} \quad (2-43)$$

将上式组装成整体, 即可得到整个本体部分矩阵方程:

$$\{R^n(\{a_e\})\} - \{S^n(\{a_e\})\} = \{0\} \quad (2-44)$$

式(2-44)中,  $\{R^n\}$  的物理含意为外力和,  $\{S^n\}$  为内力和。



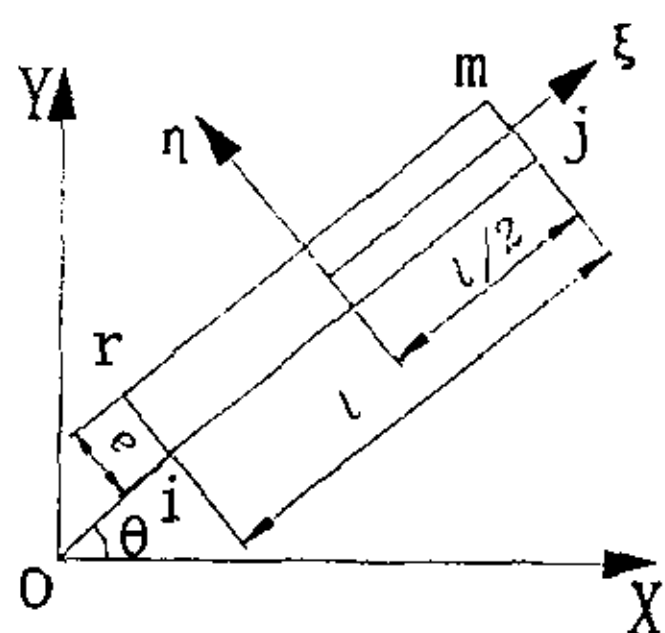
### 第三章 节理单元与本体单元耦合关系的研究

#### 3.1 节理单元简介

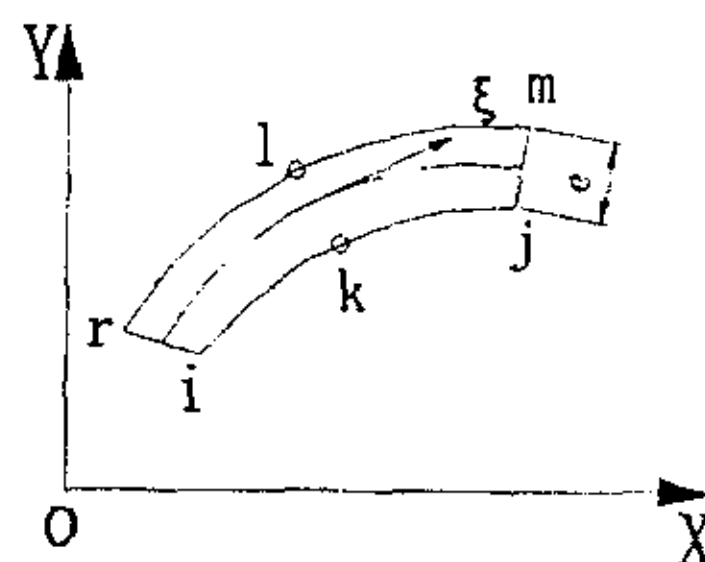
采用有限单元法数值模拟塑性成形全过程的研究中,接触摩擦的处理一直引起研究者的极大关注。金属塑性成形过程中摩擦状况比较复杂,且不易于进行分析和实验研究,而摩擦问题又是金属塑性成形中分析、计算和设计所无法回避的问题。

尽管塑性成形前都要对坯料进行一定的表面处理和润滑,但变形体与模具接触面总存在着摩擦。塑性成形中的接触摩擦是一种高压高温中的摩擦,其真实情况是很复杂的。人们在采用有限单元法数值模拟塑性成形过程时,一般都将变形体与模具的接触摩擦简化为一个简单的模型,诸如库仑定律、常摩擦因子法、反正切函数模型等。这样的处理方法难免给数值模拟结果带来较大的误差,从而降低了有限单元法的实用价值。为了更准确的模拟坯料与模具接触面上的真实摩擦情况,本文引入了节理单元进行研究。

节理单元有三维、二维的一般节理单元和曲边节理单元,其特点是厚度极小,甚至可以接近于零。图 3.1 所示。



(a) 四结点直边节理单元



(b) 六结点曲边节理单元

图 3.1 节理单元

就润滑状态而言,理想的要数流体动力润滑。在这一状态下,摩擦阻力极小,这对成形将非常有利;而干摩擦则是很差的状态,也是人们想方设法要避免的。不过由于流体动力润滑的形成条件很苛刻,所以在挤压成形中,这一状态即使存在,其时间也是很有限的;同时,挤压成形中,一般对坯料作一定的表面处理,并涂以润滑油,故干摩擦也只可能在部分时间、在局部区域得以出现。因而在挤压成形过程中,模具与坯料接触面之间润滑油膜的存在是完全可能的。节理单元

在岩体计算中已有应用<sup>[24]</sup>，我校 2000 届研究生徐文建对节理单元在数值模拟接触摩擦处理中的可行性进行过论述<sup>[25]</sup>，本论文就是在此基础上对节理单元在数值模拟接触摩擦中的应用作进一步的探索。

### 3.2 接触摩擦区由节理单元组装成的矩阵方程的推导

设单元节点力为：

$$\{F\}^e = \{U_i \quad V_i \quad U_j \quad V_j \quad U_m \quad V_m \quad U_r \quad V_r\}^T$$

单元节点速度为：

$$\{a_e\} = \{\dot{u}_i \quad \dot{v}_i \quad \dot{u}_j \quad \dot{v}_j \quad \dot{u}_m \quad \dot{v}_m \quad \dot{u}_r \quad \dot{v}_r\}^T$$

假设单元的上边界 rm 和上边界 ij 上的速度呈线性分布，即：

$$\dot{u}_{\text{上}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{2\xi}{l})\dot{u}_r + \frac{1}{2}(1 + \frac{2\xi}{l})\dot{u}_m \quad (3-1)$$

$$\dot{u}_{\text{下}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{2\xi}{l})\dot{u}_i + \frac{1}{2}(1 + \frac{2\xi}{l})\dot{u}_j \quad (3-2)$$

则单元的上下边界的水平速度差为：

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u} &= \dot{u}_{\text{上}} - \dot{u}_{\text{下}} \\ &= \frac{1}{2}[(\dot{u}_r - \dot{u}_i)(1 - \frac{2\xi}{l}) + (\dot{u}_m - \dot{u}_j)(1 + \frac{2\xi}{l})] \end{aligned} \quad (3-3)$$

同理可得单元的上下边界的垂直速度差为：

$$\begin{aligned} \Delta \dot{v} &= \dot{v}_{\text{上}} - \dot{v}_{\text{下}} \\ &= \frac{1}{2}[(\dot{v}_r - \dot{v}_i)(1 - \frac{2\xi}{l}) + (\dot{v}_m - \dot{v}_j)(1 + \frac{2\xi}{l})] \end{aligned} \quad (3-4)$$

又假设单元内剪应力  $\tau_s$  与水平速度差  $\Delta \dot{u}$  成正比，即：

$$\tau_s = \lambda_s \cdot \Delta \dot{u} \quad (3-5)$$

假设单元内正应力  $\sigma_n$  与垂直速度差  $\Delta \dot{v}$  成正比，即：

$$\sigma_n = \lambda_n \Delta \dot{v} \quad (3-6)$$

上两式中：

$\lambda_s$  ——节理单元的切向粘摩系数

$\lambda_n$  ——节理单元的法向粘摩系数。

把 (3-5)、(3-6) 两式合并写成矩阵表达

$$\begin{Bmatrix} \tau_s \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_s & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{v} \end{Bmatrix} \quad (3-7)$$

$$\text{令: } \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \tau_s \\ \sigma_n \end{Bmatrix}, \quad \{\lambda\} = \begin{bmatrix} \lambda_s & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \{\omega\} = \begin{Bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{v} \end{Bmatrix}$$

则式 (3-7) 变成:

$$\{\sigma\} = [\lambda] \{\omega\} \quad (3-8)$$

式 (3-3)、(3-4) 写成矩阵形式为:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{v} \end{Bmatrix} = [M] \{a_e\}$$

$$\text{式中 } [M] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

$$\text{其中, } N_1 = 1 - \frac{2\xi}{l},$$

$$N_2 = 1 + \frac{2\xi}{l}$$

假设单元各节点产生虚速度  $\{a_e^*\}$ , 那么单元内的虚速度差为:

$$\{\omega^*\} = [M] \{a_e^*\}$$

则在单位长度上, 单元应力所具有的虚应变功率为:

$$t \{\omega^*\}^T \{\sigma\} = t \{a_e^*\}^T [M]^T [\lambda] \{\omega\}$$

将上式沿单元长度积分后得到整个单元应力所具有的虚应变功率为:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} t \{\omega^*\}^T \{\sigma\} d\xi = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} t \{a_e^*\}^T [M]^T [\lambda] \{\omega\} d\xi$$

由虚功原理可知, 此虚应变功率必须等于单元节点载荷 (单元应力等效移置到节点上) 所做的虚功率, 即:

$$\{a_e^*\}^T \{F\}^e = \{a_e^*\}^T \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} t [M]^T [\lambda] \{\omega\} d\xi$$

上式两边同除以  $\{a_e^*\}^T$  可得:

$$\{F\}^e = \left( t \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} [M]^T [\lambda] [M] d\xi \right) \{a_e\}$$

上式右边的项表示节点产生新的位移引起的节点力, 可表达成:

$$[k]^e = t \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} [M]^T [\lambda] [M] d\xi \quad (3-10)$$

式中,  $[k]^e$  为单元刚度矩阵。

$$\text{则有: } \{F\}^e = [k]^e \cdot \{a_e\} \quad (3-11)$$

由前面的叙述可知:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N_1^2 d\xi = \frac{4}{3} l$$



$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N_1 N_2 d\xi = \frac{2}{3}l$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N_2^2 d\xi = \frac{4}{3}l$$

将以上三个式子和式(3-9)代入式(3-10)进行计算化简得到的单元刚度矩阵 $[k]^e$ 用式(3-12)来表示。

$$[k]^e = \frac{1}{6}l \cdot t \begin{bmatrix} 2\lambda_s & 0 & \lambda_s & 0 & -\lambda_s & 0 & -2\lambda_s & 0 \\ 0 & 2\lambda_n & 0 & \lambda_n & 0 & -\lambda_n & 0 & -2\lambda_n \\ \lambda_s & 0 & 2\lambda_s & 0 & -2\lambda_s & 0 & -\lambda_s & 0 \\ 0 & \lambda_n & 0 & 2\lambda_n & 0 & -2\lambda_n & 0 & -\lambda_n \\ -\lambda_s & 0 & -2\lambda_s & 0 & 2\lambda_s & 0 & \lambda_s & 0 \\ 0 & -\lambda_n & 0 & -2\lambda_n & 0 & 2\lambda_n & 0 & \lambda_n \\ -2\lambda_s & 0 & -\lambda_s & 0 & \lambda_s & 0 & 2\lambda_s & 0 \\ 0 & -2\lambda_n & 0 & -\lambda_n & 0 & \lambda_n & 0 & 2\lambda_n \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

### 3.3 坐标变换

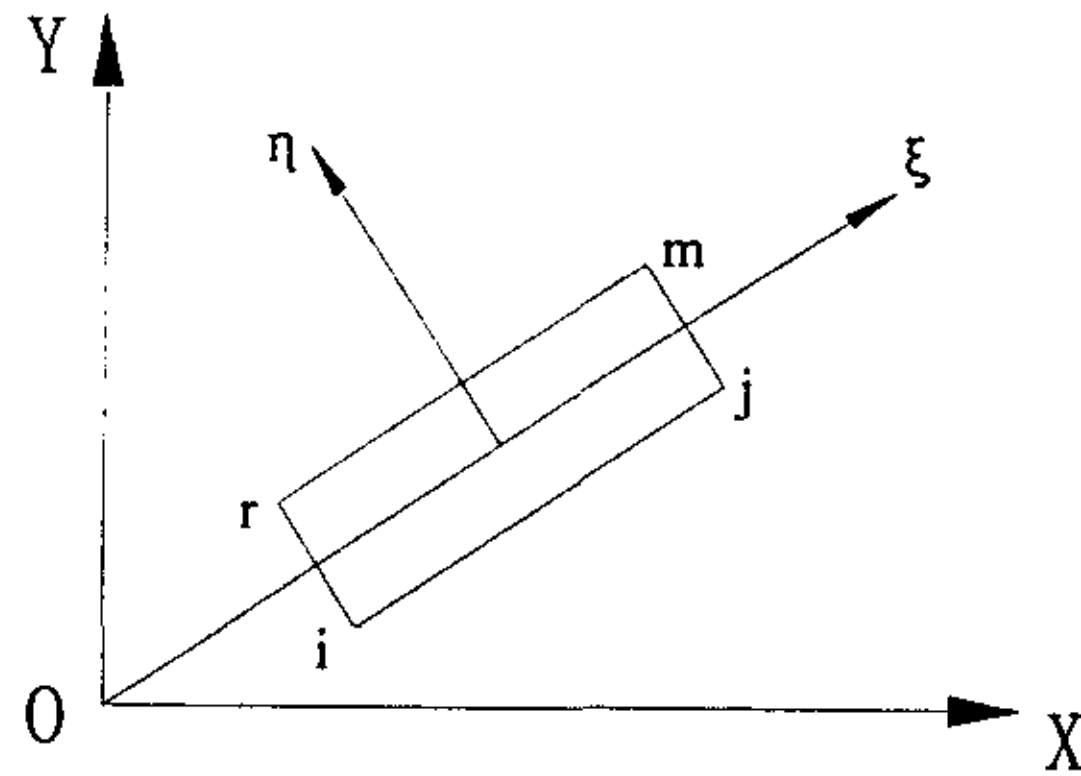


图 3.2 坐标变换

设单元局部坐标系为 $(\xi, \eta)$ ,整体坐标系为 $(X, Y)$ ,如图 3.2 所示。两个坐标之间的变换关系可由下式确定:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (3-13)$$

式中,  $[L]$ 是一个正交矩阵:

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

设局部坐标系中的单元节点力为 $\{F_e'\}$ , 则整体坐标系中的单元节点力为:

$$\{F_e\} = [T]\{F'_e\} \quad (3-14)$$

式中:

$$[T] = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

由以上所述可知, 整体坐标系中的单元刚度矩阵为:

$$[k]^e \{a_e\} = [T][k']^e \{a_e\} = [T][k']^e [T]^T \{a_e\}$$

式中 $[T]$ 是正交矩阵, 即:  $[T]^{-1} = [T]$ , 由上式可得:

$$[k]^e = [T][k']^e [T]^T \quad (3-16)$$

式中,  $[k']^e$ 为局部坐标系中的单元刚度矩阵。

经过坐标变换, 把求得的节理单元单元刚度矩阵表达式进行组装, 即可得到接触摩擦区的整体刚度矩阵表达式。因此, 接触摩擦区的整体矩阵方程可写成:

$$[K'] \{a'\} = \{F\}$$

$$\text{即: } \{R'\}(\{a_e\}) - \{S'\}(\{a_e\}) = \{0\} \quad (3-17)$$

$$\text{式中, } \{S'\} = [K'] \{a'\}$$

### 3.4 节理单元与本体单元耦合矩阵方程的推导

引入节理单元的概念对接触摩擦区进行模拟, 使得对变形体的模拟更加精确一些。与此同时, 又将出现一个新的问题。因为节理单元的引入使得变形体内存在了两个不同类型的单元, 这又给模拟分析带来了困难。下面对这个问题的解决方法进行初步的探讨。

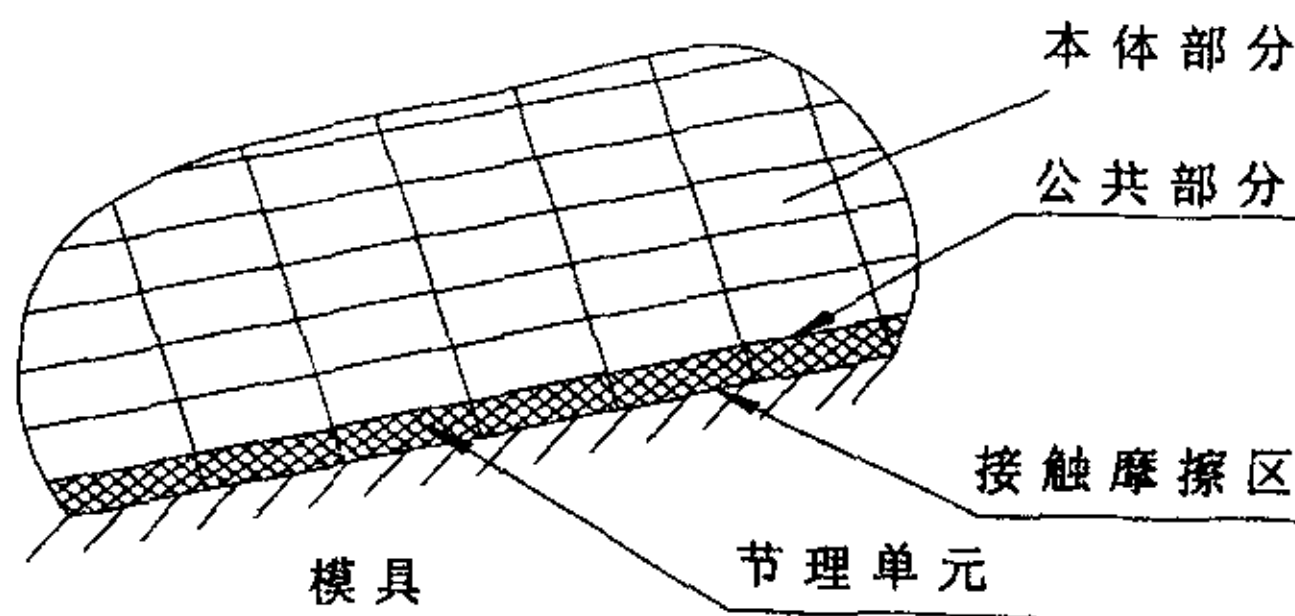


图 3.3 接触摩擦区示意图

由于整个变形节点之间的相关性, 仅仅将摩擦区和本体部分的矩阵方程进行简单的数学相加是不可行的。因此, 本文尝试了采用耦合的方法来解决这个问题。

设本体单元（不包括公共部分）的节点编号为 1, 2, …, m; 节理单元与本体单元公共部分的节点号为 m+1, m+2, …, m+t; 节理单元部分的节点编号为 m+t+1, m+t+2, …, m+2t。接触摩擦区节理单元与本体单元公共部分如图 3.3 所示。

将节理单元组装成的矩阵方程式 (3-17) 展开得:

$$\begin{bmatrix} K_{2(m+1)-1,1}^j & K_{2(m+1)-1,2}^j & \cdots & K_{2(m+1)-1,2(m+2t)}^j \\ K_{2(m+1),1}^j & K_{2(m+1),2}^j & \cdots & K_{2(m+1),2(m+2t)}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{2(m+t),1}^j & K_{2(m+t),2}^j & \cdots & K_{2(m+t),2(m+2t)}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{2(m+2t),1}^j & K_{2(m+2t),2}^j & \cdots & K_{2(m+2t),2(m+2t)}^j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{m+1}^j \\ \dot{v}_{m+1}^j \\ \cdots \\ \dot{v}_{m+t}^j \\ \cdots \\ \dot{v}_{m+2t}^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{m+1}^j \\ Q_{m+1}^j \\ \cdots \\ R_{m+t}^j \\ \cdots \\ Q_{m+2t}^j \end{Bmatrix} \quad (3-18)$$

将本体单元组装成的矩阵方程式 (2-44) 展开得:

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^n & K_{1,2}^n & \cdots & K_{1,2(m+t)}^n \\ K_{2,1}^n & K_{2,2}^n & \cdots & K_{2,2(m+t)}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{m,1}^n & K_{m,2}^n & \cdots & K_{m,2(m+t)}^n \\ K_{m+1,1}^n & K_{m+1,2}^n & \cdots & K_{m+1,2(m+t)}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{2(m+t),1}^n & K_{2(m+t),2}^n & \cdots & K_{2(m+t),2(m+t)}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1^n \\ \dot{v}_1^n \\ \dot{u}_2^n \\ \cdots \\ \cdots \\ \dot{u}_{m+t}^n \\ \dot{v}_{m+t}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1^n \\ Q_1^n \\ R_2^n \\ \cdots \\ \cdots \\ R_{m+t}^n \\ Q_{m+t}^n \end{Bmatrix} \quad (3-19)$$

根据“对号入座，同号相加”的方法将本体单元与节理单元组装好的刚度矩阵进行叠加，并再组装成整体，即可得到耦合后的整体刚度矩阵方程为:

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdots & \cdots & K_{1,2(m+2t)} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \cdots & \cdots & K_{2,2(m+2t)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{2(m+1)-1,1} & K_{2(m+1)-1,2} & \cdots & \cdots & K_{2(m+1)-1,2(m+2t)} \\ K_{2(m+1),1} & K_{2(m+1),2} & \cdots & \cdots & K_{2(m+1),2(m+2t)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{2(m+t),1} & K_{2(m+t),2} & \cdots & \cdots & K_{2(m+t),2(m+2t)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{2(m+2t),1} & K_{2(m+2t),2} & \cdots & \cdots & K_{2(m+2t),2(m+2t)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \cdots \\ \dot{u}_{m+1} \\ \dot{v}_{m+1} \\ \cdots \\ \dot{v}_{m+t} \\ \cdots \\ \dot{v}_{m+2t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ Q_1 \\ \cdots \\ R_{m+1} \\ Q_{m+1} \\ \cdots \\ Q_{m+t} \\ \cdots \\ Q_{m+2t} \end{Bmatrix} \quad (3-20)$$

上式可简写成:

$$\{R\} - \{S\} = \{0\} \quad (3-21)$$

式中,  $\{S\} = [K]\{a\}$

上式就是模拟接触摩擦的节理单元和本体单元相耦合的整体刚度矩阵方程, 以节点速度为未知量, 该方程组是非线性的, 采用增量迭代法求解节点速度。



### 3.5 非线性方程组求解

采用增量迭代法

$$\tau = t_{n+1} - t_n$$

式中  $t_n$  ——时间增量  $\tau$  步进内的起始时间

$t_{n+1}$  ——时间增量  $\tau$  步进内的终止时间

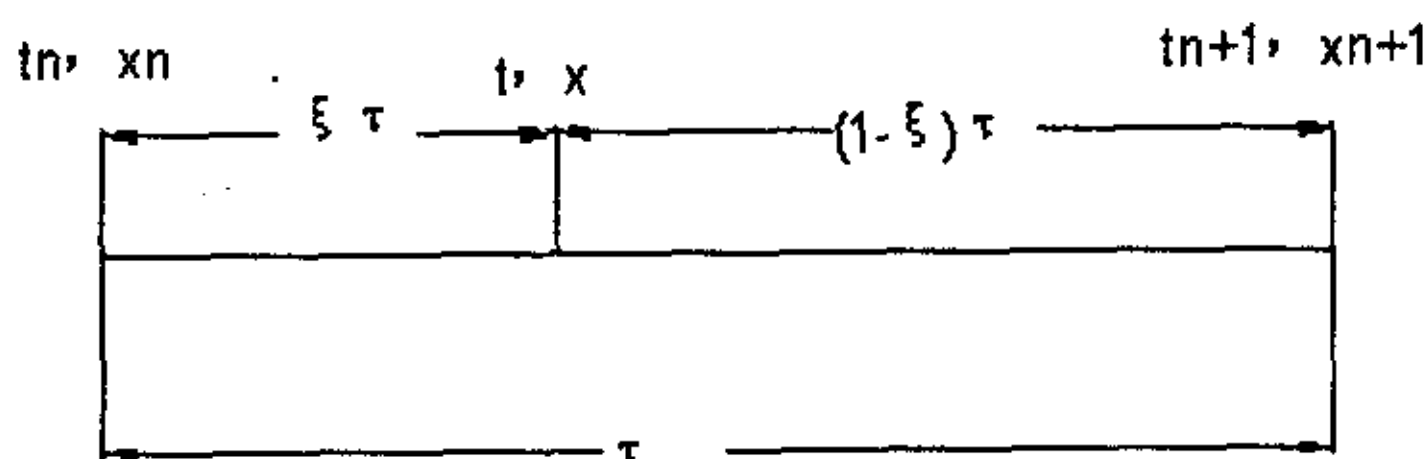


图 3.4 时间增量步进图

引入参数  $\xi$ ，且  $\xi = \frac{t-t_n}{\tau}$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ )

若用  $x$  表示  $t_n$  到  $t_{n+1}$  时间增量步进内的任一时间  $t$  点的位置，则

$$x = (1-\xi)x_n + \xi x_{n+1}$$

$t_n$  到  $t_{n+1}$  时间增量步进内的任一时间  $t$  点的速度为  $\dot{u}$ ，则

$$\dot{u} = \frac{1}{\tau}(x_{n+1} - x_n)$$

时间增量  $\tau$  内的平均速度  $\dot{u}_{cp} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau}$

这样，我们得到时间增量  $\tau$  的终点坐标值为

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \int_n^{n+1} \dot{u} dt = x_n + \tau \dot{u} \\ &= x_n + (1-\xi)\tau \dot{u}_n + \xi \tau \dot{u}_{n+1} \\ &= x_n + \tau [(1-\xi)\dot{u}_n + \xi \dot{u}_{n+1}] \end{aligned} \quad (3-22)$$

$$\text{加速度 } \alpha_v = \frac{\dot{u}_{n+1} - \dot{u}_n}{\tau} = \frac{\ddot{u}}{\tau} \quad (3-23)$$

由式 (3-22) 和式 (3-23) 可知，单元中任意坐标值  $\{x\}$  和加速度  $\{\alpha_v\}$  都可用节点速度  $\{a_e\}$  来表示，则式 (3-21) 可写成：

$$\{R(\{a_e\})\} - \{S(\{a_e\})\} = \{0\} \quad (3-24)$$

对此式采用 Newton-Raphson 迭代法进行迭代

$$\text{令 } \{F(\{a_e\})\} = \{R(\{a_e\})\} - \{S(\{a_e\})\} = \{0\}$$



$$\text{则} \quad \{\Delta a_e\}^i = -(\{K\}^i)^{-1} \{F(\{a_e\}^{i-1})\} \quad (3-25)$$

$$\text{式中, } \{K\}^i = \frac{d\{F\}}{d\{a_e\}} = \frac{\partial\{R\}}{\partial\{x\}} \cdot \frac{\partial\{x\}}{\partial\{a_e\}} - \frac{\partial\{S\}}{\partial\{x\}} \cdot \frac{\partial\{x\}}{\partial\{a_e\}} + \dots\dots$$

$i$ ——时间增量步进  $\tau$  内的第  $i$  次迭代

$$\{a_e\}^i = \{a_e\}^{i-1} + \{\Delta a_e\}^i$$

$$\text{位移增量 } \{\Delta u_{n+1}\} = \tau \{u_{n+1}\}$$

$$\text{增量终点的坐标值 } \{x_{n+1}\} = \{x_n\} + \{\Delta u_{n+1}\}$$

## 第四章 有限元模拟程序设计中关键技术问题的处理

模拟非稳态大变形金属成形问题需要进行大量的增量计算,因此,应尽量增大时间增量步长,而又不失其计算精度或过分增加速度场收敛所必须的迭代次数。目前,刚塑性有限元方法已提供了这种可能。由于金属成形过程是一种既有几何非线性又有材料非线性的复杂大变形过程,故在实际模拟过程中,会遇到一些关键的技术问题,需要进行适当的处理,否则将会影响模拟计算的结果甚至导致模拟失败。本章对滚子成形模拟程序中一些关键技术问题进行了讨论及处理,并且考虑到挤压过程是非稳态大变形过程,网格畸变严重,必须考虑网格再划分及有关历史量的传递插值问题。

### 4.1 粘摩系数的确定

在本文中,引用了节理单元对接触摩擦进行模拟。由第三章的介绍可知,计算节理单元刚度矩阵的关键在于确定 $\lambda_s$ 和 $\lambda_n$ 。由于法向速度差 $\Delta\dot{v}_n$ 变化很小,可以将初始值 $\Delta\dot{v}_{n0}$ 作为整个成形过程的 $\Delta\dot{v}_n$ ,而 $\sigma_n$ 初始值为变形材料的流动应力,随后计算可由变形材料的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线求出 $\sigma_n$ ,故 $\lambda_n$ 就可以确定。切向粘摩系数 $\lambda_s$ 的确定是比较复杂的。现假定接触摩擦区润滑剂为粘性流体,由牛顿粘性流体定律知

$$\tau_s = \mu \frac{\Delta\dot{u}}{e} \quad (4-1)$$

将式(3-5)代入上式,得

$$\lambda_s = \frac{\mu}{e} \quad (4-2)$$

式中  $\mu$ ——润滑剂动力粘度  
 $e$ ——节理单元厚度

塑性成形特别是冷塑性成形皆要对坯料进行表面处理。例如,碳钢冷挤压前要对坯料进行表面磷化处理,使其生成一层多孔的磷酸盐薄膜,以作为储存润滑剂的“仓库”,冷挤压过程中可以源源不断地供给润滑剂。该薄膜厚度经实测一般为 $1.7\text{mg/mm}^2$ 左右。此厚度可作为节理单元初始厚度 $e$ 。冷塑性成形常用润滑剂动力粘度 $\mu$ 实测值如表4.1所示。

表 4.1 冷塑性成形常用润滑剂粘度  $\mu$  ( $\times 10^{-3} Pa \cdot s$ )

| 温度<br>(°C)           | 30    | 40    | 50    | 80   | 100  |
|----------------------|-------|-------|-------|------|------|
| 润滑剂种类                |       |       |       |      |      |
| 蓖麻油+硬脂酸<br>锌         | 426.8 | 279.8 | 151.6 | 36.9 | 18.8 |
| 蓖麻油+硬脂酸<br>钙         | 412.1 | 255.5 | 142.6 | 38.1 | 19.1 |
| 蓖麻油                  | 399.1 | 202.3 | 113.3 | 29.1 | 15.2 |
| 石墨乳                  | 2.9   | 2.8   | 2.2   | 1.4  | 1.1  |
| Mo <sub>2</sub> S+机油 | 85.2  | 49.7  | 31.9  | 12.4 | 7.5  |

此动力粘度也可以作为初始粘度  $\mu_0$ ，这样初始切向粘摩系数  $\lambda_s^0$  就可算出

$$\lambda_s^0 = \frac{\mu_0}{e_0} \quad (4-3)$$

现设接触摩擦区润滑剂的抗剪强度为  $\tau_r$ ，初始切向粘摩系数为  $\lambda_s^0$ ，则切向剪应力  $\tau_s$  可用下式表示：

$$\tau_s = \Delta \dot{u} / \left( \frac{1}{\lambda_s^0} + \frac{\Delta \dot{u}}{\tau_r} \right) \quad (4-4)$$

将 (3-5) 式带入，可得

$$\frac{1}{\lambda_s} = \frac{\Delta \dot{u}}{\tau_s} = \frac{1}{\lambda_s^0} + \frac{\Delta \dot{u}}{\tau_r} \quad (4-5)$$

由式 (4-5) 可知， $1/\lambda_s$  与  $\Delta \dot{u}$  为直线关系，如图 4.1 所示，截矩为  $1/\lambda_s^0$ ，斜率为  $1/\tau_r$ ，当采用增量迭代法求解时，用式 (4-5) 就可以求出每个增量步进终了时的粘摩系数，此粘摩系数可作为下一个增量步进的起始值，如此跟踪就可以使数值模拟计算继续进行下去。

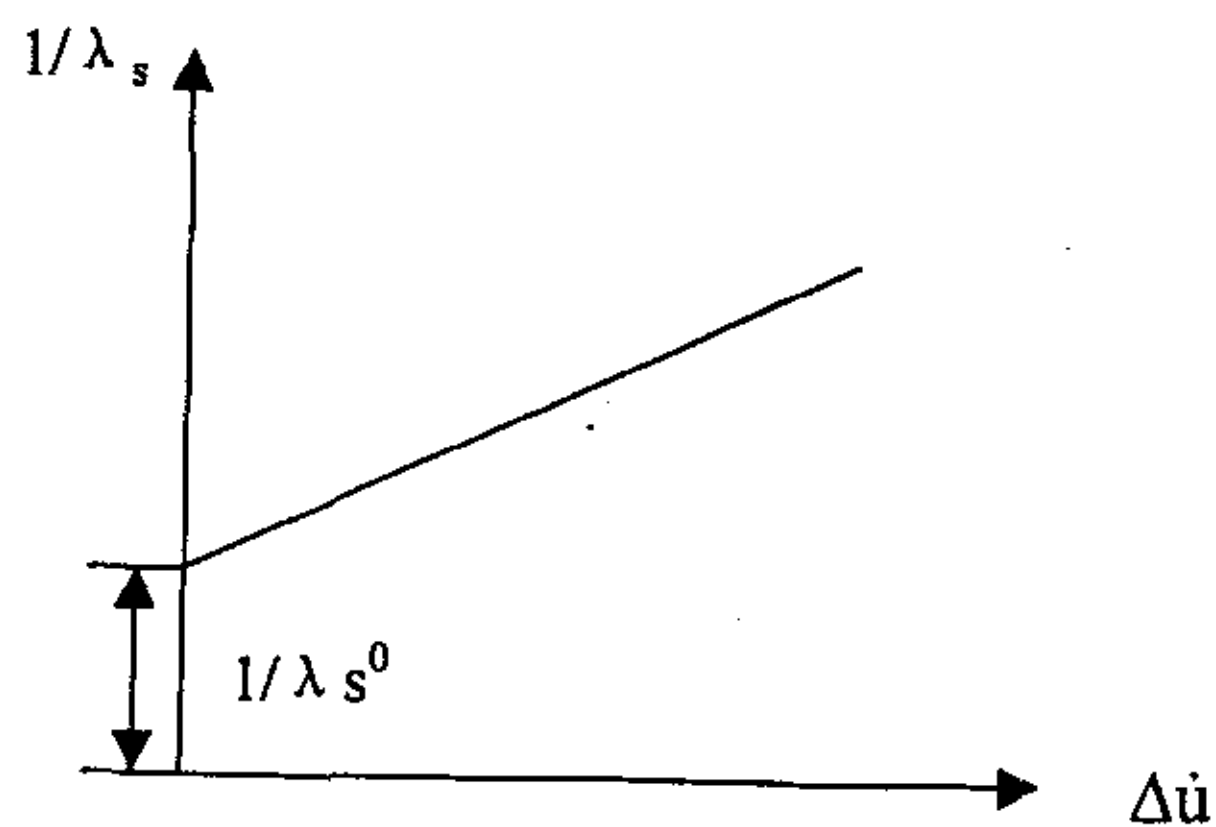


图 4.1  $1/\lambda_s$  与  $\Delta \dot{u}$  的关系



## 4.2 初始速度场获取及初始刚、塑性区划分

用 Newton-Raphson 迭代求解非线性方程组, 首先必须给定一个初始速度场。初始速度场的选取直接影响着收敛速度的快慢以及能否收敛, 若选择不合理, 往往使收敛速度降低, 迭代次数增加, 甚至导致迭代发散。

选取初始速度场常用的方法有:

### 1. 经验法或近似场法

以实验数据和经验数据作为依据, 将简单速度场模式修正后作为所求问题的初始速度场。这种方法如处理适当, 即使对于较复杂的变形情况, 收敛性也很好。但这种方法仅适用于已有一定的实验数据或一定的位移场资料的情况。

### 2. 细分单元法

先将变形体粗略划分为几个较大的单元, 以均匀速度场为初始速度场进行计算。当收敛于某一值时, 再将变形体进一步划分为几个较小的单元, 然后, 插值求出这些单元节点上的速度, 再以这个速度场作为初始速度场进行计算, 直到求得所需要的单元尺寸为止。这种逐次细分单元的方法可大大缩短计算时间。

### 3. 近似泛函求取初始速度场

从能量的观点出发, 建立一个容易求解的泛函:

$$\Pi = \sqrt{\int_V (\bar{\sigma} \dot{\epsilon})^2 dV + \frac{\alpha}{2} \int_V \dot{\epsilon}_v^2 dV + \int_{S_f} (F_i \dot{u}_i)^2 dS} \quad (4-6)$$

并对上述泛函进行一阶变分, 求解关于节点速度的一组非线性方程组, 可得到初始速度场。该方程尽管可行, 但因引入了新泛函, 增加了程序设计的工作量。

### 4. 传统算法

利用上限法、能量法或其他简单计算方法, 求出一个近似的速度场, 作为所求问题的初始速度场。这种方法适用于边界条件较为简单的情况。这些方法往往是解析性的, 只要编制简单的程序就可求得初始速度场, 本法还可以考虑摩擦的影响, 精度较好。

本文就采用了这种方法来获取初始速度场。

由于本文中采用了刚塑性模型, 不考虑弹性, 则以坯料达到稳定塑性流动阶段的时刻作为整个模拟的开始时刻。因此, 在建立初始速度场时必须对初始时刻的刚、塑性区进行划分, 然后再建立初始速度场, 具体作法如下: (模拟开始时刻的毛坯形状如图 4.2 所示)

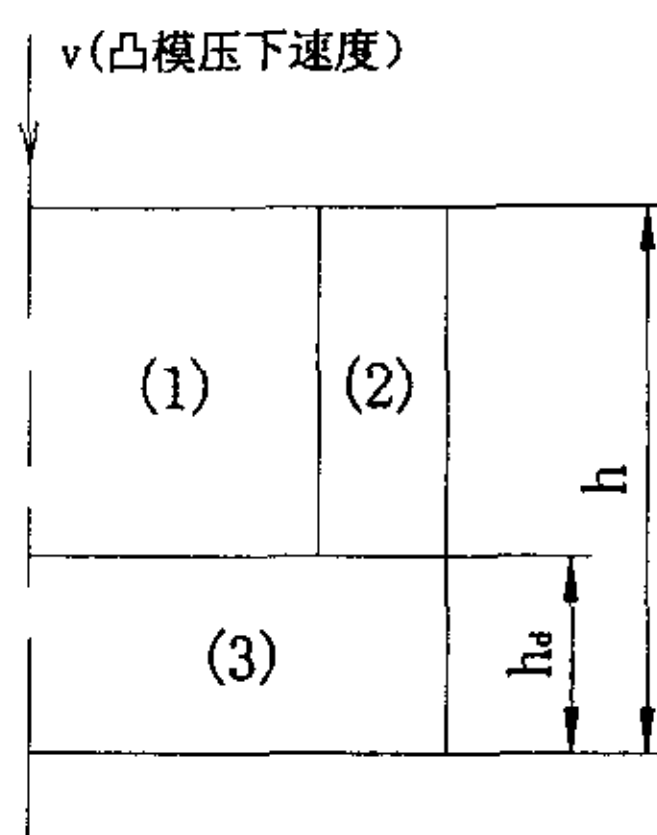


图 4.2 初始时刻毛坯的 UBET 划分图

- (1) 假定初始待变形区高度为  $h_d$ ，则塑变区高度  $h_p = h - h_d$ ，该高度待优化确定；
- (2) 将毛坯划分为图 4.2 所示的三个刚性块，假定其中的刚性块 (1)、(2) 处于塑变区，刚性块 (3) 为待变形区，确定塑变区的金属流动趋势；
- (3) 确定各刚性单元块的方向、尺寸和边界条件；
- (4) 根据各刚性单元块的边界条件并考虑到坯料与凹模型腔的摩擦作用，建立整个变形体塑性变形区上限总功率的表达式，以塑变区高度  $h_p$  作为优化变量对其进行优化计算，求得上限总功率最小时的塑变区高度  $h_p$  和各刚性块边界的速度；
- (5) 以高度  $h_p$  作为初始刚、塑性区划分的基准，假定处于高度  $h_p$  以上的区域为塑性变形区；
- (6) 假定各刚性块内的速度场均匀分布，将刚性块边界的速度向有限元法划分的各个单元的节点上进行移置，即可得到所求的初始速度场。

### 4.3 模拟过程中刚、塑性区的划分

由于 Markov 变分原理只适用于塑性区，而在金属成形过程中，变形体内刚性区与塑性区并存，且在变形过程中，刚性区与塑性区的交界面是不断变化的，故在模拟过程中需要不断的对变形体的刚、塑性区进行重新划分。本文中应以应变

速率  $\dot{\epsilon}$  作为判据对刚、塑性区进行判定：

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{\max} < \dot{\epsilon}_0 & \text{单元处于刚性区} \\ \dot{\epsilon}_{\max} \geq \dot{\epsilon}_0 & \text{单元处于塑性区} \end{cases}$$

式中:  $\dot{\varepsilon}_{e\max}$ —单元内应变速率的最大值

$\dot{\varepsilon}_0$ —给定的应变速率, 本文中假定为 0.01

#### 4.4 速度场的修正

在对非线性方程组线性化时, 做出了摄动量很小的假设, 并在化简时略去了高次微量, 但在实际计算时, 有些节点的速度增量甚至可能会比上一步的速度本身还大。因此, 为了避免由此而带来的迭代发散或收敛到异常解, 我们引入了缩减因子  $\beta$  对速度场进行如下修正:

$$\{\dot{u}\}_n = \{\dot{u}\}_{n-1} + \beta\{\Delta\dot{u}\}_n \quad (4-7)$$

式中  $\beta$ —缩减因子,  $0 < \beta \leq 1$

$\beta$  的值取决于  $\{\dot{u}\}_n$ , 一般要求  $\{\Delta\dot{u}\}_n$  中的最大值乘以  $\beta$  后不超过相对应的速度值的 20%。迭代初期, 因为场量偏差较大, 可取较小的  $\beta$  值; 当迭代进行到后期, 由于各场量已接近真实解, 速度增量很小, 则要取较大的  $\beta$  值。

#### 4.5 迭代收敛判据

刚塑性有限元的求解过程是一个反复的 Newton—Raphson 迭代过程, 通常采用速度相对误差范数作为收敛判据, 当速度增量范数  $\|\{\Delta\dot{u}\}\|$  与节点速度范数  $\|\{\dot{u}\}\|$  的比值  $e$  小于预先指定的值  $e_0$  时, 即认为速度场已收敛。

$$e = \|\{\Delta\dot{u}\}\| / \|\{\dot{u}\}\| < e_0 \quad (4-8)$$

式中:  $\|\{\Delta\dot{u}\}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{M_1} \Delta\dot{u}_i^2}$  (4-9)

$$\|\{\dot{u}\}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{M_2} \dot{u}_i^2} \quad (4-10)$$

其中,  $M_1$ ——节点速度分量增量总数

$M_2$ ——节点速度分量总数

$e_0$  一般取为  $10^{-5} \sim 10^{-4}$

本文中就采用了这个判据。



## 4.6 奇异点处理

在塑性加工问题中，常存在流动速度发生急剧变化的塑性区，在一些特殊点上，金属塑性流动方向会发生突变，我们称这些点为奇异点。

奇异点的出现会导致模拟失真，必须对其处理以减小其影响。常用的处理方法有：

### 1. 局部细分单元法

将奇异点附近区域的单元划的密一些，以便较好地反映局部的变化情况，减小速度场变化的梯度。

### 2. 将奇异点视作多速度点

这个方法是将奇异点视作由多个节点组成的复合点，各个节点有自己的速度。这种方法能满足奇异点周围的任意流动情况。但缺点是增加了单元和节点，使原来有规律的网格排列打乱了，同时增加了刚度矩阵的带宽，增加了程序的复杂性。

### 3. 将奇异点作为双速点处理

将奇异点处一个单元的接触边缩小为零，则奇异点成为一个重合点，在奇异点处重合的两点具有相同的坐标值却有着不同的速度值。

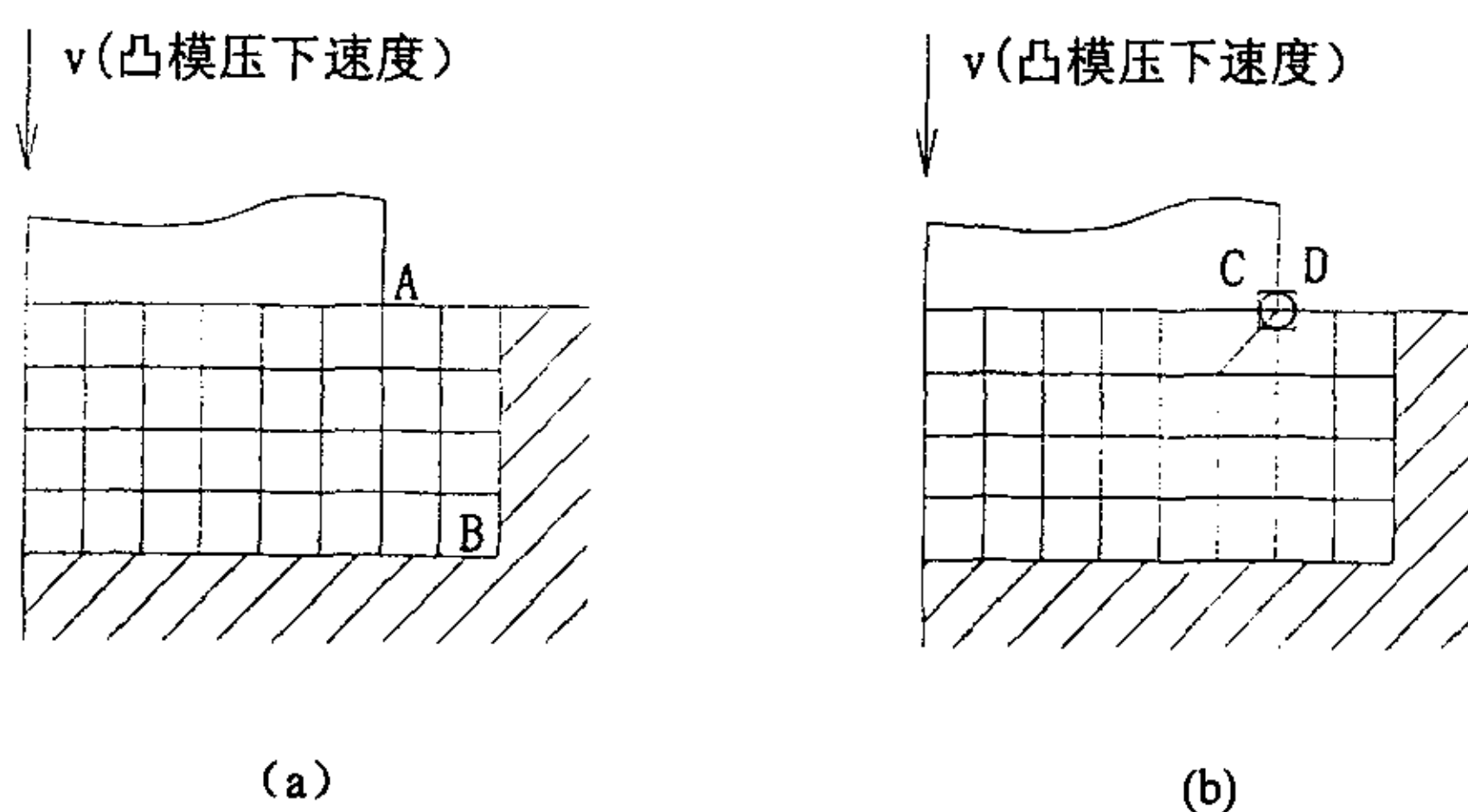


图 4.3 奇异点的处理

本文研究的链条滚子反挤压的成形过程中，如图 4.3 (a) 所示，在凸模和凹模的转角处存在奇异点 A、B。在实际成形过程中，B 处是不流动的“死区”，这样，可近似认为 B 处的值为定值。

而 A 点处金属流动比较复杂，本文中将其作为双速点处理，如图 4.3 (b) 所示。图中 C 点和 D 点具有相同的坐标值，却有着不同的运动速度。



## 4.7 网格再划分技术

由于反挤压过程变形量很大, 只用一个有限元网格系统难以适应变化较大的变形模式, 单元形状将会出现严重畸变, 这种剧烈的局部变形使等参变换的雅可比行列式的值出现负值或零, 因而难以保证结果的精度, 甚至无法继续计算下去。

对于本文研究的滚子反挤压成形过程, 若用初始的网格系统, 只能模拟挤压过程开始时的金属流动情况, 而随着挤压过程的进行, 初始网格难以完成对网格畸变后的金属流动及应力应变分布状态的模拟。

为了解决上述问题, 必须重新定义网格系统, 即网格再划分。网格再划分处理过程包括以下几步<sup>[44-47]</sup>:

- (1) 网格畸变程度判断准则
- (2) 在工件的当前轮廓内, 生成一个单元疏密程度合理的新网格系统
- (3) 对新旧网格进行包含测试和判断
- (4) 新旧网格系统之间有关信息的传递

### 一、网格再划分的判断准则

网格再划分判断的基本准则是: 保证有限元计算在当前的网格系统下能继续进行下去, 而且要保证一定的精度。网格畸变的判断准则有很多, 对于四边形四节点等参元通常是从坐标转换和积分换元等方面进行考虑。

为了保证坐标变换式(2-25)能进行下去, 就必须使变换矩阵, 即 Jacobian 矩阵行列式 $|J|$ 在整个单元上均不等于零, 即

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4-11)$$

由于四节点四边形单元的双线性特性, 则四节点的 $|J|$ 必然同号。设 $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ 为单元相邻两边,  $\theta_i$ 为其夹角, 则:

$$|J| = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \theta \quad (4-12)$$

又因为:

$$\sum_{i=1}^4 \theta_i = 2\pi \quad (4-13)$$

所以, 要使 $|J|$ 在各点的符号相同, 则 $|J| > 0$ 时,  $0^\circ < \theta_i < 180^\circ$ ; 当 $|J| < 0$ 时,

在  $\theta_i > 180^\circ$  的图形附近, 图形由右手坐标系变成左手坐标系, 致使变换失真; 当

$|J| = 0$ , 微分变换  $dxdy = |J|d\xi d\eta$  不能确定。所以, 保证有限元计算能够继续下

去的畸变准则是 Jacobian 行列式的值大于零。对于四边形四节点等参元, 即要求该单元为凸四边形, 四边形内角必须满足:

$$0^\circ < \theta_i < 180^\circ \quad (4-14)$$

当单元内角接近  $0^\circ$  或  $180^\circ$  时, 单元网格已产生很大的变形, 等参变换的精度严重下降。在实际中一般取  $30^\circ < \theta < 150^\circ$ 。

## 二. 生成合理的新网格系统

新网格系统应满足:

- (1) 保证变形体边界不改变, 能够真实的反应变形形状
- (2) 新网格系统下的单元应尽量接近母单元的形态
- (3) 尽量使新网格的半带宽减小, 减小工作量

## 三. 新旧网格系统的包含测试

在进行新旧网格的信息传递之前, 必须首先进行新旧网格的包含测试。包含测试就是要确定新网格节点及新网格形心位于旧网格系统中的什么位置。

包含测试的方法很多, 本文中介绍一种简单的方法。

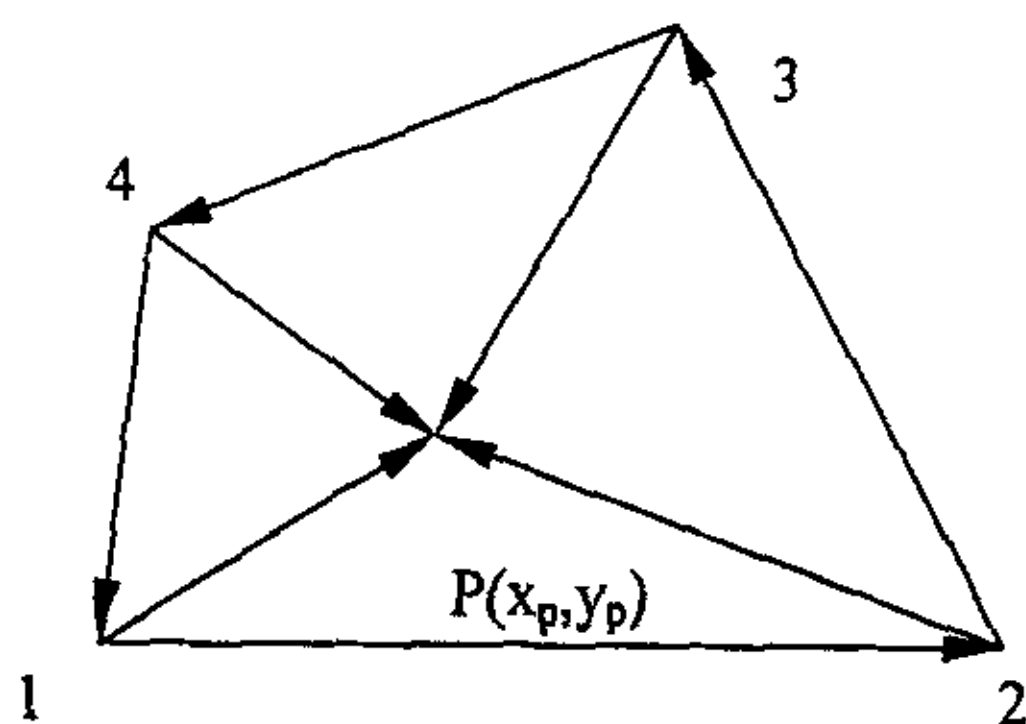


图 4.4 包含测试示意图

如果按逆时针方向排列单元节点, 那么若被检测点  $p(x_p, y_p)$  落在该单元内部, 则必有:

$$\phi = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad (4-15)$$

式中  $i = 1, 2, 3, 4$  ( $i = 4$  时, 定义  $i+1 = 1$ )

如果  $\phi_i = 0$ , 则  $P$  点刚好落在由节点  $i$  和节点  $i+1$  所决定的边界上, 而这条边

界可能是两个单元的公共边界，但是由于变量转换后，各场量在整个变形体内为连续场，那么可将  $P$  点归于两个单元中的任何一个，而不影响各场量的传递性。

#### 四. 新旧网格系统间的信息传递

新旧网格系统间的信息传递就是将旧网格中的信息(如速度, 边界值信息等)以及旧单元形心信息(如等效应变等)传递给新网格系统的节点和形心。

##### 1. 旧网格节点信息向新网格节点的传递

设新节点的信息为  $f_i$ , 旧节点的信息为  $f_j$ , 新节点  $i$  所在旧单元内的局部坐标为  $(\xi_i, \eta_i)$ , 旧节点局部坐标值为  $(\xi_j, \eta_j)$ , 转换式为:

$$f_i = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi_j) (1 + \eta_i \eta_j) f_j \quad (4-16)$$

$(i=1, 2, 3, 4)$

坐标的等参变换式为:

$$x_i = \frac{1}{4} [(1 - \xi)(1 - \eta)x_1 + (1 + \xi)(1 - \eta)x_2 + (1 + \xi)(1 + \eta)x_3 + (1 - \xi)(1 + \eta)x_4]$$

$$y_i = \frac{1}{4} [(1 - \xi)(1 - \eta)y_1 + (1 + \xi)(1 - \eta)y_2 + (1 + \xi)(1 + \eta)y_3 + (1 - \xi)(1 + \eta)y_4] \quad (4-17)$$

##### 2. 等效应变值的传递

旧单元四节点四边形等参元, 由于采用了降阶积分, 故单元应变值等于单元形心处的值。因此, 需要将旧单元形心处的应变值插值到单元节点上, 然后再由式(4-16)确定新单元形心处的值。

形心向节点的插值, 采用面积加权平均方法, 如图 4.5 所示。节点  $i$  的等效

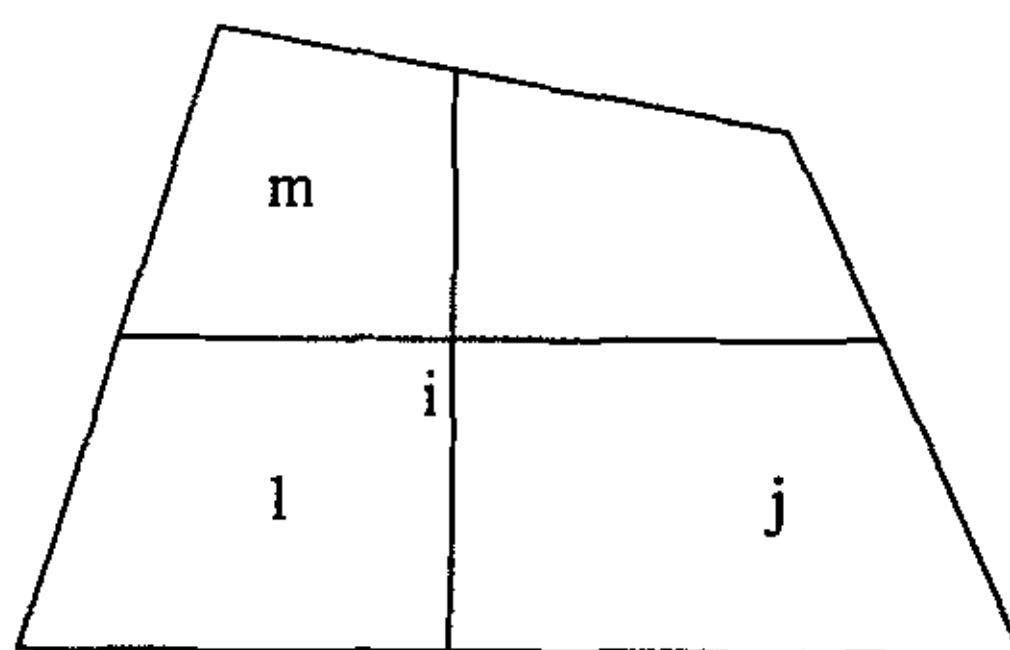


图 4.5 等效应变插值方法

应变值可由下式确定:

$$\bar{\varepsilon}_i = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{\varepsilon}_j^0 A_j}{\sum_{j=1}^m A_j} \quad (4-18)$$



式中,  $\bar{\varepsilon}_i$  ——新网格节点  $i$  的场变量

$\bar{\varepsilon}_j^0$  ——第  $j$  单元的场变量

$A_j$  ——旧网格中包围新节点  $i$  的单元面积

新旧网格系统之间的信息传递是网格再划分中造成计算误差的主要来源, 因此, 应尽可能地减少再划分的次数。

### 有限元程序系统开发及模拟研究

有限单元法的程序总体可分为三个部分：前处理部分；有限元分析本体程序；后处理部分。

有限元分析本体程序是有限元分析程序的核心，它根据离散模型的数据文件进行有限元分析。有限元分析的原理和采用的数值方法集中于此，因此它是有限元分析准确可靠的关键，选用计算方法的合理与否决定了有限元分析程序的计算效率和结果的精度及可靠性。

离散模型的数据文件主要应包括：离散模型的节点数及节点坐标；单元数及单元节点编码；载荷信息等。对于一个实际的工程问题离散模型的数据文件十分庞大，靠人工处理和生成一般是不可能的，除工作量大外，还不可避免的出现数据错误，包括数据精度的不足。为了解决这一问题，有限元分析程序必须有前处理程序。前处理程序是根据使用者提供的计算模型外形及网格要求的简单数据描述，自动或半自动的生成离散模型的数据文件，并生成网格供使用者检查和修改。这部分程序的功能很大程度上决定了程序使用的方便性。

同样，有限元分析程序的计算结果也是针对离散模型得到的。为了能对程序运算结果有一个更直观形象的了解，以及对变形体的变形情况进行分析，要求有限元分析程序不仅要有可供选择输出内容的文本文件，还需有结果的图形显示，如位移图、等应力线图或截面应力分布图等。这部分程序称后处理程序，与前处理程序相似，对程序使用的方便有举足轻重的作用。

本文根据链条滚子的成形特点，针对成形过程中的关键工序——反挤压工序，运用 FORTRAN 语言编制了一套刚塑性有限元应用程序系统。由于本文引入节理单元模拟接触摩擦，程序系统将是把刚塑性本体部分与节理单元部分进行耦合的一套程序。该系统采用结构化程序的设计方法，由多个相对独立的功能模块组成，这使得本程序系统具有结构清晰、可读性和可维修性较好的特点。

#### 5.1 有限元分析程序前处理部分

数值模拟的初期，一般需对变形体进行初始网格划分，以便获得网格节点的初始坐标值。划分网格有两种方法：一种是人工输入各个节点的坐标值，该法数据输入量大，易于产生输入错误；第二种是由计算机自动生成，方法是告诉计算机一些控制网格疏密程度的信息，如第一个节点的坐标位置，各个节点的横向、纵向间隔，这主要适于规则形状的均分网格，本文采用这种方法进行四边形四节

点网格的划分。如果变形的轮廓形状并不规则，可先人工将其划分成几个比较规则的区域，每个区域给出一些控制网格疏密程度的参数，然后让计算机自动生成网格。

### 一. 模拟的原始条件及数据

本文分析链条滚子冷反挤压变形，如图 5.1 所示。

毛坯尺寸为  $\phi 7.8 \times 2.44$  (mm)

材料：20 号碳钢

挤压时压力机速度：-1mm/s

变形条件：不计弹性变化，采用刚塑性模型。

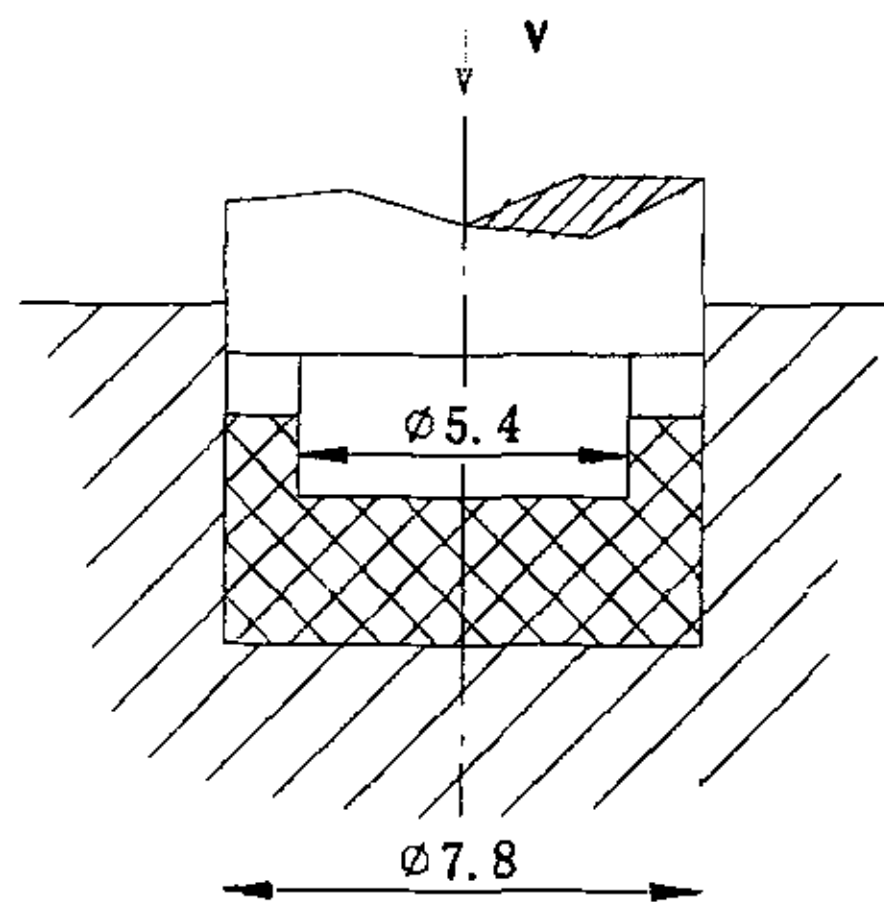


图 5.1 反挤压示意图

### 二. 数学模型的建立

原始网格的划分如图 5.2 所示。

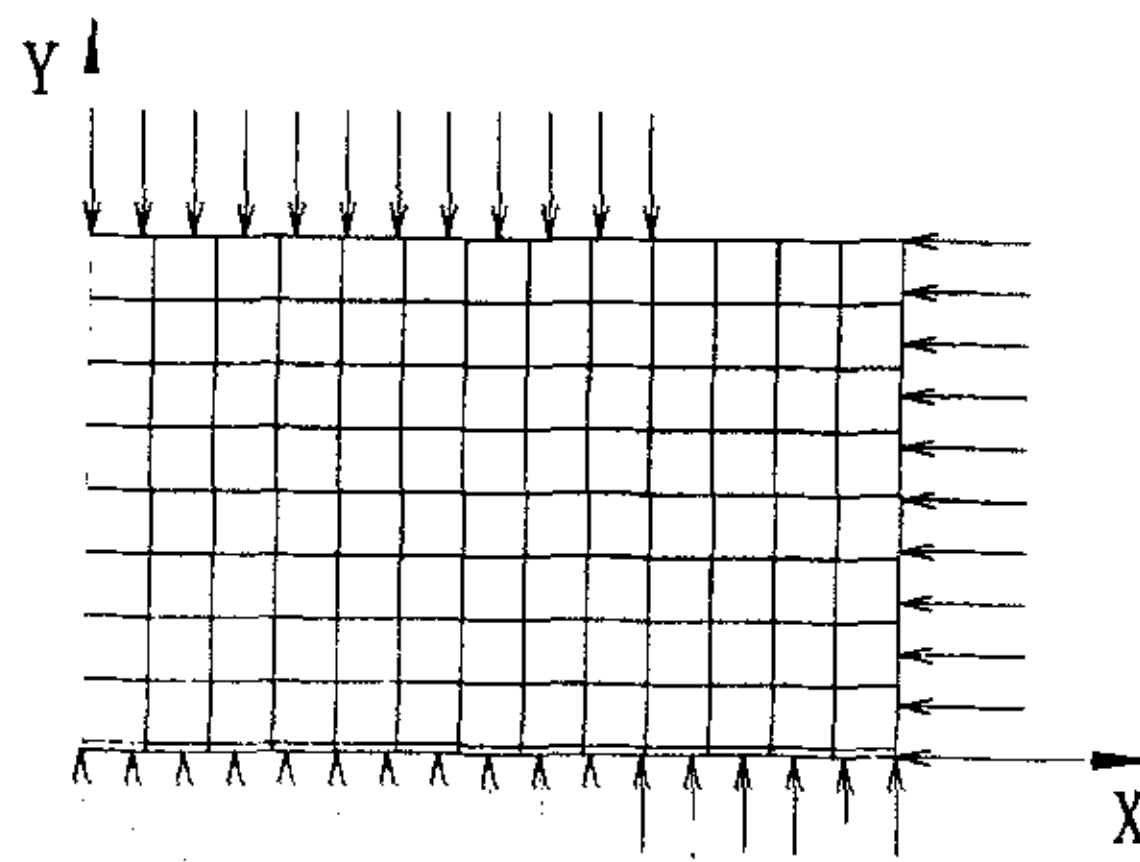


图 5.2 反挤压的数学模型  
(图中箭头表示边界约束)



本文将轴对称问题简化为平面问题进行模拟，并取滚子的一半（右边）变形体作为研究对象，可知变形体对称轴上不产生横向位移。又由于挤压模刚度较大，对于变形体与凹模内壁接触部分，可以近似认为  $x$  方向不产生横向位移，底部接触部分  $y$  方向不产生纵向位移。顶部由于凸模下压，产生向下的流动速度。因此，可将变形过程简化为如图 5.2 所示的数学模型。

## 5.2 有限元分析程序本体部分

本程序系统的结构流程图如图 5.3 所示。

程序本体部分可根据前处理程序建立的基本数据，包括变形体的尺寸、网格划分信息、总压下量、材料常数、步长划分、受力信息输入等，自动运行模拟连续下压过程，直到达到给定的压下量为止，并可根据需要提供任意时刻的各种场量信息，具体流程如下：

1. 输入基本数据及控制参数；
2. 自动划分网格，计算单元信息（包括节理单元的初始信息）；
3. 形成初始速度场；
4. 计算总压下步数，将场量清零；
5. 按下次数循环；
6. 前置处理：包括单元应变量的计算并叠加，单元流动应力计算，节理单元初始粘摩系数的计算等；
7. 调用主体模块进行单元分析、引入边界条件、总装耦合方程组，采用 Newton-Raphson 迭代求解，直至收敛；
8. 根据收敛速度场计算应力、应变场，修正网格节点坐标；
9. 判断压下次数是否循环完毕，如循环完毕，转第 10 步，否则转第 5 步继续运行；
10. 根据控制参数，决定是否需要计算某一时刻的相关场量；
11. 结束。

## 5.3 耦合程序系统主要功能模块说明

### 1. 主程序模块 main

系统的主程序，功能为建立输入、输出文件并调用主子程序 mainsub。

### 2. 主子程序 mainsub

读入收敛判据常量，压下速度、压下量、总步进数、材料常数等数据，并调入各功能子模块，控制程序走向，完成数值模拟全过程。

### 3. 网格自动划分模块 input



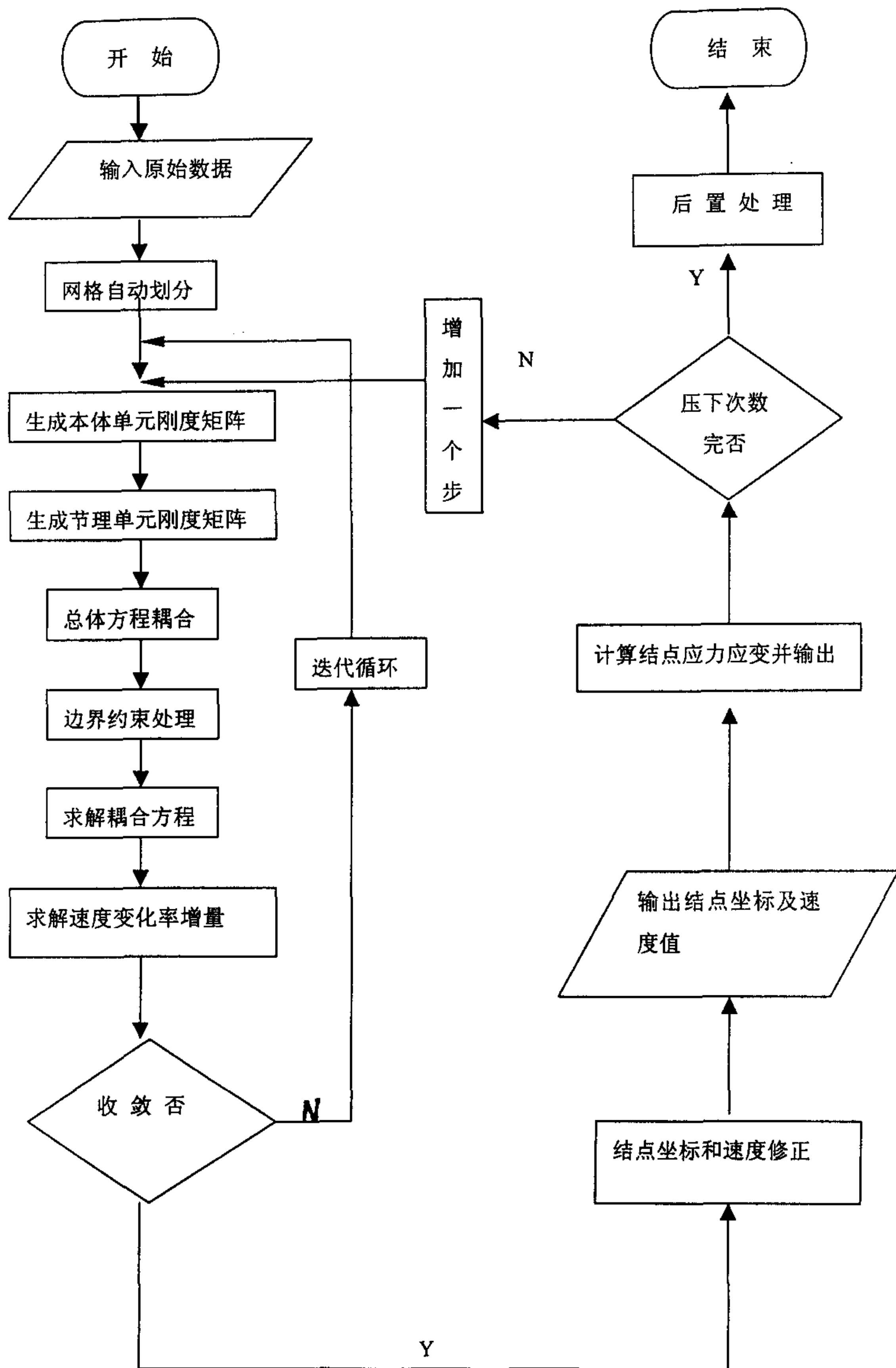


图 5.3 程序系统流程图

从数据文件读入需要输入的初始单元节点编号、节点的坐标值及节点坐标增量值，再根据单元类型及变形体的几何尺寸，自动生成各单元的节点号和各节点的坐标值，并将结果以数据文件备份输出。

4. 初始速度场生成模块 ivf

计算初始速度场，以使用增量迭代法对耦合方程组求解。

5. 初始刚、塑性区划分模块 divide

采用 UBET 法对模拟初始时刻坯料的刚、塑性区进行划分。

6. 计算等效节点载荷模块 load

计算等效移置后的节点载荷，以求出力平衡方程式中的  $\{R\}$ 。

7. 耦合方程组生成模块 zz

计算出平衡方程式中的  $\{S\}$ ，从而得到耦合方程组。

8. 迭代矩阵计算模块 zgg

计算  $\partial\{F\}/\partial\{\dot{u}\}$ ，并将它们组装起来，得到整体矩阵。

9. 逆矩阵计算模块 zggn

采用列主元高斯消去法，对上面得出的矩阵求逆。

10. 迭代子程序 ddz

引入速度边界条件，对整体方程组用 Newton-Raphson 迭代公式进行计算。

11. 速度收敛判断模块 sj

通过对缩减系数  $\beta$  进行自动修正，保证迭代计算过程收敛。在迭代过程中， $\beta$  由小变大，直至取 1。

12. 自动生成速度约束模块 setarest

根据单元节点的位置及相应的判定条件，自动生成速度边界约束值。

13. 应力、应变计算模块 stregauss

计算各单元节点的应力、应变和应变率，并以数据文件的形式输出。

14. 刚、塑性区划分模块 redivide

根据相应的判定条件对模拟过程中变形体的刚、塑性区不断进行重新划分。

15. 等效节点载荷模块 reload

对模拟过程中变形体的等效节点载荷进行重新加载。

16. 网格绘制模块 wgl

通过建立与 AUTOCAD 的接口文件，自动绘制出反挤压成形模拟过程中任意指定时刻的网格变形图。

17. 等值线绘制模块 isoline

根据已计算出的各网格节点上的场量值，建立 AUTOCAD 的接口文件，自动绘制出某一等位值的等值线。

节理单元与刚塑性本体单元耦合有限元程序系统见附录 (I)。

## 5.4 有限元分析程序后处理部分

后置处理的目的是把数值模拟程序计算所得的数据结果绘制成图形直观的表达出来。这些图形包括网格变形图、应力应变等值线图、挤压力与行程曲线图等。

### 一. 后处理部分程序说明

等值线的绘制主要包括数据采样、等值线跟踪、计算机绘图输出三个方面。

#### 1. 数据采样

为了绘制等值线，必须先在全场范围内对等值线进行合理采样，得到一系列等值点，据此才能进行等值线的跟踪，绘制出等值线。本系统对应变场、应力场模拟结果是离散在单元节点上的，为此，本文将单元节点作为数据采样点，不需另行设置，充分利用了系统的资源。

#### 2. 等值线的跟踪

根据离散的值点 $(x_i, y_i)$ 及场值 $V_i (i = 1, NP)$ ，绘制等位值为 $V_c$ 的等值线 $C$ ，即

$$V(x, y) = V_c$$

可通过先求出等位值为 $V_c$ 的一系列等值点，然后设法将这些点光滑的连接起来即可得到等值线 $C$ 。而等值点的搜索获取，可采用一种基于三角形网格划分的等值线跟踪算法。该算法的特点是采用三角形网格划分，易于处理不规则区域和边界，适合于有限元数据处理。本文根据该方法的基本原理，结合自身特点，完善了某些局部功能，编制相应的程序，其基本原理如下：

首先将计算区域进行三角形网格化，其方法是通过连接四边形的对角线，将四边形四节点单元转化为三角形三节点单元。

然后对所有节点进行遍历，搜索出等位值的最大值 $V_{MAX}$ 及最小值 $V_{MIN}$ ，并根据读入的等位值个数 $K$ ，计算出等高距

$$H = (V_{MAX} - V_{MIN}) / (K + 1)$$

进一步对 $K$ 循环，可计算出每一等位值。根据每一给定的等位值 $F$ ，即可进行等值线的判断、跟踪及连接。

对所有单元进行循环，判断各单元是否存在等值点。等值点的判断准则如下：

设单元的三个顶点分别为 $i, j, k$ ，对应的节点分别为 $V_i, V_j, V_k$ ，对于一给定的等位值 $F$ ，单元中是否存在等值点可分为下面三种情况（在此假设应力、应变等场量在单元内是线性分布的）：

(1)  $(V_i - F)(V_j - F) < 0$ ，如图 5.4.1，则在边 $\overline{ij}$ 上必存在一等值点，且单元

的 $\overline{ik}$ 或 $\overline{jk}$ 边上也必定存在一等值点。



(2)  $(V_i - F)(V_j - F) = 0$ ，如图 5.4.2，则等值线通过节点  $i$  或  $j$ ，为了便于等值点的跟踪，此时不妨将  $V_i$  加上一小增量  $\delta$ 。

(3)  $(V_i - F)(V_j - F) > 0$  且  $(V_i - F)(V_k - F) > 0$  (或  $(V_j - F)(V_k - F) > 0$ )，如图 5.4.3，则单元中不存在等值点。

每找到一存在等值点的单元  $KEM$ ，将变量  $L$  的值自动加一，并建立一个链表式数据结构。建立数组  $LE, MI$ ，在数组  $LE$  的第  $L$  行的第 1 列存放单元号  $KEM$ ，第二列存放单元  $KEM$  的状态信息。若  $LE(L, 2) = 1$ ，表示单元未被连接，反之，则表示单元已被连接。在数组  $MI$  的第  $KEM$  行的第 1 列存放  $KEM$  单元在  $LE$  数组中的位置，即行号  $L$ ，第二列存放等值线经过单元后将要进入的下一单元，即完成等值线的跟踪。

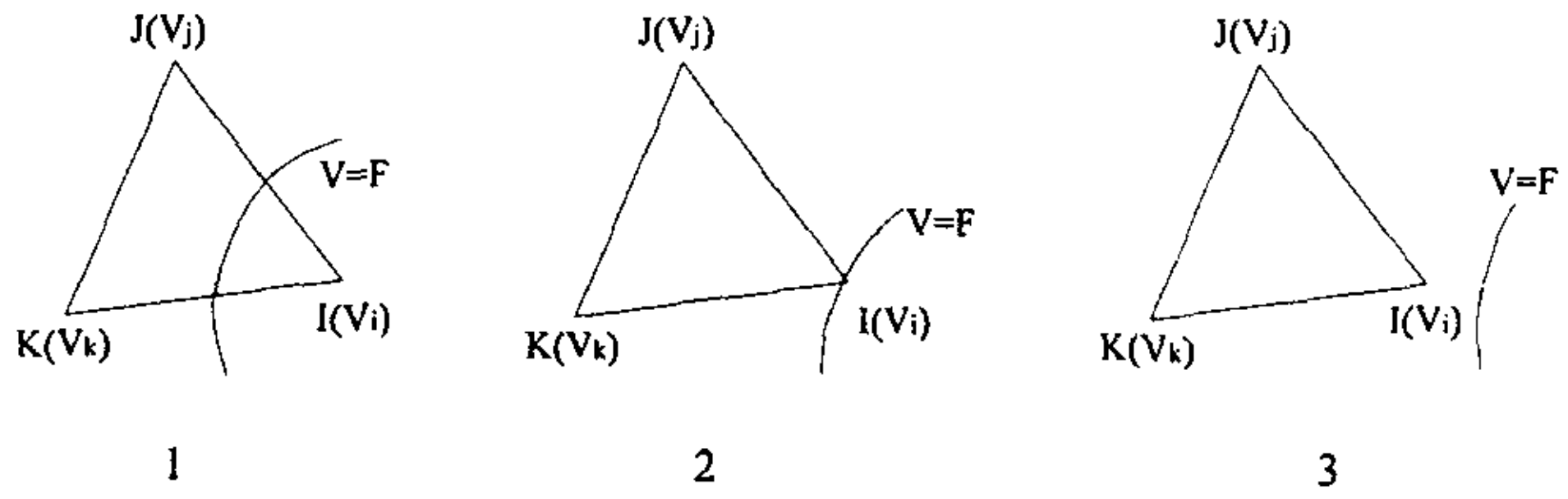


图 5.4 三角形是否存在等值点的三种情况

为了便于实现等值点的跟踪，避免等值线走向的多义性，可作如下规定：沿等值线的走向，高度低的节点总是位于等值线的左侧。在图 5.4.1 所示的情况，若：

$$V_i < F, \text{ 而 } V_j > F, V_k > F$$

则  $\overline{ij}$  为等值线的起始边， $\overline{ik}$  为终止边。可用数组  $NI(NELEM, 3)$  存放按上述规定重新排列的单元的三个节点号，对上述情况

$$NI(KEM, 1) = i, NI(KEM, 2) = j, NI(KEM, 3) = k$$

在数组  $NI$  的基础上，就可确定  $MI$  数组，其依据是单元  $KEM$  的终边，必定和  $MI(KEM, 2)$  单元始边重合。若找不到一个这样的单元，则  $MI(KEM, 2) = 0$ 。

等值点的跟踪工作完毕之后，就可进行等值点的连接，此时需要求出等值点的坐标， $\overline{ij}$  边上的等值点坐标可按下式计算：

$$x = x_i + \frac{x_j - x_i}{v_j - v_i} (F - V_i)$$

$$y = y_i + \frac{y_j - y_i}{v_j - v_i} (F - V_i)$$

根据等值线的性质，始于边界边的等值线必终止于边界边，否则，必在变形体内自行封闭。为使一条等值线一次连接成功，必须先从始于边界的等值线开始，并将已连接的单元的状态参数置零，直到所有始于边界的等值线连接完毕，方可进行内部等值线的连接。

可采用如下方法判断单元 KEM 的起始边是否位于边界上：建立数组 V 代表环绕该节点的单元数，并且设

$$M1 = NI(KEM, 1), M2 = NI(KEM, 2), M3 = NI(KEM, 3)$$

$$\text{如果 } V(M1) \leq 5, \quad V(M2) \leq 5$$

$$\text{且 } V(M3) \geq V(M1), \quad V(M3) \geq V(M2)$$

则单元 KEM 的起始边  $\overline{M1M2}$  必位于边界上。

此时，将单元 KEM 的状态参数置零，再由 MI(KEM, 2) 找到下一单元进行连接，重复等值点坐标计算和状态参数置零的过程，直到找到某一单元（设为单元 J）的下一单元为零，即 MI(J, 2)=0 时，表示等值线已行进到终点。计算 J 单元终边上的等值点坐标，将所有等值点用光滑曲线连接，即可得到一条始于边界边的等值线。

所有始于边界的等值线连接完毕后，就可进行内部等值线的连接。此时，只需找到一状态参数为 1 的单元，重复进行上述的坐标计算，单元置零和寻找下一单元的过程，最终必将回到初始单元，此时将所有等值点用光滑曲线连接，即可得到一条在变形体内部封闭的等值线。

当所有存在等值点的单元的状态参数均为零时，对应等位值的所有等值线均已连接完毕，后处理部分程序运行结束。

## 二. 数值模拟程序结果图

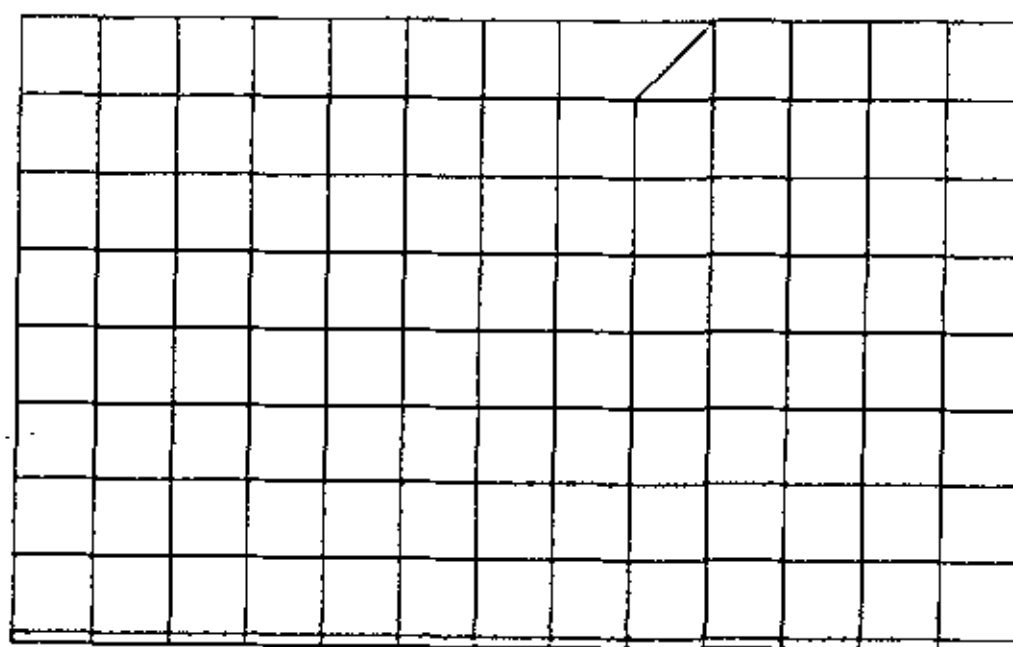
### 1. 网格变形图

有限元数值模拟过程中，随着压力机的压下，初始网格也在不断地发生变化。在整个模拟过程的任一时刻，都对应着不同的网格变形图。通过后处理程序与 AUTOCAD 的接口文件，可得到每一步下压的网格变形图，如图 5.5 所示。

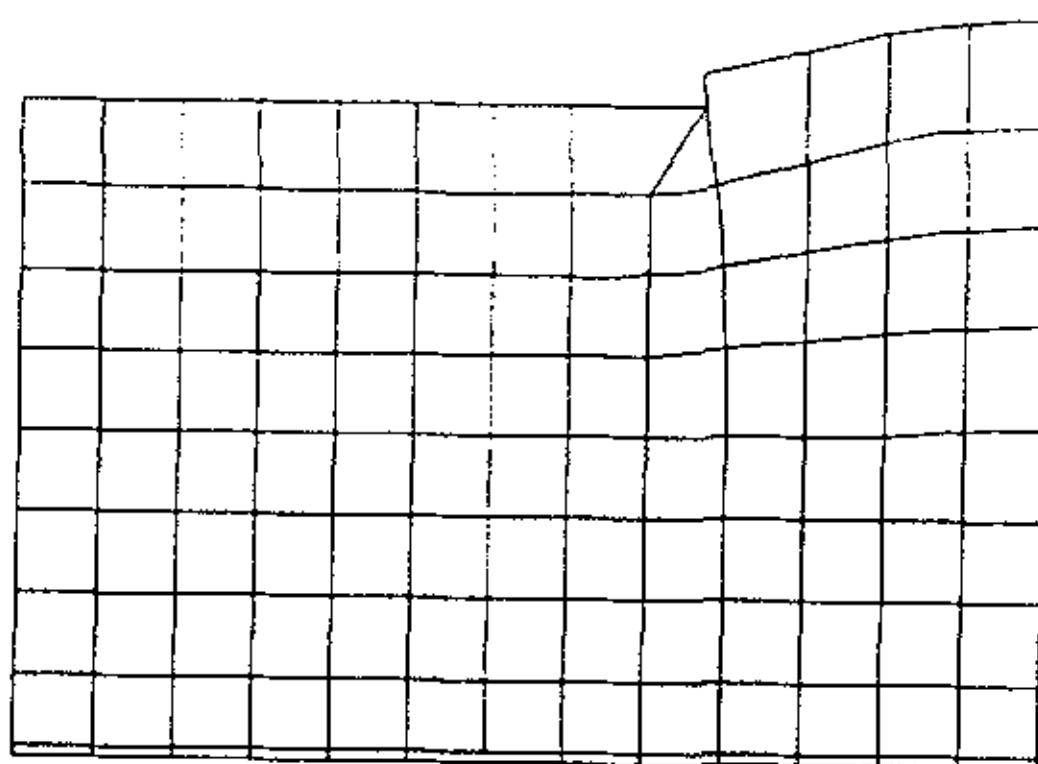
### 2. 应力应变等直线图

本文根据模拟系统研究分析的要求，编制了处理各种场量即绘制其等值线的

通用程序。图 5.6~图 5.15 表示了压下量为 0.2mm 时的各场量等值线图。

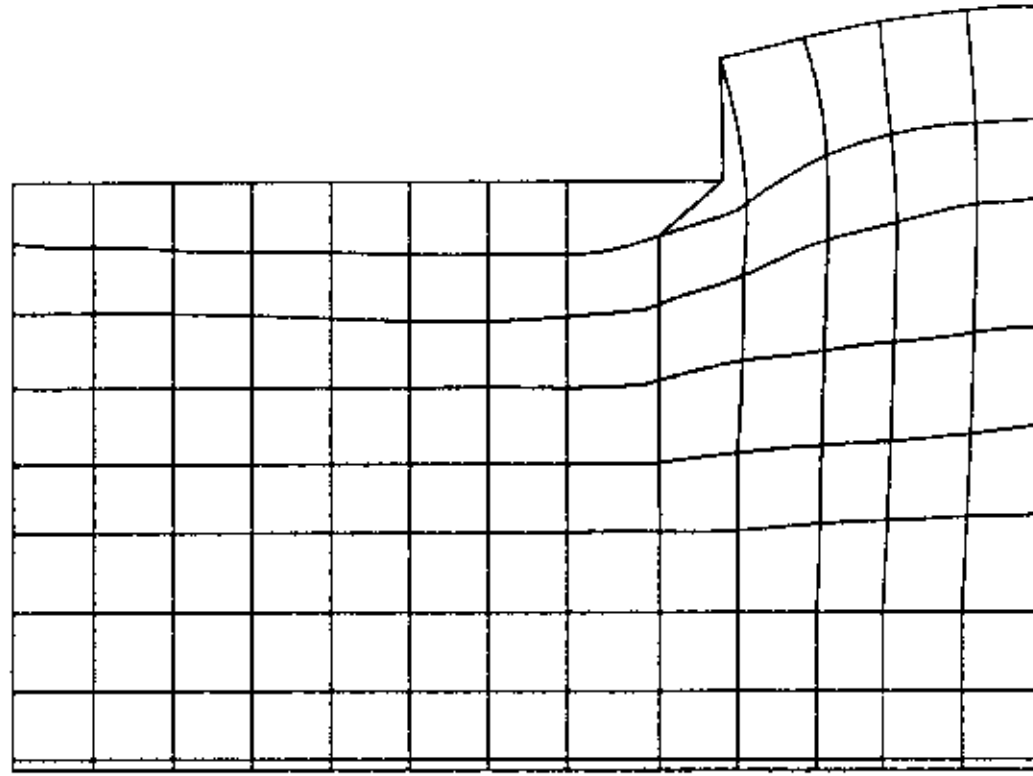


(a) 压下量为 0mm

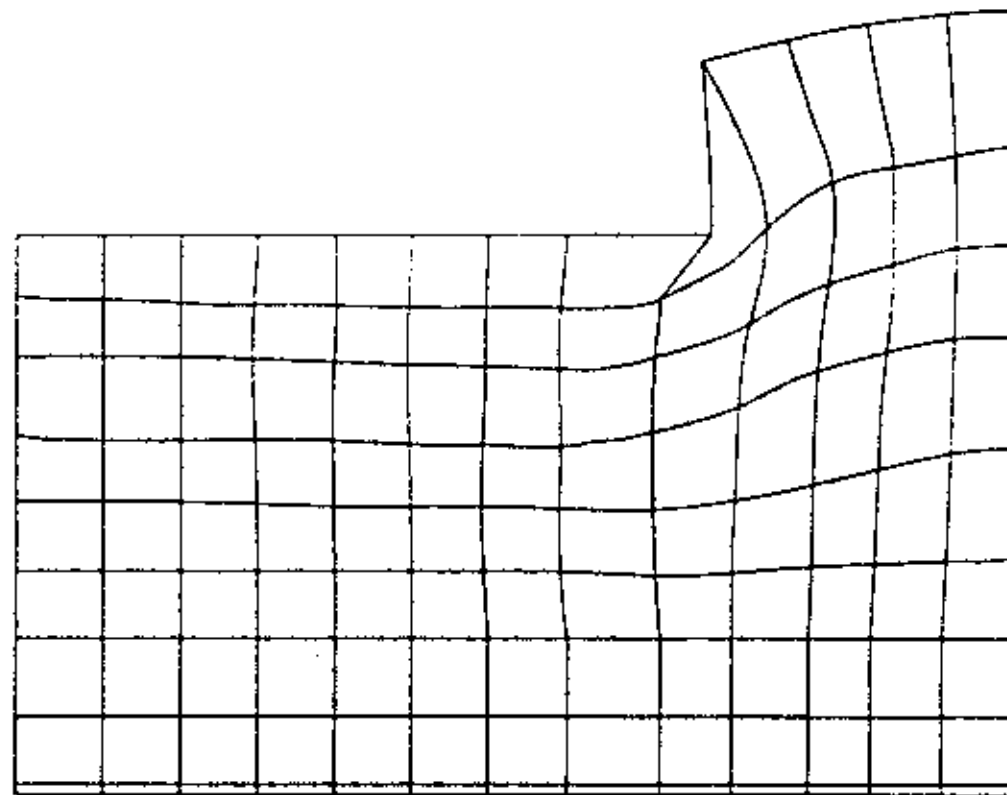


(b) 压下量为 0.1mm





(c) 压下量为 0.2mm



(d) 压下量为 0.3mm

图 5.5 网格变形图



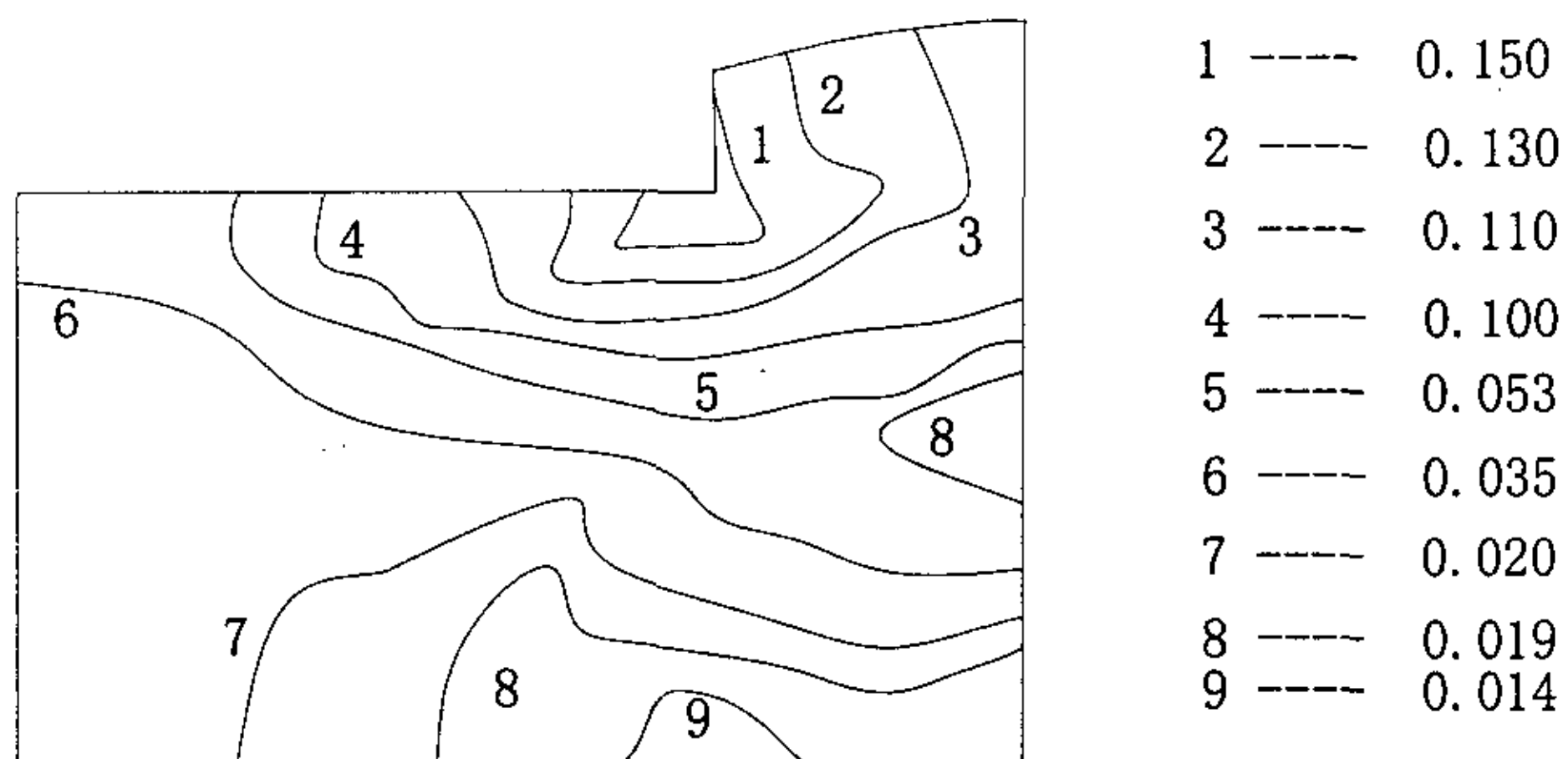


图 5.6 等效应变率  $\dot{\varepsilon}$  等值线图

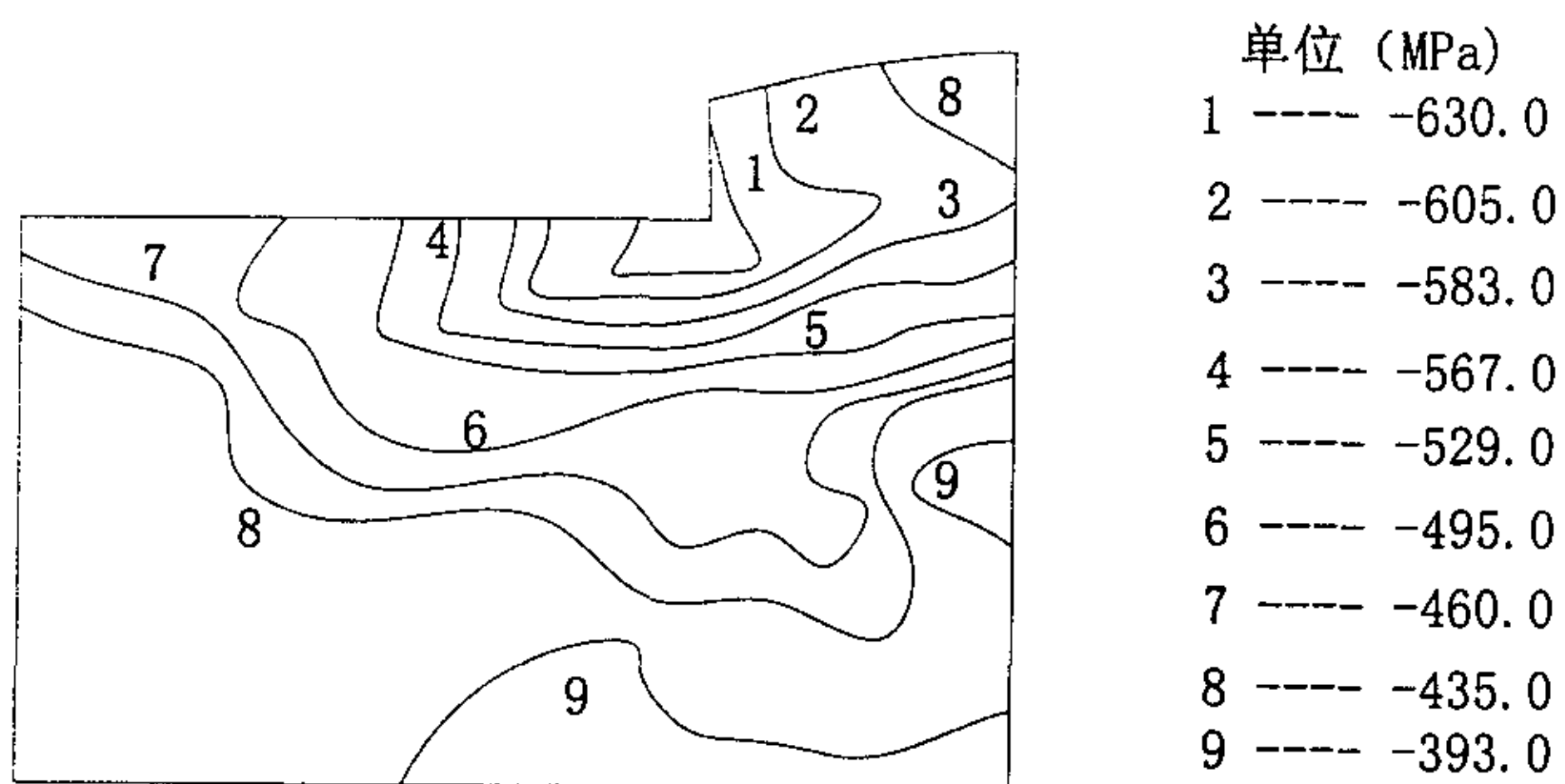


图 5.7 等效应力  $\bar{\sigma}$  等值线图

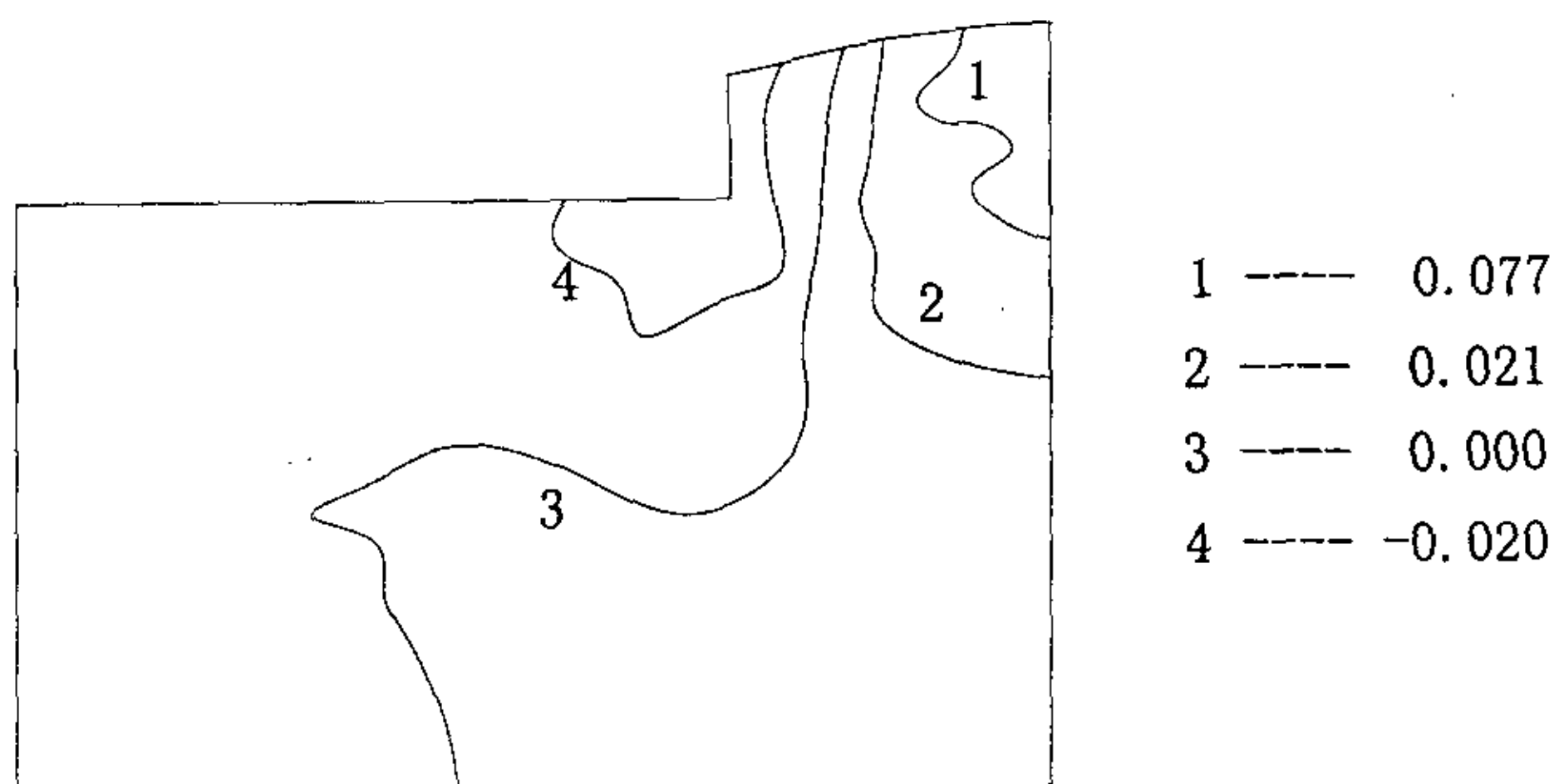


图 5.8  $\dot{\varepsilon}_x$  等值线图

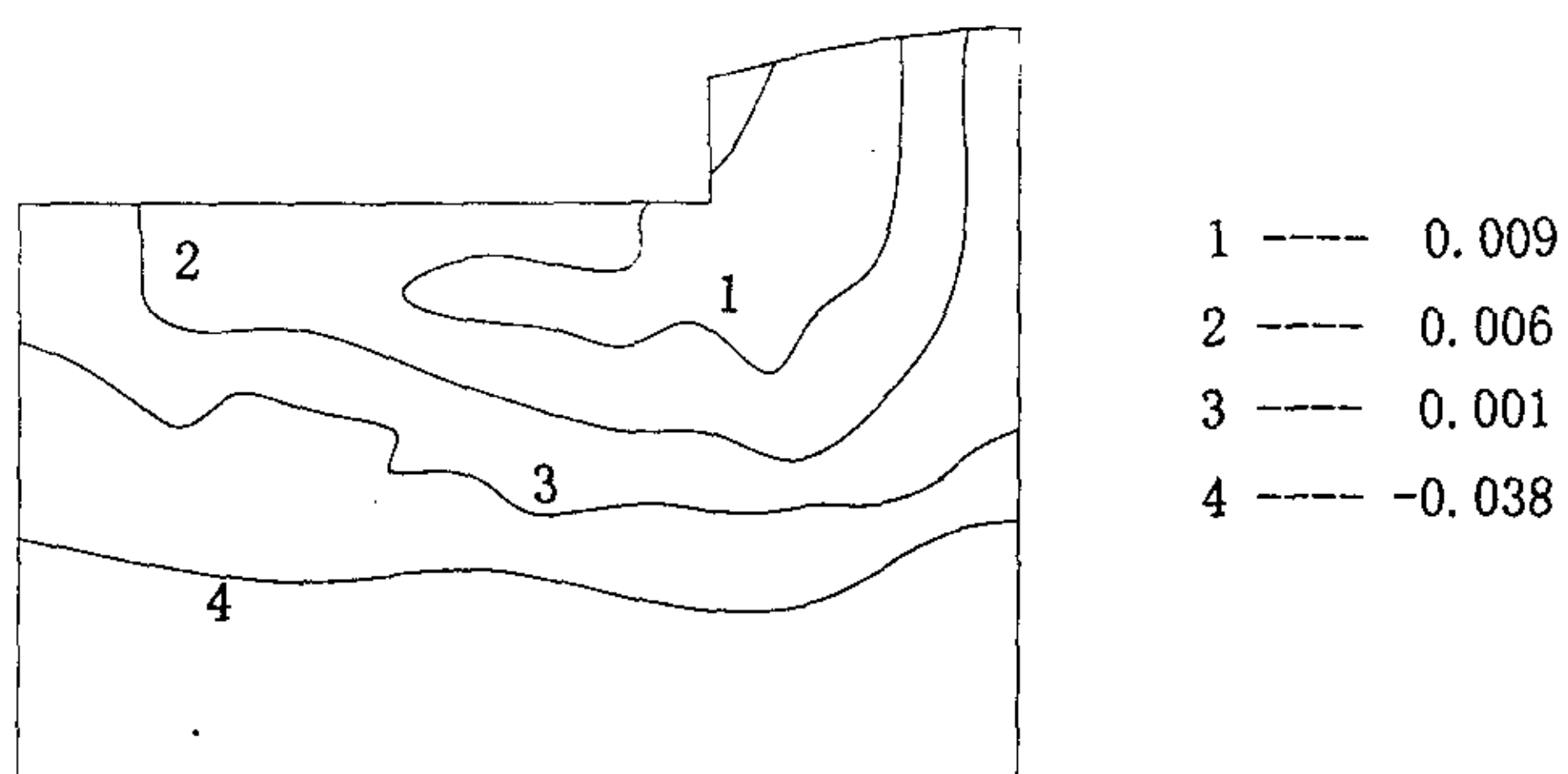


图 5.9  $\dot{\varepsilon}_y$  等值线图

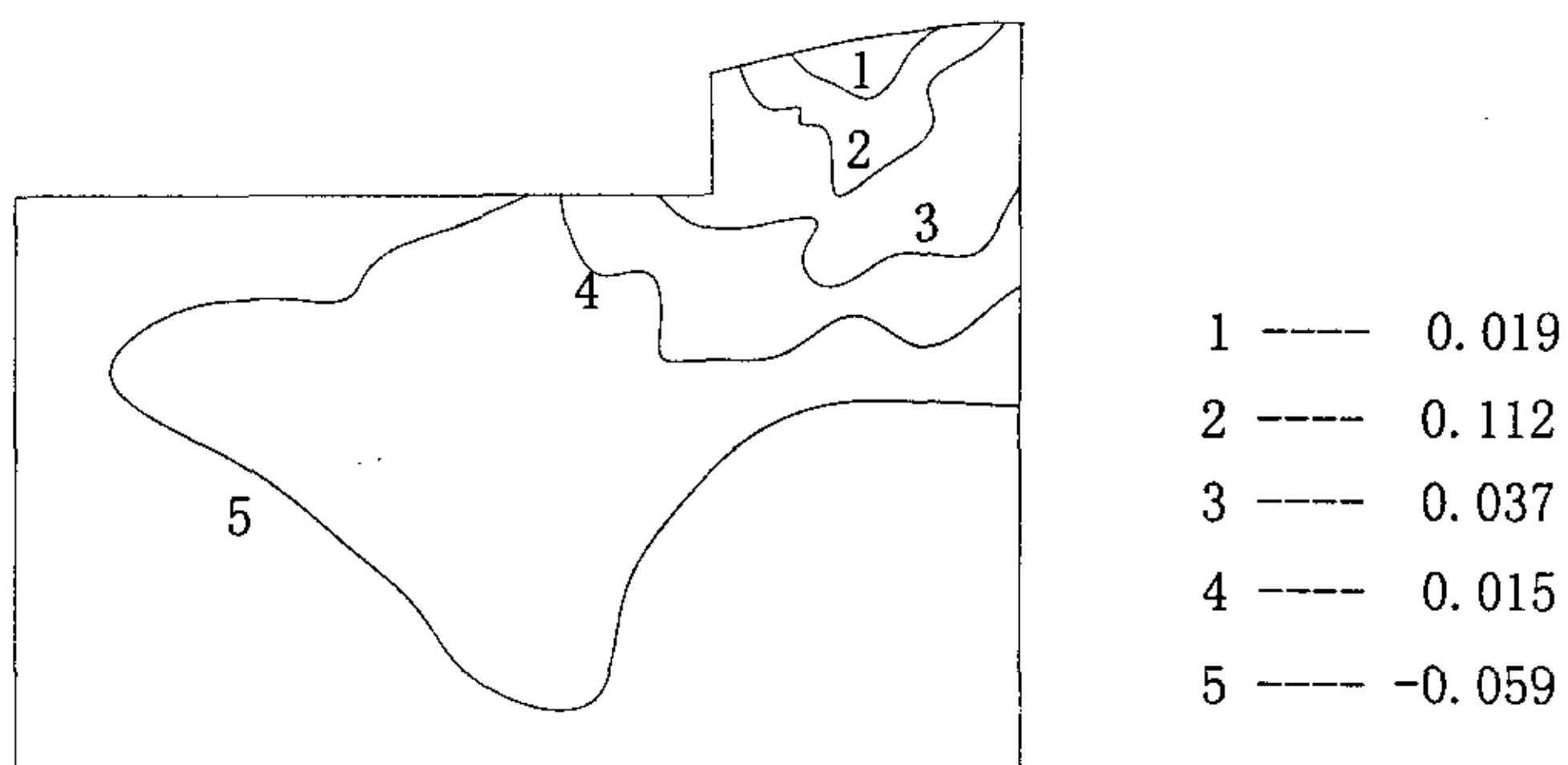


图 5.10 剪应变率  $\dot{\gamma}_{xy}$  等值线图

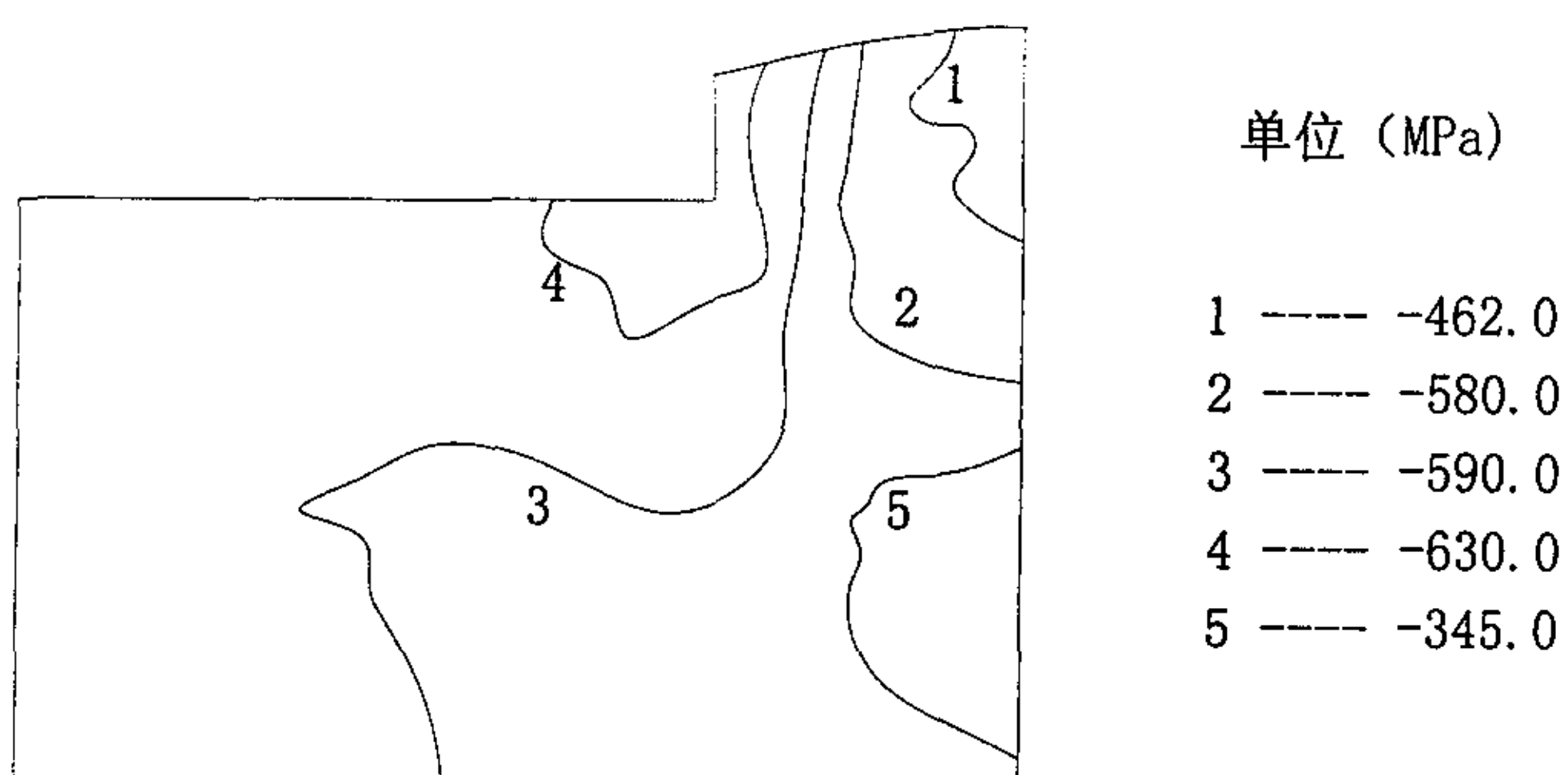
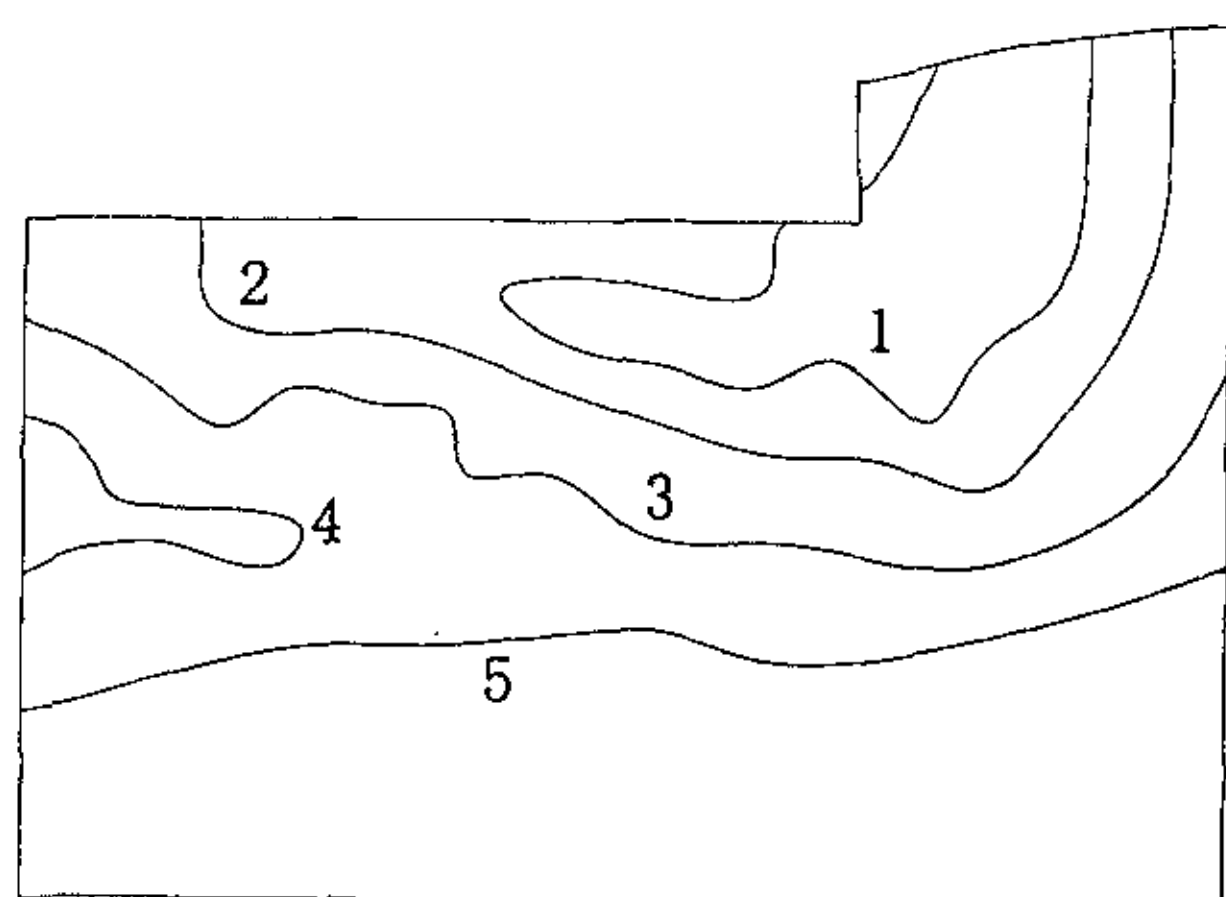


图 5.11  $\sigma_x$  等值线图

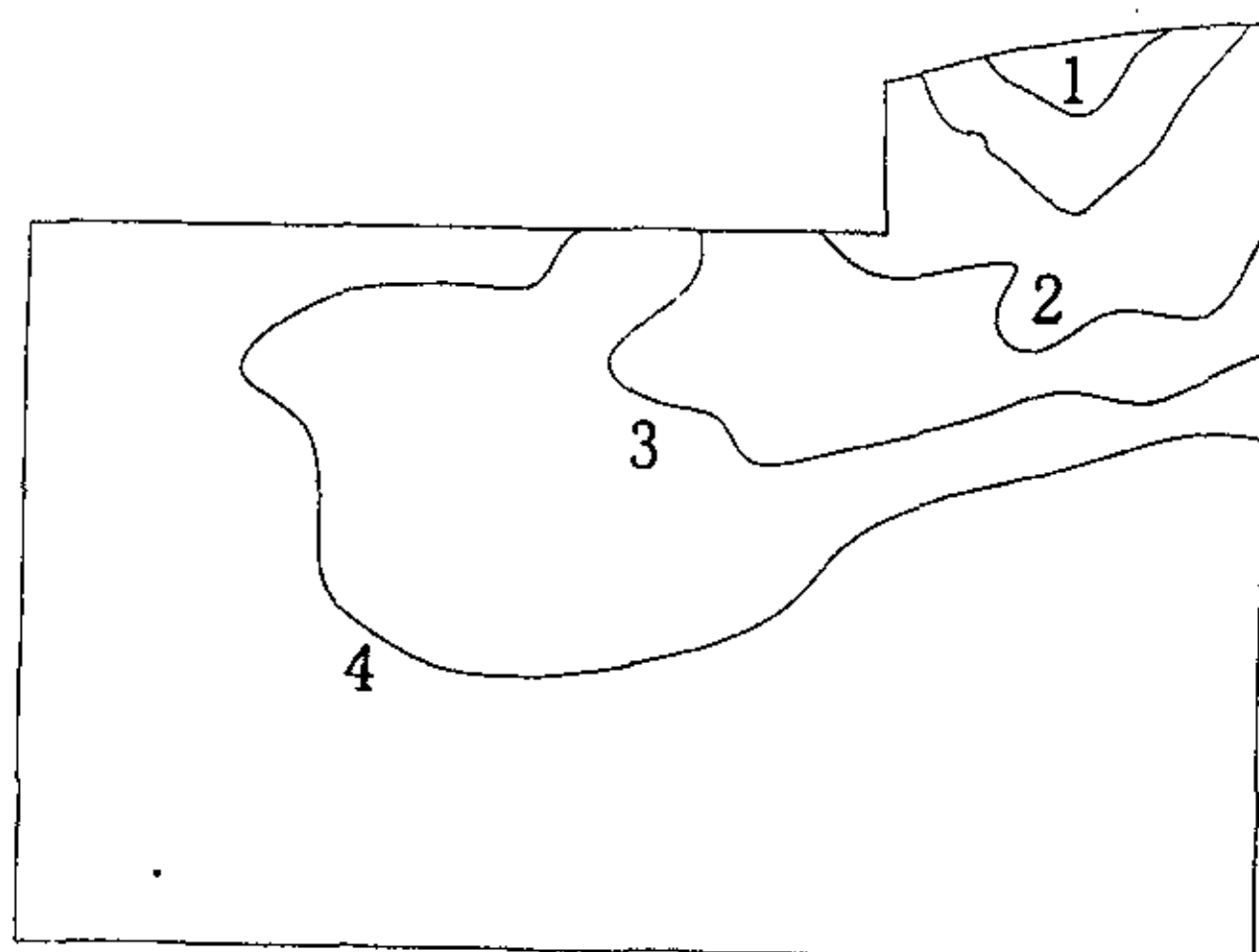




单位 (MPa)

- 1 ---- -690.0
- 2 ---- -670.0
- 3 ---- -580.0
- 4 ---- -530.0
- 5 ---- -490.0

图 5.12  $\sigma_y$  等值线图



单位 (MPa)

- 1 ---- -293.0
- 2 ---- -316.0
- 3 ---- -355.0
- 4 ---- -382.0
- 5 ---- -426.0

图 5.13 剪应力  $\tau_{xy}$  等值线图

## 第六章 用 Marc 软件实现网格重划的研究

### 6.1 塑性成形模拟软件简介

塑性成形模拟技术经历了几十年的发展,国际上已出现了一批塑性成形模拟软件。这些软件都是采用有限元法进行数值计算的,大致可分为两类<sup>[13]</sup>:一类是将通用有限元软件的功能扩充后用于塑性成形过程模拟,如集成了 LS-DYNA3D 和 LS-NIKE3D 后的 ANSYS, ABAQUS 等;另一类是专门为塑性成形模拟开发的软件,如主要用于体积成形和热处理分析的 DEFORM,用于冲压成形(包括液压胀形)模拟的 DYNAFORM、AutoForm、PAM-STAMP、OPTRIS 等。塑性成形模拟技术在工业发达国家已进入应用普及阶段,一些大企业将成形模拟作为成形工艺设计和模具设计的必经环节和模具验收的依据之一。

而 Marc 软件作为国际上第一个通用非线性商用有限元软件,它从 20 世纪 70 年代初诞生至今的 30 年中,一直紧跟有限元方法的理论和计算机软、硬件的最新发展,已发展成功能强大、界面友好的有限元软件系统。它拥有丰富和完善的单元库、材料模型库和求解器,保证了它能够高效地求解各类结构的静力和动力中的线性、高度非线性问题,稳态和瞬态热分析及热-结构耦合问题,电磁场问题,流体力学问题,滑动轴承问题,以及多场耦合问题;友好的图形用户界面和程序结构使用户易学易用,接口的开放性使用户很方便的扩展程序的功能。

### 6.2 Marc 软件简介

#### 一. Marc 软件的发展历史及现状

MSC. Marc/Mentat 是国际上通用最先进有限元分析软件,是 MSC 公司的产品。以非线性有限元为主导的 Marc 软件,在工业发达国家的航空、航天、能源和核电行业的蠕变、塑性等金属材料非线性问题分析中被广泛应用。20 世纪 80 年代后, Marc 软件的开发开始面向准确模拟高度非线性聚合物材料等非金属材料特性,在材料库中增加了多种弹性体类材料模型。Marc 软件因此又渗透到轮胎设计领域。为满足制造业中大量的加工工艺仿真所必需的接触分析的要求, Marc 继而开发出了使用简单、精度高、收敛快的接触算法。早在 1981 年, Marc 便推出并完善了面向用户的非线性有限元分析的图形用户界面。进入 20 世纪 90 年代后,随着计算机软硬件的飞速发展和非线性有限元分析方法的日趋完善,用 Marc 软件处理的有限元分析已从小规模线性问题转向大规模非线性分析,从单个物理场分析转向多种物理场之间耦合的大规模非线性分析。

随着 Marc 软件功能的不断扩展,软件的应用领域也从开发初期的核电行业

迅速扩展到国防、航空、航天、汽车、造船、铁道、石油化工、能源核电、电子元件、机械制造、材料工程、土木建筑、医疗器械、冶金工艺和家用电器等众多行业。

## 二. MSC. Marc 软件功能介绍

MSC. Marc 是高级非线性有限元分析模块, MSC. Mentat 是 MSC. Marc 的前后处理对话界面。两者严密整合的 MSC. Marc 和 MSC. Mentat 成为解决复杂工程问题的高级通用软件。

### 1. MSC. Mentat

MSC. Mentat 是新一代非线性有限元分析的前后处理图形交互界面, 与 MSC. Marc 求解器无缝连接。它具有以 ACIS 为内核的一流实体造型功能; 全自动二维三角形和四边形、三维四面体和六面体网格自动划分建模功能; 直观灵活的多种材料模型定义和边界条件的定义功能; 分析过程控制定义和递交分析、自动检查分析模型完整的功能; 实施监控分析功能; 方便的可视化计算结果能力; 先进的光照、渲染、动画和电影制作等图形功能。并可直接访问常用的 CAD/CAM 系统。

### 2. MSC. Marc

MSC. Marc 是功能齐全的高级非线性有限元软件的求解器。它具有极强的结构分析能力, 可以处理各种线性和非线性结构分析。MSC. Marc 的结构分析材料库提供了模拟金属、非金属、聚合物、复合材料等多种线性和非线性复杂材料特征的材料模型。MSC. Marc 提供了多种强大的加载步长适应自控技术及网各自适应技术, MSC. Marc 支持全自动网格重化, 确保大变形分析的继续进行。

## 三. Marc 程序结构的特点

Marc 对于非线性问题采用增量法, 在各增量步进内对非线性代数方程组进行迭代以满足收敛判定条件。

单元刚度矩阵采用数值积分法生成。连续体单元及梁、板、壳单元的面内区域采用高斯积分, 而梁、板、壳单元厚度方向则采用任意奇数个点的 simpson 积分法。应变一位移函数根据高斯点来评价。程序计算、存储单元所有积分点或单元中心点的应力、应变、温度等。总刚度矩阵、总质量矩阵等采用轮廓或稀疏存储法存储。

输入数据可借助于 Mentat 界面生成, 由用户填卡也可生成。输入数据文件由四部分组成, 其中分析功能的指示由参数选项组确定, 增量步数据由历程定义选项组确定, 图形输出由绘图仪定义选项组确定。

Marc 程序拥有许多对用户开放的子程序即用户子程序, 用户可以根据各自需要用 Fortran 语言编制用户子程序, 实现对数据的修改、材料本构关系的定义、



载荷条件、边界条件、约束条件的变更，甚至扩展 Marc 程序的功能。

Marc 程序拥有四个库：单元库、功能库、分析库、材料库。用 Marc 软件分析每一个实际问题，都采用了这四个库的一个以上的元素。用户可根据各种具体的结构进行适当的选择。

### 6.3 网格重划分技术

#### 一. 网格重划原理

在金属成形、弹性体类材料大变形、大应变分析中，Marc 软件采用基于更新的拉各朗日参考系数描述的方法。也就是将一个增量开始的构型作为度量变形，应力的参考状态，并不断更新后继增量的参考状态。这种分析方法有很多优点，但其缺陷在于单元的最大变形量受到限制。因为过度的大变形可能造成单元严重畸变，从而使以此为参考构型的后续增量分析在质量低劣的网格上完成，影响结果精度，甚至导致分析的中止。

为了使分析在足够的精度下继续进行，有必要采用新的网格。并将原来旧网格中的状态变量映射到新网格上。这种在分析过程中重新调整网格的技术在 Marc 中称为 Rezone。网格重划基本上有三个步骤：其一是用连续函数定义旧网格上所有变量；其二是定义一个覆盖旧网格全域的新网格；最后是确定新网格单元积分点上的状态变量和节点变量。

Marc 软件采用三角化的局部平滑方法定义旧网格上连续状态的变量。首先，从旧网格单元积分点的状态变量线性外推至节点，获得单元节点的状态变量。然后对旧网格的单元进行三角形化的细分处理。也就是说每个二维的四边形或三角形单元都被细划成更小的三角形单元；每个三维的四面体、四面体或五面体、六面体单元都被离散成更小的四面体单元。用旧细划网格的三角坐标可以描述新网格上任一节点的空间位置。通过插值，不难获得新网格单元节点变量和单元积分点的状态变量。

#### 二. Marc 软件中的网格重划准则

##### 1. 单元畸形准则

如果单元畸形越来越严重或趋于严重，物体的网格需要进行重划。单元畸形准则是基于增量步进结束时单元角度的检查及对下一个增量步单元角度变化的预测，如图 6.1 所示。设  $X_n$  为增量步进开始时的坐标， $\Delta U_n$  为本增量步的位移，则有：

$$X_{n+1} = X_n + \Delta U_n \text{ 和 } X_{n+2}^{est} = X_{n+1} + \Delta U_n$$



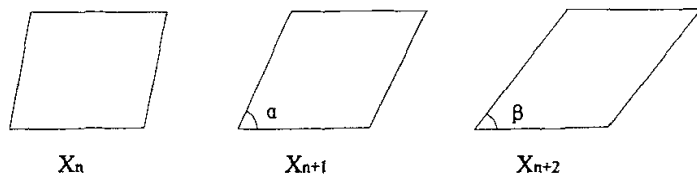


图 6.1 单元角度变化

如果  $\cos \alpha > 0.8$  和  $\cos \beta > 0.9$ ，重划分； $\cos \alpha > 0.9$  和  $\cos \beta > \cos \alpha$ ，重划分

## 2. 接触穿透准则

当接触体的曲率达到当前网格不能准确探测穿透时，物体的网格需要重划分。接触穿透准则基于检查单元边和其他接触体的距离。当距离大于穿透极限时，需要进行网格重划。

## 3. 增量步进法则

按指定的增量步间隔进行网格重划。

## 4. 内角偏差准则

当单元内角与理想角度的偏差大于一定值时，需要进行网格重划。对四边形或六面体的理想角度是 90 度，对三角形或四面体的理想角度是 60 度。默认允许的偏差是 40 度。

## 5. 直接准则

在进行任何分析之前对物体进行网格重划。

# 6.4 链条滚子网格重划

本文根据滚子的几何对称性取其一半进行分析，采用轴对称第 116 号单元进行分析。主要分析步骤及参数的确定方法如下：

## 1. 定义刚体曲线及初始网格的生成

根据已知尺寸，产生一些关键的几何点，生成一个大单元。用一条刚性复合曲线模拟反挤压凸模的运动，另一刚性曲线模拟反挤压凹模，如图 6.2 所示。

命令流如下：

```
MESH GENERATION
  NODE ADD
  .....
  .....
  .....
  ELEMENT ADD
```

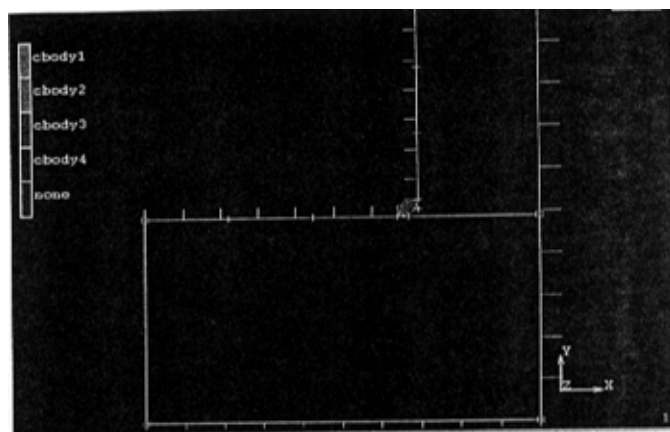


图 6.2 初始网格及接触刚体位置图

```

.....
SWEEP
  ALL
  REMOVE UNUSED POINTS
  RETURN
  RENUMBER
  ALL
  MAIN

```

## 2. 定义材料特性

采用刚塑性模型，硬化形式为阶梯硬化，如图 6.3 所示。

```

MATERIAL PROPERTIES
  NEW
    material1
  MECHANIC
  TABLE
  TABLE TYPE
    Strain rate
  REGID PLASTIC
  .....
  .....
  .....
ELEMENT ADD

```

ALL EXISTING  
MAIN

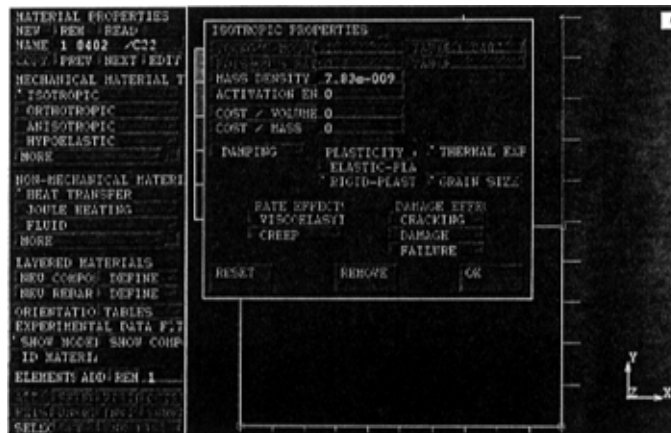


图 6.3 材料特性定义界面

### 3. 定义接触体

将单元体定义为可变形的，模拟凸、凹模运动的曲线定义为刚性体，并给复合曲线定义初始速度值为 $-1\text{mm/s}$ 。为了防止在模拟过程中变形体与模具之间产生脱模或穿透现象，定义完各接触体后，还要在 CONTACT TABLE 选项中定义一个给定各接触体相互接触关系的表格。

```
CONTACT
  CONTACT BODIES
  NEW
  RIGID
  VELOCITY PARAMETER
  VELOCITY Y
    -1
  INITIAL VELOCITY Y
    -1
  OK
  .....
  .....
  .....
  CONTACT TABLES
  PROPERTIES
```

```

CBODY1:CBODY2 TOUCHING
CBODY1:CBODY3 TOUCHING
CBODY1:CBODY4 TOUCHING
.....
.....
MAIN

```

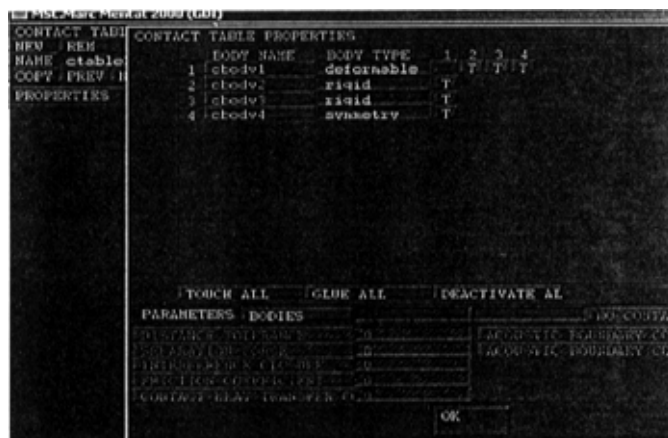


图 6.4 接触表定义界面

#### 4. 定义网格重划分参数

包括网格划分器、重划分准则、重划单元目标长度及要划分物体的选定等。本文中采用整体重划,使用立即重划准则和穿透准则结合的判断方法进行网格重划。且由于反挤压过程网格畸变严重,本文中从第 0 增量步开始,每隔 3 个增量步进就进行一次网格重划,重划网格单元长度为 0.1mm。图 6.5 说明了网格重划参数的定义过程。

```

MESH ADAPTIVITY
GLOBAL REMESHING
NEW
ADVANCING FRONT QUAD
IMMEDIAT
PENETRATION
INCREMENT FREQUENCY
3
ELEMENT EDGE LENGTH
0.1

```

```

OK
REMESH BODY
    CBODY1
MAIN

```

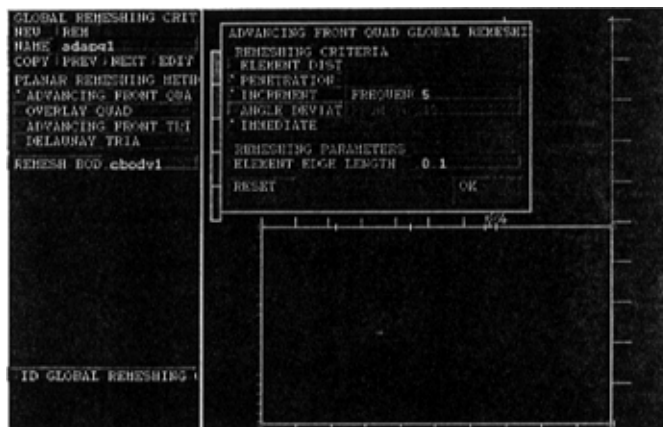


图 6.5 网格重划参数定义界面

## 5. 定义静力分析工况

本文采用一个分析工况模拟滚子反挤压过程。分析时间为 1.04s，采用 500 个增量步进。在定义滚子分析工况时，激活前面已定义好的接触表和网格重划参数。

```

LOADCASES
    NEW
    STATIC
    GLOBAL REMESHING
    ADAPG1
    OK
    TOATAL LOADCASE TIME
        1.04
    FIXED#STEPS
        500
    OK
    .....
    .....
MAIN

```

## 6. 定义作业参数

将分析维数设为轴对称问题，选择需要计算输出的结果类型。

```
JOB$
.....
.....
CONTACT CONTROLE
  CTABLE1
.....
.....
MESH ADAPTIVITY
.....
.....
ANALYSYS OPTION
.....
.....
JOBRESULT
  Equivalent Von Mises Stress
  Plastic Stain Rate
ANALYSYS DIMENSION
  AXIMMETRIC
OK
.....
.....
MAIN
```

## 7. 对结果进行后处理

将作业参数提交给 Marc 软件进行计算后，通过 RESULT 命令可以对计算结果进行后处理，Marc 软件能显示各增量步的云纹图和等值线图。用 MONITOR 命令还能观察整个动态压下过程。图 6.6~图 6.9 为 Marc 软件计算后的后处理结果。

```
RESULTS
OPEN
.....
SCALAR
  Equivalent Von Mises Stress
  Plastic Stain Rate
.....
```

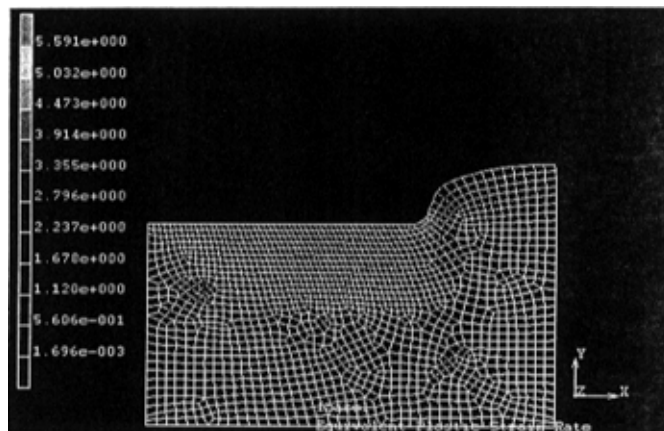


图 6.6 第 97 增量步的等效应变率云纹图

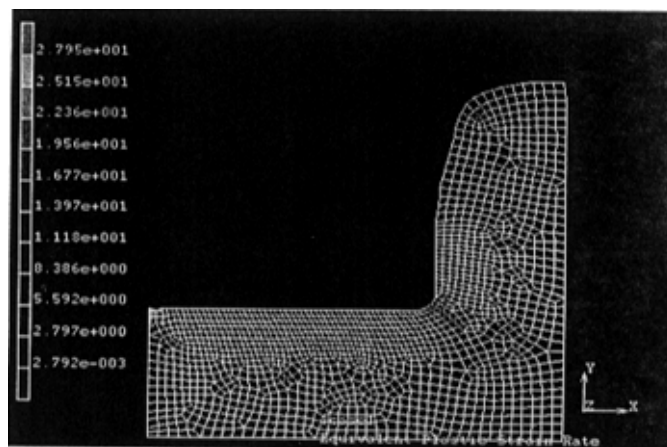


图 6.7 第 500 增量步的等效应变率云纹图



数值模拟结论的正确与否,只有通过实验才能得以验证。理论分析方法不完善之处,也可以通过对实验过程的详细观察及实验结果分析来指导我们提出新的设想,从而对有限元理论进行改进。

### 7.1 实验目的

1. 了解反挤压过程中金属流动规律
2. 了解反挤压过程中不同变形程度对金属流动的影响
3. 了解反挤压过程中影响挤压力大小的各种因素
4. 拟合反挤压过程中挤压力与压力行程的关系曲线
5. 将数值模拟结果与实验结果进行对比分析,验证本文数值模拟方法的准确性和可行性, 及分析误差原因。

### 7.2 实验设备及器材

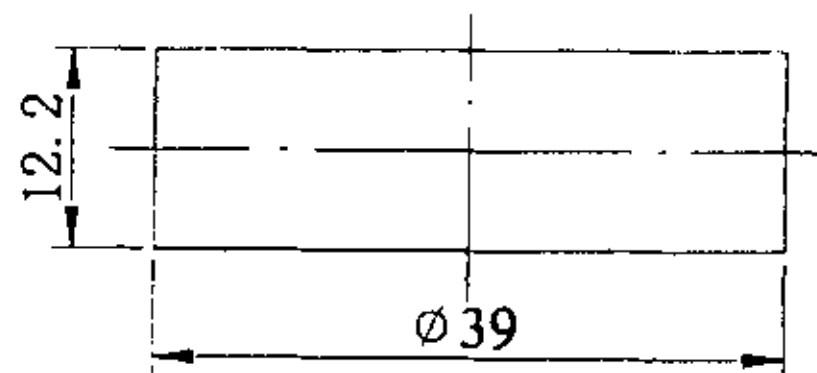


图 7.1 实验毛坯图

由于链条滚子原始尺寸很小,故将其线性尺寸放大 5 倍后进行实验,毛坯形状及尺寸如图 7.1 所示。

#### 1. 实验材料

毛坯尺寸:  $\Phi 39 \times 12.2$

毛坯材料: 20 号碳钢

#### 2. 实验设备、仪器

3150W 四柱万能液压机;

反挤压实验模具一副;

机油润滑。

#### 3. 变形条件

毛坯初始温度:  $20^{\circ}\text{C}$

反挤压时压力机初始速度:  $-1\text{mm/s}$

### 7.3 实验过程

本文做了两组反挤压压力—行程实验。

1. 将实验坯料置与实验凹模内, 以每次压下量为  $\Delta H = 0.5\text{mm}$  分别压下 8 次, 每次压下后, 记录压力机所用吨位大小及行程。得到如图 7.2 所示的实验坯料压下图。

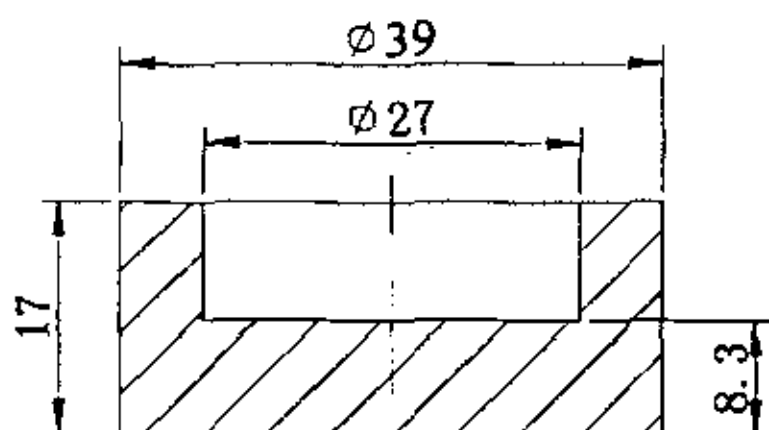


图 7.2 第一次实验压下图

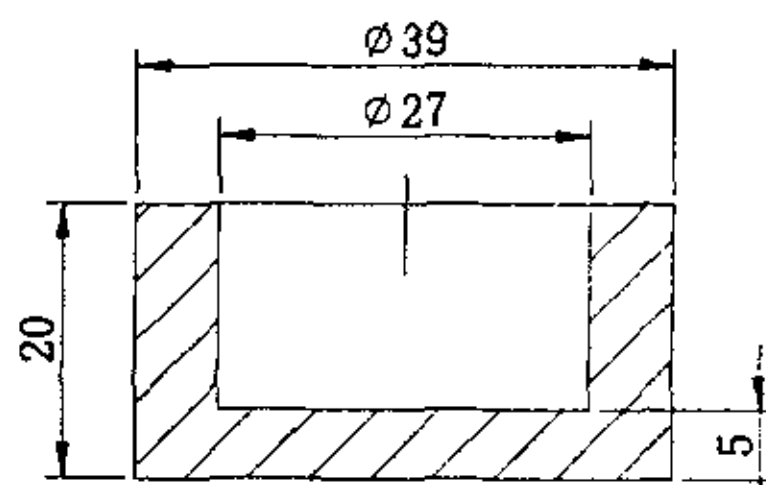


图 7.3 第二次实验压下图

2. 在同样的实验条件下, 压下 14 次, 分别记录每次压下后的压力机吨位和压力机行程。得到如图 7.3 所示的实验坯料压下图。

### 7.4 挤压力—行程曲线的对比

将实验所测数据进行处理后, 作出压力行程曲线, 并与模拟所得结果 (将滚子线性尺寸放大五倍后代入程序计算的结果) 进行比较, 如图 7.4 所示。由图可知, 模拟曲线与实验曲线的大致趋势是一致的。

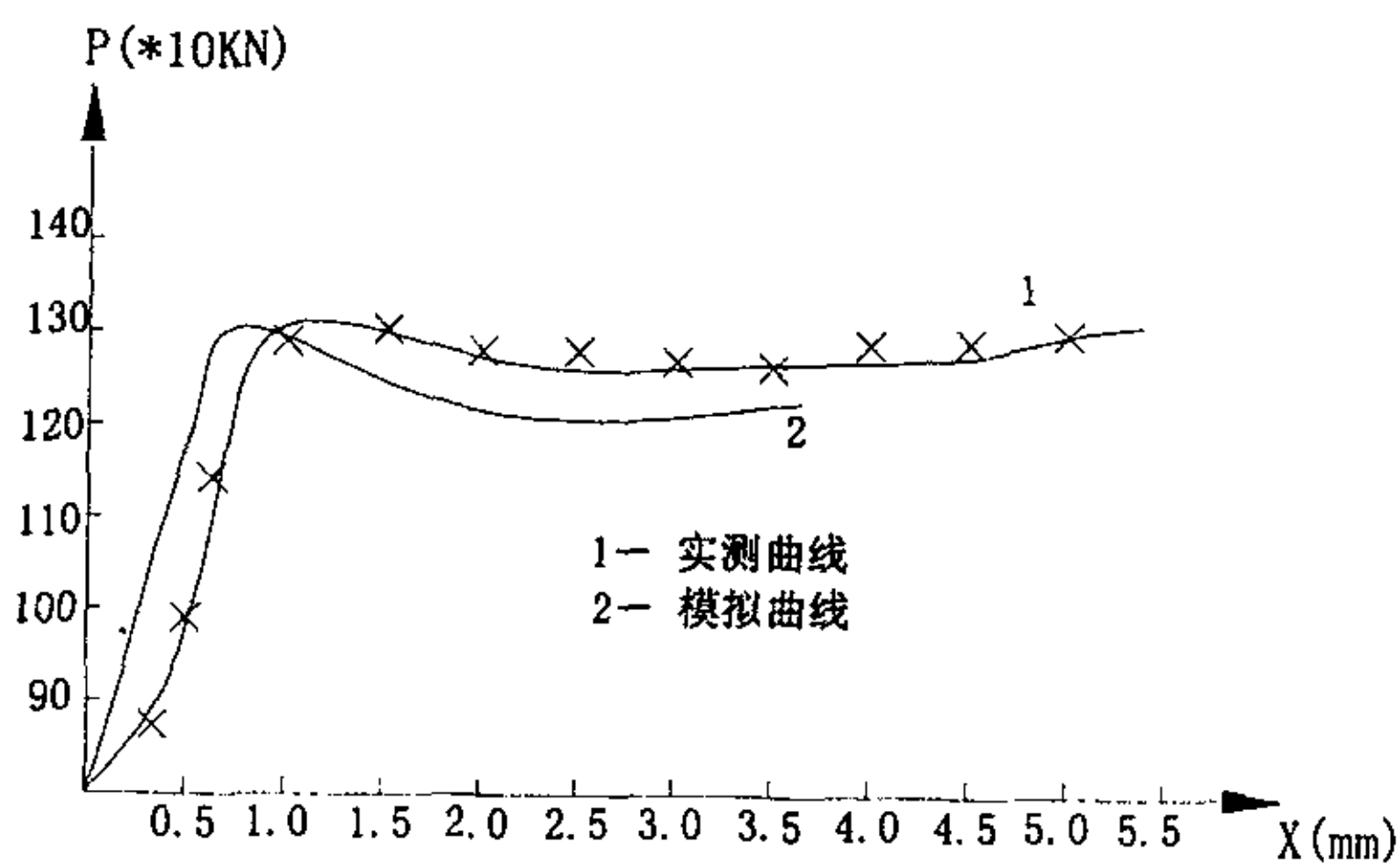


图 7.4 压力—行程曲线

在压下后期, 模拟曲线走向与实测曲线有一定的偏差。从对比图中可知, 节

理单元与本体单元耦合的有限元程序基本是可行的,但其结果还存在比较大的误差,需要进一步的改进。

## 7.5 误差分析

从以上数据及图表对比可以看出,数值模拟的结果与实验模拟结果的趋势是一致的,这证明了本文的程序系统基本上比较真实的反应了反挤压过程中的金属流动规律和力学信息。同时也可以看出,数值模拟的结果与实验结果还是存在一定的误差的,这说明本程序系统也存在许多有待改进之处。误差来源主要有:

1. 本文中将滚子变形简化为平面问题进行处理,给计算结果带来了误差;
2. 滚子底部待变形区随着挤压过程的进行将逐渐开始塑性变形,本程序在模拟过程中重点考虑塑性变形区的影响,没有考虑待变形区对于整个塑性成形过程的影响,从而给程序结果带来了一定的影响;
3. 在程序编制过程中简化了加载条件,把初始载荷视作线性载荷加载在滚子与凸模的接触面上;
4. 使用上限单元法经验公式计算初始速度场,并以此方法计算初始刚、塑性区的位置,也给程序结果带来了误差;
5. 引入节理单元进行接触摩擦的模拟的实施,做了很多简化和假设。为了使程序能够运行下去,假定了切向粘摩系数 $\lambda_t$ 和法向粘摩系数 $\lambda_n$ 都为常数,并把它们的初始值代入程序进行计算,这就导致了程序结果有较大的误差。
6. 节理单元用来模拟滚子与凸模接触面上的摩擦,而滚子与凹模接触面的摩擦在程序中不曾考虑进去;
7. 反挤压过程是一个变形程度剧烈的过程,由于压下到一定的程度后网格畸变严重,若不进行网格重划,由初始网格计算出的结果误差很大,甚至使程序无法计算下去。

综上所述,由于时间的仓促和本人在程序系统处理方面的欠缺,致使模拟结果存在着较大的误差。但总体来说,该系统有一定的可行性。



### 一. 结论

本文采用本体单元与节理单元相耦合有限元数值模拟与实验相结合的方法,对反挤压塑性成形过程进行了模拟研究,特别对节理单元与本体单元耦合的基本理论和程序设计作了较为深入的分析研究,并运用 Marc 软件对滚子反挤压过程进行网格重划。现总结如下:

1. 采用刚塑性有限元罚函数法建立了求解本体部分的应力、应变场的塑性流动方程。
2. 引入节理单元对接触摩擦区进行模拟,由于节理单元和本体单元是两种不同类型的单元,文中将它们进行了耦合,推导出了适合编程计算的整体耦合方程组。
3. 开发了滚子反挤压有限元数值模拟的程序系统。
4. 针对滚子反挤压程序系统,对于数值模拟实施过程中的一些关键技术问题,如粘摩系数的获取、初始速度场的选取、奇异点的处理等,给出了切实可行的解决方案。
5. 通过编制相应的后处理程序,可更直接的看出反挤压成形过程中变形体的变化趋势和应力应变分布规律。
6. 通过实验法获取相关的数据,与数值模拟的结果进行对比分析,对数值模拟的结果进行验证。
7. 由于反挤压成形过程是大变形过程,压下开始不久网格已发生严重畸变,未经网格重划处理的原程序系统的运算结果将有很大的误差。本文运用 Marc 有限元分析软件对滚子成形进行了网格重划,使得数值模拟的结果更直观,更准确。

### 二. 改进完善

通过本课题的研究,可以在一定程度上预见反挤压成形过程中的应力应变变化趋势,但是由于在模拟过程中所作出的一些简化假设,使得数值模拟的结果与实际值还有一定的误差,因此在程序中还有许多需要进一步完善的地方:

1. 使耦合过程的处理更符合实际情况;
2. 建立更加准确的计算模型;
3. 寻求更好、更精确的关键技术问题的处理方法。

总之,通过两年多时间的学习,我对有限元理论有了更全面和深入的了解,在将有限元用于塑性成形模拟的过程中,同时也提高了我对有限元实际应用的理解。有限元法本身是一门博大精深的学问,想要运用有限元理论真实的模拟整个

成形过程中金属流动规律及变形力学特征,并且获得成形过程中任意时刻的力学信息和流动信息,还有待我进一步的加深有限元实际应用方面的知识。

## 参 考 文 献

- [1] 王勖成, 邵敏, 《有限单元法基本原理和数值方法》, 清华大学出版社, (1997)
- [2] Bathe K J and Wilson E.L, 《Numerical Methods in Finite Element Analysis》, Prentice-Hall Inc., (1976)
- [3] Bathe K J, 《Finite Element Procedures in Engineering Analysis》, Prentice-Hall Inc., (1982)
- [4] O.C.Zienkiewicz,《The Finite Element Method Trid Edition》, McGraw-Hall.Inc ., (1977)
- [5] Desai C. S.and Abel J.F. 《Introduction to The Finite Element Method》, Van Nostrand Reinhold CO.,(1992)
- [6] O. C. Zienkiewicz and Morgan K., 《Finite Element and Approximation》, John Wiley &. Sons Inc., (1983)
- [7] O. C. Zienkiewicz ,FRS, Taylor R.L., “The Finite Element Method”,Fourth Edition., Vol.1, (1987)
- [8] O. C. Zienkiewicz, “Flow Formulations for Numerical Solutions of Forming Process”, Numerical Analysis of Forming Processes, Wiley, New York., (1984), P.1
- [9] C.H.Lee and S.Kobayashi, “New Solutions to Rigid-Plastic Deformation Problems Using a Matrix Method”, Trans.ASME, J. Eng. Ind., Vol.95, (1973), P.865
- [10] G.J.Li and S. Kobayashi, “Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Plane Strain Rolling”, Trans.ASME, J. Eng. Ind., Vol.104, (1982), P.185
- [11] O. C. Zienkiewicz and P. N. Godbole, “Flow of Plastic and Viscoplastic Solids with Special Reference to Extrusion and Forming Process” ,Int.J. Mum. Mech. In. Eng., Vol.8, (1974), P.3
- [12] J.J.Park and S.I.Oh, “Application of Three Dimensional Finite Element Analysis to Metal Forming Process”, Proc. 2<sup>nd</sup> ICTP Conf., Stugart, West Ge-rmeny, (1987) , P. 961
- [13] S. Kobayashi, “Approximate Solutions for Preform Design in Shell Nosing”, IBID., (1983) , P.111
- [14] C.H.Lee ,S.Kobayashi and S.N.Shah, “Analysis of Rigid-Plastic Deformation Problems by the Matrix Method”, J.Japan,Soo,Tech.,Plasticity, Vol.14,(1973) ,P.770
- [15] S.N.Shah and S.Kobayashi, “Rigid-Plastic Analysis of Cold Heading by the Matrix Method”, Proc., 15<sup>nd</sup> Int. MTDR Conf., Stugart, West Ge-rmeny, (1974) , P. 803
- [16] C.H.Lee and S.Kobayashi, “Rigid-Plastic Analysis of Bore Expanding and



- Flange Drawing with Anisotropic Sheet Metals by the Matrix Method", Proc., 15<sup>nd</sup> Int. MTDR Conf., Stugart, West Germany, (1974), P. 561
- [17] 陈翰, "刚塑性圆柱薄壳拉拔中考虑流体动力润滑的解", 西安科技大学学报, No.2, (1992), P.1-3
- [18] Meng Y.G,et., "A Finite Element Approach to Plastic-Hydrnamic Lubrication in Cold Forging", Wear, Vol.160, No.1, (1993), P.163
- [19] 李虎兴, 《压力加工中的摩擦和润滑》, 冶金工业出版社, (1990), P.1
- [20] 宋翼生等, "轧制问题有限元分析中摩擦条件的研究", 润滑与密封, No.5, (1992)
- [21] 崔益明, "反挤压刚粘塑性有限元模拟研究", 合肥工业大学硕士论文, (2000), P.3
- [22] S.Kobayashi S.I.Oh and T.Altan, "Metal Forming and The Finite-Element Method", Oxford University Press, (1989)
- [23] O.C.Zienkiewicz and P. N. Godbole, "A Penalty Function Approach to Problems of Plastic Flow of Metals with Large Surface Deformations", J. Strain Analysis, Vol. 10, (1975), P. 180
- [24] 朱伯芳, 《有限单元法原理及应用》, 水利电力出版社, (1979)
- [25] 徐文建, 洪深泽, 刘明霞, 王雷刚, "节理单元在挤压成形摩擦处理中应用的可行性研究", 锻压技术, No. 1, (2001)
- [26] Jan xue. Chen and Sheng ze. Hong and Cai ke. Yu, "Analysis of Contrasting Macronumerical Simulation with Mirostructure in Forming Process", Advanced Technology of Plasticity, (1993)
- [27] C.C.Chen, S.I.Oh and S.Kobayashi, "Dudtile Fracture Axisymmetric Extrusion Drawing Part I: Deformation Mechanics of Extrusion and Drawing", Trans.ASME J.Eng. Ind., Vol. 101, (1979), P.23
- [28] S.I.Oh and S.Kobayashi, "Finite Element Analysis of Plain-Strain Sheet Bending", Int. J.Mech.Sci., Vol. 22, (1980), P.583
- [29] N.Rebele and S.Kobayashi, "Axisymmetric Punch Stretching of Strain Rate-sensitive Sheet Metals", Proc.8<sup>th</sup> HAMRC, (1980), P.235
- [30] 许莹, 洪深泽, 周明智, "节理单元与本体单元耦合关系的研究", 第八届全国锻压学术年会论文集, (2002)
- [31] 汪大年, 《金属塑性成形原理》, 机械工业出版社, (1982)
- [32] 董湘怀等, "金属塑性成形计算机模拟的若干进展", 金属塑性成形工艺, No. 1, (2000)
- [32] 贾明华, 曾宪章, 阮雪榆, "杯-杆型复合挤压的刚塑性变形有限元分析", 模具技术, No. 5, (1998), P. 1



- [33] Sheng ze. Hong and Shu jun. Wang and Cai ke. Yu, "Thermo-dynamic Couple Numerical Simulation of the Temperature Field in Hot Forming Process", Advanced Technology of Plasticity, (1993)
- [34] O.C.Zienkiewicz and P.C.Jain and E.Onate, "Flow of Solids During Forming and Extrusion: Some Aspect of Numerical Solutions", Int. J. Solids Struct, Vol.14, (1978), P. 15
- [35] 谢水生, 王祖唐, 《金属塑性成形工步的有限元数值模拟》, 冶金工业出版社, (1997)
- [36] 洪深泽, 《挤压工艺及模具设计》, 机械工业出版社, (1996)
- [37] [美]B.艾维超著, 王学文译, 《金属成形工艺与分析》, 国防工业出版社, (1988)
- [38] 王祖成, 汪家才, 《弹性和塑性理论及有限单元法》, 冶金工业出版社, (1983)
- [39] 张晋明, "非稳态冷挤压工艺的刚塑性有限元数值模拟及实验研究", 上海交通大学博士论文, (1990)
- [40] 王树军, "钢环塑性压缩的模拟研究", 合肥工业大学硕士论文, (1994)
- [42] 徐文建, "正挤压成形的数值模拟及摩擦特性研究", 合肥工业大学硕士论文, (2001)
- [43] 陈火红, 《Marc 有限元实例分析教程》, 机械工业出版社, (2002)
- [44] S.I.Oh, J.P.Tang and A.Badawy, "Finite Element Mesh Rezoning and Its Application to Metal Forming Analysis", Proc. 1<sup>st</sup> ICTP Conf., Tokyo, (1984), P.1051
- [45] J.H.Cheng and N.Kikuchi, "A Mesh Rezoning Technique for Finite Element Simulation of Metal Forming Process", Int.J.Numer.Methods Eng., Vol.23, (1986), P.219
- [46] J.H.Cheng, "Automatic Adaptive Remeshing for Finite Element Simulation of Forming Processes", Int.J.Numer.Methods Eng., Vol.26, No.1, (1988)
- [47] C.J.M.Gelten and A.W.A.Konter, "Application of Mesh-Rezoning in the Updated Lagrangian Method to Metal Forming Analysis", Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Edited by J.F.T.Pittman et al., Pinerrige Press, (1982), P.511
- [48] K.Roll and Th.Neitzert, "On the Application of Different Numerical Methods to Cold Forming Processes", ibid, (1982), P.97
- [49] J.C.Nagtegaal and N.Rebelo, "On the Development of a General Purpose Finite Element Program for Analysis of Forming Processes", Proc.NUMIFORM'86, (1986), P.41
- [50] S.Kobayashi, "Metal Forming and the the Finite Element Method Past and



Future”, J.Appl. Metalworking, Vol. 3, (1985), P. 17

[51] O.C.Zienkiewicz and P. N. Godbole, “Flow of Plastic and Viscoplastic Solids with Special Reference to Extrusion and Forming Process”, Int.J.Mum.Meth.In Eng., Vol. 8, (1974),P. 3

[52] S.Kobayashi, “A Review on the Finite Element Method and Metal Forming Process Modeling”, J.Appl. Metalworking, Vol. 2, (1982) ,P. 163

[53] Keife H.,et al., “A Friction Mode Applied in the Cold Rolling of Aluminum Strips”, Wear, Vol. 179, No.156, (1994), P. 137

[54] H.Matsmato, S.I.Oh and S.Kobayashi, “A Note on the Matrix Method for Rigid-Plastic Analysis of the Ring Compression”, Proc, 18<sup>th</sup> Int. MTDR. Conf., (1977)

[55] M.Gotoh, “A Finite Element Analysis of the Rigid-Plastic Deformation of the Flange in the Deep-Drawing Process Based on a Foruth-Degree Yield Funtion”, Int.J.Mech.Sci, Vol .22, (1981) , P.367