上海海事大学试卷

简单一般

（试卷编号：39335）　　　总计3422分

专业　　　　　班级　　　　　学号　　　　　姓名　　　　　得分

一 选择题　（10分）

1

1.（5分）　题号　708　　　　　答案

图解：（2）

2.（5分）　题号　968　　　　　答案

图解：

A

二 填充题　（827分）

2

1.（4分）　题号　780　　　　　答案

图解：$\frac{n}{2}(n-1)$

2.（5分）　题号　820　　　　　答案

图解：$\begin{vmatrix} 4251 & 6251 \\ 7092 & 9092 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4251 & 2000 \\ 7092 & 2000 \end{vmatrix} = 2000 \times \begin{vmatrix} 4251 & 1 \\ 7092 & 1 \end{vmatrix} = 5682000.$

3.（5分）　题号　821　　　　　答案

图解：0

4.（5分）　题号　822　　　　　答案

图解：

$A_{11} + A_{21} + A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{vmatrix} = 0$，故答案为 0

5.（5分）　题号　823　　　　　答案

图解：

因为在此行列式的展开式中，含有 x^3 的只有主对角线上的元素的积，故答案为 -2

6.（5分）　题号　824　　　　　答案

图解：由范德蒙行列式得行列式的值为 288

7.（4分）　题号　946　　　　　答案

图解: $3abc-a^3-b^3-c^3$

8.（4分） 题号 450 答案
9.（4分） 题号 451 答案
10.（4分） 题号 452 答案
11.（4分） 题号 453 答案
12.（4分） 题号 454 答案
13.（5分） 题号 679 答案
图解: 9

14.（5分） 题号 680 答案
图解: -64

15.（5分） 题号 681 答案
图解: 18

16.（5分） 题号 682 答案
图解: 24

17.（5分） 题号 683 答案
图解: $|A|=0$

18.（5分） 题号 684 答案
图解: 33

19.（5分） 题号 685 答案
图解: -36

20.（5分） 题号 686 答案
图解: 3

21.（4分） 题号 781 答案

图解: 120

22. (5分) 题号 782 答案

图解: $\frac{n}{2}(n-1)$

23. (5分) 题号 916 答案

图解: 12

24. (5分) 题号 919 答案

图解: 1

25. (5分) 题号 920 答案

图解: 0

26. (5分) 题号 921 答案

图解: -1

27. (5分) 题号 973 答案

图解: 2

28. (5分) 题号 974 答案

图解: -4

29. (5分) 题号 861 答案

图解: $\frac{n(n-1)}{2}$

30. (5分) 题号 862 答案

图解: $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$

31. (5分) 题号 863 答案

图解: 0, 0

32. (5分) 题号 864 答案

图解: 32, 64

33. (5分) 题号 865 答案

图解: $-\frac{3^{2n-1}}{2}$

34. (5分) 题号 866 答案

图解: $\frac{7}{27}$

35. (5分) 题号 867 答案

图解: 6

36. (3分) 题号 468 答案

37. (3分) 题号 469 答案

38. (3分) 题号 470 答案

39. (3分) 题号 471 答案

40. (3分) 题号 472 答案

41. (5分) 题号 633 答案

图解: $x \neq \frac{2}{3}y$

42. (5分) 题号 634 答案

图解:

$$(A+3E)^{-1}(A^2-9E)=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

43. (5分) 题号 635 答案

图解:

$$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

44. (5分) 题号 636 答案

图解: $ad-bc\neq 0, A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

45. (5分) 题号 637 答案

图解: $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

46. (5分) 题号 638 答案

图解: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 7 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

47. (5分) 题号 639 答案

图解: $a\neq 0, A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

48. (5分) 题号 640 答案

图解: $AB=0$

49. (5分) 题号 641 答案

图解: $A^2+B^2+C^2=3E$

50. (5分) 题号 642 答案

图解:
$$A^5=\begin{pmatrix}1&-5&10\\0&1&-5\\0&0&1\end{pmatrix},A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

51.(5分) 题号 643 答案

图解:
$$C^{10}=10^9\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix},\left|C^*\right|=0$$

52.(5分) 题号 699 答案

图解: 2

53.(5分) 题号 700 答案

图解: 2

54.(5分) 题号 701 答案

图解: 48

55.(5分) 题号 702 答案

图解: $\begin{bmatrix}9&-2&-1\\9&9&11\end{bmatrix}$

56.(5分) 题号 703 答案

图解:
$$A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$$

57.(5分) 题号 783 答案

图解: $\begin{bmatrix}-2&-1&-2\\12&1&13\\8&9&20\end{bmatrix}$

58.(5分) 题号 784 答案

图解: 16

59. (5分) 题号 785 答案

图解: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

60. (5分) 题号 786 答案

图解: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

61. (5分) 题号 787 答案

图解: 9

62. (5分) 题号 788 答案

图解: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

63. (5分) 题号 789 答案

图解: $|2A^*| = 2^{2n-1}$

64. (5分) 题号 790 答案

图解: 0

65. (5分) 题号 791 答案

图解: $(a^2 - b^2)^n$

66. (5分) 题号 792 答案

图解: $A^n - 2A^{n-1} = 0$

67. (5分) 题号 793 答案

图解: $A^* = A$

68. (5分) 题号 794 答案

图解: $x = -1$

69. (5分) 题号 795 答案

图解: $|A+E|=0$

70. (5分) 题号 796 答案

图解: 0

71. (5分) 题号 797 答案

图解: -9

72. (5分) 题号 798 答案

图解:

$X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$

73. (5分) 题号 951 答案

图解: $-\frac{8}{27}$

74. (5分) 题号 956 答案

图解: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

75. (4分) 题号 964 答案

图解: 0

76. (5分) 题号 965 答案

图解: $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

77. (5分) 题号 966 答案

图解: $|A|^{n-1}$

78. (5分) 题号 975 答案

图解: $\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

79. (5分) 题号 976 答案

图解:

$|A|=0$ 或 $|B|=0$

80. (5分) 题号 978 答案

图解: $9A$

81. (3分) 题号 435 答案

82. (3分) 题号 436 答案

83. (3分) 题号 437 答案

84. (3分) 题号 438 答案

85. (3分) 题号 439 答案

86. (5分) 题号 593 答案

图解: $r = n, r < n$

87. (5分) 题号 594 答案

图解: 0

88. (5分) 题号 595 答案

图解: $\lambda \neq 1$

89. (5分) 题号 596 答案

图解: $A = 0$

90. (5分) 题号 597 答案

图解: $\left(2, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}\right)^T + k\left(\frac{5}{3}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{5}{3}\right)^T, k \in R$

91. (5分) 题号 598 答案

图解: $a_1 + a_2 + a_3 = 0$

92. (5分) 题号 599 答案

图解: $\lambda \neq 0, \lambda \neq 8, \lambda \neq 1$

93. (5分) 题号 600 答案

图解: $t = -3, |B| = 0$

94. (5分) 题号 601 答案

图解: $(1, \quad 1, \quad 1, \quad 1)^T + k(0, \quad 1, \quad 2, \quad 3)^T$

95. (5分) 题号 602 答案

图解： $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

96. (5分) 题号 603 答案

图解： $X=0$

97. (5分) 题号 604 答案

图解： 只有零解.

98. (5分) 题号 605 答案

图解： 无

99. (5分) 题号 606 答案

图解： $\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -\dfrac{4}{5}$

+02. (5分) 题号 718 答案

图解： -1

+02. (5分) 题号 719 答案

图解： 2

+02. (5分) 题号 720 答案

图解： 3

+02. (5分) 题号 726 答案

图解： $\alpha=(1,2,1)^T+k(1,5,1)^T$

+02. (5分) 题号 727 答案

图解： $\sum_{i=1}^{n-1}k_i\alpha_{j_i}$,α_{j_i}, $i=1,2,\cdots,$ $n-1$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的极大线性无关组

+02. (5分) 题号 764 答案

图解： $r(A^*B^*)=1$

+02. (5分) 题号 765 答案

图解：$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -4 & -2 & 12 \end{pmatrix}$

+02·(5分) 题号 766 答案

图解：2

+02·(5分) 题号 767 答案

图解：2

+02·(5分) 题号 959 答案

图解： 2

+02·(5分) 题号 971 答案

图解：

$\eta_1=(-2,\quad -1,\quad 1,\quad 0)^T$，$\eta_2=(-2,\quad 4,\quad 0,\quad 1)^T$

+02·(5分) 题号 742 答案

图解：2

+02·(5分) 题号 743 答案

图解：$a_1+a_2+a_3+a_4=1$

+02·(5分) 题号 967 答案

图解：3

+02·(3分) 题号 506 答案

+02·(3分) 题号 507 答案

+02·(3分) 题号 508 答案

+02·(3分) 题号 509 答案

+02·(3分) 题号 521 答案

+02·(3分) 题号 522 答案

+02·(3分) 题号 533 答案

+02·(3分) 题号 534 答案

+02·(3分) 题号 535 答案

+02·(3分) 题号 536 答案

+02·(3分) 题号 537 答案

+02·(4分) 题号 569 答案

图解：$a=-2,b=2,c=1$

+02·(4分) 题号 570 答案
图解：$\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}$ 的特征值为$-1,-2,1$

+02·(5分) 题号 571 答案
图解：$a=-2, b=6, \lambda_1=-4$

+02·(5分) 题号 572 答案
图解：$a=1, \lambda_2=\lambda_3=2$

+02·(5分) 题号 573 答案
图解：$x=4$

+02·(5分) 题号 574 答案
图解：$\left|A^3-5A^2\right|=-288$

+02·(5分) 题号 575 答案
图解：$\lambda=2$ 或 $\lambda=3$

+02·(5分) 题号 576 答案
图解：
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

+02·(5分) 题号 577 答案
图解：A^* 的特征值为$\frac{1}{24},\frac{1}{12},\frac{1}{8}$

+02·(5分) 题号 578 答案
图解：
A 必有特征值0,且其重数至少是$n-R(A)$

+02·(5分) 题号 579 答案
图解：$(B^*)^{-1}-2E$ 的特征值是$-\frac{5}{2},-\frac{3}{2},-3$

+02·(5分) 题号 580 答案

图解：$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}$

+02·(5分) 题号 581 答案

图解：$|\lambda|=1$

+02·(5分) 题号 582 答案

图解：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

+02·(5分) 题号 583 答案

图解：$\lambda=-5$

+02·(5分) 题号 584 答案

图解：$a=-1, b=8, c=6$

+02·(5分) 题号 585 答案

图解：

$k_1=0, k_2\neq 0$ 或 $k_1\neq 0, k_2=0$

+02·(5分) 题号 586 答案

图解：$A^T=A$

+02·(5分) 题号 587 答案

图解：

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

+02·(5分) 题号 588 答案

图解：$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

+02·(5分) 题号 589 答案

图解：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$

+02·(5分) 题号 590 答案

图解：

f 的秩为 3.

+02·(5分) 题号 591 答案

图解：

f 的秩为 4.

+02·(5分) 题号 592 答案

图解：$t>1$

+02·(5分) 题号 644 答案

图解：$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 8\\ 2 & 1 & 4\\ 8 & 4 & 16\end{pmatrix}$$

+02·(5分) 题号 645 答案

图解：$f=-x_1^2+4x_2^2+x_3^2+6x_1x_2+4x_1x_3+10x_2x_3$,其秩为3

+02·（5分） 题号 646 答案

图解：$A_1=1,A_2=1,A_3=2$,是正定二次型

+02·（5分） 题号 647 答案

图解：$-\frac{\sqrt{2}}{2}<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$

+02·（5分） 题号 648 答案

图解：$p=2,q=1,p-q=1$

+02·（5分） 题号 649 答案

图解：$c=3$

+02·（5分） 题号 650 答案

图解：n

+02·（5分） 题号 651 答案

图解：$a>0,p=3,q=1$

+02·（5分） 题号 652 答案

图解：$-\frac{5\sqrt{6}}{3}<t<\frac{5\sqrt{6}}{3}$

+02·（5分） 题号 653 答案

图解：$a=5,b=\pm 2$

+02·（5分） 题号 753 答案

图解：$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

+02·（5分） 题号 754 答案

图解：$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

+02·（5分） 题号 755 答案

图解：1，0，4

+02·（5分） 题号 756 答案

图解：3，-2，1

+02·（5分） 题号 757 答案

图解：$rank(A) = rank(B)$

+02·（5分） 题号 758 答案

图解：-6

+02·（5分） 题号 799 答案

图解：$\lambda \in (-2,1)$

+02·（5分） 题号 800 答案

图解：

$$-\frac{\sqrt{15}}{3} < \lambda < \frac{\sqrt{15}}{3}$$

+02·（5分） 题号 801 答案

图解：$|a| < \sqrt{7/2}$

+02·（5分） 题号 802 答案

图解：$A\beta = (-2,2,-4)^T$

+02·（5分） 题号 803 答案

图解：$(B-E)(B+E)^{-1}$

+02.(5分) 题号 804 答案

图解: $\frac{125}{2}$

+02.(5分) 题号 805 答案

图解: $|a|<\sqrt{7/2}$

+02.(5分) 题号 806 答案

图解: $\frac{9}{2}$

+02.(5分) 题号 958 答案

图解: $\frac{1}{5},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}$

+02.(5分) 题号 962 答案

图解: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

+02.(5分) 题号 970 答案

图解: $\frac{3}{8}$

+02.(5分) 题号 977 答案

图解: -8

三 计算题 (1955分)

1.(5分) 题号 55 答案

图解: 因为$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$

所以当$n=4k$或$n=4k+1(k\in N)$时,该排列为偶排列;

当$n=4k+2$或$n=4k+3(k\in N)$时，该排列为奇排列.

2.(5分) 题号 56 答案

图解: 因为$a_{1i}a_{32}a_{54}a_{2j}a_{45}$为5阶行列式的一项,它的行标构成的排列逆序数为

$\tau(13524)=3$(奇数),所以该项的列标构成的排列的逆序数为偶数.不妨设

$i=1, j=3,$ 则$\tau(12435)=1$.由此$\tau(13524)+\tau(12435)=4$(偶数).对换改变

排列的奇偶性,所以有$i=3, j=1$

3. (5分) 题号 59 答案

图解: $D^T=\begin{vmatrix}0 & -a & -b\\ a & 0 & c\\ b & -c & 0\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & -c\\ -b & c & 0\end{vmatrix}=-D\because D^T=D\therefore 2D=0\Rightarrow D=0$

4. (5分) 题号 60 答案

图解: 行列式D_1是由D的第1行依次与第$2,3,\cdots,n$行互换而得,所以有$D_1=(-1)^{n-1}D$

5. (5分) 题号 61 答案

图解: $D\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=}}\begin{vmatrix}a & a+3b & a+6b\\ b & b & b\\ 2b & 2b & 2b\end{vmatrix}=0$

6. (5分) 题号 148 答案

图解: $\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$。

7. (5分) 题号 149 答案

图解: $\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 3 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 12\end{vmatrix}=12$。

8. (5分) 题号 150 答案

图解: 第一列乘-1 加到第二列，并从第二列提取 1000，得

$$\begin{vmatrix} 34215 & 35215 \\ 28092 & 29092 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34215 & 1000 \\ 28092 & 1000 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 34215 & 1 \\ 28092 & 1 \end{vmatrix} = 6123000$$

9. (5分) 题号 151 答案

图解: 从第二行提取 2 之后，跟第一行互换，得

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 8。$$

10. (5分) 题号 152 答案

图解: 把第二、三、四行均加到第一行，并在第一行中提取 8，得

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 512。$$

11. (5分) 题号 153 答案

图解: 把第二、三、四行均加到第一行，并在第一行中提取 10，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160。$$

12. (5分) 题号 154 答案

图解: 这是一个第二行元素为 1、2、3、4 的范得蒙行列式，因此

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(4-1)\cdot(3-2)(4-2)\cdot(4-3) = 12。$$

13. (5分) 题号 155 答案

图解： 最后一列乘以-1 后，加到第一列，并按最后一行展开，得

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&2&0&0\\3&0&3&0\\4&0&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&2&3&4\\2&2&0&0\\3&0&3&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-3&2&3\\2&2&0\\3&0&3\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-6&2&3\\2&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}=-192。$$

14．(5分) 题号 156 答案

图解：

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&x\\1&x&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&x-1\\0&x-1&5\end{vmatrix}=-x^2+2x+4=1。$$

即解方程 $x^2-2x-3=0$，因此 x=3 或 -1。

15．(5分) 题号 157 答案

图解：

$$\begin{vmatrix}x&x&2\\0&-1&1\\1&2&x\end{vmatrix}=（x+2）（x-1）=0。$$

所以方程的解为：x=1 或－2。

16．(10分 题号 875 答案

图解：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&3&4\\1&1&2&3\\1&1&1&1\end{vmatrix}=6$$

17．(10分 题号 876 答案

图解：

$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$

18．(10分 题号 878 答案

图解:　　D 的第 3 行已经有一个零，把第 4 列的 2 倍加到第 1 列，又把第 3 列加第 4 列，然后按照第 3 行展开，得

$$D=\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ -13 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40$$

19.（10分　题号　879　　　　　答案

图解:
$$D=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6\times 2^3=48$$

20.（10分　题号　880　　　　　答案

图解:
$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix} a^2+1/a & b & c \\ a & b^2+1/b & c \\ a & b & c^2+1/c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2+1 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2+1 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+1 & b^2 & c^2 \\ a^2+b^2+c^2+1 & b^2+1 & c^2 \\ a^2+b^2+c^2+1 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}=(a^2+b^2+c^2+1)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ 1 & b^2+1 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$$=(a^2+b^2+c^2+1)\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2+c^2+1$$

21.（10分　题号　881　　　　　答案

图解:

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&1&1&1\\0&1-x&1&1\\0&1&1+y&1\\0&1&1&1-y\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-x&0&0\\0&0&y&0\\0&0&0&-y\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}1-x&1&1\\1&1+y&1\\1&1&1-y\end{vmatrix}$$

$$=xy^2+x\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+y&1\\1&1&1-y\end{vmatrix}-x^2\begin{vmatrix}1+y&1\\1&1-y\end{vmatrix}$$

$$=xy^2-xy^2+x^2y^2=x^2y^2$$

22.(10分 题号 882 答案

图解: 因为系数行列式 D=42≠0

所以方程组只有零解 x=0, y=0, z=0

23.(10分 题号 883 答案

图解: D=27，D_1=81 D_2=-108 D_3=-27 D_4=27

解得 $x_1=\frac{D_1}{D}=3, x_2=\frac{D_2}{D}=-4, x_3=\frac{D_3}{D}=-1, x_4=\frac{D_4}{D}=1$

24.(5分) 题号 57 答案

图解: 除符号差异外, D 的展开式各项可表示为

$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$

满足 $a_{3j_3}=0(j_3\geq 3), a_{4j_4}=0(j_4\geq 4), a_{5j_5}=0(j_5\geq 5)$

又 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 是1,2,3,4,5的任意排列,所以 j_3, j_4, j_5 中至少有一个大于 2,因此行列式展中至少有一个元素为 0,有 $D=0$.

25.(5分) 题号 58 答案

图解: 因为n阶行列式D_n中共有n^2个元素,且其中等于零的元素个数比n^2-n多,所以非零比$n^2-(n^2-n)=n$少.因此行列式展开式中至少有一个元素为0,有$D_n=0$

26.(5分) 题号 62 答案

图解:
$$D \overset{r_i-r_1}{\underset{i=2,3,4}{=}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = b_1b_2b_3$$

27.(5分) 题号 63 答案

图解:
$$D=D_1+D_2$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$

$$D_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ 0 & a_2-a_1 & a_2-a_1 \\ 0 & a_3-a_1 & a_3-a_1 \end{vmatrix}=0$$

$$D=0$$

28.(5分) 题号 64 答案

图解: 由于方程组的系数行列式
$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

所以,由克莱姆法则知,当$(\lambda+2)(\lambda-1)^2\neq 0$,即$\lambda\neq -2$且$\lambda\neq 1$时,方程组有唯一零解.

当$\lambda=-2$或$\lambda=1$时,方程组有非零解.

29.(5分) 题号 158 答案

图解：

$$\begin{vmatrix}4a_{11} & 2a_{12}-3a_{11} & -a_{13}\\4a_{21} & 2a_{22}-3a_{21} & -a_{23}\\4a_{31} & 2a_{32}-3a_{31} & -a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4a_{11} & 2a_{12} & -a_{13}\\4a_{21} & 2a_{22} & -a_{23}\\4a_{31} & 2a_{32} & -a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4a_{11} & -3a_{11} & -a_{13}\\4a_{21} & -3a_{21} & -a_{23}\\4a_{31} & -3a_{31} & -a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=-8\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+12\begin{vmatrix}a_{11} & a_{11} & a_{13}\\a_{21} & a_{21} & a_{23}\\a_{31} & a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=-8+0=-8。$$

30.（5分） 题号 159 答案

图解：

$$\begin{vmatrix}2a_{22}-3a_{21} & 4a_{21} & a_{23}\\2a_{12}-3a_{11} & 4a_{11} & a_{13}\\2a_{32}-3a_{31} & 4a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a_{22} & 4a_{21} & a_{23}\\2a_{12} & 4a_{11} & a_{13}\\2a_{32} & 4a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-3a_{21} & 4a_{21} & a_{23}\\-3a_{11} & 4a_{11} & a_{13}\\-3a_{31} & 4a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=8\begin{vmatrix}a_{22} & a_{21} & a_{23}\\a_{12} & a_{11} & a_{13}\\a_{32} & a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-12\begin{vmatrix}a_{21} & a_{21} & a_{23}\\a_{11} & a_{11} & a_{13}\\a_{31} & a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=-8\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-0$$

$$=8\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=8。$$

31.（5分） 题号 160 答案

图解：

$$\begin{vmatrix}x & y & x+y\\y & x+y & x\\x+y & x & y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y)\\y & x+y & x\\x+y & x & y\end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\y & x+y & x\\x+y & x & y\end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\y & x & x-y\\x+y & -y & -x\end{vmatrix}$$

32.（5分） 题号 161 答案

$$-2(x^3+y^3)$$

图解:　　将第二、三、四列展开得:

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} a^2 & a^2-2a+1 & a^2-4a+4 & a^2-6a+9 \\ b^2 & b^2-2b+1 & b^2-4b+4 & b^2-6b+9 \\ c^2 & c^2-2c+1 & c^2-4c+4 & c^2-6c+9 \\ d^2 & d^2-2d+1 & d^2-4d+4 & d^2-6d+9 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & -2a+1 & -4a+4 & -6a+9 \\ b^2 & -2b+1 & -4b+4 & -6b+9 \\ c^2 & -2c+1 & -4c+4 & -6c+9 \\ d^2 & -2d+1 & -4d+4 & -6d+9 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & -2a & -4a+4 & -6a+9 \\ b^2 & -2b & -4b+4 & -6b+9 \\ c^2 & -2c & -4c+4 & -6c+9 \\ d^2 & -2d & -4d+4 & -6d+9 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^2 & 1 & -4a+4 & -6a+9 \\ b^2 & 1 & -4b+4 & -6b+9 \\ c^2 & 1 & -4c+4 & -6c+9 \\ d^2 & 1 & -4d+4 & -6d+9 \end{vmatrix}=\mathbf{0}。$$

33.(5分)　题号　162　　　　　答案

图解:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}+(-b_4)\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)。$$

34.(5分)　题号　163　　　　　答案

图解:　　按第一列展开

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}=a^5+b^5。$$

35.(5分)　题号　164　　　　　答案

图解:　　按最后一列展开

$$\begin{vmatrix}0&0&0&b&a\\0&0&b&a&0\\0&b&a&0&0\\b&a&0&0&0\\a&0&0&0&b\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}0&0&b&a\\0&b&a&0\\b&a&0&0\\a&0&0&0\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}0&0&0&b\\0&0&b&a\\0&b&a&0\\b&a&0&0\end{vmatrix}=a^5+b^5。$$

36.（10分　题号 219　　　答案

图解:　　用 D 表示所给的行列式，把 D 分成两个行列式相加：

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1&1&x-1\\0&-1&x+1&-1\\0&x-1&1&-1\\x&-1&1&-1\end{vmatrix}$$

将右边第一个行列式的第一列加到第二、第四列，用－1乘第一列后加到第三列；将第

行列式变成三阶行列式后再拆成两个三阶行列式相加，

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&x\\1&0&x&0\\1&x&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}-1&1&x-1\\-1&x+1&-1\\-1&1&-1\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}0&1&x-1\\0&x+1&-1\\x&1&-1\end{vmatrix}$$

37.（10分　题号 229　　　答案

x^4

图解:

设 $A=\begin{pmatrix}b&-a&0\\0&-2c&3b\\c&0&a\end{pmatrix}$，由于 $abc\neq 0$，则

$$\det A=\begin{vmatrix}b&-a&0\\0&-2c&3b\\c&0&a\end{vmatrix}=-5abc\neq 0。$$

故方程组有唯一解。又

$$\det B_1=\begin{vmatrix}-2ab&-a&0\\bc&-2c&3b\\0&0&a\end{vmatrix}=5a^2bc，,$$

$$\det B_2=\begin{vmatrix}b&-2ab&0\\0&bc&3b\\c&0&a\end{vmatrix}=-5ab^2c,$$

38.（10分　题号 230　　　答案

$$_3\ \begin{vmatrix}b&-a&-2ab\\0&-2c&bc\\c&0&0\end{vmatrix}\qquad ^2$$

$$_1\ \frac{\det B_1}{\det A}\qquad _2\ \frac{\det B_2}{\det A}\qquad _3\ \frac{\det B_3}{\det A}$$

图解:

$$设\ A=\begin{pmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{pmatrix}\ 由于\ a\neq b\ 且\ a\neq -\frac{b}{2}\ ,$$

$$\det A=\begin{vmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}=\ -(a-b)^2(2a+b)\ \neq 0。$$

故方程组有唯一解。又

$$\det B_1=\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix}=\ -(a-b)^2,$$

$$\det B_2=\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ a & 1 & a \\ b & 1 & a \end{vmatrix}=\ -(a-b)^2,$$

39.（10分 题号 231 答案

$$_3\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a & b & 1 \\ b & a & 1 \end{vmatrix}\qquad ^2$$

$$x_1=x_2=x_3=\frac{1}{2a+b}$$

图解:

$$\text{设 } A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & -7 & 3 & 1\end{pmatrix}\text{，则}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & -7 & 3 & 1\end{vmatrix}=16,$$

$$\det B_1=\begin{vmatrix}4 & -2 & 3 & -4\\ -3 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0 & 1\\ -3 & -7 & 3 & 1\end{vmatrix}=-128,$$

$$\det B_2=\begin{vmatrix}1 & 4 & 3 & -4\\ 0 & -3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 3 & 1\end{vmatrix}=48,$$

$$\det B_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 4 & -4\\ 0 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & -7 & -3 & 1\end{vmatrix}=96,$$

$$\det B_4=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & -1 & -3\\ 1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & -7 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

40.（10分 题号 232 答案

图解: 方程组的系数行列式为

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ k & 7 & -2\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=63-5k,$$

由克拉默法则知 $k\neq\dfrac{63}{5}$ 时， $\det A\neq 0$ ，方程组仅有零解。

41.（10分 题号 233 答案

图解:　　方程组的系数行列式为

$$\det A=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=（k+1）(k-4),$$

由克拉默法则知 $k\neq-1$ 且 $k\neq 4$ 时，$\det A\neq 0$，方程组仅有零解。

42.（10分 题号 460 答案

43.（5分） 题号 461 答案

44.（5分） 题号 462 答案

45.（5分） 题号 463 答案

46.（5分） 题号 464 答案

47.（10分 题号 689 答案

图解: 利用初等行变换，简化行列式即得 $D=40$。

48.（10分 题号 690 答案

图解: 利用初等行变换，简化行列式，再利用行列式的性质即得 $D=0$。

49.（10分 题号 691 答案

图解: 利用初等列变换（第 1 列乘以-1 加到其它各列，再对后 3 列类似处理） $D=0$。

50.（10分 题号 692 答案

图解: 利用初等列变换（第 1 行乘以-1 分别加到第 2 至 n 行）即得 $D=n!$。

51.（10分 题号 693 答案

图解: 利用初等变换（第 2 行乘以-1 加到后面各行，然后将第 2 列乘以-1 加到后面各列，再

式展开定理即得），$D=-2(n-2)!$

52.（10分 题号 694 答案

图解: 第 1 行乘以-1 加到第 2 行，第 2 行再乘以-1 加到第 3 行，以此类推即得 $D=1$。

53.（10分 题号 695 答案

图解: 将第 $n-1$ 列乘以-1 加到第 n 列，再将第 $n-2$ 列乘以-1 加到第 $n-1$ 列，以此类推；然

行乘以（-1）依次加到第 2 至 n 行，再利用行列式展开定理即得

$D_2=x_1-x_2;D_n=0(n>2)$。

54.（10分 题号 696 答案

图解：将第 2 至 n 行依次加到第 1 行，再提出第 1 行的公因子，然后利用初等行变换化简行

$D_n = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$。

55. (10分　题号　697　　　　答案

图解：将第 1 行乘以（-1）依次加到第 2 至 n 行，然后再将第 2 行乘以（-1）依次加到第 $3\sim n$
复上述过程 $n-1$ 步即得 $D=1$。

56. (10分　题号　698　　　　答案

图解：利用行列式展开定理，将行列式按照第 1 列展开即得 $D_n = y^n + (-1)^{n+1}x^n$。

57. (10分　题号　825　　　　答案

图解：$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

58. (10分　题号　826　　　　答案

图解：

$$D = \begin{vmatrix} 0 & y & 0 & x \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ y & 0 & x & 0 \end{vmatrix} = -y\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & y \\ y & x & 0 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ y & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= y^2\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} - x^2\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = -(x^2-y^2)^2$$

59. (10分　题号　827　　　　答案

图解：

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&-1&0&0\\3&1&0&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&-2\end{vmatrix}=-2\times\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&2&-1&0\\3&1&0&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=-4\times\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\3&1&0\end{vmatrix}$$

$$=-4\times\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\3&1&-3\end{vmatrix}=-4\times\begin{vmatrix}2&-1\\1&-3\end{vmatrix}=20$$

60.（10分　题号 828　　　答案

图解：$$\begin{vmatrix}1&x&yz\\1&y&zx\\1&z&xy\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x&yz\\0&y-x&-z(y-x)\\0&z-x&-y(z-x)\end{vmatrix}=(y-x)(z-x)\begin{vmatrix}1&-z\\1&-y\end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)$$

61.（10分　题号 829　　　答案

图解：$$\begin{vmatrix}5&3&0&0&0\\2&5&3&0&0\\0&2&5&3&0\\0&0&2&5&3\\0&0&0&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0&0&0\\2&5&3&0&0\\0&2&5&3&0\\0&0&2&5&3\\0&0&0&2&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&3&0&0&0\\0&5&3&0&0\\0&2&5&3&0\\0&0&2&5&3\\0&0&0&2&5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&3&0&0&0\\0&2&3&0&0\\0&0&2&3&0\\0&0&0&2&3\\0&0&0&0&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&3&0&0&0\\0&5&3&0&0\\0&2&5&3&0\\0&0&2&5&3\\0&0&0&2&5\end{vmatrix}=2^5+3\begin{vmatrix}5&3&0&0\\2&5&3&0\\0&2&5&3\\0&0&2&5\end{vmatrix}=\cdots=665$$

62.（10分　题号 830　　　答案

图解: $\begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & x_1+y_4 \\ x_2+y_1 & x_2+y_2 & x_2+y_3 & x_2+y_4 \\ x_3+y_1 & x_3+y_2 & x_3+y_3 & x_3+y_4 \\ x_4+y_1 & x_4+y_2 & x_4+y_3 & x_4+y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ x_2+y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ x_3+y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ x_4+y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \end{vmatrix}$

=0

63.(10分 题号 849 答案

图解:

$$D_n = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} b_n \times \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ a_n \times \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \frac{b_n}{a_n} + a_n D_{n-1} = \cdots = a_1 a_2 \cdots a_n (\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i})$$

64.(10分 题号 851 答案

图解:

由第 i（$i=1,2,\cdots,n$）列的 $-\dfrac{1}{x_i}$ 倍加到第一列上去.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = -x_1 x_2 \cdots x_n (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i})$$

65.(10分 题号 852 答案

图解：
$$\begin{vmatrix}1+x_1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+x_2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+x_3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+x_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x_1 & -x_1 & -x_1 & -x_1\\ 1 & x_2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & x_3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & x_4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+x_1+\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_1}{x_3}+\dfrac{x_1}{x_4} & -x_1 & -x_1 & -x_1\\ 0 & x_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & x_4\end{vmatrix}=x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3$$

66. (10分 题号 853 答案

图解：
$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 0 & \cdots & 0\\ 2 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 2 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}=-2(n-2)!$$

67. (10分 题号 854 答案

图解：
$$D_n=\begin{vmatrix}2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n+1 & 1 & \cdots & 1\\ n+1 & 2 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ n+1 & 1 & \cdots & 2\end{vmatrix}=(n+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 2\end{vmatrix}$$

$$=(n+1)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=n+1$$

68. (10分 题号 855 答案

图解:

由齐次线性方程组有非零解的条件可知 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & \mu-1 \\ \mu-3 & 1 & -2 \\ -1 & 1-\mu & -1 \end{vmatrix}=0$

解之得 μ=0,2,3. 于是当 μ=0，2，3 时，齐次方程组 $\begin{cases} 2x_1+4x_2+(\mu-1)x_3=0 \\ (\mu-3)x_1+x_2-2x_3=0 \\ -x_1+(1-\mu)x_2-x_3=0 \end{cases}$ 有非

69.（10分） 题号 871 答案

图解:

$6x^2$

70.（5分） 题号 66 答案

图解:

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$BA=\left(b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n\right)$$

71.（5分） 题号 67 答案

图解: $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, CD=DC=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$

72.（5分） 题号 68 答案

图解: $AB=\begin{pmatrix} 75 \\ 80 \\ 400 \end{pmatrix}, AC=\begin{pmatrix} 75 \\ 80 \\ 400 \end{pmatrix}$

73.（5分） 题号 69 答案

图解: $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=B \therefore A^n=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B^n=B$

74. (5分) 题号 70 答案

图解:

$$|2A| = 2^2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix} = 4\times(-2) = -8, |B| = 0, |C| = 0$$

75. (5分) 题号 118 答案

图解:

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 6\\ 7 & -1\end{pmatrix}。$$

76. (5分) 题号 119 答案

图解:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 5\\ 0 & 0\end{pmatrix}。$$

77. (5分) 题号 120 答案

图解:

$$\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

78. (5分) 题号 121 答案

图解:

$$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}。$$

79. (5分) 题号 122 答案

图解:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = 14。$$

80. (5分) 题号 123 答案

图解:

$$\begin{pmatrix}4 & 0 & -1 & 6\\ -1 & 2 & 5 & 3\\ 3 & 7 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -1\\ 2 & 0\\ -4 & 7\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30 & 7\\ -18 & 45\\ 23 & -2\end{pmatrix}。$$

81. (5分) 题号 124 答案

图解：

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\0 & 1 & 1\\3 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=15。$$

82.（5分） 题号 134 答案

图解：$\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

83.（5分） 题号 135 答案

图解：

$\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1 & 3n\\0 & 1\end{pmatrix}$。下面用数学归纳法证明。

当 $n=1$ 时，当然成立。假定 $n=k$ 时成立，即

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1 & 3k\\0 & 1\end{pmatrix}。$$

再证 $n=k+1$ 时也成立。

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3k\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3(k+1)\\0 & 1\end{pmatrix}。$$

84.（5分） 题号 136 答案

图解：$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n & 0 & 0\\0 & b^n & 0\\0 & 0 & c^n\end{pmatrix}$，可用数学归纳法证明之。

85.（5分） 题号 137 答案

图解:
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^n$$

当 n=1 时，值为原矩阵；

当 n=2 时，$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；

当 n=3 时，$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；

$n\geq 4$ $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

86.（5分） 题号 138 答案

图解: $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&3&6&10\\0&1&3&6\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

87.（10分 题号 675 答案

图解: $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},BA=\begin{pmatrix}3&3\\-3&-3\end{pmatrix},CD=DC=\begin{pmatrix}6&-2\\14&10\end{pmatrix}$

88.（10分 题号 676 答案

图解: $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},B^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=B\therefore A^n=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},B^n=B$

89.（10分 题号 677 答案

图解: $|2A|=2^2\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}=4\times(-2)=-8,|B|=0,|C|=0$

90.(10分 题号 678 答案

图解: 由于 $A=\lambda E+B$

其中 $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

则有 $B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},B^3=B^4=\cdots=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

所以 $A^n=(\lambda E+B)^n=\lambda^n E+C_n^1\lambda^{n-1}B+C_n^2\lambda^{n-2}B^2$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2}\\0 & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1}\\0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$$

故有 $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}^{50}=\begin{pmatrix}\lambda^{50} & 50\lambda^{49} & 1225\lambda^{48}\\0 & \lambda^{50} & 50\lambda^{49}\\0 & 0 & \lambda^{50}\end{pmatrix}$

91.(10分 题号 884 答案

图解: 因为$|A|=-7\neq0$，故 A 可逆，且 $A_{11}=1$ $A_{21}=-3$ $A_{31}=-1$ $A_{12}=-2$，$A_{22}=-1$ A_{32}

$A_{13}=-6$ $A_{23}=-3$ $A_{33}=-1$

得 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\-2 & -1 & 2\\-6 & -3 & -1\end{pmatrix}$

验证: $A^{-1}A=E$

92.(10分 题号 885 答案

图解:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \qquad A_1=(5) \qquad A_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad A_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

故 $$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

93.（10分 题号 886 答案

图解:

$$A\xrightarrow{[1,2]}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow[{[4+1(-2)]}]{[3+1(1)]}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[4+2(3)]}]{[3+2(1)]}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow[{[2+1(-4)]\ [3+1(1)]}]{[4+3(-1)]}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2(-1)]\ [3(-\frac{1}{2})]}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[{[2,3]}]{}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[{[3,4]}]{}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

94.（10分 题号 887 答案

图解:　　因为$|A|=1\neq 0$，所以A可逆，作

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\2&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[{[3+1(-2)]}]{[2+1(1)]}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&1&1&0\\0&-1&-1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{[3+2(1)]}=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&1&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[{[2+3(-2)]}]{[1+3(-1)]}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&-1&-1\\0&1&0&3&-1&-2\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)$$

故　　$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&-1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}$

95.（10分　题号　888　　　　答案

图解:　　由矩阵方程得

$$AX(A-B)+BX(B-A)=E$$

即　　$(A-B)X(A-B)=E$

上式两边取行列式，知$|A-B|\cdot|X|\cdot|A-B|=|E|=1$

故知$|A-B|\neq 0$，故$(A-B)^{-1}$存在，上面方程左、右均乘$(A-B)^{-1}$，得

$$X=[(A-B)^{-1}]^2=\left[\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\right]^2=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

96.（10分　题号　71　　　　答案

图解:

$$A = BC = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BC = (2)$$

$$A^2 = (BC)(BC) = B(CB)C = 2BC = 2A$$

$$A^3 = (BC)(BC)(BC) = B(CB)(CB)C = 2^2 A$$

$$A^4 = A^3 A = 2^3 A$$

$$A^n = 2^{n-1} A = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

97.（5分） 题号··77　　　　　答案

图解:

由 $AX + E = A^2 + X$ 得

$$(A - E)X = (A - E)(A + E)$$

而 $$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A - E| = -1 \neq 0$ 可逆,所以有

$$X = (A - E)^{-1}(A - E)(A + E) = A + E$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

98.（5分） 题号　115　　　　　答案

图解:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & -7 \end{pmatrix};$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -6 & 3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -8 \\ 12 & -1 & -19 \end{pmatrix}。$$

99.（5分） 题号　116　　　　　答案

图解：

设 $X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，

则 $X-2A=\begin{pmatrix} x_1-4 & x_2+2 \\ x_3+2 & x_4-4 \end{pmatrix}$，$B-X=\begin{pmatrix} -x_1 & -2-x_2 \\ -2-x_3 & -x_4 \end{pmatrix}$。

利用矩阵相等的定义可得：

$$X=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}。$$

+02·（5分） 题号 140 答案

图解：

A^2 的第 k 行第 l 列为 $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}a_{jl}$，

AA^{T} 的第 k 行第 l 列为 $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}a_{lj}$，

$A^{\mathrm{T}}A$ 的第 k 行第 l 列为 $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}a_{il}$。

+02·（5分） 题号 141 答案

图解： 依定义得：

$$f(A)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

+02·（5分） 题号 142 答案

图解： 依定义得：

$$f(A)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}。$$

+02·（5分） 题号 179 答案

图解： 因为 $|A_1,2A_3,A_2|=2|A_1,A_3,A_2|=-2|A_1,A_2,A_3|$。

所以 $|A_1,2A_3,A_2|=-2|A_1,A_2,A_3|$=4。

+02·（5分） 题号 180 答案

图解:

因为 $\left|A_3-2A_1,3A_2,A_1\right|=\left|A_3,3A_2,A_1\right|-2\left|A_1,3A_2,A_1\right|=-3\left|A_1,A_2,A_3\right|$。

所以 $\left|A_3-2A_1,3A_2,A_1\right|=-3\left|A_1,A_2,A_3\right|$=6。

+02.（5分） 题号 183 答案

图解: 令所给的矩阵为 A，

因为 det$A$=0, 所以此矩阵不可逆。

+02.（10分 题号 191 答案

图解:

因为$\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-1&2\\3&0&-1\end{pmatrix}$,

所以，$X=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&-1&2\\3&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1&2\\3&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-2&9\\5&1&-5\end{pmatrix}$。

+02.（10分 题号 192 答案

图解:

因为$\begin{pmatrix}2&1\\-2&3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\-6&1\end{pmatrix}$,

所以 $X=\begin{pmatrix}2&1\\-2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2&3\\-6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}&-\frac{1}{8}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\-6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$。

+02.（10分 题号 193 答案

图解:

因为 $X\begin{pmatrix}1&0&5\\1&1&2\\1&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&-6\end{pmatrix}$,

所以 $X=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&5\\1&1&2\\1&2&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}$

+02.（10分 题号 194 答案

图解：　因为 $AX+B=X$，所以 $X=(E-A)^{-1}B$，

又　　$E-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，

因此，　$X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$。

+02·（10分　题号　218　　　　答案

图解：

因为 $A^n=(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)\cdots(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)$

$$=\alpha^{\mathrm{T}}\underbrace{(\beta\alpha^{\mathrm{T}})\cdots(\beta\alpha^{\mathrm{T}})}_{n-1\text{个}}\beta,$$

其中　$\beta\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=3$，

所以　$A^n=3^{n-1}\alpha^{\mathrm{T}}\beta=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$。

+02·（10分　题号　227　　　　答案

图解：

因为 $A^{-1}BA=6A+BA \Leftrightarrow (A^{-1}-E)BA=6A$

$$\Leftrightarrow B=6(A^{-1}-E)^{-1}AA^{-1}$$

$$\Leftrightarrow B=6(A^{-1}-E)^{-1}$$

所以，　$B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。

+02·（5分）题号　477　　　　答案

+02·（10分　题号　478　　　　答案

+02·（10分　题号　479　　　　答案

+02·（10分　题号　709　　　　答案

图解:

$|A|=\begin{vmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{vmatrix}=13\neq 0$，所以 A 可逆。由条件 $AB=A+2B$ 知，$B=(A-2E)^{-1}A$

$$B=(A-2E)^{-1}A=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{bmatrix}。$$

+02·（10分 题号 710 答案

图解:

由 $AX+B=X$ 得，$X=(E-A)^{-1}B$，其中 E 为3阶单位矩阵，

所以 $X=(E-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{bmatrix}$。

+02·（10分 题号 711 答案

图解:

由条件知 $AB+E=A^2+B\Rightarrow(A-E)B=A^2-E=(A-E)(A+E)$，

且 $A-E$ 可逆，所以 $B=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$。

+02·（10分 题号 712 答案

图解:

（1）由 $AB=A+B\Rightarrow(A-E)(B-E)=E$，利用逆矩阵的定义知，$A-E$ 可逆，

且 $(A-E)^{-1}=B-E$；（2）由（1）知，$B=(A-E)^{-1}+E$，且

$(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$，所以 $B=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$。

+02·（10分 题号 713 答案

图解:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},|A|=4,A^*=|A|A^{-1}\Rightarrow(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A,$$

根据 $A^*B=A^{-1}+2B$，得 $B=(A^*)^{-1}(A^{-1}+2B)=\frac{1}{4}(E+2AB)$，

移项得 $B=\frac{1}{4}(E-\frac{1}{2}A)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$。

+02.（10分 题号 714 答案

图解:

已知 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$，首先计算矩阵 A，利用求逆方法得 $A=\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

根据 $AA^*=|A|E$，则 $A^*=|A|A^{-1}\Rightarrow(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=|A^{-1}|A=\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

+02.（10分 题号 715 答案

图解:

$$A^2-AB=E\Rightarrow A(A-B)=E\Rightarrow A-B=A^{-1}\Rightarrow B=A+A^{-1}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow B=A+A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

+02.（10分 题号 954 答案

图解:

$$|A|=-\frac{1}{4},A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 6\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix},(A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -6\\ 0 & -4 & -10\end{bmatrix}$$

+02.（5分） 题号 206 答案

图解：

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},$$

所以，此矩阵的秩为 1。

+02.（5分） 题号 207 答案

图解：

令 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$，因为 $\det A=-12$，不为零。

所以，此矩阵的秩为 3。

+02.（5分） 题号 208 答案

图解：

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\4 & -2 & 2\\6 & -3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以，此矩阵的秩为 1。

+02.（5分） 题号 209 答案

图解：

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 3\\0 & -\frac{5}{2}\\0 & 0\end{pmatrix},$$

所以，此矩阵的秩为 2。

+02.（5分） 题号 210 答案

图解：

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\2 & 0 & -3 & 2 & 1\\1 & 3 & 6 & 1 & 2\\4 & 2 & 6 & 4 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\0 & -2 & -5 & 0 & -1\\0 & 0 & 7 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以，此矩阵的秩为 3。

+02.（5分） 题号 211 答案

图解：

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & 0 & 2\\2 & 5 & -4 & -2 & 9\\3 & 3 & -1 & -1 & 8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 2\\0 & -3 & 4 & 1 & -3\\0 & 0 & 2 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以，此矩阵的秩为 3。

+02·（10分 题号 889 答案

图解： 作行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&5\\1&3&6\end{vmatrix}=1\cdot(-)^{1+1}\begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&1\\2&5\end{vmatrix}=0$$

故可知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关。

+02·（10分 题号 890 答案

图解： 对A作初等行变换

$$A\xrightarrow{[1,2]}\begin{pmatrix}1&4&-1&0&2\\0&0&-1&-1&2\\-1&-4&2&-1&0\\2&8&1&1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&4&-1&0&2\\0&0&-1&-1&2\\0&0&1&-1&2\\0&0&3&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&4&-1&0&2\\0&0&-1&-1&2\\0&0&0&-2&4\\0&0&0&-2&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&4&-1&0&2\\0&0&-1&-1&2\\0&0&0&-2&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此得$rank(A)=3$

+02·（10分 题号 891 答案

图解:

作矩阵 $A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}$

对 A 作初等行变换:

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \alpha_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{array}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \alpha_3 \\ \alpha_1-2\alpha_3 \\ \alpha_2+\alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \alpha_3 \\ \alpha_1-2\alpha_3 \\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 \\ \alpha_1-2\alpha_3+\alpha_4 \end{array}$$

得 $rank(A)=2$，表明原向量组的秩为 2，其极大线性无关组和含有 2 个向

再 由 A 行 变 换 最 后 的 一 个 矩 阵 的 最 后 两 个 向 量 为 0 ，

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=\theta \\ \alpha_1-2\alpha_3+\alpha_4=\theta \end{cases}$$

+02.(10分 题号 85 答案

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$

$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

图解: P 左乘矩阵 A 相当于把矩阵 A 的第 1,3 行交换位置,它的 40 次幂相当于把矩阵 A 的第 1
交换位置 40 次,仍为矩阵 A.

Q 右乘矩阵 A 相当于把矩阵 A 的第 2,3 列交换位置,它的 31 次幂相当于把矩阵 A 的第

列交换位置 31 次,结果为矩阵 A 的第 2,3 列交换位置. α_1,α_2 α_1,α_2

所以 $P^{40}AQ^{31}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ α_1,α_2

+02.(10分 题号 88 答案

图解: $\because |A| = 3 \neq 0$, A 可逆, $\therefore X = A^{-1}B$

$$(A \,\vdots\, B) = \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = (E \,\vdots\, A^{-1}B)$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

+02·(5分) 题号 186 答案

图解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}。$$

+02·(5分) 题号 187 答案

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

图解:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

+02·(5分) 题号 188 答案

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

图解：$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&1&0\\ 1&1&1&1&0&0&0&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&-1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&-1&1 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&-1&1\\ 0&1&0&0&0&-1&1&0\\ 0&0&1&0&-1&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \end{pmatrix},$$

所以，其逆矩阵为 $\begin{pmatrix} 0&0&-1&1\\ 0&-1&1&0\\ -1&1&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}$。

+02·(10分 题号 189 答案

图解：$\begin{pmatrix} 5&2&0&0&1&0&0&0\\ 2&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&-2&0&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5&2&0&0&1&0&0&0\\ 0&\frac{1}{5}&0&0&-\frac{2}{5}&1&0&0\\ 0&0&1&-2&0&0&1&0\\ 0&0&0&3&0&0&-1&1 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 5&0&0&0&5&-10&0&0\\ 0&\frac{1}{5}&0&0&-\frac{2}{5}&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ 0&0&0&3&0&0&-1&1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&-2&0&0\\ 0&1&0&0&-2&5&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ 0&0&0&1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

所以，其逆矩阵为 $\begin{pmatrix} 1&-2&0&0\\ -2&5&0&0\\ 0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\ 0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3} \end{pmatrix}$。

+02·(10分 题号 190 答案

图解:
$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以，其逆矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} \end{pmatrix}$$

+02.(10分 题号 234 答案

图解:

设方程组的增广矩阵为$\overline{A}$,对$\overline{A}$进行初等变换

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以与原方程组等价的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = -1 \\ 7x_3 = -2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{10}{7}, x_1 = -\frac{1}{7}, x_1 = -\frac{2}{7}$$

+02.(10分 题号 235 答案

图解:

设方程组的增广矩阵为$\overline{A}$,对$\overline{A}$进行初等变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2&2\\3&-1&5&-3&1&6\\2&1&2&-2&-1&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2&2\\0&5&-4&0&-5&0\\0&5&-4&0&-5&4\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&2&2\\0&5&-4&0&-5&0\\0&0&0&0&0&4\end{pmatrix}$$

由最后得到的梯形矩阵最后一行知方程组无解。

+02·(10分 题号 236 答案

图解:

设方程组的增广矩阵为$\overline{A}$,对$\overline{A}$进行初等变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&5&7&9\\2&3&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-1&-2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

最后得到的梯形矩阵对应的梯形方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_3=-2\\-x_2-2x_3=-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=c-2\\x_2=-2c+3\\x_3=c\end{cases}$$

+02·(10分 题号 444 答案

+02·(10分 题号 445 答案

+02·(10分 题号 732 答案

图解:将给定的向量按行排列成矩阵,利用初等行变换将其化为阶梯形矩阵即可:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&2&0&\alpha_1\\7&0&14&3&\alpha_2\\2&-1&0&1&\alpha_3\\5&1&6&2&\alpha_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&3&2&0&\alpha_1\\0&-7&-4&1&\alpha_3-2\alpha_1\\0&0&0&0&\alpha_2+2\alpha_1+3\alpha_3-3\alpha_4\\0&0&4&0&\alpha_4-\alpha_1-2\alpha_3\end{array}\right]$$

所以该向量组的秩为 3,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一个最大无关组,且$\alpha_2=-2\alpha_1-3\alpha_3+3\alpha_4$。

+02·(10分 题号 734 答案

图解：利用秩的定义和初等行变换将向量按行排成的矩阵化为阶梯形矩阵即得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & x & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & x-3 & 0 \end{bmatrix}$$

因为该向量组的秩为 2，则非零行数为 2，所以 $x=3$。

+02.（10分 题号 735 答案

图解：将给定的向量按行排列成矩阵，利用初等行变换将其化为阶梯形矩阵即可：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & \alpha_1 \\ 0 & 2 & 1 & \alpha_2 \\ -2 & 4 & 3 & \alpha_3 \\ -1 & 1 & 1 & \alpha_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \alpha_4 \\ 0 & 2 & 1 & \alpha_2+\alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3-3\alpha_4-\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_4 \end{array}\right]$$

所以该向量组的秩为 2，α_2,α_4 是一个最大无关组，且有 $\alpha_3=\alpha_2+3\alpha_4$， $\alpha_1=2\alpha_2+2\alpha_4$

+02.（10分 题号 738 答案

图解：

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，即 $\begin{cases} -k_1+xk_2+5k_3=0 \\ 2k_1-4k_3=0 \\ k_1+2k_2=0 \\ k_1-2k_3=0 \end{cases}$，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 k_1,k_2,k_3

不全为零，由方程组知，$k_1=-2k_2,k_1=2k_3$，故 k_1,k_2,k_3 均不为零，得 $x=3$。

+02.（10分 题号 739 答案

图解：将给定的向量按行排列成矩阵，利用初等行变换将其化为阶梯形矩阵即可：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & \alpha_1 \\ 1 & 1 & 2 & \alpha_2 \\ 1 & -3 & 3 & \alpha_3 \\ 4 & 0 & 5 & \alpha_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \alpha_2 \\ 0 & -4 & 5 & \alpha_1-3\alpha_2 \\ 0 & 0 & -4 & \alpha_3+2\alpha_2-\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4-2\alpha_3-5\alpha_2+\alpha_1 \end{array}\right]$$

（1）由 $\alpha_4-2\alpha_3-5\alpha_2+\alpha_1=0$ 可知：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；

（2）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个最大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$。

+02.（10分 题号 892 答案

图解:　　对其增广矩阵施行初等行变换

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&2\\2&3&1&1&-3&0\\1&0&2&2&6&6\\4&5&3&3&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&2\\0&1&-1&-1&-5&-4\\0&-1&1&1&5&4\\0&1&-1&-1&-5&-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&2\\0&1&-1&-1&-5&-4\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_1$$

可见 $rank(A)=rank(B)=2<5$

方程组有无穷多解。

通常为了求解方便，一般在最后一个矩阵 B_1 中选取不为零的 2 阶子式

续施行初等行变换，把选定的 2 阶子式所对应的子块化成单位矩阵，如:

$$B_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&2\\0&1&-1&-1&-5&-4\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&2&6&6\\0&1&-1&-1&-5&-4\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B_2$$

由 B_2 得方程组的同解方程组

+02·(10分　题号　893　　　　答案

$$x_1+2x_3+2x_4+6x_5=6$$

$$x_2-x_3-x_4-5x_5=-4$$

x_4,x_5,x_6

$$\begin{cases}x_1=6-2\tilde{x}_3-2\tilde{x}_4-6\tilde{x}_5\\x_2=-4+\tilde{x}_3+\tilde{x}_4+5\tilde{x}_5\\x_3=\tilde{x}_3\\x_4=\tilde{x}_4\\x_5=\tilde{x}_5\end{cases}$$

$\tilde{x}_3,\tilde{x}_4,\tilde{x}_5$

图解:　　首先考察系数矩阵 A 对应的行列式

$$\det A=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

因为

$$\det A=\begin{vmatrix} a+3 & a+3 & a+3 & a+3 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=(a+3)(a-1)^3$$

所以当 $a\neq 1和-3时,\det A\neq 0,从而 rank(A)=rank(B)=4$，方程组有唯一解。

当 $a=-3$ 时，增广矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\longrightarrow$$

+02·(10分　题号　894　答案

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\qquad rank(A)=3, rank(A)=4,$$

$a=1$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rank(A)=rank(B)=1<4$

图解:　　对其系数矩阵A施行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6\\0&1&2&2&6\\0&-1&-2&-2&-6\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&5\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见，$rank(A)=2<5$方程组有无穷多非零解，共同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_3-x_4-5x_5=0\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\end{cases}$$

把x_3,x_4,x_5移到右端，作为自由未知量，即得原方程组的全部解为

$$\begin{cases}x_1=\tilde{x}_3+\tilde{x}_4+5\tilde{x}_5\\x_2=-2\tilde{x}_3-2\tilde{x}_4-6\tilde{x}_5\\x_3=\tilde{x}_3\\x_4=\tilde{x}_4\\x_5=\tilde{x}_5\end{cases}$$，　其中x_3,x_4,x_5为任意常数。

+02·(10分　题号　895　　　　答案

图解:　　对其系数矩阵A施行初等变换

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\1&0&1&2\\1&1&0&3\\2&2&0&6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&1\\1&1&0&3\\2&2&0&6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&1\\0&1&-1&1\\0&2&-2&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可见，$rank(A)=2<4$，方程组有无穷多解，其基础解系含有$4-2=2$向量，原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_3+2x_4=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$

分别取$x_3=1,x_4=0$和$x_3=0,x_4=1$，得原方程组的两个解向量$\zeta_1=(-1,1,1,0)'$

$\zeta_2=(-2,-1,0,1)'$ 即为所求基础解系，故原方程组通解

$$X=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

其中 C_1，C_2为任意常数。

+02·(5分) 题号 92　　　　答案

图解: 由$4(\vec{\alpha}-\vec{\eta})-3(2\vec{\gamma}+\vec{\eta})=2(\vec{\beta}-5\vec{\eta})$得

$$-3\vec{\eta}=4\vec{\alpha}-2\vec{\beta}-6\vec{\gamma}$$

即$\vec{\eta}=-\frac{1}{3}(4\vec{\alpha}-2\vec{\beta}-6\vec{\gamma})=\left(-\frac{2}{3},\quad 0,\quad -\frac{14}{3},\quad 10\right)$

+02·(5分) 题号 93　　　　答案

图解: 由$5\vec{\alpha}-\vec{\gamma}+z\vec{\beta}=\vec{0}$得$5(1,\quad 0,\quad x)-(y,\quad 4,\quad 3)+z(3,\quad -2,\quad 1)=(0,\quad 0,\quad 0)$

即$(5-y+3z,\quad -4-2z,\quad 5x-3+z)=(0,\quad 0,\quad 0)$

所以有$\begin{cases}5-y+3z=0\\-4-2z=0\\5x-3+z=0\end{cases}$

得$x=1,y=-1,z=-2$

+02.（10分 题号 97 答案

图解: 将向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$作为列构成矩阵$A$,对它施行初等行变换化为阶梯形矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

可知$R(B)=2\therefore R(A)=2$,即$R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=2$.由于向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$的个数

所以向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$线性相关.

+02.（10分 题号 100 答案

图解: 将向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$作为列构成矩阵$A$,对它施行初等行变换化为阶梯形矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&1\\2&1&3&0\\2&5&-1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&-2&0\\0&1&-1&-2\\0&5&-5&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&2\\0&0&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=T$$

可知$R(T)=3\therefore R(A)=3$,即$R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=3$.由于向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$的个数

所以向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4$是一个最大线性无关组,易得

$$\vec{\alpha}_3=2\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2+0\vec{\alpha}_4$$

+02.（10分 题号 102 答案

图解: 因为系数行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix}2&\lambda&-1\\\lambda&-1&1\\4&5&-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(5\lambda+4)$$

当$\lambda=1$或$\lambda=-\dfrac{4}{5}$时,$|A|=0$,即$R(A)<3$,从而方程组有非零解.

+02.（10分 题号 103 答案

图解: 对方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$B=\left(A \,\vdots\, b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\6&1&4&2\lambda+3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&1&-2&-4\lambda+3\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&0&0&-\lambda+1\end{array}\right)$$

所以,当$\lambda=1$时,方程组有解;当$\lambda\neq1$时,方程组无解.

+02. (10分 题号 105 答案

图解: 对方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$B=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\4&3&2&2&-2&1\\5&4&3&3&-1&a\\0&1&2&2&b&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&-3\\0&-1&-2&-2&-6&a-5\\0&1&2&2&b&6\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&a-2\\0&0&0&0&b-6&0\end{array}\right)$$

所以,当$a=2$时,$R(A)=R(B)$,方程组有解,且有无穷多解.

+02. (10分 题号 106 答案

$a\neq2 \quad R(B)=R(A)+1$

图解: 因为系数行列式为

b

$$|A|=\begin{vmatrix}1&k^2+1&2\\1&2k+1&2\\k&k&2k+1\end{vmatrix}=k(2-k)$$

当$k=0$或$k=2$时,$|A|=0$,即$R(A)<3$,从而方程组有非零解.

当$k\neq0$且$k\neq2$时,方程组有非零解.

+02. (10分 题号 109 答案

图解: 对方程组的系数矩阵施行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7\\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{7}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{7}{5} & -1 & -\frac{4}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{7}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此有 $\begin{cases}x_1=-\frac{7}{5}x_3+x_4+\frac{4}{5}x_5\\ x_2=\frac{4}{5}x_3+\frac{7}{5}x_5\end{cases}$

得基础解系为

$$\begin{pmatrix}-\frac{7}{5}\\ \frac{4}{5}\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{7}{5}\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

+02.（10分） 题号 244 答案

图解: 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$ ， 则 k_1,k_2,是方程组 $\begin{cases}3k_1-k_2=0\\ 2k_1+2k_2=0\\ k_2=0\end{cases}$ 的解。

显然 $k_1=k_2=0$, $\therefore\alpha_1$ ， α_2 线性无关。

+02.（10分） 题号 245 答案

$$k_1\begin{pmatrix}-\frac{7}{5}\\ \frac{4}{5}\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{7}{5}\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

k_1,k_2,k_3

图解:

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 则 k_1,k_2,k_3是方程组

$$\begin{cases} k_1+k_2+3k_3=0 \\ k_1-k_2+k_3=0 \\ -k_1+2k_2+0k_3=0 \\ k_1-k_2+k_3=0 \end{cases}$$ 的解 。

设方程组的增广矩阵为$\overline{A}$,对$\overline{A}$进行初等变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

由于方程组的系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩且小于 4，所以方程组有非零解

+02·(10分 题号 246 答案

α_1 α_2 α_3

图解:

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 则 k_1,k_2,k_3是方程组

$$\begin{cases} 2k_1-3k_2+k_3=0 \\ k_1+k_2+k_3=0 \\ 3k_1+k_2-2k_3=0 \end{cases}$$ 的解。

设方程组的增广矩阵为$\overline{A}$,对$\overline{A}$进行初等变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{5} & 0 \end{pmatrix}。$$

最后得到的梯形矩阵对应的梯形方程组为

+02·(10分 题号 247 答案

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ 5k_2+k_3=0 \\ -\frac{23}{5}k_3=0 \end{cases}$$

1 2 3 α_1 α_2 α_3

图解：

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，则 k_1,k_2,k_3 是方程组 $\begin{cases} ak_1+2k_2+k_3=0 \\ 2k_1+ak_2-k_3=0 \\ k_1+0k_2+k_3=0 \end{cases}$ 的解

α_1，α_2，α_3 线性相关时，有：

$$\det A=\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0。$$

即 $(a+2)(a-3)=0$，由此得 $a=-2$ 或 3 时 α_1 α_2 α_3 线性相关

+02.（10分 题号 248 答案

图解： ∵ $\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$，∴ β_1，β_2，β_3 线性相关。

几何意义：β_1，β_2，β_3 以其中一个为起点组成一个封闭的三角形。

+02.（10分 题号 249 答案

图解：设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，则 k_1,k_2,k_3 是方程组

$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$ 的解 。

显然 $k_1=k_2=k_3=0$，所以 β_1，β_2，β_3 线性无关。

几何意义：β_1，β_2，β_3 异面。

+02.（10分 题号 250 答案

图解：∵ $\beta_1+\beta_2-\beta_3=0$，∴ β_1，β_2，β_3 线性相关。

几何意义：三角形两边之和等于第三边。

+02.（10分 题号 253 答案

图解：

$$\because \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix},$$

而 $$\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3},$$

所以 $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$，即两个向量组等价。

+02.（10分 题号 254 答案

图解：

$\because \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$，而 $\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$，所以 α_1，α_2 不能由 β_1，β_2 的线性

故两个向量组不等价。

+02.（10分 题号 272 答案

图解：

以 $\alpha_1{}^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2{}^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3{}^{\mathrm{T}}$ 为行，构造矩阵 A，再对 A 进行行初等变换

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 2 & -1\\ 3 & 10 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 8 & -16\\ 0 & 16 & -32\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 8 & -16\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}。$$

梯形矩阵非零的前两行对应的向量 $\alpha_1{}^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2{}^{\mathrm{T}}$ 就是该向量组的一个极大无关向量组

$$\alpha_3=-3\alpha_1+2\alpha_2。$$

+02.（10分 题号 273 答案

图解:

以$\alpha_1{}^{T}$，$\alpha_2{}^{T}$，$\alpha_3{}^{T}$，$\alpha_4{}^{T}$为行，构造矩阵A，再对A进行行初等变换

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&4\\2&1&5&6\\1&-1&-2&0\\3&0&7&14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&4\\0&3&5&-2\\0&0&-2&-4\\0&0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&4\\0&3&5&-2\\0&0&-2&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

梯形矩阵非零的前两行对应的向量$\alpha_1{}^{T}$，$\alpha_2{}^{T}$，$\alpha_3{}^{T}$ 就是该向量组的一个极大无关向

且 $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$。

+02·（10分 题号 274 答案

图解:

以$\alpha_1{}^{T}$，$\alpha_2{}^{T}$，$\alpha_3{}^{T}$为行，构造矩阵A，再对A进行行初等变换

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-5&1\\2&6&1&4\\3&9&7&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-5&1\\0&0&11&2\\0&0&22&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-5&1\\0&0&11&2\\0&0&0&3\end{pmatrix}。$$

$\therefore$ r（A）=3，

$\therefore$ α_1，α_2，α_3本身线性无关，α_1，α_2，α_3即为一个极大无关组。

+02·（10分 题号 275 答案

图解:

以$\alpha_1{}^{T}$，$\alpha_2{}^{T}$，$\alpha_3{}^{T}$，$\alpha_4{}^{T}$为行，构造矩阵A，再对A进行行初等变换

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

$\therefore$ r（A）=2 ，

$\therefore$ α_1，α_2，α_3，α_4的秩为 2 。

+02·（10分 题号 276 答案

图解:

设方程组的增广矩阵为 $\overline{A}$,对 $\overline{A}$ 进行初等变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0\\1&-1&2&-1&0\\3&1&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0\\0&-2&3&-2&0\\0&-2&3&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0\\0&-2&3&-2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&-2&3&-2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

得到方程组的一般解 $\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}x_3\\x_2=\dfrac{3}{2}x_3-x_4\end{cases}$ (其中 x_3 ， x_4 为自由未知量) 。 令

+02·(10分 题号 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$ 277 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 答案 $\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

图解:

设方程组的增广矩阵为 $\overline{A}$,对 $\overline{A}$ 进行初等变换

$\eta=c_1\eta_1+c_2\eta_2$ 1 2

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1&0\\2&-4&5&3&0\\4&-8&17&11&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1&0\\0&0&7&5&0\\0&0&21&15&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1&0\\0&0&7&5&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1&0\\0&0&7&5&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}&0\\0&0&1&\frac{5}{7}&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

得到方程组的一般解 $\begin{cases}x_1=2x_2+\dfrac{2}{7}x_4\\x_3=-\dfrac{5}{7}x_4\end{cases}$ (其中 x_2， x_4 为自由未知量) 。 令

+02·(10分 题号 $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}$ 278 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 答案 $\eta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\0\\-\frac{5}{7}\\1\end{pmatrix}$

∴ $\eta=c_1\eta_1+c_2\eta_2$ 1 2

图解:

设方程组的增广矩阵为$\overline{A}$,对$\overline{A}$进行初等变换

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

得到方程组的一般解 $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 = x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5 \end{cases}$ (其中 x_3，x_4，x_5 为自由未知量)。 令

$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ 分别取 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，得到方程组的一个基础解系

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

+02·(10分 题号 285 答案

图解:

设 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$，则 k_1, k_2, k_3 是方程组 $\begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ k_1 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$ 的解。

解得 k_1 =1，k_2 =1，k_3 = -1。

∴ 向量α在上述基下的坐标为（1，1，-1）^{T} 。

∴ $\eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 \quad c_3\eta_3 \quad {}_1 \quad {}_2 \quad {}_3$

+02·(10分 题号 303 答案

图解:　　设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$，则 k_1,k_2,k_3，k_4 是方

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3+k_4=1 \\ k_2-k_3+2k_4=1 \\ 2k_1+3k_2+(a+2)k_3+4k_4=b+3 \\ 3k_1+5k_2+k_3+(a+8)k_4=5 \end{cases}$$ 的解。

设方程组的增广矩阵为 $\overline{A}$，对 $\overline{A}$ 进行初等变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}。$$

（1）当 $r(\overline{A})\neq r(A)$ 时，β 不能表为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合，此时

$a=-1$ 且 $b\neq 0$。

+02.（10分　题号 304　　答案

$\overline{A}\ = r(A)$　　β　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

$\neq -1$　　$\beta = -\frac{2b}{a+1}\alpha_1+\frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2+\frac{b}{a+1}\alpha_3$

图解:

（1）α_1 能由 α_2，α_3 线性表出。证明如下：假设 α_1 不能由 α_2，α_3 线性表出

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$（$k_1$，$k_2$，$k_3$ 不全为零）。

$\therefore$ $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$　　则 k_2，k_3 不全为零，

$\therefore$ $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+0\alpha_4=0$，

$\therefore$ 向量组 α_2，α_3，α_4 线性相关，这与题设矛盾。

$\therefore$ α_1 能由 α_2，α_3 线性表出。

（2）α_4 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表出 。 证明如下：假设 α_4 能由 α_1，α_2，α_3 线性表出，且表示式为

$$\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3。$$

由（1）知，α_1 能由 α_2，α_3 线性表出，于是 α_4 能由 α_2，α_3 线性表出，则 α_2，α_3

+02.（10分　题号 305　　答案

α_4　　α_4　α_1　α_2　α_3

图解：

$\because \gamma_1,\gamma_2$ 是 $AX=B$ 的解，$\therefore \gamma_1-\gamma_2$ 是 $AX=O$ 的解， 又 r（A）= r（$\overline{A}$）=2,

$\therefore C$（$\gamma_1-\gamma_2$）是 $AX=O$ 的全部解。

$\therefore AX=B$ 的全部解为 $\gamma=\gamma_1+C(\gamma_1-\gamma_2)=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+C(-2,1,-1)^{\mathrm{T}}$。

+02·（5分） 题号 498 答案

+02·（5分） 题号 499 答案

+02·（10分 题号 500 答案

+02·（10分 题号 501 答案

+02·（10分 题号 747 答案

图解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换，根据方程组的解与系数矩阵的秩和增广矩阵的利
关系即得

$$\left(A \mid b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 6\\ 3 & 2 & 3 & -3\\ -1 & 4 & a & b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 6\\ 0 & 7 & 0 & 21\\ 0 & 0 & a+1 & b-13\end{array}\right)$$

当 $a\neq -1$ 时，方程组有唯一解（系数行列式非零）；

当 $a=-1$ 且 $b\neq 13$ 时，方程组无解（$rank(A)\neq rank\left(A \mid b\right)$）；

当 $a=-1$ 且 $b=13$ 时，方程组有无穷多解（$rank(A)=rank\left(A \mid b\right)=2<3$）；

此时齐线性方程组的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，非齐线性方程组的特解为 $\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$，

$\eta=\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

+02·（10分 题号 748 答案

图解：

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

（1）当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，有唯一解；

（2）$\lambda=1$时，$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$

$rank(A)=rank\left(\overline{A}\right)=1<3$　所以方程组有无穷多解；

齐线性方程组的基础解系为$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，非齐线性方程组的特解为$\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

通解为$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\eta=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=-2$　$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}-2&1&1&1\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&1&-2\\0&-3&3&-3\\0&0&0&1\end{array}\right]$

$rank(A)=2\neq 3=rank\left(\overline{A}\right)$

+02.（10分 题号 749 答案

图解：（1）当$\lambda\neq -1$且$\lambda\neq 4$时，有唯一解，

（2）$\lambda=-1$时，　$rank(A)=2\neq 3=rank\left(\overline{A}\right)$　所以无解；

（3）$\lambda=4$时，　$rank(A)=rank\left(\overline{A}\right)=2<3$　所以有无穷多解；

基础解系为$\eta=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$，　特解为$\xi=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$，

通解为$x=k\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$（$k$为任意实数）

+02.（10分 题号 750 答案

图解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换，根据方程组有解的充要条件是系数矩阵的秩和
的秩相等即得

当$\lambda=1$时，$rank(A)=rank\left(A \vdots b\right)=2$，方程组有解；

相应齐次方程组的基础解系为：$\eta=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，

非齐次方程组的一个特解为$\xi=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，

故此时方程组的解的一般形式为$x=k\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$（$k$为任意实数）。

+02.（10分 题号 751 答案

图解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换，根据方程组有唯一解的充要条件是系数矩阵的行
等于零，有解的充要条件是系数矩阵的秩和增广矩阵的秩相等即得

系数矩阵的行列式为$|A|=b(1-a)$，

当$a\neq1.b\neq0$时方程组有唯一解；当$b=0$时方程组无解；

当$a=1.b=\frac{1}{2}$时方程组有无穷组解；当$a=1.b\neq\frac{1}{2}$时方程组无解。

+02.（10分 题号 752 答案

图解: 对方程组的增广矩阵进行初等行变换，根据方程组的解与系数矩阵的秩和增广矩阵的秩
关系即得

当 $a \neq -1$ 时，方程组有唯一解（系数行列式非零）；

当 $a=-1, b \neq 13$ 时，方程组无解（ $rank(A) \neq rank(A \vdots b)$ ）；

当 $a=-1, b=13$ 时，方程组有无穷多解（ $rank(A)=rank(\overline{A})=2<3$ ）；

齐线性方程组的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ，非齐线性方程组的特解为 $\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$ ，

通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$ 。

+02·(5分) 题号 111 答案

图解: 设 λ 是 A 的特征值, $\vec{\alpha}$ 是对应于 λ 的特征向量,即 $A\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}$,有

$A^2\vec{\alpha}=\lambda(A\vec{\alpha})=\lambda^2\vec{\alpha}$

由 $A^2=A$ 得 $\lambda\vec{\alpha}=A\vec{\alpha}=A^2\vec{\alpha}=\lambda^2\vec{\alpha}$

即 $(\lambda-\lambda^2)\vec{\alpha}=0 \quad (\vec{\alpha}\neq\vec{0})$

所以 $\lambda-\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda=0$ 或 $\lambda=1$

A 的特征值为 0 或 1

+02·(5分) 题号 286 答案

图解:

$\alpha^{T}\beta$ =（-1，0，3，5）（4，-2，0，－1）^{T} ＝ －9 。

∴ α 与 β 不正交。

+02·(5分) 题号 287 答案

图解:

$\alpha^{T}\beta$ =（$\frac{\sqrt{3}}{2}$，-$\frac{1}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{4}$，-1）（-$\frac{\sqrt{3}}{2}$，-2，$\sqrt{3}$，$\frac{2}{3}$）^{T} ＝ 0。

∴ α β

+02·(5分) 题号 288 答案

图解：$\|\alpha\| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$，

$$\therefore \alpha' = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^T$$

+02·（5分） 题号 289 答案

图解：$\|\beta\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + 1} = \frac{\sqrt{21}}{2}$，

$$\therefore \beta' = \frac{2}{\sqrt{21}}\left(\frac{1}{2}, -2, 0, 1\right)^{\mathrm{T}}。$$

+02·（5分） 题号 328 答案

图解：设α是A的属于λ_0的特征向量，则 $A\alpha = \lambda_0\alpha$

$\therefore A(A\alpha) = A(\lambda_0\alpha)$ 即 $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$

$\therefore m=2$时命题成立，假设$m=k-1$时命题成立，即$A^{k-1}\alpha = \lambda^{k-1}\alpha$成立

则$m=k$时，$A^k\alpha = A(A^{k-1}\alpha) = A(\lambda^{K-1}\alpha) = \lambda^{K-1}(A\alpha) = \lambda^K\alpha$

$\therefore m=k$时，命题成立。

$\therefore \lambda_0^m$是A^m的一个特征值。

+02·（5分） 题号 329 答案

图解：设α是A的属于λ_0的特征向量，则 $A\alpha = \lambda_0\alpha$ 又A可逆

$\therefore A^{-1}(A\alpha) = A^{-1}(\lambda_0\alpha)$

$\therefore A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda_0}\alpha$

$\therefore \frac{1}{\lambda_0}$是$A^{-1}$的一个特征值。

+02·（5分） 题号 330 答案

图解: 设α是A的属于λ_0的特征向量，则 $A\alpha=\lambda_0\alpha$ 又

$$A^*A=(\det A)E$$

$$\therefore \quad A^*A\alpha=\lambda_0 A^*\alpha$$

$$\therefore \quad (\det A)E\alpha=\lambda_0 A^*\alpha$$

$$\therefore \quad A^*\alpha=\frac{\det A}{\lambda_0}\alpha$$

+02·(10分 题号 112 答案

$\therefore$ $\frac{\det A}{\lambda_0}$ *

图解: 设对应于$\vec{\xi}$的特征值为λ

$$A\vec{\xi}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2+a\\1+b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

则$\begin{cases}-1=\lambda\\2+a=\lambda\\1+b=-\lambda\end{cases}$

得 $\lambda=-1, a=-3, b=0$

+02·(10分 题号 293 答案

图解: 令$\beta_1=\alpha_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2{}^T\beta_1}{\beta_1{}^T\beta_1}\beta_1=(1,1,0)^T-(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T=(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\alpha_3{}^T\beta_1}{\beta_1{}^T\beta_1}\beta_1-\frac{\alpha_3{}^T\beta_2}{\beta_2{}^T\beta_2}\beta_2,$$

$$=(1,0,1)^T-(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T-(\frac{1}{3},\frac{1}{6},-\frac{1}{6})^T=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T,$$

再将向量组β_1， β_2， β_3单位化，即得到正交的单位向量组。

$$\gamma_1=(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^{\mathrm{T}},\gamma_2=(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6})^{\mathrm{T}},\gamma_3=(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})^{\mathrm{T}}$$

+02·(10分 题号 294 答案

图解: 令 $\beta_1=\alpha_1=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{{\alpha_2}^{\mathrm{T}}\beta_1}{{\beta_1}^{\mathrm{T}}\beta_1}\beta_1=(-1,0,-1)^{\mathrm{T}}+(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}=(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{{\alpha_3}^{\mathrm{T}}\beta_1}{{\beta_1}^{\mathrm{T}}\beta_1}\beta_1-\frac{{\alpha_3}^{\mathrm{T}}\beta_2}{{\beta_2}^{\mathrm{T}}\beta_2}\beta_2$$

$$=(5,-3,-7)^{\mathrm{T}}+(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}-(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}=(6,-3,-6)^{\mathrm{T}}。$$

再将向量组β_1, β_2, β_3单位化，即得到正交的单位向量组。

$$\gamma_1=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}},\gamma_2=(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})^{\mathrm{T}},\gamma_3=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}。$$

+02·(10分 题号 295 答案

图解: 令 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,1,1)^{T}$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{{\alpha_2}^{T}\beta_1}{{\beta_1}^{T}\beta_1}\beta_1=(3,3,-1,-1)^{T}-(1,1,1,1)^{T}=(2,2,-2,-2)^{T},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{{\alpha_3}^{T}\beta_1}{{\beta_1}^{T}\beta_1}\beta_1-\frac{{\alpha_3}^{T}\beta_2}{{\beta_2}^{T}\beta_2}\beta_2$$

$$=(-2,0,6,8)^{T}-(3,3,3,3)^{T}+(4,4,-4,-4)^{T}=(-1,1,-1,1)^{T}。$$

再将向量组β_1, β_2, β_3单位化，即得到正交的单位向量组。

$$\gamma_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^{T},\gamma_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^{T},\gamma_3=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^{T}。$$

+02·(10分 题号 316 答案

图解:

$$（1）A^{T}A=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

当 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ 时，A 为正交矩阵。

当 $a^2+b^2+c^2+d^2\neq 1$ 时，A 不是正交矩阵。

（2）$\det A$=（$\det A^{T}A)^{\frac{1}{2}}=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$。

+02.（10分 题号 319 答案

图解：矩阵 A 的特征多项式为

$$\det（\lambda E-A）=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 3 & \lambda-3 \end{vmatrix}=（\lambda-6）*（\lambda+1）$$

由 $\det（\lambda E-A）=0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1=6,\lambda_2=-1$

对于 λ_1=6，解齐次线性方程组（6E－A）X=0，可得方程组的一个基础

$\alpha_1=(-1,1)^T$ 于是 A 的属于 λ_1 的全部特征向量

$c_1\alpha_1(c_1$为不等于l零的任意常数）

对于 λ_2= -1，解齐次线性方程组（$-E-A$）X=0，可得方程组的一个基础

$\alpha_2=(4,3)^T$ λ_2

+02.（5分） 题号 325 答案

图解: $detA=\lambda_1\lambda_2=4$ trA=2 λ_1 λ_2 =2

$c_2\alpha_2$ c_2为不等于零的常数）

+02.（10分 题号 339 答案

图解: 矩阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2$$

由 $\det(\lambda E-A)=0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组（$2E-A$）$X=0$，可得方程组的一个基础解系 $\alpha_1=(1,1)^{\mathrm{T}}$

由于 A 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量只有一个，**故 A 不可对角化。**

+02·(10分 题号 340 答案

图解: 矩阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2 & -3\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ 1 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

由 $\det(\lambda E-A)=0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组（$E-A$）$X=0$，可得方程组的一个基础

$\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$

$\because$ 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量只有一个

$\therefore$ **A 不可对角化**

+02·(10分 题号 341 答案

图解: 矩阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$$

由 $\det(\lambda E-A)=0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组（$2E-A$）X=0，可得方程组的一个基础解系为：

$\alpha_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$

对于 $\lambda_3=6$，解齐次线性方程组（$6E-A$）X=0，可得方程组的一个基础解系 $\alpha_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$

由于 A 有三个线性无关的特征向量，**故 A 可对角化** 。令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\ \text{则}\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

+02.（10分 题号 342 答案

图解: 矩阵 A 的特征多项式为

$$A=\begin{pmatrix}\lambda-3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0 & 0\\ 2 & -4 & \lambda-5 & 3\\ -7 & -5 & -3 & \lambda+1\end{pmatrix}=(\lambda-2)^4$$

由 $\det(\lambda E-A)=0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$，解齐次线性方程组（$2E-A$）$X$=0，可得方程组的一个

解系 $\alpha_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_2=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$

$\because$ 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$ 的特征向量只有两个

$\therefore$ **A 不可对角化**

+02.（10分 题号 343 答案

图解: 矩阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

由 $\det(\lambda E - A) = 0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，解齐次线性方程组（$2E - A$）$X$=0，可得方程组的一个基础解

$\alpha_1 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$

对于 $\lambda_3 = 3$，解齐次线性方程组（$3E-A$）X=0，可得方程组的一个基础解系：

$\alpha_3 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$

由于 A 有三个线性无关的特征向量，故 A 可对角化 。令：

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 则 } P^{-1}AP = D$$

+02·(10分 题号 344 答案

图解: 矩阵 A 的特征多项式为

∵

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

由 $\det(\lambda E - A) = 0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，解齐次线性方程组（$2E - A$）$X$=0，可得方程组的一个基础

$\alpha_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$

∵对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 的特征向量只有一个

∴A 不可对角化

∴A 不能与 D 相似

+02·(10分 题号 345 答案

图解: 矩阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

由 $\det(\lambda E-A)=0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=3$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组（$2E-A$）$X=0$，可得方程组的一个基础解

$$\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}，\ \alpha_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$$

对于 $\lambda_3=3$，解齐次线性方程组（$3E-A$）$X=0$，可得方程组的一个基础解

$$\alpha_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$$

由于 A 有三个线性无关的特征向量，故 A 可对角化 。令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\ \text{则}\ P^{-1}AP=D$$

+02·(10分 题号 346 答案

图解: 矩阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

由 $\det(\lambda E-A)=0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=3$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组（$2E-A$）$X=0$，可得方程组的一个基础解

$$\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$$

$\because$ 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量只有一个

$\therefore A$ 不可对角化

$\therefore A$ 不能与 D 相似

+02·(10分 题号 364 答案

图解：　矩阵 A 的特征多项式为：

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -2\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & -3 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\ (\lambda-1)^2。$$

由 $\det(\lambda E-A)=0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$ ，

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组（$E-A$）X=0，可得方程组的一个基础

$\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ ，

对于 $\lambda_3=-1$，解齐次线性方程组（$-E-A$）X=0，可得方程组的一个基础

$\alpha_2=(-3,1,0)^{\mathrm{T}}$,

$\therefore v_{\lambda_1},v_{\lambda_2}$ 的特征子空间的基为 $\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,

$\therefore v_{\lambda_3}$ 的特征子空间的基为 $\alpha_2=(-3,1,0)^{\mathrm{T}}$.

+02·(10分　题号　365　　　　答案

图解：　矩阵 A 的特征多项式为：

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 0\\ \lambda-2 & \lambda-x & 0\\ -4 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-(x+1)\lambda+x+2)$$ 又

A 的特征值为 1，2，3

$\therefore\ \lambda=1,2,3$ 时， $\det(\lambda E-A)$=0 由此解得 x=4 。

+02·(10分　题号　379　　　　答案

图解：矩阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}=\lambda^3-(5+a)\lambda^2+(5a+3)\lambda+6-6a,$$

矩阵 A~B　$\therefore A$，B 有相同的特征值。

$\therefore$ A 的特征值为 2，2，b，

$\therefore$ $\lambda=2,b$ 时，$\det(\lambda E-A)=0$，

由此解得 $a=5,b=6$。

+02·(10分　题号　390　　　　答案

图解:　　　因为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&2\\0&-1&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为：$\begin{pmatrix}2&0&2\\0&-1&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$。

+02.（10分　题号　391　　　　　答案

图解:　　　因为

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},$$

所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的矩阵为：$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$。

+02.（10分　题号　392　　　　　答案

图解:

设 $X=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-2\\\frac{1}{2}&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=x_1^2+2x_3^2-x_1x_2+x_1x_3-4x_2x_3$$

+02.（15分　题号　394　　　　　答案

图解:

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}。$$

A 的特征方程为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda^2-5\lambda+4)=0,$$

由此得到 A 的特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$。

对于 $\lambda_1=-2$，求其线性方程组 $(-2E-A)X=0$，可解得基础解系为

$$\alpha_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}。$$

对于 $\lambda_2=1$，求其线性方程组 $(E-A)X=0$，可解得基础解系为:

$$\alpha_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}。$$

对于 $\lambda_3=4$，求其线性方程组 $(4E-A)X=0$，可解得基础解系为:

$$\alpha_3=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}。$$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化，得

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$$

$$\gamma_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$$

$$\gamma_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$$

$$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

+02·(10分 题号 397 答案

图解:

先将含有 x_1 的项配方。

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+6x_2x_3+5x_3^2$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2，$$

再对后三项中含有 x_2 的项配方，则有

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2$$

设 $Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，$X=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$$y_1^2+y_2^2$$

+02.（10分 题号 398 答案

图解： 此二次型没有平方项，只有混合项。因此先作变换，使其有平方项，然后按题（1）法进行配方。

令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}，即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}。$$

则原二次型化为

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2(y_1+y_2)(y_1-y_2) + 4(y_1+y_2)y_3$$

$$= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3$$

$$= 2(y_1+y_3)^2 - 2(y_2-y_3)^2，$$

设 $Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，$Z=(z_1,z_2,z_3)^{\mathrm{T}}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

+02.（10分 题号 399 答案

图解： 可将原二次型化为标准形： $2z_1^2 - 2z_2^2$

$-4z_1^2 + 4z_2^2 + z_3^2$

+02.（10分 题号 406 答案

图解： 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}。$$

由于 5>0，$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=26>0$，$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}=84>0$,

即 A 的一切顺序主子式都大于零，故此二次型为正定的

+02.（10分 题号 407 答案

图解:

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}10 & 4 & 12\\ 4 & 2 & -14\\ 12 & -14 & 1\end{pmatrix}。$$

由于

$$|A|=\begin{vmatrix}10 & 4 & 12\\ 4 & 2 & -14\\ 12 & -14 & 1\end{vmatrix}=-3588<0，$$

+02·(10分 题号 408 答案

图解:

二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 2\\ 3 & -2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 7\end{pmatrix}。$$

由于

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=-9<0，$$

+02·(10分 题号 409 答案

图解:

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & 5\\ t & 4 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}。$$

由于

$$\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2，\quad \begin{vmatrix}1 & t & 5\\ t & 4 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}=-t^2+30t-105，$$

+02·(10分 题号 410 答案

$$\begin{cases}4-t^2>0\\ -t^2+30t-105>0\end{cases}$$

图解：　　二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}。$$

此二次型正定的充要条件为

$$1>0,\quad \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix}=1-t^2>0,\quad |A|=-5t^2-4t>0,$$

+02·(10分　题号　411　$-\frac{4}{5}<t<0$　答案

图解：　　二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 0 \end{pmatrix}。$$

由

$$2>0,\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}>0,\quad |A|=1-\frac{t^2}{2}>0,$$

+02·(10分　题号　530　答案

+02·(10分　题号　542　$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$　答案

+02·(10分　题号　543　答案

+02·(10分　题号　544　答案

+02·(10分　题号　763　答案

图解:

所给二次型矩阵为$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，

二次型矩阵形式： $f(X)=X^{T}AX$，其中 $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^{T}$

问题等价于求正交矩阵P，使得$P^{T}AP=diag(d_1,d_2,d_3)=\begin{bmatrix}d_1 & 0 & 0\\ 0 & d_2 & 0\\ 0 & 0 & d_3\end{bmatrix}$，

则所求正交变换为$X=PY$，二次型标准型为$f(y_1,y_2,y_3)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+d_3y_3^2$；

A的特征值为$\lambda_1=4,\lambda_{2,3}=2$（二重）；分别求出各个特征值对应的特征向量，并将

单位化后，按照列排成矩阵即得。

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad P^{T}AP=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$X=PY\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$$

$$f(y_1,y_2,y_3)=4y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$$

四 证明题 （630分）

1.（10分 题号 873 答案

图解：用行列式的性质3的推论（同济四版）

2.（10分 题号 874 答案

图解:
$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^3 & y^3 & z^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ x & y-x & z-x\\ x^3 & y^3-x^3 & z^3-x^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y-x & z-x\\ y^3-x^3 & z^3-x^3\end{vmatrix}$$

$$=(y-x)(z-x)\begin{vmatrix}1 & 1\\ y^2+xy+x^2 & z^2+xz+x^2\end{vmatrix}=(y-x)(z-x)(z-y)(x+y+z)=0$$

由于x,y,z是互异的实数，故要使上式成立，当且仅当$x+y+z=0$

3.（5分） 题号 165 答案

图解:
$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c & b \\ a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

4.(5分) 题号 166 答案 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

图解:
$$\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} 。$$

5.(5分) 题号 465 答案

6.(10分 题号 65 答案

图解:

当$n=1$时, $D_1=a+b=\dfrac{a^{1+1}-b^{1+1}}{a-b}$结论成立.

假设$n\le k$时结论成立,

当$n=k+1$时有

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b)D_k+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{(k阶)}$$

$$=(a+b)D_k-abD_{k-1}$$

$$=(a+b)\cdot\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}-ab\cdot\frac{a^k-b^k}{a-b}$$

$$=\frac{a^{(k+1)+1}-b^{(k+1)+1}}{a-b}$$

$$D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

7.(10分 题号 174 答案

图解:

将行列式的第一行的-1 倍分别加到其余各行，然后提出各列的公因子a_i-1，各列加到第一列，得

$$原式=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1-a_1 & a_2-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a_1 & 0 & a_3-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1-1} & \dfrac{1}{a_2-1} & \dfrac{1}{a_3-1} & \cdots & \dfrac{1}{a_n-1} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

8.(10分 题号 175 答案

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i-1}\right)$$

图解:

用$-\dfrac{1}{a_i}$乘第 i 列（$i=1,2,\cdots,n$）分别加到第一列，得

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\text{。}$$

9.（10分 题号 176 答案

图解: 从第 n 行起，各行的 x 倍依次加到上面一行，所得到的行列式再按第一行展开得

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+a_3x+a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2+a_{n-1}x+a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2n}(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)$$

$$=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\text{。}$$

10.（10分 题号 221 答案

图解: 令所给的矩阵为 D_n，并按第一列展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}\text{，}$$

所以 $$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=3a^2D_{n-2}-2a^3D_{n-3}=4a^2D_{n-3}-3a^3D_{n-4}$$

$$=\cdots=(n-1)a^{n-2}D_2-(n-2)a^{n-1}D_1=(n+1)a^n\text{。}$$

11.（10分 题号 222 答案

图解:　　令所给的行列式为 D_n，并按第一列分成两个行列式相加，然后对第一个行列式从列开始，每列乘-b 后往下一列加，即得

$$D_n=\begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}+bD_{n-1}=a^n+bD_{n-1}=a^n+ba^{n-1}+b^2D_{n-2}$$

$a^n+ba^{n-1}+b^2a^{n-2}+\cdots+b^{n-1}a+b^n$　$\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$

12．(10分)　题号　466　　　答案

13．(10分)　题号　467　　　答案

14．(5分)　题号　75　　　答案

图解:　因为 $(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A=A+A^T$

$$(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$$

所以 $A+A^T,AA^T$ 都是对称矩阵.

因为 $(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$

所以 $A-A^T$ 是反对称矩阵.

15．(5分)　题号　76　　　答案

图解:　若 $|A|\neq 0$,即 A 是 n 阶可逆矩阵,则有 $A^2=A$ 得

$A^{-1}A^2=A^{-1}A\therefore A=E$ 这与已知矛盾,所以 $|A|=0$.

16．(5分)　题号　78　　　答案

图解：由 $A^k=0$ 及 $E-A^k=(E-A)(E+A+\cdots+A^{k-1})$

得 $(E-A)(E+A+\cdots+A^{k-1})=E$

所以 $E-A$ 可逆,且有 $(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}$

17.（5分） 题号 79 答案

图解：由 $(A+E)^3=0$ 得

$$A^3+3A^2+3A+E=0\Rightarrow -(A^3+3A^2+3A)=E$$
$$\Rightarrow A(-A^2-3A-3E)=E$$

所以 A 可逆,且有 $A^{-1}=-A^2-3A-3E$

18.（5分） 题号 143 答案

图解：先证明必要性：由于 $A=\frac{1}{2}(B+E)$，故

$$A^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

如果 $A^2=A$，即

$$\frac{1}{2}(B+E)=\frac{1}{4}(B^2+2B+E)$$

由此得 $B^2=E$

再证充分性：若 $B^2=E$，则由（1）式可知，

$$A^2=\frac{1}{4}(E+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E)=A。$$

所以，$A^2=A$ 的充分必要条件是 $B^2=E$。

19.（5分） 题号 144 答案

图解：因为 A，B 为 n 阶矩阵，所以 A+B 也为 n 阶矩阵，并设 $A+B=(c_{ij})_{n\times n}$

根据矩阵加法的定义，可知：$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$,所以 $c_{ii}=a_{ii}+b_{ii}$ 因此，$\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}$

即 $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$。

20.（5分） 题号 145 答案

图解:　　因为 A 为 n 阶矩阵，所以 kA 也为 n 阶矩阵，并设 $kA=(c_{ij})_{n\times n}$ 。

根据矩阵加法的定义，可知：$c_{ij}=ka_{ij}$， 所以 $c_{ii}=ka_{ii}$ 。

因此，$\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}ka_{ii}=k\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ ，即 $\mathrm{tr}(kA)=k\mathrm{tr}A$。

21.（5分） 题号 146　　　　答案

图解:　　令 $A^{\mathrm{T}}=(c_{ij})_{n\times n}$

根据矩阵转置的定义可知，$c_{ii}=a_{ii}$，

又　　$\mathrm{tr}A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ ，

所以　　$\mathrm{tr}A^{\mathrm{T}}=c_{11}+c_{22}+\cdots+c_{nn}=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ ，

即 $\mathrm{tr}A^{\mathrm{T}}=\mathrm{tr}A$

22.（5分） 题号 147　　　　答案

图解:　　令 $AB=C=(c_{ij})_{n\times n}$，$AB=D=(d_{ij})_{n\times n}$，

其中　$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，

$d_{ij}=b_{i1}a_{1j}+b_{i2}a_{2j}+\cdots+b_{in}a_{nj}$。

显然，当 $i=j$ 时，$c_{ij}=d_{ij}$，

于是 $\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}d_{ii}$ ，即 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ 。

23.（10分 题号 181　　　　答案

图解：

$$EA=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_m\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 A\\ \varepsilon_2 A\\ \vdots\\ \varepsilon_m A\end{pmatrix}=A=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}$$

所以 $\begin{pmatrix}\varepsilon_1 A\\ \varepsilon_2 A\\ \vdots\\ \varepsilon_m A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}$，即 $\varepsilon_i A=A_i$（$i=1,2,\cdots,m$）。

24.（5分） 题号 182 答案

图解： 令所给的矩阵为 A，

因为 det$A$=-2,不为零，所以此矩阵可逆。

其伴随矩阵为 $A^*=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -3 & 5\end{pmatrix}$，

所以其逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

25.（5分） 题号 184 答案

图解： 令所给的矩阵为 A，

因为 det$A$=0, 所以此矩阵不可逆

26.（5分） 题号 185 答案

图解： 令所给的矩阵为 A，

因为 det$A$=6,不为零，所以此矩阵可逆。

其伴随矩阵为 $A^*=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ -3 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$，

所以其逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$。

27.（10分 题号 195 答案

图解:　　作以下乘法

$$(E-A)\ (E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$$

$$=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^{k-1}-A^k$$
$$=E-A^k$$
$$=E$$

从而 $E-A$ 为可逆矩阵，而且

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\text{。}$$

28. (10分　题号　213　　　　答案

图解:

$(AA^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=AA^{\mathrm{T}}$ ，

所以，AA^{T} 为对称矩阵。

$(A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A$，

所以，$A^{\mathrm{T}}A$ 为对称矩阵。

29. (10分　题号　480　　　　答案

30. (10分　题号　481　　　　答案

31. (10分　题号　559　　　　答案

32. (10分　题号　716　　　　答案

图解: $A^2-A-2E=0\Rightarrow A(A-E)=2E$，所以 A 及 $A-E$ 均可逆，$A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-E)$；

$(A+2E)(A-E)=2A$，所以 $A+2E$ 可逆，$(A+2E)^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-E)A^{-1}$。

33. (10分　题号　717　　　　答案

图解: 利用逆矩阵的定义验证即可。

34. (10分　题号　90　　　　答案

图解:

由 $A^2-A-2E=0$ 得 $A(A-E)=2E$

$\therefore A\cdot\dfrac{1}{2}(A-E)=E$,即 A 可逆,且有 $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-E)$

由 $A^2-A-2E=0$ 又得 $A^2=A+2E$,因 A 可逆,从而有 $A+2E$ 也可逆,

且有 $(A+2E)^{-1}=(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2=\dfrac{1}{4}(A-E)^2$

35.（10分 题号 736 答案

图解：设$k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_1-\alpha_3)=0$，即

$(k_1+k_3)\alpha_1+(-k_1+k_2)\alpha_2+(k_2-k_3)\alpha_3=0$，

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则有$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ -k_1+k_2=0 \\ k_2-k_3=0 \end{cases}$，系数行列式为$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$

所以k_1,k_2,k_3只有零解，$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_3$线性无关。

36.（10分 题号 737 答案

图解：证明：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，即$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+k_3(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)=0$，

$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ -k_2-k_3=0 \\ -k_3=0 \end{cases}$，所以$k_1,k_2,k_3$只有零解，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也线性无关。

37.（10分 题号 740 答案

图解：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，即$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+2\alpha_2)+k_3(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)=0$，

$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ 2k_2+2k_3=0 \\ 3k_3=0 \end{cases}$，$k_1,k_2,k_3$只有零解，所以$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也线性无关。

38.（10分 题号 741 答案

图解：设$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$，即

$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$，因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则有$\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$

系数行列式为$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$，所以$k_1,k_2,k_3$只有零解，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

关。

39.（10分 题号 251 答案

图解：

设$k_1\alpha_1+k_2$（$\alpha_1+\alpha_2$）+⋯+k_s（$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$）=0，则

$(k_1+k_2+\cdots+k_s)\alpha_1+(k_2+k_3+\cdots+k_s)\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$,

∵ 向量组α_1，α_2，⋯，α_s线性无关，

∴ $$\begin{cases}k_1+k_2+\ldots k_s=0\\k_2+k_3+\ldots k_s=0\\\qquad\cdots\cdots\cdots\\\qquad k_s=0\end{cases}$$

40.（10分 题号 252 $_1$ $_2$ $_s$ 答案 ∴α_1 α_1 α_2 α_1 α_2 α_2 α_s

图解：设

k_1（$-\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$）+$k_2$（$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3\cdots+\alpha_s$）+⋯+$k_s$（$\alpha_1+\alpha_2$

$+\alpha_{s-1}-\alpha_s$）=0， 则

$(-k_1+k_2+\cdots+k_s)\alpha_1+(k_1-k_2+\cdots+k_s)\alpha_2+(k_1+k_2+\cdots+k_{s-1}-k_s)\alpha_s=0$。

∵ 向量组α_1，α_2，⋯α_s线性无关，

∴ $$\begin{cases}k_1=k_2+k_3+\ldots+k_s\\k_2=k_1+k_3+k_4+\ldots+k_s\\\qquad\cdots\cdots\cdots\\k_s=k_1+k_2+\ldots+k_{s-1}\end{cases},$$

∴ $(k_1+k_2+\cdots+k_s)=s(k_1+k_2+\cdots+k_s)$,

∴ $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$。

$_i$ $_1$ $_2$ $_{i-1}$ $_{i+1}$ $_s$

∴ $_i$ $_1$ $_2$ $_{i-1}$ $_i$ $_s$

∴ $_i$

∴ α α α α α α α α α α α

41.(10分 题号 255 答案

图解:

$$\because \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}，且$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4，$$

所以 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$，即{$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$}与{$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$}等价

42.(10分 题号 310 答案

图解:

线性方程组的一般解为$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases}$（$x_2, x_3$为自由未知量）。

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$分别取$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 便得到方程组的一个基础解系$\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，$\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。

43.(10分 题号 311 答案

图解:

44.(10分 题号 312 答案

图解:

设$\overline{A}$为线性方程组的增广矩阵。由于$\overline{A}$只比A多一列，而C又比$\overline{A}$多一行

$\therefore r(A) \le r(\overline{A}) \le r(C)$ ， 而 $r(A) = r(C)$，

$\therefore r(A) = r(\overline{A})$，此线性方程组有解。

45.（5分） 题号 291 答案

图解：

$\because\ \alpha\in R^n$，α与R^n中的任意向量都正交， α与α正交， 即 $\alpha^T\alpha=0$，

46.（10分 题号 α296 答案

图解：

$\because A$为正交矩阵， $\therefore A^TA=E$ ， $\therefore |A^TA|=|E|=1$ ，

即 $|\mathrm{A}|^2=1$ $\therefore$ $\det A=1$ 或 -1 。

47.（10分 题号 301 答案

图解： $\because A$为n阶正交矩阵，

$\therefore A^TA=E$，

$$\therefore \|A\alpha\|=\sqrt{(A\alpha)^T(A\alpha)}=\sqrt{\alpha^TA^TA\alpha}=\|\alpha\|$$

48.（5分） 题号 334 答案

图解：$\because$矩阵A与B相似，则存在一个可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=B$$

$\therefore$ $\det(P^{-1}AP)=\det B$ 即 $\det P^{-1}$ $\det A\det P=\det B$

$\therefore$ $\det A=\det B$

49.（5分） 题号 335 答案

图解：$\because$矩阵A与B相似，则存在一个可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP=B \quad （1）$$

$$\therefore \quad PBP^{-1}=A \quad （2）$$

由（1）知 $r(B)\le r(A)$

由（2）知 $r(A)\le r(B)$

$\therefore$ $r(A)=r(B)$

50.（5分） 题号 336 答案

图解：$\because$矩阵 A 与 B 相似，则存在一个可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=B$$

$$\therefore\ (P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$$

$$\therefore\ P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$$

$$\therefore\ ((P^{-1})^{\mathrm{T}})^{-1}A^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}}=B$$

$\therefore$ 如果矩阵 A 与 B 相似，则 $A^{\mathrm{T}}\sim B^{\mathrm{T}}$

51．(5分)　题号　337　　　　　答案

图解：$\because$矩阵 A 与 B 相似，则存在一个可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=B$$

$$\therefore\ (P^{-1}AP)^{-1}=B^{-1}$$

$$\therefore\ P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$$

$\therefore$ 如果矩阵 A 与 B 相似，且 A 与 B 都可逆，则 $A^{-1}\sim B^{-1}$

52．(5分)　题号　388　　　　　答案

图解：

$\because A$可逆，故A^{-1}存在。

$\therefore A^{-1}(AB)A=BA$，

$\therefore AB$ 与 BA 相似。

53．(5分)　题号　389　　　　　答案

图解：相似。用反证法。设 AB 与 BA 不相似，则对任意的可逆矩阵 P，都有

$$P^{-1}ABP\neq BA,$$

上式两边取行列式，得

$$\det(P^{-1}ABP)\neq\det(BA),$$

即　$\det(AB)\neq\det(BA)$，矛盾，所以假设不成立，于是 AB 与 BA 相似。

54．(10分　题号　113　　　　　答案

图解: 用反证法证明

假设 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ 是 A 的对应于特征值为 λ 的特征向量,则有

$$\lambda(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)=A(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)=A\vec{\alpha}_1+A\vec{\alpha}_2=\lambda_1\vec{\alpha}_1+\lambda_2\vec{\alpha}_2$$

$(\lambda-\lambda_1)\vec{\alpha}_1+(\lambda-\lambda_2)\vec{\alpha}_2=0$ $\because \lambda_1\neq\lambda_2$ $\therefore \vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 线性无关

$$\begin{cases}\lambda-\lambda_1=0\\ \lambda-\lambda_2=0\end{cases}$$

于是 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 与已知条件矛盾.

因此 $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ 不是 A 的特征向量

55.（10分 题号 290 答案

图解:

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一线性组合。因为

$$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)^{\mathrm{T}}\beta=k_1(\alpha_1^{\mathrm{T}}\beta)+k_2(\alpha_2^{\mathrm{T}}\beta)+\cdots+k_s(\alpha_s^{\mathrm{T}}\beta$$

又向量 β 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的每个向量都正交，则有

$$\alpha_i^{\mathrm{T}}\beta=0\quad(i=1,2,\cdots,s)。$$

所以

$$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)^{\mathrm{T}}\beta=k_1(\alpha_1^{\mathrm{T}}\beta)+k_2(\alpha_2^{\mathrm{T}}\beta)+\cdots+k_s(\alpha_s^{\mathrm{T}}\beta)$$

$=0+0+\cdots+0=0$ 。

$\therefore\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的任意线性组合正交。

56.（10分 题号 297 答案

图解:

$\because A$ 为正交矩阵, $\therefore A^TA=E$ 。

$\because A=(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$，

$\therefore (A^{-1})^TA^{-1}=AA^{-1}=E$ ，

$\therefore (A^*)^TA^*=(A^T)^*A^*=(A^{-1})^*A^*=E$。

$\therefore$ 如果 A 为 n 阶正交矩阵，则其逆矩阵 A^{-1} 与其伴随矩阵 A^* 也都是正交矩阵。

57.（10分 题号 298 答案

图解:

：　$\because$（$B^{-1}AB$）$^T = B^T A^T (B^{-1})^T = B^T A^T (B^T)^{-1}$，

又 A 为 n 阶实对称矩，

$\therefore A^T = A$ ，　$B^T B = E$ 。

$\therefore$（$B^{-1}AB$）$^T = B^T A^T (B^{-1})^T = B^T A^T (B^T)^{-1}$=B$^T AB$，

$\therefore B^{-1}AB$ 为 n 阶实对称矩阵

58.(10分　题号 299　　　　答案

图解:

$\because$（AB）$^T(AB)$=$B^T A^T AB$，　又

$A^T A = E$ ，　$B^T B = E$ 。

$\therefore$（AB）$^T(AB)$=$B^T A^T AB$=　$B^T B = E$ 。

59.(10分　题号 300　　　　答案

图解:

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，　且 A 为正交矩阵，　则

$$A^T A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}{}^2 & a_{12}a_{11} & \cdots & a_{1n}a_{11} \\ a_{11}a_{12} & a_{12}{}^2+a_{22}{}^2 & \cdots & a_{1n}a_{12}+a_{2n}a_{22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11}a_{1n} & a_{1n}a_{12}+a_{2n}a_{22} & \cdots & a_{1n}{}^2+a_{2n}{}^2+\cdots+a_{nn}{}^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}。$$

由此可得

$$\begin{cases} a_{11}{}^2=1, a_{12}=0,\cdots,a_{1n}=0 \\ a_{21}=0, a_{22}{}^2=1, a_{23}=0,\cdots,a_{2n}=0 \\ a_{n1}=0, a_{n2}=0,\cdots,a_{nn-1}=0, a_{nn}{}^2=1 \end{cases}$$

60.（10分　题号　302　　　答案

图解:

知 $\|A\alpha\|=\|\alpha\|$ 。　又 A 为 n 阶正交矩阵，α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_n}$ 为 R^n 的一组标准正交

∴　　$\therefore A^T A=E$　，　　$\|A\alpha\|=\|\alpha\|=1$　。

$\therefore$ 对任意 $i, j(i, j=1,2\cdots n)$，有

$(A\alpha_i)^T(A\alpha_j)=\alpha_i A^T A\alpha_j=\alpha_i\alpha_j=0$。

61.（10分　题号　332　　　答案

图解：设α是A的属于λ_0的特征向量，则 $A\alpha=\lambda_0\alpha$　$A^{\mathrm{T}}\alpha=\lambda_0\alpha$

$\therefore$ $A^{\mathrm{T}}A\alpha=\lambda_0 A^{\mathrm{T}}\alpha$　　又$A^{\mathrm{T}}A=E$

$\therefore$ $\alpha=\lambda_0{}^2\alpha$　　即$\lambda_0=1$或-1

$\therefore$ 如果正交矩阵有实特征根，则该特征根只能是1和−1。

62.（10分　题号 333　　　答案

图解：假设 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$（$c_1\neq0$，$c_2\neq0$ 为常数）是 A 的特征向量，则存在λ

$$A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)=\lambda(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)$$

$\therefore$ $c_1A\alpha_1+c_2A\alpha_2=\lambda c_1\alpha_1+\lambda c_2\alpha$　　又

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$　　$A\lambda_2=\lambda_2\alpha_2$

$\therefore$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 这与λ_1，λ_2是n阶矩阵A的两个不同特征相矛盾

$\therefore c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$（$c_1\neq0$，$c_2\neq0$为常数）不是$A$的特征向量。

63.（10分　题号 338　　　答案

图解：$\because n$阶矩阵A与B相似，m阶矩阵C与D相似

$\therefore$存在一个可逆矩阵P_1和P_2，使得

$$P_1^{-1}AP_1=B，P_2^{-1}CP_2=D$$

$$\therefore \begin{pmatrix}P_1^{-1} & 0\\ 0 & P_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$$ 即

$$\begin{pmatrix}P_1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$$

$\therefore$分块矩阵$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$相似。

64.（5分） 题号 368 答案

图解:

由 A 为奇数阶正交矩阵，知 $A^{\mathrm{T}}A=E$，且 $A^{\mathrm{T}}=A$。

$$\det(E-A)=\det(AA^{\mathrm{T}}-A)=\det A\det(A^{\mathrm{T}}-E)$$

$$=\det A\det(A^{\mathrm{T}}-E)^{\mathrm{T}}=\det(A-E)=(-1)^n\det(E-A),$$

又因为 A 为奇数阶矩阵。所以 $\det(E-A)=-\det(E-A)$。即：

$$\det(E-A)=0,$$

$\therefore 1$ 是 A 的一个特征值。

65.（5分） 题号 369 答案

图解:

由 A 为 n 阶正交矩阵，知 $A^{\mathrm{T}}A=E$，且 $A^{\mathrm{T}}=A$。

$$\det(-E-A)=\det(-AA^{\mathrm{T}}-A)=\det A\det(-A^{\mathrm{T}}-E)=-\det(-E-A),$$

即 $\det(-E-A)=0$，

$\therefore -1$ 是 A 的一个特征值。

66.（5分） 题号 382 答案

图解:

$\because A$可逆，故A^{-1}存在。

$\therefore A^{-1}(AB)A=BA$，

$\therefore AB$ 与 BA 相似。

67.（10分 题号 387 答案

图解：　　设 A 的属于 λ 的特征向量为 $\alpha(\alpha \neq 0)$，则 $A\,\alpha = \lambda\,\alpha$。

$\therefore A(A\alpha) = A(\lambda\alpha)$ ，即 $A^2\alpha = \lambda A\alpha$，又 $A\,\alpha = \lambda\,\alpha$，

$\therefore A^2\alpha = \lambda^2\alpha$。　又　$A^{\mathrm{T}} = A, \lambda^2 = 1$，

$\therefore A^{\mathrm{T}}A\alpha = \alpha$ ，又　$\alpha \neq 0$，

$\therefore A^{\mathrm{T}}A = E$，

$\therefore$ A 是正交矩阵。

68.（5分）　题号 412　　　　答案

图解：　　由于 A、B 是正定矩阵，故 A 及 B 为实对称矩阵。

所以　$(BAB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=BAB$，即 BAB 也为实对称矩阵。

由于 A、B 为正定矩阵，则存在可逆矩阵 C_1，C_2，有

$$A= C_1^{\mathrm{T}}C_1,\ B= C_2^{\mathrm{T}}C_2 \quad ,$$

所以　$BAB= C_2^{\mathrm{T}}C_2C_1^{\mathrm{T}}C_1C_2^{\mathrm{T}}C_2=(C_1C_2^{\mathrm{T}}C_2)^{\mathrm{T}}(C_1C_2^{\mathrm{T}}C_2)$，

即　　BAB 也是正定矩阵。

69.（5分）　题号 413　　　　答案

图解：　　显然，$A^{\mathrm{T}}A$ 为对称矩阵，

又因为　　$A^{\mathrm{T}}A=(A^{\mathrm{T}})A,$

又 A 是可逆矩阵，所以 $A^{\mathrm{T}}A$ 为正定矩阵。

70.（5分）　题号 414　　　　答案

图解：　　由于 A、B 是正定矩阵，故 A 及 B 为实对称矩阵。从而 $A+B$ 也为实对称矩阵，而

$$f = X^{\mathrm{T}}AX,\quad g = X^{\mathrm{T}}BX,$$

为正定二次型。于是对不全为零的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$X^{\mathrm{T}}AX > 0,\quad X^{\mathrm{T}}BX > 0。$$

故　　$h= X^{\mathrm{T}}(A+B)X = X^{\mathrm{T}}AX + X^{\mathrm{T}}BX > 0$，

即二次型 $h= X^{\mathrm{T}}(A+B)X$ 为正定的，故 $A+B$ 为正定矩阵。

71.（10分　题号 418　　　　答案

图解： 设矩阵 A 为正定矩阵，因此 $f = X^{\mathrm{T}}AX$ 为正定二次型。

于是对不全为零的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$X^{\mathrm{T}}AX > 0,$$

取 $X = \varepsilon_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$(i=1,2, \cdots, n)$

则 $\varepsilon_i^{\mathrm{T}}A\varepsilon_i = d_i > 0$，$(i=1,2, \cdots, n)$

即主对角线上的元素都是正的。

72.（10分 题号 422 答案

图解： 因为 A 为反对称矩阵，所以 $A^{\mathrm{T}} = -A$，

因此 $E - A^2 = (E - A)(E + A) = (E + A^{\mathrm{T}})(E + A) = (E + A)^{\mathrm{T}}(E + A)$。

所以 $E - A^2$ 为正定矩阵。

73.（10分 题号 423 答案

图解：设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 且 λ_i 为实数，取 $t > \max\limits_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$，则 $tE+A$ 的特征

$\lambda_1 + t, \lambda_2 + t, \cdots, \lambda_n + t$ 全部大于零。因此，当 $t > \max\limits_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$ 时，$tE+A$ 为正定矩阵。

74.（10分 题号 424 答案

图解: 因为 A 为实对称矩阵，且 $\det A<0$，故二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$ 的秩为 n

不是正定的，故负惯性指数至少为 1，从而 f 可经过可逆线性变换 $X=CY$，化成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_n^2 \qquad (1)$$

其中 $1\le s<n$。当 $y_n=1$,且其余 $y_i=0$ 时，上式右端小于零。但由 $X=CY$ 所确定的向量 $X\neq 0$ 使（1）式左右两端相等，即有实 n 维向量 X，使 $X^{\mathrm{T}}AX<0$。

75.（10分 题号 428 答案

图解: **因为 A 为正定矩阵，不妨设 A 的特征值分别为** $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 且 $\lambda_i>0$，

则 $A+E$ 的特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$ 且 $\lambda_i+1>1$，从而有

$$|A+E|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1。$$

76.（10分 题号 531 答案

77.（10分 题号 902 答案

图解: 设 λ 是 A 的任意一个特征值， X 是 A 的属于 λ 的特征向量

则 $(\lambda E-A)X=\theta$

$$\lambda X=AX=A^2X=A(\lambda X)=\lambda(AX)=\lambda^2X$$

$$(\lambda^2-\lambda)X=\theta$$

因为 $X\neq\theta$，所以 $\lambda^2-\lambda=0,\lambda=1或\lambda=0,$证毕。