

中文摘要

本文主要研究了二元极值分布的定义、分布函数、吸引场以及谱测度的估计量. 第一章介绍了极值统计发展的历史和经典的极值理论; 第二章介绍了二元极值分布函数的性质, 研究了如何利用指数测度与谱测度推导二元极值分布函数的具体形式, 介绍了二元分布函数属于极值吸引场的充要条件, 并做了相关证明; 第三章介绍了相关结构函数定义及作用, 给出了一种谱测度的估计方法并做了相应的统计分析.

关键词: 二元极值分布, 吸引场, 指数测度, 谱测度, 相关结构函数.

Abstract

In this dissertation, the definition of bivariate extreme value distribution, the distribution function, domain of attraction and the estimator of spectral measure are learned. Chapter 1 introduces the history of extreme value statistics developed and the classical extreme value theory. In chapter 2, the characters of bivariate extreme value distribution function are introduced and the specific forms of the distribution function are calculated using the exponent measure and the spectral measure, A sufficient and necessary condition of a distribution function be in its domain of attraction is found and proved, some propositions are proven, too. In chapter 3, the definition and use of Copula is introduced, an estimator of the spectral measure is given and some statistical analysis are made.

Key Words: Bivariate Extreme Value Distribution, Domain of Attraction, The Exponent Measure, The Spectral Measure, The Copula.

第 1 章 经典的极值理论

1.1 极值理论的历史发展与应用

在统计文献中,最早讨论极值是1824年J.B.J.Fourier的一篇文章,他认为与正态分布均值偏离了二个标准差的平方根的三倍的概率大约为五万分之一,即 $P\{|X - \mu| > 3\sqrt{2}\sigma\} \approx 1/50000$,因此可能完全忽略这类观测.类似地,按通常的 3σ 原则,认为正态样本的有效范围应在均值正负三个标准差内.实际上,这些说法都不够完善.1877年Helmert指出,这类问题的提法应该与样本量有关.因为当样本量趋于无穷时,有更多的机会使样本最大值出现在分布的尾部,正态总体的样本最大值也应该趋于无穷.因此,从理论上说,样本最大值与总体均值的距离大于任一固定常数的事件终究要发生. 3σ 原则对小样本来说有点保守,而对大样本又太宽松.极值理论就是说明极值大小与样本量之间关系的理论.

极值的近代理论开始于德国.1922年,L.von Bortkiewicz研究了正态分布的样本极差[1],这个问题的意义在于告诉大家,来自正态分布的样本最大值是一个新的随机变量,具有新的分布,因此Bortkiewicz是第一个明确提出极值问题的统计学家.1923年,德国的R. von Mises研究了样本最大值的期望[2],这是研究正态样本极值的渐进分布的开始.极值理论的真正发展是E. L. Dodd在同年的工作,他首先研究了一般分布的样本最大值[3].最重要的结果是1925年L. H. C. Tippett的正态总体各种样本量的最大值及相应概率表、样本平均极差表[4].1927年,M. Fréchet发表了第一篇关于最大值的渐进分布的论文[5],指出来自不同分布,但有某种共同性质的最大值可以有相同的渐进分布,还提出了最大值稳定原理.但他的文章底分布的类型不常用,因而没有得到应有的重视.1928年,R. A.

Fisher与L.H.C. Tippett发表的文章[6], 现在认为是极值分布渐进原理的基础, 他们不仅与Fréchet独立地找到了Fréchet分布, 而且还构造了另外二个渐进分布, 即极值类型定理. 在这篇文章中, 他们第一次描述了正态样本的最大值分布, 指出收敛速度是极其缓慢的, 这就是以往研究中遇到困难的原因.

1936年, R. von Mises提出了最大次序统计量收敛于极值分布的简单有用的充分条件[7]. 1943年B. Gnedenko给出了类型定理的严格证明[10], 建立了严格的极值理论, 给出了极端次序统计量收敛的充分必要条件. 最后, 由De Haan进一步研究了Gnedenko的工作, 将这些结果联系起来, 完全解决了吸引场问题[14][8]. 1987年S.I. Resnick研究了独立同分布随机向量, 给出了极端次序统计量的联合分布[11], 多元极值分布第一次出现在本书中.

极值理论是数学在近代工程、环境及风险管理问题应用中取得的最成功的重要例子. 近几十年来, 极值理论已发展成为应用统计中一种非常重要的统计方法, 在许多领域都有广泛的应用.

在金融市场, 极端事件本身就非常令人关注. 近年来, 国际上金融危机不断发生: 1987年的较大范围的股市崩盘, 1995年2月26日具有233年悠久历史的英国Barings银行宣布破产, 美国Orange县政府的破产, 日本大和银行巨额交易亏损等. 特别是1997年以来的亚洲金融风暴使许多金融机构陷入困境, 对我国也有某些直接影响, 国内金融界对金融风险有深刻的体会, 关于金融风险的研究也正在深入. 风险管理的基础和核心是风险测量, 对金融市场, 就是研究由于市场因子的不利变化而导致金融资产价值损失的大小. 现在VaR(Value at Risk)及极值理论已成为主流方法, VaR是一种能全面测量复杂证券组合的市场风险的方法. 简单的说, VaR的概率意义即是损益分布的分位点, 估计处于分布尾部的高分位点正是极值理论的最显著特点.

推断性统计是研究如何有效地从已经得到的受随机性影响的观测数据中提取出尽可能可靠、精确的信息. 极值统计则是研究随机变量, 或一个过程的取值特别大或特别小情况的随机性质. 举一个例子, 上海地处长江入海口, 3.2m以下的低洼地面积占全市面积的五分之一以上, 黄浦江流经市中心, 上海市又频受台风侵袭, 必需修建防汛墙以抵御洪水对上海市的侵袭. 那么防汛墙应修多高比较合适呢? 1990年上海提出的远景防汛标准应为抗御万年一遇的高水位. 这是一个目标, 在此目标下, 需要估计黄浦公园和吴淞站的相应水位最高能达到多少. 这里, 我们关心的不是长江、黄浦江的日常水位, 而是汛期的最高水位. 吴淞站和黄浦公园站建设时间不长, 实际观测资料都不足一百年, 如何由这些历史相对较短的资料估计未来较长时间内上海可能遇到的最高水位, 这是极值统计应该研究的问题. 假定 X_1, X_2, \dots 是吴淞站记录的黄浦江每小时的水位高度, 则

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

为 n 个观测期最高水位高度. 在 X_1, X_2, \dots 是独立同分布随机变量假定下, 如果我们知道 X_i 的分布和 n , 那么 M_n 的分布就能精确地计算出来:

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x) &= P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x) \dots P(X_n \leq x) \\ &= F^n(x) \end{aligned}$$

这里, $F(x)$ 是 X_i 的分布函数. 但实际上 X_i 的分布并不知道, 因此就不可能精确计算 M_n 的分布. 然而, 在相当广泛的条件下, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 经适当规范化, 可以得到 M_n 的渐进分布. 对于较大的 n , 用这个渐进分布作为 M_n 分布的近似, 称为经典模型.

1.2 一元极值简介

定义1.2.1. 设 X_1, X_2, \dots 是独立同分布随机变量序列, 分布函数为 $F(x)$, 如果存在常数列 $\{a_n > 0\}$ 和 $\{b_n\}$, 使得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) - b_n}{a_n} \leq x \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) \\ &= G(x), x \in C(G). \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

成立, 则非退化的分布函数 G 称为极值分布. 其中 $C(G)$ 表示分布函数 G 的连续点全体.

定理1.2.1. (Fisher and Tippet(1929), Gnedenko(1943))([10][6])

极值分布函数 G 为以下形式:

$$G_\gamma(x) = \exp\{-(1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\}, \quad 1 + \gamma x > 0, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (1.2.2)$$

根据 γ 的不同取值 $G_\gamma(x)$ 可分为以下三种类型([9]):

$$\text{Fréchet: } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0, \end{cases} \quad \alpha = \frac{1}{\gamma} > 0.$$

$$\text{Weibull: } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\}, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad \alpha = -\frac{1}{\gamma} > 0.$$

$$\text{Gumbel: } G_0(x) = \exp\{-e^{-x}\}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad \gamma = 0.$$

以上三种分布统称为极值分布. 当 $\alpha = 1$ 时, $\Phi_\alpha(x; 1), \Psi_\alpha(x; 1)$ 分别称为标准 Fréchet 分布和标准 Weibull 分布.

对非减函数 f , 定义 f 的左连续反函数 f^{\leftarrow} 如下:

$$f^{\leftarrow}(x) := \inf\{y : f(y) \geq x\}.$$

设 F 是分布函数, 记 $U(t) := F^{\leftarrow}(1 - \frac{1}{t}), t > 1; D_{\gamma}(x) := G_{\gamma}^{\leftarrow}(e^{-\frac{1}{x}})$.

定理1.2.2. 对 $\gamma \in \mathbb{R}$, 下面的几种说法等价([8]):

1. 存在实常数 $a_n > 0$ 和 b_n 使得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G_{\gamma}(x) = \exp\{-(1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\}, \quad (1.2.3)$$

其中 $x, 1 + \gamma x > 0$.

2. 存在正函数 a , 使得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx) - U(t)}{a(t)} = D_{\gamma}(x) = \frac{x^{\gamma} - 1}{\gamma}, \quad (1.2.4)$$

其中 $x > 0$. 当 $\gamma = 0$ 时, 上式右端等于 $\log x$.

3. 存在正函数 a , 使得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t(1 - F(a(t)x + U(t))) = -\log G_{\gamma}(x) = (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (1.2.5)$$

其中 $x \in \mathbb{R}, 1 + \gamma x > 0$.

4. 存在正函数 f , 使得:

$$\lim_{t \uparrow x^*} \frac{1 - F(t + xf(t))}{1 - F(t)} = (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (1.2.6)$$

其中 $x \in \mathbb{R}, 1 + \gamma x > 0, x^* = \sup\{x : F(x) < 1\}$.

定义1.2.2. 如果(1.2.3)式对某个 $\gamma \in \mathbb{R}$ 成立, 称分布函数 F 属于 G_{γ} 的吸引场, 记为: $F \in \mathcal{D}(G_{\gamma})$.

定义1.2.3. 称终极为正实值的Borel可测函数 f 在 ∞ 处是正规变化的, 如果

对任意 $x > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.2.7)$$

此时称 α 为正规变化函数的指标, 记 $f \in Ru(\alpha)$.

记 $x^* = \sup\{x : F(x) < 1\}$, 称为 F 的右端点. 由文献[8]有如下基本结论:

定理1.2.3. 分布函数 F 属于极值分布 G_γ 的吸引场当且仅当:

1. 对 $\gamma > 0$, 有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad x > 0. \quad (1.2.8)$$

即函数 $1 - F$ 是正规变化函数, 指标为 $-\frac{1}{\gamma}$.

2. 对 $\gamma > 0$, x^* 是有限的, 且

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - F(x^* - tx)}{1 - F(x^* - t)} = x^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad x > 0. \quad (1.2.9)$$

3. 对 $\gamma > 0$, x^* 可有限也可无限, 且

$$\lim_{t \uparrow x^*} \frac{1 - F(t + xf(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.2.10)$$

其中 f 为一个适当的正函数. 如果(1.2.10)对某个 f 成立, 这时对 $\forall t < x^*$ 有:

$\int_t^{x^*} (1 - F(s)) ds < \infty$, 且可取

$$f(t) = \frac{\int_t^{x^*} (1 - F(s)) ds}{1 - F(t)}, \quad \forall t < x^*.$$

定义1.2.4. 对于给定的分布函数 $F(x)$, 如果存在序列 $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$, 使得

$$F^n(a_n x + b_n) = F(x),$$

则称分布函数 $F(x)$ 是最大值稳定分布.

对于极值分布 $G_\gamma(x) = \exp\{-(1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\}$, 取 $a_n = n^\gamma, b_n = \frac{n^\gamma - 1}{\gamma}$, 则

$$\begin{aligned} G_\gamma^n(a_n x + b_n) &= \exp\left\{-n\left(1 + \gamma\left(n^\gamma x + \frac{n^\gamma - 1}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right)\right\} \\ &= \exp\{-n(1 + n^\gamma \gamma x + n^\gamma - 1)^{-\frac{1}{\gamma}}\} \\ &= \exp\{-n(n^\gamma(\gamma x + 1))^{-\frac{1}{\gamma}}\} \\ &= \exp\{-(\gamma x + 1)^{-\frac{1}{\gamma}}\} \\ &= G_\gamma(x), \end{aligned}$$

因此极值分布 $G_\gamma(x)$ 是最大值稳定分布.

对于Gumbel分布, 取 $a_n = 1, b_n = \log n$, 则 $G_0^n(x + \log n) = \exp\{-ne^{(-x - \log n)}\} = \exp\{-ne^{-x}n^{-1}\} = G_0(x)$, 所以Gumbel分布是最大值稳定分布.

引理1.2.1. F 是最大值稳定分布, 则与 F 同类型的分布, 即 $\forall a > 0, b \in \mathbb{R}, H(x) = F(ax + b)$ 也是最大值稳定分布.

证明 对序列 $a_n > 0, b_n$,

$$\begin{aligned} H^n(a_n x + b_n) &= F^n(a(a_n x + b_n) + b) \\ &= F^n(a_n(ax + b) + ab_n - ba_n) \\ &= F(ax + b) \\ &= H(x). \end{aligned}$$

因此, $H(x)$ 也是最大值稳定分布.

所以, Fréchet分布和Weibull分布都是最大值稳定分布. 事实上, 分别取 $a_n = n^{1/\alpha}$, $b_n = 0$ 和 $a_n = n^{-1/\alpha}$, $b_n = 0$, 不难验证

$$\Phi_\alpha^n(n^{1/\alpha}x) = \Phi_\alpha(x), \quad \Psi_\alpha^n(n^{-1/\alpha}x) = \Psi_\alpha(x).$$

由文献[22]定理3.2.2可知: 一个分布函数 $F(x)$ 是最大值稳定分布, 当且仅当 $F(x)$ 是上述三种类型的极值分布之一.

第 2 章 二元极值分布函数

2.1 二元极值的定义与性质

与一元极值不同,二元极值的定义方法一般有两种.一种方法是按各分量同时达到最大值来定义二元极值,然后通过规范化分量最大值的渐近联合分布来获得二元极值分布;另一种方法是考虑基于至少在一个分量上达到最大的观测值的极限点过程.本文主要讨论第一种情况.在文献[8]中作者考虑了如下定义:

定义2.1.1. 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ 是独立同分布随机向量,分布函数为 F .若存在一列常数 $a_n, c_n > 0, b_n, d_n \in \mathbb{R}$,使得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) - b_n}{a_n} \leq x, \frac{\max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) - d_n}{c_n} \leq y \right\} \\ = G(x, y), \quad \forall (x, y) \in C(G). \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

其中 $G(x, y)$ 是具有非退化边缘分布的二元分布函数, $C(G)$ 表示所有 G 的连续点.则极限分布函数 G 称为二元极值分布.

那么, $G(x, y)$ 是怎样的分布函数呢?

由(2.1.1)式可得出两个一维边缘分布的收敛性.即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) - b_n}{a_n} \leq x \right\} = G(x, \infty), \quad (2.1.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) - d_n}{c_n} \leq y \right\} = G(\infty, y). \quad (2.1.3)$$

所以,由定理1.2.1,对常数列 a_n, c_n, b_n, d_n 存在 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$,使得

$$G(x, \infty) = \exp(-(1 + \gamma_1 x)^{-\frac{1}{\gamma_1}}), \quad (2.1.4)$$

$$G(\infty, y) = \exp(-(1 + \gamma_2 y)^{-\frac{1}{\gamma_2}}). \quad (2.1.5)$$

函数 G 及其两个边缘分布都是连续的.

定理2.1.1. 设存在一列实常数 $a_n, c_n > 0, b_n, d_n$,使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n, c_n y + d_n) = G(x, y),$$

G 的边缘分布标准化如(2.1.4)和(2.1.5),则对 $F_1(x) := F(x, \infty), F_2(y) := F(\infty, y)$,和 $U_i(x) = F_i^{-1}(1 - \frac{1}{x}), i = 1, 2$,有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(U_1(nx), U_2(ny)) = G_0(x, y), \quad x, y > 0. \quad (2.1.6)$$

其中, $G_0(x, y) := G(\frac{x^{\gamma_1}-1}{\gamma_1}, \frac{y^{\gamma_2}-1}{\gamma_2})$,且 γ_1, γ_2 为(2.1.2)-(2.1.5)中的边缘极值指标.

证明 设 $F_i(i = 1, 2)$ 是 F 的边缘分布函数,则存在正函数 $a_i(t), i = 1, 2$,使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U_i(tx) - U_i(t)}{a_i(t)} = \frac{x^{\gamma_i} - 1}{\gamma_i}, \quad (2.1.7)$$

且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a_i(tx)}{a_i(t)} = x^{\gamma_i}, \quad x > 0.$$

而且(2.1.2)-(2.1.5)对以下 a_n, c_n, b_n, d_n 成立:

$$b_n := U_1([n]), \quad d_n := U_2([n]), \quad a_n := a_1([n]), \quad c_n := a_2([n])$$

故(2.1.7)式又可写为:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_1(nx) - b_n}{a_n} &= \frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_2(ny) - d_n}{c_n} &= \frac{y^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2}.\end{aligned}\quad (2.1.8)$$

现在我们回到(2.1.1)式, 将(2.1.1)写为分布函数 F 形式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n, c_n y + d_n) = G(x, y). \quad (2.1.9)$$

特别地, 如果 $x_n \rightarrow \mu, y_n \rightarrow \nu$, 则由 G 的连续性和 F 的单调性, 可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x_n + b_n, c_n y_n + d_n) = G(\mu, \nu), \quad (2.1.10)$$

令

$$x_n := \frac{U_1(nx) - b_n}{a_n}, \quad y_n := \frac{U_2(ny) - d_n}{c_n}, \quad x, y > 0.$$

利用(2.1.8)和(2.1.10)式可得出:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(U_1(nx), U_2(ny)) = G\left(\frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \frac{y^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2}\right).$$

注2.1.1. 记

$$W_n := \max\left(\frac{1}{1 - F_1(X_1)}, \dots, \frac{1}{1 - F_1(X_n)}\right);$$

$$V_n := \max\left(\frac{1}{1 - F_1(Y_1)}, \dots, \frac{1}{1 - F_1(Y_n)}\right).$$

倘若 F 有连续的边缘分布 F_1 和 F_2 , 则(2.1.6)式等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(W_n \leq nx, V_n \leq ny) = G_0(x, y), \quad x, y > 0.$$

证明 上式左端等价于

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq F_1^{-1} \left(1 - \frac{1}{nx} \right), \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leq F_2^{-1} \left(1 - \frac{1}{ny} \right) \right\} \\
 = & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq U_1(nx), \\
 & \qquad \qquad \qquad \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leq U_2(ny) \} \\
 = & \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(U_1(nx), U_2(ny)) \\
 = & G_0(x, y)
 \end{aligned}$$

由此可看出, 如果将边缘分布标准化, 即: $F(x) = 1 - \frac{1}{x}, x \geq 1$, 则一个简化的极限关系成立了. 这意味着, 在确定极限分布的问题中, 边缘分布已不再起决定作用.

推论2.1.1. 对任意满足 $0 < G_0(x, y) < 1$ 的 (x, y) , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \{ 1 - F(U_1(nx), U_2(ny)) \} = -\log G_0(x, y). \quad (2.1.11)$$

证明 对(2.1.6)式两边同时取对数, 可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -n \log \{ F(U_1(nx), U_2(ny)) \} = -\log G_0(x, y). \quad (2.1.12)$$

由于 $F(U_1(nx), U_2(ny)) \rightarrow 1$, 因此

$$\frac{-\log F(U_1(nx), U_2(ny))}{1 - F(U_1(nx), U_2(ny))} \rightarrow 1$$

即 $-\log F(U_1(nx), U_2(ny))$ 与 $1 - F(U_1(nx), U_2(ny))$ 等价, 因此由(2.1.11)式可得结论成立.

我们也可得到此推论的扩展:

推论2.1.2. 对任意 (x, y) , 满足 $0 < G_0(x, y) < 1$, 都有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t\{1 - F(U_1(tx), U_2(ty))\} = -\log G_0(x, y), \quad (2.1.13)$$

其中 t 为实数.

证明 由定理1.2.2(3)利用以下不等式

$$\begin{aligned} & [t]\{1 - F(U_1([t]x), U_2([t]y))\} \leq t\{1 - F(U_1(tx), U_2(ty))\} \\ & \leq [t]\left(1 + \frac{1}{[t]}\right)\{1 - F(U_1([t]x(1 + \frac{1}{[t]})), U_2([t]y(1 + \frac{1}{[t]})))\}. \end{aligned}$$

以及(2.1.11)式可得结论.

2.2 指数测度

取 $a > 0$, 定义:

$$H_{n,a}(x, y) := 1 - \frac{1 - F(U_1(nx), U_2(ny))}{1 - F(U_1(na), U_2(na))},$$

其中, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 := [0, \infty)^2$ 且 $\max(x, y) > a, n = 1, 2, \dots$.

易知 $H_{n,a}$ 是如下概率测度 $P_{n,a}$ 的分布函数:

$$P_{n,a}(X < x, Y < y) = H_{n,a}(x, y), \quad (2.2.1)$$

对所有的 n , 概率测度 $P_{n,a}$ 定义在 $\mathbb{R}_+^2 \setminus [0, a]^2$ 上. 由(2.1.11)式可知: 对所有满足 $\max(x, y) > a$ 的 x, y 存在 $H_a(x, y)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_{n,a}(x, y) = H_a(x, y).$$

由文献[13]中定理29.1可知 H_a 为某概率测度 P_a 的分布函数,而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,a}(A) = P_a(A),$$

其中Borel集 $A \subset \mathbb{R}_+^2 \setminus [0, a]^2$, $P_a(\partial A) = 0$.

定理2.2.1. 设 F 和 G_0 是满足(2.1.1)的概率分布函数,即:对 $x, y > 0$ 和 $0 < G_0(x, y) < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\{1 - F(U_1(nx), U_2(ny))\} = -\log G_0(x, y).$$

则存在定义在所有Borel集 $A \subset \mathbb{R}_+^2$ 上的集函数 ν, ν_1, ν_2, \dots ,使得:

1.

$$\nu_n\{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s > x \text{ 或 } t > y\} = n\{1 - F(U_1(nx), U_2(ny))\},$$

$$\nu\{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s > x \text{ 或 } t > y\} = -\log G_0(x, y).$$

2. 对所有 $a > 0$ 集函数 ν, ν_1, ν_2, \dots 是定义在 $\mathbb{R}_+^2 \setminus [0, a]^2$ 上的有限测度.

3. 对每个满足 $\inf_{(x,y) \in A} \max(x, y) > 0$ 且 $\nu(\partial A) = 0$ 的Borel集 $A \subset \mathbb{R}_+^2$,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A) = \nu(A).$$

证明 令

$$\nu_n := n\{1 - F(U_1(na), U_2(na))\}P_{n,a}$$

则 ν_n 为 $\mathbb{R}_+^2 \setminus [0, a]^2$ 上的一个测度,不依赖于 a ,而且对所有Borel集 $A \subset \mathbb{R}_+^2 \setminus [0, a]^2$,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A) = \nu(A),$$

其中

$$\nu := -\log G_0(a, a)P_a.$$

由于 $a > 0$ 是任意的, $\nu_n(A)$ 和 $\nu(A)$ 定义在所有的Borel集 A 上, 且 A 满足

$$\inf_{(x,y) \in A} \max(x, y) > 0. \quad (2.2.2)$$

因此对所有满足 $\max(x, y) > a$ 的 x, y , 利用 ν_n 和 $H_{n,a}$ 的定义以及(2.2.1)式, 有

$$\begin{aligned} & \nu_n\{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s > x \text{ 或 } t > y\} \\ &= n\{1 - F(U_1(na), U_2(na))\}P_{n,a}\{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s > x \text{ 或 } t > y\} \\ &= n\{1 - F(U_1(na), U_2(na))\}(1 - H_{n,a}(x, y)) \\ &= n\{1 - F(U_1(nx), U_2(ny))\}, \\ & \nu\{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s > x \text{ 或 } t > y\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n\{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s > x \text{ 或 } t > y\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\{1 - F(U_1(nx), U_2(ny))\} \\ &= -\log G_0(x, y), \end{aligned}$$

即得:

$$\nu_n\{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s > x \text{ 或 } t > y\} = n\{1 - F(U_1(nx), U_2(ny))\}, \quad (2.2.3)$$

$$\nu\{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s > x \text{ 或 } t > y\} = -\log G_0(x, y). \quad (2.2.4)$$

最后, 对所有满足(2.2.2)式的Borel集 A 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A) = \nu(A).$$

定义2.2.1. 定理2.2.1中的测度 ν 称为极值分布 G_0 的指数测度. 有

$$G_0(x, y) = \exp(-\nu(A_{x,y})), \quad (2.2.5)$$

其中,

$$A_{x,y} := \{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s > x \text{ 或 } t > y\}. \quad (2.2.6)$$

注2.2.1. (2.2.5)式并不对所有的Borel集 $A_{x,y}$ 成立.

指数测度的一个显著性质是下面的齐次性关系.

定理2.2.2. ([8]) 对任一Borel集 $A \subset \mathbb{R}_+^2$, $\inf_{(x,y) \in A} \max(x, y) > 0$, $\nu(\partial A) = 0$, $a > 0$, 有

$$\nu(aA) = a^{-1}\nu(A), \quad (2.2.7)$$

其中 $aA = \{x : x = ab, b \in A\}$.

证明 对某个 $a > 0$, 在(2.1.13)式中令 $t_n = na$, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\{1 - F(U_1(nax), U_2(nay))\} = -a^{-1} \log G_0(x, y)$$

另一方面, 直接利用(2.1.11)式又可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\{1 - F(U_1(nax), U_2(nay))\} = -\log G_0(ax, ay)$$

因此,

$$\nu(aA) = -\log G_0(ax, ay) = -a^{-1} \log G_0(x, y) = a^{-1}\nu(A). \quad (2.2.8)$$

此定理对所有(2.2.6)式定义的集合 $A_{x,y}$ 成立.

注2.2.2. 由(2.2.7)易知:

$$G_0(ax, ay) = G_0^{\frac{1}{a}}(x, y), \quad a, x, y > 0. \quad (2.2.9)$$

事实上, $G_0(ax, ay) = -\exp\{\nu(aA_{x,y})\} = -\exp\{a^{-1}\nu(A_{x,y})\} = G_0^{\frac{1}{a}}(x, y)$.

下面的定理是指数测度的一个直观的应用.

定理2.2.3. 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ 是独立同分布的随机向量, 分布函数为 F . 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbf{P}\left\{\left(1 + \gamma_1 \frac{X - b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} > x \text{ 或 } \left(1 + \gamma_2 \frac{Y - d_n}{c_n}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}} > y\right\} = -\log G_0(x, y),$$

其中 a_n, b_n, c_n, d_n 同(2.1.8)式.

证明

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbf{P}\left\{\left(1 + \gamma_1 \frac{X - b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}} > x \text{ 或 } \left(1 + \gamma_2 \frac{Y - d_n}{c_n}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}} > y\right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbf{P}\left\{X > a_n \frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1} + b_n \text{ 或 } Y > c_n \frac{y^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2} + d_n\right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\left\{1 - F\left(a_n \frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1} + b_n, c_n \frac{y^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2} + d_n\right)\right\} \\ & \text{由(2.1.8)式及局部一致收敛性} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\left\{1 - F\left(a_n \frac{U_1(nx) - b_n}{a_n} + b_n, c_n \frac{U_2(ny) - d_n}{c_n} + d_n\right)\right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\{1 - F(U_1(nx), U_2(ny))\} \\ &= -\log G_0(x, y). \end{aligned}$$

令

$$Q := \{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s, t \geq 0, \max(s, t) = 1\},$$

更一般地, 对每个Borel集 $A \subset \bar{Q} := (0, \infty] \times Q$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbf{P} \left\{ \left(\left(1 + \gamma_1 \frac{X - b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \left(1 + \gamma_2 \frac{Y - d_n}{c_n}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}} \right) \in A \right\} = \nu(A).$$

定义点过程 N_n : 对每个Borel集 $B \in \mathbb{R}_+ \times Q$

$$N_n(B) = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{(i/n, (1+\gamma_1(X_i-b_n)/a_n)^{1/\gamma_1}, (1+\gamma_2(Y_i-d_n)/c_n)^{1/\gamma_2}) \in B\}}. \quad (2.2.10)$$

在相同的空间上定义Poisson点过程 N , 有均值测度 $\lambda \times \nu$, λ 为Lebesgue测度, ν 为定理2.2.1中的测度.

定理2.2.4. ([8]) N_n 依分布收敛于 N , 即对Borel集 $B_1, B_2, \dots, B_r \in \mathbb{R}_+ \times Q$, 且 $(\lambda \times \nu)(\partial B_i) = 0, i = 1, 2, \dots, r$,

$$(N_n(B_1), \dots, N_n(B_r)) \xrightarrow{d} (N(B_1), \dots, N(B_r)).$$

此定理可得到一个估计测度 ν 的方法: 对 r 组观测值 $(X_{ij}, Y_{ij}), i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, n$, 根据(2.2.10)式分别求出 $N_n(B)$, 然后求出均值, 由依分布收敛性此均值可近似 $EN(B)$, $EN(B) = (\lambda \times \nu)(B) = \lambda(B_0) \times \nu(B_1)$, 其中 $B_0 \subset \mathbb{R}_+, B_1 \subset Q$, 则 $\nu(B_1) = EN(B)/\lambda(B_0)$.

2.3 谱测度

利用定理2.2.2中指数测度 ν 的齐次性可建立坐标变换. 令 $\mathbb{R}_+^{2*} := \mathbb{R}_+^2 \setminus$

$\{(0, 0)\}$, 对 $c > 0$, 建立从 \mathbb{R}_+^{2*} 到 $(0, \infty) \times [0, c]$ 的 1-1 变换:

$$\begin{cases} r = r(x, y); \\ d = d(x, y). \end{cases}$$

满足对 $\forall a, x, y > 0$,

$$\begin{cases} r(ax, ay) = ar(x, y); \\ d(ax, ay) = d(x, y). \end{cases}$$

我们可以认为 r 是半径, d 为角度. 在新的坐标下, 测度 ν 有一个简单的结构. 对常数 $r > 0$ 和 $\theta \in [0, c]$, 定义集合

$$\begin{aligned} B_{r,\theta} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{2*} : R(x, y) > r \text{ 且 } d(x, y) \leq \theta\}, \\ rB_{1,\theta} &= r\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{2*} : R(x, y) > 1 \text{ 且 } d(x, y) \leq \theta\} \\ &= \{(rx, ry) \in \mathbb{R}_+^{2*} : R(x, y) > r \text{ 且 } d(x, y) \leq \theta\} \\ &\quad \text{令 } rx = x', ry = y' \\ &= \{(x', y') \in \mathbb{R}_+^{2*} : R(x'/r, y'/r) > 1 \text{ 且 } d(x'/r, y'/r) \leq \theta\} \\ &= \{(x', y') \in \mathbb{R}_+^{2*} : \frac{1}{r}R(x', y') > 1 \text{ 且 } d(x', y') \leq \theta\} \\ &= \{(x', y') \in \mathbb{R}_+^{2*} : R(x', y') > r \text{ 且 } d(x'/r, y'/r) \leq \theta\} \\ &= B_{r,\theta}. \end{aligned}$$

由 ν 的齐次性可得: $\nu(B_{r,\theta}) = \nu(rB_{1,\theta}) = r^{-1}\nu(B_{1,\theta})$, 此式说明在变换成

新坐标 $r(x, y)$ 和 $d(x, y)$ 之后, 测度 ν 变成了一个乘积测度. 常用的变换有

$$\begin{cases} r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ d(x, y) = \arctan \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{cases} r(x, y) = x + y, \\ d(x, y) = \frac{x}{x + y}. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

$$\begin{cases} r(x, y) = x \vee y, \\ d(x, y) = \arctan \frac{x}{y}. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

命题2.3.1. 对任意(2.1.1)式中的极值分布函数 G , 且 G 满足(2.1.4)和(2.1.5), 存在一个 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的有限测度, 称为谱测度, 具有性质: 若 Ψ 是此谱测度的分布函数, 对 $x, y > 0$, 有

$$G\left(\frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \frac{y^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2}\right) = G_0(x, y) = \exp \left\{ - \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos \theta}{x} \vee \frac{\sin \theta}{y} \right) \Psi(d\theta) \right\} \quad (2.3.4)$$

其中 γ_1, γ_2 是 G 的边缘分布的极值指标. 而且, 有边界条件

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \Psi(d\theta) = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \Psi(d\theta) = 1 \quad (2.3.5)$$

相反地, 任意一个由其分布函数 Ψ 表示的有限测度可通过(2.3.4)式产生一个(2.1.1)式中的极限分布函数 G , 条件是边界条件(2.3.5)式成立.

证明 “ \Rightarrow ” 利用变换(2.3.1). 对常数 $r > 0$ 和 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 集合

$$B_{r, \theta} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^{2*} : \sqrt{x^2 + y^2} > r \text{ 且 } \arctan \frac{y}{x} \leq \theta \right\},$$

易知:

$$B_{r,\theta} = rB_{1,\theta},$$

$$\nu(B_{r,\theta}) = \nu(rB_{1,\theta}) = r^{-1}\nu(B_{1,\theta}). \quad (2.3.6)$$

在 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 上, 定义

$$\Psi(\theta) := \nu(B_{1,\theta}), \quad (2.3.7)$$

Ψ 是 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上一个有限测度的分布函数, 称为极限分布 G 的谱测度.

令 $s = r \cos \theta, t = r \sin \theta$, 取 $x, y > 0$,

$$\begin{aligned} -\log G_0(x, y) &= \nu\{(s, t) : s > x \text{ 或 } t > y\} \\ &= \nu\{(r, \theta) : r \cos \theta > x \text{ 或 } r \sin \theta > y\} \\ &= \nu\{(r, \theta) : r > \frac{x}{\cos \theta} \wedge \frac{y}{\sin \theta}\} \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_{r > \frac{x}{\cos \theta} \wedge \frac{y}{\sin \theta}} d\nu$$

根据(2.3.6)和(2.3.7)式

$$\begin{aligned} &= \int_{x/(\cos \theta) < y/(\sin \theta)} \int_{r > x/(\cos \theta)} \frac{dr}{r^2} \Psi(d\theta) + \int_{x/(\cos \theta) > y/(\sin \theta)} \int_{r > y/(\sin \theta)} \frac{dr}{r^2} \Psi(d\theta) \\ &= \int_{(\cos \theta)/x > (\sin \theta)/y} \frac{\cos \theta}{x} \Psi(d\theta) + \int_{(\cos \theta)/x < (\sin \theta)/y} \frac{\sin \theta}{y} \Psi(d\theta) \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos \theta}{x} \vee \frac{\sin \theta}{y} \right) \Psi(d\theta) \end{aligned}$$

从而(2.3.4)式成立. 下证边界条件.

对 $x > 0$,

$$G_0(x, \infty) = G\left(\frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \infty\right) = \exp\left\{-\left(1 + \gamma_1 \frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}\right)^{-\frac{1}{\gamma_1}}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{x}\right\},$$

$$\begin{aligned}
 -\log G_0(x, \infty) &= \nu\{(s, t) : s > x\} = \nu\{(r, \theta) : r > \frac{x}{\cos \theta}\} \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_{r > x/\cos \theta} \frac{1}{r^2} dr \Psi(d\theta) \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{x} \Psi(d\theta) \\
 &= \frac{1}{x} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \Psi(d\theta) = -\log \exp\left\{-\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x},
 \end{aligned}$$

所以 $\int_0^{\pi/2} \cos \theta \Psi(d\theta) = 1$.

同理可证 $\int_0^{\pi/2} \sin \theta \Psi(d\theta) = 1$.

“ \Leftarrow ”先证(2.3.4)式中的 G_0 为一个概率测度的分布函数.

设 V 有分布函数 $\exp\{-\frac{1}{x}\}, x > 0$,

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{P}\{cV \cos \theta < x, cV \sin \theta < y\} = \mathbf{P}\left\{V < \frac{x}{c \cos \theta}, V < \frac{y}{c \sin \theta}\right\} \\
 &= \mathbf{P}\left\{V < \frac{x}{c \cos \theta} \wedge \frac{y}{c \sin \theta}\right\} = \exp\left\{-\frac{c}{\frac{x}{\cos \theta} \wedge \frac{y}{\sin \theta}}\right\} \\
 &= \exp\left\{-c\left(\frac{\cos \theta}{x} \vee \frac{\sin \theta}{y}\right)\right\},
 \end{aligned}$$

其中, $c > 0$ 为常数, $x, y > 0$. 即 $\exp\{-c(\frac{\cos \theta}{x} \vee \frac{\sin \theta}{y})\}$ 是随机向量 $(cV \cos \theta, cV \sin \theta)$ 的分布函数.

若 F_i 是随机向量 $(V_i, W_i), i = 1, 2$ 的分布函数, 且 $(V_1, W_1), (V_2, W_2)$ 是独立的, 则 $F_1 F_2$ 是 $(\max(V_1, V_2), \max(W_1, W_2))$ 的分布函数, 因此任意分布函数的乘积还是分布函数. 故

$$\exp\left\{-\sum_{i=1}^n \Psi_i \cdot \left(\frac{\cos \theta_i}{x} \vee \frac{\sin \theta_i}{y}\right)\right\} \quad (2.3.8)$$

也是一个分布函数, 其中 $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2}, \Psi_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. 根

据积分定义, (2.3.4)式右端可由(2.3.8)式近似, 因此 G_0 是分布函数.

下证 G 为(2.1.1)式的极限分布. 由(2.2.9)式, 对 $x, y > 0, n = 1, 2, \dots$, 有

$$G_0^n(nx, ny) = G_0(x, y),$$

因此对所有满足 $1 + \gamma_1 x > 0, 1 + \gamma_2 y > 0$ 的 x, y ,

$$\begin{aligned} & G^n\left(\frac{n^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1} + n^{\gamma_1}x, \frac{n^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2} + n^{\gamma_2}y\right) \\ &= G_0^n(n(1 + \gamma_1 x)^{1/\gamma_1}, n(1 + \gamma_2 y)^{1/\gamma_2}) \\ &= G_0((1 + \gamma_1 x)^{1/\gamma_1}, (1 + \gamma_2 y)^{1/\gamma_2}) \\ &= G(x, y) \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

因此, 当

$$F = G, a_n = n^{\gamma_1}, c_n = n^{\gamma_2}, b_n = (n^{\gamma_1} - 1)/\gamma_1, d_n = (n^{\gamma_2} - 1)/\gamma_2$$

时, (2.1.9)式成立. 即任一由(2.3.4)式产生的分布函数 G 都可作为(2.1.1)式的极限函数.

定义2.3.1. 根据(2.3.9)式, (2.1.1)式中的极限分布函数 G 称为最大值稳定分布. 因此, 任意极值分布是最大值稳定分布, 反之亦然. (2.1.6)式中的极限分布函数 G_0 称为简单最大值稳定分布. “简单”的意思是说 G_0 的边缘分布为:

$$G_0(x, \infty) = G_0(\infty, x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right), \quad x > 0$$

即 G_0 的边缘分布是标准Fréchet分布.

在变换(2.3.2)和(2.3.3)下极值分布 G 的形式如下:

定理2.3.1. 对每个(2.1.1)式中的极限分布函数 G , 满足(2.1.4)和(2.1.5)式,

1. 存在一个 $[0, \pi/2]$ 上的有限测度(由分布函数 Ψ 表示), 使得对 $x, y > 0$

$$\begin{aligned} G\left(\frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \frac{y^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2}\right) &= G_0(x, y) \\ &= \exp\left\{-\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos \theta}{x} \vee \frac{\sin \theta}{y}\right) \Psi(d\theta)\right\}, \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

且有边界条件

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \Psi(d\theta) = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \Psi(d\theta) = 1.$$

2. 存在一个概率分布(由分布函数 H 表示)定义在 $[0, 1]$ 上, 均值为 $\frac{1}{2}$, 使得对 $x, y > 0$

$$\begin{aligned} G\left(\frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \frac{y^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2}\right) &= G_0(x, y) \\ &= \exp\left\{-2 \int_0^1 \left(\frac{w}{x} \vee \frac{1-w}{y}\right) H(dw)\right\}. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

3. 存在一个 $[0, \pi/2]$ 上的有限测度(由分布函数 Φ 表示), 使得对 $x, y > 0$

$$\begin{aligned} G\left(\frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \frac{y^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2}\right) &= G_0(x, y) \\ &= \exp\left\{-\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 \wedge \tan \theta}{x} \vee \frac{1 \wedge \cot \theta}{y}\right) \Phi(d\theta)\right\}, \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

且有边界条件

$$\int_0^{\pi/2} (1 \wedge \tan \theta) \Phi(d\theta) = \int_0^{\pi/2} (1 \wedge \cot \theta) \Phi(d\theta) = 1.$$

其中参数 γ_1, γ_2 是 G 的边缘分布的极值指标.

相反地, 任意由分布函数 Ψ, H 或 Φ 表示的有限测度均可分别通

过(2.3.10),(2.3.11)或(2.3.12)式产生(2.1.1)中的极限分布函数 G , 条件是上述边界条件成立.

证明 “ \Rightarrow ” (1)已证, 下证(2)和(3).

2. 根据变换(2.3.2), 对常数 $r > 0, w \in [0, 1]$, 集合

$$B_{r,w} := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{2*} : x + y > r \text{ 且 } \frac{x}{x+y} \leq w\},$$

则

$$B_{r,w} = rB_{1,w} .$$

因此 $\nu(B_{r,w}) = r^{-1}\nu(B_{1,w})$, 即 ν 变成了一个乘积测度. 对 $0 \leq w \leq 1$, 定义一个谱测度的分布函数

$$H(w) := \frac{\nu(B_{1,w})}{2}$$

令 $s = rw, t = r(1-w)$, 对 $x, y > 0$,

$$\begin{aligned} -\log G_0(x, y) &= \nu\{(s, t) : s > x \text{ 或 } t > y\} \\ &= \nu\{(r, w) : rw > x \text{ 或 } r(1-w) > y\} \\ &= \nu\{(r, w) : r > \frac{x}{w} \wedge \frac{y}{(1-w)}\} \\ &= \int_{x/w < y/(1-w)} \int_{r > x/w} \frac{dr}{r^2} 2H(dw) + \int_{x/w > y/(1-w)} \int_{r > y/(1-w)} \frac{dr}{r^2} 2H(dw) \\ &= \int_{w/x > (1-w)/y} \frac{w}{x} 2H(dw) + \int_{w/x < (1-w)/y} \frac{(1-w)}{y} 2H(dw) \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{w}{x} \vee \frac{1-w}{y} \right) H(dw). \end{aligned}$$

因此

$$G_0(x, y) = \exp \left\{ -2 \int_0^1 \left(\frac{w}{x} \vee \frac{1-w}{y} \right) H(dw) \right\}.$$

即(2.3.11)成立.

3. 根据变换(2.3.3), 在(1)的证明中计算测度 ν 时, 令 $s = r(1 \wedge \tan \theta)$, $t = r(1 \wedge \cot \theta)$, 谱测度 Ψ 换成 Φ , 类似可证.

“ \Leftarrow ”由命题2.3.1的充分性知(1)已证, 下证(2)(3).

2. 设 V 有分布函数 $\exp\{-\frac{1}{x}\}$, $x > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{cVw < x, cV(1-w) < y\} &= \mathbf{P}\left\{V < \frac{x}{cw}, V < \frac{y}{c(1-w)}\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{V < \frac{x}{cw} \wedge \frac{y}{c(1-w)}\right\} = \exp\left\{-\frac{c}{\frac{x}{w} \wedge \frac{y}{1-w}}\right\} \\ &= \exp\left\{-c\left(\frac{w}{x} \vee \frac{1-w}{y}\right)\right\}, \end{aligned}$$

其中 $c > 0$ 为常数, $x, y > 0$. 即 $\exp\{-c(\frac{w}{x} \vee \frac{1-w}{y})\}$ 是随机向量 $(cVw, cV(1-w))$ 的分布函数.

若 F_i 是随机向量 (V_i, W_i) , $i = 1, 2$ 的分布函数, 且 $(V_1, W_1), (V_2, W_2)$ 是独立的, 则 $F_1 F_2$ 是 $(\max(V_1, V_2), \max(W_1, W_2))$ 的分布函数, 因此任意分布函数的乘积还是分布函数. 故

$$\exp\left\{-\sum_{i=1}^n H_i \cdot \left(\frac{w_i}{x} \vee \frac{1-w_i}{y}\right)\right\} \quad (2.3.13)$$

也是一个分布函数, 其中 $0 \leq w_1 \leq \dots \leq w_n \leq 1$, $H_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. 根据积分定义, (2.3.11)式右端可由(2.3.13)式近似, 因此 G_0 是分布函数. 再由(2.3.9)式知由(2.3.11)式产生的分布函数 G 都可作为(2.1.1)式的极限函数.

3. 同理可证.

例2.3.1. 令 $\Psi(\theta) = \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2$, 则易计算得边界条件成立.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos \theta}{x} \vee \frac{\sin \theta}{y} \right) d\theta \\
 = & \int_0^{\arctan y/x} \frac{\cos \theta}{x} d\theta + \int_{\arctan y/x}^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{y} d\theta \\
 = & \frac{\sin(\arctan y/x)}{x} + \frac{\cos(\arctan y/x)}{y} \\
 = & \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} \\
 = & \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy} = (x^{-2} + y^{-2})^{1/2}
 \end{aligned}$$

因此,

$$G_0(x, y) = \exp \{ - (x^{-2} + y^{-2})^{1/2} \}, \quad x > 0, y > 0.$$

一般地, 对 $0 \leq a \leq 1$,

$$G_0(x, y) = \exp \{ - (x^{-1/a} + y^{-1/a})^a \}, \quad x > 0, y > 0.$$

其中, $a = 1$ 时, $G_0(x, y) = \exp(-x^{-1}) \exp(-y^{-1}) = G_0(x, \infty)G_0(\infty, y)$, 因此 $G(x, y) = G(x)G(y)$, 故此时两分量相互独立. $a = 0$ 时(取极限)两分量完全相关.

例2.3.2. 令 $H(w) = w, 0 \leq w \leq 1$, 易知边界条件成立.

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_0^1 \left(\frac{w}{x} \vee \frac{1-w}{y} \right) dw \\
 = & 2 \int_0^{x/(x+y)} \frac{1-w}{y} dw + 2 \int_{x/(x+y)}^1 \frac{w}{x} dw
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2x}{y(x+y)} - \frac{x^2}{y(x+y)^2} + \frac{1}{x} - \frac{x}{(x+y)^2} \\
 &= x^{-1} + y^{-1} - (x+y)^{-1}
 \end{aligned}$$

因此,

$$G_0(x, y) = \exp\{-(x^{-1} + y^{-1} - (x+y)^{-1})\}, \quad x > 0, y > 0.$$

一般地, 对 $k > 0$,

$$G_0(x, y) = \exp\{-(x^{-1} + y^{-1} - k(x+y)^{-1})\}, \quad x > 0, y > 0.$$

其中, $k = 0$ 时对应于分量独立.

2.4 二元极值分布的吸引场

由前三节讨论可知, (2.1.1)式的极限分布由以下下几个因素决定: 边缘分布的极值指标 γ_1 和 γ_2 以及谱测度等. 这些均可反映在吸引场条件上.

定义2.4.1. 设 $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是一个最大值稳定分布. 分布函数 F 称为属于 G 的吸引场(记为 $F \in \mathcal{D}(G)$), 如果对 $a_n, c_n > 0, b_n, d_n \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n, c_n y + d_n) = G(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

定理2.4.1. 设 G 为最大值稳定分布, 边缘分布函数为 $\exp\{-(1 + \gamma_i x)^{-1/\gamma_i}\}, i = 1, 2$. 设 Ψ, H, Φ 为定理2.3.1中的谱测度.

1. 设随机向量 (X, Y) 的分布函数为 F , 边缘分布为 F_1, F_2 , 如果 F 属于 G 的吸引场, 则下面的四条等价.

(a) 对 $\forall x, y > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(U_1(tx), U_2(ty))}{1 - F(U_1(t), U_2(t))} = S(x, y) := \frac{\log G((x^{\gamma_1} - 1)/\gamma_1, (y^{\gamma_2} - 1)/\gamma_2)}{\log G(0, 0)}. \quad (2.4.1)$$

(b) 对所有 $r > 1$ 和 Ψ 的连续点 $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ V^2 + W^2 > t^2 r^2 \text{ 且 } \frac{W}{V} \leq \tan \theta \mid V^2 + W^2 > t^2 \right\} = r^{-1} \frac{\Psi(\theta)}{\Psi(\frac{\pi}{2})}, \quad (2.4.2)$$

其中 $V := 1/(1 - F_1(X)), W := 1/(1 - F_2(Y))$.

(c) 对所有 $r > 1$ 和 H 的连续点 $s \in [0, 1]$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ V + W > tr \text{ 且 } \frac{V}{V + W} \leq s \mid V + W > t \right\} = r^{-1} H(s), \quad (2.4.3)$$

其中 $V := 1/(1 - F_1(X)), W := 1/(1 - F_2(Y))$.

(d) 对所有 $r > 1$ 和 Φ 的连续点 $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ V \vee W > tr \text{ 且 } \frac{V}{W} \leq \tan \theta \mid V \vee W > t \right\} = r^{-1} \frac{\Phi(\theta)}{\Phi(\frac{\pi}{2})}, \quad (2.4.4)$$

其中 $V := 1/(1 - F_1(X)), W := 1/(1 - F_2(Y))$.

2. 相反地, 如果连续的边缘分布函数 F_i 在 $\exp\{-(1 + \gamma_i x)^{-1/\gamma_i}\}, i = 1, 2$ 的吸引场内, 且(2.4.1)-(2.4.4)式对某个正函数 S 或者某个有界函数 Ψ, H 或 Φ 成立, 则 F 属于 G 的吸引场.

证明 参照文献[8], 证明如下:

1.(a) 在(2.1.13)式中令 $x = y = 1$, 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \{1 - F(U_1(t), U_2(t))\} = -\log G_0(1, 1) = -\log G(0, 0),$$

因此(2.4.1)左端等于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t(1 - F(U_1 tx, U_2(ty)))}{t(1 - F(U_1(t), U_2(t)))} = S(x, y).$$

(b) 令 $V = R \cos \alpha$, $W = R \sin \alpha$, $R > 0$, $\alpha \in [0, \pi/2]$.

$$B_{k,\theta} := \{(R, \alpha) : R > k, \alpha \in [0, \theta]\}, \quad \Psi = \nu(B_{1,\theta}),$$

当 $k = tr$ 时,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{V^2 + W^2 > t^2 r^2, \frac{W}{V} \leq \tan \theta, V^2 + W^2 > t^2\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{V^2 + W^2 > t^2 r^2, \frac{W}{V} \leq \tan \theta\right\} = \nu(B_{tr,\theta}) \\ &= (tr)^{-1} \nu(B_{1,\theta}) = t^{-1} r^{-1} \int_0^\theta \Psi(d\alpha) = t^{-1} r^{-1} \Psi(\theta), \end{aligned}$$

当 $k = t, \theta = \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\mathbf{P}\{V^2 + W^2 > t^2\} = \nu(B_t) = t^{-1} \nu(B_1) = t^{-1} \int_0^{\pi/2} \Psi(d\alpha) = t^{-1} \Psi\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

因此, (2.4.2)式的左端等于

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\left\{V^2 + W^2 > t^2 r^2, \frac{W}{V} \leq \tan \theta, V^2 + W^2 > t^2\right\}}{\mathbf{P}\{V^2 + W^2 > t^2\}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^{-1} r^{-1} \Psi(\theta)}{t^{-1} \Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)} = r^{-1} \frac{\Psi(\theta)}{\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

(c) 令 $V = R w$, $W = R(1 - w)$, $R > 0$, $w \in [0, s]$.

$$B_{k,s} = \{(R, w) : R > k, w \in [0, s]\}, \quad H = \nu B_{1,w},$$

当 $k = tr$ 时,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{V + W > tr, \frac{V}{V + W} \leq s, V + W > t\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{V + W > tr, \frac{V}{V + W} \leq s\right\} = \nu(B_{tr,s}) \\ &= (tr)^{-1}\nu(B_{1,s}) = t^{-1}r^{-1} \int_0^s H(dw) = t^{-1}r^{-1}H(s), \end{aligned}$$

当 $k = t, s = 1$ 时,

$$\mathbf{P}\{V + W > t\} = \nu(B_t) = t^{-1} \int_0^1 H(dw) = t^{-1}H(1) = t^{-1},$$

因此, (2.4.3) 式的左端等价于

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\left\{V + W > tr, \frac{V}{V+W} \leq s, V + W > t\right\}}{\mathbf{P}\{V + W > t\}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{-1}r^{-1}H(s)}{t^{-1}} = r^{-1}H(s). \end{aligned}$$

(d) 令 $V = R(1 \wedge \tan \alpha)$, $W = R(1 \wedge \cot \alpha)$, $R > 0$, $\alpha \in [0, \pi/2]$.

$$B_{k,\theta} = \{(R, \alpha) : R > k, \alpha \in [0, \theta]\}, \quad \Phi = \nu(B_{1,\theta}),$$

当 $k = tr$ 时,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{V \vee W > tr, \frac{V}{W} \leq \tan \theta, V \vee W > t\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{V \vee W > tr, \frac{V}{W} \leq \tan \theta\right\} = \nu(B_{tr,\theta}) \\ &= (tr)^{-1}\nu(B_{1,\theta}) = t^{-1}r^{-1} \int_0^\theta \Phi(d\alpha) = t^{-1}r^{-1}\Phi(\theta), \end{aligned}$$

当 $k = t, \theta = \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\mathbf{P}\{V \vee W > t\} = \nu(B_t) = t^{-1}\nu(B_1) = t^{-1} \int_0^{\pi/2} \Phi(d\alpha) = t^{-1}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

因此, (2.4.4) 式的左端等于

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\left\{V \vee W > tr, \frac{V}{W} \leq \tan \theta, V \vee W > t\right\}}{\mathbf{P}\{V \vee W > t\}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^{-1}r^{-1}\Phi(\theta)}{t^{-1}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)} = r^{-1} \frac{\Phi(\theta)}{\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

2. 以(2.4.4)式为例. 对任意 $a, t > 0$, 在 $\mathbb{R}_+^2 \setminus [0, a]^2$ 上定义概率测度 $P_{a,t}$

$$P_{a,t}(B) := P((V, W) \in tB \mid V \vee W > ta),$$

Borel 集 $B \subset \mathbb{R}_+^2 \setminus [0, a]^2$. 由(2.4.4)式,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{a,t}(A) = P_a(A),$$

其中 P_a 是一个 $\mathbb{R}_+^2 \setminus [0, a]^2$ 上的概率测度, $A = \{(x, y) : x \vee y > r \text{ 或 } x/y \leq \tan \theta\}$, $r > a, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ 为一个 P_a -连续集. 这种形式的集合的有限并组成了一个集族, 此集族在有限交的情况下是闭的, 且每个 $\mathbb{R}_+^2 \setminus [0, a]^2$ 中的开集是此集族中集合的可数并. 由文献[13], 定理2.2知, 对 $\mathbb{R}_+^2 \setminus [0, a]^2$ 中的 P_a -连续 Borel 集 B ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{a,t}(B) = P_a(B),$$

对所有 $a > 0$ 成立, 特别地(2.4.1)成立. 因此(1a)-(1d)是等价的. 下面只需证满足(1a)的 F 属于 G_0 的吸引场.

因为函数 S 具有-1阶齐次性, 则函数 $1 - F(U_1(t), U_2(t))$ 是正规变化, 指

标为-1. 故存在一列常数 $a_n > 0, a_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\{1 - F(U_1(a_n), U_2(a_n))\} = -\log G(0, 0).$$

然后由(2.4.1)式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\{1 - F(U_1(a_n x), U_2(a_n y))\} = -\log G\left(\frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \frac{y^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2}\right),$$

再由推论2.1.1可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(U_1(a_n x), U_2(a_n y)) = G\left(\frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \frac{y^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2}\right),$$

特别的, 边缘分布收敛,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(U_1(a_n x), \infty) = G\left(\frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \infty\right) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

因为 $F(U_1(a_n x), \infty) = 1 - \frac{1}{a_n x} \sim 1 - \frac{1}{nx} = F(U_1(nx), \infty)$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(U_1(nx), \infty) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right),$$

从而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n = 1$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(U_1(nx), U_2(ny)) = G\left(\frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \frac{y^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2}\right). \quad (2.4.5)$$

由边缘分布的收敛性及(1.2.4)式, 对 $a_n, c_n > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_1(nx) - U_1(n)}{a_n} &= \frac{x^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_2(ny) - U_2(n)}{c_n} &= \frac{y^{\gamma_2} - 1}{\gamma_2}, \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

结合(2.4.5)和(2.4.6)可得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + U_1(n), c_n y + U_2(n)) = G(x, y).$$

注2.4.1. 事实上, 如果边缘分布属于某个吸引场, 对所有 x, y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(U_1(tx), U_2(ty))}{1 - F(U_1(t), U_2(t))}$$

存在且是正的, 如果正规变化函数 $1 - F(U_1(t), U_2(t))$ 有指标 -1 , 则 F 属于某个最大值稳定分布的吸引场.

第3章 谱测度的估计

3.1 相关结构函数

联合分布函数是刻画随机向量概率性质的最好工具之一,它包含了两方面的信息,一是变量的边缘分布信息,再者就是变量间相关结构的信息.

设随机向量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 那么 $F_1(x) = F(x, +\infty)$, $F_2(y) = F(+\infty, y)$ 分别是 X, Y 的边缘分布, 即由联合分布函数容易得到变量的边缘分布函数. 在联合分布中除去边缘分布的信息后, 就剩下相关结构的信息了. 如果存在函数 C , 使

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)), \quad (3.1.1)$$

则称 C 为分布函数 F 的相关结构函数 (Copula). 有时也称 C 为随机向量 (X, Y) 的相关结构函数, 且记为 $C_{X, Y}$.

反过来, 如果 $F_1(x), F_2(y)$ 为连续分布函数. 令 $U = F_1(X), V = F_2(Y)$, 它们都服从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 则 U, V 的联合分布函数为:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(U \leq u, V \leq v) &= \mathbf{P}(X \leq F_1^{-1}(u), Y \leq F_2^{-1}(v)) \\ &= F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) = F(x, y) = C(u, v). \end{aligned}$$

其中 F_j^{-1} 是 F_j 的反函数. 因此相关结构函数 C 可以看作是边缘分布为区间 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机向量 (U, V) 的一个联合分布函数. 在这个意义上, C 反映了 X, Y 之间的关联, 且这种关联与边缘分布无关. Copula是由随机变量间的相关结构决定的函数, 作为连接边缘分布的工具, Copula在形

式上也是边缘分布为区间 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机向量的联合分布函数. Copula一词最初由A. Sklar与1959年在文献[21]中提出, 广泛应用则是在文献[20]中.

独立与完全相关是随机变量间相关性的两种极端情况. 如果 $\mathbf{P}(U = V) = 1$, 称 U, V 完全正相关. 它们的相关结构函数为

$$\mathbf{M}(u, v) = \mathbf{P}(U \leq u, V \leq v) = \mathbf{P}(U \leq \min\{u, v\}) = \min\{u, v\}.$$

相应地, 称一般的连续随机变量 X, Y 完全正相关, 如果 $\mathbf{P}(Y = F_2^{-1}(F_1(x))) = 1$, 它们的联合分布函数为

$$F(x, y) = \min\{F_1(x), F_2(y)\}.$$

如果 $\mathbf{P}(U + V = 1) = 1$, 称 U, V 完全负相关, 它们的相关结构函数为

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(u, v) &= \mathbf{P}(U \leq u, V \leq v) = \mathbf{P}(U \leq u, 1 - U \leq v) \\ &= \mathbf{P}(1 - v \leq U \leq u) = \max\{u + v - 1, 0\}. \end{aligned}$$

如果 $\mathbf{P}(Y = F_2^{-1}(1 - F_1(x))) = 1$, X, Y 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \max\{F_1(x) + F_2(y) - 1, 0\}.$$

则称 X, Y 完全负相关. 完全正相关与完全负相关, 统称为完全相关.

如果 U, V 相互独立, 它们的相关结构函数记为 $\Pi(u, v)$, 显然有

$$\Pi(u, v) = uv.$$

定理3.1.1. (Sklar定理) 设 F 是随机变量 (X, Y) 的联合分布函数, 边缘分布

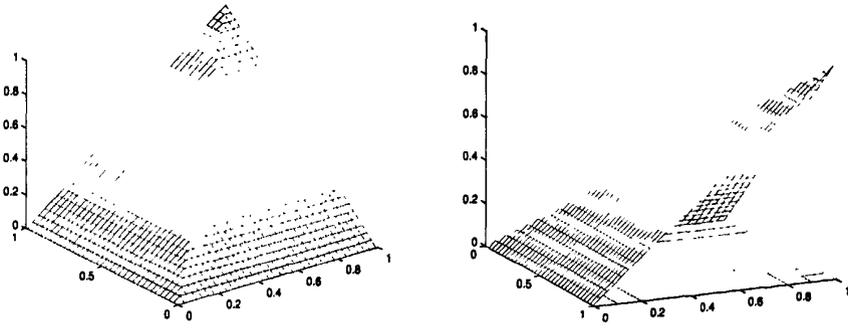


图 3-1 $M(u,v)$ 的图像

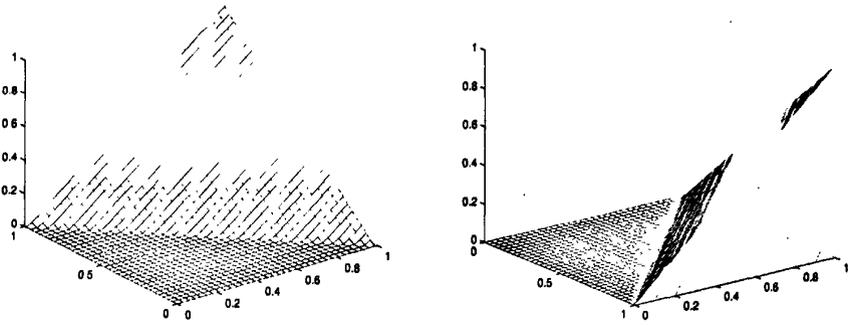


图 3-2 $W(u,v)$ 的图像

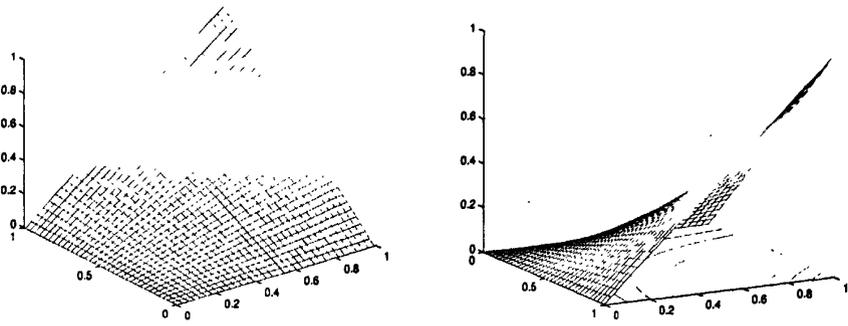


图 3-3 $\Pi(u,v)$ 的图像

函数分别为 F_1 和 F_2 , 则存在一个相关结构函数 C , 使得

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)), \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty.$$

如果 F_1 和 F_2 是连续分布函数, 则 C 唯一; 否则, C 在 $\text{Ran}(F_1) \times \text{Ran}(F_2)$ 上唯一确定. 反之, 如果 C 是一个相关结构函数, F_1 和 F_2 是一元分布函数, 则由上式定义的函数 $F(x, y)$ 是一个边缘分布为 F_1 和 F_2 的二元联合分布函数.

以上定理不仅是相关结构函数的存在性定理, 而且还给出相关结构函数的求法, 即利用联合分布函数和边缘分布的反函数来求:

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)). \quad (3.1.2)$$

对二元极值分布 $G_0(x, y)$, 边缘分布为 $G_0(x) = \exp\{-\frac{1}{x}\}$, $G_0(y) = \exp\{-\frac{1}{y}\}$, $x, y > 0$, 对 $u, v \in [0, 1]$, $G_0^{-1}(u) = -\frac{1}{\log u}$, $G_0^{-1}(v) = -\frac{1}{\log v}$, 故

$$C(u, v) = G_0\left(-\frac{1}{\log u}, -\frac{1}{\log v}\right) \quad (3.1.3)$$

在例(2.3.1)中, 对 $0 \leq a \leq 1$,

$$G_0(x, y) = \exp\left\{-\left(x^{-1/a} + y^{-1/a}\right)^a\right\}, \quad x > 0, y > 0,$$

则

$$\begin{aligned} C(u, v) &= G_0\left(-\frac{1}{\log u}, -\frac{1}{\log v}\right) \\ &= \exp\left\{-\left[(-\log u)^{1/a} + (-\log v)^{1/a}\right]^a\right\} \\ &= \exp\left\{-\left[(-1)^{1/a}((\log u)^{1/a} + (\log v)^{1/a})\right]^a\right\} \\ &= \exp\left\{\left[(\log u)^{1/a} + (\log v)^{1/a}\right]^a\right\}. \end{aligned}$$

当 $a = 1$ 时, U, V 独立; 当 $a = 0$ 时, U, V 完全正相关.

在例(2.3.2)中, 对 $k > 0$,

$$G_0(x, y) = \exp\{-(x^{-1} + y^{-1} - k(x+y)^{-1})\}, \quad x > 0, y > 0,$$

则

$$\begin{aligned} C(u, v) &= G_0\left(-\frac{1}{\log u}, -\frac{1}{\log v}\right) \\ &= \exp\left\{-\left[-\log u - \log v - k\left(-\frac{1}{\log u} - \frac{1}{\log v}\right)^{-1}\right]\right\} \\ &= \exp\left\{\log u + \log v - k\left(\frac{1}{\log u} + \frac{1}{\log v}\right)^{-1}\right\} \\ &= \exp\left\{\log uv - k\frac{\log u \log v}{\log uv}\right\}. \end{aligned}$$

当 $k = 0$ 时, U, V 独立.

3.2 谱测度的估计

由第二章可知二元极值分布 G_0 与指数测度 ν 的关系为:

$$G_0(x, y) = \exp\left(-\nu\{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s > x \text{ 或 } t > y\}\right), \quad x, y > 0.$$

定义函数

$$\begin{aligned} L(x, y) &:= -\log C(e^{-x}, e^{-y}) = -\log G_0\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ &= \nu\{(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 : s > \frac{1}{x} \text{ 或 } t > \frac{1}{y}\}, \quad x, y > 0. \end{aligned}$$

由(2.2.9)式知 L 具有齐次性: $L(ax, ay) = aL(x, y)$, $a, x, y > 0$

易知 L 决定了 G_0 和 ν , 因此, 估计函数 L 就是估计极值分布的相关结构.

由函数 L 的定义以及指数测度 ν 与谱测度的关系, 我们可重点估计谱测度. 为此, 我们先回到谱测度的根源. 由定理2.3.1(3), 考虑集合

$$D_{r,\theta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{2*} : x \vee y > r \text{ 且 } x/y \leq \tan \theta\}, \quad r > 0, \theta \in [0, \pi/2],$$

$$\Phi(\theta) = r\nu(D_{r,\theta}) = \nu(D_{1,\theta}). \quad (3.2.1)$$

定义测度: $\mu\{(s, t) \in [0, \infty]^2 \setminus \{(\infty, \infty)\} : s < x \text{ 或 } t < y\} := \nu\{(s, t) \in [0, \infty]^2 \setminus \{(0, 0)\} : s > 1/x \text{ 或 } t > 1/y\}$

则

$$\Phi(\theta) = \mu(E_{1,\theta}),$$

$$E_{q,\theta} := \{(x, y) \in [0, \infty]^2 \setminus \{(\infty, \infty)\} : x \wedge y < q \text{ 且 } y/x \leq \tan \theta\}. \quad (3.2.2)$$

其中 $q > 0, \theta \in [0, \pi/2]$.

设 F 的边缘分布 F_1, F_2 是连续的, 则由(2.1.13)式

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} tP(1 - F_1(X) < \frac{x}{t} \text{ 或 } 1 - F_2(Y) < \frac{y}{t}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} tP(X > F_1^{-1}(1 - \frac{x}{t}) \text{ 或 } Y > F_2^{-1}(1 - \frac{y}{t})) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} tP(X > U_1(\frac{t}{x}) \text{ 或 } Y > U_2(\frac{t}{y})) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} t(1 - F(U_1(\frac{t}{x}), U_2(\frac{t}{y}))) \\ &= -\log G_0(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}) \\ &= \mu\{(s, t) \in [0, \infty]^2 \setminus \{(\infty, \infty)\} : s < x \text{ 或 } t < y\}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} tP\left((1 - F_1(X)) \wedge (1 - F_2(Y)) \leq \frac{1}{t} \text{且} \frac{1 - F_2(Y)}{1 - F_1(X)} \leq \tan \theta\right) \\ &= \mu(E_{1,\theta}) = \Phi(\theta). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

其中 θ 为 Φ 的连续点, (X, Y) 为分布函数 F 的随机向量.

假设有独立同分布的随机向量 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$, 分布函数为 F , 为把(3.2.3)式左端变为 Φ 的估计量, 我们把测度 P, F_1, F_2 换成它们的经验分布, 但在此之前我们先要选择(3.2.3)式中的与样本量 n 有关的 t , 因为我们仅处理分布的尾部, 选取 $t = n/k$, 满足 $k = k(n), k \rightarrow \infty, k/n \rightarrow 0$, 则(3.2.3)式左边变为:

$$\frac{n}{k} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{(1-F_1(X_i)) \wedge (1-F_2(Y_i)) \leq k/n \text{且} 1-F_2(Y_i) \leq (1-F_1(X_i)) \tan \theta\}},$$

进一步, 将 $1 - F_1(x)$ 换为经验分布, 经验分布函数的左连续形式为:

$$1 - F_1^{(n)}(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{\{X_j \geq x\}}, \quad (3.2.4)$$

则 $1 - F_1(X_i)$ 应该换为

$$1 - F_1^{(n)}(X_i) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{\{X_j \geq X_i\}} = \frac{n+1 - R(X_i)}{n},$$

其中 $R(X_i)$ 是第 i 个观察值 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 在 (X_1, X_2, \dots, X_n) 中的秩. 同样地, 可把 $1 - F_2(Y_i)$ 换为 $\frac{n+1 - R(Y_i)}{n}$, $R(Y_i)$ 是第 i 个观察值 $Y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 在 (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) 中的秩.

综合以上变换可得 Φ 的估计量:

$$\hat{\Phi}(\theta) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n I_{\{R(X_i) \vee R(Y_i) \geq n+1-k \text{ 且 } n+1-R(Y_i) \leq (n+1-R(X_i)) \tan \theta\}} \quad (3.2.5)$$

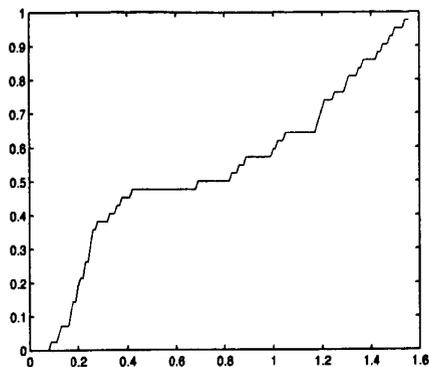


图 3-4 $k=27$ 时估计量 $\hat{\Phi}(\theta)$ 的图像.

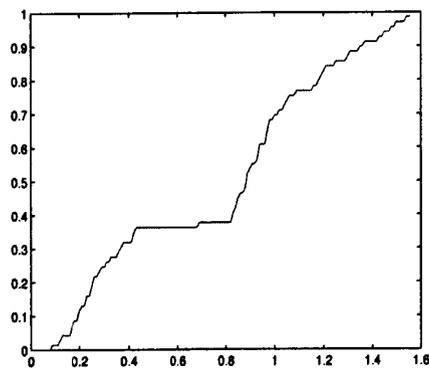


图 3-5 $k=54$ 时估计量 $\hat{\Phi}(\theta)$ 的图像.

我们选取上海和深圳证券交易所从2006年11月1日到2010年3月17日共822个每日股票价格综合指数最大值,假如我们想要得到两大证券交易所每日的股价综合指数都超过某一最大值的概率,那么就要估计出它们的二元极值分布函数,则首先需要估计出谱测度 $\hat{\Phi}(\theta)$.图3-4和图3-5是当 $k=27$ 和 $k=54$ 时, $\hat{\Phi}(\theta)$ 的图像.

由 L 和 G_0 的关系以及定理2.3.1(3)可知:

$$\begin{aligned} L(x, y) &= -\log G_0\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(x(1 \wedge \tan \theta)) \vee (y(1 \wedge \cot \theta))\} \Phi(d\theta), x, y > 0. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

将上式积分区域分成两部分可得:

$$L(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((x \tan \theta) \vee y) \Phi(d\theta) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (x \vee (y \cot \theta)) \Phi(d\theta).$$

若 $x < y$, 则上式变为:

$$y \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Phi(d\theta) + y \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(y/x)} \cot \theta \Phi(d\theta) + x \int_{\arctan(y/x)}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(d\theta),$$

由于 $\cot \theta = 1 - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \sin^{-2} x dx$, 则上式等价于

$$\begin{aligned} & y \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Phi(d\theta) + x \int_{\arctan(y/x)}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(d\theta) + y \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(y/x)} \Phi(d\theta) \\ & \quad - y \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(y/x)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \frac{dx}{\sin^2 x} \Phi(d\theta) \\ &= y \int_0^{\arctan(y/x)} \Phi(d\theta) + x \int_{\arctan(y/x)}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(d\theta) - y \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(y/x)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} \frac{dx}{\sin^2 x} \Phi(d\theta), \end{aligned}$$

交换积分次序化简可得:

$$x \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + y \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(y/x)} \frac{\Phi(\theta)}{\sin^2 \theta} d\theta.$$

类似地, 若 $x > y$, 可得

$$x \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) - x \int_{\arctan(y/x)}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\Phi(\theta)}{\cos^2 \theta} d\theta.$$

综上可得:

$$L(x, y) = x\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + (x \vee y) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(y/x)} \Phi(\theta) \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \wedge \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta. \quad (3.2.7)$$

带入 Φ 的估计量可得函数 L 的估计量:

$$\hat{L}_{\Phi}(x, y) := x\hat{\Phi}\left(\frac{\pi}{2}\right) + (x \vee y) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(y/x)} \hat{\Phi}(\theta) \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \wedge \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta. \quad (3.2.8)$$

易得此估计量满足齐次性, 即:

$$\hat{L}_{\Phi}(ax, ay) = a\hat{L}_{\Phi}(x, y), \quad a, x, y > 0.$$

由函数 L 的定义, 可知 $G_0(x, y) = \exp(-L(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}))$, 从而可得到二元极值分布 G_0 的估计量:

$$\hat{G}_0(x, y) := \exp\left(-\hat{L}_{\Phi}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\right),$$

图3-6是由前面所求的谱测度估计量 $\hat{\Phi}(\theta)$ 得出的二元极值分布 G_0 的二维图像.

$$\hat{G}_0(ax, ay) = \exp\left(-\hat{L}_{\Phi}\left(\frac{1}{ax}, \frac{1}{ay}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{a}\hat{L}_{\Phi}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)\right) = \hat{G}_0^{\frac{1}{a}}(x, y).$$

即 $\hat{G}_0(x, y)$ 是最大值稳定分布.

由(3.1.3)式可得 G_0 的相关结构函数 $C(u, v)$ 的估计:

$$\hat{C}(u, v) = \hat{G}_0\left(-\frac{1}{\log u}, -\frac{1}{\log v}\right) = \exp(-\hat{L}_{\Phi}(-\log u, -\log v)),$$

其中,

$$\hat{L}_{\Phi}(-\log u, -\log v)$$

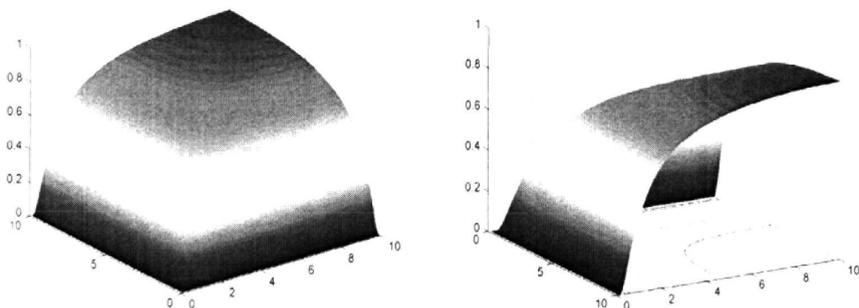


图 3-6 二元极值分布 G_0 的图像

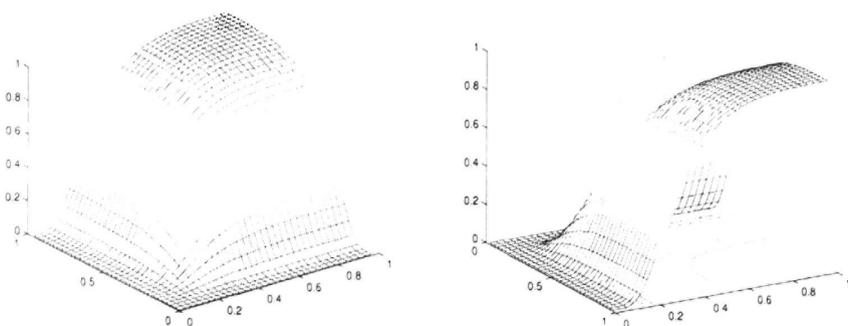


图 3-7 G_0 的Copula图像

$$= -\log u \hat{\Phi}\left(\frac{\pi}{2}\right) - ((\log u) \wedge (\log v)) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan\left(\frac{\log v}{\log u}\right)} \hat{\Phi}(\theta) \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \wedge \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) d\theta.$$

图3-7是 \hat{G}_0 对应的相关结构函数的图像,与图3-1,3-2,3-3比较可知极值分布为 G_0 的二元随机向量两分量间既不完全相关也不独立.

估计量 $\hat{\Phi}$ 和 \hat{L}_Φ 的依概率收敛性如下,证明可见文献[8].

定理3.2.1. 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ 是独立同分布随机向量,有连续的分布函数 F . $F_1(x) = F(x, \infty), F_2(x) = F(\infty, x)$, 对 $x, y \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t \left\{ 1 - F\left(U_1\left(\frac{t}{x}\right), U_2\left(\frac{t}{y}\right)\right) \right\} = L(x, y),$$

令 $k = k(n)$ 是一列整数使得 $k \rightarrow \infty, k/n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 则

$$\hat{\Phi}(\theta) \xrightarrow{P} \Phi(\theta)$$

对 Φ 的连续点 $\theta \in [0, \pi/2]$ 成立. 而且,

$$\hat{L}_{\Phi}(x, y) \xrightarrow{P} L(x, y), \quad x, y > 0.$$

$\hat{\Phi}$ 和 \hat{L}_{Φ} 的渐进正态性可参见文献[8], 定理7.3.6. 谱测度 Ψ 和 H 的估计量的渐进正态性尚未证出, 在此不在详述.

参考文献

- [1] L. von Bortkiewicz. Variationsbreite und mittlerer Fehler. Sitzungsber. Berli. Math. Ges, 1922, **21**: 3-11.
- [2] R. von Mises. Uber die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe. Sitzungsber. Berlin. Math. Ges, 1923, **22**: 3-8.
- [3] E. L. Dodd. The greatest and least variate under general laws of error. Trans. Amer. Math. Soc, 1923, **25**: 525-539.
- [4] L. H. C. Tippett. On the extreme individual and the range of samples taken from a normal population. Biometrika, 1925, **17**: 364-387.
- [5] M. Fréchet. Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. Ann. Soc. Polon. Math. Cracovie, 1927, **6**: 93-116.
- [6] R. A. Fisher, L. H. C. Tippett. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. Proces. Cambridge Philos. Soc, 1928, **24**: 180-190.
- [7] R. von Mises. La distribution de plus grande de n valeurs. Rev. Math. Union Interbalk, 1936, **1**: 141-160. Reproduced in Selected Papers of Richard von Mises. Amer. Math. Soc, 1954, 271-294.
- [8] L. de Haan, A. Ferria. Extreme Value Theory: an introduction. New York: Springer, 2006.
- [9] M. R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzen. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [10] B. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme d'une série aléatoire. Ann. Math, 1943, **44**: 423-453.
- [11] S. I. Resnick. Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes, New York: Springer, 1987.

- [12] E. L. Rvačeva. On domains of attraction of multi-dimensional distributions. *Select. Transl. Math. Statist. Prob. American Mathematical Society*, 1962, **2**: 183-205.
- [13] P. Billingsley. *Probability and Measure*. New York: Wiley, 1968.
- [14] L. de Haan. On Regular Variation and its Application to the weak convergence of sample extremes, *Math. Centre Tracts*, 1970, **32**.
- [15] L. de Haan, S. I. Resnick. Limit theory for multivariate sample extremes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 1977, **40(4)**: 317-337.
- [16] S. I. Resnick, P. Greenwood. A bivariate stable characterization and domains of attraction. *Journal of multivariate analysis*, 1979, **9**: 206-221.
- [17] L. de Haan, E. Omey, S. I. Resnick. Domains of attraction and regular variation in \mathbb{R}^d . *Journal of multivariate analysis*, 1984, **14**: 17-33.
- [18] M. M. Meerschaert. Regular variation and domains of attraction in $(R)^k$. *Statist. Probab. Lett*, 1986, **1**: 43-45.
- [19] F. Lindskog. *Multivariate extremes and regular variation for stochastic process*. Zurich: Diss. ETH, 2004.
- [20] C. Genest, J. MacKay. The joy of copula: bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician*, 1986, **40**: 280-283.
- [21] A. Sklar. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 1959, **8**: 229-231.
- [22] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. New York: Springer, 1997.
- [23] 史道济. 实用极值统计方法. 天津科学技术出版社.

致 谢

本文自始至终是在王晓谦老师的殷切关怀和悉心指导下完成的。论文写作的每一步都倾注着老师的心血。王老师渊博的知识，严谨的治学态度和诲人不倦的精神使我终生难忘。导师富有创造性的见解以及具体的建议，为作者确定了整个课题的方向。在此谨向老师的辛勤劳动与无微不至的关怀表示衷心的感谢！

非常感谢数科院的刘国祥副教授、周秀轻副教授、高启兵副教授及数科院的其他老师，没有老师们的辛勤教育，我不可能如此顺利完成学业。此外还要感谢院资料室，文印室及华夏、西山图书馆的老师，他们的辛勤工作为我的学习和生活提供了极大的方便。

感谢三年一起学习讨论的同窗好友，特别是刘丽、张华超、张立文、丁可、高艳红等同学在平时的生活和学习上给予的关心、帮助。也要感谢贺凯等几位高校教师给予的鼓励。你们的友谊使我在面对困难时更加勇敢和坚强！

特别感谢我的亲人在我学习期间对我的理解和默默支持，是你们的付出给了我勇气和信心战胜诸多挫折！

这篇论文是用 $\text{CT}_{\text{E}}\text{X}$ 软件制作的. 感谢<http://www.ctex.org> 免费提供了该软件.

杜明明

江苏南京2010年3月