

# 清北学堂集中培训课程知识点梳理

(2014 年暑假集中培训课程使用)

## 2014 年暑假高中物理竞赛班型知识点梳理

(第三次)

### 资料说明

本导学用于学员在实际授课之前,了解授课方向及重难点。同时还附上部分知识点的详细解读。本班型导学共由 4 份书面资料构成。

#### 清北学堂学科邮箱

|        |                                                    |
|--------|----------------------------------------------------|
| 自主招生邮箱 | <a href="mailto:luon@qbxt.cn">luon@qbxt.cn</a>     |
| 数学竞赛邮箱 | <a href="mailto:niut@qbxt.cn">niut@qbxt.cn</a>     |
| 物理竞赛邮箱 | <a href="mailto:guzy@qbxt.cn">guzy@qbxt.cn</a>     |
| 化学竞赛邮箱 | <a href="mailto:haogc@qbxt.cn">haogc@qbxt.cn</a>   |
| 生物竞赛邮箱 | <a href="mailto:songss@qbxt.cn">songss@qbxt.cn</a> |
| 理科精英邮箱 | <a href="mailto:luon@qbxt.cn">luon@qbxt.cn</a>     |

#### 清北学堂官方博客

<http://blog.sina.com.cn/tsba>



清北学堂微信订阅号  
学习资料最新资讯

2014-6-20 发布

# 2014 年暑假高中物理竞赛班型知识点梳理

## (光学与近代物理部分)

### 目录

|                      |    |
|----------------------|----|
| 知识框架.....            | 3  |
| 重点难点.....            | 4  |
| 知识梳理.....            | 5  |
| 一、    几何光学.....      | 5  |
| 1.    几何光学理论基础.....  | 5  |
| 2.    成像基本公式.....    | 5  |
| 二、    物理光学.....      | 9  |
| 1.    光的波动性.....     | 9  |
| 2.    光的量子性.....     | 16 |
| 3.    不确定关系.....     | 17 |
| 三、    原子和原子核.....    | 17 |
| 1.    原子结构.....      | 17 |
| 2.    原子核.....       | 18 |
| 四、    狭义相对论.....     | 19 |
| 1.    时间膨胀与长度收缩..... | 19 |
| 2.    洛伦兹变换.....     | 19 |
| 3.    同时的相对性.....    | 20 |
| 4.    相对论力学.....     | 20 |
| 例题选讲.....            | 22 |

## 知识框架

|        |           |
|--------|-----------|
| 几何光学   | 几何光学理论基础  |
|        | 成像基本公式    |
| 物理光学   | 光的波动性     |
|        | 光的量子性     |
|        | 不确定关系     |
| 原子和原子核 | 原子结构      |
|        | 原子核       |
| 狭义相对论  | 时间膨胀与长度收缩 |
|        | 洛伦兹变换     |
|        | 同时的相对性    |
|        | 相对论力学     |

## 重点难点

光学与近代物理是竞赛大纲与高考大纲要求相差较多的部分。竞赛对光学与近代物理知识的要求基本可以达到大学物理的要求，因而对高中生而言这两部分内容从知识层面讲较难。

几何光学部分，需要掌握大量的**成像公式**，从基本成像公式出发可解决绝大部分几何光学题目。此外掌握一定的**光路作图**技巧在解决几何光学问题时也十分有益。

波动光学部分，需要理解与**光的波动性**相关的**干涉**、**衍射**现象及相关公式，波动光学题目在竞赛中所占比例不高，理解现象并掌握公式即可解决绝大部分问题。

原子和原子核部分，需要掌握原子结构及**核反应**相关知识。光谱规律要掌握**氢原子光谱**波长公式。

狭义相对论部分，需要掌握**洛伦兹变换**、**时间膨胀**和**长度收缩**变换公式，理解“固有”概念并在解题中正确使用变换公式。由于狭义相对论理论性较强，理解颇有难度。

# 知识梳理

## 一、几何光学

### 1. 几何光学理论基础

#### (1) 光线与几何光学

表示光传播方向的几何线称为光线。光线是一个抽象的数学概念，不是从实际光束中借助有孔光阑分出的一个狭窄部分。因为在孔小到一定程度时将会发生衍射现象，不可能分出无限窄的一条光束。

在光学成像问题中，借助光线概念和基本实验定律及集合定律，可以进行一切必要的计算而不涉及光的本性问题，这部分以实验定律和集合定律为基础的光学称为几何光学。

#### (2) 基本实验定律

**光的直线传播定律：**光在均匀介质中是沿直线传播的，即在均匀介质中，光线为一直线。

**光的独立传播定律：**自不同方向或不同物体发出的光线相交时，对每一光线的独立传播不发生影响。

**光的反射定律：**入射光线、入射点出反射面的法线和反射光线在同一平面内，且入射光线与法线的夹角  $i_1$  等于反射光线与法线的夹角  $i_2$ 。

**光的折射定律：**入射光线、折射光线和入射点处分界面的法线在同一平面内，且入射光线和折射光线分别位于法线两侧，入射角  $i_1$  和折射角  $i_2$  满足  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ 。其中， $n_1$  和  $n_2$  分别是介质 1 和介质 2 的折射率。

全反射现象：光由光密介质射入光疏介质时，由折射定律知折射角大于入射角。对应折

射角为  $90^\circ$  时的入射角称为临界角  $i_c$ ，有  $i_c = \arcsin \frac{n_{\text{疏}}}{n_{\text{密}}}$ 。当入射角大于临界角  $i_c$

时，折射光线不再存在，入射光全部反射，这种现象叫全反射现象。

#### (3) 费马原理

均匀介质中，光线行径的几何路径长度  $s$  与介质折射率  $n$  的乘积称为光在该介质中所走的光程，用  $\Delta$  表示，即  $\Delta = ns$ 。又  $ns = \frac{c}{v}s = ct$ ，即光程可认为是相同时间内光在真空中通过的路程。

费马原理指出：光在指定的两点间传播，实际的光程总是一个极值。也就是说，光沿光程值为最小、最大或恒定的路径传播。费马原理是几何光学中一个最普遍的基本原理，在折射率连续变化的介质中费马原理的应用十分重要。

### 2. 成像基本公式

#### (1) 物方空间和像方空间

对某一光学系统，未经它变换前的实际入射单心光束所在的空间称为物方空间，经系统变换后的实际出射单心光束所在的空间称为像方空间。所有的物方量，如物距  $S$ 、物方焦距  $f$  都永远属于物方空间，所有的像方量都永远属于像方空间。

#### (2) 正负号法则

在成像公式中涉及物距  $s$ 、像距  $s'$ 、球面曲率半径  $r$ 、物方焦距  $f$  和像方焦距  $f'$  等，均可正可负，需用一种标准来指定其正负号的取法。这里需要说明的是正负号法则不止一种，选取任一种法则都可得到正确的结论，使用何种法则由个人习惯决定。这里给出一种可行的正

负号法则：

- i. 轴向线段：从球面顶点算起，沿光轴向左的线段为负值，向右的线段为正值。
- ii. 横向线段：从光轴算起，向上的横向线段为正，向下的为负。
- iii. 示意图中线段长度均已绝对值标记，如物距  $s$  为负，则示意图中标记为  $(-s)$ 。

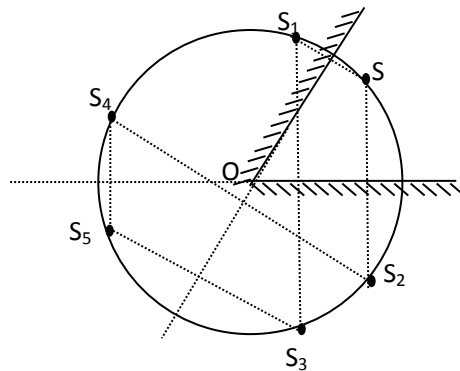
若使用这种正负号法则，则  $s > 0$ ，物为虚物； $s < 0$ ，物为实物； $s' > 0$ ，像为实像； $s' < 0$ ，像为虚像。

### (3) 平面反射成像

平面镜成像物与像关于平面镜对称。平面镜是最简单的、不改变光束单心性的、能完善成像的光学系统。单平面镜反射成像很简单，像与物关于平面镜对称。

由两个以上的平面镜组成的光学系统叫做组合平面镜，射向组合平面镜的光线往往要在平面镜之间发生多次反射，因而会出现生成复像的现象。成像时遵循依次成像原则，即某一平面镜成的像是其他平面镜的物，直至所有像与物都确定。

两面平面镜  $AO$  和  $BO$  成  $60^\circ$  角放置，用，很容易确定像的位置：①以  $O$  为圆心、 $OS$  为半径作圆；②过  $S$  做  $AO$  和  $BO$  的垂线与圆交于  $S_1$  和  $S_2$ ；③过  $S_1$  和  $S_2$  作  $BO$  和  $AO$  的垂线与圆交于  $S_3$  和  $S_4$ ；④过  $S_3$  和  $S_4$  作  $AO$  和  $BO$  的垂线与圆交于  $S_5$ ， $S_1 \sim S_5$  便是  $S$  在两平面镜中的 5 个像。



### (4) 平面折射成像

#### i. 单平面折射成像

平面折射成像时，入射角  $i \approx 0$  时，折射光束几乎仍保持为单心，入射角越大，折射光束的像散越显著。当入射角  $i \approx 0$  时，像的深度  $y'$  与实际深度  $y$  的关系为  $y' = \frac{n_2}{n_1} y$ 。

#### ii. 棱镜折射与色散

入射光线经棱镜折射后改变了方向，出射光线与入射光线之间的夹角称为偏向角，由图的几何关系知

$$\delta = (i_1 - i_2) + (i'_1 - i'_2) = i_1 + i'_1 - \alpha$$

$$\text{其中 } \sin i_1 = n \sin i_2, \sin i'_1 = n \sin i'_2.$$

①当  $i_1$ ， $\alpha$  很小时， $i_1 \approx ni_2$ ， $ni'_1 = i'_2$  即

$$\delta = (n-1)\alpha$$

厚度不计顶角  $\alpha$  很小的三棱镜称之为光楔，对近轴光线而言， $\delta$  与入射角大小无关，各成像光线经光楔后都偏折同样的角度  $\delta$ ，所以作光楔折射成像光路图时可画成一使光线产生偏折角的薄平板，如右图。设物点  $S$  离光楔  $L$ ，则像点  $S'$  在  $S$  的正上方  $h = l\delta = (n-1)\alpha$ 。

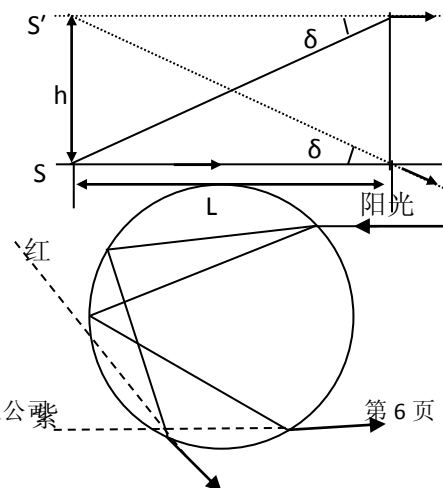
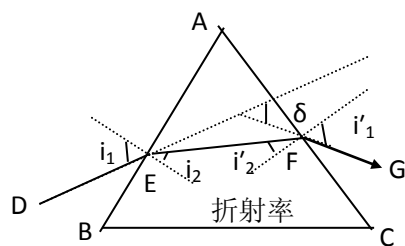


图 1-3-6

②当棱镜中折射光线相对于顶角  $\alpha$  对称成等腰三角形时,  $i_1 = i_1'$ ,  $i_2 = i_2'$ 。

$$\sin i_1 = \sin i_1' = n \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\delta = 2 \arcsin(n \sin \frac{\alpha}{2}) - \alpha$$

或

$$\sin \frac{\delta + \alpha}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2}$$

此为棱镜的最小偏向角  $\delta$ , 此式可用来测棱镜的折射率。

由于同一种介质对不同色光有不同的折射率, 各种色光的偏折角不同, 所以白光经过棱镜折射后产生色散现象。虹和霓是太阳被大气中的小水滴折射和反射形成的色散现象。阳光在水滴上经两次折射和一次反射如图 1-3-6。形成内紫外红的虹; 阳光经小滴两次折射和两次反射如图 1-3-7, 形成内红外紫的霓。由于霓经过一次反射, 因此光线较弱, 不容易看到。

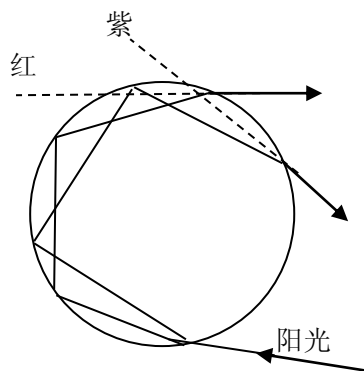


图 1-3-7

#### (5) 单球面折射成像

i. 单球面对近轴光线的折射成像公式为  $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$ , 式中  $s$  是物距,  $s'$  是像距,  $r$  是球面曲率半径,  $n$  和  $n'$  分别为单折射球面的物方折射率和像方折射率。定义成像公式中仅与折射率和球面曲率半径有关的量  $\Phi = \frac{n' - n}{r}$  为**光焦度**, 单位是  $[\text{米}^{-1}]$  或  $[\text{屈光度}]$ , 数值乘以 100 就是眼镜片的度数。

ii. 物距  $s \rightarrow \infty$  时的像距称为像方焦距, 单球面折射像方焦距  $f' = \frac{n'}{n' - n} r$ ; 像距  $s' \rightarrow \infty$  时的物距称为物方焦距, 单球面折射物方焦距  $f = -\frac{n}{n' - n} r$ 。

iii. 高斯成像公式:  $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$ 。

iv. 垂直于光轴的线段  $y$  经系统变换后仍是垂直于光轴的线段  $y'$ , 且  $y'$  可正可负, 这时像长  $y'$  与物长  $y$  的比值为垂轴放大率  $\beta$ 。单球面折射垂轴放大率  $\beta = \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's}$ 。且

有  $\beta < 0$ , 实物成实像, 虚物成虚像, 正物成倒像;  $\beta > 0$ , 实物成虚像, 虚物成实像, 正物成正像;  $|\beta| > 1$ , 得放大像;  $|\beta| < 1$ , 得缩小像;  $|\beta| = 1$ , 像与物同大小。

#### (6) 单球面反射成像

将折射定律中的折射率人为地规定为  $n' = -n$  则可得到反射定律。单球面反射成像可看做

单球面折射成像在  $n'=-n$  时的特例，即

- i. 成像公式:  $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}$
- ii. 光焦度:  $\Phi = -\frac{2n}{r} = \frac{2n'}{r}$
- iii. 焦距:  $f = f' = \frac{r}{2}$
- iv. 垂轴放大率:  $\beta = \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's} = -\frac{s'}{s}$
- v. 单球面折射有关像的性质的讨论仍然成立，高斯成像公式也成立，但  $s'>0$  为虚像， $s'<0$  为实像。

(7) 薄透镜成像

透镜由两个共轴球面构成，若透镜的厚度与球面的曲率半径相比不能忽略，则成为**厚透镜**；若可略去不计，则称为**薄透镜**。

- i. 设薄透镜由两个曲率半径分别为  $r_1$  和  $r_2$  的折射球面组成，透镜的折射率为  $n$ ，左右两侧介质的折射率分别为  $n_1$  和  $n_2$ ，则**近轴条件**下薄透镜的成像公式为

$$\frac{n_2}{s'} - \frac{n_1}{s} = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}$$

- ii. 薄透镜的光焦度:  $\Phi = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}$

$$\text{iii. 焦距: } f = -\frac{n_1}{\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}}, \quad f' = \frac{n_2}{\frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2}}$$

- iv. 高斯成像公式:  $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$ ，对置于空气中的薄透镜，由  $n_1=n_2=1$ ，成像公式变为

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

- v. 垂轴放大率:  $\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 s'}{n_2 s}$

vi. 焦平面与副光轴

薄透镜中，过焦点且垂直于主光轴的平面为**焦平面**，过光心与焦平面相交的直线都可作为透镜的**副光轴**。

作透镜光学系统的光路时，任意一条光线均可使用焦平面与副光轴作出其折射光线。方法如下：

先取入射光线与焦平面的交点  $B$ ，过光心  $O$  和该交点  $B$  作直线  $OB$ ，则  $OB$  为透镜对该入射光线的副光轴， $B$  称为透镜对该入射光线的副焦点。类似过焦点光线的折射规律，**折射光线平行于  $OB$** 。

(8) 共轴光具组成像



多个光学元件组成的共轴光学系统称为共轴光具组。在近轴条件下，共轴光具组成像问题可采用**逐次成像法**，即把前一个元件所成的像视作后一个元件的物，依次套用成像公式进行求解。

### (9) 视角、视角放大

物体的两端对**人眼光心所张的角度**叫做**视角**，视角的大小跟物体的尺寸及物体到人眼的距离有关。当两物点（或同一物体上的两点）对人眼视角大小  $\varphi$ （约  $2.9 \times 10^{-4} \text{rad}$ ）时，才能被人眼区分。

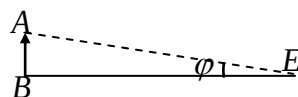
在看小物体时，为了增大视角就要缩短物眼间距离，但当其小于人眼近点距离时，视网膜上所成的像反而模糊不清。为此，必须使用光学仪器来增大视角。

右图是人眼（E）通过放大镜观察物体 AB 的像  $A'B'$ ，当人眼靠近光心时视角。

$$\phi' = \angle A'OB' = \frac{A'B'}{B'O} = \frac{AB}{BO}$$

若物体很靠近焦点，且成像于明视距离，则：

$$B'O = 25\text{cm}, \quad BO \approx f$$



$$\phi' = \frac{A'B'}{B'O} = \frac{AB}{f}$$

若不用放大镜将物体置于明视距离，如图， $BE=25\text{cm}$ ，则视角：

$$\phi = \angle AEB = \frac{AB}{25\text{cm}}$$

把用光学仪器观察虚像所得视角  $\phi'$  与将物体放在虚像位置上直接观察的视角  $\phi$  的比值

叫做光学仪器的视角放大率。用  $\beta$  表示**视角放大率**，即有  $\beta = \frac{\phi'}{\phi}$

## 二、 物理光学

### 1. 光的波动性

#### (1) 光的速度、波长、频率和折射率

光波就是**电磁波**。**真空中的光速**  $c=3.0 \times 10^8 \text{m/s}$ ，在折射率为  $n$  的介质中光速  $v=c/n$ 。

光波的频率  $\nu$ 、光波在真空中的波长  $\lambda$  与光速  $c$  的关系为  $\nu\lambda=c$ 。

可见光的波长在  $0.40\mu\text{m}$  到  $0.76\mu\text{m}$  之间。波长**长于**  $0.76\mu\text{m}$  的光波称为**红外线**，波长短于  $0.40\mu\text{m}$  光波称为**紫外线**。

#### (2) 光的干涉

##### i. 光的相干迭加

两列波的迭加问题可以归结为讨论空间任一点电磁振动的矢量迭加，所以，**合振动平均强度**为  $I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

其中  $A_1$ 、 $A_2$  为振幅， $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  为振动初相位。

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \begin{cases} 2j\pi, j = 0, 1, 2, \dots & I = (A_1 + A_2)^2 \\ (2j+1)\pi, j = 0, 1, 2, \dots & I = (A_1 - A_2)^2 \\ \text{其他且 } A_1 = A_2 & I = 4A^2 \cos^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \end{cases}$$

## ii. 双缝干涉

如图所示，在单色光平行光前放一狭缝  $S$ ， $S$  前又放有两条平行狭缝  $S_1$ 、 $S_2$ ，它们与  $S$  平行并等距，这时  $S_1$ 、 $S_2$  构成一对相干光源。从  $S$  发出的光波波阵面到达  $S_1$  和  $S_2$  处时，再从  $S_1$ 、 $S_2$  传出的光是从同一波阵面分出的两相干光。它们在相遇点将形成相干现象。可知，相干光是来自同一列波面的两部分，这种方法产生的干涉称为**分波阵面法**。

**干涉条纹的位置：**

如图所示， $S_1$ 、 $S_2$  为两缝，相距  $d$ ， $E$  为屏，距缝为  $D$ ， $O$  为  $S_1$ 、 $S_2$  连线与  $E$  交点， $P$  为  $E$  上的一点，距  $O$  为  $x$ ，距  $S_1$ 、 $S_2$  为  $r_1$ 、 $r_2$ ，由  $S_1$ 、 $S_2$  传出的光在  $P$  点相遇时，产生的波程

差为： $\delta = r_2 - r_1$ ，位相差为： $\Delta\phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ ，

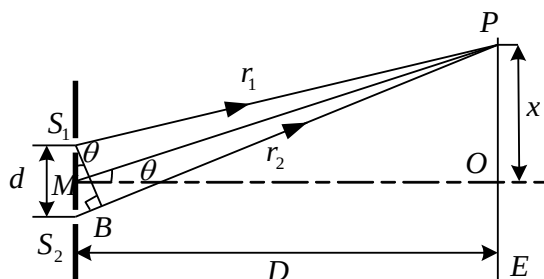


图 14-3

作  $S_1B \perp S_2P$ ，可知

$$\delta = r_2 - r_1 = S_2B = d \sin \theta = d \tan \theta = d \frac{x}{D} \quad (\theta \text{ 很小 } d \ll D), \text{ 即 } \delta = d \frac{x}{D}。$$

**亮纹位置：**

当  $\Delta\phi = \pm 2k\pi$  时，即  $\delta = \pm k\lambda (k = 0, 1, 2, \dots)$  时， $P$  为亮纹，可有  $d \frac{x}{D} = \pm k\lambda$ ，即

$$x = \pm k \frac{D\lambda}{d} (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$k=0$  对应  $O$  点，为中央明纹， $k = 0, 1, 2, \dots$  依次为一级、二级...明纹，明纹关于中央亮纹对称，**相邻明纹间距**为：

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = (k+1) \frac{D\lambda}{d} - k \frac{D\lambda}{d} = \frac{D\lambda}{d}, \text{ 即 } \Delta x = \frac{D\lambda}{d} \text{ (等间距)}。$$

**暗纹位置：**

当  $\Delta\phi = \pm(2k-1)\pi$  时，即  $\delta = \pm(2k-1)\frac{\lambda}{2}$  时， $P$  为暗纹，可有  $d \frac{x}{D} = \pm(2k-1)\frac{\lambda}{2}$ ，

即

$$x = \pm(2k-1) \frac{D\lambda}{2d} \quad (k=1, 2, \dots)$$

暗纹关于  $O$  对称分布，相邻暗纹间距为

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = [2(k+1)-1] \frac{D\lambda}{2d} - (2k-1) \frac{D\lambda}{2d} = \frac{D\lambda}{d}, \text{ 即 } \Delta x = \frac{D\lambda}{d} \text{ (等间距).}$$

### iii. 类双缝干涉

双缝干涉实验说明，把一个光源变成“两相干光源”即可实现光的干涉。类似装置还有

#### ① 菲涅耳双面镜：

如图 2-1-2 所示，夹角  $\alpha$  很小的两个平面镜构成一个双面镜（图中  $\alpha$  已经被夸大了）。点光源  $S$  经双面镜生成的像  $S_1$  和  $S_2$  就是两个相干光源。

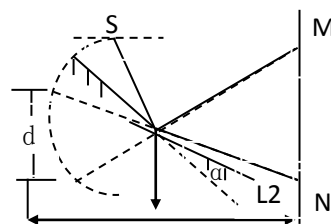


图 2-1-2

#### ② 埃洛镜

如图 2-1-3 所示，一个与平面镜  $L$  距离  $d$  很小（数量级  $0.1\text{mm}$ ）的点光源  $S$ ，它的一部分光线掠入射到平面镜，其反射光线与未经反射的光线叠加在屏上产生干涉条纹。

因此  $S$  和  $S'$  就是相干光源。但应当注意，光线从光疏介质射入光密介质，反射光与入射光相位差  $\pi$ ，即发生“半波损失”，因此计算光程差时，反射光应有  $\frac{\lambda}{2}$  的

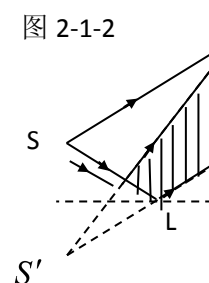


图 2-1-3

附加光程差。

#### ③ 双棱镜

如图 2-1-4 所示，平行光垂直入射，经双棱镜上、下两半折射后，成为两束倾角均为  $\theta$  的相干平行光。

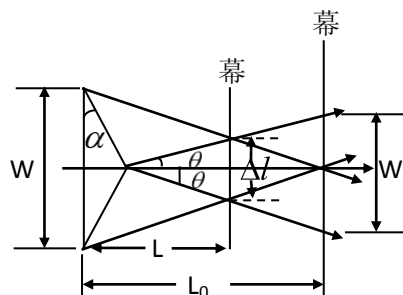


图 2-1-4

#### ④ 对切双透镜

如图 2-1-6 所示，过光心将透镜对切，拉开一小段距离，中间加挡光板（图 a）；或错开一段距离（图 b）；或两片切口各磨去一些再胶合（图 c）。置于透镜原主轴上的各点光源或平行

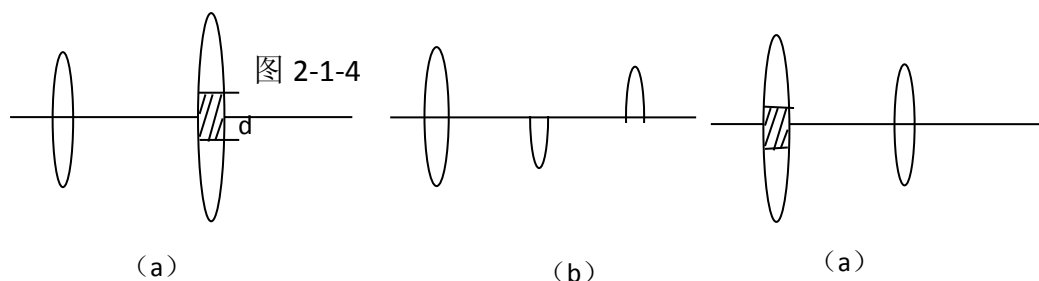


图 2-1-6

于主光轴的平行光线，经过对切透镜折射后，在叠加区也可以发生干涉。

### iv. 薄膜干涉

当透明薄膜的厚度与光波波长可以相比时，入射薄膜表面的光线薄膜前后两个表面反射的光线发生干涉。

### ①等倾干涉条纹

如图 2-1-7 所示，光线  $a$  入射到厚度为  $h$ ，折射率为  $n_1$  的薄膜的上表面，其反射光线是  $a_1$ ，折射光线是  $b$ ；光线  $b$  在下表面发生反射和折射，反射光线是  $b_1$ ，折射光线是  $c$ ；光线  $b_1$  再经过上、下表面的反射和折射，依次得到  $b_2$ 、 $a_2$ 、 $c_2$  等光线。其中之一两束光叠加， $a_1$ 、 $a_2$  两束光叠加都能产生干涉现象。

$a$ 、 $b$  光线的光程差

$$\begin{aligned}
 \delta &= n_2(AC + CB) - n_1 AD \\
 &= 2n_2 \cdot \frac{h}{\cos \gamma} - 2n_1 \cdot h \tan \gamma \cdot \sin i \\
 &= \frac{2n_2 h}{\cos \gamma} \cdot (1 - \sin^2 \gamma) \\
 &= 2n_2 h \cos \gamma = 2h \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i}
 \end{aligned}$$

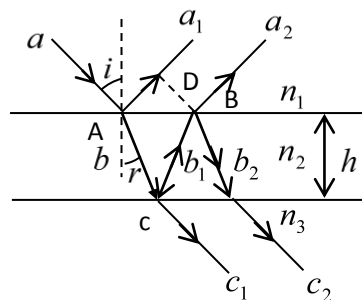


图 2-1-7

如果  $i=0$ ，则上式化简为  $\delta = 2n_2 h$ 。

由于光线在界面上发生反射时可能出现“半波损失”，因此可能还必须有“附加光程差”， $\delta' = \frac{\lambda}{2}$  是否需要增加此项，应当根据界面两侧的介质的折射率来决定。

当  $n_1 > n_2 > n_3$  时，反射线  $a_1$ 、 $b_1$  都是从光密介质到光疏介质，没有“半波损失”，对于  $a_1$ 、 $a_2$ ，不需增加  $\delta'$ ；但反射线  $b_2$  是从光疏介质到光密介质，有“半波损失”，因此对于  $c_1$ 、 $c_2$ ，需要增加  $\delta'$ 。当  $n_1 < n_2 < n_3$  时，反射线  $a_1$ 、 $b_1$  都有“半波损失”，对于  $a_1$ 、 $a_2$  仍然不需要增加  $\delta'$ ；而反射线  $b_2$  没有“半波损失”，对于  $c_1$ 、 $c_2$  仍然必须增加  $\delta'$ 。同理，当  $n_1 > n_2 > n_3$  或  $n_1 < n_2 < n_3$  时，对于  $a_1$ 、 $a_2$  需要增加  $\delta'$ ；对于  $c_1$ 、 $c_2$  不需要增加  $\delta'$ 。

在发生薄膜干涉时，如果总光程差等于波长的整数倍时，增强干涉；如果总光程差等于半波长的奇数倍时，削弱干涉。

入射角  $i$  越小，光程差  $(\delta + \delta')$  越小，干涉级也越低。在等倾环纹中，半径越大的圆环对应的  $i$  也越大，所以中心处的干涉级最高，越向外的圆环纹干涉级越低。此外，从中央外各相邻明或相邻暗环间的距离也不相同。中央的环纹间的距离较大，环纹较稀疏，越向外，环纹间的距离越小，环纹越密集。

### ②等厚干涉条纹

当一束平行光入射到厚度不均匀的透明介质薄膜上，在薄膜表面上也可以产生干涉现象。由于薄膜上下表面的不平行，从上表面反射的光线  $b_1$  和从下面表反射并透出上表面的光线  $a_1$  也不平行，如图 2-1-8 所示，两光线  $a_1$  和  $b_1$  的光程差的精确计算比较困难，但在膜很薄的情况下，A 点和 B 点距离很近，因而可认为 AC 近似等于 BC，并在这一区域的薄膜的厚度可看作相等设为  $h$ ，其光程差近似为

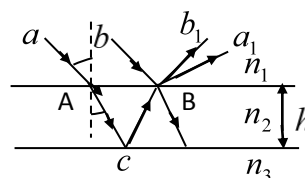


图 2-1-8

$$2n_2 h \cos r + \delta' = 2h \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i} + \delta'$$

当  $i$  保持不变时，光程差仅与膜的厚度有关，凡厚度相同的地方，光程差相同，

从而对应同一条干涉条纹，将此类干涉条纹称为等厚干涉条纹。

当  $i$  很小时，光程差公式可简化为  $2n_2h + \delta'$ 。

### ③劈尖膜

如图 2-1-9 所示，两块平面玻璃片，一端互相叠合，另一端夹一薄纸片（为了便于说明问题和易于作图，图中纸片的厚度特别予以放大），这时，在两玻璃片之间形成的空气薄膜称为空气劈尖。两玻璃片的交线称为棱边，在平行于棱边的线上，劈尖的厚度是相等的。劈尖的干涉条纹是一种**等厚条纹**。

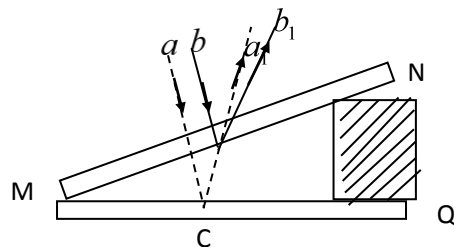


图 2-1-9

当平行单色光垂直 ( $i=0$ ) 入射于这样的两玻璃片时，在空气劈尖 ( $n_2=1$ ) 的上下两表面所引起的反射光线将形成相干光。如图 1-2-9 所示，劈尖在 C 点处的厚度为  $h$ ，在劈尖上下表面反射

的两光线之间的光程差是  $2h + \frac{\lambda}{2}$ 。由于从空气劈尖的上表面（即玻璃与空气分界面）和从空气劈尖的下表面（即空气与玻璃分界面）反射的情况不同，所以在式中仍有附加的半波长光程差。由此

$$2h + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, k=1,2,3,\dots, \text{ 为明纹}$$

$$2h + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}, k=1,2,3,\dots, \text{ 为暗纹}$$

干涉条纹为平行于劈尖棱边的直线条纹。每一明、暗条纹都与一定的  $k$  做相当，也就是与劈尖的一定厚度  $h$  相当。

任何两个相邻的明纹或暗纹之间的距离  $l$  由下式决定：

$$l \sin \theta = h_{k+1} - h_k = \frac{1}{2}(k+1)\lambda - \frac{1}{2}k\lambda = \frac{\lambda}{2}$$

式中  $\theta$  为劈尖的夹角。显然，干涉条纹是等间距的，而且  $\theta$  愈小，干涉条纹愈疏； $\theta$  愈大，干涉条纹愈密。如果劈尖的夹角  $\theta$  相当大，干涉条纹就将密得无法分开。因此，干涉条纹只能在很尖的劈尖上看到。

### ④牛顿环

在一块光平的玻璃片 B 上，放曲率半径  $R$  很大的平凸透镜 A，在 A、B 之间形成一劈尖形空气薄层。当平行光束垂直地射向平凸透镜时，可以观察到在透镜表面出现一组干涉条纹，这些干涉条纹是以接触点 O 为中心的同心圆环，称为牛顿环。

牛顿环是由**透镜下表面反射**的光和**平面玻璃上表面反射**的光发生干涉而形成的，这也是一种**等厚条纹**。明暗条纹处所对应的空气层厚度  $h$  应该满足：

$$2h + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, k=1,2,3,\dots, \text{ 为明环}$$

$$2h + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}, k=1,2,3,\dots, \text{ 为暗环}$$

从图 2-1-10 中的直角三角形得  $r^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2$

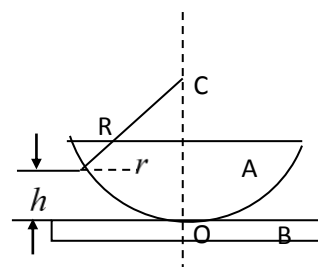


图 2-1-10

因  $R \gg h$ , 所以  $h^2 \ll 2Rh$ , 得  $h = \frac{r^2}{2R}$

上式说明  $h$  与  $r$  的平方成正比, 所以离开中心愈远, 光程差增加愈快, 所看到的牛顿环也变得愈来愈密。由以上两式, 可求得在反射光中的明环和暗环的半径分别为:

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1) \cdot R\lambda}{2}}, k=1, 2, 3, \dots, \text{为明环}$$

$$r = \sqrt{k \cdot R \cdot \lambda}, k=0, 1, 2, \dots \text{为暗环}$$

随着级数  $k$  的增大。干涉条纹变密。对于第  $k$  级和第  $k+m$  级的暗环

$$r_k^2 = kR\lambda$$

$$r_{k+m}^2 = (k+m) \cdot R\lambda$$

$$r_{k+m}^2 - r_k^2 = mR\lambda$$

由此得透镜的曲率半径

$$R = \frac{1}{m\lambda} (r_{k+m}^2 - r_k^2) = \frac{1}{m\lambda} (r_{k+m} - r_k) \cdot (r_{k+m} + r_k)$$

牛顿环中心处相应的空气层厚度  $h=0$ , 而实验观察到是一暗斑, 这是因为光疏介质到光密介质界面反射时有相位突变的缘故。

### (3) 光的衍射

光绕过障碍物偏离直线传播而进入几何阴影, 并在屏幕上出现光强不均匀分布的现象, 叫做光的衍射。

#### i. 惠更斯—菲涅耳原理

##### 惠更斯原理

惠更斯指出, 由光源发出的光波, 在同一时刻  $t$  时它所达到的各点的集合所构成的面, 叫做此时刻的波阵面 (又称为波前), 在同一波阵面上各点的相位都相同, 且波阵面上的各点又都作为新的波源向外发射子波, 子波相遇时可以互相叠加, 历时  $\Delta t$  后, 这些子波的包络面就是  $t+\Delta t$  时刻的新的波阵面。波的传播方向与波阵面垂直, 波阵面是一个平面的波叫做平面波, 其传播方向与此平面垂直, 波阵面是一个球面 (或球面的一部分) 的波叫做球面波, 其传播方向为沿球面的半径方向, 如图 2-1-33。

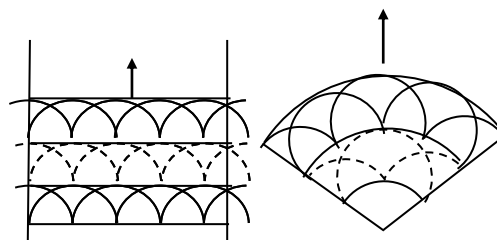


图 2-1-33

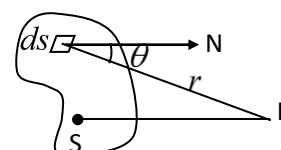


图 2-1-34

波面  $S$  上每个面积单元  $ds$  都可看作新的波源, 它们均发出次波, 波面前方空间某一点  $P$  的振动可以由  $S$  面上所有面积所发出的次波在该点迭加后的合振幅来表示。

面积元  $ds$  所发出各次波的振幅和位相符合下列四个假设: 在波动理论中, 波面是一个等位相面, 因而可以认为  $ds$  面上各点所发出的所有次波都有相同的初位相 (可令  $\varphi_0=0$ )。次波在  $P$  点处的振幅与  $r$  成反比。从面积元  $ds$  所发出的次波的振幅正比于  $ds$  的面积, 且与

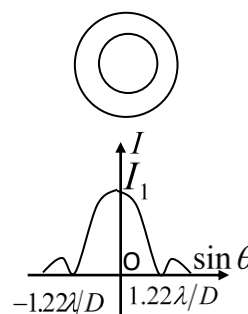


图 2-1-37



倾角  $\theta$  有关, 其中  $\theta$  为  $ds$  的法线  $N$  与  $ds$  到  $P$  点的连线  $r$  之间的夹角, 即从  $ds$  发出的次波到达  $P$  点时的振幅随  $\theta$  的增大而减小 (倾斜因数)。次波在  $P$  点处的位相, 由光程  $\Delta = nr$  决定  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$ 。

### 泊松亮斑

当时法国著名的数学家泊松在阅读了菲涅耳的报告后指出: 按照菲涅耳的理论, 如果让平行光垂直照射不透光的圆盘, 那么在圆盘后面的光屏上所留下的黑影中央将会出现一个亮斑。因为垂直于圆盘的平行光照到时, 圆盘边缘将位于同一波阵面上, 各点的相位相同, 它们所发生的子波到达黑影中央的光程差为零, 应当出现增强干涉。泊松原想不能观察到这一亮斑来否定波动说, 但菲涅耳勇敢地面对挑战, 用实验得到了这个亮斑。

## ii. 圆孔与圆屏的菲涅耳衍射

### 圆孔衍射

将一束光 (如激光) 投射在一个小圆孔上, 并在距孔 1~2 米处放置一玻璃屏, 则在屏上可看到小圆孔的衍射花样。

其中波带为  $k = \frac{\rho^2}{\lambda} \left( \frac{1}{v_0} + \frac{1}{R} \right)$  其中由圆孔半径  $P$ , 光的波长  $\lambda$ , 圆孔位置 ( $v_0$  与  $R$ ) 确定。

### 圆屏衍射

不问圆屏大小和位置怎样, 圆屏几何影子的中心永远有光, 泊松亮斑即典型。

## iii. 单缝和圆孔的夫琅和费衍射

夫琅和费衍射又称远场衍射, 使用的是平行光线, 即可认为光源距离为无限远。它不同于光源距离有限的菲涅耳衍射。在实验装置中更有价值。

夫琅和费衍射指用平行光照射障碍物时在无穷远处的衍射图像。由于无穷远与透镜的焦平面上是一对共轭面, 所以可以用透镜将无穷远处的衍射花样成像于焦平面上

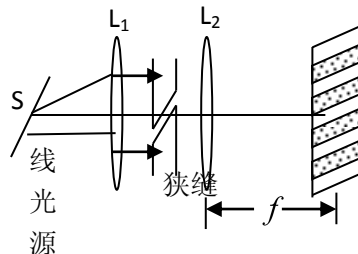


图 2-1-35

单缝的夫琅和费衍射装置如图 2-1-35 所示,  $S$  为与狭缝平行的线光源, 置于  $L_1$  的前半焦平面上, 由惠更斯—菲涅耳原理可计算出屏上任一点  $P$  的光强为  $I(\theta) = I_0 \cdot \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$ , 式中,  $\beta = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \theta$ ,  $\lambda$  为波长,  $b$  为狭缝宽度,  $\theta$  为  $P$  点对  $L_2$  中心轴线所张的角,  $I_0$  为中心点光强。

单缝的夫琅和费衍射图像和光强分布如图 2-1-36, 在衍射光强分布中, 可知  $\sin \theta = \frac{m\lambda}{b}$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$  时,  $I = 0$ 。其中心条纹

对应的夹角为  $\frac{2\lambda}{b}$ , 屏上的宽度则为  $\frac{2\lambda}{b} \cdot f$  ( $f$  为  $L_2$  的焦距)。它

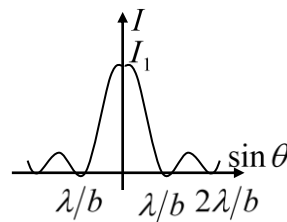


图 2-1-36

表明，当狭缝宽度  $b$  变小时，中心衍射条纹变宽。

若用点光源和圆孔分别代替图 2-1-35 中的线光源  $S$  和狭缝，在屏便可得到小圆孔的衍射花样，其光强分布如图 2-1-37， $D$  为小圆孔的直径，中央亮圆斑称为爱里斑，爱里斑边缘对  $L_2$  中心光轴的夹角为  $\theta \approx 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$ 。

圆孔衍射是非常重要的，在光学仪器中，光学元件的边缘一般就是圆孔，对于一个物点，由于这元件边缘的衍射，所成的像不再是点，而是一个爱里斑，这将影响光学仪器的分辨相邻物点的能力。根据瑞利判据，当两个爱里斑中心角距离为  $1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$  时，这两个像点刚好可以分辨，小于  $1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$  就不可分辨了。

#### iv. 衍射光栅

由大量等宽度等间距的平行狭缝所组成的光学元件称为衍射光栅，将衍射光栅放置在图 2-1-35 的狭缝位置上，在衍射屏上便可观察到瑞利的亮条纹，这些亮条纹所对应的角度  $\theta$  应满足  $d \sin \theta = m\lambda, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ， $d$  为两狭缝之间的间距， $m$  称为衍射级数。上式称为光栅方程。从方程中可以看出。不同的波长  $\lambda$ ，其亮条纹所对应的  $\theta$  不同，所以光栅可以用来作光谱仪器的色散元件。

## 2. 光的量子性

### (1) 光电效应

电子在光的作用下从金属表面发射出来的现象称为**光电效应**。逃逸出的电子称为光电子。光电效应是光的量子性的直接反映。

为解释光电效应，爱因斯坦提出光量子（简称光子）概念，单个光子的能量  $E$  与频率的  $\nu$  关系为  $E = h\nu$ ，式中  $h$  为普朗克常数。

光电效应方程为  $h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + W$ ，即入射光子的能量等于刚从材料打出的光电子的初始动能加光电子逃逸所需的**逸出功**。

光电效应方程说明，光电效应的产生只与光子能量有关，而与光线强弱无关，即单个光子能量达到一定值后，即使光线很弱也能产生光电子；而单个光子的能量未达到临界值时，即使光线很强也不能产生光电子。

### (2) 光子的质量和动量

光子的质量  $m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$ ，但光子的**静止质量为零**。光子的动量  $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ 。

### (3) 康普顿效应

当 X 射线或  $\gamma$  射线被碳、石蜡等轻原子物质散射后，其波长会变长，这一现象称为康普顿效应。

用  $\theta$  表示入射射线方向与散射射线方向的夹角，则波长变化量  $\Delta\lambda$  与角  $\theta$  的关系为

$$\Delta\lambda = k(1 - \cos \theta)$$

式中  $k=0.0241\text{\AA}$ ，是一个通过实验测出的常数，等于散射角为  $90^\circ$  时的波长变化。

### (4) 光压

从光子具有动量这一假设出发还可直接说明光压的作用。光压指光子流产生的压强，计算公式为

$$P = (1 + \rho) \frac{\Phi}{c}$$



式中  $\Phi$  为入射光强,  $\rho$  为壁的反射系数。

### 3. 不确定关系

#### (1) 波粒二象性与物质波

理论和实验结果表明, 所有实物粒子都同时具有波动性和粒子性, 也就是物质的波粒二象性。描述粒子特征的物理量(能量  $E$  和动量  $p$ ) 与描述波动特征的物理量(频率  $\nu$  与波长  $\lambda$ ) 的关系为

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

由此所有实物粒子都可看作物质波, 其波长为  $\lambda = h/p$ , 称为德布罗意波长。

#### (2) 不确定关系

海森伯从量子理论推得, 测量一个微粒的**位置**时, 如果**不确定范围**是  $\Delta x$ , 那么同时测量其**动量**也有一个**不确定范围**  $\Delta p$ , 它们之间的关系为  $\Delta p \Delta x \approx h$ , 式中  $h$  为普朗克常数。

能量与时间之间也存在不确定关系。一个体系(如原子体系)处于某一状态, 如果时间有一段  $\Delta t$  不确定, 那么它的能量也有一个范围  $\Delta E$  不确定, 两个不确定范围的关系为  $\Delta E \Delta t \approx h$

## 三、原子和原子核

### 1. 原子结构

#### (1) 原子的核式结构

1911 年卢瑟福提出了原子的**核式结构**模型: 原子中的正电荷与几乎全部质量都集中在原子中心的一个很小的核里, 这带正电的原子核对每个电子施以库伦吸引力, 使分布在核外的电子绕核旋转。由实验数据估计出**原子核的大小**约为  $10^{-15}\text{m}$ , **原子的大小**约为  $10^{-10}\text{m}$ 。

#### (2) 氢原子光谱规律

1889 年里德伯发现氢原子光谱的所有波长有一个普遍的经验公式, 为

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad n_1 = 1, 2, 3, \dots \quad n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3, \dots$$

式中,  $R = 1.096776 \times 10^7 \text{m}^{-1}$ , 称为里德伯常数。上式称为里德伯方程。对每一个  $n_1$ , 里德伯方程构成一个谱线系:

- $n_1 = 1 \quad n_2 = 2, 3, 4, \dots$  赖曼系 (紫外区)
- $n_1 = 2 \quad n_2 = 3, 4, 5, \dots$  巴耳末系 (可见光区)
- $n_1 = 3 \quad n_2 = 4, 5, 6, \dots$  帕邢系 (红外区)
- $n_1 = 4 \quad n_2 = 5, 6, 7, \dots$  布喇开系 (远红外区)
- $n_1 = 5 \quad n_2 = 6, 7, 8, \dots$  普丰特系 (远红外区)

#### (3) 波尔模型理论

##### i. 定态假设

原子中的电子绕核作圆周运动, 并不向外辐射能量, 其轨道半径只能取一系列**不连续**值, 对应的原子处于稳定的能量状态。

##### ii. 跃迁假设

电子从一个定态轨道(设对应的原子定态能量为  $E_{n_2}$ ) 跃迁到另一定态轨道(设定态能量为  $E_{n_1}$ ) 上时, 会辐射或吸收一定频率的光子, 能量由这两种定态的能量差决定, 即

$$h\nu = E_{n_1} - E_{n_2}$$

##### iii. 角动量量子化假设

电子绕核运动，其**轨道半径不是任意的**，只有电子的轨道角动量满足下列条件的轨道才是允许的。

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad n=1,2,3,\dots$$

式中正整数  $n$  称为量子数。

**波尔模型只适用于氢原子或类氢原子。**

## 2. 原子核

### (1) 原子核的电荷、质量和大小

原子核带**正电**，其电量  $Q$  等于基本电荷  $e$  的**整数倍**，即  $Q=Ze$ 。正整数  $Z$  称为原子核的电荷数，也成为该元素的原子序数。原子核的质量几乎是原子质量单位的整数倍，即  $M_{核}=Au$ 。 $A$  为原子核的质量数，一个原子质量单位定义为  $1u=1.660566 \times 10^{-27} \text{kg}$ 。

原子核**接近球形**，其半径为  $R \approx R_0 A^{1/3}$ 。实验测得  $R_0=1.2 \times 10^{-15} \text{m}$ 。

所有原子核的质量密度几乎相同，约为  $2 \times 10^{17} \text{kg/m}^3$ 。

### (2) 原子核衰变

#### i. 天然放射现象

天然放射现象指放射性元素自发的放出射线的现象。1896 年贝克勒尔第一次在实验室中观察到这种现象。

天然放射现象有三种射线： **$\alpha$ 射线**、 **$\beta$ 射线**和 **$\gamma$ 射线**。 $\alpha$ 射线是氦核 ( ${}^4_2\text{He}$ ) 组成的粒子流， $\beta$ 射线是高速电子流， $\gamma$ 射线是波长很短的电磁波。

#### ii. 放射性衰变规律

设  $t=0$  时原子核的数目为  $N_0$ ，则  $t$  时刻尚未发生衰变的原子核数为  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ 。式中  $\lambda$  称为**衰变常数**，是反映衰变快慢的物理量。

放射性原子核衰变掉原有核的一半所需的时间称为**半衰期  $T$** ，因此  $T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$ 。

$T$  与  $\lambda$  是放射性原子核的**特征常数**，与原子所处的物理或化学状态无关。

### (3) 原子核的组成

原子核由质子和中子组成，质子和中子统称为核子。原子核的质量数  $A$  等于其核子数（质子数  $Z$  + 中子数  $N$ ），质子数  $Z$  即为原子序数。

质子数  $Z$  相同，中子数  $N$  不同的原子称为**同位素**；质量数  $A$  相同质子数  $Z$  不同的原子称为**同量异位素**。

### (4) 核反应

核反应是原子核受一个粒子撞击而放出一个或几个粒子的过程。核反应过程遵守**电荷守恒**、**核子数守恒**、**动量守恒**及**总质量和联系的总能量守恒**。利用这些规律可列写核反应方程。

核反应能  $Q$  定义为**反应后粒子的动能超出反应前粒子动能的差值**。根据**总质量和联系的总能量守恒**，由反应前后核和粒子的**静质量**可得出反应能  $Q$  的计算公式。根据**动量守恒**，也可由入射粒子和出射粒子的动能及这两种粒子运动方向角的夹角得出反应能  $Q$ 。

$$Q = [(M_1 + M_2) - (M'_1 + M'_2)]c^2$$

### (5) 质能方程

#### i. 质能方程

爱因斯坦由相对论得出质能方程为  $E = mc^2$ 。

#### ii. 质量亏损

在原子核的质量小于核内核子质量之和，原子核的质量  $M$  与组成它的核子的质量总和的差值称为**质量亏损**。

$$\Delta m = (Zm_p + Nm_n) - M_k = (ZM_H + Nm_n) - M_a$$

式中,  $m_p$  为质子质量,  $m_n$  为中子质量,  $M_k$  为核质量,  $M_H$  为氢原子质量,  $M_a$  为原子质量。

自由核子在结合成原子核时能量减少了  $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ , 即有能量释放出来, 这能量即为该核的**结合能**。如果要将核子分解成自由核子, 必须提供与结合能相同数值的能量。可见, 核子间有引力相互作用, 称为**核力**, 核力只在**很短的距离内**发生作用。

原子核中平均**每个核子**的结合能称为**平均结合能**, 用  $\varepsilon$  表示,  $\varepsilon = \frac{\Delta E}{A}$ 。

#### 四、狭义相对论

狭义相对论基于两个基本假设:

- i. **相对性原理**: 物理定律在一切惯性系中都是相同的, 因此在一惯性系中所做的任何物理实验都不能确定这个惯性系的运动状态。
- ii. **光速不变原理**: 在任一惯性系中测得的光在真空中的速度都是  $c$ , 与光源的运动无关。

##### 1. 时间膨胀与长度收缩

假定列车 ( $K'$  系) 以匀速  $V$  相对地面行驶, 车厢高度为  $b$ 。车厢底部有一光源, 正对面顶部放一反光镜, 光在车厢内一个往返车厢内观测者测得时间  $\Delta t' = \frac{2b}{c}$ 。

路基 ( $K$  系) 的观测者看到光是锯齿路径, 所用时间  $\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{b^2 + (\frac{V\Delta t}{2})^2}$ 。两式消去  $b$  得

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \Delta t'$$

式中,  $\beta = V/c$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ 。

上式说明在一个惯性系中, 运动的时钟比静止的时钟走得慢, 这就是**时间膨胀效应**。 $\Delta t'$  是在相对时钟静止的参考系中测得的时间, 称为**固有时间**。

类似的, 在两个惯性系中用激光测量长度时,  $K'$  系中长度  $L'$  与  $K$  系中长度  $L$  的关系为

$$L = L' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = L' \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{L'}{\gamma}$$

上式说明在相对于物体静止的惯性系中测得的物体长度最长, 在相对物体运动的惯性系中测得的长度沿运动方向会缩短, 这就是**长度收缩效应**。 $L'$  是在与物体相对静止的  $K'$  系中测得的长度, 又称为**固有长度**。

##### 2. 洛伦兹变换

设两坐标原点  $O$ 、 $O'$  在  $t=t'=0$  时重合,  $K'$  系以匀速  $V$  沿重合的  $x$  和  $x'$  轴正方向运动。设在  $x$  轴上  $A$  点发生一事件, 对  $K$  系  $x = Vt + x'/\gamma$ , 解得

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$K$  系和  $K'$  系的运动是相对的, 因此有

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

消去  $x'$  可解得

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

消去  $x$  可解得

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

由于速度沿  $x$  方向，因而有

$$y' = y, z' = z$$

$$y = y', z = z'$$

以上公式称为**洛伦兹变换和逆变换公式**。从洛伦兹变换出发可得到**速度变换公式**

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2}$$

$$v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - Vv_x/c^2}$$

### 3. 同时的相对性

设  $K$  系观察到的  $A$ 、 $B$  两事件分别在  $a$ 、 $b$  两点处同时发生  $t_A = t_B$ ， $a$ 、 $b$  相距  $\Delta x = x_b - x_a$ ，那  $K'$  系观察到  $A$ 、 $B$  两事件发生的时间间隔为

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma(t_B - \frac{V}{c^2} x_b) - \gamma(t_A - \frac{V}{c^2} x_a) = \frac{\gamma V}{c^2} (x_a - x_b) \neq 0$$

上式说明在一惯性系**同时但不同地**发生的两件事，在另一惯性系观察**不同时**发生。但有**因果关系的两事件的先后次序不会颠倒**，这是因为狭义相对论理论要求所有运动速度、信号传播速度及作用传递的速度都不能超过光速  $c$ 。

### 4. 相对论力学

相对论中，**质量随物体运动速度的变化规律**为  $m = m_0 / \sqrt{1 - V^2/c^2}$ ， $m_0$  是物体静止时的质量。

于是，**相对论中动量**的形式为

$$\vec{P} = m\vec{V} = m_0\vec{V} / \sqrt{1 - V^2/c^2}$$

这样得到的动量守恒定律是满足洛伦兹变换的。

**相对论中运动物体的总能量**的形式为

$$E = mc^2 = m_0 c^2 / \sqrt{1 - V^2/c^2}$$

物体静止时的能量称为物体的**静能**，有  $E_0 = m_0 c^2$ 。

物体的**动能**为**总能**与**静能**之差，有  $E_K = mc^2 - m_0 c^2$ 。

相对论中**能量**和**动量**之间一个重要的关系式为

$$E^2 = E_0^2 + P^2 c^2$$

对应相对论中的质量和动量，**相对论动力学**的基本方程是

$$\vec{F} = \frac{\Delta(m\vec{V})}{\Delta t}$$

## 例题选讲

**例 1.**如图 1-2-6 所示,  $AB$  表示一平直的平面镜,  $P_1P_2$  是水平放置的米尺 (有刻度的一面朝着平面镜),  $MN$  是屏, 三者相互平行, 屏  $MN$  上的  $ab$  表示一条竖直的缝 (即  $ab$  之间是透光的)。某人眼睛紧贴米尺上的小孔  $S$  (其位置如图所示), 可通过平面镜看到米尺的一部分刻度。试在本题图上用三角板作图求出可看到的部位, 并在  $P_1P_2$  上把这部分涂以标志。

**解:**

**方法一:**

相对于平面镜  $AB$  作出人眼  $S$  的像  $S'$ 。连接  $Sa$  并延长交平面镜于点  $C$ , 连接  $S'$  点  $C$  并延长交米尺  $P_1P_2$  于点  $E$ , 点  $E$  就是人眼看到的米尺刻度的最左端; 连接  $S'b$  并延长交米尺  $P_1P_2$  于点  $F$ , 且  $S'b$  与平面镜交于  $D$ , 连接  $S$  与点  $D$ , 则点  $F$  就是人眼看到的米尺刻度的最右端。 $E$  与  $F$  之间的米尺刻度就是人眼可看到部分, 如图 1-2-7 所示。

**方法二:**

根据平面镜成像的对称性, 作米尺  $P_1P_2$  及屏  $MN$  的像, 分别是  $P'_1P'_2$  及  $M'N'$ ,  $a$ 、 $b$  的像分别为  $a'$ 、 $b'$ , 如图 1-2-8 所示。连接  $Sa$  交  $AB$  于点  $C$ , 延长并交  $P'_1P'_2$  于点  $E'$ , 过点  $E'$  作  $P_1P_2$  ( $AB$ ) 的垂线, 交于点  $E$ , 此点就是人眼看到的米尺刻度的最左端; 连接  $Sb'$  交  $AB$  于点  $D$ , 延长并交  $P'_1P'_2$  于点  $F'$ , 过点  $F'$  作  $P_1P_2$  ( $AB$ ) 的垂线  $P_1P_2$  交于点  $F$ , 点  $F$  就是人眼看到的米尺刻度的最右端。 $EF$  部分就是人眼通过平面镜可看见的米尺部分。

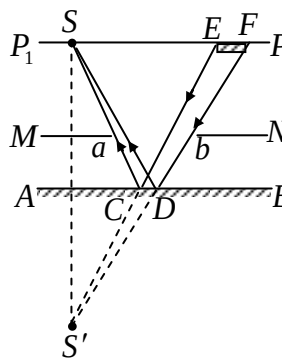


图 1-2-7

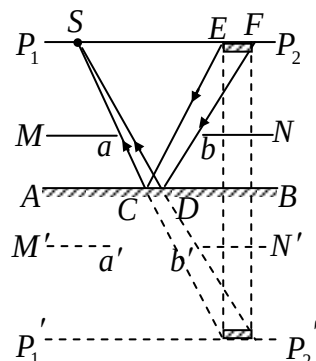


图 1-2-8

**简析:** 本题考查平面镜成像规律及成像作图。人眼通过小孔看见的是米尺刻度的像。由反射定律可知, 米尺刻度必须经过平面镜反射后, 反射光线进入人的眼睛, 人才会看到米尺刻度的像。可以通过两种方法来解这个问题。平面镜成像的特点是物与像具有对称性。在涉及到平面镜的问题中, 利用这一特点常能使问题得以简洁明晰的解决。

**例 2.** 给定一厚度为  $d$  的平行平板, 其折射率按下式变化

$$n(x) = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{r}}$$

一束光在  $O$  点由空气垂直入射平板, 并在  $A$  点以角  $\alpha$  出射 (图 1-3-14)。求  $A$  点的折射率  $n_A$ , 并确定  $A$  点的位置及平板厚度。(设  $n_0 = 1.2$ ,  $r = 13\text{cm}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ )。

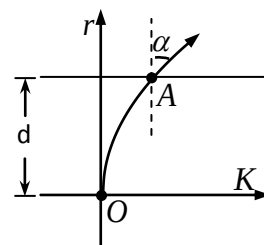


图 1-3-14

**解:** 首先考虑光的路线 (图 1-3-15)。对于经过一系列不同折射率的平行平板的透射光, 可以应用斯涅耳定律

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3} = \frac{n_3}{n_2}, \quad \dots$$

$$n_1 \sin \beta_1 = n_2 \sin \beta_2 = n_3 \sin \beta_3 = \dots$$

这个公式对任意薄层都是成立的。在我们的情形里，折射率只沿  $x$  轴变化，即

$$n_x \sin \beta_x = C$$

在本题中，垂直光束从折射率为  $n_0$  的点入射，即  $n_x = n_0$ ， $\beta_x = 90^\circ$  为常数，于是在平板内任一点有

$$n_x \sin \beta_x = n_0$$

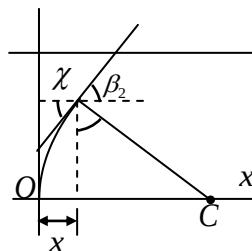


图 1-3-16

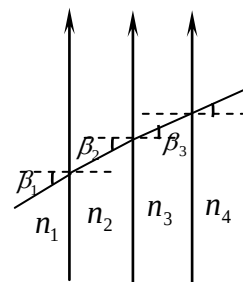


图 1-3-15

$n_x$  与  $x$  的关系已知，因此沿平板中的光束为

$$\sin \beta_x = \frac{n_0}{n_x} = 1 - \frac{x}{r} = \frac{r-x}{r}$$

图（1-3-16）表明光束的路径是一个半径为  $XC=r$  的圆，从而有

$$\frac{OC-x}{XC} = \sin \beta_x$$

现在我们已知道光的路径，就有可能找到问题的解。按折射定律，当光在 A 点射出时，有

$$n_A = \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \beta_A)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta_A}$$

因为  $n_A \sin \beta_B = n_0$ ，故有

$$\sin \beta_A = \frac{n_0}{n_A}$$



$$\cos \beta_A = \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_A}\right)^2}$$

于是

$$n_A = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\left(1 - \frac{n_0}{n_A}\right)^2}}$$

因此  $n_A = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}$

在本题情形  $n_A = 1.3$

根据  $n_A = 1.3 = \frac{1.2}{1 - \frac{x}{13}}$  得出 A 点的 x 坐标为  $x = 1\text{cm}$ 。

光线的轨迹方程为

$$y^2 + (1 + x)^2 = r^2$$

代入  $x = 1\text{cm}$ ，得到平板厚度为  $y = d = 5\text{cm}$

**例 3.**玻璃圆柱形容器的壁有一定的厚度，内装一种在紫外线照射下会发出绿色荧光的液体，即液体中的每一点都可以成为绿色光源。已知玻璃对绿光的折射率为  $n_1$ ，液体对绿光的折射率为  $n_2$ 。当容器壁的内、外半径之比  $r: R$  为多少时，在容器侧面能看到容器壁厚为零？

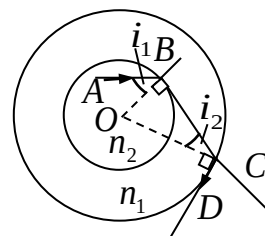


图 1-3-23

**解：**

(1) 当  $n_1 < n_2$  时，因为是要求  $r: R$  的最小值，所以当  $n_1 < n_2$  时，应考虑的是图 1-3-23 中 ABCD 这样一种临界情况，其中 BC 光线与容器内壁相切，CD 光线和容器外壁相切，即两次都是临界折射，此时应该有

$$\frac{\sin i_2}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{n_1}$$

设此时容器内壁半径为  $r_0$ ，在直角三角形 BCO 中， $\sin i_2 = r_0/R$ 。当  $r < r_0$  时，C 处不

可能发生临界折射，即不可能看到壁厚为零；当  $r > r_0$  时，荧光液体中很多点发出的光都能在  $C$  处发生临界折射，所以只要满足

$$r/R \geq 1/n_1$$

即可看到壁厚为零。

(2) 当  $n_1 = n_2$  时

此时荧光液体发出的光线将直接穿过容器内壁，只要在  $CD$  及其延长线上有发光体，即可看到壁厚为零，因此此时应满足条件仍然是  $r/R \geq 1/n_1$ 。

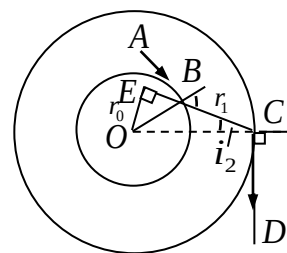


图 1-3-24

(3) 当  $n_1 > n_2$  时

因为  $n_1 > n_2$ ，所以荧光液体发出的光在容器内壁上不可能发生折射角为  $90^\circ$  的临界折射，因此当  $r = r_0$  时，所看到的壁厚不可能为零了。当  $r > r_0$  时，应考虑的是图 1-3-24 中  $ABCD$  这样一种临界情况，其中  $AB$  光线的入射角为  $90^\circ$ ， $BC$  光线的折射角为  $r_1$ ，此时应该有

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin r_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

在直角三角形  $OBE$  中有

$$\sin r_1 = OE/OB$$

因为图 1-3-23 和图 1-3-24 中的  $i_2$  角是相同的，所以  $OE = r_0$ ，即

$$\frac{\sin 90^\circ}{r_0/r} = \frac{n_1}{n_2}$$

将  $r_0 = \frac{R}{n_1}$  代入，可得当

$$r/R \geq 1/n_2$$

时，可看到容器壁厚度为零。

上面的讨论，图 1-3-23 和图 1-3-24 中  $B$  点和  $C$  点的位置都是任意的，故所得条件对眼的所有位置均能成立（本段说明不可少）。

**简析：**所谓“从容器侧面能看到容器壁厚为零”，是指眼在容器截面位置看到绿光从  $C$  点处沿容器外壁的切线方向射出，即本题所描述为折射角为  $90^\circ$  的临界折射。因为题中未给出  $n_1$ 、 $n_2$  小关系，故需要分别讨论。

**例 4.** 如图 1-5-16.  $AB$  为一线状物体， $A_1B_1$  为此物经透镜所成的像。试用作图法确定此镜的位置和焦距，写出作图步骤。

**解：**作  $AA_1$  和  $BB_1$  的连线，两条连线的交点  $O$  就是凸透镜光心的位置。作  $AB$  和  $A_1B_1$  的延长线交于  $C$  点， $C$  点必定落在透镜上。由  $C$ 、 $O$  两点可画出透镜的位置，过  $O$  点且与  $CO$  垂直的连线  $MN$  就是透镜的主光轴，如图 1-5-17 所示。过  $A$  点作平行于主光轴的直线交透镜于  $D$  点，连接  $DA_1$ ，该连线与主光轴的交点  $F$  就是透镜的右焦点位置。过  $A_1$  作平行于主光轴的直线交透镜于  $E$  点，连线  $EA$  与主光轴的交点  $F'$  就是透镜左焦点的位置所在。

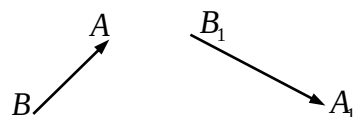


图 1-5-16

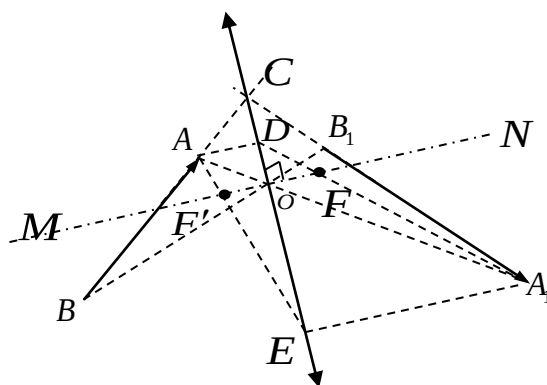


图 1-5-16

**简析：**熟练掌握凸透镜、凹透镜的成像特点和规律，并能灵活运用特殊光线来作图是解决这一类作图题的关键。像  $A_1B_1$  是倒像，所以透镜应是凸透镜。物  $AB$  和像  $A_1B_1$  不平行，所以物相对于透镜的主轴是斜放的，沿物体  $AB$  和其像  $A_1B_1$  所引出的延长线的交点必在过光心且垂直于主轴的平面上，这条特殊光线是解答本题的关键光线。

**例 5.** 焦距均为  $f$  的二凸透镜  $L_1$ 、 $L_2$  与两个圆形平面反射镜  $M_1$ 、 $M_2$  放置

如图 1-5-22。二透镜共轴，透镜的主轴与二平面镜垂

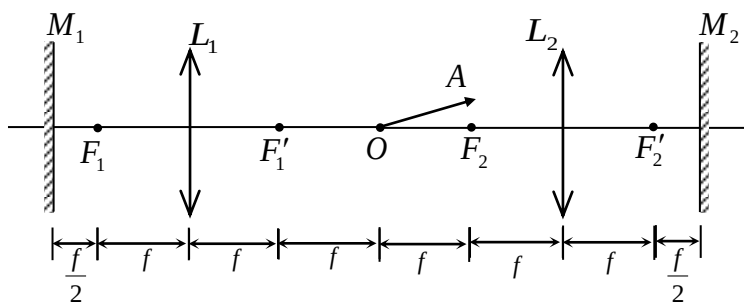


图 1-5-22

直，并通过二平面镜的中心，四镜的直径相同，在主轴上有一点光源  $O$ 。

1、画出由光源向右的一条光线  $OA$ （如图 1-5-22 所示）在此光学系统中的光路。

2、分别说出由光源向右发出的光线和向左发出的光线各在哪些位置（ $O$  点除外）形成光源  $O$  的能看到的像，哪些是实像？哪些是虚像。

3、现在用不透明板把  $L_1$  和  $L_2$  的下半部（包括透镜中心）都遮住，说出这些像有什么变化。

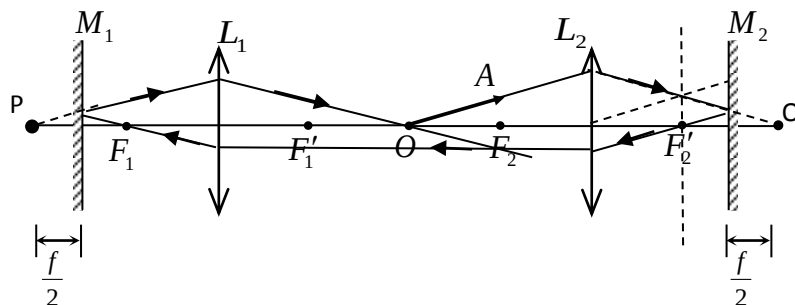


图 1-5-23

**解：**

1、光线  $OA$  的第一次往返光路如图 1-5-23 所示。当光线由图中左方返回经  $O$  点后，将继续向右下方进行，作第二次往返。第二次往返的光路在图中未画出，可按图中光路对称于主轴画出。以后，光线重复以上两种往返光路。

2、向右发出的光线： $F_2'$  处成实像，右方无限远处成虚像； $F_1$  处成实像； $P$  处（ $M_1$  左方  $\frac{f}{2}$  处主轴上）成虚像。

向左发出的光线： $F_1$  处成实像；左方无限远处成虚像； $F_2'$  处成实像； $Q$  处（ $M_2$  右方  $\frac{f}{2}$  处主轴上）成虚像。

3、向右发出的光线只在  $F_2'$  处成实像。向左发出的光线只在  $F_1$  处成实像。两像均比未遮住时暗。

**例 6.** 在斯涅耳的档案中有一张光学图（见 1-5-20），由于墨水褪色只留下三个点：一个薄透镜的焦点  $F$ ，光源  $S$  和透镜上的一点  $L$ 。此外还留下一部分从光源  $S$  画到其像  $S'$  的直线  $a$ 。从正文中知道  $S$  点比  $S'$  点更靠近透镜，有可能恢复这张图吗？如果可能，把它画出来，并确定图中透镜的焦距。

**解：**

- 1、令  $O$  为透镜的光学中心；
- 2、 $F$  和  $O$  点应位于垂直于透镜的光轴上，因此  $\angle FOL$  是直角；
- 3、连接光源及其像的直线总是通过透镜的光学中心；
- 4、连接  $F, L$  点并以线段  $FL$  的中点  $C$  为圆心，画一通过  $F$  及  $L$  点的圆；
- 5、由于一个圆的直径所对着的圆周角总是直角，可以判定  $O$  点位于圆和直线  $a$  的交点上；
- 6、从圆中找到  $O$  点的两个可能的位置 ( $O_1$  和  $O_2$ )；
- 7、恢复出两种可能的示意图，如图 1-5-21 所示；
- 8、由于光源  $S$  比其像  $S'$  更靠近透镜，可以断定只有透镜  $n_1$  符合题意。实际上，对透镜  $n_1$  可以看到  $S$  到  $n_1$  的距离大于二倍焦距，因此  $S'$  到  $n_1$  的距离小于二倍焦距。

遮住时暗。

**例 7.** 一平凸透镜焦距为  $f$ ，其平面上镀了银，现在其凸面一侧距它  $2f$  处，垂直于主轴放置一高为  $H$  的物，其下端在透镜的主轴上（图 1-5-24）。

(1) 用作图法画出物经镀银透镜所成的像，并标明该像是虚、是实。

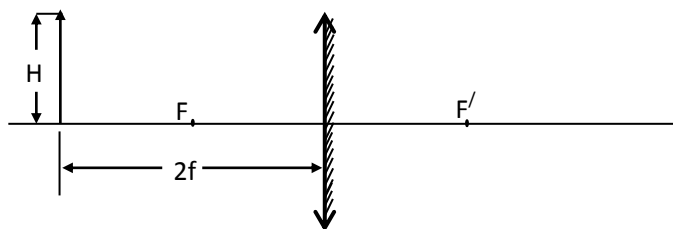


图 1-5-24

(2) 用计算法求出此像的位置和大小。

**解：**

(1) 用作图法求得物  $AP$  的像  $A'P'$  及所用各条光线的光路如图 1-5-25 所示。

**说明：**平凸透镜平面上镀银后构成一个由会聚透镜  $L$  和与它密接的平面镜  $M$  组合  $LM$ ，如图 1-5-25 所示。图中  $O$  为  $L$  的光心， $AOF'$  为主轴， $F$  和  $F'$  为  $L$  的两个焦点， $AP$  为物。作图时利用了

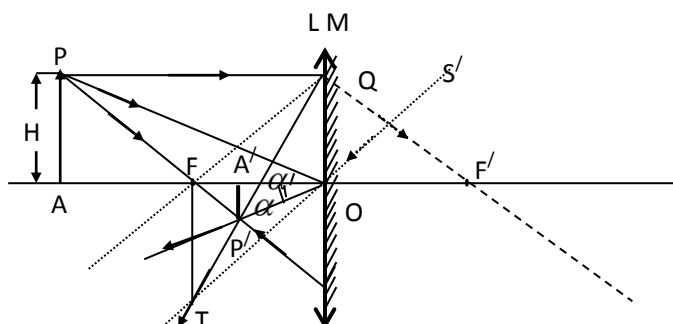


图 1-5-25

下列三条特征光线：

①由  $P$  射向  $O$  的入射光线，它通过  $O$  后方向不变，沿原方向射向平面镜  $M$ ，然后被  $M$  反射，反射光线与主光轴的夹角等于入射角，均为  $\alpha$ 。反射线射入透镜时通过光心  $O$ ，故由透镜射出时方向与上述反射线相同，即图中的  $OP'$ 。

②由  $P$  发出且通过  $L$  左方焦点  $F$  的入射光线  $PFR$ ，它经过  $L$  折射后的出射线与主轴平行，垂直射向平面镜  $M$ ，然后被  $M$  反射，反射光线平行于  $L$  的主轴，并向左射入  $L$ ，经  $L$  折射后的出射线通过焦点  $F$ ，即为图中  $RFP$ 。

③由  $P$  发出的平行于主轴的入射光线  $PQ$ ，它经过  $L$  折射后的出射线将射向  $L$  的焦点  $F'$ ，即沿图中的  $QF'$  方向射向平面镜，然后被  $M$  反射，反射线指向与  $F'$  对称的  $F$  点，即沿  $QF$  方向。此反射线经  $L$  折射后的出射线可用下法画出：通过  $O$  作平行于  $QF$  辅助线  $S'OS$ ， $S'OS$  通过光心，其方向保持不变，与焦面相交于  $T$  点。由于入射平行光线经透镜后相交于焦面上的同一点，故  $QF$  经  $L$  折射后的出射线也通过  $T$  点，图中的  $QT$  即为  $QF$  经  $L$  折射后的出射线。

上列三条出射光线的交点  $P'$  即为  $LM$  组合所成的  $P$  点的像，对应的  $A'$  即  $A$  的像点。由图可判明，像  $A'P'$  是倒立实像，只要采取此三条光线中任意两条即可得  $A'P'$ ，即为正确的答案。

(2) 按陆续成像计算物  $AP$  经  $LM$  组合所成像的位置、大小。

物  $AP$  经透镜  $L$  成的像为第一像，取  $u_1 = 2f$ ，由成像公式可得像距  $v_1 = 2f$ ，即像在平面镜后距离  $2f$  处，像的大小  $H'$  与原物相同， $H' = H$ 。

第一像作为物经反射镜  $M$  成的像为第二像。第一像在反射镜  $M$  后  $2f$  处，对  $M$  来说是虚物，成实像于  $M$  前  $2f$  处。像的大小  $H''$  也与原物相同， $H'' = H' = H$ 。

第二像作为物，再经透镜  $L$  而成的像为第三像。这是因为光线由  $L$  右方入射。且物（第二像）位于  $L$  左方，故为虚物，取物距  $u_3 = -2f$ ，由透镜公式  $\frac{1}{u_3} + \frac{1}{v_3} = \frac{1}{f}$  可得像距

$$v_3 = \frac{fu_3}{u_3 - f} > 0$$

上述结果表明，第三像，即本题所求的像的位置在透镜左方距离  $\frac{2}{3}f$  处，像的大小  $H'''$

可由  $\frac{H'''}{H''} = \left| \frac{v_3}{u_3} \right| = \frac{1}{3}$  求得，即

$$H''' = \frac{1}{3}H'' = \frac{1}{3}H$$

像高为物高的  $\frac{1}{3}$ 。

**简析：**这道题实质是一个凸透镜与一紧密接合的平面镜的组合成像问题。虽然我们画不出光线经透镜折射后射向平面镜的光路，但光路仍然遵守凸透镜与平面镜成像规律，这是我们在具体分析光路时必须牢牢抓住的一点。成像的计算也是遵守凸透镜与平面镜的成像计算方法的。

**例 8.**如图 1-5-26 所示，凸透镜焦距  $f=15\text{cm}$ ， $OC=25\text{cm}$ ，以  $C$  为圆心、 $r=5\text{cm}$  为半径的发光圆环与主轴共面。试求出该圆环通过透镜折射后所成的像。

**分析：**先考虑发光圆环上任意一点  $P$  经透镜所成之像，当  $P$  点绕圆环一周时，对应的像点的集合就构成整个发光圆环通过透镜所成的像。因此可用解析几何的方法讨论本题。

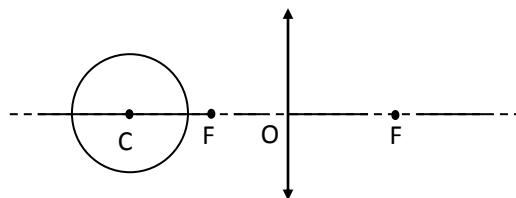


图 1-5-26

**解：**如图 1-5-27 所示，以  $O$  点为直角坐标系原点建立坐标系  $xOy$  和  $x'Oy'$ 。考虑发光圆环上任一点  $P(x, y)$ ，则有

$$(x-25)^2 + y^2 = 5^2 \quad ①$$

发光点  $P(x, y)$  的像为  $P'(x', y')$ ，

根据透镜成像公式及放大率关系可有

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} \quad ②$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} \quad ③$$

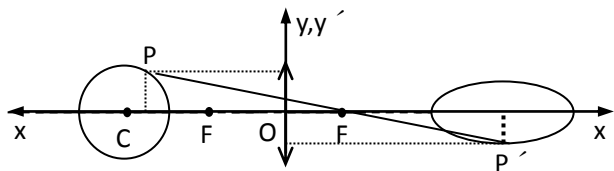


图 1-5-27

联立②、③式解得



$$x = \frac{15x'}{x' - 15} \quad (4)$$

$$y = \frac{15y'}{x' - 15} \quad (5)$$

将④、⑤式代入①式中并整理得

$$\frac{(x' - 45)^2}{15^2} + \frac{y'^2}{(5\sqrt{3})^2} = 1 \quad (6)$$

⑥式即为所需求的圆环之像。这是一个对称中心位于光心 45cm 处，以主光轴为长轴的椭圆。

如果把发光圆环用一球壳取代，则根据对称性，球壳的像是以圆环的像绕主轴旋转一周行成的一椭圆。

**简析：**曲线形线状物通过透镜所成的像也是一定曲线状，至于是什么样的曲线，要视具体情况而定。例如本题中的发光圆环所成的像变为一椭圆环就是一例。本题的关键是要建立恰当的物方和像方坐标系来求解问题。

**例 9.**求厚透镜对两个不同波长有同一焦距的条件。并且不同类型的透镜，讨论可行性。

**解：**我们必须知道厚透镜的性质。厚透镜由下述数据表征：球形表面的半径  $r_1$  和  $r_2$ ，

厚度  $d$  和折射  $n$ （图 1-5-28），焦距  $f=BF$  由下式给出

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - d \left( \frac{n-1}{n} \right) \frac{1}{r_1 r_2} \right]$$

焦距是从主点  $B$  算起的。 $B$  离表面的距离为

$$BA = h = \frac{r_2 d}{n(r_1 + r_2) - d(n-1)}$$

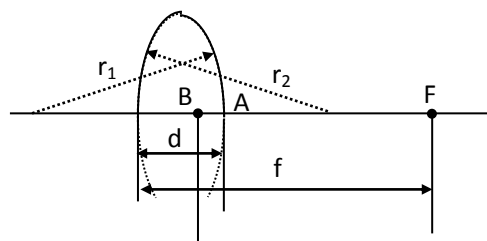


图 1-5-28

上述公式对任意厚度的厚透镜都成立，但只对近轴光线才给满意结果，因为是在一定的近似下得到的。

光被透镜色散。透镜对波长  $\lambda_a$  的折射率是  $n_a$ ，对波长  $\lambda_b$  的折射率是  $n_b$ 。按折射率  $n$  的幂次整理焦距公式，得

$$f(r_1 + r_2 - d)n^2 + [2fd - f(r_1 + r_2) - r_1 r_2]n - fd = 0$$

这是一个二次方程。给定一个  $f$  值，应有两个  $n$  值，因此，我们的问题可以解决。

先后以  $n_a$  和  $n_b$  代入方程，并令其相等

$$\begin{aligned}
 & (n_a - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - d \cdot \frac{n_a - 1}{n_a r_1 r_2} \right) \\
 &= (n_b - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - d \cdot \frac{n_b - 1}{n_b r_1 r_2} \right)
 \end{aligned}$$

整理后得到

$$r_1 + r_2 = d \left( 1 - \frac{1}{n_a n_b} \right)$$

如果半径  $r_1, r_2$  与厚度  $d$  满足这一条件，则对两个不同的波长，即对两不同的折射率来说，焦距是相同的。有趣的是折射率的乘积  $n_a n_b$  在起作用，而不是色散 ( $n_b - n_a$ )。因折射率大于 1，于是括号内的数值小于 1，说明半径之和小于镜厚。这意味着透镜将是相当厚的。

**结果讨论：**首先，透镜不可以是平凸或平凹的，因为这种透镜有无限大的半径。其次， $r_1$  和  $r_2$  之一为负的发散透镜是许可的，但不能是双凹透镜。如果要求的不是  $f$  而是  $(f-h)$  对两个折射率有相同的值。实现这一点也是可能的，但却是一个复杂得多的问题。

**例 10.**以单色光照射到相距为 0.2mm 的双缝上，缝距为 1m。

- (1) 从第一级明纹到同侧第四级的明纹为 7.5mm 时，求入射光波长；
- (2) 若入射光波长为 6000Å，求相邻明纹间距离。

**解：**

$$(1) \text{ 明纹坐标为 } x = \pm k \frac{D\lambda}{d},$$

由题意有：

$$\begin{aligned}
 x_4 - x_1 &= 4 \frac{D\lambda}{d} - \frac{D\lambda}{d} = \frac{3D\lambda}{d} \\
 \Rightarrow \lambda &= \frac{d}{3D} (x_4 - x_1) = \frac{0.2 \times 10^{-3}}{3 \times 1} \times 7.5 \times 10^{-3} \text{ 。} \\
 &= 5 \times 10^{-7} \text{ m} = 5000 \text{ Å}
 \end{aligned}$$

- (2) 当  $\lambda = 6000 \text{ Å}$  时，相邻明纹间距为

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} = \frac{1 \times 6000 \times 10^{-10}}{0.2 \times 10^{-3}} = 3 \times 10^{-3} \text{ m} = 3 \text{ mm}$$

**例 11.**白光垂直射到空气中一厚度为  $3800 \text{ Å}$  的肥皂水膜上。试问：

- (1) 水正面呈何颜色？
- (2) 背面呈何颜色？（肥皂水的折射率为 1.33）

**解：**依题意，对正面  $\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}$ （ $i = 0$ ，光有半波损失）

- (1) 因反射加强， $\therefore$ 有

$$2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda (k = 1, 2, \dots)$$

$$\lambda = \frac{2ne}{k - \frac{1}{2}} = \frac{2 \times 1.33 \times 3800}{k - \frac{1}{2}} = \frac{10108}{k - \frac{1}{2}} = \begin{cases} 20216 \text{ Å} (k = 1) \\ 6739 \text{ Å} (k = 2) \\ 4043 \text{ Å} (k = 3) \\ 2888 \text{ Å} (k = 4) \end{cases}$$

因为可见光范围为  $4000 \sim 7600 \text{ Å}$ ，所以，反射光中  $\lambda_2 = 6739 \text{ Å}$  和  $\lambda_3 = 4043 \text{ Å}$  的光得到加强，前者为红光，后者为紫光，即膜正面呈红色和紫色。

- (2) 因为透射最强时，反射最弱，所以有

$$2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} (k = 1, 2, \dots) \Rightarrow 2ne = k\lambda$$

（此式即为透射光加强条件）

有：

$$\lambda = \frac{2ne}{k} = \frac{10108}{k} = \begin{cases} 10108 \text{ Å} (k = 1) \\ 5054 \text{ Å} (k = 2) \\ 3369 \text{ Å} (k = 3) \end{cases}$$

可知，透射光中  $\lambda_2 = 5054 \text{ Å}$  的光得到加强，此光为绿光，即膜背面呈绿色。

**例 12.**借助于玻璃表面上涂  $\text{MgF}_2$  透明膜可减少玻璃表面的反射。已知， $\text{MgF}_2$  的折射率为 1.38，玻璃折射率为 1.60。若波长为  $5000 \text{ Å}$  的光从空气中垂直入射到  $\text{MgF}_2$  膜上，为了实现反射最小，求： $e_{\min} = ?$

**解：**依题意知  $\delta = 2ne$ （膜上下表面均有半波损失）

$$\text{反射最小时: } 2n_1e = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k=0,1,2,\dots)$$

$$\Rightarrow e = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}$$

$$e_{\min} \underline{k=0} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{5000}{4 \times 1.38} = 906 \text{ \AA}$$

**例 13.**在空气牛顿环中，用波长为  $6328 \text{ \AA}$  的单色光垂直入射，测得第  $k$  个暗环半径为  $5.63\text{mm}$ ，第  $k+5$  个暗环半径为  $7.96\text{mm}$ 。求曲率半径  $R$ 。

**解：**空气牛顿环第  $k$  个暗环半径为  $r_k = \sqrt{kR\lambda}$

第  $k+5$  个暗环半径为  $r_{k+5} = \sqrt{(k+5)R\lambda}$

$$\Rightarrow R = \frac{r_{k+5}^2 - r_k^2}{5\lambda} = \frac{(7.96^2 - 5.63^2) \times 10^{-6}}{5 \times 6328 \times 10^{-10}} = 10\text{m}$$

**例 13.**菲涅耳双面镜。如图 2-1-12 所示，平面镜  $M_1$  和  $M_2$  之间的夹角  $\theta$  很小，两镜面的交线  $O$  与纸面垂直， $S$  为光阑上的细缝（也垂直于纸面），用强烈的单色光源来照明，使  $S$  成为线状的单色光源， $S$  与  $O$  相距为  $r$ 。  $A$  为一挡光板，防止光源所发的光没有经过反射而直接照射光屏  $P$ 。

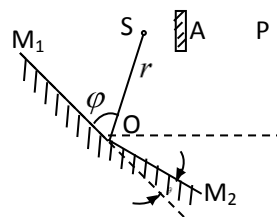


图 2-1-12

(1)若图中  $\angle SOM_1 = \varphi$ ，为在  $P$  上观察干涉条纹，光屏  $P$  与平面镜  $M_2$  的夹角最好为多少？

(2)设  $P$  与  $M_2$  的夹角取(1)中所得的最佳值时，光屏  $P$  与  $O$  相距为  $L$ ，此时在  $P$  上观察到间距均匀的干涉条纹，求条纹间距  $\Delta x$ 。

(3)如果以激光器作为光源，(2)的结果又如何？

**解：**

(1)如图 2-1-13， $S$  通过  $M_1$ 、 $M_2$  两平面镜分别

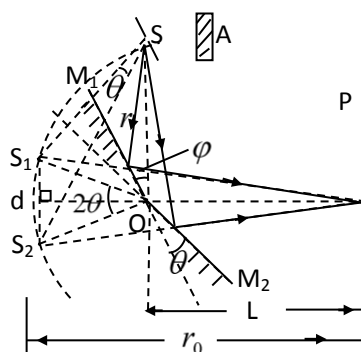


图 2-1-13

成像  $S_1$  和  $S_2$ ，在光屏  $P$  上看来， $S_1$  和  $S_2$  则相当于两个相干光源，故在光屏  $P$  上会出现干涉现象。为

在  $P$  上观察干涉条纹，光屏  $P$  的最好取向是使  $S_1$  和  $S_2$  与它等距离，即  $P$  与  $S_1 S_2$  的连线平行。

图 2-1-13 图中  $S_1$  和  $S$  关于平面镜  $M_1$  对称， $S_2$  和  $S$  关于平面镜  $M_2$  对称，所以，

$OS_1S_2$  为顶角为  $2\theta$  腰长为  $r$  的等腰三角形，故光屏  $P$  的最佳取向是  $P$  的法线（通过  $O$  点）与平面镜  $M_2$  的夹角等于  $\varphi$ ，或光屏  $P$  与平面镜  $M_2$  的夹角为  $90^\circ - \varphi$ 。

(2) 由图可看出， $S_1$  和  $S_2$  之间的距离为  $d = 2r \sin \theta$ ， $S_1$  和  $S_2$  到光屏  $P$  的距离为

$r_0 = r \cos \theta + L \approx r + L$ ，由此，屏上的干涉条纹间距为

$$\Delta x = \frac{(r+L)}{2r \sin \theta} \lambda$$

(3) 如果以微光器作为光源，由于激光近于平行，即相当  $S$  位于无穷远处。上式简化为

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

若用两相干光束的夹角  $a = 2\theta$  表示，上式可写成

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin(\frac{a}{2})}$$

**例 14.** 如图 2-1-14 所示的洛埃镜镜长  $l = 7.5\text{cm}$ ，点光源  $S$  到镜面的距离  $d = 0.15\text{mm}$ ，到镜面左端的距离  $b = 4.5\text{cm}$ ，光屏  $M$  垂直于平面镜且与点光源  $S$  相距  $L = 1.2\text{m}$ 。如果光源发出长  $\lambda = 6 \times 10^{-7}\text{m}$  的单色光，求：

(1) 在光屏上什么范围内有干涉的条纹？

(2) 相邻的明条纹之间距离多大？

(3) 在该范围内第一条暗条纹位于何处？

**解：**

(1) 如图 2-1-14 所示， $S$  点光源发出的光一部分直接射到光屏上，另一部分经平面镜反射后再射到光屏，这部分的光线好像从像点  $S'$  发出，因为到达光屏这两部分都是由  $S$  点光源发出的，所以是相干光源。这两部分光束在光屏中的相交范围  $AB$  就是干涉条纹的范围。由图中的几何关系可以得到：

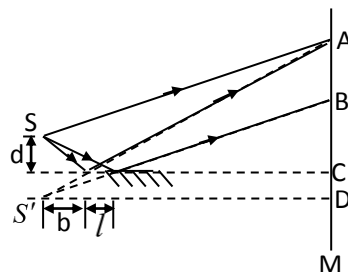


图 2-1-14

$$\frac{b}{d} = \frac{L}{AD} \quad ①$$

$$\frac{b+l}{d} = \frac{L}{BD} \quad ②$$

由①、②两式解得

$$AD = \frac{Ld}{b} = 4(\text{cm})$$

$$BD = \frac{Ld}{b+l} = 1.5(\text{cm})$$

由图中可知

$$AC = AD - d = 3.85(\text{cm})$$

$$BC = BD - d = 1.35(\text{cm})$$

由③、④两式可知在距离光屏与平面镜延长线交点  $C$  相距  $1.35 \sim 3.85\text{cm}$  之间出现干涉条纹。

(2)相邻干涉条纹的距离为

$$\Delta x = \frac{L}{2d} \lambda = 2.4 \times 10^{-4}(\text{m}) = 0.024(\text{cm})$$

(3)由于从平面镜反射的光线出现半波损失，暗条纹所在位置  $S$  和  $S'$  的光程差应当满足

$$\delta = \frac{2dx}{l} + \frac{\lambda}{2} = \frac{k+1}{2} \lambda$$

即

$$x = \frac{k\lambda l}{2d} \quad \text{⑤}$$

又因为条纹必须出现在干涉区，从①解可知，第一条暗纹还应当满足

$$x \geq BC = 1.35\text{cm} \quad \text{⑥}$$

由⑤、⑥式解得

$$k = 6$$

$$x = 1.44\text{cm}$$

即在距离  $C$  点  $1.44\text{cm}$  处出现第一条暗条纹。

**简析：**这是一个光的干涉问题，它利用平面镜成点光源的像  $S'$ ，形成有两个相干点光源  $S$  和  $S'$ ，在光屏上出现干涉条纹。但需要注意光线由光疏媒质入射到光密媒质时会发生半波损失现象。洛埃镜是一个类似双缝干涉的装置，分析它的干涉现象，主要是找出点光源  $S$  和它在平面镜中的像  $S'$ ，这两个就是相干光源，然后就可利用杨氏双缝干涉的结论来求解，但注意在计算光程差时，应考虑光线从光疏媒质入射到光密媒质时，反射光与入射光相位差  $180^\circ$ ，即发生“半波损失”。

**例 15.**将焦距  $f=20\text{cm}$  的凸透镜从正中切去宽度为  $a$  的小部分，如图 2-1-19(a)，再将剩下两半粘接在一起，构成一个“粘合透镜”，见图 2-1-19 (b)。图中  $D=2\text{cm}$ ，在粘合透镜一侧的中心轴线上距镜  $20\text{cm}$  处，置一波长  $\lambda = 500\text{\AA}$  的单色点光源  $S$ ，另一侧，垂直于中心轴线放置屏幕，见图 2-1-19 (c)。屏幕上出现干涉条纹，条纹间距  $\Delta x=0.2\text{mm}$ ，试问

1. 切去部分的宽度  $a$  是多少？
2. 为获得最多的干涉条纹，屏幕应离透镜多远？

**解：**

- 1、首先讨论粘合透镜的上半个透镜的成像。在图 2-1-20 中  $OO$  是

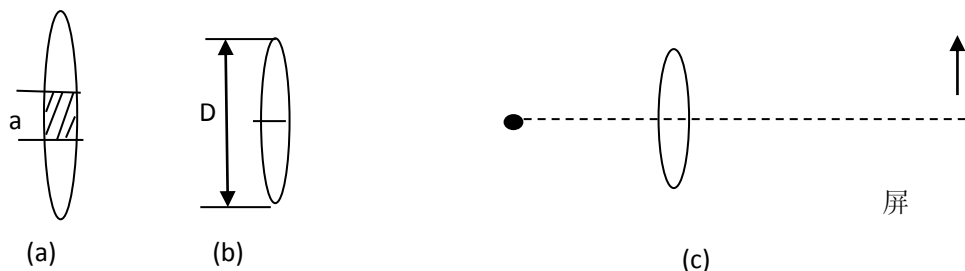


图 2-1-19

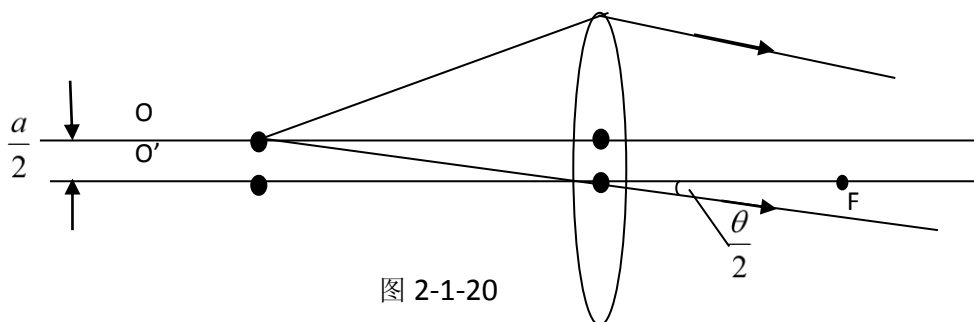


图 2-1-20

粘合透镜的中心轴线，在  $OO$  上方用实线画出了上半个透镜，在  $OO$  下方未画下半个透镜，而是补足了未切割前整个透镜的其余部分，用虚线表示。整个透镜的光轴为  $O'O'$ 。

半个透镜产成像规律应与完整的透像相同。现在物点（即光源） $S$  在粘合透镜的中心轴线上，即在图中透镜的光轴上方  $\frac{a}{2}$  处，离透镜光心的水平距离正好是透镜的焦距。根据几何光学，光源  $S$  发出的光线，经透镜光心的水平距离正好是透镜的焦距。根据几何光学，光源  $S$  发出的光线，经透镜折射后成为一束平行光束，其传播方向稍偏向下方，与光轴  $O'O'$ （对  $OO$  也是一样）成

角为  $\frac{\theta}{2} = \frac{a}{2f}$ 。当透镜完整时光束的宽度为：透

镜直径  $\times \cos \frac{\theta}{2} \approx$  透镜直径。对于上半个透就，

光事宽度为  $\frac{1}{2}D$ 。

同理， $S$  所发的光，经下半个透镜折射后，形成稍偏向上方的平行光束，与  $O'O'$  轴成  $\frac{\theta}{2}$  角，宽度也是  $\frac{D}{2}$ 。

于是，在透镜右侧，成为夹角为  $\theta$  的两束平行光束的干涉问题（见图 2-1-21），图中的两平行光束的重叠区（用阴影表示）即为干涉区。为作图清楚起见，图 2-1-21，特别是图 12-1-21 中的  $\theta$  角，均远较实际角度为大。

图 2-1-22 表示的是两束平行光的干涉情况，其

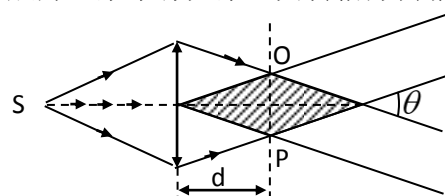


图 2-1-21

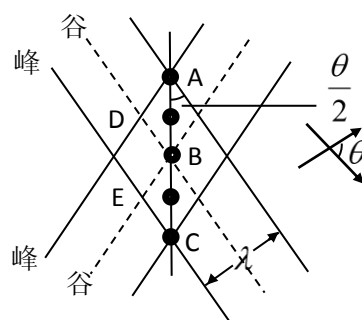


图 2-1-22



中  $\theta$  是和图 2-1-21 中的  $\theta$  相对应的。图 2-1-22 中实线和虚线分别表示某一时刻的波峰平面和波谷平面。在垂直于中心轴线屏幕上， $A$ 、 $B$ 、 $C$  表示相长干涉的亮纹位置， $D$ 、 $E$  表示相消干涉的暗纹位置，相邻波峰平面之间的垂直距离是波长  $\lambda$ 。故干涉条纹间距  $\Delta x$  满足

$$2\Delta x \cdot \sin(\theta/2) = \lambda$$

在  $\theta$  很小的情况下，上式成为  $\Delta x \cdot \theta = \lambda$ 。

所以透镜切去的宽度

$$a = f \cdot \theta = f\lambda / \Delta x = \frac{(0.2m) \times (0.5 \times 10^{-6}m)}{(0.2 \times 10^{-3}m)} = 0.5 \times 10^{-3}m = 0.5mm$$

$$\theta = \frac{a}{f} = \frac{0.5}{200}$$

果然是一个很小的角度。

2、由以上的求解过程可知，干涉条纹间距  $\Delta x$  与屏幕离透镜  $L$  的距离无关，这正是两束平行光干涉的特点。但屏幕必须位于两束光的相干叠加区才行。图 2-1-22 中以阴影菱形部分表示这一相干叠加区。因为由(1)式知条纹是等距的，显然当屏幕位于  $PQ$  处可获得最多的干涉条纹，而  $PQ$  平面到透镜  $L$  的距离

$$d = \frac{D}{2} / \theta = (10^{-2}m) / (0.5/200) = 4m$$

**例 16.** 一个由暗盒组成的针孔照相机，其小孔直径为  $d$ ，暗盒中像成在小孔后距离为  $D$  的感光胶片上如图 2-1-37，物体位于小孔前  $L$  处，所用波长为  $\lambda$ 。

- (1) 估计成像清晰时小孔半径的大小。
- (2) 若使用中算出的小孔，试问物体上两点之间的最小距离是多少时？该两点的像是否可分辨？

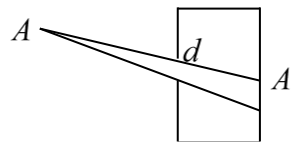


图 2-1-37

**解：**

(1) 物体上一点在照像底片上成的像由两个因素决定的，一是小孔的几何投影，一是小孔的夫琅禾费衍射 ( $D \gg d$ )。几何投影产生物点的像的直径是

$$\Delta a' = \frac{L+D}{L} \cdot d$$

衍射效应扩大了几何投影区，所增加的直径大小为

$$\Delta a'' = 2 \times \frac{1.22\lambda}{d} \cdot D$$

总的像直径为

$$\Delta a = \Delta a' + \Delta a'' = \frac{L+D}{L}d + \frac{2.44\lambda D}{d}$$

可见当小孔  $d$  小时，则第一项小，第二项大。当  $d$  大时，第二项小，第一项大。

当  $d = \sqrt{\frac{2.44\lambda DL}{L+D}}$  时， $\Delta a$  最小，其值是

$$\Delta a = 2 \cdot \sqrt{\frac{2.44D\lambda(L+D)}{D}}$$

(2)由(1)知，对小孔直径为  $d$  的针孔照像机，物上一几何点在底片上所成像的大小为

$$\Delta a = 2 \cdot \sqrt{\frac{2.44\lambda D(L+D)}{L}}$$

物上相邻两点  $AB$  在底片上要能分辨，根据瑞利判据，其像点中心距离  $A'B' \geq \frac{1}{2}\Delta a$ ，由几何关系得

$$AB = \frac{D}{L} \cdot A'B' = \sqrt{\frac{2.44\lambda L(L+D)}{D}}$$

即物上两点间的距离要大于  $\sqrt{\frac{2.44\lambda L(L+D)}{D}}$  时，该两点的像是能分辨的。

**例 17.**图 5-1 中纵坐标为光电效应实验中所加电压( $U$ )，横坐标为光子的频率 ( $\nu$ )。若某金属的极限频率为  $\nu_0$ ，普朗克恒量为  $h$ ，电子电量为  $e$ ，试在图中画出能产生光电流的区域(用斜线表示)。

**解：**爱因斯坦的光电方程

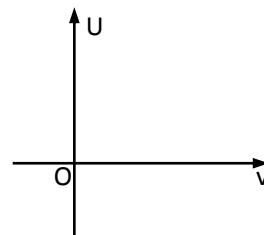


图 2-2-5

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - W \quad ①$$

根据极限频率  $\nu_0$  可知

$$W = h\nu_0 \quad ②$$

由于光电子具有最大初动能为  $\frac{mv^2}{2}$ ，则它可克服反向电压做功为  $Ue$ ，故有图 5-1

$$\frac{mv^2}{2} = Ue \quad ③$$

将②、③式代入①式可得

$$Ue = h\nu = h\nu_0$$

$$Ue = h(\nu - \nu_0)$$

$$\frac{U}{\nu - \nu_0} = \frac{h}{e}$$

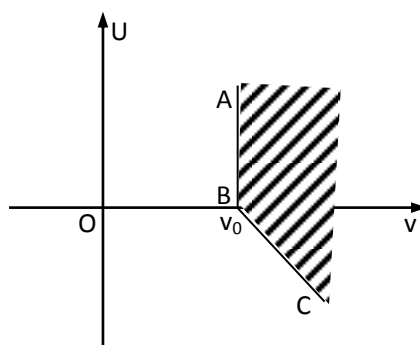


图 2-2-6

此即为图 2-2-5 中  $BC$  斜率的绝对值。据此可作出图 2-2-6，图中画有斜线区域即为能产生光电流的区域。

**简析：**在  $U-\nu$  图第一象限中能产生光电流的区域，可根据极限频率  $\nu_0$  很容易地作出。关键在于如何确定第四象限中能产生光电流的区域，但我们可以利用爱因斯坦的光电方程找出这一区域。

**例 18.**一波长为  $\lambda_i$  的光子与一运动的自由电子碰撞。碰撞的结果使电子变为静止，并且波长为  $\lambda_0$  的光子在原先方向的夹角为  $\theta = 60^\circ$  的方向上前进。此光



2-2-7

子与另一静止的自由电子碰撞，然后以波长  $\lambda_j = 1.25 \times 10^{-10} \text{ m}$  的光子前进，其方向在碰撞后改变了  $\theta = 60^\circ$ 。计算第一个电子在碰撞前的德布罗意波长。（普朗克常数

$h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ，电子质量  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ，光速  $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  )

**解：**对第一次碰撞，能量守恒定律为

$$h\nu_0 = h\nu_i + E_e \quad (1)$$

式中  $\nu$  是光子的频率， $E_e$  是电子的能量。在波长为  $\lambda_0$  的光子的出射方向，以及在与它垂直方向上写出动量守恒定律（见图 2-2-7）分别为

$$\frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda_i} \cos \theta + p_e \cos \varphi, 0 = \frac{h}{\lambda_i} \sin \theta - p_e \sin \varphi$$

式  $p_e$  是电子的动量。

从上述两方程消去  $\varphi$ ，并把  $\lambda$  写成  $c/\nu$ ，有

$$(h\nu_0)^2 + (h\nu_i)^2 - 2h^2\nu_0\nu_i \cos \theta = p_e^2 c^2 \quad (2)$$

利用相对论关系

$$c^2 p_e^2 = E_e (E_e + 2m_e c^2) \quad (3)$$

以及方程①和②得

$$\nu_0 = \frac{\nu_i}{\frac{h\nu_i}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) - 1} \quad (4)$$

变换后得

$$\lambda_0 - \lambda_i = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (5)$$

对第二次碰撞可作同样的计算，得如下结果

$$\lambda_0 - \lambda_f = -\frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (6)$$

⑤⑥两式相减，得  $\lambda_i = \lambda_f$

两次碰撞是类似的，利用⑤式得  $\lambda_0 = 1.238 \times 10^{-10} \text{ m}$ 。

分别利用①和③式，可算出电子的能量和动量为

$$E_e = h\nu\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_i}\right) = 1.56 \times 10^{-17} \text{ J}, p_e = 2.84 \times 10^{-48} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\text{第一个电子的波长为 } \lambda_e = \frac{h}{p_e} = 1.24 \times 10^{-10} \text{ m}。$$

**简析：**此题需运用能量守恒与动量守恒求解，但必须应用相对论作必要的变换。

**例 19.**设质子的半径为  $10^{-15} \text{ m}$ ，求质子的密度。如果在宇宙间有一个恒定的密度等于质子的密度。如不从相对论考虑，假定它表面的“第一宇宙速度”达到光速，试计算它的半径是多少。它表面上的“重力加速度”等于多少？（ $1 \text{ mol}$  气体的分子数是  $6 \times 10^{23}$  个；光速  $= 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ）；万有引力常数  $G$  取为  $6 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ 。只取一位数做近似计算。

$$\text{解： } H_2 \text{ 的摩尔质量为 } 2 \text{ g/mol}, H_2 \text{ 分子的质量为 } \frac{2}{6 \times 10^{23}} \text{ g} = \frac{2}{6 \times 10^{26}} \text{ kg}$$

$$\therefore \text{质子的质量近似为 } \frac{2}{6 \times 10^{26}} \text{ kg}$$

$$\text{质子的密度 } \rho = \frac{25}{6 \times 10^{26}} / \frac{4}{3} \pi (10^{-15})^3 = \frac{1}{4 \times 6 \times 10^{16} \times 10^{-45}} = \frac{1}{24} \times 10^{19} (\text{kg/m}^3)$$

设该星体表面的第一宇宙速度为  $v$ ，由万引力定律，得

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}, \quad v^2 = \frac{GM}{r}$$

而

$$M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$v = \frac{G \frac{4}{3} \pi r^3 \rho}{r} = 4Gr^2 \rho$$

$$v = 2\gamma \sqrt{G\rho}$$

$$r = \frac{v}{2\sqrt{G\rho}} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{6 \times 10^{-11} \times \frac{1}{24} \times 10^{19}}} = 3 \times 10^4 (\text{m})$$

$$\text{由于“重力加速度” } g = GM/y^2 = G \frac{4}{3} \pi y^3 \rho / y^2 \approx 4yG\rho$$

$$\therefore g = 4 \times 3 \times 10^4 \times 6 \times 10^{-11} \times \frac{1}{24} \times 10^{19} = 3 \times 10^{12} (\text{m/s}^2)$$

**【注】**万有引力恒量一般取  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m} / \text{kg}^2$

**例 20.**与氢原子相似，可以假设氦的一价正离子 ( $\text{He}^+$ ) 与锂的二价正离子 ( $\text{Li}^{++}$ ) 核外的一个电子也是绕核作圆周运动。试估算

- (1)  $\text{He}^+$ 、 $\text{Li}^{++}$  的第一轨道半径;
- (2) 电离能量、第一激发能量;
- (3) 赖曼系第一条谱线波长分别与氢原子的上述物理量之比值。

**解:** 在估算时, 不考虑原子核的运动所产生的影响, 原子核可视为不动, 其带电量用  $+Ze$  表示, 可列出下面的方程组:

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}, \quad (1)$$

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}, \quad (2)$$

$$mv_n r_n = n \cdot \frac{h}{2\pi}, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1}, \quad (4)$$

由此解得  $r_n$ ,  $E_n$ , 并可得出  $\frac{1}{\lambda}$  的表达式:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi m e^2 Z} = r_1 \frac{n^2}{Z}, \quad (5)$$

其中  $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0.53 \times 10^{-10}$  米, 为氢原子中电子的第度轨道半径, 对于  $\text{He}^+$ ,  $Z=2$ , 对于  $\text{Li}^{++}$ ,  $Z=3$ .

$$E_n = -\frac{me^2}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{Z^2}{n^2} = E_1 \frac{Z^2}{n^2}, \quad (6)$$

其中  $E_1 = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -13.6$  电子伏特为氢原子的基态能。

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 c} Z^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = Z^2 R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (7)$$

$$n_1 = 1, 2, 3, \dots$$

$$n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3, \dots$$

$R$  是里德伯常数。

- (1) 由半径公式 (5), 可得到类氢离子与氢原子的第一轨道半径之比:

$$\frac{r_{\text{He}^+}}{r_H} = \frac{Z_H}{Z_{\text{He}^+}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{r_{\text{Li}^{++}}}{r_H} = \frac{Z_H}{Z_{\text{Li}^{++}}} = \frac{1}{3}.$$

- (2) 由能量公式 (6), 可得到类氢离子与氢原子的电离能和第一激发能 (即电子从第一轨道激发到第二轨道所需的能量) 之比:

电离能:

$$\frac{0 - E_{\text{He}^+}^1}{0 - E_H^1} = \frac{-E_1 Z_{\text{He}^+}}{-E_1 Z_H} = \frac{2^2}{1^2} = 4$$

$$\frac{0 - E_{\text{Li}^{++}}^1}{0 - E_H^1} = \frac{-E_1 Z_{\text{Li}^{++}}}{-E_1 Z_H} = \frac{3^2}{1^2} = 9$$

第一激发能:

$$\frac{E_{He^+}^2 - E_{He^+}^1}{E_H^2 - E_H^1} = \frac{E_1 \frac{2^2}{2^2} - E_1 \frac{2^2}{1^2}}{E_1 \frac{1^2}{2^2} - E_1 \frac{1^2}{1^2}} = \frac{-3}{-\frac{3}{4}} = 4$$

$$\frac{E_{Li^{++}}^2 - E_{Li^{++}}^1}{E_H^2 - E_H^1} = \frac{E_1 \frac{3^2}{2^2} - E_1 \frac{3^2}{1^2}}{E_1 \frac{1^2}{2^2} - E_1 \frac{1^2}{1^2}} = \frac{-27}{-\frac{3}{4}} = 9$$

(其中:  $E^2$  表示电子处在第二轨道上的能量,  $E^1$  表示电子处在第一轨道上的能量)

(3) 由光谱公式⑦, 氢原子赖曼系第一条谱线的波长有:

$$\frac{1}{\lambda_H} = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)$$

相应地, 对类氢离子有:

$$\frac{1}{\lambda_{He^+}} = 2^2 R \left[ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right]$$

$$\frac{1}{\lambda_{Li^{++}}} = 3^2 R \left[ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right],$$

因此:  $\frac{\lambda_{He^+}}{\lambda_H} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\lambda_{Li^{++}}}{\lambda_H} = \frac{1}{9}$

**例 21.** 已知基态  $He^+$  的电离能为  $E=54.4\text{eV}$ 。

(1) 为使处于基态的  $He^+$  进入激发态, 入射光子所需的最小能量应为多少?

(2)  $He^+$  从上述最底激发态跃迁返回基态时, 如考虑到该离子的反冲, 则与不考虑反冲相比, 它所发射的光子波长的百分变化有多大? (离子  $He^+$  的能级  $E_n$  与  $n$  的关系和氢原子能级公式类中, 可采用合理的近似。)

**解:**

(1) 电离能表示  $He^+$  的核外电子脱离氢核的束缚所需要的能量。而题问最小能量对应于核外电子由基态能级跃迁到第一激发态, 所以

$$E_{\min} = E \cdot \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 54.4 \times \left( 1 - \frac{1}{4} \right) = 40.8\text{eV}$$

(2) 如果不考虑离子的反冲, 由第一激发态迁回基态发阜的光子有关系式:

$$E_{\min} = h\nu_0$$

现在考虑离子的反冲, 光子的频率将不是  $\nu_0$  而是  $\nu$ ,  $\frac{1}{2}M\nu^2$  为反冲离子的动能, 则由能量守恒得

$$E_{\min} = h\nu + \frac{1}{2}M\nu^2$$

又由动量守恒得

$$M\nu = h \cdot \frac{\nu}{c}$$

式中  $M\nu$  是反冲离子动量的大小, 而  $h \cdot \frac{\nu}{c}$  是发射光子的动量的大小, 于是, 波长的相对变化



$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_0 - v}{v} = \frac{hv_0 - hv}{hv} = \frac{Mv^2}{2Mvc} = \frac{Mvc}{2Mc^2} = \frac{hv}{2Mc^2}$$

由于  $Mc^2 \gg hv \gg h(v - v_0)$

所以

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{hv_0}{2Mc^2} = \frac{h(v - v_0)}{2Mc^2} \frac{hv}{2Mc^2}$$

代入数据

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} = \frac{40.8 \times 1.60 \times 10^{-19}}{2 \times 4 \times 1.67 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2} = 5.4 \times 10^{-9}$$

即百分变化为 0.00000054%。

**简析：**第（1）问应正确理解电离能概念。第（2）问中若考虑核的反冲，应用能量守恒和动量守恒，即可求出波长变化。

**例 22.**已知某放射源在  $t=0$  时，包含  $10^{12}$  个原子，此种原子的半衰期为 30 天。

（1）计算  $t_1 = 1s$  时，已发生衰变的原子数；

（2）确定这种原子只剩下  $10^8$  个的时刻  $t_2$ 。

**解：**衰变系数  $\lambda$  与半衰期  $T$  的关系为

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0.693}{T}$$

衰变规律可表述为：

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{0.693}{T} t}$$

（1） $t_1$  时刻未衰变的原子数为：

$$N_1 = N_0 e^{-\frac{0.693}{T} t}$$

已发生衰变的原子数便为：

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 \left( 1 - e^{-\frac{0.693}{T} t} \right) = 10^{12} \times \left( 1 - e^{-\frac{0.693}{30 \times 24 \times 3600}} \right) = 2.67 \times 10^5$$

（2） $t_2$  时刻未发生衰变的原子数为：

$$N_2 = N_0 e^{-\frac{0.693}{T} t}$$

由此可解得：
$$t_2 = \frac{0.693}{T} \ln \frac{N_0}{N_2} = \frac{30}{0.639} \ln \frac{10^{12}}{10^8} = 399 \text{ 天}$$

**例 23.**在大气和有生命的植物中，大约每  $10^{12}$  个碳原子中有一个  $C_{14}$  原子，其半衰期为  $t=5700$  年，其余的均为稳定的  $C_{12}$  原子。在考古工作中，常常通过测定古物中  $C_{14}$  的含量来推算这一古物年代。如果在实验中测出：有一古木碳样品，在  $m$  克的碳原子中，在  $\Delta t$ （年）时间内有  $\Delta n$  个  $C_{14}$  原子发生衰变。设烧成木炭的树是在  $T$  年前死亡的，试列出能求出  $T$  的有关方程式（不求解方程）。

**解：** $m$  克碳中原有的  $C_{14}$  原子数为  $n_0 = \frac{m}{12} \times N_0 \times \frac{1}{10^{12}}$ ，式中  $N_0$  为阿伏加德罗常数。

经过  $T$  年，现存  $C_{14}$  原子数为

$$n = n_0 \left( \frac{1}{2} \right)^{T/\tau} = \frac{mN_0}{12 \times 10^{12}} \left( \frac{1}{2} \right)^{T/\tau} \quad (1)$$

在  $\Delta T$  内衰变的  $C_{14}$  原子数为

$$\Delta n = n - n \left( \frac{1}{2} \right)^{\Delta T / \tau} = n \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{\Delta T / \tau} \right] \quad (2)$$

在 (1)、(2) 二式中,  $m$ 、 $N_o$ 、 $\tau$ 、 $\Delta T$  和  $\Delta n$  均为已知, 只有  $n$  和  $T$  为未知的, 联立二式便可求出  $T$ 。

**例 24.** 当质量为  $m$ , 速度为  $v_o$  的微粒与静止的氢核碰撞, 被氢核捕获 (完全非弹性碰撞) 后, 速度变为  $v_H$ ; 当这个质量为  $m$ , 速度为  $v_o$  的微粒与静止的碳核做对心完全弹性碰撞时, 碰撞后碳核速度为  $v_c$ , 今测出  $\frac{v_o}{v_H} = \frac{4}{13}$ , 已知  $\frac{\text{碳核质量} m_c}{\text{氢核质量} m_H} = 12$ , 求此微粒质量  $m$  与氢核质量  $m_H$  之比为多少?

**解:** 根据题意有  $mv_o = (m + m_H)v_H$ , 即有

$$v_H = \frac{mv_o}{m + m_H} \quad (1)$$

又

$$mv_o = mv + m_c v_c \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m_c v_c^2 \quad (3)$$

由 (2) 式得

$$m(v_o - v_1) = m_c v_c \quad (4)$$

由 (3) 式得

$$m(v_o^2 - v_1^2) = m_c v_c^2 \quad (5)$$

由 (4)、(5) 式得

$$v_o + v_1 = v_c \quad (6)$$

(6)  $\times$   $m$  (4) 得

$$\begin{aligned} 2mv_o &= (m + m_c)v_c \\ v_c &= \frac{2mv_o}{m + m_c} \\ \frac{v_c}{v_H} &= \frac{2(m + m_H)}{m + m_c} = \frac{2\left(\frac{m}{m_H} + 1\right)}{\frac{m}{m_H} + 12} = \frac{4}{13} \end{aligned}$$

所以  $\frac{m}{m_H} = 1$ 。此微粒的质量等于氢核的质量。

**例 25.** 放射性物质的原子放射出两个沿相反方向运动的电子。在实验室中测出每个电子的速率为  $0.6c$ ,  $c$  是光速。今以一个电子为参照物, 另一个电子的速率是多大?

(1) 用伽利略变换进行计算;

(2) 用洛伦兹变换进行计算。并指出哪个不合理。

**解:**

(1) 设向右运动的电子为  $S'$  系, 则按伽利略变换, 在  $S'$  系中看另一电子的速度是  $v = 0.6c + 0.6c = 1.2c$ , 这与光速不变的实验事实相矛盾, 所以是不合理的。

(2) 设实验室为参照系  $S$ , 一个电子参照系为  $S'$ , 则  $S'$  相对于  $S$  系的速度是  $0.6c$ , 另一个电子相对于  $S$  系的速度为  $-0.6c$ , 按洛伦兹变换, 另一个电子相对于  $S'$  系

的速度是  $u'_x$ ，则

$$u'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

$$x' = \frac{-v - v}{1 - \frac{v}{c^2}(-v)} = \frac{-2v}{1 + v^2/c^2} \approx -0.88c$$

这就是说，以一个电子为参照物看另一个电子的速度是  $0.88c < c$ ，即小于光速，与实验相符合，是合理的。

**例 26.** 有一条河宽为  $l$ ，其河水流速是  $v$ ，船相对河水的速度为  $u'$ ，且  $u' > v$ 。今

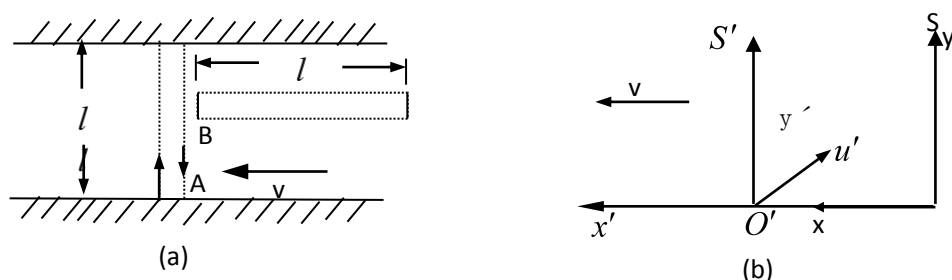


图 2-6-4

有船 A 和 B 分别沿图 2-6-4 (a) 中所示路径往返一次，求各需要时间多少？哪条船需时长些？

**解：** 本题是经典力学问题，用力伽利略变换处和即可。设岸的坐标系为 S，河水的坐标系为  $S'$ ，如图 2-6-4 (b) 所示，若船相对岸的速度为  $u$ ，则对于 A 船

$$u' = u'_x i' + u'_y j'$$

$$u = u_x i + u_y j, \quad u_x = 0$$

由伽利略变换知：  $u_x = u'_x - v$ ，则  $u'_x = v$  而

$$u_y = u'_y = (u'^2 - u'^2_x)^{1/2} = (u'^2 - v^2)^{1/2} = u' \left( 1 - \frac{v^2}{u'^2} \right)^{1/2}$$

所以 A 船往返一次所需时间为

$$t_A = \frac{2l}{u_y} = \frac{2l}{u' (1 - v^2/u'^2)^{1/2}}$$

对于 B 船，相对于岸的往返速度  $u_x$  分别为  $u' + v$  和  $u' - v$ ，所以其往返一次所需的时间为

$$t_B = \frac{l}{u' + v} + \frac{l}{u' - v} = \frac{2l}{u' (1 - v^2/u'^2)}$$

因为  $|u'| > |u|$ ，所以  $|v/u'| < 1$ 。按  $(1-x)^{-1/2}$  和  $(1-x)^{-1}$  展为幂级数的公式有

$$t_A = \frac{2l}{u'} (1 - v^2/u'^2)^{-1/2} = \frac{2l}{u'} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{u'^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{v^4}{u'^4} + \dots \right)$$

$$t_B = \frac{2l}{u'} (1 - v^2/u'^2)^{-1} = \frac{2l}{u'} \left( 1 + \frac{v^2}{u'^2} + \frac{v^4}{u'^4} + \dots \right)$$

所以

$$t_B - t_A = \frac{2l}{u'} = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{u'^2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{v^4}{u'^4} + \dots \right) > 0$$

故  $t_B > t_A$ , 即 B

往返一次的时间比  
A 船往返一次的时间要长。

**例 27.** 一个中微子在惯性系 S 中沿 +y 方向以光速 c 运动, 求对 S 系以速度 v 沿 +x 方向运动的观察者所观测到的中微子的速度和方向怎样?

**解:** 设运动观察者为 S' 系, 他所看到的中微子的速度分量为  $u'_x, u'_y, u'_z$ , 则按洛伦兹变换

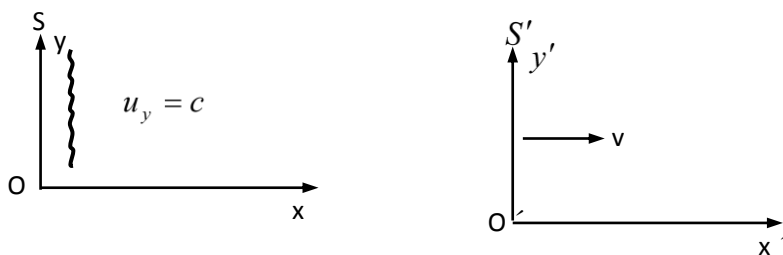


图 2-6-5

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} = -v (\because u_x = 0),$$

$$u'_y = (1 - \beta^2)^{1/2} \cdot \frac{u_y}{1 - (v/c^2)u_x} \quad (\text{令 } \beta = \frac{v}{c}) = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \cdot c (\because u_y = c)$$

$$u'_z = (1 - \beta^2)^{1/2} \cdot \frac{u_z}{1 - (v/c^2)u_x} = 0 (\because u_z = 0),$$

因此

$$u' = (u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z)^{1/2} = [v^2 + (1 - v^2/c^2) \cdot c^2]^{1/2} = c,$$

即运动中的观测者测得中微子的速度仍是 c, 中微子的运动方向是

$$a = \operatorname{tg}^{-1} \frac{u'_x}{u'_y} = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{-v}{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot c} \right),$$

即中微子运动方向与  $Oy'$  轴的夹角。

**例 28.** 试证明: 物体的相对论能量 E 与相对论动量 P 的量值之间有如下关系:

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2$$

**证明:**

$$E^2 - p^2 c^2 = (mc^2)^2 - (mvc)^2 = m^2 c^2 (c^2 - v^2) = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (c^2 - v^2) =$$

$$\frac{m_0^2 c^4}{c^2 - v^2} (c^2 - v^2) = m_0^2 c^4 = E_0^2$$

$$\therefore E^2 = p^2 c^2 + E_0^2$$

**例 29.** 一个静止质量为  $m_0$  的粒子以速率  $v = \frac{4}{5}c$  运动, 它和一个同类的静止粒子进行完全非弹性碰撞。求:

(1) 复合粒子的速率。

(2) 复合粒子的静止质量。

**解:** 在微观领域相对论动量守恒、相对论能量守恒。故有

$$\gamma m_0 v = m' v' \quad (1)$$

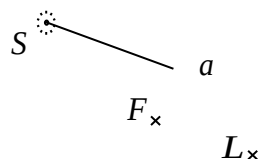


图 1-5-20

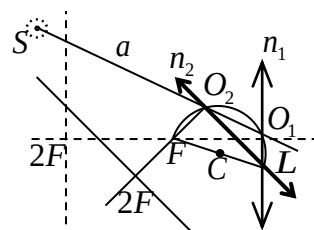


图 1-5-21

$$\gamma m_0 c^2 + m_0 c^2 = m' c^2 \quad (2)$$

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} = 1 / \sqrt{1 - (\frac{\frac{4}{5}c}{c})^2} = \frac{5}{3} \quad (3)$$

将③代入②得：

$$\frac{5}{3} m_0 c^2 + m_0 c^2 = m' c^2, m' = \frac{8}{3} m_0 \quad (4)$$

③与④代入①得：

$$\frac{5}{3} m_0 \cdot \frac{4}{5} c = \frac{8}{3} m_0 v', v' = \frac{c}{2}. \text{而 } m' = m'_0 / \sqrt{1 - (\frac{v'}{c})^2}, \text{故可得 } m'_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3} m_0.$$

即复合粒子的速率为  $c/2$ ，静止质量为  $\frac{4\sqrt{3}}{3} m$ 。

**例 30.**求证：在伽利略变换下，质点动量定理具有不变性。

**证明：**

在 S 系中

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}, \Sigma \vec{F} dt = d(m\vec{v})$$

两边同时作定积分得：

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F} dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d(m\vec{v}) \text{ 即 } \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1,$$

这就是 S 系中质点的动能定理的数学公式。在 S' 系中

$$\Sigma \vec{F}' = m \vec{a}', \Sigma \vec{F}' = m \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d(m\vec{v}')}{dt'}, \Sigma \vec{F}' dt' = d(m\vec{v}')$$

两边同时作定积分可得：

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F}' dt' = \int_{\vec{v}_1'}^{\vec{v}_2'} d(m\vec{v}'), \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F}' dt' = m\vec{v}_2' - m\vec{v}_1'$$

这就是 S' 系中的质点动量定理的数学公式。为回避高等数学，可设一质量为 m 的质点沿 x 轴正方向，在平行于 x 轴的恒定的合外力 F 作用下作匀加速直线运动。经过时间 t，速度从  $v_1$  增大到  $v_2$ ，根据牛顿第二定律在 S 系中有

$$F = ma = m \cdot \frac{v_2' - v_1}{t}$$

整理得：

$$Ft = mv_2 - mv_1$$

这就是 S 系中的质点动量定理。在 S' 系中，

$$F' = F, v_2' - v_1' = (v_2 - u) - (v_1 - u) = v_2 - v_1, t' = t$$

$$\text{即 } F't' = mv_2' - mv_1'$$

此即 S' 系中的质点动量定理。

**例 30.**一个静止质量为 M 的物体静止在实验室中，裂变为静止质量为  $m_1$  和  $m_2$  的两部分，试求裂变产物的相对论动能  $E_{K1}$  和  $E_{K2}$ 。

**解：**根据相对论能量守恒有

$$MC^2 = \gamma_1 m_1 C^2 + \gamma_2 m_2 C^2$$

化简得：

$$\gamma_1 = \frac{1}{m_1} [M - \gamma_2 m_2] \quad ①$$

根据相对论动量守恒有

$$O = \gamma_1 m_1 v_1 - \gamma_2 m_2 v_2 \quad ②$$

但

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}, v = \frac{c}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 - 1},$$

将

$$v_1 = \frac{c}{\gamma_1} \sqrt{\gamma_1^2 - 1} \text{ 和 } v_2 = \frac{c}{\gamma_2} \sqrt{\gamma_2^2 - 1}$$

代入②式化简得

$$m_1 \sqrt{\gamma_1^2 - 1} = m_2 \sqrt{\gamma_2^2 - 1} \quad ③$$

由①、③两式可解得：

$$r_1 = (M^2 + m_1^2 - m_2^2) / 2Mm_1, \quad r_2 = (M^2 + m_2^2 - m_1^2) / 2Mm_2$$

$$E_{k1} = (\gamma_1 - 1)m_1 C^2 = C^2 \cdot [(M - m_1)^2 - m_2^2] / 2M;$$

$$E_{k2} = (\gamma_2 - 1)m_2 C^2 = C^2 [(M - m_2)^2 - m_1^2] / 2M.$$

**例 31.**爱因斯坦的“等效原理”指出，在不十分大的空间范围和时间间隔内，惯性系中引力作用下的物理规律与没有引力但有适当加速度的非惯性系中的物理规律是相同的。现在研究以下问题。

(1) 试从光量子的观点出发，讨论在地面附近的重力场中，由地面向离地面的距离为  $L$  处的接收器发射频率为  $\nu_0$  的激光与接收器接收到的频率  $\nu$  之间的关系。

(2) 假设地球物体没有引力作用，现在以一以加速度  $a$  沿直线做匀加速运动的箱子中做一假想实验。在箱尾和箱头处分别安装一适当的激光发射器和激光接收器，两者间的距离为  $L$ ，现从发射器向接收器发射周期为  $T_0$  的激光。试从地面参考系的观点出发，求出位于箱头处的接收器所到的激光周期  $T$ 。

(3) 要使上述两个问题所得到的结论是完全等价的。则问题(2)中的箱子的加速度的大小和方向应如何？

**解：**

(1) 对于能量为  $h\nu_0$  的光子，其质量  $m = \frac{h\nu_0}{c^2}$ ，在重力场中，当该光子从地面到达接收器时，增加的重力势能为  $mgh$ 。由能量守恒得

$$h\nu_0 = h\nu + mgl = h\nu + \frac{h\nu_0}{c^2} \cdot gL$$

得

$$\nu_0 = \nu(1 + \frac{gL}{c^2})$$

$$\nu = \nu_0(1 - \frac{gL}{c^2})$$

(2) 设  $t=0$  时刻，箱子从静止开始加速，同时，激光光波的某一振动状态从发射器发出，任何时刻  $t$ ，发射器和接收器的位置分别为

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

$$x = L + \frac{1}{2}at^2$$

所考察的振动状态的位置和比该振动状态晚一个周期  $T_0$  的振动状态的位置分别为：

$$x = ct$$

$$x = \frac{1}{2} a T_0^2 + c(t - T_0)$$

设所考察的振动状态在  $t_1$  时刻到达接收器，则有

$$c t_1 = L + \frac{1}{2} a t_1^2$$

解得

$$t_1 = \frac{c}{a} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2}} \right)$$

比所考察的振动状态晚一个周期  $T_0$  发出的振动状态到达接收器的时刻为  $t_2$ ，则有

$$\frac{1}{2} a T_0^2 + c(t_2 - T_0) = L + \frac{1}{2} a t_2^2$$

解得

$$t_2 = \frac{c}{a} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2} - \frac{2aT_0}{c} + \frac{a^2 T_0^2}{c^2}} \right)$$

接收器接收到的激光的周期为

$$\begin{aligned}
 T = t_2 - t_1 &= \frac{c}{a} \left( \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2}} - \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2} - \frac{2aT_0}{c} + \frac{a^2 T_0^2}{c^2}} \right) \\
 &\approx \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2}} \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\frac{2aT_0}{c}}{1 - \frac{2aL}{c^2}}} \right) \\
 &\approx \frac{c}{a} \left( 1 - \frac{aL}{c^2} \right) \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\frac{aT_0}{c}}{1 - \frac{2aL}{c^2}} \right) \right] \\
 &\approx \frac{c}{a} \left( 1 - \frac{aL}{c^2} \right) \left[ \frac{\frac{aT_0}{c}}{1 - \frac{2aL}{c^2}} \right] \\
 &= \frac{c}{a} \cdot \left( \frac{aT_0}{c} + \frac{2a^2 L T_0}{c^3} - \frac{a^2 L T_0}{c^3} - \frac{2a^3 L^2 T_0}{c^3} \right) \\
 &\approx \frac{c}{a} \cdot \left( \frac{aT_0}{c} + \frac{a^2 L T_0}{c^3} \right) \\
 &= T_0 \left( 1 + \frac{aL}{c^2} \right) \\
 (3) \quad T &= T_0 \left( 1 + \frac{gL}{c^2} \right)
 \end{aligned}$$

比较上述两式得  $a=g$ ，即“箱子”的加速度  $a=g$  方向竖直向上。

**例 32.** 考虑不用发射到绕太阳运动的轨道上办法，要在太阳系建立一个质量为  $m$  的静止空间站。这个空间站有一个面向太阳的大反射面（反射系数为 1），来自太阳的辐射功率  $L$  产生的辐射压力使空间站受到一个背离太阳的力，此力与质量为  $M_s$  的太

阳对空间站的万有引力方向相反，大小相等，因而空间站处于平衡状态。忽略行星对该站的作用力，求：

- (1) 此空间站反射面的面积  $A$ 。
- (2) 平衡条件和太阳与空间站之间的距离是否有关？
- (3) 设反射面是边长为  $d$  的正方形，空间站的质量为  $10^6$  千克，确定  $d$  之值。

已知太阳的辐射功率是  $3.77 \times 10^{26}$  瓦。太阳质量为  $1.99 \times 10^{30}$  千克。

**解：**

(1) 设空间站与太阳的距离为  $r$ ，则太阳辐射在空间站反射面上单位面积内的功率即光强  $\Phi = \frac{L}{4\pi r^2}$ ，太阳光对反射面产生的压强是光子的动量传递给反射面的结果，这一光压为

$$P = \frac{2\Phi}{c} = \frac{L}{2\pi r^2 c}$$

于是反射面受到的辐射压力

$$F_{\text{辐射}} = PA = \frac{L}{2\pi r^2 c} A$$

太阳对空间站的万有引力为

$$F_{\text{引力}} = G \frac{M_s m}{r^2}$$

式中  $G$  为万有引力常数，在空间站处于平衡状态时， $F_{\text{引力}} = F_{\text{辐射}}$ ，即

$$G \frac{M_s m}{r^2} = \frac{L}{2\pi r^2 c} A,$$

这就得到，反射面的面积

$$A = \frac{2\pi G M_s m c}{L}.$$

(2) 由上面的讨论可知，由于辐射压力和太阳引力都与  $r^2$  成反比，因而平衡条件与太阳和空间站的距离  $r$  无关。

(3) 若  $A = d^2$ 。并以题给数据代入前式得到

$$d = \sqrt{\frac{2\pi G M_s m c}{L}}$$