

数学试卷(理科)

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围:人教版选修 2-2,选修 2-3 第一章~第二章第 3 节,选修 4-4,选修 4-5。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = \frac{1-i^5}{1+i}$, 则 \bar{z} 的虚部是
A. 1 B. -1 C. -i D. i
2. 已知 $f(x) = x(2017 + \ln x)$, $f'(x_0) = 2018$, 则 $x_0 =$
A. e^2 B. e C. $\ln 2$ D. 1
3. 设 $(x+2xi)(1-i) = 1+yi$, 其中 x, y 是实数, 则 $|3x+6yi| =$
A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{7}$
4. 用反证法证明“至少存在一个实数 x_0 , 使 $3^{x_0} > 0$ 成立”时, 假设正确的是
A. 至少存在两个实数 x_0 , 使 $3^{x_0} > 0$ 成立
B. 至多存在一个实数 x_0 , 使 $3^{x_0} > 0$ 成立
C. 不存在实数 x_0 , 使 $3^{x_0} > 0$ 成立
D. 任意实数 x , $3^x > 0$ 恒成立
5. 已知函数 $f(x) = -x^3 + \sqrt{3}ax^2 - x - 1$ 在 \mathbf{R} 上是单调函数, 则实数 a 取值范围是
A. $(-1, 1)$ B. $[-1, 1]$
C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
6. 设复数 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位), 若 z 满足 $|z-2|^2 + |z+2i|^2 = 8$, 则复数 z 的模的最大值为
A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

7. 已知函数 $f(x) = \sin x + 3x^2$, 则 $\int_{-2}^2 f(x) dx =$
- A. 16
B. 8
C. $2\cos 2$
D. $-2\cos 2$
8. $(2-x^3)(1+\sqrt{x})^8$ 的展开式中不含 x^4 项的各项系数之和为
- A. -26
B. 230
C. 254
D. 282
9. 盒中有 10 个螺丝钉, 其中有 3 个是坏的, 现从盒中随机地抽取 4 个, 那么概率是 $\frac{3}{10}$ 的事件为
- A. 恰有 1 个是坏的
B. 4 个全是好的
C. 恰有 2 个是好的
D. 至多有 2 个是坏的
10. 一个袋子中有 4 个黑球和 1 个白球, 从中取一球, 取后放回, 重复 n 次, 记取出的球为白球的次数为 X , 若 $E(X) = 3$, 则 $D(5X+3) =$
- A. 60
B. $\frac{12}{5}$
C. $\frac{27}{5}$
D. 12
11. 我国即将进入双航母时代, 航母编队的要求是每艘航母配 2~3 艘驱逐舰, 1~2 艘核潜艇. 船厂现有 5 艘驱逐舰和 3 艘核潜艇全部用来组建航母编队, 则不同组建方法种数为
- A. 30
B. 60
C. 90
D. 120
12. 设函数 $f(x) = -x^2 - 6x + m$, $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - m$, $P(x_1, f(x_1))$, $Q(x_2, g(x_2))$, 若 $\forall x_1 \in [-5, -2], \exists x_2 \in [-1, 2]$, 使得直线 PQ 的斜率为 0, 则 m 的最小值为
- A. -8
B. $-\frac{5}{2}$
C. -6
D. 2

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若复数 $(1-i)(a-i)$ 在复平面内对应的点在第三象限, 则整数 a 的取值为_____.
14. 函数 $f(x) = \ln(2-x) + x$ 的最大值为_____.
15. 已知 $(x+1)^3(x-1)^{2015} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2018}x^{2018}$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} =$ _____.
16. 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制(当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.7, 客场取胜的概率为 0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以 4 : 1 获胜的概率是_____.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

《朗读者》是一档文化情感类节目,以个人成长、情感体验、背景故事与传世佳作相结合的方式,选用精美的文字,用最平实的情感读出文字背后的价值,深受人们的喜爱。为了了解人们对该节目的喜爱程度,某调查机构随机调查了 A, B 两个城市各 100 名观众,得到下面列联表。

	非常喜爱	喜爱	合计
A 城市	60		100
B 城市		30	
合计			200

- (1) 完成上表,并根据以上数据,判断是否有 90% 的把握认为观众的喜爱程度与所处的城市有关?
- (2) 现从喜爱的观众中利用分层抽样的方法抽取 7 人做进一步调查并抽取 3 人进行奖励,求 A, B 两城各至少有一人获奖的概率。

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ (其中 $n = a + b + c + d$)

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{-9}{x+3} + 3$, 数列 $\{a_n\}$ 对于 $n \in \mathbf{N}^*$, 总有 $a_{n+1} = f(a_n)$, $a_1 = \frac{1}{2}$.

- (1) 求 a_2, a_3, a_4 的值, 并猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 用数学归纳法证明你的猜想。

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (f'(1) - 4)e^{x-1} - f(0)x + 3x^2$.

- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 求 $f(x)$ 的单调区间与极值。

20. (本小题满分 12 分)

某电视台举办“我们一起向前冲”的闯关比赛,先对报名人员的身体进行体检,若体检不合格,则可休息一周再复检一次,体检合格之后方可参加闯关比赛.闯关比赛失败,还可以有一次复活赛的机会.已知某人身体在初检和复检中合格的概率均为 $\frac{4}{5}$,闯关赛和复活赛中成功的概率均为 $\frac{1}{2}$.假设每次体检和比赛之间互不影响.

- (1)求他最终闯关成功的概率;
- (2)在这项活动中,假设他不放弃所有机会,记他体检和参加比赛的总次数为 X ,求 X 分布列和数学期望.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x - 2a \ln x - \frac{1}{x} + 1, a \in \mathbf{R}$.

- (1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2)当 $a=1$ 时,正数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) = 2$,证明: $x_1 + x_2 \geq 2$.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 两题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + t \cos \alpha, \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数),其中 $\alpha \neq k\pi +$

$\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$.

- (1)求曲线 C_1 和曲线 C_2 的直角坐标方程;
- (2)已知曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A, B 两点,点 $P(-1, 2)$,求 $|PA|^2 + |PB|^2$ 的取值范围.

23. (本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+3| + |x-a| (a > 0)$.

- (1)当 $a=1$ 时,求不等式 $f(x) > 4$ 的解集;
- (2)若不等式 $f(x) \leq 7$ 的解集包含 $[a, 3]$,求 a 的取值范围.