

珠海市第二中学 2020—2021 学年高一第一学期期中考试

数学试题

命题：陈德瑞 审题：刘诗彪

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ，集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{-1, 0, 3\}$ ，则 $(C_U A) \cap B = (\quad)$

- A. $\{-1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 3\}$

2. 下列各式中，正确的是 ()

- ① $\{0\} \in \{0, 1, 2\}$; ② $\{0, 1, 2\} \subseteq \{2, 1, 0\}$; ③ $\emptyset \subseteq \{0, 1, 2\}$; ④ $\emptyset = \{0\}$; ⑤ $\{0, 1\} = \{(0, 1)\}$; ⑥ $0 = \{0\}$.

- A. ①② B. ②⑤ C. ④⑥ D. ②③

3. 若 $a, b, c \in R$ ，且 $a < b$ ，则下列不等式一定成立的是 ()

- A. $a + c \leq b - c$ B. $(a - b)c^2 \leq 0$ C. $\frac{c^2}{a - b} < 0$ D. $ac < bc$

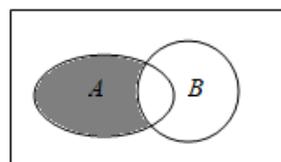
4. 下列命题中正确的是 ()

- A. 当 $\alpha = 0$ 时，函数 $y = x^\alpha$ 的图象是一条直线
 B. 幂函数的图象不可能出现在第四象限
 C. 幂函数的图象都经过 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$
 D. 若幂函数 $y = x^\alpha$ 的图像关于原点对称，则 $y = x^\alpha$ 是定义域上的减函数

5. 已知全集 $U = R$ ，集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{y \mid y = \sqrt{x^2 - 3x}\}$ ，

则下图中阴影部分表示的集合为 ()

- A. $\{-1, 1\}$ B. $\{1, 2\}$
 C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-1, -2\}$



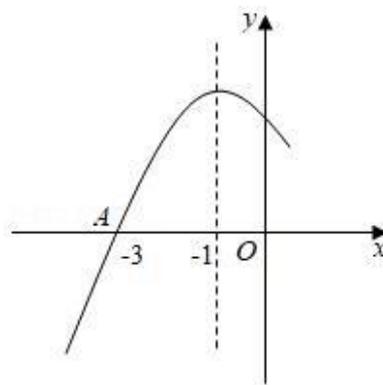
6. 如图是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象的一部分，图象过点

$A(-3, 0)$ ，对称轴为 $x = -1$ 。给出下面四个结论：

- ① $b^2 > 4ac$; ② $2a - b = 1$;
 ③ $a - b + c = 0$; ④ 若 $y > 0$ ，则 $x \in (-3, 1)$ 。

其中正确的是 ()

- A. ①④ B. ②④ C. ①③ D. ①②③



7. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x) + g(x) = a^x - a^{-x} + 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 若

$g(-1) = a$, 则 $f(-2)$ 等于 ()

- A. 2 B. $\frac{15}{4}$ C. $-\frac{15}{4}$ D. $-a^2$

8. 已知 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x+a, & x > -2 \\ (\frac{1}{2})^x & x \leq -2 \end{cases}$ 且对 $\forall x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(3, \frac{10}{3}]$ B. $(-\infty, \frac{10}{3})$ C. $(3, +\infty)$ D. $[3, \frac{10}{3})$

二、多选题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求.

全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. 下列不等式中可以作为 $x^2 < 1$ 的一个充分不必要条件的是 ()

- A. $0 < x < 1$ B. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ C. $-1 < x < 0$ D. $-1 < x < 1$

10. 在下列命题中, 真命题是 ()

A. 命题 “ $\exists x_0 \in R, x_0 + \frac{1}{x_0} \geq 2$ ” 的否定形式是: “ $\forall x \in R, x + \frac{1}{x} < 2$ ”.

B. $\exists x \in R, x^2 + x + 1 = 0$. C. $\exists x, y \in Z$, 使得 $3x - 2y = 10$. D. $\forall x \in R, x^2 > |x|$.

11. 已知函数 $y = \frac{x^2 + x + 1}{x} (\frac{1}{3} \leq x < 2)$, 则该函数 ()

- A. 最小值为 3 B. 最大值为 $\frac{7}{2}$ C. 没有最小值 D. 在区间 $(1, 2)$ 上是增函数

12. 在实数 R 中定义一种运算 “ $*$ ”, 使其具有下列性质:

(1) 对任意 $a, b \in R$, $a * b = b * a$.

(2) 对任意 $a \in R$, $a * 0 = a$.

(3) 对任意 $a, b, c \in R$, $(a * b) * c = c * (ab) + (a * c) + (b * c) - 2c$.

则函数 $f(x) = x * \frac{x}{2}$ 可以在下列哪些区间上是增函数 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ B. $[-\frac{3}{2}, +\infty)$ C. $(-\frac{3}{2}, +\infty)$ D. $(-\frac{1}{2}, 3]$

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 化简： $\sqrt{\frac{\pi^0 \cdot b^{\frac{1}{4}}}{a} \sqrt{a^2 b^{-\frac{1}{2}}}}$ ($a, b > 0$) _____.

14. 函数 $f(x) = \sqrt{-3x^2 + x + 2}$ 的定义域为_____.

15. 已知 $A = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{1}{x} \right\}$, $B = \left\{ (x, y) \mid \text{幂函数 } y = mx^3 \right\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

16. 设 $x > 0$, $y > 0$, $2x + y = 3$, 则 $\frac{(x-2)(y-4)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为_____.

四、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17. (10 分) 已知全集 $U = \{x \mid 0 \leq x \leq 10\}$, 集合 $A = \{x \mid 1 < x < 3\}$, 集合 $B = \{x \mid 2 \leq x \leq 7\}$. 分别求:

$$A \cup B; A \cap B; (C_u A) \cap B.$$

18. (12 分) 已知定义在 R 上的奇函数, $f(x) = \frac{a^x - b}{a^x + 1}$ ($a > 0, a \neq 1, b \in R$), 且 $f(-1) = -\frac{1}{3}$.

(I) 求 a 和 b 的值;

(II) 用定义证明函数 $f(x)$ 的单调性.

19. (12 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数, 对任意的 $x, y \in R$, 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

且当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, $f(-1) = 2$.

(I) 求证: $f(x)$ 是奇函数;

(II) 求证: $f(x)$ 在 R 上是减函数;

(III) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最值.

20. (12分)已知函数 $f(x) = x - \frac{a}{x} (a > 0)$.

(I) 分别指出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 上的单调性 (不需要证明);

(II) 若对 $\forall x \in [1, +\infty)$, 不等式 $f(x) \geq 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(III) 若 $\exists x \in [1, 3]$, 使得不等式 $f(x) \geq 2$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

21. (12分)已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2-x)$, 且 $f(1) = 7$, $f(3) = 3$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(II) 是否存在实数 m , 使得二次函数 $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上的图象恒在直线 $y = mx + 1$ 的上方?

若存在, 求出实数 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

22. (12分)已知函数 $f(x) = x + \frac{t}{x}$ 具有以下性质: 如果常数 $t > 0$, 那么函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{t})$ 上是减函数, 在区间 $[\sqrt{t}, +\infty)$ 上是增函数.

(I) 已知函数 $g(x) = \frac{4x^2 - 12x - 3}{2x + 1}$, $x \in [0, 1]$, 求函数 $g(x)$ 的值域.

(II) 对于 (I) 中的函数 $g(x)$ 和函数 $h(x) = -x - 2a$, 若对任意的 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_2 \in [0, 1]$, 使得 $h(x_2) = g(x_1)$ 成立, 求实数 a 的值.