文 章 摘 要

经过 160 余年的发展，可转换债券已成为世界金融市场上重要的复合型金融产品，其最大特点是债券内含转换权及其它附加条款，这些条款在提供更大的融资和投资灵活性的同时也给产品定价提出了难题。国内可转换债券正式上市时间较短，通过借鉴国际上同类产品的设计和运作经验，在最近两年取得了快速的发展，已成为金融市场上不可忽视的新兴品种。

本文旨在基于经典金融定价理论建立适用于国内市场环境和产品的定价模型。在归纳国内产品关键条款的基础上，借助二叉树、偏微分方程、利率期限结构和 Monte Carlo 模拟算法，建立了三种可转债定价模型。其共同特点是较全面地覆盖了当前产品中对价值产生影响的关键条款，给出了具体的计算求解方法，突破了假设过多纸上谈兵的局限，这是以往相关研究所不具备的。本文还利用上市可转债的交易数据对三个模型进行了实证研究，对模型能力和误差来源做出评价和解释。最后，在此基础上提出我国可转债市场的投资优势和策略。

关键词：产品条款，基础股价路径，利率期限结构，偏微分方程，理性决策

中图分类号：F832.5

Abstract

Convertible bond is an important complex derivative in the world financial market nowadays after 160 years development. Its biggest feature is the combined convertible option and other additive provisions, which offer more flexibility in financing and investment, but also raise difficulty in product valuation. In domestic market, convertible bond is still a new role, but it achieves rapid development in recent years by using the product design and operation experiences from other markets for reference.

The basic objective of this thesis is to establish the localized valuation model based on classical theories. Based on the characteristics of product provisions in local market, here developed 3 models using binomial tree, partial differential equation, term structure and Monte Carlo simulation. As to the general feature of these models, they cover most key provisions which are related to the value of product. Meanwhile, those models have solid academic basis and systematic methods to implement. Then we use the market transaction data to test those models and give the evaluation and explanation of their performance and the forecasting error. Finally, the predominance and investment strategies are given based on above discussion.

Keywords: Provisions, Share price route, Term structure, PDE, Rational decision-making

Library Category: F832.5

引 言

随着金融市场的发展与成熟，传统金融产品已经难以满足多样化的投资需求，衍生产品以及混和型产品的出现为市场带来了新的活力并得到了广泛认可。可转换债券是当前国际资本市场上一种极为重要的混合型产品，其历史可追溯到160多年前。我国于1997年颁布了《可转换公司债券管理暂行办法》，标志着可转换债券正式进入国内市场。近两年来，可转债在国内取得了快速发展成为备受瞩目的交易品种。

对发行方，可转换债券较普通公司债券具有更低的票面利率，并且如果投资者转股，则投资者与公司债权债务关系消失，成为公司股东，可使公司财务负担减轻，整体融资成本下降。对投资者，在可转换债券的纯债券价值保证基本投资收益的同时，转换权又提供了分享发行公司成长业绩的机会。

可转换债券结构复杂，要想促进它较好的本地化发展，则针对国内产品的理论和实证研究就十分重要。本文旨在明晰当前国内市场条件和产品特征的基础上，借鉴经典定价模型思想，建立适用于国内产品的定价模型。所建立模型的优势在于：合理——考虑了当前国内产品的关键条款并根据不同模型的结构特点提出了相应的算法，避免了以往研究一些不实际的假设和简化，这对于体现可转债产品特征非常重要；实用——模型条理清晰、结构规范，给出了参数估计和求解方法，方便用Matlab或其他计算机语言实现。总的来讲，模型不仅具有理论基础，也有良好的操作性，研究不再停留于“理想产品”或“理想模型”层面。

第一章概述了国际国内可转换债券市场的发展，明确了研究对象及理论和现实意义。第二章，对可转换债券的基本要素和重要条款做出诠释，并提出可转换债券的融资及投资优势，为定价过程中价值判断建立概念基础。第三章是本文主体，第一部分简要回顾国内外可转债定价研究的发展，第二部分对当前国内产品要素进行了归纳，第三部分结合上述产品要素，运用不同理论方法建立三种定价模型，并详细讨论了每个模型的求解算法和自身特点。第四章，采用上述定价模型做实证分析，从整体和个体两方面对模型的预测效果进行评述。最后第五章将探讨我国可转换债券市场的投资优势和投资策略。

第一章 国际国内可转换债券市场概述

可转换债券是公司债券的一种，它的最大特点是含有转股权，即持有人拥有在规定的期限内按转换价格将该转债转换成发债公司股票的权力。自从 1843 年美国纽约 Erie Railway 公司发行世界第一张可转换债券以来，历经 160 多年的发展，它已经成为在世界金融市场中广受关注的重要的融资和投资工具。

§1.1 可转换型公司债券及美国市场

虽然可转换债券出现较早，但其得到广泛认同并大规模发展是在最近的几十年。或许当初创立的理念过于超前，在 20 世纪 70 年代前，对于可转换债转定价本身囿于理论方法与研究工具的落后，无法展开深入的讨论。20 世纪 70 年代中期，B-S 的期权定价理论的问世，加之计算机技术的高速发展，为可转换债券的研究提供了有力的手段，大大增加了理论界和实务界对它的关注。品种创新是贯穿可转换债券发展过程的最大特点。历经世界金融市场起伏波动和全球股市震荡，可转换债券市场的资本规模和发行金额却不断创下新高。

§1.1.1 可转换型公司债券的分类

一、（传统）可转换公司债券

作为可转换型公司债券的鼻祖，它具有该类产品典型的特征，且被世界范围内的金融市场广泛认可，是发行数量最大的可转换型公司债券。它具有固定的发行期限、既定的利息支付额度，到期还本且具有相关公司的资信评级。在存续期中，可转换债券持有人可以选择是否将债券按照既定的转股价转换为公司的股票。在转股选择权以外，现在的可转换债券还具有附加条款，包含利率补偿、回售、赎回和转股价格修正条款等。各因素将综合的影响其价值，这也增加了可转债（后文中将沿用该简称）定价的难度。相关的具体讨论将在后文逐步展开。

二、零息票可转换公司债券

不同于传统可转换债券，它的票面利息为 0，在债券有效期间发行人不支付利息，采用折价发行。若持有到期，可获得较高固定的资本收益。该类可转换债券一般转股价格设定较高，所以有效期内转股可能性较小，具有更强的债性。

不用支付利息减少了发行人的财务压力，节省了发行成本，所以它常被发展期的高成长性企业采用。1985 年美林证券发行既可赎回又可回售的零息票转债 LYON (Liquid Yield Option Note)，这是可转换债券产品的一个重大创新，丰富的投资选择极大刺激了当时的金融市场，为可转换债券的发展提供了借鉴。

三、强制转换公司债券

此种转换公司债券在发行后规定的时间内，将全部被要求转换为公司股票。一般该期限为5年，其他与传统型可转债相同，但由于转股必然发生，在定价时将考虑与可转换债券不同的时间边界和折现问题，该类可转债在市场中较少见。

四、可交换股票的可转换公司债券

它允许A公司发行的可转换债券可以在将来被转换为B公司的股票。集团公司发行可转换债券指向子公司股票，或同一集团下一子公司发行可转换债券指向另一家资公司的股票的情况较为多见。发行可交换股票的可转换债券是首次发行新股的子公司低成本筹资的有效途径之一，同时可避免发债主体的股权稀释，并可提高股票发行方的债券资信和市场知名度。由于涉及复杂的风险和利益以及权责关系，该产品很少被采用。

五、可转换优先股

严格的讲，这已经不是一种债券产品，但其性质十分接近可转换债券。可转换优先股持有人有权在任何时刻将其转换为确定数量的公司股票，不转换时是累计参与公司的利润分配。两者都具有相对固定的息票率（可转换优先股支付红利，可转换债券支付利息）和基准股票的变动关系；可转换优先股没有固定的到期日且股利收益并未成文，具有较大不确定性。

§1.1.2 美国市场产品种类和可转债发行情况

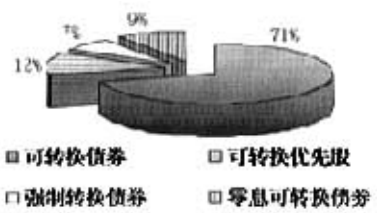
美国在1999年之后超越日本成为了世界上规模最大的可转换债券市场，上市发行的可转换债券在发行数量、发行规模、条款创新及行业分布上都具有相当的代表性。利用来自Morgan Stanley截至2005年3月的统计资料，对美国市场的情况作一简要的描述。

1> 依照前文分类标准，表1.1和图1.1综合显示了目前的美国可转换型债券市场发行品种构成情况：

表 1.1 美国可转换型债券市场品种

证券种类	数量（支）
可转换债券	622
可转换优先股	108
强制转换债券	64
零息可转换债券	83
汇　总	877

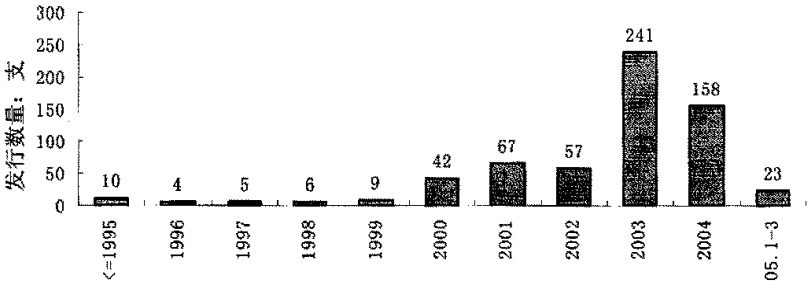
图 1.2 各产品的百分比构成



美国市场产品类型十分丰富，而（传统）可转换债券仍然是绝对的主体。作为最成熟、最具有普适性的转换类债券，传统型可转债适用于多种类型的企业融资，其灵活的投资方式也是它得到市场投资方广泛认可的主要原因。目前国内市场的可转换债券均为传统型可转债。

2> 美国市场可转换债券历年发行数量分布。

图 1.2 美国历年可转换债券发行数量



世界上第一支可转换债券诞生于美国市场，但此后 150 年间美国可转换债券市场的份额都远远低于欧洲和日本。1995 年以后，随着美国经济的持续增长以及中小型成长企业的增多，融资需求大大增加，普通债券、股票等传统金融工具已经很难提供较低的融资成本且无法吸引大量的投资者。此时可转换债券就体现出它的优势，美国在此时期迅速成为全球最重要的可转债市场。

§1.2 我国可转换债券市场的发展

可转换债券进入我国市场始于 20 世纪 90 年代初，从时间上讲和中国股市的发展基本一致。但可转债作为结构多变的复合金融产品，在当时的国内市场并未得到广泛认可。出于融资的需要，一些具有国际化视野的公司，从国际市场揭开了中国可转换公司债券的发行历史。1990 年开始，深南玻(B)、中纺机等股票的发行方先后在欧洲资本市场发行了转债，这在理念上给国内上市企业很大的冲击，也让中国金融界对可转换债券投出注视的目光，为可转换债券在国内的发展奠定了基础。

1992 年 12 月，中国宝安集团股份有限公司在国内证券市场第一次公开发行转债。该次共发行了 5 亿元人民币 3 年期 A 股可转换债券，面值 5000 元，期限为 3 年，票面利息率为 3%，转股价格为每 25 元换 1 股，转换期为 1993 年 6 月 11 日至 1995 年 12 月 31 日。宝安转债在上市初期十分活跃，但由于其发行存在技术缺陷以及当时 A 股市场低迷、公司业绩滑坡等因素，宝安转债在到期日只有 2.7%的债券被转股，导致宝安集团于 1996 年初债券到期后还本付息近 5 亿人民币，给公司财务造成了巨大压力。此时可转换债券显然没有体现出它的低融资成本特性，不得不说是一次失败的尝试。

为了使可转换债券真正成为促进金融市场发展的工具，我国于 1997 年 3 月 25 日出台了《可转换公司债券暂行管理办法》(于 1997 年 4 月 9 日正式发布)以

规范可转换债券的发行工作。《办法》对可转换公司债券的发行方资格、产品条款等提出了明确的规定。同时，中国证监会开始组织非上市的国有企业进行可转换公司债券试点发行。1998 年 8 月南宁化工集团发行了中国第一只非上市公司可转换债券，除基本条款外，还带有强制性转股条款和回售条款。2000 年，虹桥机场和鞍钢新轧相继发行可转换债券，这是继深宝安以后，上市公司首次在国内市场被允许发行可转换债券。当时深、沪两地交易所挂牌交易的可转换债券增加到 5 只。加上在海外发行的可转换债券，中国企业可转换债券融资总额已接近 100 亿元人民币。

越来越多的企业提出了发行可转换债券的要求，因此 2001 年 4 月 28 日《上市公司发行可转换公司债券实施办法》〔简称《实施办法》〕出台，标志着可转换公司债券成为我国一种常规的融资品种。《实施办法》的推出，大大地简化了可转换公司债券发行申报及核准程序，为发行可转换公司债券奠定了较完备的法律基础。在经历了近 10 年的摸索之后，国内可转换债券市场从体制上正式形成。

2001 年是国内可转债市场暗流涌动的一年。其间没有新的可转债发行，但拟发行各家公司都在按照自身条件及新的法规和制度，精心设计着自己的发行计划。2002 年，暗流演变成潮流，江苏阳光转债发行，成为核准制下第一家可转换债券，此后可转换债券在国内市场的发展势头可以用雨后春笋形容。在发行的数量上和规模上与近年来不太景气的证券业形成了一个鲜明的对比。2003 年上市公司通过可转债募集的资金规模远远超过增发、配股等再融资方式筹集的资金规模。截至 2004 年 12 月 21 日，可转债的市值规模约为 351 亿元。从投资方来看，目前有包括基金、保险、券商、QFII 等在内的诸多机构及散户。上市公司可转换债券融资意愿日趋强烈。从行业分布来看，拟发转债主要集中于机械、设备、仪表、金属非金属、石化等传统行业。预计 2005 年转债发行规模约在 150～180 亿元之间，届时转债市场市值规模有望超过 500 亿元。可转债在国内资本市场中的日趋火热，让建立本土化的定价模型成为一个兼具理论和实际双重意义的研究课题。

第二章 可转换债券产品结构及融资投资优势

对于投资者，债券提供了稳定的投资回报，股票能更好的享受企业成长带来的利益，而可转换债券提供了这两种可能；对于发行人，可转换债券又具有融资成本低，操作灵活的特点。可转换债券包含的诸多要素和条款赋予了它特有的优势，也综合影响着它的价值。详细了解这些概念是我们进行定价研究的基础。

§2.1 可转换债券产品基本要素及核心条款

§2.1.1 可转换债券的总体特点

可转换债券的持有人有权选择在特定时间内、按既定条件将可转债转换为基础股票；在转换成基础股票前，它是一种公司债券，具备债券的一切特征，投资者和公司之间体现的是债权债务关系；在将可转债转换成基础股票后，持有人成为股票发行公司股东，其身份由债权人变成公司所有者。这个可选择的转换权就是体现可转债最大特征的核心条款之一。

“天下没有免费的午餐”，可转换债券提供给投资者转股权的同时，也降低了票面利率。事实上，投资者在选择投资可转换债券的时候，一般更看重其债股转换的能力。在转股权外，可转换债券附加条款中还提供给投资者回售权，提供给发行者赎回及转股价格修正条款等复杂期权，所有的这些条款共同影响着发行人和投资人的风险和收益分配关系。

§2.1.2 可转换债券的基本要素

1. 发行总额：即发行规模，一般来说，国外典型的转债发行规模在 3 千万至 2 亿美元左右。我国的发行额不少于 1 亿元人民币；

2. 票面价值：债券在最后到期日的应兑付价值(债券本金值)，；

3. 发行期限：即为可转换债券发行至最后一次还本付息日（到期日）的时间段长度；

4. 票面利率：即可转换债券的付息率，按实施方法规定为每半年或每一年付息。全年付息金额 = 票面利率×票面值；半年付息金额 = 0.5×票面利率×票面值；可转换债券为投资者提供了债转股的投资灵活性，一般可转换债券的票面利率低于普通债券的票面利率。《可转换债券管理办法暂行规定》规定，可转换债券的票面利率不超过银行同期存款利率水平。票面利率的高低受制于两个方面：一是公司现有债权人对公司收入利息倍数等债务指针的约束，从而确定利率水平上限；二是转换价值收益增长及未来水平，从而确定利率水平下限。转换价

值预期越高，票面利率相应设置越低。发行人会根据证券市场情况，确定票面利率，使公司的收益与风险组合达到优化，确保可转换债券的转换成功进行。

5. 债券价值：债券价值一般都会低于转债的市场价格，该差值就是投资者为获得转换权及其他权利所付出的成本。这些权力的收益是不确定的，它受未来基础股票走势的影响。

6. 基础股票：可转换债券可转换成股权的名称及种类，可以是转债发行公司的A股、B股、H股等；

7. 转换期：可转换债券发行人受理债权转股权的时间区间，一般认为转换期限与发行期限等同，但也有例外，如果我国目前发行的可转换债券就基本上规定从发行起6个月后至到期为转换期。

8. 转股价格：发行时，转股条款中确定的将可转换债券转换为基础股票时，应付的每股的价格（实际转股成本），即转换期权的执行价；

9. 转股比率：一个单位的可转换债券能够转换的基础股票的数量，转股比率=底值取整[票面价值÷转股价格]；

10. 转换平价：每单位可转换债券如即时转股后的市值，平价=当前基础股票价格×转股比率；

11. 转换溢价（率）：转债由于含有看涨期权的缘故，其市场价格会高于平价，高出部分称为溢价。转换溢价 = 可转换债券的市价 - 发行时转换平价；转换溢价率 = 转换溢价/ 转换平价。它们是衡量投资者为获得转股权而支付的代价的指标。国际市场上的转换溢价率一般在 5%-25%之间。转换溢价越大，投资者短期内通过将可转换债券转换成股票获益的机会就越小，反之机会就越大。转换价格过高会降低可转换债券的投资价值，从而失去对投资者的吸引力，增大发行风险。转换价格过低，尽管能引投资者，但会增大公司股权及盈利的稀释程度（稀释的相关概念将在后文详述），损害公司原有股东的利益。

§2.1.3 可转换债券的核心条款

1. 纯债券条款和转股条款：

纯债券条款和普通的企业债券相似，包含持续期限，各期利率及利息支付时间和方式等信息；转股条款主要包含转股期和转换价格等信息，目前已基本形成较为固定的格式，仅仅根据这些条款难以区别各可转换债券的特性。真正让可转债成为研究热点的，是转股条款的附加条款，它们也成为发行方在设计上增加产品吸引力的主要手段。

2. 回售条款：

在一定条件下，赋予投资者在规定时期内，以回售价格（高于面值一定比例），要求发行人回购未转股的可转换债券的权力。

回售条款包含以下信息：(1) 回售条件：目前较通行的条件为基础股票市价连续 20 至 30 个交易日低于转股价一定幅度（60%-80%）即触发价，则投资者可以选择行使回售权。(2) 回售期：该时段是事先约定的，一般回售期都在可转换债券存续期后段，如我国可转换债券大多发行期限为 5 年，则回售期一般安排在最后一到两年内。回售期中，首次满足条件不回售的，当年不应再行使回售权。(3) 回售价格：该价格让投资者可获得低于市场收益率但高于可转换债券票面利率的回报。当投资者行使回售权时，发行方直接以现金方式支付称为硬回售；而公司用现金、普通股、其它次级票据或组合来清偿称为软回售。

回售权是保护投资者利益的条款，是投资者向发行公司转移风险的一种方式。基础股票价格与可转换债券价格变动方向的正向关联性，使基础股票业绩表现欠佳时，可转换债券价值将受到负面冲击。而回售价格是预先确定的并且是转债面值的溢价，它使得可转换债券实际（底线）利率虽低于市场利率，但仍然远高于转债的票面利率，这实际上提高了转债的最低回报率；也提供给投资者提前变现的渠道和抵制利率风险的工具。

回售条款不是必备的，发行人为增加产品竞争力，往往会加入该条款，由于回售条款是对投资者利益的保护，同等条件下，有该条款的可转债票面利率较没有该条款的产品更低。发行方在降低发行成本的同时也承担了市场风险。

3. 赎回条款：

允许发行者在规定时期内按照事先约定价格提前从投资者手中赎回尚未转股的可转换债券。发行者必须提前一段时间发出赎回通知，并且持有者在赎回选择期依然拥有转股权。

赎回条款一般包含以下信息：(1) 赎回条件：赎回权分为两种：无条件赎回，即在赎回时期内按照事先约定的赎回价购回市场上尚未转股的可转换债券；有条件赎回，即在基础股票价格达到或超过触发价（转股价的 130%-150%）并持续一段时间（30 中的 20 个，或者 40 中的 30 个交易日），发行人可以行使赎回权，这是目前较普遍的有条件赎回形式。(2) 不可赎回期：指发行后到第一次赎回的时间长短。时间越长，股票增长的可能性越大，赋予投资者转换的机会也就越多，越有利于投资者。只有在此时之后，公司才有资格在特定条件下行使赎回权。(3) 赎回价格：赎回溢价已把为可转换债券面值的 3%-6%，一般发行时间越长，赎回价格越低，因为发行方已经对投资人支付了多次票面利息，可转换债券作为债券的剩余价值不断降低。同回售条款类似，在公司行使赎回权时，公司也可以选择用现金支付的硬赎回或其它金融工具支付的软赎回。

赎回条款是保护发行人利益的条款，发行方通过提高票面利率和降低转股价格向投资者让利，而赋予自身产品赎回权。它的作用体现于两方面：一，促进投

资者转股。当基础股票市价高于转股价格时，投资者不一定转股而继续持有，公司可通过行使赎回条款达到“强制转股”的目的，从而降低融资成本和负债比率。不可赎回期的设定就是为了防止发行方利用可转换债券票面利率低的特点，在发行后人为拉动基础股价上升，再利用赎回条款驱使投资人转股来降低总体融资成本。二，收回在市的转债，改变财务结构或选择其它融资管道。例如，市场利率大幅降低，将使得当前的可转换债券融资成本相对上升，只要在融资成本足够低，发行人就可以选择赎回旧债，进行再融资。

4. 转股价修正条款：

转股价在发行后没有特别原因不能任意修改。人们发现在可转换债券几年到几十年的生命周期中，由于基础股票的价格走势难以预料，始终沿用发行前确定的转股价格将十分不利于发挥可转换债券的特性，修正条款因此出现。

1> 向上调整条款：是指转股价格将按照某种条件或者在固定的时间将转股价格不断向上调整。这种设计应主要用于成长性非常好的公司。随着转股价的调高，转换价值会随之下降，因此该条款能促使投资人尽早转股，享受公司股票带来的收益，同时降低融资成本。该条款是以公司强大实力为依托，目前国内尚没有采用该种价格条款的可转债。

2> 向下调整条款：在发行方发行新股（新股发行价低于现有市场价格）、送股、利用公积金转增股本、发行新债和派发现金红利时，将导致或者可能导致股东权益被稀释，发行方可调整转股价，以保证可转债转股价值不降低。调整原则：可转换债券持有人在转换价格调整前后以转换价格计量的股权不变，也即公司股东在转换价格调整前后以转换价格计量的股权不变。

以增发新股情况为例：目前共发行了 N 股股票，设 S 为增发前 30 个交易日股票收盘价均值；公司计划以 S_1 的价格增发 N_1 股新股。当前的转股价为 P_0，进行修正后的转股价为 P_1。那么公司股东在增发前按转股价计量的股权为：$P_0N+S_1(P_0/S)N_1$，P_0/S 是调整系数，将增发的权益以转股价来计量。根据上述原则应该有：

$$P_0N+S_1(P_0/S)N_1=P_1(N+N_1)\Rightarrow P_1=\frac{P_0N+S_1(P_0/S)N_1}{N+N_1}$$

增发和配股情况是完全类似的，而当 $S_1=0$ 时就是送股的情况。

<u>特别向下修正条款</u>：发行 24 个月后，任何连续 30 个交易日中至少有 10（至 20）个交易日的收盘价不高于当时转股价的 90%（或 80%）时，公司董事会有权以不超过 10%（20%）的幅度降低转股价格。修正幅度超过 10%（20%）时，由董事会提议，股东大会通过后实施。修正后的转股价格不低于最近一期经审计的每股净资产和股票面值。行使此项权利每 12 个月不得超过一次。其中的数字由各发

行公司根据自身的经营情况和对转债融资的计划来确定，这里只是提供了一种最常见的模式。此外还有连续 5 个交易日的收盘价的算术平均值低于当期转股价格的 95%，公司董事会有权修正等等，其原理类似。

转股价向下修正增大了转换平价，可以促进投资者转股，减少回售可能性，避免公司因回售带来的财务压力。有该条款的可转换债券显然具有更强抵御风险的能力。价格修正基于基础股票市场表现，但转股价格的变化直接影响了可转换债券的价值，它的存在更进一步的加大了两者的联系。

5. 利率补偿条款：

利息补偿条款在可转换债券到期日之后的指定时间内（如 5 个交易日），发行方公司除支付上述的第五年利息外，还将根据条款中确定的补偿利率补偿支付到期尚未转股的可转债持有人相应利息。

补偿利息＝可转债持有人持有的到期可转债票面总金额×补偿利率×5 －可转债持有人持有的到期转债已支付利息之和。补偿利率可以是一个预先确定的一个定值，也可以是同期银行定期存款利率等浮动值。

可转债票面利率通常较低，若到期未能转成股票，利率补偿可以提高投资的总体收益率。使得可转换债券在作为普通债券长期持有时，同样可以获得较好的收益。利率补偿进一步提升了产品的收益，降低了投资风险。

§2.2 可转换债券的融资和投资优势

转股权让投资者可以将债券转换为股票，债权由股权代替。回售权给投资者提供了一个收益的底线，赎回权为发行人提供了促进转股和维护融资成本的保障。多重选择权及其交错的权责关系，是可转换债券的金融特征，也是可转换债券定价理论研究的难点和实际融资投资的魅力所在。

对于发行人，可转换债券融资比直接发行债券或直接发行股票更为有利，原因如下：(1)可转换债券的比率比直接发行的企业债券利率要低，如果可转换债券未被转换， 相当于公司发行了较低利率的债券；(2)可以避免一般股票发行后产生的股本迅速扩张的问题；(3)一般可转换债券的转换价格比公司股票市场价格高出一定比例，因此又进一步减少了债券中所包含的实际价值。(4) 赎回条款可以加强公司对融资工具的调控能力。

对于投资者，可转换债券的持有人多了投资选择，也多了规避风险的手段：（1）当股市向好，或发行可转换债券的公司业绩良好，基础股票价格预计有较大攀升市场价值超过转换价格，投资者可选择将债券转换为股票，以享受公司成长带来的巨大收益；投资者也可以直接卖出转债，获取平价与转债市价的差额收

益（2）当股市低迷，发行公司的股票价格下跌，卖出可转换债券及将转券转换为股票都不合适时，投资者可选择保留转债，作为债券获取到期的固定利息。如果满足回售条件，还可以选择回售以抽回资金转向其它投资。

因此，可转换债券体现了股票的成长性和债券的稳健性，通过基本要素和条款的不同组合变换，不仅给发行方提供了一条高效且低价的融资途径，同时也为广大的投资者提供了一种灵活的投资方式，其对促进金融市场的繁荣和理论研究的发展具有十分重要的意义。

第三章 我国可转换债券产品定价模型及算法

目前我国上市 32 只可转换债券，在具体条款上具有一定差异，但更多体现出同质性。在构建模型时我们将尽可能全面的把握当前产品特征，提高模型的时效性和普适性。当然，定价模型不是定价模拟，而是在严密的理论基础上对金融产品价值特征的概括，因此本文中同样也有一些假设和适当的简化处理，模型的科学性和可行性的平衡是研究过程的一个重点。

§3.1 背景回顾：国内外可转换债券的定价研究概述

纵观可转换债券发展史，与已有 160 年的上市历史相比，定价理论的发展就显得滞后。关于可转换债券定价的真正研究是从Ingersoll (1977) 和Brennan 与 Schwartz (1977, 1980) 关于可转换债券估值的现代学术文献发表开始的。20 世纪70 年代前，对于可转换债券定价本身囿于理论方法与研究工具的落后，大部分工作仅限于对可转换债券基本概念的建立，转换价格的确定与价值特征的大致刻画上，无法展开深入的讨论。20 世纪 70 年代中期, B-S 的期权定价理论的问世，使得可转换债券的定价研究进入了一个高速发展阶段。

可转换债券是多重期权的有机整合，由于可转换债券具有转换成股票的特性，其价格相将随基础股票的价格变动而变动。所以，可转换债券可以看成是价格依赖于基础股票的一种衍生证券。因此，对衍生证券定价模型的研究是可转换债券定价研究的基础。

最早将 Black-Scholes 期权定价方法应用于可转换债券的定价问题中的是 J. Ingersoll, (1977)和 M. J. Brennan and E. S. Schwartz (1977)。他们的模型都是以公司市场价值为基础变量的单因素模型。假定公司市场价值的运动过程满足一个随机扩散过程，然后运用 Black-Scholes 期权定价方法采用风险对冲和风险中性技术导出可转换债券满足的微分方程。在无套利原则下，引入可转换债券条款从而确定偏微分方程的边界条件，再利用微分方程技术计算可转换债券价值。M. J. Brennan and E. S. Schwartz (1980) 年在此单因素模型的基础上引入了利率的不确定性，提出了可转债定价的双因素模型。Carayannopoulos (1996)发展了这一模型，并进行了经验检验。上述模型以公司价值作为基础变量，不是可交易的资产，没有公开的市场价格，因此，部分参数估计上的不明确削弱了模型预测能力。

上世纪 80 年代后期到现在，提出了以某些交易的有公开市场价格的资产(如发行公司的股票、利率等)作为模型基础变量的想法。McConnell, J. J. and E. S.

Schwartz (1986)，在零息可转债定价时采用了有风险的贴现率而不是无风险贴现率。可转债可以看成是债性和股性相结合的金融工具，不同的性质资产所面临的违约风险是不同的。为了解决这个问题，Tsiveriotis, K. and C.Fernandes (1998)在可转债的定价中引入了信用风险的概念，并将可转债划分为现金部分(面临信用风险)和股权部分(不面临信用风险)，采用若干个偏微分方程进行估价。

国内的林义湘(1998)等人也提出了可转债的定价模型，即可转换债券的价值=投资价值+美式买入期权的价值-发行人美式买入期权的价值。这种方法虽然各个部分都有成熟的定价理论支持，但却割裂了可转债内部各种权限的内在联系。郑振龙和林海的主要研究领域在条款设计以及可转债公司策略方面。范辛亭等人也针对可转换债券定价作了一系列研究，但理论性过强不易实现。相当一部分论文在模型建立过程中对产品条款考虑不足，而实证研究还停留在一些早期产品上（如机场转债等）。当前我国可转债条款更加复杂，如可变票面利率，利率补偿条款，带条件赎回和回售条款等等，而针对这些重要条款的定价模型研究，几乎没有较系统的讨论。

§3.2 基础准备：国内产品分析及模型参数选择

把握国内产品的主要结构和条款设计，是进行定价模型研究的必要前提。其次，模型输入参数的适当挑选，可以简化模型的推导和计算，提高模型对关键因素的敏感性，避免舍本逐末，多而不精。

§3.2.1 国内产品基本要素与条款信息

表 3.1 对目前我国上市可转债的要素和条款进行了归纳。可转债的条款包括利息条款、回售条款、转股条款、转股价修正条款和赎回条款，粗略的讲，前两者决定可转债的债性，后三者决定可转债的股性。

由于正式引入时间较短，可转换债券发行还处于严格监管下，对公司的资格以及产品结构都有明确要求，因此各公司的产品从基本要素的设定到附加条款的设计都具有很高的相似性。表 3.1 的信息基本代表了我国上市可转债的主流设计，在此基础上建立的模型将具有很好的通用性，通过控制输入参数，即可适用于不同的可转债定价。

表 3.1 我国上市可转换债券基本要素与条款归纳

发行期限	我国市场中目前的发行期限为 3 至 5 年，绝大多数为 5 年，仍属于短期债券
票面利率	单一票面利率：每年利率恒定，多见于早期发行的可转换债券
	累进票面利率：按年递增（不一定等额递增），如 1.8% 2% 2.2% 2.4% 2.5%
利率补偿	既定值补偿利率：按照条款中事先确定的利率，在持有债券到期后进行利息补偿
	待定补偿利率：根据同期银行定期存款利率，在持有债券到期后进行利息补偿
回售条款	无条件回售：一般在到期前 1 年可按固定的价格，选择将持有的债券无条件回售

	有条件回售：1.回售期：转股期内或到期前一年；2.触发条件：基础股票在连续的 n 个交易日中，有 m(<=n)个交易日的收盘价低于当期转股价格一定比例 j，投资者即可选择回售债券。多数情况 m=n,为 20 日或 30 日；j 在 70%到 85%之间
	回售价格：一般为既定价格（含当期利息）
转换条款	转换价格：目前转换价格一般较低，即转股溢价很低，债券的股性体现强烈
	转股期：早期产品转股期从发行半年或一年后开始，后期的均从发行半年后开始
转换价格变动条款	转股价格调整：针对基础股票的送股、增发、配股、转增以及派息进行调整以平衡公司利益在原有股东和新股东以及转债持有人之间的分配
	特别向下修正：基础股票在连续的n2 个交易日中，有m2(<n2)个交易日的收盘价低于当期转股价格的一定比例j2 时，公司董事会有权在不超过k的幅度内向下修正转股价格。修正幅度为k以上时，由董事会提议，股东大会通过后实施。且修正后价格不得低于已定下限（如每股净资产）。多数情况，m2<=n2,为 20/30 日；j2 在 70%到 90%，k在 10%到 30%之间
赎回条款	有条件赎回：1.赎回期：转股期内或短于转股期；2.触发条件：基础股票在连续的n3 个交易日中，有m3(<=n3)个交易日的收盘价高于当期转股价格一定比例j3，投资者即可选择回售债券。多数情况m3<=n3,为 30/40 日；j3 在 130%左右
	赎回价格：既定价格或票面值加上发生赎回当年的票面利率，前者居多

这里的“早期”主要指 2002 年及以前。1997 年和 2001 年市场监管部门相继颁布《可转换债券管理办法暂行规定》和《上市公司发行可转换公司债券实施办法》，极大的规范并刺激了我国可转换债券市场的发展。02 年前上市的产品由于尚缺少经验，设计保守，不能很好的反映发行方对可转换债券这一金融工具的期望。其次，可转换债券在当时的国内市场尚属于新品种，，难以在投资和交易中充分体现特性，这也影响了产品价值在市场价格中的合理体现。

“后期”，即 2003 年及以后，发行的产品设计更为成熟，，同时，发行的规模更大，发行企业行业分布更广，使可转换债券在市场中受关注程度大大提到，投资者的对该产品的理性认识逐步形成。本文将基于该阶段的产品进行定价模型的实证研究。

§3.2.2 定价模型输入参数的筛选原则

模型不是越复杂约好，毕竟实用性也是考查模型优劣的一个重要标准。本文在定价模型选取参数时将遵循以下原则。第一，可计量性。为了方便定量模型中数学的推导和定价计算，参数的可计量性非常重要。本文模型采用的参数均为标准化金融指标。第二，引入价值。模型考虑因素越多，模型隐含误差越大，且难以确定误差来源。适当的删减可以让模型更好的反映关键要素，具有较好的描述力。第三，模型意义。本文力图寻找能反映我国市场的定价模型，而不是进行数值拟合，模型以融资投资双方理性策略为基础，具有明确的金融意义。

§3.3 我国可转换债券产品定价模型和计算求解

本文建立了三种我国可转债产品的定价模型：二叉树模型、双因素偏微分方程定价模型和借鉴 Monte Carlo 思想的模拟算法。每个模型的讨论主要分为理论基础、模型构造、计算求解三个方面，还针对模型的特点评述了其优势和不足。三种模型各有特色，其共同点是具有理论的科学性及计算的可行性。

§3.3.1 二叉树定价模型——基本思路的建立

最早的二叉树模型是由 Cox, Ross and Rubinstein 于 1979 年提出的。该模型以套利理论为基础加以简单的数学推导，提供了一个离散时间的期权定价模型，且在特定的极限形式下可收敛到 Black-Scholes（1973），在变换极限形式后，也可以收敛到 Cox-Ross (1975)的带跳跃过程定价模型。

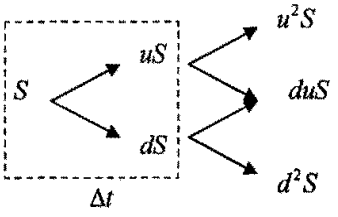
选择二叉树模型作为本节的基础方法，因为它处理方式直观形象，有利于理清可转换债券内含的众多条款在各种外部条件下的履行情况，有利于判断可转换债券的应有价值。花费较多篇幅来讨论我国可转债二叉树定价模型，目的在于为其它模型提供思路上的借鉴。

§3.3.1.1 二叉树模型的基本思想与理论基础

以股票期权为例，到期日的基础资产价格和期权合约条件直接决定了期权在到期日的价格，模型首先模拟基础资产价格变化路径至到期日，构造另一投资组合，在市场不存在无风险套利机会的假设下，计算衍生品的期初价格。

假设基础股票在一小段离散时间内（设为 Δt）的价格运动仅存在上升或下降两种方式。初始点股价为 S，经过 Δt 股价以概率 q 上升到 uS，以概率 $1-q$ 下降到 dS。那么如果经过 2 段 Δt 时间，股价就形成一个两层的股票价格树，即

图 3.1 股票价格的二叉树路径



如果股票的一个美式看涨期权 C（执行价格 K）的存续期为一个子时间段 Δt（虚线框内），假设 Δt 内利率不变且借贷自由，没有税收及交易费用，允许卖空。

无风险利率为 r（大于 0），记 $R=e^{r\Delta t}$；同时，设上涨和下降幅度满足 $u>R>d$，若不满足，市场将存在无风险套利机会（通过股票买卖和资金借贷）。

根据股票的价格路径和看涨期权的定义，我们得到期权的价格路径：

$$C\begin{cases}C_u=\max[0,uS-K] & \text{以概率}q\text{出现}\\ C_d=\max[0,dS-K] & \text{以概率}(1-q)\text{出现}\end{cases}$$

在初始点构造一个Δ份基础股票与 1 份 B 元的债券的投资组合 $I=\Delta S+B$，那么同样的在一个时间段 Δt 后

$$\Delta S+B\begin{cases}\Delta uS+RB & \text{以概率}q\text{出现}\\ \Delta dS+RB & \text{以概率}(1-q)\text{出现}\end{cases}$$

由于组合的结构可以任意调整，所以找到使得在该期末，组合 I 的两个可能价值分别等于期权 C 的两个可能价值。$\Delta uS+RB=C_u$ $\Delta dS+RB=C_d$

求解方程组，得到投资组合的结构：

$$\Delta=\frac{C_u-C_d}{(u-d)S},\quad B=\frac{uC_d-dC_u}{(u-d)R}$$

以这样的份额组成的 I 就成为套期保值组合。如果不存在无风险套利的机会，那么期权的现值 C 不会小于组合的现值 $\Delta S+B$；否则投资者可以通过买入期权卖出组合来获得无风险收益。反过来，情况就复杂一些。因为在我们买入组合卖出期权企图获得无风险利差时，购买期权的人有权马上执行期权的可能，这就涉及初始点 $S-K$ 的大小。

假设 $\Delta S+B<S-K$，如果我们以高于 $\Delta S+B$ 而低于 $S-K$ 的价格 P_c 卖出期权，那么期权将马上被执行，因为购买者可以立即得到利差 $S-K-P_c$，并且可以用该利差购买更多的债权以取得无风险收益。综上，该美式看涨期权的现价为：

$$C=\Delta S+B=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{uC_d-dC_u}{(u-d)R}=\left[\left(\frac{R-d}{u-d}\right)C_u+\left(\frac{u-R}{u-d}\right)C_d\right]/R\text{，当}C>S-K$$

$$C=S-K\qquad\text{，当}C<=S-K$$

记 $p=\dfrac{R-d}{u-d}$ 和 $1-p\equiv\dfrac{u-R}{u-d}$，那么上式可以简化为：

$$C=\left(pC_u+(1-p)C_d\right)/R \qquad 3.3.1$$

注意到若 $uS<K$，那么 $S<K$ 则 $C=0$，满足 $C>S-K$；若 $dS\geq K$，那么 $C=S-(K/R)>S-K$，而当 $uS>K>dS$ 时，要 $C=p(uS-K)/R>S-K$，只要当 $(1-p)dS>(p-R)K$，而上式只需 $R>1$ 即无风险利率为正即可，所以现实中 3.3.1 式总是满足 $C>S-K$。

这个一阶二叉树是最简单的应用情况，但是我们可以得到一些重要结论：

1. 股票价格上升概率 q 没有出现在最终定价式中，说明期权价值 C 与变数 S,u,d,R 的关系；不依赖于单个投资者对股票未来走势的不同预期，

2. 期权的价值与投资者对风险的态度无关。模型中对投资者行为唯一假设是追求利益最大化而利用一切无风险套利机会。

3. 模型的定价中唯一变动的参数就是标的资产的价值，而不需要过多的市场价值参数，简单且容易计量。

诸如其它资产或投资者风险偏好等因素会影响期权价值，虽然定价式中没有明确包含，但是这些因素都会反映于S,u,d,R之上，并不会降低模型的解释力。

上述优良性质也是选取二叉树模型来讨论可转换债券定价的重要原因。

前面定义了$p=(R-d)/(u-d)$，在我们的模型假设下，p在$[0,1]$中变动，具有概率的性质。

利用风险中性定价原理：任何依赖于股票价格的衍生证券都可以在风险中性世界假设基础上进行估计。根据风险中性假设

1）所有可交易证券的期望收益率是无风险利率；

2）未来现金流可以用其期望值按无风险利率贴现。

从初始点到Δt末，股票的期望收益为$RS=Se^{r\Delta t}$，有

$$RS=q\cdot uS+(1-q)\cdot dS \qquad 3.3.2$$

得$q=(R-d)/(u-d)=p$，所以p是q在投资者为风险中性的均衡状态下的取值，p称为风险中性概率。

根据股票价格连续时间模型，在Δt内，股价变化方差为$S^2\sigma^2\Delta t$，所以

$$S^2\sigma^2\Delta t=pS^2u^2+(1-p)S^2d^2-(puS+(1-p)dS)^2 \qquad 3.3.3$$

根据 Cox 对二叉树的进一步讨论中，为便于讨论高阶二叉树模型，设定股价上升和下降幅度满足关系：

$$u=\frac{1}{d} \qquad 3.3.4$$

联立 3.3.2 到 3.3.4 三个方程可以解得：

$$u=\exp\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right);\quad d=\exp\left(-\sigma\sqrt{\Delta t}\right);\quad p=\frac{\exp(r\Delta t)-d}{u-d} \qquad 3.3.5$$

以上简单讨论了一阶二叉树，若考虑长度为T的日历时间区间（如一天、一周等），其内部分为n份等长的子时间段。即时间间隔为$\Delta t=T/n$，那么根据上述参数表达式以及股票波动率和无风险利率可得到股票价格的n阶路径树图，其结构可以参考图 3.2。

当$n\to\infty$，即间隔时间$\Delta t\to 0$时，上述方式构造的股票价格将体现出一种什么形态的运动方式呢？

前文设定的$R=e^{r\Delta t}$是在Δt为固定长度的时间段中的收益，这里仍然沿用该记法，但注意在Δt可辨的情况下，应保证子区间时间上的累计收益和总时间上

的收益相等，即 $R^n = e^{rT}$。此处该等式在连续复利下对 $\Delta t = T/n$ 是满足的。

$\log u$ 和 $\log d$ 是连续复利下子时间段的股票收益率，对应概率 q 与 $1-q$（注意此处仍沿用最初设定的概率记号，$q=(R-d)/(u-d)=p$ 在风险中性情况下使用），可以视作随机变量。假设 S^T 代表初始点股价 S 经过 n 阶段后的股价（即 T 点的一个可能价格）。那么有：$S^T = u^j d^{(n-j)} S$，其中 j 是股价向上波动的次数。

$$\log\left(S^T/S\right) = j\log u + (n-j)\log d = j\log(u/d) + n\log d \qquad 3.3.6$$

T 间收益 $\log\left(S^T/S\right)$ 的数学期望和方差分别为：

$$E\log\left(S^T/S\right) = \log(u/d)\cdot E(j) + n\log d$$

$$Var\log\left(S^T/S\right) = \left[\log(u/d)\right]^2 \cdot Var(j)$$

易见 j 服从二项分布，所以 $E(j)=nq$，$Var(j)=nq(1-q)$，那么

$$E[\log(S^T/S)] = [q\log(u/d) + \log d]n \equiv \hat{\mu}n \qquad 3.3.7$$

$$Var[\log(S^T/S)] = q(1-q)[\log(u/d)]^2 n \equiv \hat{\sigma}^2 n \qquad 3.3.8$$

作为 T 间收益 $\log\left(S^T/S\right)$，即便我们加细划分 T，即 $n\to\infty$ 时，希望得到如下的极限结果：

$$[q\log(u/d) + \log d]n \to \mu T \qquad 3.3.9$$

$$q(1-q)[\log(u/d)]^2 n \to \sigma^2 T$$

μt 和 $\sigma^2 t$ 代表 T 间收益 $\log\left(S^T/S\right)$ 的期望和方差的实际的经验值，取：

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mu/\sigma)\sqrt{\Delta t} \qquad 3.3.10$$

则 $\hat{\mu}n = \mu t$，$\hat{\sigma}^2 n = [\sigma^2 - \mu^2\Delta t]T$ 且当 $n\to\infty$，$\hat{\sigma}^2 n \to \sigma^2 T$

在 n 增加时，观察 3.3.6 式，不仅加入的随机变量子项 $\log u$（或 $\log d$）个数增加了，同时，其出现的概率 q（或 $1-q$）也将随着 n 改变，参见 3.3.10 式，注意到 $\Delta t = T/n$，根据中心极限定理：

当 $n\to\infty$ 时，可以证明：

则
$$\text{prob}\left[\left(\frac{\log(S^*/S) - \hat{\mu}n}{\hat{\sigma}\sqrt{n}}\right) \le Z\right] \to N(Z) \qquad 3.3.11$$

其中 $N(\cdot)$ 是标准正态分布函数。

综上，在股票价格的二叉树路径在间隔时间不断缩小以至趋于 0 的情况下，股票价格运动服从对数正态分布。这与 Black-Scholes 期权定价方程中对股票价格的运动特征假设是一致的。因此，股票价格的二叉树路径可视为股票价格连续时间模型上的离散时间形式。

§3.3.1.2 国内可转债的二叉树定价模型

二叉树模型的主要思路：模拟股票变动的价格树，在节点上对所有可行投资策略的价值作比较，得到节点上可转债的最终理论价值，当一层所有节点的价格确定后，向前一层倒推，在新一层重复这种比较过程，直至树根点，即可得到考察时点的可转债理论价格。定价模型在各节点上的价值判断（投资决策选择）以及相邻层节点价值折现方法则是研究的重点。

1> 模型输入变量

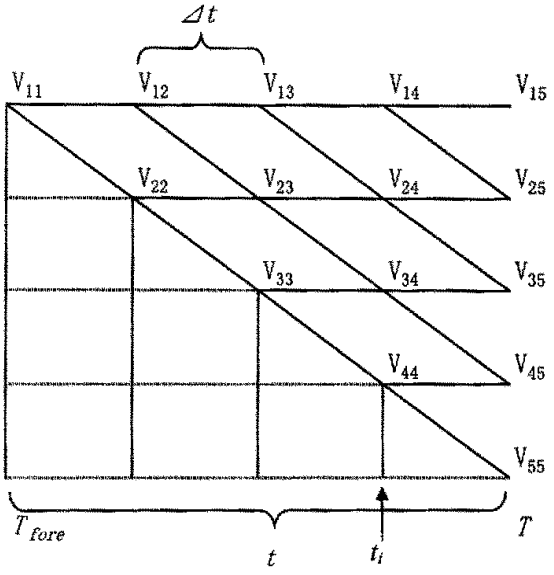
根据本章第二节中表 3.1，确定进入模型的一些内部及外部变量，引入原因及其使用将在模型构造过程中阐述：

可转换债券价格	V	发行期限	M	票面值	A
票面利率	$r_{CB}(i), i=1,2,...M$	补偿利率	r_C		
转换期长度	T_{conv}	转股价格	P_{conv}		
赎回期长度	T_{call}	赎回价格	P_{call}	赎回触发价	TP_{call}
回售期长度	T_{put}	回售价格	P_{put}	回售触发价	TP_{put}
无风险利率	r	普通公司债券利率	r_b		
基础股票价格	$S(x,y)$	基础股票波动率	σ		
二叉树阶数[不含起始点]	k				

2> 模型的构造与计算

结合图 3.2，注意这是一个 $k=4$ 的可转换债券价值的二叉树。基础股票价格树与它有同样结构，在风险中性条件下，参数 u, d, p 由 3.3.5 决定。

图 3.2 四阶可转换债券价格二叉树的矩阵表示



对于一个 k 阶的二叉树，其第 i 阶共有 $i+1$ 个节点，将二叉树置于一个 $(k+1,k+1)$ 的矩阵 V 当中，这不仅利于标记，并且在 Matlab 等数学计算软件中可以很容易的实现对二叉树的模拟和节点的操作。但要注意，由于矩阵编号的非负性，对于二叉树的第 i 阶，实际上是处于矩阵的第 $i+1$ 列上。

矩阵中 V_{11} 就是待估计的转债 T_{fore}（即待预测点时间）点的价值。计算从 $V(*,5)$ 节点开始。计算过程中的一些基本假定：

1. 节点的价值是对所有可行策略综合比较后的理性决策结果；

2. 在各时间段当中，即 Δt 内部，没有股息的支付；

以下用 $V(x,y)$ 代表矩阵中的点以及该点的可转换债券价值。

第一，节点可转换债券持有价值（不一定是该点可转债的最终理论价值）

每一个节点的 $V(x,y)$（最后一层的除外），对应其连接的后一阶两个节点 $V(x,y+1)$ 和 $V(x+1,y+1)$。那么在 $V(x,y)$ 点可转换债券的持有价值 H，等于 $V(x,y+1)$ 和 $V(x+1,y+1)$ 期望现值加上该点或所支付的任何利息 I。该处的现值，是以 $V(x,y)$ 的时间为基点的。

节点 $V(x,y)$ 计算持有价值 H 的公式就是：

$$H=\left[p\cdot V(x,y+1)+(1-p)\cdot V(x+1,y+1)\right]\cdot\exp(-r_{dis}\Delta t)+I(y) \qquad 3.3.12$$

其中 r_{dis} 为该点的折现率，其定义将在后文讨论。$I(y)$ 与 x 无关，因为 y 固定时，节点对时间轴位置也被固定，所有 $V(*,y)$ 节点上的利息支付都相等。

第二，节点所有可行投资策略的价值比较

对于节点 $V(x,y)$，H 代表投资者在 $V(x,y)$ 后 Δt 内继续持有可转换债券的期望价值。实际上在 $V(x,y)$ 这一点，除继续持有，还可能有其它投资选择，如回售、赎回等。$V(x,y)$ 上可转换债券的价值就是这些可能决策的价值比较结果。利用层上时间 t_i 配合 T_{conv}，T_{call}，T_{put} 判断在该节点是否进入转股期和赎回（回售）期，再用节点上的基础股价 $S(x,y)$ 配合 TP_{call}，TP_{put} 判断赎回（回售）权是否被触发从而存在执行的可能，本文通过控制各层间隔时间 Δt 的长度以达到单点上对赎回（回售）条款触发判断的近似处理，具体方法将结合实例在实证部分阐述。

1. 无可行的赎回权或回售权：投资者仅有继续持有和转股两种选择，情况比较简单，$V(x,y)$ 就是 H 和转换平价中较大值，即：

$$V(x,y)=\max\left\{(A/P_{conv})\cdot S(x,y),H\right\}$$

$(A/P_{conv})\cdot S(x,y)$ 就是此时的转换平价，注意所用的为对应时点股价。

2. 可以进行回售（或赎回）：注意到若赎回和回售条款是带条件的，即使进入赎回期或回售期，也必须在条件满足时才能行使。投资者可以在继续持有，转股和回售（赎回）中选择，在理性决策的假定下，该点可转换债券的价值为：

$$V(x,y)=\max\left\{(A/P_{conv})\cdot S(x,y),H,P_{put}\right\}$$

注意我国目前条款中的P_{put}一般已经包含当期利息。

3. 赎回条件和回售条件（同时）满足：由于无条件赎回/回售条款的存在，两者存在同时有效的可能性。此时价值比较关系为：

$$V(x,y)=\max\left\{\min(H,P_{call}),(A/P_{conv})\cdot S(x,y),P_{put}\right\}$$

$\min(H,P_{call})$项的原理在于：赎回的对象是作为债券形式的可转债，当赎回权触发条件被满足，若赎回价格高于当时债券持有价格，公司将不会执行赎回（当然，公司有资金方面的紧急需求或受到其他重要事项的赎回是我们无法预料的，上述价值判断都是以规范经营和理性决策为基础的）；当触发条件满足，且赎回价格低于当时债券持有价格时，公司才会行使赎回权。此时，若转股价或者回售价格高于赎回价，换取较大价值是投资者该点的理性决策。

图 3.3 可转换债券价值曲线示意图

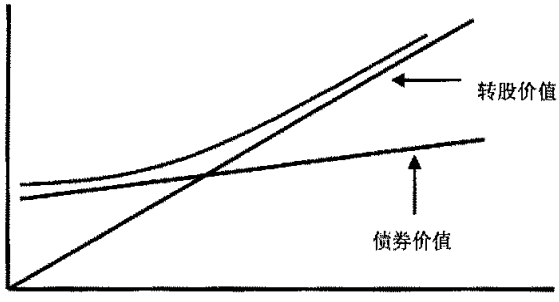


图 3.3 粗略的反映了可转换债券的价值特点。当然，通过上面的分析，我们发现赎回条款和回售条款的加入，让可转换债券的价值判断更显复杂，已经很难用固定的图线来展现。

第三，关于贴现率r_{dis}的确定

在判断了第 i 阶中的所有 $i+1$ 点的可转债价值之后，又涉及向第 $i-1$ 阶中节点贴现的问题，即 3.3.12 求解第 $i-1$ 阶中节点的 H。贴现所采用的贴现率r_{dis}如何确定才能反映资产与风险的关系？

由于连接 $V(x,y)$的节点 $V(x,y+1)$和 $V(x+1,y+1)$可能在上述价值比较过程中最终采取了不同的决策，其结果就是两点可能对应的不同性质的金融产品，因而具有不同程度的市场回报和风险水平。

在 $V(x,y)$节点，若基础股价很低，那么可转债不会被转换，而被继续作为企业债券产品持有，甚至回售，此时均应该考虑信用违约风险，本文中采用同期发行的企业债券利率r_b作为该情况下的贴现率。若基础股票股价很高，那么转换权肯定被执行，此时该点投资者拥有的是基础股票，贴现率采用 r；若企业行使赎

回权，也涉及企业现金支付问题，因此亦采用采用r_b贴现。

如果股票价格处于一个中等水平，如何界定这个贴现率？既然在研究二叉树定价，于是也就借鉴二叉树的思想，定义该点行使转换或被赎回的概率为p_c，那么$(1-p_c)$就是继续持有或回售的概率，于是可以得到一个加权贴现率$r_{dis}=p_c\cdot r+(1-p_c)\cdot r_b$，之所以采用这个形式，因为$r_{dis}$能在有无信用风险的情况之间平滑的过渡，具有良好的金融和计算性质。

根据二叉树的倒向计算特点，同一点在不同计算阶段拥有不同的P_c值：

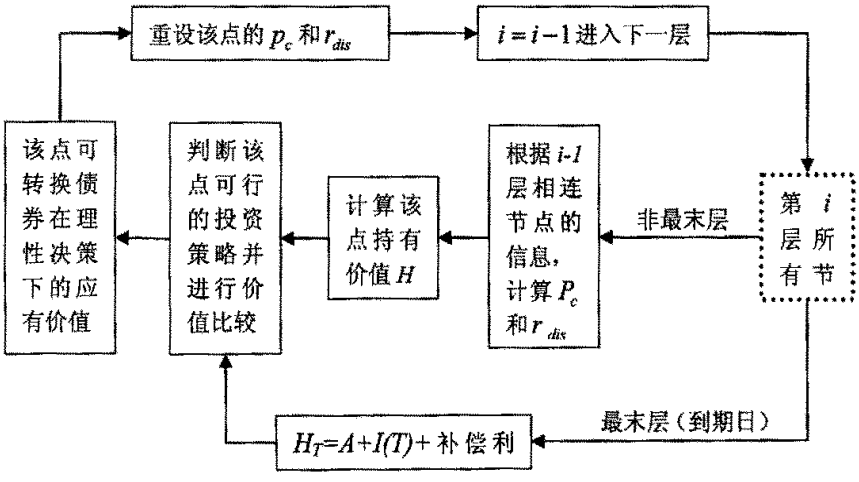
1. 若*V(x,y)*可转债)价值尚未确定前，需要依赖其连接的后一阶节点*V(x,y+1)*和*V(x+1,y+1)*来计算*H*，此时$p_c(x,y)=p\cdot p_c(x,y+1)+(1-p)\cdot p_c(x+1,y+1)$，用$p_c(x,y)$即可计算*V(x,y)*点的贴现率从而计算*H*。

2. 当*V(x,y)*点*H*计算完成并比较确定了该点最终可转债价值后，根据该点的投资选择更新$p_c(x,y)$新值，该新值将用于*V(x,y)*前一阶节点*V(x-1,y)*和*V(x-1,y-1)*的转换概率计算，其意义同上一步。重赋值原则如下：

$$p_c(x,y)=\begin{cases}1 & V(x,y)\text{执行转股}\\ 0 & V(x,y)\text{继续持有、回售或赎回}\end{cases}$$

综上即为我国可转换债券产品定价的二叉树模型，计算过程用图 3.4 的流程图清晰展示，此处就不再耗费篇幅举例。其中虚线框表示一个运算循环的起点，当循环直至起始点V_{11}时，即得到可转换债券在该点时间下的理论价值。

图 3.4 二叉树模型价格计算流程图



注：补偿利息 $I_C=\max\left\{0,\ A\cdot\left[M\cdot r_C-\sum_{j=1}^{M}R(j)\right]\right\}$ 3.3.13

§3.3.1.3 二叉树模型的优势与不足

二叉树模型基本思想并不复杂，通过改变节点上价值比较决策与节点间价值传递计算方式，能实现对复杂结构金融产品的定价。它考虑了对可转债价值起关键影响的转换权，赎回权和回售权；也考虑了可变票面利率及利率补偿条款；同时在折现时考虑了信用风险的影响。结构清晰，便利易行是它的最大特点。

整个计算过程中，层间节点价值折现率r_{dis}是基于两个不变的输入量r和r_b，也就是说，在这个模型中，假设了从起始点至到期日之间的无风险利率和企业债利率是不变的。这的确与实际情况不太符合。引入利率变动因素在二叉树上可行，但会让计算过程变得复杂，利率期限结构在离散化程度较高的二叉树上难以体现较好的平滑性。同时期限结构的估计又增加了模型整体应用的难度。在二叉树中加入太多条件，将失去了它原本简洁易行的优势。

本节的讨论除引入二叉树模型外，还有两个目的：一是借助其清晰的框架来展示可转换债券的投资特点和价值决定过程，二是定义和建立一些基本的变量和概念，为后文的模型建立做好铺垫工作。

§3.3.2 考虑利率随机性的双因素偏微分方程定价模型

Black-Scholes 期权定价方程的提出，为期权及其它金融衍生品的定价提供了强有力的研究工具。借鉴 B-S 公式的思想，可转换债券产品定价也可以采用偏微分方程结合边界条件来实现，该模型将通过引入利率期限结构来解决二叉树中利率水平恒定的不足。

§3.3.2.1 研究背景

Ingersoll (1977) 和 Brennan 与 Schwartz (1977, 1980) 用 Merton (1974)、Black 和 Cox (1976) 建立的用于风险债务估值的结构化方法的思想，将期权定价方法运用于可转换债券定价，假定可转债价值是公司市场价值和时间的函数，运用 B-S 期权定价方法，采用风险对冲和风险中性技术导出可转债价值满足的偏微分方程（PDE），再利用无套利原理(ATP)根据产品条款确定可转换债券的最优投资策略，产生 PDE 的边界和终值条件，最后利用数值方法求解。

这个是一个单因素模型，理论上它应该具有较好的解释性，因为公司价值既包含了股票价格变动因素，又包含了利率变动因素。而在实际操作上，该模型就失去优势，因为公司价值包含多种公司资产价值，难以获得如股票和债券那样明确的价格数据，度量存在很大困难。

基于上述原因，本文将建立基于公司基础股票和市场利率水平的双因素定价模型。假定股票价格与利率水平各自遵循某种连续时间的随机过程。利率随机性的引入，让模型考虑因素更全面但也会导致定价模型的复杂化。

§3.3.2.2 国内可转债双因素模型的推导和边界条件的确定

首先由于采用了 B-S 期权定价思想，风险对冲和风险中性假设及无套利原理，我们通常有如下整体假定：

1. 股票价格遵循几何布朗运动；基础资产可以连续交易；

2. 市场弱有效，没有交易成本和税收，无套利机会；

3. 允许卖空，资产可以细分；

假定基础股票价格模型为 $dS=\mu Sdt+\sigma Sdx_1$，其中 μ 是股票的预期收益率，σ 为股价收益的波动率。

对于利率水平，其行为模式与股价存在差异，主要体现在具有均值回复(Mean Reversion)特性，即随着时间的推移，利率呈现出向某个长期平均水平考虑的趋势。这里选用经典的 Vasicek 利率期限结构模型模拟利率运动。

利率模型为 $dr=a(b-r)dt+\sigma_r dx_2$，模型的所有参数 a, b, σ_r 都是常数，其中 a 是回复速率，b 是回复水平，σ_r 为利率的波动率。该模型的特性就是当 $r_t>b$ 时，由于漂移项 $a(b-r_t)<0$，该时点后的 r 将向均值 b 回复；当 $r_t<b$ 时，漂移项 $a(b-r_t)>0$，该时点后的 r 也将向均值 b 回复。

这里的 dx_1 和 dx_2 都是标准的 Wiener 过程，$dx_1^2=dt$，$dx_2^2=dt$，$dx_1dx_2=\rho dt$。

同时考虑基础股票价格和利率水平两个变量，那么可转换债券价值表示为函数：$C=C(S,r,t)$，和 B-S 公式的思想类似，这里我也需要构造一个资产组合，一方面选取合适的组合比例来消除随机波动项，另一方面通过风险中性假设和无套利原理来限定它的取值，从而得到关于 $C(S,r,t)$ 的偏微分方程式。

1> 一些准备工作

由 Ito 引理，可以得到

$$\begin{aligned}dC&=C_tdt+C_SdS+C_rdr+\frac{1}{2}C_{ss}\sigma^2S^2dt+C_{Sr}\rho\sigma S\sigma_rdt+\frac{1}{2}C_{rr}\sigma_r^2dt\\&=\left[C_t+C_S\mu S+C_ra(b-r)+\frac{1}{2}C_{SS}\sigma^2S^2+C_{rS}\rho\sigma_r\sigma S+\frac{1}{2}C_{rr}\sigma_r^2\right]dt\\&\quad+C_S\sigma Sdx_1+C_r\sigma_rdx_2\end{aligned}\qquad 3.3.14$$

为了让公式容易阅读，这里的 C_{XY} 代表 C 对 XY 的偏导数。

注意，其中的随机项 $C_S\sigma Sdx_1+C_r\sigma_rdx_2$ 包含了股价和利率的波动项，为了通过调整资产组合比例消除全部随机项，加入一个依赖于利率的产品——零息债券，由于是折价发售，其价值就是时间和利率的函数，设为 $B(r,t)$：

$$dB=\left(B_t+B_ra(b-r)+\frac{1}{2}B_{rr}\sigma_r^2\right)dt+B_r\sigma_rdx_2\qquad 3.3.15$$

对于 C,S 和 B，其在 dt 内的瞬时收益率可以写为 $\frac{dC}{C}$，$\frac{dS}{S}$，$\frac{dB}{B}$；

记$\frac{dC}{C}=\mu_C dt+\frac{C_S\sigma S}{C}dx_1+\frac{C_r\sigma_r}{C}dx_2$，由 3.3.14 知道

其中$\mu_C=\frac{1}{C}\left[C_t+C_S\mu S+C_r a(b-r)+\frac{1}{2}C_{SS}\sigma^2S^2+C_{rS}\rho\sigma_r\sigma S+\frac{1}{2}C_{rr}\sigma_r^2\right]$

记$\frac{dS}{S}=\mu_S dt+\sigma_S dx_1$，其中$\mu_S=\mu$，$\sigma_S=\sigma$

记$\frac{dB}{B}=\mu_B dt+\sigma_B dx_2$，其中$\mu_B=\left(B_t+B_r a(b-r)+\frac{1}{2}B_{rr}\sigma_r^2\right)/B$，$\sigma_B=B_r\sigma_r/B$

首先考虑零息债券，以当时利率 r，借$(1+\Delta)$资金分别投资于两只零息债券形成组合$\prod=B^a+\Delta B^b$，那么组合的瞬时回报为

$$d\prod=\left[B\mu_B^a+\Delta B\mu_B^b\right]dt+\left(B\sigma_B^a+\Delta B\sigma_B^b\right)dx_2$$

选取Δ使得上述随机项系数为 0，则$\Delta=-\left(B_r^a/B_r^b\right)$，利用风险中性原理，有

$$d\prod=r\cdot\prod\cdot dt=r\left[B^a-\left(B_r^a/B_r^b\right)B^b\right]dt$$

将其展开并划成μ_B^i和σ_B^i的形式，得到$\left(\mu_B^a-r\right)/\sigma_B^a=\left(\mu_B^b-r\right)/\sigma_B^b=\lambda(r,t)$，其中$\lambda$可以理解为利率风险的市场价值测度，它对所有零息债券都是相同的。

2）定价公式的导出和边界条件的确定

构造可转换债券 C，基础股票 S，零息债券 B 的组合，三者的投资量分别为 V_C，V_S和V_B，而资金来源为利息率 r 的贷款。那么这个组合的瞬时收益为：

$$\begin{aligned}&\left[V_C\left(\mu_C+I/C-r\right)+V_S\left(\mu_S-r\right)+V_B\left(\mu_B-r\right)\right]dt\\&+\left[V_C C_S\sigma S/C+V_S\sigma\right]dx_1+\left[V_C C_r\sigma_r/C+V_B\sigma_B\right]dx_2\end{aligned}\qquad 3.3.16$$

其中 I 是可转换债券的票面利息，选取$\overline{V_S}$和$\overline{V_B}$使得随机项系数为 0，有

$$\overline{V_S}=-V_C C_S S/C\ ;\ \overline{V_B}=-BV_C C_r/C \qquad 3.3.17$$

则该组合瞬时收益为非随机函数，根据无套利原理，应该有

$$V_C\left(\mu_C+I/C-r\right)+V_S\left(\mu_S-r\right)+V_B\left(\mu_B-r\right)=0 \qquad 3.3.18$$

将 3.3.17 的$\overline{V_S}$和$\overline{V_B}$带入 3.3.18 并展开子项μ_C，整理得到：

$$\begin{aligned}&C_t+C_S rS+C_r a(b-r)+\frac{1}{2}C_{SS}S^2\sigma^2+C_{rS}\rho\sigma_r\sigma S+\frac{1}{2}C_{rr}\sigma_r^2\\&+I-rC-C_r\sigma_r\left(\mu_B-r\right)/\sigma_B=0\end{aligned}$$

根据λ的定义，进行替换，我们就得到定价方程： 3.3.19

$$C_t+C_S rS+C_r\left[a(b-r)-\lambda\sigma_r\right]+\frac{1}{2}C_{SS}S^2\sigma^2+C_{rS}\rho\sigma_r\sigma S+\frac{1}{2}C_{rr}\sigma_r^2+I-rC=0$$

这个定价方程仅仅描述了可转换债券价值与基础股票价格和利率水平之间的变动关系，但是并不能体现转换权、赎回权以及回售权等对可转换债券价值的影响，所以我们需要进一步添加边界条件，使定价模型完整。

注意，可转换债券的市场均衡价值，建立在发行方与投资者的理性策略基础

上，对于投资者和发行方均不存在潜在套利机会的价格。

转换条款：

只要进入可转换期，投资者即可行使转换权。因此，无论基础股票价格走势如何，在转换期中，可转债价值都应该满足：$C \geq (A/P_{conv}) \cdot S$。

赎回条款：

如果公司行使赎回，那么投资者可以在被赎回与转股之间进行选择。此时的边界条件确定为：$C \leq \max\left[P_{call}, (A/P_{conv}) \cdot S\right]$，注意到这里采用了 max 函数，为了促进投资者转股，公司一般会选择基础股价持续走高状态下行使赎回权，而赎回价格一般是低于当时转换平价的，这与整体上的转换权边界并不矛盾。

回售条款：

当基础股票走势持续低迷，转换平价可能低于纯债券价值，此时可转换债券回售条款就显得十分重要，它为投资者提供了收益底线，即，$C \geq P_{put}$

到期日边界：

在到期日，投资者或者选择取回本金和利息，或者选择转股，边界条件如下。其中 I_C 为补偿利息。$C(S,r,T) = \max\left\{A + I(T) + I_C, (A/P_{conv}) \cdot S_T\right\}$，我国发行的可转债都有银行担保，故未考虑破产情况，认为公司始终具有支付能力。

至此，我们核心公式与边界条件相结合的手段实现了对可转换债券的定价，对于偏微分方程，其求解目前一般采用有限差分解法，借助计算机技术的发展，已经可以达到很好的运算精度。

§3.3.2.3 双因素定价模型的有限差分解法

二叉树模型中，将标的变量的连续价格运动过程演化为离散时间上的“树状图”，有限差分解法具有类似思想，其结构可以视为“树状图”的扩展，即将树权演变为“网格”。但二者又存在本质的区别：二叉树的树状结构中体现了标的变量的扩散与波动，而在有限差分方法的“网格”上的因素水平是固定的，标的变量的运动特点通过参数变化来体现。

1）标的变量的网格划分

设股票价格步长为 δS，利率水平步长为 δr，时间的步长为 δt，注意这三者都为常数，那么我们得到一个关于 S 和 r 取值的三维的立体网格，表示为：

$$\begin{aligned} &S = i\delta S,\ 0 \leq i \leq I \\ &r = j\delta r,\ 0 \leq j \leq J \\ &t = T - k\delta t,\ 0 \leq k \leq K \end{aligned} \qquad 3.3.20$$

注意 3.3.20 中的 t，这里 t 的运动方向为反向的，即从将来到现在，这样的时间轴下更容易进行价值判断。另一点就是股票的价格被限定在 $I\delta S$ 之下。虽然

理论价格可能达到无穷，但实际市场价是有限的，减小网格区域是为了节省计算时间。根据公司的业绩以及金融产品的合约期限来确定$I\delta$，一般取当前价值的5倍就可以满足要求。同理$J\delta r$也可以根据债市状况和合约期限确定。

三维网格中对应每个点，都有一个该状态下的可转换债券价值，记为C_{ij}^k，将双因素定价方程中一次、二次偏导数转化为用C_{ij}^k以及已知单位量$\delta S,\delta r,\delta t$表出的差分形式，将如下的定价方程转换为差分方程，即可求解。

$$C_t+C_S rS+C_r\left[a(b-r)-\lambda\sigma_r\right]+\frac{1}{2}C_{SS}S^2\sigma^2+C_{rS}\rho\sigma_r\sigma S+\frac{1}{2}C_{rr}\sigma_r^2+I-rC=0$$

2）核心方程的差分化过程

将偏导数化为差分形式，最基本的工具就是 Taylor 展开。过程中借鉴了以往研究中对差分处理的一些经验性原则，如对直接标的资产和交叉项采用中心差分处理可以获得较好的性质等。

C_t项：

$$C_t=\frac{\partial C}{\partial t}=\lim_{h\to 0}\frac{C(S,r,t+h)-C(S,r,t)}{h}$$

在δt较小时，运用 Taylor 展开：$C(S,r,t-\delta t)=C(s,r,t)-\delta tC_t+O(\delta t^2)$，化为格点上的可转换债券价值形式，即$C_{ij}^{k+1}=C_{ij}^k-\delta tC_t+O(\delta t)$，用下面的差分形式作近似，注意这里的时点上标：

$$C_t\approx\left(C_{ij}^k-C_{ij}^{k+1}\right)/\delta t$$

C_S项：

作为产品直接联系的标的资产，为了提高近似精度，这一项采用中心差分来处理。对$C(S+\delta S,r,t)$和$C(S-\delta S,r,t)$分别用 Taylor 展开，消去二阶导数项并除以$2\delta S$得到：$C_S=\left(C_{i+1,j}^k-C_{i-1,j}^k\right)/2\delta S+O(\delta S^2)$，因此用下式近似$C_S$项获得了更高的精度，注意计算时在边界点需要增加一些信息。

$$C_S\approx\left(C_{i+1,j}^k-C_{i-1,j}^k\right)/2\delta S$$

C_{SS}项：

用类似C_t的向后差分形式，两步近似可以得到近似差分形式：

$$C_{SS}\approx\left(C_{i+1,j}^k-2C_{ij}^k+C_{i-1,j}^k\right)/(\delta S)^2$$

同理得到C_r和C_{rr}项的差分形式：

$$C_r=\left(C_{i,j+1}^k-C_{i,j-1}^k\right)/2\delta r,$$

$$C_{rr}\approx\left(C_{i,j+1}^k-2C_{ij}^k+C_{i,j-1}^k\right)/(\delta r)^2$$

C_{rS}项：

交叉项为二阶导数，采用中心差分将获得更好的效果。

首先，$C_{rS} \approx \left[C_r(S+\delta S,r,t)-C_r(S-\delta S,r,t)\right]/2\delta S$，

再由前面的C_r近似有：$C_r(S+\delta S,r,t) \approx \left(C^k_{i+1,j+1}-C^k_{i+1,j-1}\right)/2\delta r$ 带入上式得到：

$$C_{rS} \approx \left(C^k_{i+1,j+1}-C^k_{i+1,j-1}-C^k_{i-1,j+1}+C^k_{i-1,j-1}\right)/4\delta S\delta r$$

该近似具有很好的对称性，即$C_{rS}=C_{Sr}$。

偏导数项都获得了近似的差分表达式，可将原偏微分方程

$$C_t+C_S rS+C_r\left[a(b-r)-\lambda\sigma_r\right]+\frac{1}{2}C_{SS}S^2\sigma^2+C_{rS}\rho\sigma_r\sigma S+\frac{1}{2}C_{rr}\sigma_r^2+I-rC=0$$

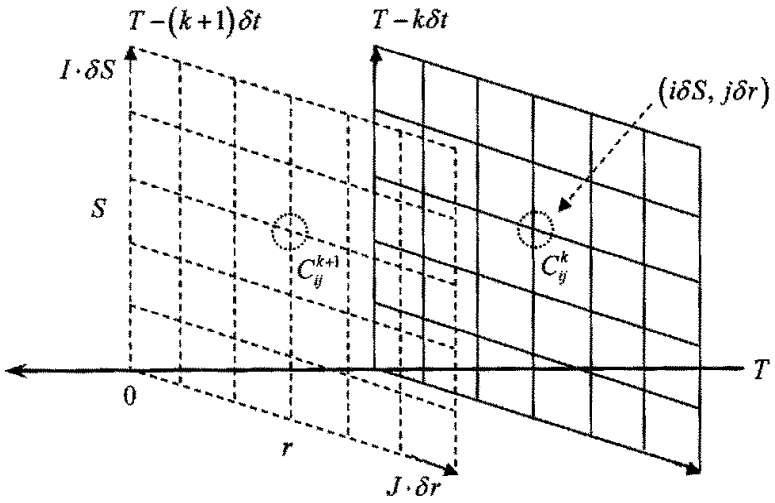
转化为差分形式：

$$\frac{\left(C^k_{ij}-C^{k+1}_{ij}\right)}{\delta t}+\frac{\left(C^k_{i+1,j}-C^k_{i-1,j}\right)}{2\delta S}(j\delta r)(i\delta S)+\frac{\left(C^k_{i,j+1}-C^k_{i,j-1}\right)}{2\delta r}\left[a\left(b-(j\delta r)\right)-\lambda\sigma_r\right]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\left(C^k_{i+1,j}-2C^k_{ij}+C^k_{i-1,j}\right)}{(\delta S)^2}(i\delta S)^2\sigma^2+\frac{\left(C^k_{i+1,j+1}-C^k_{i+1,j-1}-C^k_{i-1,j+1}+C^k_{i-1,j-1}\right)}{4\delta S\delta r}\rho\sigma_r\sigma(i\delta S)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\left(C^k_{i,j+1}-2C^k_{ij}+C^k_{i,j-1}\right)}{(\delta r)^2}\sigma_r^2+I^k_{ij}-(j\delta r)C^k_{ij}=O\left(\delta t,\delta S^2,\delta r^2\right) \qquad 3.3.21$$

得到该方程后，求解过程变为典型的差分方程求解问题，鉴于篇幅限制，仅针对关键点讨论，不再详细展开。相关参数的估计方法将在实证部分给出。

如图 3.5 所示，对于每个时间截面，基础股价与利率的不同水平都构成一个大小为$I\times J$的网格，观察 3.3.21 式，计算过程是倒向的，即通过$T-k\delta t$时间截面上的信息求出$T-(k+1)\delta t$时间截面各点信息，直至当前考察时间截面。

图 3.5 双因素模型有限差分解法示意图



在最后一个截面上（即到期日 $k=0$），各点的价值为（注意与利率 $j\delta r$ 无关）：

$C^0_{ij}=\max\{H_T,\ i\delta S\cdot A/P_{conv}\},0\le i\le I,0\le j\le J$，其中$H_T=A+I(T)+I_C$

一般的，对于时间$T-k\delta t$的截面，根据$C^k_{ij},1\le i\le I-1,1\le j\le J-1$，通过差

分方程 3.3.21 的，可以确定$C_{ij}^{k+1}, 1 \le i \le I-1, 1 \le j \le J-1$，即“前一时间”截面上各点的可转债偏微分方程计算价值。

注意：由于偏微分方程自身不能体现可转换债券的附加条款对可转债价值的约束和影响，因此该计算价值不一定是该点可转债的理论价值！

我们还需要根据条款产生的边界条件再进行一次价值判断以更新C_{ij}^{k+1}：

$$C_{ij}^{k+1} = \max\left\{\min\left\{P_{call} \cdot call, C_{ij}^{k+1}\right\}, i\delta S \cdot A / P_{conv}, P_{put} \cdot put\right\}$$

其中 *call* 与 *put* 为赎回权和回售权有效性指示变量。根据赎回（回售）期以及触发价的判断，令 *call*=1 或极大数，令 *put*=1 或 0，以达到控制上式中相应项目是否生效的作用，这在编程中将十分有利于提高程序的结构化与可读性。

由于采用了差分形式，除到期日外其他截面网格的边界点价值不能直接通过 3.3.21 求得（差分公式中含有超出网格范围的点），因此需要特别赋值。对于四角的取值，可任取下面一种方式，在网格数目较大时不会产生明显影响：

$$C_{0j}^{k+1} = \max\left\{P_{put} \cdot put,\ B_j^{k+1}\right\}, 0 \le j \le J;\quad C_{I,j}^{k+1} = \max\left\{I\delta S \cdot A / P_{conv},\ B_j^{k+1}\right\}, 0 \le j \le J$$

$$C_{i0}^{k+1} = C_{i1}^{k+1}, 0 \le i \le I;\quad C_{i,J}^{k+1} = C_{i,J-1}^{k+1}, 0 \le i \le I$$

其中B_j^{k+1}为时间$T-(k+1)\delta t$上，利率水平$j\delta r$下的可转债的纯债券价值。至此，时间截面$T-(k+1)\delta t$上各点可转换债券理论价值计算完成。

在得到当前时间（*k*=*K*）网格上可转债理论价值后，找到点$(i\delta S, j\delta r)$，对于当前基础股价S_{now}与利率水平r_{now}满足：

$$(i-1)\delta S < S_{now} \le i\delta S,\ \ (j-1)\delta r < r_{now} \le j\delta r$$

即在网格中定位当前实际条件，然后利用周围点可转债理论价值取平均（算法可参考有限差分解法相关文章）求得当前点的最终理论估价。

§3.3.2.4 双因素模型用于可转债定价的一些问题

双因素模型考虑了基础股价和利率水平两个对可转债价值产生直接影响的因素，并且具有明确的定价公式表达。但对于边界条件和求解过程，因为可转债附加条款多是路径依赖的，其成立与否难以凭借一个时间截面的网格点来确定，导致一些附加条款很难明确的表达出来。在一个时间截面的网格中，股价的大小是确定的，不同截面之间的各点股价又没有既定的路径联系，难以进行带条件条款的回溯判断。目前的研究也尚未有提出解决方案。本文采用了对触发价加权调动的做法，在单点上增强触发条件以近似条款中的区间判断，这是比较粗糙的。

§3.3.3 基于 Monte Carlo 模拟思想的定价算法

可转债价值体现出对基础股票价格路径的依赖性，文借鉴经典 Monte Carlo 模拟思想，通过借住计算机高速运算的能力，基于模拟的基础股价路径结合可转换债券产品特征，提出一种可行的定价算法。

§3.3.3.1 基础股价路径的模拟

Monte Carlo 模拟算法（以下简称 MC 算法）是基于“风险中性”假设下的一种数值模拟计算方法。股票价格的随机游走满足：

$$dS = rSdt + \sigma Sdx_1, \quad \text{其中 } dx_1 \text{ 为标准 } Wiener \text{ 过程}$$

首先的工作就是对股票价格路径的模拟。一般金融理论中都假定股价运动为布朗运动。需要产生满足正态分布的随机数，设为ω，ω满足$N(0,1)$正态分布；其次，我们在进行模拟时不可能是连续时间的，因为这在计算上无法实现，实质上还是要进行离散化处理。股票过程也是满足对数布朗运动的，所以有：

$$d(\ln S) = (r - \sigma^2/2)tdt + \sigma d\omega$$

积分形式为：

$$S(t) = S(0)\exp\left[(r - \sigma^2/2)t + \sigma\int_0^t dW\right] \qquad 3.3.22$$

有了$S(t)$然后根据 3.3.22 可以得到$S(t+\Delta t)$：

$$\begin{aligned} S(t+\Delta t) &= S(0)\exp\left[(r - \sigma^2/2)(t+\Delta t) + \sigma\int_0^{t+\Delta t} dW\right] \\ &= S(t)\exp\left[(r - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\omega\sqrt{\Delta t}\right] \end{aligned} \qquad 3.3.23$$

MC 模拟的优点之一在于，无论回报结果依赖于标的变量的路径还是仅仅取决于它的最终价值，都可以使用，这对于可转换债券定价无疑是非常有用的。

§3.3.3.2 基于模拟路径的国内可转债定价算法

带条件赎回及回售条款的有效性判断显得非常重要，利用模拟的股票路径可以很好的实现。时间离散化仍然是计算过程所必需的，在模拟中取Δt为一天，这样可以方便的建立与实际市场交易数据的联系，也有利于时间单位的换算。

1）赎回权与回售权有效性的判断过程：

以赎回权为例，判断赎回权是否有效涉及以下几个要素：

赎回期 $t \in [t_C, T]$，注意在我国目前的产品中，赎回期一般是从某个时间（如，发行半年后）开始直至到期日为止。

赎回权的触发价TP_{call}，目前一般为转股价的 130%左右；

回溯考察区间天数 *c_last*，如该时点之前 40 日的时间区间；

区间中股价格达到或超过触发价TP_{call}的天数 *c_count*，一般小于 *c_last*，如 40 日中出现 30 天等；

编程时，在第 *i* 个时点判断的思路如下：

1. 首先判断该点已经进入赎回期的时间长于*c_last*，如果不是，否则不可能发生赎回，因为尚无数据判断赎回权是否被触发；
2. 在前 *c_last* 天中，判断股票模拟价格，是否有 *c_count* 天达到或超过TP_{call}，若是，则赎回权被触发，否则作无效考虑；

3. 赋值于赎回权的有效性指示变量 *call*（取值 1 或极大值如 99999）。

同样的道理，我们也可以对回售权的有效性进行判断，得到指示变量 *put*（取值 1 或 0）。

指示变量的思想，曾在二叉树模型讨论中提出，使用时将其乘上对应条款的执行价格，在价值比较中可以方便的控制该条款是否起到作用，这样可以让程序结构化更强。

2）可转换债券价格与基础股票价格的关系

利用 MC 方法产生股票价格路径，在从初始点向到期日的方向上，对各离散时间点的可转换债券价值进行判断，就可以得到时间轴上的价格走势。通过对比可以很容易的看到可转换债券价格与基础股票价格之间的关系。

运用上述对赎回权和回售权有效性的判断方法，以及和二叉树模型中节点价值判断的原理，我们可以很容易得到可转换债券在未来各时点的价值。这里有几点需要注意：

1. 因为不涉及分叉结构，这里的持有价值 H_M 就是个时点上的纯债券价值；

2. 如果公司赎回条件满足，将执行转换，此后的转债价值其实就是未来的转股价，实际上可转换债券已经变成 (A/P_{conv}) 支基础股票了。

3. 在回售条件满足时，选择回售和持有的最大值，因为回售不是强制的。

4. 上述方法产生的仅仅是可转债在特定的某条模拟股票价格路径下的各时点上的投资决策价值，而不是可转换债券该点的理论定价，要注意区分。

假设一个可转债的转股价为 8 元，赎回价和回售价为 105 元和 108 元，转股期、赎回和回售期为发行后半年至期末。赎回触发条件为连续 40 个交易日中有 30 个交易日基础股价超过转股价的 130%；回售触发条件为连续 25 个交易日基础股价低于转股价的 70%。

图 3.6 模拟的股票价格路径（3 条）

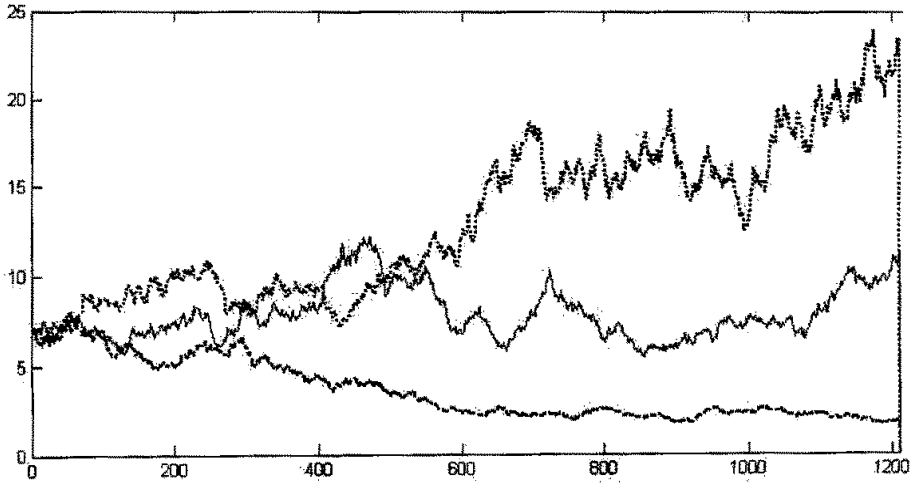
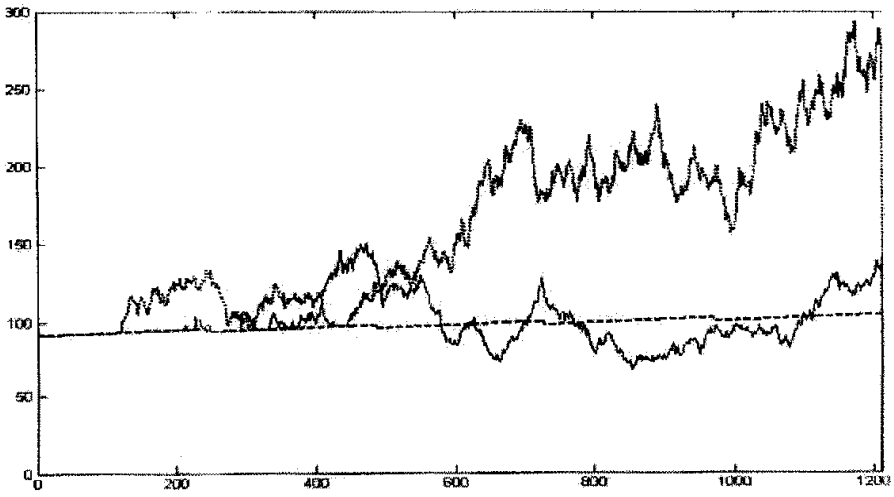


图 3.7 相应的单点（即时）可转债价格路径



横轴为交易日（每年 242 日，共 5*242=1210 日）；纵轴为价格（单位：元）

注意到这里各时点上的价格仅仅代表了该时点各种可行投资操作中的价值最大的选择结果，是一个单时点价值，不是可转换债券在该点的理论定价，后者将在下文详细讨论。

可以看到，对于没有执行转换的可转换债券具有很好的抗跌性（虚线），而执行转换的就成为公司股东，其收益与公司的经营状况直接挂钩了，可能会享受到更好的收益（点线），也可能由于公司经营不善而承担风险（实线）。

3）定价计算过程

上述结果直观的给出了各点股价与可转换债券价值的一种关系，2）中给出的仅仅是一种时间序列，每条曲线仅对应一种特定的市场情况。对于每个时点 i，其上的决策依赖于日后的股价走势，而这在现实中是无法知晓的。当我们进行定价时，通过随机的模拟股价的路径，得到了从当前时点到到期日的一种可能走势。而市场中股价可能发生非常多的变化可能，因此需要模拟多条股价路径，逐一求解各走势下可转换债券的当前定价，然后求平均得到可转换债券最终定价。

这里的一个重要条件就是各股票路径的模拟是无关的，它只和股票本身的波动特征相关，所以在最后可以用算术平均来处理。通过大量的模拟可以覆盖绝大部分的股价走势可能，结合 1）中的判断准则以及类似于二叉树的投资决策选择标准，这样求得可转换债券价格能充分体现该可转债内含条款的价值。

模型中时间间隔 Δt 为公历的一天，但以 242 个交易日为一年建立时间轴，这里假设休市时股价是停止波动的，因为每天的交易从头一天的收盘价开盘。

为了程序的简化，设定了绝对时间轴，长度为 $242M$ 个交易日，如果考察的起始点距离到期日的天数为 T_{day}，则该点在时间轴上的位置为：

$now = floor\left(M - \left(T_{day}/365\right)\right) * 242 + 1$，$floor$ 是取不超过输入的最大整数

时间标 t 就在 T 到 now 区间变化。

由于数据存储采用向量和矩阵形式，因此配合绝对时间轴可以非常方便的进行提取和更新，在处理不同起始点数据时，只需要定义进入矩阵的相应位置即可。

首先从 now 到 T 模拟一条股价路径，方法同§3.3.3.1 中所述。

根据 1〉中赎回权与回售权有效性判断，确定 $call$ 和 put 取值，则：

$$V_m(t) = \max\left\{\min\left(H_{MC}(t),\ call \cdot P_{call}\right),\ \left(A/P_{conv}\right) \cdot S(t),\ put \cdot P_{put}\right\}$$

到期日 $H_{MC}(T) = A \cdot R(M) + I_C$，其中 $I_C = \max\left\{0,\ A \cdot \left[M \cdot r_C - \sum_{j=1}^{M} r_{CB}(j)\right]\right\}$

非到期日 $H_{MC}(t) = V(t+1) \cdot \exp\left(-r_{dis,MC}(t) \cdot \Delta t\right) + I(t)$，

注意这里的 $r_{dis,MC}$ 取值原则有所改变，根据 $V(t+1)$ 的最终决策，有：

$$r_{dis,MC} = \begin{cases} r & \text{若} V(t+1) \text{选择转股} \\ r_b & \text{若} V(t+1) \text{选择继续持有、回售或赎回} \end{cases}$$

$I(t)$ 仅在 t 为年末时取值，建立向量 t_coupon 存储计息时点：

$$t_coupon(j) = 242 * j,\ j = 1, 2, \ldots M$$

若当前 t 等于 $t_coupon(j)$ 即可确定，则 $I(t) = A \cdot r_{CB}(j)$；

通过递归计算求得 $V_m(now)$，则一次模拟完成。

重复上面模拟过程，得到 $V_m(now),\ m = 1, 2, \ldots Sim_{MC}$，求算术平均 $\overline{V_m}$ 作为该考察点的可转换债券理论价值。

这里 Sim_{MC} 的确定需要一个实验过程，也就是模拟水平稳定过程，次数不够将无法逼近真实市场情况，但是在次数达到一定数量后，预测值大小将趋于稳定，此时就不用再增加模拟次数了，否则消耗大量时间，而精度提高甚微。这一点将在实证部分讨论。

第四章 可转换债券的定价方法的实证研究

本文建立的模型对国内可转债的赎回、回售、递增票面利率及利率补偿条款等给予充分考虑，反映了我国市场中主流产品的特征。在选取实证样本时，采用一个较为规范的产品是考察模型能力的公正标准。

§4.1 样本数据说明

本文截取了钢钒转债从 2003-7-1 到 2003-12-1 共 105 个交易日的数据来进行实证研究。主要理由如下：

1. 2004 年金融市场受我国宏观经济调控以及金融体制改革影响，市场价格的起伏波动不仅体现着产品价值，还渗透着较多外部因素对融资者与投资者预期的冲击，而这并不属于本文模型考察范围，因此将考察放在 03 年下半年；

2. 钢钒转债于 03 年初发行，此时国内可转换债券市场已经较为成熟，且钢钒转债条款具有较好的代表性，条款齐全且较为标准，适合于模型的实证；

3. 该时间段已经进入转换期（赎回期），基础股票新钢钒（000629），股价较高且波动频繁，可转债不同于普通公司债券的特性得到显现，通过市场价格和模型定价的对比，一方面可以考察可转债价值与基础股票价格之间的联带关系，另一方面可以更好的观察模型的动态预测能力；

表 4.1 钢钒转债的发行信息和条款设置

<table>
<tr><td>转债名称</td><td>钢钒转债</td><td>转债代码</td><td>125629</td><td>发行额</td><td>16 亿</td><td>票面金额</td><td>100 元</td></tr>
<tr><td>对应股票</td><td>新钢钒</td><td>股票代码</td><td>000629</td><td>期限</td><td>5 年</td><td>市场</td><td>深市</td></tr>
<tr><td>公告日</td><td>2003-1-17</td><td>发行日</td><td>2003-1-22</td><td>上市日</td><td>2003-2-17</td><td>到期日</td><td>2008-1-22</td></tr>
<tr><td rowspan="2">利率条款</td><td>第 1 年</td><td>第 2 年</td><td>第 3 年</td><td>第 4 年</td><td>第 5 年</td><td>利率补偿</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5%</td><td>1.8%</td><td>2.0%</td><td>2.4%</td><td>2.7%</td><td>2.7%</td><td></td></tr>
<tr><td>转股价</td><td colspan="3">当前转股价：5.64 元</td><td>转股期</td><td colspan="3">2003-7-22 至 2008-1-22</td></tr>
<tr><td>主承销商</td><td colspan="7">兴业证券</td></tr>
<tr><td rowspan="2">特别向下修正条款</td><td colspan="6" rowspan="2">连续 30 个交易日内有 20 个交易日收盘价格不高于当期转股价格的 90%时,公司董事会必须在上述情况出现后 5 个工作日内向下修正转股价格,转股价格的修正幅度不低于当期转股价格的 10%，降低后的转股价格不低于最近一期经审计的每股净资产值。</td><td>派息调整：是</td></tr>
<tr><td>期限：转股期</td></tr>
<tr><td rowspan="2">赎回条款</td><td colspan="7">连续 40 个交易日中至少 30 个交易日的收盘价不低于有效转股价格的 130%</td></tr>
<tr><td colspan="7">赎回期：半年后；赎回价：105 元</td></tr>
<tr><td rowspan="2">回售条款</td><td colspan="7">无条件回售</td></tr>
<tr><td colspan="7">回售期：最后一年；回售价：103 元</td></tr>
<tr><td>募资投向</td><td colspan="7">1450mm 热连轧技术改造工程和淘汰模铸，
增配方坯和板坯连铸机技术改造工程两个技改项目</td></tr>
</table>

§4.2 二叉树定价模型的实证

二叉树模型输入参数较少，且不涉及利率期限结构问题，所以在将条款转化为参数后很容易实施，主要参数的估计方法如下：

1. 股价路径模拟参数 p,u,d：根据公式 3.3.5 可以算得：p=0.5378，u=1.0323；d=0.9688。

2. 无风险利率 r：根据研究经验，一般以同期政府债券（或国债）利率代替。但我国发行国债的多为 1-2 年的短期或 7 年以上的长期国债，由于可转换债券期限为 5 年，所以我们在实证研究中根据与转债同期发行的 7 年期国债收益率，适当调低得到 $r=0.035$，而根据同期付息型企业债券利率得到 r_b=0.045。

模型的输入数据以矩阵形式读入，每一行对应着一个考察日时点的数据，所以在不同考察日允许调整不同的参数值已反映当时的市场状况，由于考察时期较短，故前后采用了一致的r。

3. 基础股票价格的波动率 σ：取考察点时间前一年中交易日的股价历史数据，求对数收益率序列 $r_i^S, i=1,2,...242$，则股票价格波动率估计为：

$$\hat{\sigma}=\sqrt{241}\times stdev\left(r_i^S\right)=\sqrt{241}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{242}\left(r_i^S-\overline{r^S}\right)^2/241}$$

4. 二叉树阶数 k：根据国内可转债的赎回（回售）条款，要求在 40 日内有 30 日或以上基础股价超过（低于）相应的触发价，而市场中上涨（下跌）的趋势往往是较连续的。本文取 $k=floor\left(T_{day}/40\right)$，在二叉树独有的上下股价运动框架下，粗略的认为若当前节点股价超过或低于触发价，则在相邻时段中，如果本节点价格超过（或低于）触发价，则股价从前一节点上升至（下降至）本节点的过程中，也有连续一定天数价格达到触发价，从而允许考虑赎回（回售）条款。因此 k 的确定是和条款判断的近似处理相联系的。

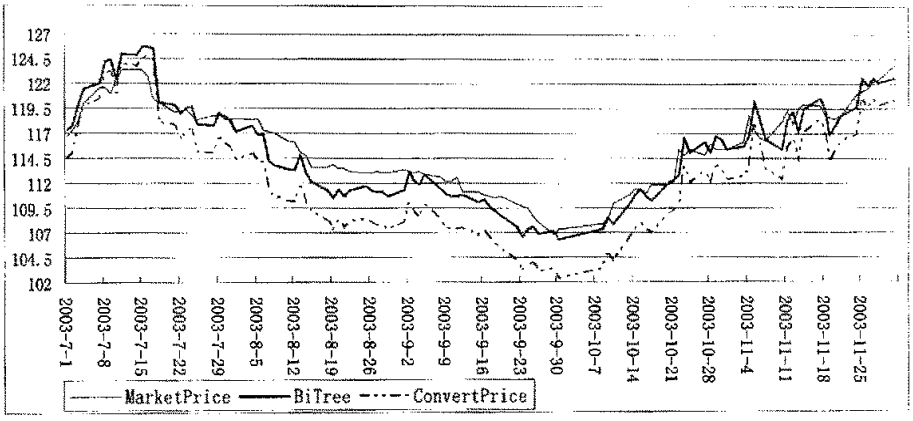
5. 赎回权和回售权的触发价：$TP_{call}=5.64*1.3$；$TP_{put}=999$

注意：钢钒转债最后一年的回售条款是无条件的，为了利用现有的判断程序，令 $TP_{put}=999$ 则保证了判断语句中股价始终低于触发价，即为无条件回售。

6. 距离到期日天数 t：一般信息系统中下载的数据会有该项，如果没有，可以按照一年 360 天的标准进行折算。

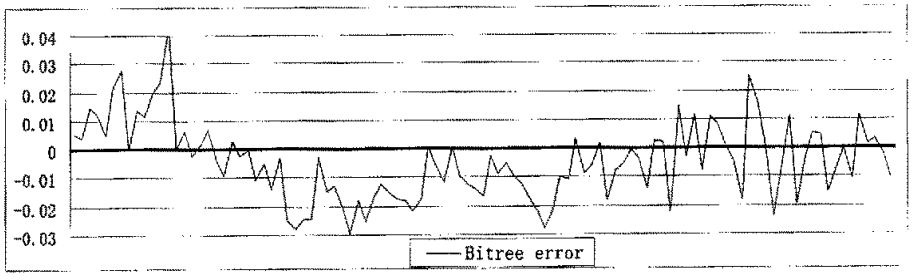
将各考察日对应的数据以行为单位（每行对应一日的输入数据）建立参数矩阵（可以借助 Excel 表单工具），用 Matlab 读入，每次读取一行的数据进行模型计算，并输出到结果矩阵中对应的行（交易日），参数矩阵的行数即为定价算法程序循环的次数。采用二叉树模型计算得到预测结果如图 4.1 所示这里加入了当天的转换平价，能更直观的看到可转债价值与基础股价的关系：

图 4.1　105 个交易日中二叉树模型定价与实际价格及转换平价的对比



模型预测相对误差：*BiTree error = (BiTree - MarketPrice) / MarketPrice;*

图 4.2　二叉树模型预测相对误差



根据上图可以察看各预测点上模型定价偏离市场价格的大小及方向，利用相对误差的绝对值，即$|BiTree - MarketPrice| / MarketPrice$，我们可以评判模型的实际定价能力：对 105 日内相对误差的绝对值求得以下指标：

平均值：0.0113；即时段内模型定价与实际市场价格平均偏差比例 1.13%；

最大值：0.0428；最小值：8.166E-05，说明时段内各点上模型定价最多偏离实际价格的 4.28%，而最好的点可以认为模型定价与实际价格相同。

二叉树模型定价结果总体表现不错，相对误差绝对值基本控制在 2%以内。不过，该模型结果与基础股票价格呈现出很大的关联性，其升降趋势几乎与基础股价相同。在模型定价与转换价值之间存在一段价差，这段价差受到纯债券价值影响及内在期权的价值的填充，注意到两者差值随转股平价（也即基础股价，因为转换比例不变）的高低而体现出差异，说明了内在期权价值的定价也是随基础股价的变化而变化的，符合实际情况。

事实上，转换平价（也即基础股价）较低时，转债市场价格与转换平价差距拉大，且走势相对平缓，纯债券价值起到较好的缓冲作用；当基础股价较高时，转债市场走势与转换平价趋同，这一点充分体现了可转债“上可破，下可守”的特点。

§4.3 双因素偏微分方程定价模型实证

双因素偏微分方程求解，涉及到利率期限结构模型的参数估计。对于Vasicek模型，在其离散形式下，采用自回归方法来估计参数。

原模型为：$r_t = a(b-r)dt + \sigma_r dx_2$，离散化以后模型可以写为：

$$\Delta r_t = r_{t+\Delta t} - r_t = a(b-r_t)\Delta t + \varepsilon_{t+1} = ab\Delta t - a\Delta t \cdot r_t + \varepsilon_{t+1} \qquad 4.3.1$$

其中$\varepsilon_{t+1} \sim N(0,\sigma_r^2\Delta t)$，4.3.1 就是我们用来估计利率期限结构所采用的方程。选取 2002 年 1 月至 2003 年 6 月的国债 1 年期收益率的周数据（即$\Delta t = 1/52$）进行估计，选择周数据是为了避免日数据波动过大而对模型稳定性造成冲击。计算Δr_t和对应的r_t序列，作线性回归得到：

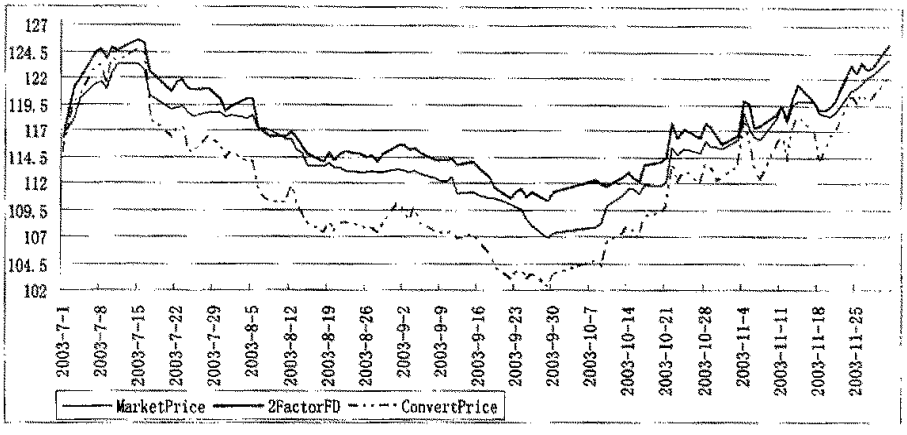
$$ab\Delta t = 0.00176;\quad -a\Delta t = -0.0952;\quad \sigma_r\sqrt{\Delta t} = 0.002073$$

则利率期限结构的参数：$a = 4.9504$，$b = 0.0185$，$\sigma_r = 0.015$。

由于我国金融市场和制度的特殊性，国内利率风险价值λ较小且不易准确估计，而$\lambda\sigma_r$量级为10^{-3}，可以忽略该项。

参数ρ是股票价格对数收益率年波动率和利率的年波动率的相关系数。股票波动率序列（每个考察点对应一个年波动率）已经在 4.1 节中估出，采用 5 年期的国债 0408 日收盘价为样本，计算国债收益率，用计算股票功率类似的方法可以求得每日的利率年波动率序列，两序列线性回归可得到相关系数ρ的估计$\hat{\rho} = -0.17$。制作输入信息矩阵，添加部分参数。利用 matlab 程序计算得到的模型定价结果如图 4.3 所示：

图 4.3　105 个交易日双因素偏微分方程定价模型与实际价格及转换平价的对比



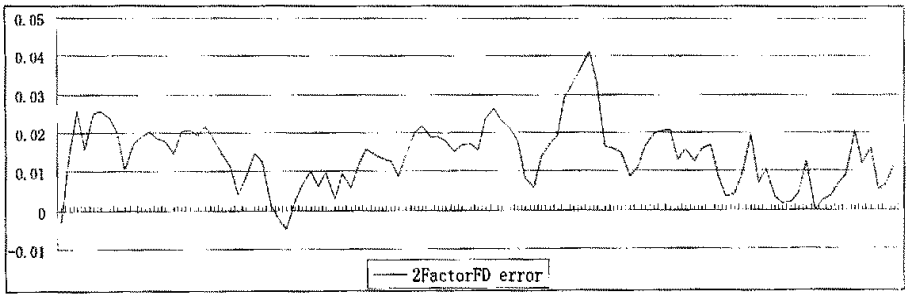
相对误差$2FactorFD\ error = (2FactorFD - Market\,Price)/Market\,Price$，参见图 4.4，对 105 日内相对误差的绝对值求得以下指标：

平均值：0.0143；即时段内模型定价与实际市场价格平均偏差比例 1.43%；

最大值：0.0411；最小值：0.00014，说明时段内各点上模型定价最多偏离

实际价格的 4.11%，而最好的点可以认为模型定价与实际价格相同。

图 4.4　双因素微分方程定价模型预测相对误差



可以看到，双因素方法的模型定价总体偏高，不过其误差（绝对值）控制仍然较为理想。并且在基础股价不同水平的各点，二叉树模型中理论定价与转换平价同升同降的“一致性”不再明显，相对而言，模型定价在除去价差外，走势与市场反应更为吻合。

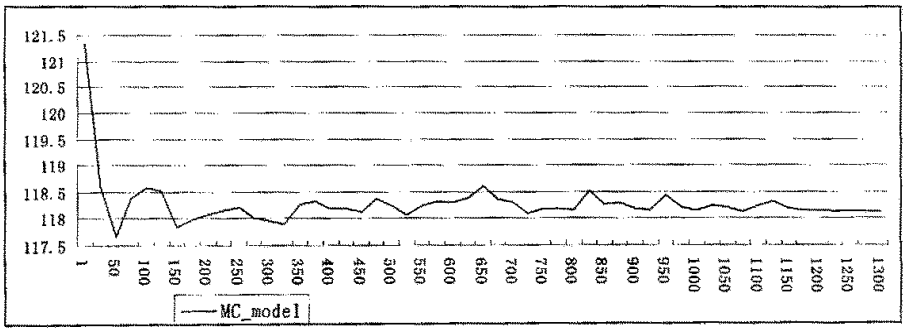
§4.4 基于 Monte Carlo 模拟思想的定价算法实证

本文中的模拟算法和二叉树采用同样的信息输入矩阵，参数估计就不再赘述。而由于该模型重点考虑了赎回及回售有效性的判断，因此在计算时还需要另外增加 *c_last,c_count,p_last,p_count* 四个参数。

在钢钒转债的例子中，由于回售为无条件的，所以设 $p_last=1, p_count=0$；配合 $TP_{put}=999$，则只要考察点时间处于回售期内，判断语句将总是认为指示变量 $put=1$，即回售条款生效。

模拟算法涉及到一个模拟次数与计算结果的收敛问题，其实质是大数定律大量独立同分布样本均值向样本期望收敛的性质。为了确定一个在结果稳定性与计算耗时之间平衡的模拟次数，先任意选取了 2003-8-1 下的数据，通过改变模拟次数得到在不同次数下的理论定价，其趋势如图 4.5：

图 4.5　模拟次数与结果收敛程度的关系图



随着模拟次数的增加，模型输出趋于稳定，这里进行了最高 10000 次的模拟，但发现本文的算法在 1500 次时输出结果已经稳定，因此批量计算采用 2500 次。

注意，实际运用时一定要根据不同设定进行判断，模拟次数太小，结果不能反映真实情况；模拟次数过大，则精度提高甚微但计算耗时将急剧增加。输出的结果如图：

图 4.6　105 个交易日中模拟算法输出定价与实际价格及转换平价的对比

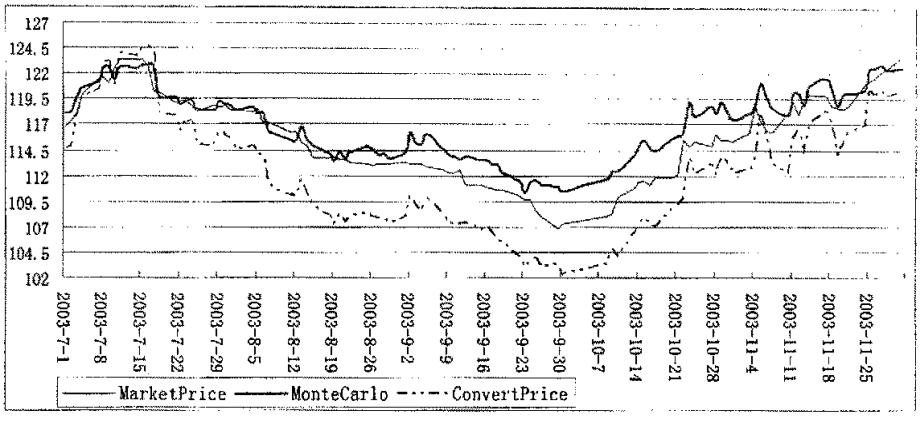
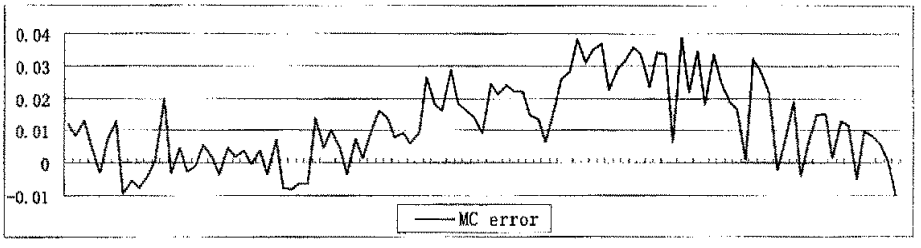


图 4.7　模拟算法预测相对误差



相对误差 $MC\ error = (MC - Market\,Price)/Market\,Price$，对 105 日内相对误差的绝对值求得以下指标：

平均值：0.0141；即时段内模型定价与实际市场价格平均偏差比例 1.41%；

最大值：0.0384；最小值：0.000163，说明时段内各点上模型定价最多偏离实际价格的 3.84%，而最好的点可以认为模型定价与实际价格相同。

本文基于 MC 模拟思路的算法作为尝试性方法，其定价表现良好，不过误差（绝对值）的波动十分剧烈。从价格图来看，兼有二叉树与偏微分方程方法的特征，基础股价越高，模型拟合效果越好，基础股价较低时，误差明显增加。

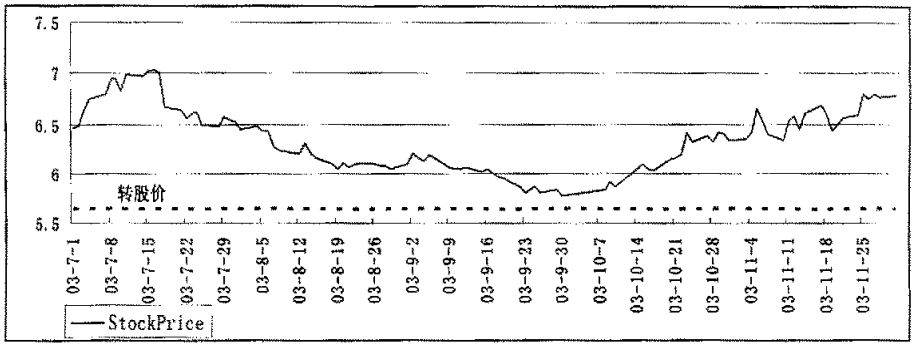
综上，我们发现模型在局部的定价误差较大，而整体定价误差并不明显，总体波动较大。一方面，由于是一交易日为单位，波动更加频繁是难以避免的，另一方面，产生这种偏差的原因应该如何解释？到底是模型价值偏离了市场价格，还是市场价格偏离了真正价值？

§4.5 模型误差的解释和综合评价

本文实证研究中的参数估计均采用了实证区间之前的历史数据，不存在已知将来反推过去的不合理性，模型的计算结果可以评价模型定价能力。

三个定价模型从整体上看表现较好，最大相对误差绝对值控制在 0.04 左右，通过模型定价与市场价格的比较，根据时间轴对照图 4.8 中基础股价走势与模型定价图以及误差图，可发现一个共同特征：当基础股价处于深度实值（即较大幅度高于转股价）时，模型的定价与市场价格拟合很好；当基础股价下降趋近转股价时，模型的误差随之增加，且这种关系呈现正比趋势。

图 4.8　基础股票价格走势



产生这样的现象，主要是可转债自身的价格行为所致。可转债作为兼具股性和债性的金融衍生产品，其价值主要由纯债券价值和内含的各种期权价值两部分有机地构成，所以转债的固定收益部分（包括票面利息、利息补偿及无条件回售价格）和基础股票的走势对转债的市场价格具有决定性的作用。

如果以转股价格为分水岭，当股价远高于转股价格时（赎回权此时并不影响转换平价在可转债价格中的体现），此时转债价格主要体现的是转债的股性，即转换期权价值；当股价远低于转股价格但尚未触及修正条款时，转债价格主要体现的是转债的债性，纯债券价值及无条件回售条款对转债的价格起到了较好的支撑作用；而当股价处于转股价格附近时，各种内在的期权处于不确定性最高的状态，造成预测精度的下降。

目前市场上可转债的赎回条款都非常相似，赎回条款是发行人的一项期权，主要作用在于促进转股投资者转股。第一，赎回时公司必须提前公告，投资者理性的选择是转股；第二，由于股权结构分割的现状，上市公司没有赎回的积极性，相反，上市公司为了规避到期还本付息和期间支付更多利息的风险，才规定了赎回条款。第三，上市公司如果选择执行赎回条款，必然是在基础股价稳定在远高于转股价时执行，可以保证持有人转股而非选择被赎回。正是由于赎回条款的相似性和被真正履行的可能性极小的原因，所以当股价远高于转股价格时，各类发行条款的价值降低，转债的价格行为较简单，转债价格主要反应的是转换期权价值，转债价格随市场中基础股价的波动而波动。

从个体上看，三个模型体现出一些独有的个性。二叉树模型虽然总体拟合效果最优，但是细部走势始终受基础股票左右，预测价格震荡过大，结果不够稳健，

上下交错于实际价格，对内含期权的价值反映不够平滑。究其原因，主要是由于有限的“二叉”股价运动路径降低了对于各种期权的综合价值计算能力。

双因素模型和模拟算法则由于采用了连续偏微分经典期权定价方程的有限差分网格解法和多路径模拟平均，使其在期权定价上更具有优势，体现出较平滑的价格曲线。模拟算法配合精确的触发条件判断，取得了较好的定价结果。双因素模型中由于包含了利率期限结构，误差来源变得模糊。利率期限结构在同一基础框架下（如 Vasicek）已经发展出单因素，双因素甚至多因素模型，本身的预测就具有很大难度。从实际预测效果看来，引入利率随机性的“性价比”并不突出，是否有必要嵌入更高阶的利率模型，这有待验证。

有一点必须提到，这就是定价模型的计算效率问题，在三个定价模型中，同样预测目标，计算时间由快到慢为：二叉树模型、模拟算法、双因素模型。其中双因素模型耗时最长，且随有限差分解法中网格数目增加而急剧延长。就本文中的预测量而言，以二叉树模型计算时间为 1 个单位，模拟算法和双因素模型的计算时间可以达到几十至几百倍（视模拟次数和网格划分数量而变化）。二叉树模型中不少参数假设为恒定值，因此进行预测的准备工作也很简单。所以从易用性和整体模拟效果而言，二叉树具有自身不可比拟的优势。而双因素模型和模拟算法具有更好的扩展性，可以通过参数的修改达到预测各种变形产品的目的，值得进一步的研究。

实证结果反映出市场中发行的可转换债券价值被不同程度的低估。虽然在理论定价中不可避免的会有模型上的误差，但是可转换债券价值被低估的事实的确存在，这一现象在其它针对我国可转换债券市场的研究中也得到了证实。对此，投资者的偏好或者流动性溢酬等不是决定性因素，市场的有效性可能是影响金融产品市价准确反映内在价值的主要原因。当然，可转换债券在市场中的价格不但决定于自身的理论价值，还同时受到供求关系、同类金融产品、市场利率预期等诸多方面因素的影响。

模型是建立在完美市场假设以及投资者和公司理性决策的基础上的，而在现实中难以满足，这也是造成实际价格与理论价值交错的原因。例如，定价模型的一个重要的条件就是无套利原则，几乎所有定价方法都遵循了这一原则，按此原则转债的市场价格不得低于转换价格和纯债券价值的最大值，如果出现市场价格低于了转换价格，则在一个允许做空的市场，可以通过沽空股票再买入可转债进行无风险套利。但目前国内单边市场环境下，转债的市场价格并不严格遵循这一基本原则。复杂的发行条款、市场的认可程度、对基础股票不同的预期以及单边的市场环境等等因素错综复杂地影响着转债的市场价格。

第五章 我国可转换债券的投资优势和投资策略

当前股市低迷的情况下，可转换债券是一个绝对值得关注的投资品种，现阶段我国市场上的可转换债券具有投资风险小，预期收益大的显著特点。在我国可转换债券条款优于国际市场同类产品的前提下，当前的可转换债券却仍然只有较低的转换溢价使其投资价值凸现。

§5.1 我国可转换债券产品独有的投资优势

我国可转债市场仍处在起步阶段，与国外相比，存在许多不成熟地方。但也正是这些不足之处给投资者提供了较好的获利机会。简而言之，目前我国已发行的可转债，除了自身具备的投资灵活的特点外，还有转股溢价水平低、转股价向下修正空间大、票面利率高、信用等级高公司业绩好等优势。

首先，国内可转债转股溢价水平偏低。2002 年我国发行可转债初始转股溢价平均为 4.80%，2003 年平均为 0.77%，04 年平均为 1.3%。而国外初始转股溢价一般为 15%～30%，集中在 20%～25%之间。尤其是自 2003 年后，许多转债溢价幅度上升至 50%以上，其中美林证券发行的富国银行 30 亿美元可转债溢价幅度甚至达到了创记录的 110.75%。相比之下，国内一些可转债溢价仅为象征性的 0.1%，大大增加了投资者未来转股获利的可能性。如果认为可转债收益有限不如投资股票，这是对可转债的误解。虽然赎回条款规定，如果股价持续一定期限超过转股价 30%左右时，公司可以赎回可转债，但投资者仍可在 1 个月的赎回缓冲期内转股，此时收益已达 30%左右。

其次，国内可转债都有特别向下修正条款，转股价向下修正的空间很大。在国外，转股价向下修正的情况很少。即使出现修正，修正次数也受到限制。国内的特别向下修正条款，使得即使在股市下跌过程中，也可以由于不断修正转股价，降低转股成本而获利。而转债存续期间只要有存在一波行情，投资者就可以在修正后的低价位转股，从而获得极高的收益。

再次，转债的债券价值较高。和美国市场上的转债相比，国内转债的纯债券价值要高的多。国外零利率可转债正在大量增加，而国内可转债除票面利率较高之外，利息补偿和到期高价回售等条款更进一步提升了可转债的保底收益。特别是对于散户投资者，由于一般为自有资金，成本较低，仅可转债的票面利率就已与银行存款利率相当，何况又获得了额外的转股权，投资价值不容忽视。

最后，国内发行可转债的均为业绩非常优秀的上市公司。由于相关法律法规限制，在我国只有效益较好且稳定的篮筹公司才有资格发行可转债，国内发行可

转债都必须有担保。目前已发行的可转债，绝大部分都有四大国有银行担保，相当于获得了与国有银行相同的信用等级，因此到期无法还本付息的概率极低。而国外发行可转债目的之一就是力求降低资金成本，担保无疑会增加融资成本，所以若非需要，一般都尽量不找银行担保。这样一旦上市公司破产，投资者很可能连本金都无法收回。

前两个原因说明了为什么转债在正股股价上涨时会紧紧的跟在后面上涨；后两个原因则说明了在正股股价下跌时，转债会显示较强抗跌性的原因。实际的市场表现也充分证明了可转换债券的投资优势。从指数来看，截止到 2004 年 9 月 16 日（04 年 10 月后我国金融市场政策变动等外部原因频繁导致资本市场走势震荡剧烈，参考价值不大），天相可转债指数（由天相投资顾问公司开发的可转债市场整体指数，具有较好的认可度）比 2002 年初上涨了 28.73%，比 2003 年初上涨了 29.33%，比 2004 年初上涨了 6.71%，而同期，上证 A 指的涨幅分别为 -16.69%、1.00%和-8.41%。且可转债指数同期的波动幅度要比上证指数小的多。可转债表现可以归结为：在股市上涨时有接近于股票的回报率，而在股市下跌时则显示出良好的抗跌性。可转债过去的总体表现要远远好于大盘。

在国际市场上很少能看到如此具有投资优势的可转债。因此无论从债券价值和股票成长性来看，我国可转债产品具有较大的投资价值，非常适合风险承受能力低但又希望获取较高回报的散户投资者。

§5.2 我国可转换债券市场的投资策略分析

在二级市场中，个体投资者投资可转换债券仍然较少，这还是涉及到一个认识问题。大多数投资者尚未认识到投资可转债的优势所在。而另一方面，基金公司、QFII、保险公司等众多机构投资者总体看好国内可转债的投资价值，采用大量长期持有来等待较高收益的机会，也导致了可转债二级市场的流动性差。可转债在纯债券以外的价值几乎都受到基础股票的影响，分析就从此展开。

（一）转债价值低于面值，股票价格高于转股价

上市公司可转换债券的转换价格确定一般以基础股票的市场价格为参考，在基础股票价格之上有溢价；溢价越高，转股的可能性越差，投资者承担的风险越大。由于我国金融市场中无做空机制，很多情况下，市场价格出现非均衡状态，可转换债券在上市之初即跌破发行价的情况也并不少见，而这正是理性投资者可以考虑介入的较佳时机。

转债价格跌破发行价大幅贴水为投资者提供了较好的短线投资机会，而基础股票价格与转债价格之间存在套利空间则为套利投资者提供了极佳的投资品种。在低于面值时购入可转债，既可分享股市长期走好的成果，又没有被套牢的风险。

（二）转债价值高于面值，股票价格高于转股价

在这样的情况下，我们要充分利用可转债的转换权来争得利润。转换得到基础股票的实际成本=(转债购入价格+交易成本)/ 转股比率，如果它高于基础股票价格，按么我们可以先买入可转债，通过行使转换获得基础股票，再卖出基础股票获利。但该过程需要两个交易日的时间，第一日买入转债，第二日转股并卖出股票。如果第二日基础股价下跌并超过上述套利的比例，就可能导致亏损。

（三）股票和转债价格同时呈现下跌趋势

一般情况下如果股票价格下跌，转债的价格也会下跌，因为作为衍生的金融工具，其价格走势必然跟随原始工具的价格变动。当两者之间的价格变动幅度不同时，就可能出现套利的机会。转债本身含有一个选择权：如果转债的跌幅大于股票，则可以行使转股权利，将转债转换成股票以后卖出，再买入转债，如果两者之间的跌幅差别足够大，则存在一定的获利空间；如果转债的跌幅小于股票的跌幅，则可以不行使转股权。

尽管可转债的条款很复杂，但投资者需要重点关注以下条款：一是回售条款。该条款是在股价下跌情况下迫使公司降低转股价的最有力手段。对投资者而言，回售期越长越好，回售条件越松越好。二是利息补偿。可转债票面利率通常较低，若到期未能转成股票，利率补偿可以提高投资的最低收益率。有的可转债的利率及其利率补偿可以随银行存款利率上浮而不下浮，这对投资者更有利；有的用较高的回售价来代替利息补偿，这是避税的好办法，可以提高税后收益率。第三，是否有红利保护。大多数公司规定在发放股票红利时相应调低转股价，从而使可转债投资者获得红利保护。

如果特别考虑当前利益，应选择票面利率较高的可转债进行投资。因为，票面利率较高的可转债可以在此阶段获得相当可观的现金流，而在股市出现转机时又可分享股市上涨的收益。同时，由于我国可转债票面利率多以递增方式浮动，后期利息支付往往大于前期利息支付，在投资时可尽量选择剩余期限较短的券种，可降低利率风险同时提高现金流水平。

结 束 语

可转换债券作为进入我国市场不久的金融产品，其灵活的融资和投资特性已经得到广泛的认可。通过吸取国外可转债市场发展的经验，国内产品的设计成长迅速，在本文截稿之际，国信证券已经在谋划为上市公司发行我国首只零息可转换债券。市场和产品的快速发展的同时，相关研究更应当积极跟上。在这样的背景下，本文将国内可转换债券的定价方法作为研究目标，具有重要的实际意义。

国内的可转债设计思想虽然源自国际市场，但是由于我国金融市场发展过程中已经逐步形成了自身特有的氛围，因此在具体条款上又体现出不同于国际产品的一面。因此定价模型的建立过程中就应当充分考虑到这些本地化因素，将其纳入模型之中。本文重点放在了模型的理论推导和算法研究上，充分考虑了赎回、回售及各种利率条款等对于可转债价值产生本质影响的要素，利用经典定价方法发展了基于二叉树、双因素偏微分方程和模拟算法的定价模型。每个模型有良好的理论基础，还讨论了计算求解方法，具备了很好的实用性，摆脱了纸上谈兵的局限，这是以往相关研究所不具备的。

当然，作为定价模型，为了理论推导的方便，总是存在一些假设和简化，本文也不例外。建立的模型中没有涵盖了产品的所有条款，在计算过程中也采用了一些近似手段，这是对于模型复杂程度与模型预测能力平衡上的一种折衷处理。希望在以后能够进行更加深入的研究。

鉴于可转换债券结构、标的资产定价以及证券市场交易的复杂性，市场中各方非理性决策行为的存在，以及宏观和微观环境的变化等多种外部因素的不可度量与不可预测性，想建立一劳永逸的精确的产品定价模型是不现实的，我们所期望寻找的模型是理论性、适应性和可操作性相平衡的模型，理论定价是作为投资的一个参考标准，而不是一个绝对的尺度，市场和产品在改变，模型也需要进行不断的调整。

参 考 文 献

[1] F. Black and M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654;

[2] M.J. Brennan, and E.S. Schwartz, *The Case for Convertibles* [J] Chase Financial Quarterly, 1982, 1(3): 27-46;

[3] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll Jr., Stephen A. Ross, *A Theory of the Term Structure of Interest Rates* [J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385-408;

[4] M.J. Brennan, and E.S. Schwartz, *Analyzing Convertible Securities* [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1980, 15(4): 907-929;

[5] M.J. Brennan, and E.S. Schwartz, *Convertible Bonds: Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion* [J]. Journal of Finance, 1977, 32(5): 1699-1715;

[6] John C. Cox, Stephen A. Ross and M. Rubinstein, *Option Pricing: A Simplified Approach* [J]. Journal of Financial Economics, 1979, 7(3): 229-263;

[7] Goldman Sachs, *Valuing Convertible Bonds as Derivatives* [R]. Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, 1994

[8] K. Tsiveriotis, and C. Fernandes, *Valuing Convertible Bonds with Credit Risk* [J]. Journal of Fixed Income, 1998, 8(3): 95-102

[9] John Hull, Alan White, *Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method* [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1990, 25(1): 87-100;

[10] P. Carayannopoulos, *Valuing Convertible Bonds under the Assumption of Stochastic Interest Rates: An Empirical Investigation* [J]. Journal of Business and Economics, 1996, 35(3): 17-31

[11] O. Vasicek, *An equilibrium characterization of the term structure* [J]. Journal of Financial Economics, 1977, 20(5): 177-188;

[12] E.S. Schwartz, *The Valuation of Warrants: Implementing a new approach* [J]. Journal of Financial Economics, 1977, 4(1) 79-93;

[13] John Hull and Alan White, *The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing*[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1988, 23(3), 237-251;

[14] 杨如彦，魏刚，刘孝红，孟辉. 可转换债券及其绩效评价[M]. 北京：中国人民大学出版社，2002;

[15] 刘立喜. 可转换公司债券 [M]. 上海：上海财经大学出版社，1999；
[16] 张波. 应用随机过程 [M]. 北京：中国人民大学出版社，2001；
[17] 王松佳，陈敏，陈立萍. 线性统计模型——线性回归与方差分析 [M]. 北京：高等教育出版社，2000；
[18] 范龙振. 金融工程 [M]. 北京：高等教育出版社，2003；
[19] 威廉.F.夏普，戈登.J.亚历山大，杰弗里.V.贝利. 投资学（上）[M]. 北京：中国人民大学出版社，2002；
[20] 威廉.F.夏普，戈登.J.亚历山大，杰弗里.V.贝利. 投资学（下）[M]. 北京：中国人民大学出版社，2002；
[21] 范龙振，胡畏. 金融工程学 [M]. 上海：上海人民出版社，2003；
[22] 黄文虎，张玲. 可转换债券的定价策略 [J]. 湖南大学学报，2002，16(3)：121-123；
[23] 黄建兵. 中国的可转换债券与市场价格有效性研究 [J]. 系统工程理论方法应用，2002，11(1)：63-67；
[24] 张鸣. 可转换债券定价理论与案例研究 [J]. 上海财经大学学报，2001，3(5):29-35；
[25] 杨云. 可转换债券价格特征分析和定价方法研究 [R]. 上海申银万国证券研究所，2003；
[26] 郑振龙，林海. 中国可转换债券定价研究 [R]. 厦门大学金融学系，2003；
[27] 郑振龙，林海. 可转换债券发行公司的最优决策 [R]. 厦门大学金融学系，2003；
[28] 程小可. 基于期权理论的可转换债券定价研究—来自虹桥机场与鞍钢新轧转债的实证分析 [D]. 福建：福州大学，2000；
[29] 王楹. 可转换债券发展与定价研究 [D]. 上海：上海财经大学，2002；
[30] 魏镇江. 国内可转债更具投资价值 [N]. 中国证券报，2004-9-20.

附　录：各交易日模型定价和市场价格及转股平价对比表

日期	基础股价	BiTree	2FactorFD	Monte Carlo	可转债市场价格	转换平价
2003-7-1	6.46	117.32	116.38	118.10	116.71	114.54
2003-7-2	6.48	117.74	119.04	118.27	117.29	114.89
2003-7-3	6.63	119.82	121.17	119.66	118.12	117.55
2003-7-4	6.75	121.45	121.88	120.59	120.00	119.68
2003-7-7	6.79	122.06	124.55	121.14	121.50	120.39
2003-7-8	6.94	124.18	124.72	122.43	121.60	123.05
2003-7-9	6.95	124.33	123.92	122.56	121.02	123.23
2003-7-10	6.82	122.47	124.93	121.28	122.46	120.92
2003-7-11	6.99	124.97	124.58	122.66	123.30	123.94
2003-7-14	6.97	124.77	125.47	122.40	123.36	123.58
2003-7-15	7.02	125.70	125.64	122.82	123.29	124.47
2003-7-16	7.03	125.69	125.29	122.87	122.80	124.65
2003-7-17	7.01	125.49	122.58	122.73	120.33	124.29
2003-7-18	6.66	120.09	122.22	119.68	120.07	118.09
2003-7-21	6.64	119.85	120.80	119.62	119.07	117.73
2003-7-22	6.56	118.93	121.69	118.95	119.25	116.31
2003-7-23	6.61	119.57	121.87	119.27	119.38	117.20
2003-7-24	6.62	119.62	121.07	119.43	118.79	117.38
2003-7-25	6.49	117.84	120.89	118.52	118.30	115.07
2003-7-28	6.48	117.70	120.99	118.37	118.81	114.89
2003-7-29	6.57	119.06	120.46	119.28	118.72	116.49
2003-7-30	6.54	118.52	120.10	119.01	118.79	115.96
2003-7-31	6.52	118.31	118.86	118.81	118.36	115.60
2003-8-1	6.45	117.14	119.39	118.35	118.41	114.36
2003-8-4	6.48	117.67	120.01	118.72	118.26	114.89
2003-8-5	6.43	116.84	120.01	118.08	118.52	114.01
2003-8-6	6.43	116.90	117.38	118.04	117.24	114.01
2003-8-7	6.27	114.27	116.91	116.28	117.17	111.17
2003-8-8	6.24	113.73	116.42	116.04	116.97	110.64
2003-8-11	6.21	113.28	116.43	115.44	116.17	110.11
2003-8-12	6.21	113.29	116.88	115.39	116.12	110.11
2003-8-13	6.30	114.80	116.31	116.75	115.16	111.70
2003-8-14	6.20	113.09	115.53	115.39	114.83	109.93
2003-8-15	6.15	112.22	114.76	114.81	113.66	109.04
2003-8-18	6.10	111.29	113.98	114.18	113.65	108.16
2003-8-19	6.05	110.47	114.89	113.45	113.84	107.27
2003-8-20	6.11	111.45	114.15	114.30	113.48	108.33
2003-8-21	6.06	110.63	114.80	113.67	113.49	107.45

日期	基础股价	BiTree	2FactorFD	Monte Carlo	可转债市场价格	转换平价
2003-8-22	6.10	111.30	114.98	114.32	113.19	108.16
2003-8-25	6.11	111.65	114.69	114.90	113.05	108.33
2003-8-26	6.09	111.28	114.52	114.56	113.01	107.98
2003-8-27	6.08	111.13	114.55	113.99	113.11	107.80
2003-8-28	6.08	111.07	114.07	114.14	113.10	107.80
2003-8-29	6.05	110.62	114.69	113.76	113.08	107.27
2003-9-1	6.09	111.29	115.55	114.33	113.27	107.98
2003-9-2	6.21	113.23	115.64	116.14	113.18	110.11
2003-9-3	6.15	112.31	115.18	115.10	113.06	109.04
2003-9-4	6.12	111.79	115.27	114.94	113.11	108.51
2003-9-5	6.19	112.92	114.89	116.06	112.86	109.75
2003-9-8	6.10	111.48	114.22	114.61	112.53	108.16
2003-9-9	6.06	110.82	114.11	114.01	112.22	107.45
2003-9-10	6.05	110.63	114.13	113.83	112.22	107.27
2003-9-11	6.05	110.66	114.26	113.55	112.53	107.27
2003-9-12	6.06	110.79	113.70	113.78	111.07	107.45
2003-9-15	6.02	110.16	114.04	113.48	111.13	106.74
2003-9-16	6.04	110.33	113.45	113.53	110.88	107.09
2003-9-17	6.00	109.69	113.01	113.15	110.70	106.38
2003-9-18	5.97	109.22	112.56	113.06	110.59	105.85
2003-9-19	5.94	108.72	111.56	112.27	110.63	105.32
2003-9-22	5.87	107.59	110.66	111.48	110.00	104.08
2003-9-23	5.81	106.60	111.16	110.40	109.67	103.01
2003-9-24	5.84	107.26	111.44	111.37	109.56	103.55
2003-9-25	5.86	107.60	110.75	111.46	108.64	103.90
2003-9-26	5.81	106.83	111.14	111.02	107.99	103.01
2003-9-29	5.83	107.18	110.35	110.91	106.82	103.37
2003-9-30	5.77	106.29	111.21	110.53	107.24	102.30
2003-10-8	5.83	107.25	112.37	111.71	107.93	103.37
2003-10-9	5.91	108.51	111.87	112.31	108.31	104.79
2003-10-10	5.87	107.94	111.73	112.40	109.92	104.08
2003-10-13	6.00	109.96	112.54	114.01	110.81	106.38
2003-10-14	6.05	110.77	113.06	114.91	111.41	107.27
2003-10-15	6.09	111.40	112.43	115.43	111.45	107.98
2003-10-16	6.05	110.63	112.20	114.73	111.00	107.27
2003-10-17	6.03	110.29	113.70	114.49	111.85	106.91
2003-10-20	6.14	112.06	113.98	115.60	111.78	108.87
2003-10-21	6.16	112.35	114.41	115.90	112.13	109.22
2003-10-22	6.19	112.87	117.83	116.21	115.44	109.75
2003-10-23	6.42	116.50	116.32	119.23	114.82	113.83
2003-10-24	6.32	115.02	117.18	117.84	115.35	112.06

日期	基础股价	BiTree	2FactorFD	Monte Carlo	可转债市场价格	转换平价
2003-10-27	6.38	116.17	116.31	118.79	114.85	113.12
2003-10-28	6.32	115.15	117.83	118.11	116.02	112.06
2003-10-29	6.42	116.65	117.32	119.26	115.40	113.83
2003-10-30	6.39	116.40	116.44	118.30	115.42	113.30
2003-10-31	6.33	115.31	115.73	117.48	115.32	112.23
2003-11-3	6.35	115.62	116.65	118.12	116.17	112.59
2003-11-4	6.41	116.65	119.91	118.91	118.80	113.65
2003-11-5	6.65	120.26	119.60	121.11	117.32	117.91
2003-11-6	6.52	118.35	117.33	119.74	116.51	115.60
2003-11-7	6.39	116.36	117.45	118.71	116.22	113.30
2003-11-10	6.33	115.39	118.60	117.92	118.19	112.23
2003-11-11	6.52	118.37	119.49	120.06	119.29	115.60
2003-11-12	6.57	119.24	118.18	120.18	117.95	116.49
2003-11-13	6.44	117.16	120.02	118.99	119.48	114.18
2003-11-14	6.60	119.54	121.44	120.84	119.95	117.02
2003-11-17	6.68	120.46	119.84	121.62	119.86	118.44
2003-11-18	6.59	119.32	119.01	120.54	118.74	116.84
2003-11-19	6.43	116.81	119.07	118.81	118.63	114.01
2003-11-20	6.49	117.71	119.31	120.02	118.49	115.07
2003-11-21	6.56	118.75	119.84	120.12	118.76	116.31
2003-11-24	6.59	119.66	123.39	120.35	120.94	116.84
2003-11-25	6.79	122.62	122.68	122.40	121.23	120.39
2003-11-26	6.75	121.80	123.57	122.64	121.63	119.68
2003-11-27	6.80	122.64	122.86	122.97	122.23	120.57
2003-11-28	6.76	122.19	123.21	122.44	122.42	119.86
2003-12-1	6.78	122.55	125.34	122.63	123.85	120.21

致 谢

在这篇论文的写作过程中，从开始的选题，框架组织到最后文章的完成，始终得到了我的导师周健副教授的指导与支持，在材料、写作重点和方向及初稿的修订中，周老师都给了我十分中肯和有价值的意见，让我顺利完成了论文的写作。在此特别向周老师表示衷心的感谢！

我还要感谢统计学系的全体老师和各位同学，7 年来我上过每一位老师开设的各项课程，得到了你们的细心指教和帮助，同学之间的相互鼓励和关怀也让平日的学习生活更加充满动力。这期间我不仅学到了全面的统计学知识，也体会到了师生大家庭的温暖。

在复旦大学管理学院统计学系的学习生活将成为我一生难忘的回忆！

论文独创性声明

本论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。论文中除了特别加以标注和致谢的地方外，不包含其他人或其它机构已经发表或撰写过的研究成果。其他同志对本研究的启发和所做的贡献均已在论文中作了明确的声明并表示了谢意。

作者签名：蔡雅　　日期：2005-5-8

论文使用授权声明

本人完全了解复旦大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。保密的论文在解密后遵守此规定。

作者签名：蔡雅　　导师签名：　　日期：2005-5-8