电子科技大学

2008年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：612 高等数学

所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

一、填空题（本题满分24分，每小题4分）

(1) 设$x\to 0$时，$e^{x\cos x^2}-e^x$与x^n是同阶无穷小，则$n=$__________.

(2) 函数$f(x)=x^2\ln(1+x)$在$x=0$处的n阶导数$f^{(n)}(0)(n\ge 3)=($　　　$)$.

(3) $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=$_________________________.

(4) 设L为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长为$a$，则$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)ds=$________________.

(5) 微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$的通解为________________.

(6) 级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$当$\alpha$满足__________条件时该级数收敛.

二、单项选择题（本题满分24分，每小题4分）

(1) 设$\delta>0$，$f(x)$在区间$(-\delta,\delta)$内有定义，若当$x\in(-\delta,\delta)$时，恒有$|f(x)|\le x^2$，则$x=0$必是$f(x)$的(　　　).

(A)间断点;　(B)连续而不可导点;

(C)可导点，且$f'(0)=0$;　(D)可导点，且$f'(0)\ne 0$.

(2) 极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=$（　　　）.

(A) $\frac{2}{3}$;　(B) $\frac{3}{2}$;　(C) $\frac{2}{5}$;　(D) $\frac{5}{2}$.

(3) 已知$a\ne b$，为使$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}=\frac{A\sin x}{a+b\cos x}+B\int\frac{dx}{a+b\cos x}$，则（　　　　）

(A) $A=\frac{b}{a^2-b^2},B=\frac{a}{a^2-b^2}$;　(B) $A=-\frac{b}{a^2-b^2},B=\frac{a}{a^2-b^2}$

(C) $A=-\frac{b}{a^2-b^2},B=-\frac{a}{a^2-b^2}$;　(D) A、B无解.

(4) 设D是xoy平面上(1，1)，(-1，1)，(-1，-1)为顶点的三角形区域，D_1是D在第一象限的部分，则$\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$等于(　　).

$(A)\ 2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$；　　$(B)\ 2\iint\limits_{D_1}xydxdy$；

$(C)\ \iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$；　　$(D)\ 0$.

(5) 设S为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的内侧，则曲面积分$\oiint\limits_{S}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=$

(　　).

(A) $-4\pi R^5$；；　　(B) $4\pi R^5$；；

(C) $\frac{12}{5}\pi R^5$；　　(D) $-\frac{12}{5}\pi R^5$.

(6) 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$(　　)。

(A) 均发散；　　(B) 均收敛；

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}$收敛而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$发散；　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}$发散而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$收敛.

三、(本题满分10分)

若$f''(x)$存在，求$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}$.

四、(本题满分10分)

设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，证明：$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\ge(b-a)^2$.

五、(本题满分10分)

设$f(x)$在$[0,4]$内二阶可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(4)=2$，求证：$\exists\xi\in(0,4)$，使$f''(\xi)=-\frac{1}{3}$.

六、(本题满分10分)

设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，且$F(0)=1$，$F(x)f(x)=\cos 2x$，求$\int_0^{\pi}|f(x)|dx$.

七、(本题满分10分)

设$z=f(\sqrt{x^2+y^2})$具有二阶连续偏导数且满足$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$，求$z(x,y)$.

八、(本题满分10分)

试证曲面$z=x^2+y^2+a(a>0)$上任意点处的切平面与曲面$z=x^2+y^2$所围的空间区域的体积是一个常数

九、（本题满分 10 分）

设曲面 S 为曲线 $\begin{cases} z=e^y \\ x=0 \end{cases}$ （$1\le y\le 2$）绕 z 轴旋转一周所成曲面的下侧，计算曲面积分

$$I=\iint_S 4zx\,dydz-2z\,dzdx+(1-z^2)\,dxdy.$$

十、（本题满分 10 分）

初始质量为M_0克，在空气中自由下落的雨点均匀地蒸发着，设每秒蒸发m克，空气阻力和和雨点速度成正比(比例系数为k)，如果开始雨点速度为零. 试求雨点的运动速度和时间的关系.

十一、（本题满分 11 分）

已知级数 $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots$，(1)确定其收敛区间；(2)求它的和函数 $S(x)$.

十二、（本题满分 11 分）

设函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续有界，周期为 1，且 $\int_0^1\varphi(x)dx=0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，设 $a_n=\int_0^1 f(x)\varphi(nx)dx$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.