离散数学

Discrete Mathematics

景晓军

制作时间：2012年2月

联系方式

- 景晓军
- 北京邮电大学280信箱
- Tel: 62283790
- Mobile: 13910621711
- E-mail: jxiaojun@bupt.edu.cn

课程安排

- 总学时：32
- 考核原则：以学有所得为目的，以掌握方法和思路为要求，摒弃死记硬背。
- 考核方式：闭卷考试
- 教材：《离散数学》，耿素云，屈婉玲，张立昂 清华大学出版社

  《离散数学》，景晓军，孙松林，陆月明 北京邮电大学出版社

什么是数理逻辑

- 数理逻辑: 用数学方法来研究推理的形式结构和推理规律的数学科学.
- 数理逻辑的内容大体为: 逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论。
- 本书重点讲授命题逻辑和一阶逻辑的逻辑演算。

骑士与无赖

- 骑士，说真话

  无赖，说假话

  现有俩人

  问话判断？

  （1）你是骑士吗？

  （2）你是无赖吗？

  （3）你们俩人中有骑士吗？

  （4）你们俩人中有无赖吗？

逻辑判断

- 长官命令:

  理发兵给所有不自己剃胡子的人刮胡子。违抗命令者关禁闭。

  理发兵剃也不是，不剃也不是。

第一章 命题逻辑

什么是命题

- 数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的前提和结论都是表达判断的命题。
- 命题：能判断真假的陈述句。
- 真值：命题的判断结果，也称为值。
- 真、假：命题真值的两种可能。
- 命题的三要素:

  （1）是陈述句

  （2）真值只能有真和假两种结果

  （3）真值必须唯一

判断下面句子是否是命题

2是素数.	是	1
雪是黑色的.	是	0
2+3=5.	是	1
明年十月一日是晴天.	是	
这朵花多好看呀!	否	
明天下午有会吗?	否	
请关上门!	否	
x+y>5.	否	真值不唯一
地球外的星球上也有人.	是	
我写了错字	否	真值不唯一

悖论不是命题!

整个句子有二义性

简单命题与复合命题

- 简单命题：命题不能分成更简单的句子的命题，又称为命题常项。
  - 2是素数.
  - 雪是黑色的.
  - 2+3=5.
  - 明年十月一日是晴天.

- 复合命题：由简单命题用联结词联结而成的命题。
  - 3不是偶数;
  - 2是素数和偶数;
  - 林芳学过英语或日语;
  - 如果角A和角B是对顶角，则角A等于角B.

命题变项（命题变元）

- 命题变项（命题变元）：真值可以变化的陈述句。
  - 如：x+y>5.

  命题变项不是命题。

- 命题常项（命题常元）：真值唯一确定的陈述句。
  - 如：2是偶数.

  命题常项是命题。

简单命题、命题变项的符号化

- 简单命题符号化:
  - *p*: 2是素数; --命题常项
  - *q*: 雪是白的; --命题常项

- 命题变项符号化:
  - *P*: x+y>5; --命题变项（不是命题）

- 命题的真值表示:
  - 1(T)表示真;
  - 0(F)表示假.

基本联结词

- 否定联结词：$\neg$
- 合取联结词：$\wedge$
- 析取联结词：$\vee$
- 蕴涵联结词：$\rightarrow$
- 等价联结词：$\leftrightarrow$

否定联结词

- 设p为任一命题，复合命题“非p”（或“p的否定”）称作p的否定式，记作$\neg P$， $\neg$ 为否定联结词。$\neg p$为真当且仅当p为假。
  - p ： 3是偶数。
  - $\neg p$ ： 3不是偶数

合取联结词

- 设p，q为两个命题, 复合命题“p并且q”（或“p和q”）称作p与q的合取式，记作$p \wedge q$， $\wedge$为合取联结词。 $p \wedge q$为真当且仅当p与q同时为真。

  合取联结词是逻辑“与”的意思。

  - 李平既聪明(p)又用功(q):（$p \wedge q$）
  - 李平虽然聪明,但不用功:（$p \wedge \neg q$）
  - 李平不但聪明(p),而且用功(q):（$p \wedge q$）
  - 李平不是不聪明(p),而是不用功(q):（$\neg (\neg p) \wedge \neg q$）
- 不是所有的“和”、“与”都可用“$\wedge$”表示。
  - 李文和李武是兄弟： p

析取联结词

- 设p，q为两个命题,复合命题“p或q” 称作p与q的析取式，记作$p \vee q$， $\vee$为析取联结词。$p \vee q$为真当且仅当p与q中至少一个为真。

析取联结词是逻辑“或”的意思。

- 王燕学过英语(p)或法语(q)
- $p \vee q$

- “或”具有“相容性”和“相斥性”两重意义。
  - 派小王或小李中的一人去开会：

    $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

蕴涵联结词

- 设p，q为两个命题，复合命题“如果p，则q”称作p与q的**蕴涵式**，记作$p \rightarrow q$，p为蕴涵式的**前件**，q为蕴涵式的**后件**，$\rightarrow$为**蕴涵联结词**。$p \rightarrow q$为假当且仅当p为真q为假。
  - p是q的充分条件，q 是p的必要条件
  - 只要不下雨，我就骑自行车上班：

    $$\neg p \rightarrow q$$
  - 只有不下雨，我才骑自行车上班：

    $$q \rightarrow \neg p$$
  - 若2+2=4，则太阳就从东方升起：$p \rightarrow q$

等价联结词

- 设p，q为两个命题，复合命题“p当且仅当q” 称作p与q的等价式，记作$p \leftrightarrow q$ ， $\leftrightarrow$为等价联结词
  - $p \leftrightarrow q$为真当且仅当p与q真值相同：P当且仅当q
  - 2+2=4当且仅当3是奇数：$p \leftrightarrow q$
  - 2+2=4当且仅当3不是奇数：$p \leftrightarrow \neg q$
  - $2+2 \neq 4$当且仅当3是奇数：$\neg p \leftrightarrow q$

习题

- 小王是游泳冠军或百米赛跑冠军: $p \lor q$
- 小王现在在宿舍或在图书馆:

$$(\neg p \land q) \lor (p \land \neg q)$$

- 选小王或小李中的一人当班长:

$$(\neg p \land q) \lor (p \land \neg q)$$

- 如果我上街，我就去书店看看，除非我很累:

$$\neg r \to (p \to q)$$

$$(\neg r \land p) \to q$$

- 王一乐是计算机系的学生，他生于68年或69年，他是三好学生:

$$p \land ((\neg q \land r) \lor (q \land \neg r)) \land s$$

联结词运算规则

- 我们所学的5种基本联结词也称为逻辑运算符，其运算顺序为：

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

- 如果出现的基本联结词相同，又无括号时，则按从左到右的运算顺序；
- 如果遇有括号时，不管出现的基本联结词如何，都先进行括号中的运算。

第一章 命题逻辑

1. 命题符号化及联结词
2. 命题公式及分类
3. 等值演算
4. 联结词全功能集
5. 对偶与范式
6. 推理理论

什么是命题公式或公式

- 命题公式是由命题常项、命题变项、联结词、括号等组成的符号串.
- 递归定义:
  1. 单个命题常项或变项$p,q,r,\ldots,p_i,q_i,r_i,\ldots,0,1$是合式公式;
  2. 如果A是合式公式，则$\neg$ A是合式公式;
  3. 如果A,B是合式公式，则$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$是合式公式;
  4. 只有有限次地应用(1)-(3)组成的符号串才是合式公式.

合式公式称为命题公式, 简称公式.

$(p \wedge q) \leftrightarrow r$ ✓　　$(\neg p \wedge q) \leftrightarrow r$ ✓　　$(\neg p\ q) \leftrightarrow r$ ×

$\neg p \vee q) \rightarrow r$ ×　　$p \wedge \neg q \leftrightarrow r$ ✓　　$p \neg \wedge q \leftrightarrow r$ ×

命题公式的层次定义

- 若A是单个命题(常项或变项)$p,q,r,\ldots,p_i,q_i,r_i,\ldots,0,1$,则称A为0层公式;
- 称A是n+1(n≥0)层公式是指A符合下列情况之一:
  - A=7B，B是n层公式;
  - A=B ∧C，其中B，C分别为i层公式和j层公式,且n=max(i,j);
  - A=B ∨ C，其中B，C分别为i层公式和j层公式,且n=max(i,j);
  - A=B → C，其中B，C分别为i层公式和j层公式,且n=max(i,j);
  - A=B↔C，其中B，C分别为i层公式和j层公式,且n=max(i,j);
- 若A的最高层次为K，则称A是K层公式.
  - 7p ∨q : 2
  - p ∧ q ∧ r : 2
  - 7(7p ∧ q) →(r ∨s) : 4
  - 7(7p)∧(q→(r ∨s)) : 3

成真赋值, 成假赋值

- 设A为一命题公式, $p_1,p_2,\ldots,p_n$为出现在A中的所有的命题变项。给$p_1,p_2,\ldots,p_n$指定一组真值，称为对A的一个赋值. 若指定的这一组真值使A的值为真，则称这组值为A的成真赋值，若使A的值为假，则称这组值为A的成假赋值。

$A=(p \wedge q) \rightarrow r$

1 1 0： A = 0 成假赋值

1 1 1，0 1 1，0 1 0： A = 1 成真赋值

真值表

- 含$n(n>1)$个命题变项的命题公式,共有2^n组赋值,将命题公式A在所有的赋值之下取值的情况列成表,称为A的真值表. 如计算 $p \wedge (q \vee \neg r)$ 的真值表

	p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge (q \vee \neg r)$
0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	1	0
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	0	0	0
6	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	0	1	1

真值表（判断命题公式类型法Ⅰ）

- $p\wedge(q\vee\neg r)$ 有成真赋值，也有成假赋值（P7.表1.1)
- $(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$ 全是成真赋值（P7.表1.2)
- $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$ 全是成假赋值（P7.表1.3)

- 重言式：A在它的各种赋值下取值均为真
- 矛盾式：A在它的各种赋值下取值均为假
- 可满足式：A至少有一组赋值是成真赋值

重言式一定是可满足式，但可满足式未必是重言式

充分条件 必要条件

Sufficient condition **Necessary condition**

1. 命题符号化及联结词
2. 命题公式及分类
3. 等值演算
4. 联结词全功能集
5. 对偶与范式
6. 推理理论

等值演算

- 设A,B是两个命题,若等价式A↔B是重言式,则A与B是等值的,记为A<=>B。
  - 注意和“<=>”、“=”的关系。
  - A↔B是重言式（说明只出现A与B 的值同时为真或同时为假的两种情况），所以肯定A <=> B 。
  - 注意和“<=>”、“↔”的关系。如A <=> B 则A↔B必是重言式。若A↔B，未必A <=> B 因为A↔B有4种情况.

判断下列命题公式是否等值

- 7（pvq）与 7pV7q

- 7（pvq）与 7p∧7q

真值表法（1）

7（pvq）与 7pV7q 不等值

p	q	7p	7q	pvq	7(pvq)	7pv7q
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0

真值表法（2）

7（pvq）与 7p∧7q 等值

p	q	7p	7q	pvq	7(pvq)	7p∧7q
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

判断类别法 II：等值式(1)

不要死记，理解记忆

序号	等值式	定律
1	A⇔77A	双重否定
2	A⇔AVA	等幂律
3	A ⇔ A∧A	等幂律
4	AVB ⇔ BVA	交换律
5	A∧B⇔B∧A	交换律
6	(AVB)VC ⇔AV(BVC)	结合律
7	(A∧B)∧C ⇔A∧(B∧C)	结合律
8	AV(B^C) ⇔(AVB)^(AVC)	分配律(+ ÷ 互换)
9	A^(BVC) ⇔(A^B)V(A^C)	分配律(∧∨一样)

判断类别法II：等值式（2）

序号	等值式	定律
10	7(AVB) ⇔7A^7B	德.摩根律
11	7(A^B) ⇔7AV7B	德.摩根律
12	AV(A^B) ⇔A	吸收律
13	A^(AVB) ⇔A	吸收律
14	A V1 ⇔1	零律
15	A^0 ⇔0	零律
16	AV0 ⇔A	同一律
17	A^1 ⇔A	同一律
18	AV7A ⇔1	排中律
19	A^7A ⇔0	矛盾律

判断类别法 II：等值式（3）

序号	等值式	定律
20	A->B ⇔7AVB	蕴涵等式(真值表)
21	A <-> B ⇔(A->B)^(B->A)	等价等值
22	A->B ⇔7B->7A	假言易位(逆否命题)
23	A<->B⇔7A<->7B	等价否定等值
24	A->(B->C)⇔(A∧B)->C	输出律
25	(A->B)^(A->7B) ⇔7A	归缪论
	刁难人	

等值演算（判断命题公式类型法Ⅱ）

- (置换定理)：设Φ(A)是含命题公式A的命题公式，Φ(B)是命题公式B置换了Φ(A)中A之后得到的命题公式。如果A⇔B，则Φ(A)⇔Φ(B)。
  - 例如：$P\wedge \neg(q\wedge r)\Leftrightarrow P\wedge(\neg q\vee \neg r)$

注意：(A⇔B)→Φ(A)⇔Φ(B)，反之不然。

设：Φ(A)⇔A→B，Φ(B)⇔B→B⇔1

如果A⇔B，有Φ(A)⇔B→B，则Φ(A)⇔Φ(B)

但当Φ(A)⇔Φ(B)⇔1时，A⇔0，能使Φ(A)⇔1，B⇔1，也能使Φ(B)⇔1，显然此时A、B不等值。

- 根据上述等值式，不用真值表法就可以推出更多的等值式，这个过程为等值演算。

习题

- 验证下列等式：

$p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$（P10例1.9(1))

$p\rightarrow(q\rightarrow r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$

$\Leftrightarrow q\rightarrow(p\rightarrow r)$

习题

- 验证下列等式:

  $p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ （P10例1.9(2)）

  p

  $\Leftrightarrow p \wedge 1$

  $\Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q)$

  $\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

- 讲解P11.例11

  p-A;　*q*-B;　*r*-C;　*s*-D

第一章 命题逻辑

1. 命题符号化及联结词
2. 命题公式及分类
3. 等值演算
4. 联结词全功能集
5. 对偶与范式
6. 推理理论

联结词的扩展

- 异或联结词 $\forall$
- 与非联结词 ↑
- 或非联结词 ↓

异或联结词

- 设p,q为两个命题，复合命题“p，q中恰有一个成立”称为p与q的排斥或或异或记作$p\overline{\vee}q$，$\overline{\vee}$称作排斥或或异或联结词。
  $p\overline{\vee}q$为真当且仅当p，q中恰有一个为真。
  If and only if
  - $p\overline{\vee}q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- $(p\overline{\vee}q) \wedge (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow 0$
- $(p\overline{\vee}q) \vee (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow 1$

与非联结词

- 设p,q两个命题，复合命题“p与q的否定”称为p与q的与非式，记作$p\uparrow q$，$\uparrow$称作与非联结词。$p\uparrow q$为真当且仅当p，q不同时为真。

- $p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$

  $(p\uparrow q)\wedge(p\wedge q)\Leftrightarrow 0$

  $(p\uparrow q)\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow 1$

或非联结词

- 设p,q两个命题，复合命题“p或q的否定”称为p与q的或非式，记作$p\downarrow q$，$\downarrow$称作或非联结词。$p\downarrow q$为真当且仅当p，q同时为假。

- $p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$

$(p\downarrow q)\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow 0$

$(p\downarrow q)\vee(p\vee q)\Leftrightarrow 1$

n元真值函数

- 一个$n(n\geqslant 1)$维卡氏积$\{0，1\}^n$到$\{0，1\}$的函数称为一个n元真值函数。设F是一个n元真值函数，则可记为F： $\{0，1\}^n\rightarrow\{0，1\}$。 $\{0，1\}$<=>$\{x \mid x(x-1)=0\}$
- n个命题变项，共有2^n个可能的赋值（横行），有 2^{2^n} 个不同的真值函数（竖列）。其中，一个真值函数对应着一个真值相同的命题公式，而这个命题公式又和许多命题公式彼此间是等值的。即：n个命题变项，必有且仅有 2^{2^n} 个不同真值的命题公式，其余的命题公式必然与这 2^{2^n} 个命题公式中的一个是等值的。

两个变元的真值函数

p	q	0	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

由真值函数写出对应的命题公式

- n个命题变元，2^{2^n}个真值函数，出现k个“1”的真值函数为 $C_{2^n}^{k}=\dfrac{n!}{(n-1)!k!}$ 个。

- 现有p, q 2个命题变元，则：

0个“1”的公式1个；　0

1个“1”的公式4个；　p∧q; p↓q; 7(p→q); 7(p→q)

2个“1”的公式6个；　p; q; 7p; 7q; p↔q; 7(p↔q)

3个“1”的公式4个；　p∨q; p↑q; (p→q); (p→q)

4个“1”的公式1个；　1<=>p∨7p

冗余联结词、独立联结词

- 在一个联结词的集合中，如果一个联结词可由集合中的其他联结词表示，则称此联接词为冗余联结词，否则称为独立联结词。

- 现给定联结词$\{\neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow\}$
  - $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
  - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

    $\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$
  - $p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

- 所以$\{\vee, \leftrightarrow, \rightarrow\}$为冗余联结词

  $\{\neg, \wedge\}$ 为独立联结词

全功能集，极小功能集

- 若任一真值函数都可以用含某一联结词集中的联结词的命题公式表示，则称该联结词集为全功能集。若一联结词的全功能集中不含冗余的联结词，则称它为极小全功能集。

{7,∧,v,↔,→}，{7, ∧,v,↔,→， ↓， ↑}，
{7, ∧,v}，{7， V}，{7,∧}，{↑}，{↓}
为全功能集

{7, V}，{7,∧}，{↑}，{↓}为极小全功能集

极小功能集例题

- 用{↓}表示下列命题公式:

1. $p \wedge q$

$\Leftrightarrow \neg\neg p \wedge \neg\neg q$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow \neg((p \downarrow p) \vee (q \downarrow q))$

$\Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

2. $p \vee q$

$\Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q)$

$\Leftrightarrow \neg(p \downarrow q)$

$\Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

$(p \downarrow p) \Leftrightarrow A$

3. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$\Leftrightarrow (p \downarrow p) \vee q \Leftrightarrow A \vee q \Leftrightarrow (A \downarrow q) \downarrow (A \downarrow q)$

$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

第一章 命题逻辑

1. 命题符号化及联结词
2. 命题公式及分类
3. 等值演算
4. 联结词全功能集
5. 对偶与范式
6. 推理理论

对偶式

- 在含有联结词7,∧,∨的命题公式A中,将∨换成∧, ∧换成∨,若A中含0或1, 将0换成1, 1换成0, 所得到命题公式称为A的对偶式, 记作A*。

  - p∧q 与 p∨q是对偶式;
  - 7(p∧q) 与 7(p∨q) 是对偶式;

性质1

- 设A和A*互为对偶式,$p_1, p_2,\ldots,p_n$是出现在A和A*中的全部的命题变项,若将A和A*写成*n*元函数形式,则

  (1)$7A(p_1, p_2,\ldots,p_n) \Leftrightarrow A^*(7p_1,7p_2,\ldots,7p_n)$;

  (2)$7A^*(p_1, p_2,\ldots,p_n) \Leftrightarrow A(7p_1,7p_2,\ldots,7p_n)$.

  - 例如:$A(p,q,r)\Leftrightarrow p\wedge(7q\vee r)$

    $7A(p,q,r)\Leftrightarrow 7(p\wedge(7q\vee r))\Leftrightarrow 7p\vee(q\wedge 7r)$

    $A^*(p,q,r)\Leftrightarrow p\vee(7q\wedge r)$

    $A^*(7p,7q,7r)\Leftrightarrow 7p\vee(q\wedge 7r)$

    $7A^*(p,q,r)\Leftrightarrow 7(p\vee(7q\wedge r))\Leftrightarrow 7p\wedge(q\vee 7r)$

    $A(7p,7q,7r)\Leftrightarrow 7p\wedge(q\vee 7r)$

就是德·摩根律

性质2:对偶原理

- 设A,B为两命题公式,若A⇔B,则A*⇔B*,其中A*,B*分别为A,B的对偶式.

  - 例如: (p^q)V(7pV(7pVq))⇔7pVq
  - (p^q)V(7pV(7pVq))⇔(p^q)v(7pvq)
    ⇔(pv(7pvq))^(qv(7pvq))
    ⇔1^(7pvq)⇔ 7pVq
  - 对偶式(pvq)^(7p^(7p^q))⇔7p^q
  - (pvq)^(7p^(7p^q))⇔(pvq)^(7p^q)
    ⇔(p^(7p^q))v(q^(7p^q))
    ⇔0v(7p^q)⇔7p^q

简单析取式,简单合取式

- 仅有限个命题变项或其否定构成的析取式称为简单析取式,仅有限个命题变项或其否定构成的合取式称为简单合取式.
  - 简单析取式:pvq,7pvq,7pv7q
  - 简单合取式:p^q, 7p^q,7p^7q
  - 一个简单析取式为重言式,当且仅当同时含有一个命题变项及其否定.
  - 一个简单合取式为矛盾式,当且仅当同时含有一个命题变项及其否定.

析取范式,合取范式

- 仅由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式.
  - A⇔A1VA2VA3.....
  - 一个析取范式为矛盾式,当且仅当含有的每个简单合取式为假.
- 仅由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式.
  - A⇔A1∧A2∧A3.....
  - 一个合取范式为重言式,当且仅当含有的每个简单析取式为真.

范式存在定理

- 任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式，但不唯一.

  如： $\neg p \vee p \Leftrightarrow \neg q \vee q$

- 由于{7,∧,V}是全功能集,因而可以用这些联结词来代替→,↔,∀,↑↓。（目的是变成合取或析取范式）.
- $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
- ……

极小项

- 在含有n个命题的简单合取式中,若每个命题变项与其否定不同时存在,而两者之一必出现且仅出现一次,且第*i*个命题变项或其否定出现在从左起的第*i*位上(若命题变项无角标,则按字典顺序排序),这样的简单合取式称为极小项(3要素)
  - 7p^7q^7r------- 000 -----0记为m_0;
  - 7p^7q^r ------- 001 -----1记为m_1;
  - 7p^q^7r ------- 010 -----2记为m_2;
  - 7p^q^r ------- 011 -----3记为m_3;
  - p^7q^7r ------- 100 -----4记为m_4;
  - p^7q^r ------- 101 -----5记为m_5;
  - p^q^7r ------- 110 -----6记为m_6;
  - p^q^r ------- 111 -----7记为m_7;

取p, q, r本身为1，否定为0。

主析取范式（判断命题公式类型法Ⅲ）

- 设命题公式A中含有n个命题变项,如果A的析取范式中的简单合取式全是极小项,则A称为主析取范式.
- 任何命题公式的主析取范式是存在的，且唯一.

求解步骤:

- 求A的析取范式
- 对命题中不含某个变项的采用 B⇔B^1<=>(B^p)V(B^7p)
- “消去”重复出现的命题变项、矛盾式及极小项。

主析取范式（判断命题公式类型法Ⅲ）

- 命题公式A中含有n个命题变项,如果A是重言式（永真式），当且仅当A的主析取范式中含全部的2^n个极小项。
- 命题公式A中含有n个命题变项,如果A是矛盾式（永假式），当且仅当A的主析取范式中不含任何极小项。
- 命题公式A中含有n个命题变项,如果A是可满足式（协调式），则A的主析取范式中至少含一个极小项。

例题

- 求((pvq)→r) →p的主析取范式

  - ((pvq)→r) →p

    ⇔7((pVq)->r)vp

    ⇔7(7(pvq)vr)vp

    ⇔((pvq)^7r)vp⇔(p^7r)v(q^7r)vp

    ⇔(p^q^7r)v(p^7q^7r)V(p^q^7r)v(7p^q^7r)

    v(p^q^r)v(p^7q^r)v(p^q^7r)v(p^7q^7r)

    ⇔(p^q^7r)v(p^7q^7r)v(7p^q^7r)v(p^q^r)v(p^7q^r)

    ⇔ m_6 v m_4 v m_2 v m_7 v m_5

    ⇔ Σ (2,4,5,6,7)

例题

- $A \Leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p \Leftrightarrow \Sigma(2,4,5,6,7)$

p	q	r	A	B
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

$B \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow \Sigma(0,2,3,5,6)$

极大项

- 在含有*n*个命题的简单析取式中,若每个命题变项与其否定不同时存在,而两者之一必出现且仅出现一次,且第*i*个命题变项或其否定出现在从左起的第*i*位上(若命题变项无角标,按字典顺序排序),这样的简单析取式称为极大项（3要素）
  - pVqVr-------000-----0记为M0;
  - pVqV7r-----001-----1记为M1;
  - pV7qVr-----010-----2记为M2;
  - pV7qV7r---011-----3记为M3;
  - 7pVqVr-----100-----4记为M4;
  - 7pVqV7r---101-----5记为M5;
  - 7pV7qVr---110-----6记为M6;
  - 7pV7qV7r -111-----7记为M7;

取p, q, r本身为0，否定为1。

主合取范式（判断命题公式类型法III）

- 设命题公式A中含有n个命题变项,如果A的合取范式中的简单析取式全是极大项,则A称为主合取范式.
- 任何命题公式的主合取范式是存在的，且唯一.

求解方式

- 求A的合取范式
- 对命题中不含某个变项的采用 **B⇔BV0<=>(BVp)^(BV7p)**
- “消去”重复出现的命题变项，重言式及极大项。

主合取范式（判断命题公式类型法Ⅲ）

- 命题公式A中含有n个命题变项,如果A是重言式，当且仅当A的主合取范式中不含任何极大项。
- 命题公式A中含有n个命题变项,如果A是矛盾式，当且仅当A的主合取范式中含全部的2^n个极大项。
- 命题公式A中含有n个命题变项,如果A是可满足式（协调式），则A的主合析取范式中至少含一个极大项。

例题

- 求(p^q)vr的主合取范式

(p^q)vr⇔(pvr)^(qvr)

⇔(pvqvr)^(pv7qvr)^(pvqvr)^(7pvqvr)

⇔(pvqvr)^(pv7qvr)^(7pvqvr)

⇔M_0^M_2^M_4

⇔Π(0,2,4)

例题

- A⇔(p^q)vr ⇔ Π(0,2,4) ⇔ Σ(1,3,5,6,7)

p	q	r	A	B
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

B⇔(pVqV7r)∧(7pVqVr)∧(7pV7qV7r)

因真值表的写法是一样的。所以，同一个真值函数，对应唯一的一个主析取范式，且对应唯一的主合取范式。

即：一个主析取范式唯一的对应一个主合取范式。

主析取范式与主合取范式的关系

- 存在$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$关系（单个）.
  - 所以 $A \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_5 \vee m_7$

$\Leftrightarrow \Sigma(0,1,5,7)$

$\Leftrightarrow \neg M_0 \vee \neg M_1 \vee \neg M_5 \vee \neg M_7$

$\Leftrightarrow \neg(M_0 \wedge M_1 \wedge M_5 \wedge M_7)$

$\Leftrightarrow (M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_6)$

$\Leftrightarrow \Pi(2,3,4,6)$

$\neg\{A\} \Leftrightarrow \{E-A\}$

E是全集

第一章 命题逻辑

1. 命题符号化及联结词
2. 命题公式及分类
3. 等值演算
4. 联结词全功能集
5. 对偶与范式
6. 推理理论

什么是推理

- 推理是从前提推出结论的思维过程。前提是已知的命题公式，结论是从前提出发，应用推理规则推出的命题公式。

逻辑结论

- 若$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge A_K) \rightarrow B$为重言式,则称$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge A_K$推结论B的推理正确, B是$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge A_K$的逻辑结论或有效结论, 称$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge A_K) \rightarrow B$为由前提$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge A_K$推结论B的推理的形式结构.

构造证明法 (判断命题公式类型法Ⅳ)

- 同用"A<=>B"表示"A↔B"是重言式类似，用"A=>B"表示 "A→B"是重言式。因而，若由前提"$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge A_K)$"推结论"B"的推理正确，也记为：

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge A_K) \rightarrow B$$

- 判断推理是否正确的方法就是重言蕴涵式的方法。我们已学过三种方法：(1) 真值表法; (2) 等值演算; (3) 主析取范式。

- 下面介绍第四种方法：构造证明法

例题(1)

- 判断下面各推理是否正确
  - 如果天气凉快,小王就不去游泳.天气凉快,所以小王没去游泳.

p:天气凉快; q:小王去游泳

前提 p->7q , p

结论 7q.

推理形式: ((p->7q)^p) -> 7q

推理方法有三种:

(1) 真值表法

(2) 等值演算

(3)主析取范式

例题(2)

- 等值演算

((p->7q)^p)->7q

⇔((7pv7q)^p)->7q

⇔((p^7p)V(p^7q))->7q

⇔(p^7q)->7q

⇔7(p^7q)v7q

⇔7pvqv7q⇔1

- 主析取范式

((p->7q)^p)->7q⇔m_0vm_1vm_2vm_3

⇔ Σ (0,1,2,3)

推理定律

推理	推理定律
$A \Rightarrow (A \vee B)$	附加
$A \wedge B \Rightarrow A$	化简
$((A \rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$	假言推理
$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$	拒取式
$((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$	析取三段论
$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \Rightarrow (A \rightarrow C)$	假言三段论
$((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难

推理规则

推理规则	描述
附加	A|=AVB
化简	A^B|=A
拒取式	A->B,7B|=7A
析取三段论	AVB,7B|=A
假言三段论	A->B,7B|=7A
构造性二难	A->B,C->D,AVB|=BVD
合取引入规则	A,B|=A^B

例题

- 构造下列推理的证明

前提: pvq,p->7r, s->t, 7s->r, 7t

结论: q

证明:

(1) s->t　　拿出其中的一条前提,临时结论为t

(2) 7t　　发现有前提是7t

(3) 7s　　得出7s结论

(4) 7s->r　　前提引入

(5) r　　假言推理

(6) p->7r　　前提引入

(7) 7p　　拒取式推理

(8) pVq　　前提引入

(9) q　　析取三段论

附加前提证明法

- $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_K) \rightarrow (A \rightarrow B)$

  $\Leftrightarrow 7(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_K) V (7A V B)$

  $\Leftrightarrow (7(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_K) V 7A) V B$

  $\Leftrightarrow 7(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_K \wedge A) V B$

  $\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_K \wedge A) \rightarrow B$

- 令：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_K) \Leftrightarrow C$

原习题已经做过

故 $\underline{C \rightarrow (A \rightarrow B)} \Leftrightarrow \underline{(C \wedge A) \rightarrow B}$

例题

- 用附加证明法证明下面推理
  - 前提:p->(q->r),7svp,q
  - 结论:s->r

证明:(1) 7svp

(2) s　　　附加前提

(3) p

(4) p->(q->r)

(5) q->r

(6) q

(7) r

归缪法

- $A_1 \wedge A_2 \wedge --- \wedge A_K$是可满足式,则称$A_1,A_2,---,A_K$是相容的.否则 ($A_1 \wedge A_2 \wedge --- \wedge A_K$为矛盾式), 称$A_1,A_2, --- ,A_K$是不相容的.

- $(A_1 \wedge A_2 \wedge --- A_{K-1}) -> A_K <=> 7(A_1 \wedge A_2 \wedge --- \wedge A_K)$, 因此，若 $A_1,A_2, --- ,7A_K$是不相容的，则说明A_K是公式$A_1,A_2, --- ,A_{K-1}$的逻辑结论。这种将$7A_K$作为附加前提推出矛盾的证明方法叫归谬论。

- 令：A_1^A_2^…^A_{K-1}<=>B

- B: 是北京人； A_K：是中国人

显然：$B \rightarrow A_K$<=>7(B^7A_K) => B^7A_K<=>0

- 因为$B \rightarrow A_K$ => B^7A_K<=>0

  <=>7A_K^B

  => 7$A_K \rightarrow$7B

命题等于逆否命题

例题

- 构造下列推理证明

  前提:p->(7(r^s)->7q)，p，7s

  结论:7q

证明：

(1)p->(7(r^s)->7q)
(2)p
(3)7(r^s)->7q
(4)7(7q)
(5)(r^s)
(6)7s
(7)s
(8)s^7s

结论的否定

由(8)得出矛盾，根据归谬论说明推理正确。

End of Chpt. 1