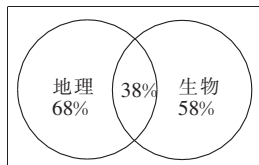


高一上学期期中考试

数学参考答案

1. A 由 $m^2 > 4$, 解得 $m > 2$ 或 $m < -2$, 所以“ $m > 2$ ”是“ $m^2 > 4$ ”的充分不必要条件.
2. C 因为 $A = \{x | 3x - 6 > 0\} = \{x | x > 2\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 4 \leq 0\} = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$, 所以 $(\complement_U A) \cap B = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$.
3. B $f(-3) = f(0) = f(3) = \lg 10 = 1$.
4. C 因为 $A = \{x | -2 \leq -x + 1 < 3\} = \{x | -2 < x \leq 3\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, 所以 $B \subseteq A$, 故选 C.
5. A 因为函数 $y = f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 所以 $f(-1) = f(1) = 1 - a = 2$, 解得 $a = -1$.
6. D 因为 $0 < a < 1, b < 0, c > 1$, 所以 $c > a > b$.
7. D 由韦恩图可知, 选择了地理科目或选择了生物科目的占比为 $68\% + 58\% - 38\% = 88\%$.



8. B 若 $a > 0$, 则 $\begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(1) < 0, \\ f(2) > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ a^2 + 2a - 11 < 0, \\ a^2 + 6a - 16 > 0, \end{cases}$ 解得 $2 < a < 2\sqrt{3} - 1$; 若 $a < 0$, 则 $\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) > 0, \\ f(2) < 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a^2 - 1 < 0, \\ a^2 + 2a - 11 > 0, \\ a^2 + 6a - 16 < 0, \end{cases}$ 不等式组无解. 故 a 的取值范围是 $(2, 2\sqrt{3} - 1)$.
9. BD 空集中没有元素, A 错误; 空集是任何集合的子集, B 正确; 若 $a = 0, 0 \in \mathbf{N}$, C 错误; π 不是有理数, D 正确.
10. AB 因为 $a > b > 0$, 所以 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, A 正确; B 显然正确; 若 $c = 0$, 则 $ac^2 = bc^2$, C 错误; 若 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$, 则 $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} < (\frac{1}{2})^0 = 1$, D 错误.

11. AC 若 $a > 1$, 则函数 $y = a^x$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 函数 $y = x^2 + ax + a - 3$ 的图象的对称轴方程为 $x = -\frac{a}{2} < 0$, 故 A 符合, B 不符合; 若 $0 < a < 1$, 则函数 $y = a^x$ 是 \mathbf{R} 上的减函数, $a - 3 < 0$, 函数 $y = x^2 + ax + a - 3$ 的图象与 y 轴的负半轴相交, 故 C 符合, D 不符合.
12. ACD 因为 $f(x+2)$ 是偶函数, $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x+2) = f(-x+2) = -f(x-2)$, 即 $f(x+4) = -f(x), f(x+8) = f(x)$. 又因为当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = x^2 + 2x$, 所以 $f(-5) = f(3) = f(1) = 3, f(-3) = f(5) = -f(1) = -3, f(2020) = f(2012) = \dots = f(4) = -f(0) = 0, f(2021) = f(2013) = \dots = f(5) = -f(1) = -3$, 故选 ACD.

13. $\forall x > 1, x^2 - 3x \geq 0$ 存在量词命题的否定是全称量词命题.
14. -2 或 0 因为 $B \subseteq A$, 所以 $x^2 = 4$ 或 $x^2 = 2x$, 解得 $x = \pm 2$ 或 $x = 0$. 又由集合的互异性, 排除 $x = 2$, 所以 $x = -2$ 或 0 .
15. 3 因为 $3a + 2b = 9$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{6}{b} = \frac{1}{9} (3a + 2b) (\frac{1}{a} + \frac{6}{b}) = \frac{1}{9} (3 + \frac{18a}{b} + \frac{2b}{a} + 12) \geq 3$, 当且仅当 $a = 1, b = 3$ 时取等号.

16. $(-\infty, 1)$ 不妨令 $a > b$, 则 $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} > 1$ 等价于 $f(a) - a > f(b) - b$. 构造函数 $h(x) = f(x) - x$, 则 $h(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数. 因为 $f(1) = 3$, 所以 $f(2^x - 1) < 2^x + 1$ 等价于 $f(2^x - 1) - (2^x - 1) < f(1) - 1$, 即 $2^x - 1 < 1$, 解得 $x < 1$.

17. 解: 选①, 令 $t = 2x - 3$, 则 $x = \frac{t+3}{2}$ 2分

因为 $f(2x-3)=4x^2-6x$, 所以 $f(t)=4\times(\frac{t+3}{2})^2-6\times\frac{t+3}{2}$ 5分

$=t^2+6t+9-3t-9$ 7分

$=t^2+3t$ 9分

即 $f(x)=x^2+3x$ 10分

选②, 因为 $f(x)+2f(-x)=3x^2-3x$, (1)

所以 $f(-x)+2f(x)=3(-x)^2-3(-x)=3x^2+3x$. (2) 4分

(2) $\times 2$ -(1)得 $3f(x)=3x^2+9x$, 8分

即 $f(x)=x^2+3x$ 10分

选③, 令 $x=y=0$, 则 $f(0)=2f(0)$, 即 $f(0)=0$ 4分

令 $y=0$, 则 $f(x)=2f(0)+x^2+3x=x^2+3x$ 10分

18. 解: (1) 因为 $y=(m^2-5m+5)x^{m-3}$ 是幂函数,

所以 $m^2-5m+5=1$, 解得 $m=1$ 或 $m=4$ 3分

又因为 $y=(m^2-5m+5)x^{m-3}$ 的图象关于 y 轴对称,

所以 $m=1$, 5分

故该幂函数的解析式为 $y=x^{-2}$ 6分

(2) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-3, 6]$,

所以在 $g(x)$ 中, 有 $\begin{cases} -3 \leq x+5 \leq 6, \\ x+4 \geq 0, \end{cases}$ 8分

解得 $\begin{cases} -8 \leq x \leq 1, \\ x \geq -4, \end{cases}$ 10分

故 $g(x)$ 的定义域为 $[-4, 1]$ 12分

19. 解: (1) 原式 $=\frac{\sqrt[3]{a^5 b^4 \cdot ab^{-1}}}{a^2 b}$ 3分

$=\frac{a^2 b}{a^2 b}$ 5分

$=1$ 6分

(2) 原式 $=(\frac{3^4}{2^4})^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \cdot 4\log_2 3 \cdot \log_3 2 + \log_3 (100 \times \frac{1}{4}) - 1 + \frac{1}{3}$ 9分

$=\frac{2}{3} + 1 + 2 - 1 + \frac{1}{3}$ 11分

$=3$ 12分

20. 解: (1) 由题意可知, 当 $0 < x < 40, 100x \in \mathbf{N}$ 时,

$g(x)=300x-5x^2-50x-500-1000=-5x^2+250x-1500$; 2分

当 $x \geq 40, 100x \in \mathbf{N}$ 时,

$g(x)=300x-301x-\frac{2500}{x}+3000-1000=2000-(x+\frac{2500}{x})$ 4分

综上所述, $g(x)=\begin{cases} -5x^2+250x-1500, & 0 < x < 40, 100x \in \mathbf{N}, \\ 2000-(x+\frac{2500}{x}), & x \geq 40, 100x \in \mathbf{N}. \end{cases}$ 5分

(2) 当 $0 < x < 40, 100x \in \mathbf{N}$ 时, $g(x)=-5x^2+250x-1500=-5(x-25)^2+1625$, 7分

且当 $x=25$ 时, $g(x)$ 取得最大值 1625; 8分

当 $x \geq 40, 100x \in \mathbf{N}$ 时,

$g(x)=2000-(x+\frac{2500}{x}) \leq 1900$, 10分

当且仅当 $x=50$ 时, $g(x)$ 取得最大值 1900. 11分

综上,当 $x=50$,即产量为 5000 台时,该工厂获得利润最大,且最大利润为 1900 万元. 12 分

21. 解:(1)因为 $m=2$,所以 $B=\{x|x^2-10x+24<0\}=\{x|4<x<6\}$, 2 分

又 $A=\{x|x^2-4x-5<0\}=\{x|-1<x<5\}$, 4 分

所以 $A\cup B=\{x|-1<x<6\}$ 5 分

(2) $B=\{x|x^2-(3m+4)x+2m^2+8m<0\}=\{x|(x-2m)(x-m-4)<0\}$, 7 分

因为 $B\subseteq A$,

若 $2m<m+4$,即 $m<4$,则 $\begin{cases} 2m\geq-1, \\ m+4\leq 5, \text{解得 } -\frac{1}{2}\leq m\leq 1; \\ m<4, \end{cases}$ 8 分

若 $2m=m+4$,即 $m=4$,则 $B=\emptyset$,符合题意; 9 分

若 $2m>m+4$,即 $m>4$,则 $\begin{cases} m+4\geq-1, \\ 2m\leq 5, \text{不等式无解.} \\ m>4, \end{cases}$ 10 分

所以 m 的取值范围为 $\{m|-\frac{1}{2}\leq m\leq 1 \text{ 或 } m=4\}$ 12 分

22. 解:(1)因为 $f(x)=\frac{b-3^x}{3^{x-1}+t}$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数,

所以 $\begin{cases} f(0)=0, \\ f(-1)=-f(1), \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b-1=0, \\ \frac{b-3^{-1}}{3^{-2}+t}=-\frac{b-3}{1+t}, \end{cases}$ 2 分

解得 $\begin{cases} t=\frac{1}{3}, \\ b=1, \end{cases}$ 4 分

则 $f(x)=\frac{1-3^x}{3^{x-1}+\frac{1}{3}}=\frac{3-3^{x+1}}{3^x+1}$ 5 分

(2)令 $g(x)=f(x)-x^2+2x+\frac{5}{2}$,由(1)可知 $g(x)=\frac{-3(3^x+1)+6}{3^x+1}-x^2+2x+\frac{5}{2}$
 $=\frac{6}{3^x+1}-(x-1)^2+\frac{1}{2}$ 6 分

易证函数 $y=\frac{6}{3^x+1}$ 与 $y=-(x-1)^2+\frac{1}{2}$ 均是 $[1,+\infty)$ 上的减函数,则 $g(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的减函数,且 $g(x)_{\max}=g(1)=2$ 8 分

令 $h(m)=a^{m+1}(-2\leq m\leq 1)$,对于任意 $x\in[1,+\infty)$,存在 $m\in[-2,1]$,使得 $f(x)-x^2+2x+\frac{5}{2}\leq a^{m+1}$ 成立等价于 $g(x)_{\max}\leq h(m)_{\max}$ 成立,即 $2\leq h(m)_{\max}$ 成立. 9 分

若 $0<a<1$,则 $h(m)$ 在 $[-2,1]$ 上单调递减, $h(m)_{\max}=h(-2)=a^{-1}=\frac{1}{a}$,故 $\frac{1}{a}\geq 2$,

解得 $0<a\leq\frac{1}{2}$; 10 分

若 $a>1$,则 $h(m)$ 在 $[-2,1]$ 上单调递增, $h(m)_{\max}=h(1)=a^2$,故 $a^2\geq 2$,解得 $a\geq\sqrt{2}$ 11 分

综上所述, a 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2}] \cup [\sqrt{2},+\infty)$ 12 分