

摘要

随着真空紫外软 X 射线 (XUV) 在生物、材料、微加工和超大规模集成电路中的应用以及在空间光学研究领域中的发展,对 XUV 光学系统的设计提出了不同程度的挑战。反射式光栅和反射镜是 XUV 波段光学系统的主要组成部分。工作在 XUV 波段的光学仪器,往往需要采用掠入射光学结构,光学系统的像差比较严重。所以对这类光学系统像差的研究是一个十分有意义的研究课题。

李变换理论作为研究像差的方法之一,已经在轴对称光学系统的研究领域中的发展成熟。而对于平面对称光学系统来说,李变换的方法还仅仅是刚刚起步;K. Goto 和 T. Kurosaki 将这一方法运用到平面对称(球面光栅)的光学系统中,计算球面光栅的像差和成像公式。本文应用李变换的方法研究了超环面光栅的成像及其像差。

第一章简要阐述了目前常用像差理论的研究基本情况,以及本课题的目的及其意义。第二章介绍了李变换基本原理,根据这些基本原理,使得李变换方法能够被运用到光学系统像差的研究。

光栅成像过程可分成五个部分,分别对应五个李变换;其中最重要的变换就是超环面光栅的衍射李变换,本文的第三章详细阐述了该变换的推导过程,并得到了相关的变换公式。

在第四章中,利用上述五个李变换推导出超环面光栅的成像公式,以及相关的像差表达式;并应用光线追迹,对推导结果进行了分析,说明了李变换的方法能准确地描述超环面光栅的成像。当主半径与次半径相等时,超环面光栅的成像公式与像差表达式可转换成球面光栅相对应的表达式,与 K. Goto 和 T. Kurosaki 的结果一致。

本文的推导以及分析表明了李变换方法应用在像差理论的研究具有优势。它可以处理平面光源,能计算远离子午焦平面处的像差。李变换方法导出的成像公式描述了像平面坐标与物平面坐标、方向余弦之间的函数关系,公式中并没有出现如光栅表面坐标之类的中间变量,体现了物空间变量与像空间对应变量之间映射关系。同时,该方法能转换成矩阵形式,更有利于多元件的像差表达。

关键词: 像差理论 李变换 超环面光栅

ABSTRACT

XUV has found a wide application from the fundamental research to the application study such as biology, materials science, industry, physics and astronomy etc. It makes demands on high-resolution XUV optical system. XUV optical system has the grazing structure, which produces higher level of aberration. Gratings and mirrors are the main components of XUV optical system. Grating aberration theory is the most important basis for instruments.

Lie transformations, as one of the methods in aberration theory, has been developed in the optical systems with axial symmetry. It is a novel method in the optical systems that lack axial symmetry. Goto and Kurosaki extended Lie transformations to systems with a plane of symmetry. They derived the aberration coefficients and image equations of spherical gratings.

The Lie method to characterize imaging of a toroidal grating is presented. A brief introduction of Lie method is firstly given, then the five transformations to describe the imaging processes of a toroidal grating is derived in detail. The formulae for calculation of the coordinates and direction of light ray are obtained with the above Lie transformation; and its numerical results are compared with those by ray tracing program of Shadow.

An advantage of the Lie theory of optical imaging is that the pupil (aperture) coordinates do not appear in the Lie theory. This provide a significant advantage when multi-element optical systems are considered. The phase space variables x and y in the Lie theory provide for the extent of the object.

Keywords: aberration theory; Lie optics; toroidal grating;

原创性声明

本人声明：所呈交的论文是本人在导师指导下进行的研究工作。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已发表或撰写过的研究成果。参与同一工作的其他同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签 名：王浩伟 日期：07.9.7

本论文使用授权说明

本人完全了解上海大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留论文及送交论文复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

签 名：王浩伟 导师签名：吴伟 日期：07.8.7

第一章 绪论

1.1 课题来源

本课题来源于国家自然科学基金资助项目《建立真空紫外软 X 射线多元件光学系统的研究平台》，项目编号：60578040。

1.2 研究目的及其意义

随着真空紫外软 X 射线 (XUV) 在生物、材料、微加工及超大规模集成电路应用和空间光学研究领域的发展,对 XUV 光学系统的设计、加工提出了不同程度的挑战^[1]。高性能的 XUV 光谱仪的能量分辨率达到 10000 以上;XUV 微聚焦系统的空间分辨达到亚微米;应用于空间观测的望远镜往往要应用复杂的非球面光学元件,在足够的光学传输效率前提下,得到尽可能高的空间分辨能力^[2]。我国高性能 XUV 光学仪器设计、研制水平的提高将会有力地推动上述各领域进行更深入的研究与探索。

工作在 XUV 波段的光学仪器,往往需要采用掠入射光学结构,光学系统的像差比较严重^{[3][4]};对这类光学系统像差的研究是一个十分有意义的研究课题。

通常,在已知系统参数的情况下,光线追迹是一种能精确而又直观地评价成像质量的工具。但是在设计 XUV 光学系统中,我们很难根据光线追迹的结果,来确定每个光学元件的参数与最后在像平面上的像差之间的关系。而利用李变换方法,就可以推导出像差与系统参数之间的直接关系,便于在设计过程中对光学系统整体优化。

1.3 研究背景

在 XUV 波段内,一般采用反射式元件作为整个光学系统的基本元件。反射式光栅和反射镜是这类系统的主要组成部分。反射式光栅的作用是用来将连续波长的光进行色散,以此可以获得单一波长的光。反射镜主要是用于光线的偏转、聚焦和准直^{[5][6]}。系统产生的像差可以通过改变元件的反射面的几何形状等一系

列参数来减小甚至消除^{[7][8]}。因此，在设计中调整各个元件的参数就能使得整个系统的成像质量达到最优的水平。

1.3.1 衍射光栅像差理论

衍射光栅像差理论是用解析的方法处理光栅光学系统的成像特性，从而可以分析几何像差对于分辨率的影响。从 Rowland 时代以来一百多年的历史来看，众多的学者对之进行了不懈的努力，作出了很多出色的研究，像差理论内容日益丰富，应用非常广泛。迄今，光栅的像差理论并没有完全成熟。

用哈密顿程函可以清楚地描述一般光学系统的行为，但实际的光学系统都具有高度的非线性，不能显式地写出哈密顿程函。光栅光学系统比一般光学系统更加复杂，其哈密顿程函的表示更为困难；这很大程度上是由于光栅光学系统大多是反射光学系统，对称度很低，在光栅的像差理论中通常只假定光学系统有一个对称平面。

研究光学系统的像差特性的方法可以大致分为两类：一是解析法，如光栅的像差理论；二是数值方法，如光线追迹。解析法是用符号计算来描述光学系统的像差，为光学系统的优化提供了理论依据；数值计算可以给出光学系统成像的精确结果，借助于计算机人们就可以得到与实际一致的成像。在光学系统设计中，利用解析法可以得到优化准则或者得到优化的初始值，以避免漫无目的搜索而陷入局部极值；数值方法可以验证解析法得到的结果，两者是相辅相成的。虽然数值方法是精确描述光学像差的方法，但解析法可以加深对光学系统成像特性的理解，在设计之初把握光学元件参数对系统像差的影响，这是数值方法所无法做到的。

衍射光栅像差理论发展到今天，主要有以下四种理论：

- 1、光程函数(Light Path Function)理论
- 2、波像差(Wave front aberration)理论
- 3、解析点列图(Spot diagram)理论
- 4、基于李变换(Lie transformation)理论

1.3.2 光程函数理论

光程函数理论的历史最为悠久,其基本思想是利用所谓哈密顿特征函数(并非严格意义下的点特征函数)和费马定理,即物点和像点之间光程函数取极值。Noda 等^[9]人用光程函数理论,对于具有一个对称平面的光学系统,给出了通用的光学系统像差表达式。从 Beutler^[10], Namioka^{[4][11]}, 到 Noda 等人发展的理论在子午焦平面内可以得到比较准确的结果,对于离开子午焦平面位置则误差较大; W. Werner 通过选择合适的光瞳坐标和其法线方向,建立斜坐标系,用光程函数理论详细地研究了等间距凹面光栅的像差特性,给出了成像方程和慧差、球差表达式。凹面光栅在实际光学系统中经常要配上辅助光学元件,对于多个光学元件,写出光程函数是很困难的。

1.3.3 波像差理论

Chrisp^{[12][13]}提出的波像差(Wave front aberration)理论是第一个多元件像差理论。该理论定义了相对于像散参考面的波前像差,把波前像差分开成四个光束单独作用的贡献,每个光束的作用方式相同,差别仅仅是光束的坐标参数不同,最后用近基理论对光学系统的坐标进行归一化处理以便不同光学元件的像差系数可以相加。该理论的特点是:

- 1、适用于全息超环面光栅,像差系数可以相加;
- 2、波像差相对于像散波前定义,适合平面对称系统;
- 3、可以用于轴对称全息光学系统,
- 4、利用计算机辅助可以实现复杂光学系统的分析。

同时该理论有一定的局限性:1) 系统入射光阑总是在光栅元件上,而没有考虑在其他位置的情况,波像差理论在远离焦平面以及衍射角偏大的情况下有很大误差;2) 在计算波像差的时候,以球面波为参考波面,而实际上由于像差的存在,这样的假设是不确切的。

1.3.4 点列图理论

由于光程函数理论和波像差理论的精度不够好,为了满足分析高分辨率光栅

光学系统的需要, Namioka 等人建立了解析点列图(Spot diagram)理论^{[14][20]}, 开始只能处理单个光栅, 后来又发展出适合平面对称双光学元件和平面光源的三阶像差理论。该理论具有完全三阶精度, 可广泛应用于高级光学元件和扩展光源条件下的像差研究。

1.3.5 李变换理论

考虑到光学系统是典型的非线性哈密顿系统, 可以用处理非线性动力学中的李代数方法分析, 通过相空间坐标来描述光线通过光学系统的成像情况。李代数这种数学工具由理论物理学家 A. Dragt 等人提出并且首先在磁光学中得到应用。李代数的方法也可以处理轴对称光学系统的问题, 已经成为一种成熟的轴对称光学系统成像理论。K. Goto 和 T. Kurosaki 将这一方法运用到平面对称(球面光栅)的光学系统中, 计算球面光栅的像差和成像公式^[21]。Palmer^{[22][23]}在 K Goto 等人的工作基础上提出了一种简化算法。

1.4 本论文的主要内容

本文应用李变换的方法研究了超环面光栅的成像及其像差。

第二章介绍了李变换基本原理。李变换是高斯光学中矩阵方法的延伸与发展, 引入李变换, 可得到描述光线状态变量的初值和末值之间的关系表达式。根据这些基本原理, 使得李变换方法能够被运用到光学系统像差的研究。

在单个超环面光栅的光学系统中, 按照光线从物平面传到像平面的顺序, 将光栅成像过程分成五个部分, 分别对应五个李变换; 其中最重要的变换就是超环面光栅的衍射李变换, 本文的第三章详细阐述了该变换的推导过程, 并得到了相关的变换公式。

在第四章中, 利用这五个李变换推导出超环面光栅的成像公式, 以及相关的像差表达式; 并应用光线追迹, 对推导结果进行了分析, 说明了李变换的方法能准确地描述超环面光栅的成像。当主半径与次半径相等时, 超环面光栅的成像公式与像差表达式可以转换成球面光栅相对应的表达式, 与 K. Goto 和 T. Kurosaki 的结果^[21]一致。

本文的推导以及分析表明了李变换方法应用在像差理论的研究具有优势。它

可以处理平面光源，能计算远离子午焦平面处的像差，以及便于多元件的像差计算。虽然李变换方法在光栅光学系统的应用也存在一定的局限性，但李变换本身的优势还有待充分挖掘和利用。

为了保持文章的连贯性，上述推导中的相关公式将安排在文章的附录部分。

第二章 李变换简介

2.1 概述

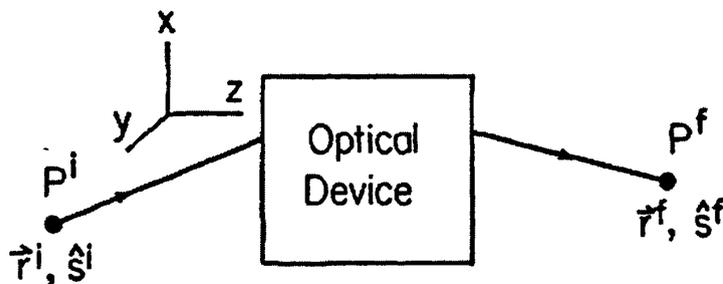


图 1 一般光学系统示意图

光线在空间传播时,其在任意位置的状态可以用该点的坐标以及该点处光线的出射方向来描述。如图 1 所示的光学系统中,一条光线从任意点 P^i 发出, P^i 点的空间坐标为 \vec{r}^i , 光线出射方向为单位矢量 \hat{s}^i ; 在经过一个光学仪器后,光线到达点 P^f , P^f 点的坐标为 \vec{r}^f , 光线出射方向为单位矢量 \hat{s}^f 。在给定初值 (\vec{r}^i, \hat{s}^i) 的情况下,几何光学的基本问题就是在给定的光学系统中确定光线的最终状态 (\vec{r}^f, \hat{s}^f) , 或是按照光线的初始状态与最终状态之间的关系来设计各类光学仪器。

由于光线从 P^i 点传到 P^f 点必须满足 Fermat 原理,初值 (\vec{r}^i, \hat{s}^i) 与末值 (\vec{r}^f, \hat{s}^f) 的函数关系不能完全任意。Hamilton^[24]是第一个系统地研究隐含在 Fermat 原理的约束问题。他认为,无论什么光学系统,都存在一个有 6 个自变量的函数,这个函数可以完全确定光线初值和末值之间的关系。例如,运用点特征函数 $V(\vec{r}^i, \vec{r}^f)$, 存在这样的关系^[25]:

$$\mu^i \hat{s}^i = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}^i} \quad (2-1)$$

$$\mu^f \hat{s}^f = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}^f} \quad (2-2)$$

这里 μ^i 和 μ^f 分别是光线入射到光学仪器前和从光学仪器出射后的介质折

射率。

尽管这个理论经常使用, 但用特征函数还是有一些不便之处。从上述的例子中我们可以发现, 这个关系式把光线入射时 (\vec{r}', \hat{s}') 和出射时 (\vec{r}^f, \hat{s}^f) 混合在一起。为了找出描述光线状态变量的初值和末值之间的具体表达式, 必须解出式(2-1), 用 \vec{r}' 和 \hat{s}' 来表示 \vec{r}^f ; 将这个结果代入式(2-2), 将 \hat{s}^f 表示为 \vec{r}' 和 \hat{s}' 的函数。即使在由已知特征函数的元件所组成的光学系统中, 很难得出整个光学系统特征函数的确切表达式。在使用特征函数时, 没有一种特征函数适用于所有的光学系统中。一个点特征函数不能用于成像系统, 一个角特征函数不能用于望远系统。

李变换的方法可以用来描述一个光学系统。与 Hamilton 的方法类似, 这个方法包含了由 Fermat 原理所得到的约束条件。更重要的是, 它能提供描述光线状态的各个变量初值和末值之间明确的关系表达式。用特定的算符来描述组成光学系统的每个单独元件的行为。这些算符可以通过一定的规则连接在一起, 从而获得描述整个光学系统的合成算符^{[26][27]}。最后, 这个方法对光学系统的处理和像差分析比较简便^{[28][29]}。

2.2 光学辛映射

假设光线的入射点 P^i 和出射点 P^f 的 z 轴坐标都是固定值。平面 $z = z'$ 和平面 $z = z^f$ 可分别看作为物平面和像平面。接着, 假设一般光线从 P^i 点传到 P^f 点这个过程中, z 是一个独立变量。那么, 一般光线的光程可以用 $x(z)$ 和 $y(z)$ 这两个函数描述。光程的微元 ds 可表示为:

$$\begin{aligned} ds &= \left[(dz)^2 + (dy)^2 + (dx)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[1 + (x')^2 + (y')^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz \end{aligned} \quad (2-3)$$

其中, $x' = \frac{dx}{dz}$, $y' = \frac{dy}{dz}$

那么, 光线从 P^i 点传到 P^f 点的光程为:

$$A = \int_L \mu(x, y, z) \left[1 + (x')^2 + (y')^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz \quad (2-4)$$

函数 $\mu(x, y, z) = \mu(\bar{r})$ 是表示光线经过每一点的折射系数, 包括光学元件本身以及经过光学元件前后的介质。

根据 Fermat 原理, 对一个实际光程来说, A 必须是个极值。因此, 光程必须满足 Euler-Lagrange 方程^[30]:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2-5)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (2-6)$$

$$\text{Lagrange 量为 } L = \mu(x, y, z) \left[1 + (x')^2 + (y')^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

进一步, 我们将 Euler-Lagrange 方程转换到 Hamilton 方程。通过标准关系, 引入两个与坐标 x, y 共轭的动量:

$$p = \frac{\partial L}{\partial x'}, \quad q = \frac{\partial L}{\partial y'} \quad (2-7)$$

代入 L 得

$$p = \frac{\mu(\bar{r})x'}{\left[1 + (x')^2 + (y')^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad q = \frac{\mu(\bar{r})y'}{\left[1 + (x')^2 + (y')^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2-8)$$

那么与 L 对应的 Hamilton 量为

$$H = - \left[\mu^2(\bar{r}) - p^2 - q^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-9)$$

p, q 表示光源发出光线的方向。

在上述基础上, 引入矢量 \bar{w}

$$\bar{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (x, y, p, q) \quad (2-10)$$

\bar{w} 和 \bar{w}' 表示 \bar{w} 的初值和末值。我们可以用一个函数关系或映射 \mathcal{M} 来描述初值与末值之间的关系。

$$\bar{w}' = \mathcal{M}\bar{w} \quad (2-11)$$

光线的初值 \bar{w}' 与末值 \bar{w}'' 之间的关系由 Hamilton 量决定，这与 Fermat 原理是等价的，因此可以推知 \mathcal{M} 是一个辛映射。

设 M 为映射 \mathcal{M} 的伴随 Jacobian 矩阵^[31]

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\partial w_{\alpha}''}{\partial w_{\beta}'} \quad (2-12)$$

J 为 4×4 的矩阵，其定义为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (2-13)$$

其中，每个元素都是 2×2 的矩阵， I 为单位矩阵，其余都是零。

如果 M 满足

$$\bar{M}JM = J \quad (2-14)$$

其中， \bar{M} 为 M 的转置。那么， M 为辛矩阵。

上式在光学中经常被称为透镜方程^[32]。从某种意义上来说， \mathcal{M} 应该被称为光学辛映射^[32]。

2.3 李变换的定义及其运算规则

用数学的术语来说， \bar{w} 中的变量确立了一个相空间。设 f, g 为定义在此相空间的两个函数。那么这两个函数的 Poisson 括号表示为 $\{f, g\}$ ，定义如下：

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (2-15)$$

现在，令 f 是定义在相空间的函数， g 是相空间中任意函数。每个 f 都表示一个作用在任意函数 g 上的李算符。包含有 f 的李算符表示为 $:f:$ ，用 Poisson 括号定义此算符为：

$$:f:g = \{f, g\} \quad (2-16)$$

类似的， $:f:$ 的幂表示反复进行 Poisson 括号运算。例如， $:f^2:$ 定义如下：

$$:f:^2 g = \{f, \{f, g\}\} \quad (2-17)$$

最后, $:f:$ 的零次幂定义为单位算符:

$$:f:^0 g = g \quad (2-18)$$

接着, 就可以根据 $:f:$ 幂的定义处理 $:f:$ 幂级数。其中特别重要的幂级数就是 $\exp(:f:)$ 的幂级数。 $\exp(:f:)$ 也被称为伴随 f 或 $:f:$ 的李变换。李变换也是一个算符, 用幂级数定义为:

$$\exp(:f:) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{:f:^n}{n!} \quad (2-19)$$

$\exp(:f:)$ 作用在任意函数 g 上的具体形式为:

$$\exp(:f:)g = g + \{f, g\} + \frac{1}{2!}\{f, \{f, g\}\} + \dots \quad (2-20)$$

利用因式分解理论^{[33][34]}, 假设 \mathcal{M} 为任意辛映射, 将相空间从初始状态转换到最终状态。那么, \mathcal{M} 能写成李变换的乘积形式:

$$\mathcal{M} = \exp(:f_2:) \exp(:f_3:) \exp(:f_4:) \dots \quad (2-21)$$

这里每个函数 f_n 是 n 阶齐次多项式。 $\exp(:f_n:)$ 称为 n 阶李变换。更重要的是, 这个映射对任何形式的多项式来说都是对称的。在连乘式(2-21)中, 去除任意因子后, 该映射仍然是辛映射。

Campbell-Baker-Hausdorff 方程^[33]将两个李变换的乘积表示为一个李变换。

即

$$\exp(:f:) \exp(:g:) = \exp(:h:) \quad (2-22)$$

其中, $h = f + g + \frac{1}{2}\{f, g\} + \frac{1}{12}\{f, \{f, g\}\} + \frac{1}{12}\{g, \{g, f\}\} + \dots$

李变换算符的交换规则是:

$$\begin{aligned} \exp(:g:) \exp(:f:) &= \exp(:f':) \exp(:g:) \\ &= \exp(:f:) \exp(:g':) \end{aligned} \quad (2-23)$$

其中, $f' = \exp(:g:)f$, $g' = \exp(-f:)g$

$\exp(-f:)$ 是 $\exp(:f:)$ 的逆变换。即

$$\exp(-f) \exp(f) = \exp(f) \exp(-f) = 1$$

当 \bar{w}' 有常数项时，在数学处理上会遇到问题：在这个条件下，尽管能找出对应的李变换，但是不能将这个变换用于 Campbell-Baker-Hausdorff 方程和李变换算符交换规则。

一个线性变换 $\bar{w}' = \bar{w}'(\bar{w})$ 可以表示成一个矩阵。二阶李变换就是一个线性变换。假设 \mathcal{M}_a 和 \mathcal{M}_b 为两个二阶李变换， M_a 和 M_b 是和这两个变换相对应的矩阵。可以证明， $\mathcal{M}_a \mathcal{M}_b$ 的乘积等于 $M_b M_a$ 的乘积。矩阵相乘的顺序与其对应变换的顺序是相反的。

2.4 用李变换方法研究光学系统的一般步骤

通常，光学系统包含物平面和像平面。在这两个平面上， x, y 为坐标， p, q 分别为光线传播方向与 x 轴和 y 轴之间夹角的余弦，表示光学方向余弦。假设光线从物平面上 (x, y) 点发出，光学方向余弦为 p, q 。经过光学系统后，光学到达像平面上 (x', y') 点，光学方向余弦为 p', q' 。 (x, y, p, q) 与 (x', y', p', q') 之间的关系将用李变换来描述。

光线通过整个光学系统的过程可分解若干个单一过程。对每个单一过程，都可以找到变换 $\bar{w}' = \bar{w}'(\bar{w})$ 并将其转换成李变换的形式。光线通过整个光学系统，就相当于将所以单一过程的变换连接在一起。

$$\bar{w}^{[2]} = \bar{w}^{[2]}(\bar{w}^{[1]}), \bar{w}^{[3]} = \bar{w}^{[3]}(\bar{w}^{[2]}), \dots, \bar{w}^{[n+1]} = \bar{w}^{[n+1]}(\bar{w}^{[n]}) \quad (2-24)$$

它们对应的李变换为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n$ 。整个光学系统的李变换就是将各个单一过程的李变换的乘积。

$$\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \dots \mathcal{M}_n \quad (2-25)$$

最后把整个光学系统的李变换转化成标准形式：

$$\bar{w}^{[n+1]} = [\exp(h_2) \exp(h_3) \exp(h_4)] \bar{w}^{[1]} \quad (2-26)$$

h_n 为齐次 n 阶多项式。二阶变换 $\exp(:h_2:)$ 是高斯光学的效应。其余各项代表像差或像散。在上式中, 如果光学系统为非轴对称系统, 那么将会产生三阶变换 $\exp(:h_3:)$ 。

在处理非轴对称系统中, 常常会出现含有常数项的辛变换。这个常数项转换到李变换的形式为 $\exp(:cx:)$, c 是常数。幸运的是, 只要选定主光线为坐标轴, 就恰好能找到含有 $\exp(:-cx:)$ 的相邻辛变换。 $\exp(:cx:)$ 和 $\exp(:-cx:)$ 相乘即为单位变换, 因此常数项就可以被消除。去除常数项后的变换 $\bar{w}'(\bar{w})$ 就可以用于 Campbell-Baker-Hausdorff 方程和李变换算符交换规则。

第三章 超环面光栅的李变换

3.1 光栅光学系统

在单光栅的光学系统中，先确定入射主光线和衍射主光线，然后分别在物空间和像空间建立坐标系。如图 2 所示。

以入射到光栅中心的光线为入射主光线，从光栅中心衍射出的光线为衍射主光线。选取这两条主光线所在的平面为对称平面，同时分别选取它们为对应物空间和像空间的 z 轴。不失一般性，入射主光线位于 XOZ 坐标系中 x 轴负值范围内，衍射主光线位于 x 轴正值范围内。物空间和像空间的 z 轴与光栅中心的法线方向的夹角分别为 α 和 β 。根据 XOZ 坐标系，令 α 为负值， β 为正值。

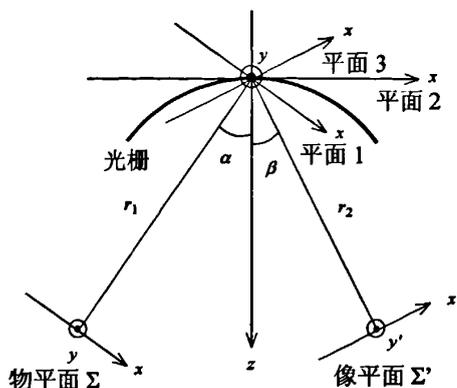


图 2 光栅光学系统示意图

在物空间和像空间中，物平面 Σ 和像平面 Σ' 分别垂直于各自的主光线。为了叙述方便，定义包含光栅中心的三个平面。平面 1 垂直于入射主光线；平面 2 与光栅曲面相切；平面 3 垂直于衍射主光线。规定物空间和像空间中的 y 轴都与平面 2 坐标系中的 y 轴平行且正方向相同。那么，根据坐标系右手定则，物空间和像空间 x 轴的正方向也就分别确定了。光栅中心到物平面和像平面的距离分别是 r_1, r_2 。

3.2 描述超环面光栅成像的五个李变换

描述光线由物平面传到像平面这个过程可以由五个李变换的乘积来表示：

- (1) 表示光线从物平面传到平面 1 的李变换 M_{r_1} ，
- (2) 表示光线坐标从平面 1 坐标系转换到平面 2 坐标系的李变换 M_{α} ，

(3) 表示光线在平面 2 坐标系内光栅衍射的李变换 \mathcal{M}_G ,

(4) 表示光线坐标从平面 2 坐标系转换到平面 3 坐标系的李变换 \mathcal{M}_β ,

(5) 表示光线从平面 3 传到像平面的李变换 \mathcal{M}_{r_2} 。

整个光学系统李变换的乘积形式为

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{r_1} \mathcal{M}_\alpha \mathcal{M}_G \mathcal{M}_\beta \mathcal{M}_{r_2} \quad (3-1)$$

3.2.1 位移李变换

在折射率为 μ 的均匀介质中, 表示光线传过直线距离为 r 的李变换为

$$\mathcal{M}_r = \exp\left(:r(\mu^2 - p^2 - q^2):\right) \quad (3-2)$$

在空气中, $\mu=1$, 光线从物平面传到平面 1 的李变换就是上式的幂级数展开式,

$$\mathcal{M}_{r_1} = \exp\left[:-\frac{r_1}{2}(p^2 + q^2):\right] \exp\left[:-\frac{r_1}{8}(p^2 + q^2)^2:\right] \quad (3-3)$$

3.2.2 转角李变换

光线坐标从平面 1 坐标系经旋转 α 角, 变换到平面 2 坐标系的李变换 \mathcal{M}_α 为

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}'_\alpha \exp(:-x \sin \alpha:) \quad (3-4)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'_\alpha = & \exp\left[:\ln(\cos \alpha) xp:\right] \exp\left[:\frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} xp^2 + \frac{1}{2}(\sin \alpha) xq^2:\right] \\ & \times \exp\left[:-\frac{\sin^2 \alpha}{4 \cos^4 \alpha} xp^3 - \frac{1}{4}(\tan^2 \alpha) xpq^2:\right] \end{aligned} \quad (3-5)$$

在处理非轴对称的系统中, 常常会出现含有常数项的李变换 $\exp(:cx:)$ (c 为常数), 这时就不能将它用于 Campbell-Baker-Hausdorff 方程和李变换算符的交换规则。描述光栅衍射和转角的李变换恰好含有两个互为相反因子: $\exp(:-x \sin \alpha:)$ 和 $\exp(:x \sin \alpha:)$, 它们的乘积结果是单位变换。因此, 把转角李变换中

$\exp(-x \sin \alpha)$ 提出来以便与后面的 $\exp(x \sin \alpha)$ 相抵消。

3.2.3 光栅衍射李变换

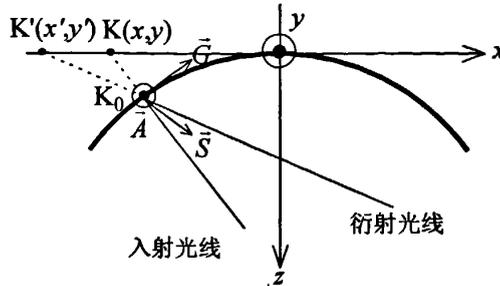


图 3 平面 2 坐标系中光栅衍射示意图

在平面 2 坐标系中，已知光栅的主半径 R 和次半径为 ρ ，超环面光栅的面形方程为

$$z = \frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2\rho} + \frac{x^2 y^2}{4R^2 \rho} + \frac{x^4}{8R^3} + \frac{y^4}{4\rho^3} + \dots \quad (3-6)$$

光栅表面的刻槽函数为^[35]

$$n = \sigma_0 x + \sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 x^3 + \sigma_4 xy^2 + \sigma_5 x^4 + \sigma_6 x^2 y^2 + \sigma_7 y^4 + \dots \quad (3-7)$$

如图 3 所示，入射光线与光栅表面相交 K_0 点。以 K_0 点为起点作三个相互垂直的单位矢量 \vec{S} ， \vec{G} ， \vec{A} 。矢量 \vec{S} 垂直于光栅表面，矢量 \vec{G} 与光栅表面和刻槽相切，矢量 \vec{A} 与矢量 \vec{S} 、矢量 \vec{G} 共同构成符合右手定则的正交系，

$$\vec{G} = \frac{\vec{S} \times \nabla n}{|\vec{S} \times \nabla n|}, \quad \vec{A} = \vec{G} \times \vec{S} \quad (3-8)$$

其中， ∇n 是刻槽函数的梯度^[36]。

入射光线的方向余弦为 p, q ，那么衍射光线的方向矢量 \vec{Q} ：

$$\vec{Q} = a' \vec{A} + g' \vec{G} + s' \vec{S} \quad (3-9)$$

其中， $a = pA_x + qA_y + (1 - p^2 - q^2)^{1/2} A_z$ ， $g = pG_x + qG_y + (1 - p^2 - q^2)^{1/2} G_z$

$$a' = a + m\lambda |\vec{S} \times \nabla n|, \quad g' = g, \quad s' = (1 - a'^2 - g'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3-10)$$

m 是光线衍射级次, λ 是光线波长。衍射光线的方向余弦 p', q' 分别对应矢量 \vec{Q} 的 x 分量和 y 分量。由此可知, 衍射光线的方向余弦就可以表示成光栅表面坐标的函数。为了推导出李变换, 将入射光线延长, 与平面 2 交于 $K(x, y)$ 点。入射光线投射到光栅表面上的坐标可以用 K 点的坐标来代替。

在平面 2 坐标系中, 衍射光线的方向余弦,

$$\begin{aligned} p' = & -2A_2x + \delta p + \sin \beta - \left[\frac{A_2}{R} (\tan \alpha + 2 \tan \beta) - 3m\lambda\sigma_3 \right] x^2 - \left(\frac{A_2}{\rho} \tan \alpha - m\lambda\sigma_4 \right) y^2 \\ & - \frac{1}{R} (\tan \alpha - \tan \beta) x \delta p + \left\{ \frac{1}{R} \left[\frac{2A_2^2}{\cos^3 \beta} + 3(\tan \alpha + \tan \beta) A_3 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{R} (2 \tan^2 \alpha + \tan \alpha \tan \beta - 2 \tan^2 \beta) A_2 - \frac{1}{2R^2} (\cos \alpha + \cos \beta) \right] + 4m\lambda\sigma_5 \right\} x^3 \\ & + \left\{ \frac{1}{R} \left[B_3 \tan \beta + \frac{1}{\rho} (2 \tan^2 \alpha - \tan \alpha \tan \beta) A_2 + \frac{2B_2^2}{\cos \beta} - \frac{1}{2\rho^2} (\cos \alpha + \cos \beta) \right] \right. \\ & \left. + \frac{3A_3}{\rho} \tan \alpha + 2m\lambda\sigma_6 \right\} xy^2 + \dots \end{aligned} \quad (3-11)$$

$$\begin{aligned} q' = & -2B_2 + q - \left(\frac{2A_2}{\rho} \tan \beta - 2m\lambda\sigma_4 \right) xy - \frac{1}{\rho} (\tan \alpha - \tan \beta) y \delta p \\ & + \left\{ \frac{1}{\rho} \left[(\tan \alpha + \tan \beta) B_3 + \frac{\tan^2 \alpha}{\rho} A_2 + \frac{2B_2^2}{\cos \beta} - \frac{1}{\rho^2} (\cos \alpha + \cos \beta) \right] + 4m\lambda\sigma_7 \right\} y^3 \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3-12)$$

其中, $\delta p = p + \sin \alpha$

衍射光线出射点 K' 的坐标,

$$\begin{aligned} x' = & x + (\tan \alpha - \tan \beta) \left(\frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2\rho} \right) + \left[\frac{2A_2}{\cos^2 \beta} + \frac{\tan \alpha}{R} (\tan \alpha - \tan \beta) \right] \left(\frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2\rho} \right) x \\ & - \left(\frac{\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta}{\cos^3 \alpha \cos^3 \beta} \right) \left(\frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2\rho} \right) \delta p + \dots \end{aligned} \quad (3-13)$$

$$y' = y + \frac{2B_2}{\cos \beta} \left(\frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2\rho} \right) y - \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \right) \left(\frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2\rho} \right) q + \dots \quad (3-14)$$

类似转角变换, 衍射李变换 \mathcal{M}_G 可以写成 $\exp(:x \sin \alpha:) \mathcal{M}'_G \exp(:x \sin \beta:)$ 的

形式。 $\exp(x \sin \alpha)$ 是由 δp 中的 $\sin \alpha$ 产生的，而 $\exp(x \sin \beta)$ 是由 p' 中的 $\sin(\beta)$ 产生的。 $\exp(x \sin \alpha)$ 可以与 \mathcal{M}_α 中 $\exp(-x \sin \alpha)$ 相抵消。因子 $\exp(x \sin \beta)$ 与 \mathcal{M}_β 中 $\exp(-x \sin \beta)$ 相抵消。因此，可将 δp 中的 $\sin(\alpha)$ 和 p' 中的 $\sin(\beta)$ 去除。剩下的表达式就可以转变成李变换 \mathcal{M}'_G ，

$$\mathcal{M}'_G = \exp(:g_2:) \exp(:g_3:) \exp(:g_4:) \quad (3-15)$$

其中，

$$g_2 = -(A_2 x^2 + B_2 y^2) \quad (3-16)$$

$$g_3 = A_3 x^3 + B_3 xy^2 + C_{31} x^2 p + C_{32} y^2 p \quad (3-17)$$

$$g_4 = A_4 x^4 + B_4 x^2 y^2 + C_4 y^2 + D_{41} x^2 p^2 + D_{42} y^2 p^2 + E_{41} x^2 q^2 + E_{42} y^2 q^2 \\ + F_{41} x^3 p + F_{42} xy^2 p + G_{41} x^2 y q + G_{42} y^3 q \quad (3-18)$$

上述公式中 x, y, p, q 前各个系数的具体表达式见附录 1。

3.2.4 光栅衍射后转角和位移变换

与 \mathcal{M}_α 类似，表示光线坐标从平面 2 坐标系转换到平面 3 坐标系的李变换 \mathcal{M}_β

$$\mathcal{M}_\beta = \exp(:-x \sin \beta:) \mathcal{M}'_\beta \quad (3-19)$$

其中，

$$\mathcal{M}'_\beta = \exp \left[: \frac{\sin^2 \beta}{4 \cos^4 \beta} xp^3 + \frac{1}{4} (\sin^2 \beta) xpq^2 : \right] \\ \times \exp \left[: \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} xp^2 + \frac{1}{2} (\sin \beta) xq^2 : \right] \exp [: -\ln(\cos \beta) xp :] \quad (3-20)$$

光线从平面 3 传到像平面的李变换 \mathcal{M}_{r_2}

$$\mathcal{M}_{r_2} = \exp \left[: -\frac{r_2}{2} (p^2 + q^2) : \right] \exp \left[: -\frac{r_2}{8} (p^2 + q^2)^2 : \right] \quad (3-21)$$

3.3 光学系统的李变换

推导出五个变换的具体表达式后,按照光线传播的顺序,将相应的变换依次连乘,最后的结果就是描述光线由物平面到像平面的李变换。

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{r_1} \mathcal{M}_\alpha \mathcal{M}_G \mathcal{M}_\beta \mathcal{M}_{r_2} = \mathcal{M}_{r_1} \mathcal{M}'_\alpha \mathcal{M}'_G \mathcal{M}'_\beta \mathcal{M}_{r_2} \quad (3-22)$$

应用李变换的交换合并规则,将上述 5 个变换中的同阶变换函数合并在一起。整个系统的李变换可以写成:

$$\mathcal{M} = \exp(:g_2^*:) \exp(:g_3^*:) \exp(:g_4^*:) \quad (3-23)$$

二阶因子 $\exp(:g_2^*:)$ 为:

$$\begin{aligned} \exp(:g_2^*:) &= \exp\left[:-\frac{r_1}{2}(p^2+q^2):\right] \exp[:\ln(\cos\alpha)xp:] \exp\left[:-(A_2x^2+B_2y^2):\right] \\ &\quad \exp\left[:-\ln(\cos\beta)xp:\right] \exp\left[:-\frac{r_2}{2}(p^2+q^2):\right] \end{aligned} \quad (3-24)$$

由于 g_2^* 的具体表达式由各个算符合并而成,形式上十分繁琐。所以,利用等价的矩阵表示方法更为简洁,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ p' \\ q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x & 0 & W_p & 0 \\ 0 & M_y & 0 & W_q \\ -1/F_x & 0 & M_p & 0 \\ 0 & -1/F_y & 0 & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ p \\ q \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

矩阵中各项系数见表 1

表 1 g_2^* 中的相关系数

$\frac{1}{F_x} = \frac{2A_2}{\cos\alpha \cos\beta}$	$M_x = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \frac{r_2}{F_x}$	$M_p = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} - \frac{r_1}{F_x}$	$W_p = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} r_1 + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} r_2 - \frac{r_1 r_2}{F_x}$
$\frac{1}{F_y} = 2B_2$	$M_y = 1 - \frac{r_2}{F_y}$	$M_q = 1 - \frac{r_1}{F_y}$	$W_q = r_1 + r_2 - \frac{r_1 r_2}{F_y}$

从上述矩阵中,可得高斯光学:

$$x' = M_x x + W_p p \quad (3-26) \quad y' = M_y y + W_q q \quad (3-27)$$

$W_p = 0$ 或 $W_q = 0$ ，即

$$\frac{\cos^2 \alpha}{r_1} + \frac{\cos^2 \beta}{r_2} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{F_x} \quad (3-28) \quad \text{或} \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{F_y} \quad (3-29)$$

(3-28)和(3-29)分别表示子午和弧矢方向的聚焦条件。

从(3-22)式转换到(3-23)式过程中，需要将一些三阶和四阶的变换从相邻的二阶变换的左侧移到右侧。为了保持二阶变换函数不变，那么相关的三阶和四阶变换函数要按照李变换算符的交换规则进行相应的算符运算。值得注意的是，使用 Campbell-Baker-Hausdorff 方程将两个三阶李变换合并的时候，会产生四阶李变换。因此，可以写出合并后的 g_3^* 和 g_4^* 。

$$g_3^* = g_3^{1*} + g_3^{2*} + g_3^{3*} \quad (3-30) \quad g_4^* = g_{40}^* + g_{43}^* \quad (3-31)$$

在 g_3^* 的定义式中， g_3^{1*} ， g_3^{2*} 和 g_3^{3*} 分别来自 \mathcal{M}_α ， \mathcal{M}_G 和 \mathcal{M}_β 中三阶变换部分。

在 g_4^* 的定义式中， g_{43}^* 就是由 g_3^{1*} ， g_3^{2*} 和 g_3^{3*} 合并后产生的项。 g_{40}^* 来自 \mathcal{M}_{r_1} ， \mathcal{M}_α ， \mathcal{M}_G ， \mathcal{M}_β 和 \mathcal{M}_{r_2} 的四阶变换部分。

将 g_3^{m*} 中 $x^i y^j p^k q^l$ ($i+j+k+l=3$) 前的系数表示为 A_{ijkl}^{m*}

$$A_{ijkl}^* = A_{ijkl}^{1*} + A_{ijkl}^{2*} + A_{ijkl}^{3*} \quad (3-32)$$

由于平面对称，共有 10 个非零 A_{ijkl}^{m*} ($i+j+k+l=3$)，具体表达式详见附录 2。

在 g_4^* 中共有 19 个非零项。用上面类似的方法，用 A_{ijkl}^* 来表示 g_{40}^* 中 $x^i y^j p^k q^l$ ($i+j+k+l=4$) 前的系数，具体表达式详见附录 2。

第四章 成像公式及其验证

4.1 成像公式

利用第三章中定义的 g_2^* , g_3^* , g_4^* , 根据物平面光源点的坐标和光线的方向余弦通过李变换(3-23), 就能求出像平面上成像点的坐标,

$$\begin{aligned} x' &= \exp(g_2^*) \exp(g_3^*) \exp(g_4^*) \{x\} \\ &= \exp(g_2^*) \left\{ x + \frac{1}{1!} [g_3^*, x] + \frac{1}{2!} [g_3^*, [g_3^*, x]] + \frac{1}{1!} [g_4^*, x] \right\} \end{aligned} \quad (4-1)$$

类似地, y' , p' 和 q' 也有其对应的表达式。

为了计算方便, 将 g_4^* 中的 g_{43}^* 项与 $\frac{1}{2!} [g_3^*, [g_3^*, x]]$ 合并,

$$x' = \exp(g_2^*) \left\{ x + \frac{1}{1!} [g_3^*, x] + \frac{1}{2!} \sum_{i \leq j} p_{ij} [g_3^*, [g_3^*, x]] + \frac{1}{1!} [g_{40}^*, x] \right\} \quad (4-2)$$

y' 的表达式,

$$y' = \exp(g_2^*) \left\{ y + \frac{1}{1!} [g_3^*, y] + \frac{1}{2!} \sum_{i \leq j} p_{ij} [g_3^*, [g_3^*, y]] + \frac{1}{1!} [g_{40}^*, y] \right\} \quad (4-3)$$

在光栅光谱仪设计中, 子午聚焦平面上的像差分析十分重要。在 $W_p = 0$ 时,

(4-2)和(4-3)的展开式,

$$\begin{aligned} x' &= M_x x + B_{1010}^* x p + B_{0200}^* y^2 + B_{0101}^* y q + B_{0020}^* p^2 + B_{0002}^* q^2 + B_{0210}^* y^2 p \\ &\quad + B_{0111}^* y p q + B_{0030}^* p^3 + B_{0012}^* p q^2 \end{aligned} \quad (4-4)$$

$$\begin{aligned} y' &= M_y y + W_q q + C_{0110}^* y p + C_{0011}^* p q + C_{1100}^* x y + C_{1001}^* x q + C_{0300}^* y^3 + C_{0003}^* q^3 \\ &\quad + C_{0201}^* y^2 q + C_{0120}^* y p^2 + C_{0021}^* p^2 q + C_{0102}^* y q^2 \end{aligned} \quad (4-5)$$

在(4-4)和(4-5)式中, 一阶系数 M_x 、 M_y 代表了放大率。在 x, y, p, q 所组成的二次方项和三次方项中, 只包含 p, q 的项前面的系数表示轴上点的像差, 其余的则为轴外点的像差。用 g_3^* , g_4^* 中的 A_{ijk}^* 和矩阵元素(3-25)来表示 B^* 和 C^* ; x' 中二次方项的系数 B_{ijk}^* 与 K.Goto 一致^[21], 详见附录 3; y' 中各项的系数 C_{ijk}^* 表达式见附录 4; B_{0020}^* 表示慧差, B_{0002}^* 表示像散慧差, B_{0030}^* 表示球差, 利用附录 1 和附

录 2 中的公式可得它们在子午聚焦条件下的具体形式, 如附录 5 所示。当 $W_p \neq 0$ 时, B^* 和 C^* 的表达式会有所不同, 参见附录 3 和附录 6。对于衍射光线的方向余弦 p', q' 来说也有与成像公式类似的结果, 参见附录 7。

4.2 成像公式的验证

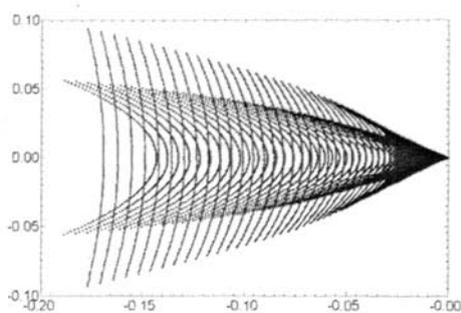
利用成像公式(4-4)和(4-5), 可以求出光源点发出的光线经过光学系统后在像平面上的分布(光线点列图)。光学系统(超环面镜)参数如表 2 所示, 光源为点光源。

表 2 超环面镜参数

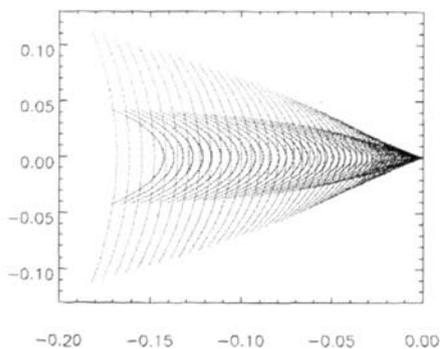
物距	子午焦距	入射角 α / 反射角 β	主半径 R	次半径 ρ
$r_1 = 200\text{cm}$	$r'_m = 100\text{cm}$	$\alpha = \beta = 86^\circ$	$R = 1911.4\text{cm}$	$\rho = 9.3\text{cm}$

应用光线追迹软件可以得到光学系统成像的精确数值计算结果, 以此作为标准来检验李变换所得结果的准确性。根据李变换得到的成像公式所作的图, 与应用光线追迹软件 Shadow 所得结果进行比较。

(1) 像距 $r_2 = r'_m = 100\text{cm}$



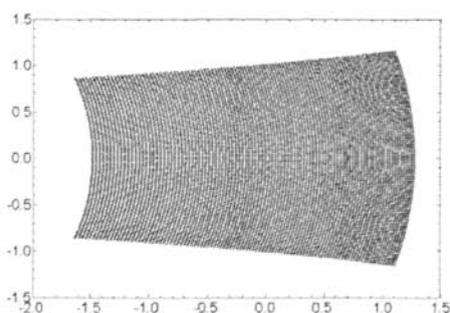
(a)



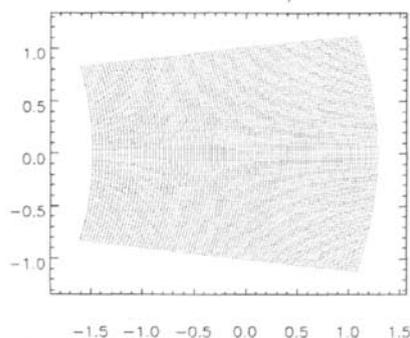
(b)

图 4 由光线追迹所得的点列图 (单位: cm): (a) 李变换成像公式, (b) Shadow

(2) 像距 $r_2 = 200\text{cm}$



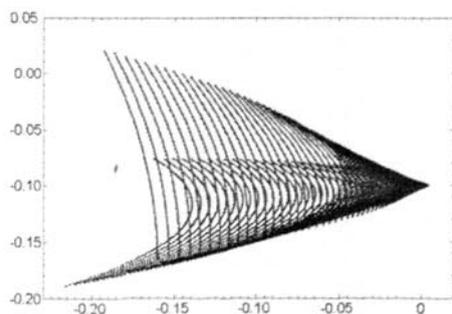
(a)



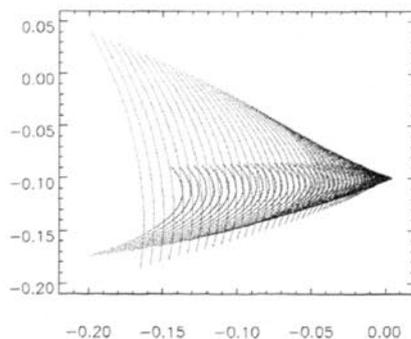
(b)

图 5 由光线追迹所得的点列图 (单位: cm): (a) 李变换成像公式, (b) Shadow

(3) 像距 $r_2 = r'_m = 100\text{cm}$, 离轴 $y = 0.2\text{cm}$



(a)



(b)

图 6 由光线追迹所得的点列图 (单位: cm): (a) 李变换成像公式, (b) Shadow

从图 4, 图 5 可以看出, 无论像平面是否在子午方向的焦点上, 我们的李变换成像公式能够准确描绘单元光栅的成像。对于离轴的情况 (如图 6) 成像公式与 Shadow 的结果也符合的很好。

第五章 结论与展望

5.1 结论

本文应用了李变换的方法来研究超环面光栅的成像,把光栅成像分解成五个单一过程,找出每个过程所对应的李变换;通过对这五个李变换的交换和合并可得出光栅的三阶像差表达式。应用光线追迹软件可以得到光学系统成像的精确数值计算结果,以此对李变换方法所得结果进行验证,表明李变换方法是正确的。李变换方法导出的成像公式描述了像平面坐标与物平面坐标、方向余弦之间的函数关系,公式中并没有出现光栅表面坐标之类的中间变量,体现了物空间变量与像空间对应变量之间映射关系。当主半径与次半径相等时,超环面光栅的成像公式与像差表达式可转换成球面光栅相对应的表达式,与 K. Goto 和 T. Kurosaki 的结果^[21]一致。上述的推导以及分析表明了李变换方法应用在像差理论的研究具有优势:

(1) 在李变换中不出现光瞳坐标。在处理多元件光学系统时,就不必定义每个元件的光瞳坐标,不需要考虑如何将这些坐标统一起来。同时,该方法能转换成矩阵形式,更有利于多元件的像差表达。

(2) 目前 Chrisp 波像差理论只能导出像平面在焦点附近的像差公式,在像平面远离焦点位置时,其的结果有很大的误差,而李变换的方法可以得到远离焦平面处的像差表达式,对应的成像公式可以准确地描述光栅光学系统在离焦情况下的成像结果。

(3) Chrisp 波像差理论导出的成像公式是从点光源角度出发的,最多可以处理一维轴外点成像。而李变换的方法从一开始就考虑物是二维的,可以得到二维轴外点成像结果。

李变换方法得到的一些像差系数可以转换成波像差理论中像差的表达形式。

在李变换方法中, $W_p = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} r_1 + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} r_2 - \frac{r_1 r_2}{F_x}$, 其中 $\frac{1}{F_x} = \frac{2A_2}{\cos \alpha \cos \beta}$, A_2 为

附录 1 中所示的系数。

$$\text{令 } T(\alpha, r_1) = \frac{\cos^2 \alpha}{r_1} - \frac{\cos \alpha}{R}, \quad T(\beta, r_2) = \frac{\cos^2 \beta}{r_2} - \frac{\cos \beta}{R}$$

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{r_1 r_2}{\cos \alpha \cos \beta} \left[(T(\alpha, r_1) + T(\beta, r_2)) + 2m\lambda\sigma_1 \right] \\ &= \frac{r_1 r_2}{\cos \alpha \cos \beta} \left[(f_{200}(\alpha, r_1) + f_{200}(\beta, r_2)) + 2m\lambda\sigma_1 \right] \end{aligned}$$

在李变换方法中, $W_q = r_1 + r_2 - \frac{r_1 r_2}{F_y}$, 其中 $\frac{1}{F_y} = 2B_2$, B_2 为附录 1 中所示的系数。

$$\text{令 } \hat{S}(\alpha, r_1) = \frac{1}{r_1} - \frac{\cos \alpha}{\rho}, \quad \hat{S}(\beta, r_2) = \frac{1}{r_2} - \frac{\cos \beta}{\rho}$$

$$\begin{aligned} W_q &= r_1 r_2 \left(\hat{S}(\alpha, r_1) + \hat{S}(\beta, r_2) + m\lambda\sigma_2 \right) \\ &= r_1 r_2 \left(f_{020}(\alpha, r_1) + f_{020}(\beta, r_2) + m\lambda\sigma_2 \right) \end{aligned}$$

在子午聚焦条件下,

$$\begin{aligned} B_{0020}^* &= -\frac{3r_1^2 r_2}{2\cos^2 \alpha \cos \beta} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r_1} + \frac{\sin \beta \cos \beta}{r_2} \right) - \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{r_1^2} - \frac{\sin \beta \cos^2 \beta}{r_2^2} - 2m\lambda\sigma_3 \right] \\ &= \frac{3r_1^2 r_2}{2\cos^2 \alpha \cos \beta} \left[\frac{\sin \alpha}{r_1} T(\alpha, r_1) + \frac{\sin \beta}{r_2} T(\beta, r_2) + 2m\lambda\sigma_3 \right] \\ &= \frac{3r_1^2 r_2}{2\cos^2 \alpha \cos \beta} \left[f_{300}(\alpha, r_1) + f_{300}(\beta, r_2) + 2m\lambda\sigma_3 \right] \end{aligned}$$

在子午聚焦条件下,

$$B_{0002}^* = -\frac{r_1^2 r_2}{2\cos \beta} \left\{ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\cos \alpha \sin \alpha}{r_1} + \frac{\cos \beta \sin \beta}{r_2} \right) - \frac{1}{r_1^2} \left[\sin \alpha + \left(1 - \frac{r_1}{F_y} \right)^2 \sin \beta \right] - 2m\lambda\sigma_4 \right\}$$

$$\text{令 } r_i' = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{F_y} \right)^{-1}, \quad \tilde{S}(\alpha, r_1, r_1') = \frac{1}{r_1} - \frac{\cos \alpha}{\rho}, \quad \tilde{S}(\beta, r_2, r_2') = \frac{r_2}{r_2'^2} - \frac{\cos \beta}{\rho}$$

$$\begin{aligned} B_{0002}^* &= \frac{r_1^2 r_2}{2\cos \beta} \left[\frac{\sin \alpha}{r_1} \tilde{S}(\alpha, r_1, r_1') + \frac{\sin \beta}{r_2} \tilde{S}(\beta, r_2, r_2') + 2m\lambda\sigma_4 \right] \\ &= \frac{r_1^2 r_2}{2\cos \beta} \left[f_{120}(\alpha, r_1, r_1') + f_{120}(\beta, r_2, r_2') + 2m\lambda\sigma_4 \right] \end{aligned}$$

上述表达式中, f_{ijk} 为波像差理论中的像差系数。

5.2 展望

李变换的方法可以用来描述多元件的光学系统的成像。在具体的计算上，目前有两种方法：一是按照李变换方法研究光学系统的思路，将光线通过每个元件都用若干个单一过程的李变换描述，再将这李变换依次连乘，然后同阶变换函数合并，得到成像公式以及像差表达式^[21]；二是利用单元件的成像公式进行迭代，以二元件光学系统为例，将第一个元件的像坐标以及出射光线的方向余弦作为第二个元件的光源坐标以及入射光线的方向余弦，对成像公式进行迭代，就可以得到整个系统的成像公式，其中自变量前的系数就是整个系统的像差^[23]。在计算机的辅助下，可以按照上述的方法推导出多元件的成像公式和像差表达式。

用李变换的方法研究光栅成像还存在一些问题。

(1) 方向余弦的“聚焦”

方向余弦也可以用点列图来表示其在像平面上的分布，如图 7。在子午聚焦条件下，李变换方法也能准确描述像平面上方向余弦的情况。

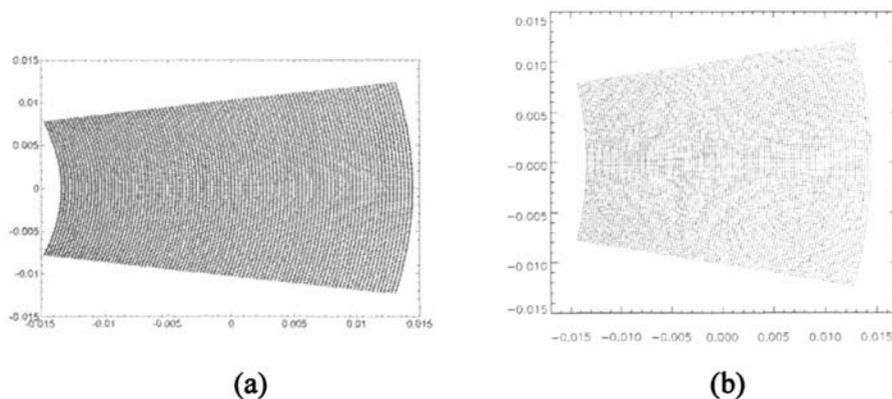


图 7 由光线追迹所得的方向余弦点列图（单位：cm）：

(a)李变换成像公式，(b) Shadow 的结果

众所周知，方向余弦的分布是不随光学系统的像平面的移动而改变的。但是在李变换方法所得到的方向余弦表达式中，方向余弦与像距有关。利用第四章中的光学系统参数，可以得到不同像距处的方向余弦分布（如图 8）

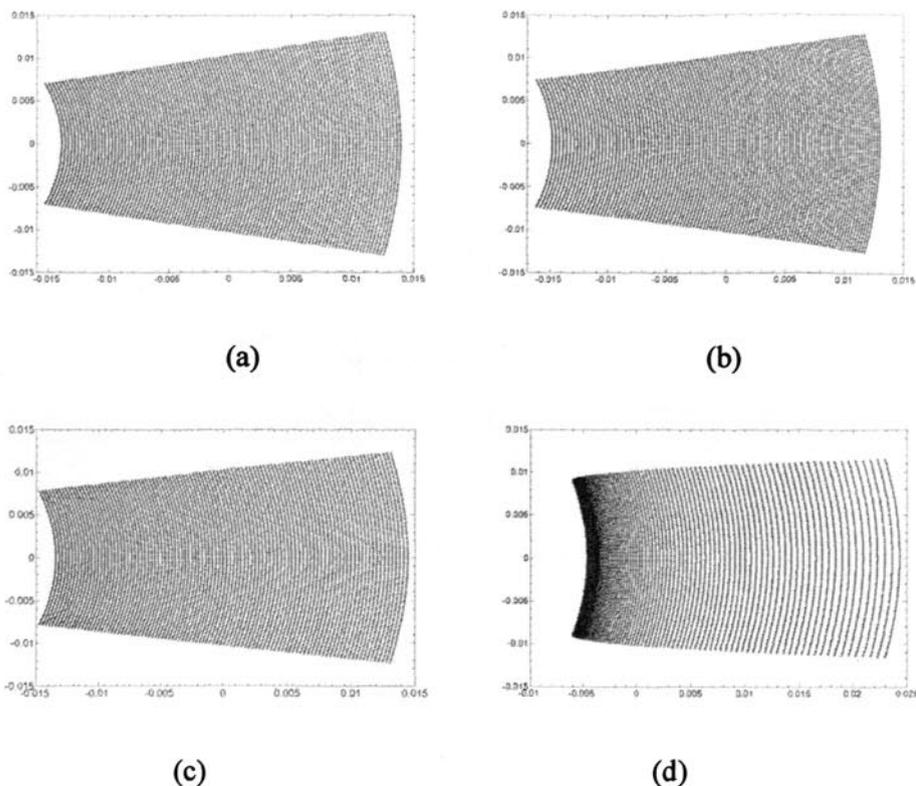


图 8 不同像距 r_2 处的方向余弦点列图 (单位: cm)

(a) $r_2 = 0$ cm, (b) $r_2 = 50$ cm, (c) $r_2 = 100$ cm (子午焦平面处), (d) $r_2 = 200$ cm

如图 8 所示, 方向余弦的分布会随着像平面位置的变化而有所变化。目前, 对这个结果还没有很好的解释。

(2) 孔径角的限制

参照上述的光学系统, 孔径角提高一个数量级, 即子午方向为 0.0696, 弧矢方向为 0.05, 其他系统参数不变, 像面取在子午聚焦平面上。像面上的坐标点列图以及方向余弦点列图与对应 shadow 的结果有明显的差别。

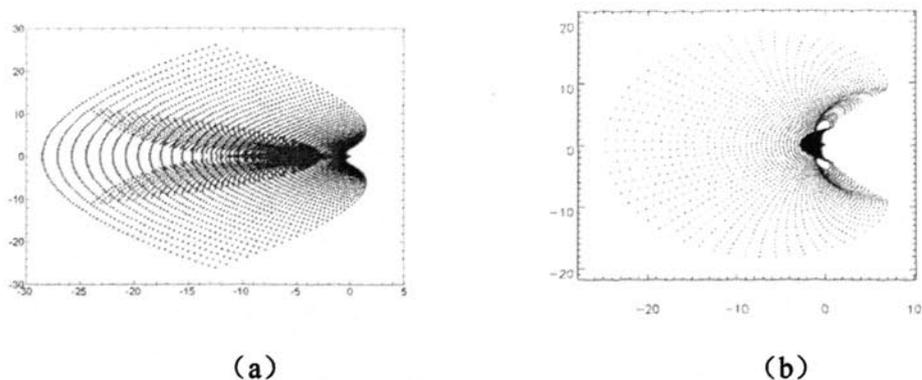


图9 由光线追迹所得的点列图(单位: cm):

(a) 李变换成像公式, (b) Shadow 的结果

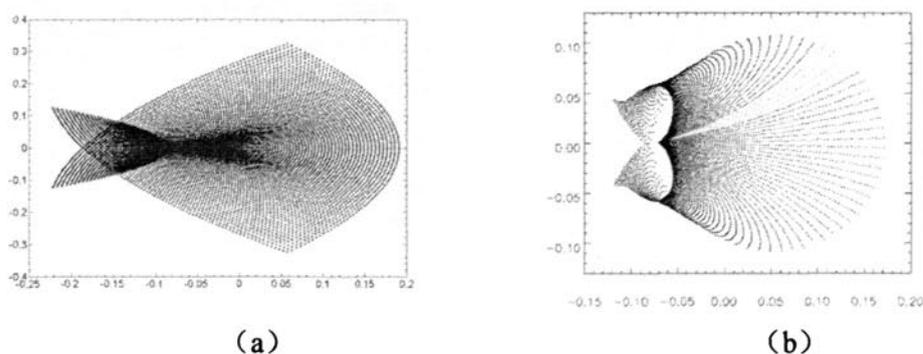


图10 由光线追迹所得的方向余弦点列图(单位: cm):

(a) 李变换成像公式, (b) Shadow 的结果

此时李变换的结果明显就是错误。因此,李变换的方法只能适用于孔径角为毫弧度数量级的范围内,超出这个范围得到的结果就是不正确的,可以尝试进一步的修正,使李变换的方法适用于大孔径角的情况下。

李变换的思想方法来源于李代数。在处理光学问题方面,李变换的方法还是比较新的一种方法,用该方法得到的结果可以对像差来源的进行分析,在这方面还有待进一步研究。随着阶数和光学元件数量的提高,李代数的方法在计算量上还是相当的繁琐,但随着计算机辅助技术的高速发展,这将不成问题。

附录 1 超环面光栅衍射李变换中变换函数的相关系数

$$A_2 = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2R} - m\lambda\sigma_1$$

$$B_2 = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2\rho} - m\lambda\sigma_2$$

$$A_3 = -\frac{A_2}{R} \tan \alpha + m\lambda\sigma_3$$

$$B_3 = -\frac{A_2}{\rho} \tan \alpha + m\lambda\sigma_4$$

$$C_{31} = -\frac{1}{2R} (\tan \alpha - \tan \beta)$$

$$C_{32} = -\frac{1}{2\rho} (\tan \alpha - \tan \beta)$$

$$A_4 = \frac{1}{R} \left[-\frac{1}{8R^2} (\cos \alpha + \cos \beta) + \frac{\tan^2 \alpha}{4R} A_2 + \frac{1}{\cos^3 \alpha} A_2^2 + \frac{3}{4} (\tan \alpha + \tan \beta) A_3 \right] + m\lambda\sigma_5$$

$$B_4 = -\frac{1}{4R\rho^2} (\cos \alpha + \cos \beta) + \frac{\tan^2 \alpha}{2R\rho} A_2 + \frac{1}{\rho \cos^3 \alpha} A_2^2 + \frac{1}{R \cos \alpha} B_2^2 + \left(\frac{1}{4R} B_3 + \frac{3}{4\rho} A_3 \right) (\tan \alpha + \tan \beta) + m\lambda\sigma_6$$

$$C_4 = \frac{1}{\rho} \left[-\frac{1}{8\rho^2} (\cos \alpha + \cos \beta) + \frac{\tan^2 \alpha}{4\rho} A_2 + \frac{1}{\cos \alpha} B_2^2 + \frac{1}{4} (\cos \alpha + \cos \beta) B_3 \right] + m\lambda\sigma_7$$

$$D_{41} = \frac{1}{4R} \left(\frac{\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta}{\cos^3 \alpha \cos^3 \beta} \right)$$

$$D_{42} = \frac{1}{4\rho} \left(\frac{\cos^3 \alpha + \cos^3 \beta}{\cos^3 \alpha \cos^3 \beta} \right)$$

$$E_{41} = \frac{1}{4R} \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \right)$$

$$E_{42} = \frac{1}{4\rho} \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \right)$$

$$F_{41} = \frac{1}{R} \left(\frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{4R \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} + \frac{A_2}{\cos^3 \alpha} \right)$$

$$F_{42} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{4R \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} + \frac{A_2}{\cos^3 \alpha} \right)$$

$$G_{41} = \frac{B_2}{R \cos \alpha}$$

$$G_{42} = \frac{B_2}{\rho \cos \alpha}$$

附录 2 g_3^1 , g_3^2 , g_3^3 和 g_{40}^1 中的系数

将 g_3^{m*} 中 $x^i y^j p^k q^l$ ($i+j+k+l=3$) 前的系数表示为 A_{ijkl}^{m*}

$$A_{ijkl}^{m*} (i+j+k+l=3)$$

$$\begin{aligned} A_{1200}^{1*} &= \frac{\sin \alpha}{2F_y^2 \cos \beta} & A_{1200}^{2*} &= \frac{B_3}{\cos \beta} & A_{1200}^{3*} &= 0 \\ A_{1101}^{1*} &= \frac{M_y \sin \alpha}{F_y \cos \beta} & A_{1101}^{2*} &= -\frac{2r_2 B_3}{\cos \beta} & A_{1101}^{3*} &= 0 \\ A_{1002}^{1*} &= \frac{M_y^2 \sin \alpha}{2 \cos \beta} & A_{1002}^{2*} &= \frac{r_2^2 B_3}{\cos \beta} & A_{1002}^{3*} &= \frac{1}{2} \tan \beta \\ A_{0210}^{1*} &= -\frac{r_2 \sin \alpha}{2F_y^2 \cos \beta} & A_{0210}^{2*} &= -\frac{r_2 B_3}{\cos \beta} + C_{32} \cos \beta & A_{0210}^{3*} &= 0 \\ A_{0111}^{1*} &= -\frac{r_2 M_y \sin \alpha}{F_y \cos \beta} & A_{0111}^{2*} &= \frac{2r_2^2 B_3}{\cos \beta} - 2r_2 C_{32} \cos \beta & A_{0111}^{3*} &= 0 \\ A_{0012}^{1*} &= -\frac{r_2 M_y^2 \sin \alpha}{2 \cos \beta} & A_{0012}^{2*} &= -\frac{r_2^3 B_3}{\cos \beta} + r_2^2 C_{32} \cos \beta & A_{0012}^{3*} &= -\frac{r_2}{2} \tan \beta \\ A_{0030}^{1*} &= -\frac{r_2 M_x^2 \sin \alpha}{2 \cos \beta} & A_{0030}^{2*} &= -\frac{r_2^3 A_3}{\cos^3 \beta} + \frac{r_2^2 C_{31}}{\cos \beta} & A_{0030}^{3*} &= -\frac{r_2}{2} \tan \beta \\ A_{1020}^{1*} &= -\frac{r_2 M_x \sin \alpha}{F_x \cos \beta} + \frac{M_x^2 \sin \alpha}{2 \cos \beta} & A_{1020}^{2*} &= \frac{3r_2^2 A_3}{\cos^3 \beta} - \frac{2r_2 C_{31}}{\cos \beta} & A_{1020}^{3*} &= \frac{1}{2} \tan \beta \\ A_{3000}^{1*} &= \frac{\sin \alpha}{2F_x^2 \cos \beta} & A_{3000}^{2*} &= \frac{A_3}{\cos^3 \beta} & A_{3000}^{3*} &= 0 \\ A_{2010}^{1*} &= \frac{M_x \sin \alpha}{F_x \cos \beta} - \frac{r_2 \sin \alpha}{2F_x^2 \cos \beta} & A_{2010}^{2*} &= -\frac{3A_3 r_2}{\cos^3 \beta} + \frac{C_{31}}{\cos \beta} & A_{2010}^{3*} &= 0 \end{aligned}$$

用 A_{ijkl}^* 来表示 g_{40}^* 中 $x^i y^j p^k q^l$ ($i+j+k+l=4$) 前的系数

$$A_{ijkl}^* (i+j+k+l=4)$$

$$A_{0220}^* = \frac{r_2^2 B_4}{\cos^2 \beta} + D_{42} \cos^2 \beta - r_2 F_{42} - \frac{r_1 M_x^2}{4F_y^2} + \frac{r_2 M_x \sin^2 \alpha}{4F_y^2 \cos \alpha \cos \beta}$$

$$A_{0121}^* = -\frac{2r_2^3 B_4}{\cos^2 \beta} - 2r_2 D_{42} \cos^2 \beta + 2r_2^2 F_{42} + \frac{r_2^2 G_{41}}{\cos^2 \beta} - \frac{r_1 M_x^2 M_y}{2F_y} + \frac{r_2 M_x M_y \sin^2 \alpha}{2F_y \cos \alpha \cos \beta}$$

$$A_{0022}^* = \frac{r_2^4 B_4}{\cos^2 \beta} + r_2^2 D_{42} \cos^2 \beta + \frac{r_2^2 E_{41}}{\cos^2 \beta} - r_2^3 F_{42} - \frac{r_2^3 G_{41}}{\cos^2 \beta} - \frac{r_1 M_x^2 M_y^2}{4} + \frac{r_2 M_x M_y^2 \sin^2 \alpha}{4 \cos \alpha \cos \beta} - \frac{r_2}{4 \cos^2 \beta}$$

$$A_{0040}^* = \frac{r_2^4 A_4}{\cos^4 \beta} + r_2^2 D_{41} - \frac{r_2^3 F_{41}}{\cos^2 \beta} - \frac{r_1 M_x^4}{8} + \frac{r_2 M_x^3 \sin^2 \alpha}{4 \cos \alpha \cos \beta} - \frac{r_2}{8} - \frac{r_2}{4} \tan^2 \beta$$

$$A_{4000}^* = \frac{A_4}{\cos^4 \beta} - \frac{\sin^2 \alpha}{4F_x^3 \cos \alpha \cos \beta} - \frac{r_1}{8F_x^4}$$

$$A_{0400}^* = C_4 - \frac{r_1}{8F_y^4}$$

$$A_{0004}^* = C_4 r_2^4 + E_{42} r_2^2 - G_{42} r_2^3 - \frac{1}{8} r_1 M_y^4 - \frac{r_2}{8}$$

$$A_{2200}^* = \frac{B_4}{\cos^2 \beta} - \frac{\sin^2 \alpha}{4F_x F_y^2 \cos \alpha \cos \beta} - \frac{r_1}{4F_x^2 F_y^2}$$

$$A_{2020}^* = \frac{6A_4 r_2^2}{\cos^4 \beta} + D_{41} - \frac{3F_{41} r_2}{\cos^2 \beta} + \frac{3M_x \sin^2 \alpha}{4F_x \cos \alpha \cos \beta} \left(\frac{r_2}{F_x} - M_x \right) - \frac{3r_1 M_x^2}{4F_x^2}$$

$$A_{2002}^* = \frac{1}{\cos^2 \beta} (B_4 r_2^2 + E_{41} - G_{41} r_2) - \frac{M_y^2 \sin^2 \alpha}{4F_x \cos \alpha \cos \beta} - \frac{r_1 M_y^2}{4F_x^2}$$

$$A_{0202}^* = 6C_4 r_2^2 + E_{42} - 3G_{42} r_2 - \frac{3r_1 M_y^2}{4F_y^2}$$

$$A_{1111}^* = \frac{4B_4 r_2^2}{\cos^2 \beta} - 2F_{42} r_2 - \frac{2G_{41} r_2}{\cos^2 \beta} + \frac{M_y \sin^2 \alpha}{2F_y \cos \alpha \cos \beta} \left(\frac{r_2}{F_x} - M_x \right) - \frac{r_1 M_x M_y}{F_x F_y}$$

$$A_{2101}^* = -\frac{2B_4 r_2}{\cos^2 \beta} + \frac{G_{41}}{\cos^2 \beta} - \frac{M_y \sin^2 \alpha}{2F_x F_y \cos \alpha \cos \beta} - \frac{r_1 M_y}{2F_x^2 F_y}$$

$$A_{1210}^* = -\frac{2B_4 r_2}{\cos^2 \beta} + F_{42} + \frac{\sin^2 \alpha}{4F_y^2 \cos \alpha \cos \beta} \left(\frac{r_2}{F_x} - M_x \right) - \frac{r_1 M_x}{2F_x F_y^2}$$

$$A_{1012}^* = -\frac{2B_4 r_2^3}{\cos^2 \beta} - \frac{2E_{41} r_2}{\cos^2 \beta} + F_{42} r_2^2 + \frac{2G_{41} r_2^2}{\cos^2 \beta} + \frac{M_y^2 \sin^2 \alpha}{4 \cos \alpha \cos \beta} \left(\frac{r_2}{F_x} - M_x \right) - \frac{r_1 M_x M_y^2}{2F_x} + \frac{\tan^2 \beta}{4}$$

$$A_{3010}^* = -\frac{4A_4 r_2}{\cos^4 \beta} + \frac{F_{41}}{\cos^2 \beta} + \frac{\sin^2 \alpha}{4F_x^2 \cos \alpha \cos \beta} \left(\frac{r_2}{F_x} - 3M_x \right) - \frac{r_1 M_x}{2F_x^3}$$

$$A_{0301}^* = -4C_4 r_2 + G_{42} - \frac{r_1 M_y}{2F_y^3}$$

$$A_{1030}^* = -\frac{4A_4 r_2^3}{\cos^4 \beta} - 2D_{41} r_2 + \frac{3F_{41} r_2^2}{\cos^2 \beta} + \frac{M_x^2 \sin^2 \alpha}{4 \cos \alpha \cos \beta} \left(\frac{3r_2}{F_x} - M_x \right) - \frac{r_1 M_x^3}{2F_x} + \frac{\tan^2 \beta}{4}$$

$$A_{0103}^* = -4C_4 r_2^3 - 2E_{42} r_2 + 3G_{42} r_2^2 - \frac{r_1 M_y^3}{2F_y}$$

附录 3 x' 中各项的系数 B_{ijkl}^*

$$B_{1010}^* = 2M_p \left(\frac{3}{F_x} A_{0030}^* - M_x A_{1020}^* \right)$$

$$B_{0200}^* = -M_y^2 A_{0210}^* + \frac{M_y}{F_y} A_{0111}^* - \frac{A_{0012}^*}{F_y^2}$$

$$B_{0101}^* = -2M_y W_q A_{0210}^* - \left(M_y M_q - \frac{W_q}{F_y} \right) A_{0111}^* + 2 \frac{M_q}{F_y} A_{0012}^*$$

$$B_{0020}^* = -3M_p^2 A_{0030}^*$$

$$B_{0002}^* = -W_q^2 A_{0210}^* - M_q W_q A_{0111}^* - M_q^2 A_{0012}^*$$

$$B_{0030}^* = M_p^3 \left[6 \sum_{i < j} (A_{0030}^* A_{1020}^{j*} - A_{1020}^* A_{0030}^{j*}) - 4 A_{0040}^* \right]$$

$$B_{0210}^* = M_p \left\{ \sum_{i \geq j} \left[p_{ij} A_{1020}^{i*} \left(M_y^2 A_{0210}^{j*} - \frac{M_y}{F_y} A_{0111}^{j*} + \frac{A_{0012}^{j*}}{F_y^2} \right) - 3 p_{ij} A_{0030}^{i*} \left(M_y^2 A_{1200}^{j*} - \frac{M_y}{F_y} A_{1101}^{j*} + \frac{A_{1002}^{j*}}{F_y^2} \right) \right] \right. \\ \left. + 2 \sum_{i < j} \left[M_y^2 (A_{0111}^* A_{0210}^{j*} - A_{0210}^* A_{0111}^{j*}) - 2 \frac{M_y}{F_y} (A_{0012}^* A_{0210}^{j*} - A_{0210}^* A_{0012}^{j*}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{F_y^2} (A_{0012}^* A_{0111}^{j*} - A_{0111}^* A_{0012}^{j*}) \right] - 2 \left(M_y^2 A_{0220}^* - \frac{M_y}{F_y} A_{0121}^* + \frac{A_{0022}^*}{F_y^2} \right) \right\}$$

$$B_{0111}^* = M_p \left(\sum_{i \geq j} \left\{ p_{ij} A_{1020}^{i*} \left[2M_y W_q A_{0210}^{j*} + \left(M_y M_q - \frac{W_q}{F_y} \right) A_{0111}^{j*} - 2 \frac{M_q}{F_y} A_{0012}^{j*} \right] \right. \right. \\ \left. \left. - 3 p_{ij} A_{0030}^{i*} \left[2M_y W_q A_{1200}^{j*} + \left(M_y M_q - \frac{W_q}{F_y} \right) A_{1101}^{j*} - 2 \frac{M_q}{F_y} A_{1002}^{j*} \right] \right\} \right. \\ \left. + 4 \sum_{i < j} \left[M_y W_q (A_{0111}^* A_{0210}^{j*} - A_{0210}^* A_{0111}^{j*}) + \left(M_y M_q - \frac{W_q}{F_y} \right) (A_{0012}^* A_{0210}^{j*} - A_{0210}^* A_{0012}^{j*}) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{M_q}{F_y} (A_{0012}^* A_{0111}^{j*} - A_{0111}^* A_{0012}^{j*}) \right] - 2 \left[2M_y W_q A_{0220}^* + \left(M_y M_q - \frac{W_q}{F_y} \right) A_{0121}^* - 2 \frac{M_q}{F_y} A_{0022}^* \right] \right)$$

$$\begin{aligned}
 B_{0012}^* = M_p \left\{ \sum_{i \geq j} \left[P_{ij} A_{i020}^* \left(W_q^2 A_{0210}^{j*} + M_q W_q A_{0111}^{j*} + M_q^2 A_{0012}^{j*} \right) - 3 P_{ij} A_{i030}^* \left(W_q^2 A_{1200}^{j*} + M_q W_q A_{1101}^{j*} \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + M_q^2 A_{1002}^{j*} \right) \right] + 2 \sum_{i < j} \left[W_q^2 \left(A_{0111}^{i*} A_{0210}^{j*} - A_{0210}^{i*} A_{0111}^{j*} \right) + 2 M_q W_q \left(A_{0012}^{i*} A_{0210}^{j*} - A_{0210}^{i*} A_{0012}^{j*} \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + M_q^2 \left(A_{0012}^{i*} A_{0111}^{j*} - A_{0111}^{i*} A_{0012}^{j*} \right) \right] - 2 \left(W_q^2 A_{0220}^* + M_q W_q A_{0121}^* + M_q^2 A_{0022}^* \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{2010}^* = \sum_{i \geq j} P_{ij} \left\{ \left[\left(3 A_{2010}^{i*} A_{2010}^{j*} - 9 A_{1020}^{i*} A_{3000}^{j*} \right) M_x^2 + \left(18 A_{0030}^{i*} A_{3000}^{j*} - 4 A_{2010}^{i*} A_{1020}^{j*} \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + 2 A_{1020}^{i*} A_{2010}^{j*} \right) \frac{M_x}{F_x} + \left(A_{1020}^{i*} A_{1020}^{j*} - 6 A_{0030}^{i*} A_{2010}^{j*} + 3 A_{2010}^{i*} A_{0030}^{j*} \right) \frac{1}{F_x^2} \right] W_p \right. \\
 \left. + \left[\left(2 A_{2010}^{i*} A_{1020}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{2010}^{j*} - 9 A_{0030}^{i*} A_{3000}^{j*} \right) M_x^2 + \left(12 A_{0030}^{i*} A_{2010}^{j*} \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. - 6 A_{2010}^{i*} A_{0030}^{j*} - 2 A_{1020}^{i*} A_{1020}^{j*} \right) \frac{M_x}{F_x} + 9 \left(A_{1020}^{i*} A_{0030}^{j*} - A_{0030}^{i*} A_{1020}^{j*} \right) \frac{1}{F_x^2} \right] M_p \right\} \\
 + \left(4 A_{2020}^* \frac{M_x}{F_x} - 3 A_{3010}^* M_x^2 - 3 A_{1030}^* \frac{1}{F_x^2} \right) W_p \\
 + \left(6 A_{1030}^* \frac{M_x}{F_x} - 2 A_{2020}^* M_x^2 - 12 A_{0040}^* \frac{1}{F_x^2} \right) M_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{1020}^* = \sum_{i \geq j} P_{ij} \left\{ \left[\left(3 A_{2010}^{i*} A_{2010}^{j*} - 9 A_{1020}^{i*} A_{3000}^{j*} \right) M_x + \left(A_{1020}^{i*} A_{2010}^{j*} + 9 A_{0030}^{i*} A_{3000}^{j*} \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. - 2 A_{2010}^{i*} A_{1020}^{j*} \right) \frac{1}{F_x} \right] W_p^2 + \left[\left(4 A_{2010}^{i*} A_{1020}^{j*} - 18 A_{0030}^{i*} A_{3000}^{j*} - 2 A_{1020}^{i*} A_{2010}^{j*} \right) M_x \right. \right. \\
 \left. \left. + \left(12 A_{0030}^{i*} A_{2010}^{j*} - 6 A_{2010}^{i*} A_{0030}^{j*} - 2 A_{1020}^{i*} A_{1020}^{j*} \right) \frac{1}{F_x} \right] W_p M_p + \left[\left(A_{1020}^{i*} A_{1020}^{j*} \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + 3 A_{2010}^{i*} A_{0030}^{j*} - 6 A_{0030}^{i*} A_{2010}^{j*} \right) M_x + 9 \left(A_{0030}^{i*} A_{1020}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{0030}^{j*} \right) \frac{1}{F_x} \right] M_p^2 \right\} \\
 + \left(2 A_{2020}^* \frac{1}{F_x} - 3 A_{3010}^* M_x \right) W_p^2 + \left(6 A_{1030}^* \frac{1}{F_x} - 4 A_{2020}^* M_x \right) W_p M_p \\
 + \left(12 A_{0040}^* \frac{1}{F_x} - 3 A_{1030}^* M_x \right) M_p^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{3000}^* &= \sum_{i \geq j} P_{ij} \left[(A_{2010}^{i*} A_{2010}^{j*} - 3A_{1020}^{i*} A_{3000}^{j*}) M_x^3 + (A_{1020}^{i*} A_{2010}^{j*} + 9A_{0030}^{i*} A_{3000}^{j*} \right. \\
 &\quad \left. - 2A_{2010}^{i*} A_{1020}^{j*}) \frac{M_x^2}{F_x} + (A_{1020}^{i*} A_{1020}^{j*} + 3A_{2010}^{i*} A_{0030}^{j*} - 6A_{0030}^{i*} A_{2010}^{j*}) \frac{M_x}{F_x^2} \right. \\
 &\quad \left. + (3A_{0030}^{i*} A_{1020}^{j*} - 3A_{1020}^{i*} A_{0030}^{j*}) \frac{1}{F_x^3} \right] + 4A_{0040}^* \frac{1}{F_x^3} + 2A_{2020}^* \frac{M_x^2}{F_x} - A_{3010}^* M_x^3 \\
 &\quad - 3A_{1030}^* \frac{M_x}{F_x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{1200}^* &= \sum_{i \geq j} P_{ij} \left[(A_{2010}^{i*} A_{0210}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{1200}^{j*} + A_{0210}^{i*} A_{1101}^{j*} - A_{0111}^{i*} A_{1200}^{j*}) M_x M_y^2 \right. \\
 &\quad \left. + (A_{1020}^{i*} A_{1101}^{j*} - A_{2010}^{i*} A_{0111}^{j*} + 2A_{0012}^{i*} A_{1200}^{j*} - 2A_{0210}^{i*} A_{1002}^{j*}) \frac{M_x M_y}{F_y} \right. \\
 &\quad \left. + (3A_{0030}^{i*} A_{1200}^{j*} - A_{0210}^{i*} A_{0111}^{j*} + A_{0111}^{i*} A_{0210}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{0210}^{j*}) \frac{M_y^2}{F_x} \right. \\
 &\quad \left. + (A_{0111}^{i*} A_{1002}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{1002}^{j*} + A_{2010}^{i*} A_{0012}^{j*} - A_{0012}^{i*} A_{1101}^{j*}) \frac{M_x}{F_y^2} \right. \\
 &\quad \left. + (A_{1020}^{i*} A_{0111}^{j*} - 3A_{0030}^{i*} A_{1101}^{j*} + 2A_{0210}^{i*} A_{0012}^{j*} - 2A_{0012}^{i*} A_{0210}^{j*}) \frac{M_y}{F_x F_y} \right. \\
 &\quad \left. + (3A_{0030}^{i*} A_{1002}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{0012}^{j*} + A_{0012}^{i*} A_{0111}^{j*} - A_{0111}^{i*} A_{0012}^{j*}) \frac{1}{F_x F_y^2} \right] \\
 &\quad - A_{1210}^* M_x M_y^2 + A_{1111}^* \frac{M_x M_y}{F_y} - 2A_{0220}^* \frac{M_y^2}{F_x} - A_{1012}^* \frac{M_x}{F_y^2} \\
 &\quad - 2A_{0121}^* \frac{M_y}{F_x F_y} + 2A_{0022}^* \frac{1}{F_x F_y^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{1002}^* = & \sum_{i \geq j} p_{ij} \left[\left(A_{2010}^{i*} A_{0210}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{1200}^{j*} + A_{0210}^{i*} A_{1101}^{j*} - A_{0111}^{i*} A_{1200}^{j*} \right) M_x W_q^2 \right. \\
 & + \left(2A_{0210}^{i*} A_{1002}^{j*} - 2A_{0012}^{i*} A_{1200}^{j*} + A_{2010}^{i*} A_{0111}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{1101}^{j*} \right) M_x W_q M_q \\
 & + \left(3A_{0030}^{i*} A_{1200}^{j*} - A_{0210}^{i*} A_{0111}^{j*} + A_{0111}^{i*} A_{0210}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{0210}^{j*} \right) \frac{W_q^2}{F_x} \\
 & + \left(A_{0111}^{i*} A_{1002}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{1002}^{j*} + A_{2010}^{i*} A_{0012}^{j*} - A_{0012}^{i*} A_{1101}^{j*} \right) M_x M_q^2 \\
 & + \left(3A_{0030}^{i*} A_{1101}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{0111}^{j*} + 2A_{0012}^{i*} A_{0210}^{j*} - 2A_{0210}^{i*} A_{0012}^{j*} \right) \frac{W_q M_q}{F_x} \\
 & \left. + \left(3A_{0030}^{i*} A_{1002}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{0012}^{j*} + A_{0012}^{i*} A_{0111}^{j*} - A_{0111}^{i*} A_{0012}^{j*} \right) \frac{M_q^2}{F_x} \right] \\
 & - A_{1210}^* M_x W_q^2 - A_{1111}^* M_x W_q M_q + 2A_{0220}^* \frac{W_q^2}{F_x} - A_{1012}^* M_x M_q^2 \\
 & + 2A_{0121}^* \frac{W_q M_q}{F_x} + 2A_{0022}^* \frac{M_q^2}{F_x} \\
 B_{1101}^* = & \sum_{i \geq j} p_{ij} \left[\left(2A_{0210}^{i*} A_{1002}^{j*} - 2A_{0012}^{i*} A_{1200}^{j*} + A_{2010}^{i*} A_{0111}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{1101}^{j*} \right) M_x M_y M_q \right. \\
 & + 2 \left(A_{0210}^{i*} A_{1101}^{j*} - A_{0111}^{i*} A_{1200}^{j*} + A_{2010}^{i*} A_{0210}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{1200}^{j*} \right) M_x M_y W_q \\
 & + 2 \left(A_{1020}^{i*} A_{1002}^{j*} - A_{2010}^{i*} A_{0012}^{j*} + A_{0012}^{i*} A_{1101}^{j*} - A_{0111}^{i*} A_{1002}^{j*} \right) \frac{M_x M_q}{F_y} \\
 & + \left(A_{1020}^{i*} A_{1101}^{j*} - A_{2101}^{i*} A_{0111}^{j*} + 2A_{0012}^{i*} A_{1200}^{j*} - 2A_{0210}^{i*} A_{1002}^{j*} \right) \frac{M_x W_q}{F_y} \\
 & + \left(3A_{0030}^{i*} A_{1101}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{0111}^{j*} + 2A_{0012}^{i*} A_{0210}^{j*} - 2A_{0210}^{i*} A_{0012}^{j*} \right) \frac{M_y M_q}{F_y} \\
 & + 2 \left(A_{0111}^{i*} A_{0210}^{j*} - A_{0210}^{i*} A_{0111}^{j*} + 3A_{0030}^{i*} A_{1200}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{0210}^{j*} \right) \frac{M_y W_q}{F_y} \\
 & + 2 \left(A_{1020}^{i*} A_{0012}^{j*} - 3A_{0030}^{i*} A_{1002}^{j*} + A_{0111}^{i*} A_{0012}^{j*} - A_{0012}^{i*} A_{0111}^{j*} \right) \frac{M_q}{F_x F_y} \\
 & \left. + \left(A_{1020}^{i*} A_{0111}^{j*} - 3A_{0030}^{i*} A_{1101}^{j*} + 2A_{0210}^{i*} A_{0012}^{j*} - 2A_{0012}^{i*} A_{0210}^{j*} \right) \frac{W_q}{F_x F_y} \right] \\
 & + 4A_{0020}^* \frac{W_q M_y}{F_x} - 2A_{0121}^* \frac{W_q}{F_x F_y} + 2A_{0121}^* \frac{M_y M_q}{F_x} - 4A_{0022}^* \frac{M_q}{F_x F_y} \\
 & + A_{1111}^* \frac{M_x W_q}{F_y} - A_{1111}^* M_x M_y M_q - 2A_{1210}^* M_x W_q M_y + 2A_{1012}^* \frac{M_x M_q}{F_y}
 \end{aligned}$$

附录 4 y' 中各项的系数 C_{ijk}^*

$$C_{0110}^* = M_p \left(\frac{2}{F_y} A_{0012}^* - M_y A_{0111}^* \right)$$

$$C_{0011}^* = -M_p (2M_q A_{0012}^* + W_q A_{0111}^*)$$

$$C_{1100}^* = -A_{1101}^* M_x M_y + 2A_{1002}^* \frac{M_x}{F_y} + A_{0111}^* \frac{M_y}{F_x} - 2 \frac{A_{0012}^*}{F_x F_y}$$

$$C_{1001}^* = -A_{1101}^* M_x W_q - 2A_{1002}^* M_x M_q + A_{0111}^* \frac{W_q}{F_x} + 2A_{0012}^* \frac{M_q}{F_x}$$

$$\begin{aligned} C_{0201}^* = & \frac{1}{2} \sum_{i \geq j} p_{ij} \left[(A_{1101}^* W_q + 2A_{1002}^* M_q) \left(A_{0210}^{j*} M_y^2 - A_{0111}^{j*} \frac{M_y}{F_y} + A_{0012}^{j*} \frac{1}{F_y^2} \right) \right. \\ & - (A_{0111}^* W_q + 2A_{0012}^* M_q) \left(A_{1200}^{j*} M_y^2 - A_{1101}^{j*} \frac{M_y}{F_y} + A_{1002}^{j*} \frac{1}{F_y^2} \right) \\ & + \left(A_{1101}^{j*} M_y - 2A_{1002}^{j*} \frac{1}{F_y} \right) \left(A_{0111}^{j*} M_y M_q - A_{0111}^{j*} \frac{W_q}{F_y} + 2A_{0210}^{j*} W_q M_y - 2A_{0012}^{j*} \frac{M_q}{F_y} \right) \\ & \left. - \left(A_{0111}^{j*} M_y - 2A_{0012}^{j*} \frac{1}{F_y} \right) \left(A_{1101}^{j*} M_y M_q - A_{1101}^{j*} \frac{W_q}{F_y} + 2A_{1200}^{j*} W_q M_y - 2A_{1002}^{j*} \frac{M_q}{F_y} \right) \right] \\ & - 12A_{0004}^* \frac{M_q}{F_y^2} + 4A_{0202}^* \frac{W_q M_y}{F_y} - 2A_{0202}^* M_y^2 M_q - 3A_{0301}^* W_q M_y^2 \\ & - 3A_{0103}^* \frac{W_q}{F_y^2} + 6A_{0103}^* \frac{M_y M_q}{F_y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{0120}^* = & \frac{1}{2} \sum_{i \geq j} p_{ij} \left[(A_{0111}^* A_{0111}^{j*} - A_{0111}^* A_{1020}^{j*} - 4A_{0012}^* A_{0210}^{j*} + 3A_{1101}^* A_{0030}^{j*}) M_y \right. \\ & \left. + (2A_{0012}^* A_{1020}^{j*} - 2A_{0111}^* A_{0012}^{j*} + 2A_{0012}^* A_{0111}^{j*} - 6A_{1002}^* A_{0030}^{j*}) \frac{1}{F_y} \right] M_p^2 \\ & + \left(2A_{0022}^* \frac{1}{F_y} - A_{0121}^* M_y \right) M_p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{0021}^* = & \frac{1}{2} \sum_{i \geq j} p_{ij} \left[(A_{0111}^* A_{0111}^{j*} - A_{0111}^* A_{1020}^{j*} - 4A_{0012}^* A_{0210}^{j*} + 3A_{1101}^* A_{0030}^{j*}) W_q \right. \\ & \left. + (2A_{0111}^* A_{0012}^{j*} - 2A_{0012}^* A_{1020}^{j*} + 6A_{1002}^* A_{0030}^{j*} - 2A_{0012}^* A_{0111}^{j*}) M_q \right] M_p^2 \\ & - (2A_{0022}^* M_q + A_{0121}^* W_q) M_p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{0102}^* &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} p_{ij} \left[\left(A_{1101}^{j*} M_y - 2A_{1002}^{j*} \frac{1}{F_y} \right) \left(A_{0210}^{j*} W_q^2 + A_{0111}^{j*} W_q M_q + A_{0012}^{j*} M_q^2 \right) \right. \\
 &\quad - \left(A_{0111}^{j*} M_y - 2A_{0012}^{j*} \frac{1}{F_y} \right) \left(A_{1200}^{j*} W_q^2 + A_{1101}^{j*} W_q M_q + A_{1002}^{j*} M_q^2 \right) \\
 &\quad + \left(A_{1101}^{j*} W_q + 2A_{1002}^{j*} M_q \right) \left(A_{0111}^{j*} M_y M_q - A_{0111}^{j*} \frac{W_q}{F_y} + 2A_{0210}^{j*} W_q M_y - 2A_{0012}^{j*} \frac{M_q}{F_y} \right) \\
 &\quad \left. - \left(A_{0111}^{j*} W_q + 2A_{0012}^{j*} M_q \right) \left(A_{1101}^{j*} M_y M_q - A_{1101}^{j*} \frac{W_q}{F_y} + 2A_{1200}^{j*} W_q M_y - 2A_{1002}^{j*} \frac{M_q}{F_y} \right) \right] \\
 &\quad + 12A_{0004}^{j*} \frac{M_q^2}{F_y} - 4A_{0202}^{j*} W_q M_y M_q + 2A_{0202}^{j*} \frac{W_q^2}{F_y} - 3A_{0301}^{j*} W_q^2 M_y \\
 &\quad - 3A_{0103}^{j*} M_y M_q^2 + 6A_{0103}^{j*} \frac{W_q M_q}{F_y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{0300}^* &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} p_{ij} \left[\left(A_{1101}^{j*} M_y - 2A_{1002}^{j*} \frac{1}{F_y} \right) \left(A_{0210}^{j*} M_y^2 - A_{0111}^{j*} \frac{M_y}{F_y} + A_{0012}^{j*} \frac{1}{F_y^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(A_{0111}^{j*} M_y - 2A_{0012}^{j*} \frac{1}{F_y} \right) \left(A_{1200}^{j*} M_y^2 - A_{1101}^{j*} \frac{M_y}{F_y} + A_{1002}^{j*} \frac{1}{F_y^2} \right) \right] \\
 &\quad + 4A_{0004}^{j*} \frac{1}{F_y^3} + 2A_{0202}^{j*} \frac{M_y^2}{F_y} - A_{0301}^{j*} M_y^3 - 3A_{0103}^{j*} \frac{M_y}{F_y^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{0003}^* &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} p_{ij} \left[\left(A_{1101}^{j*} W_q + 2A_{1002}^{j*} M_q \right) \left(A_{0210}^{j*} W_q^2 + A_{0111}^{j*} W_q M_q + A_{0012}^{j*} M_q^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(A_{0111}^{j*} W_q + 2A_{0012}^{j*} M_q \right) \left(A_{1200}^{j*} W_q^2 + A_{1101}^{j*} W_q M_q + A_{1002}^{j*} M_q^2 \right) \right] \\
 &\quad - 4A_{0004}^{j*} M_q^3 - 2A_{0202}^{j*} W_q^2 M_q - A_{0301}^{j*} W_q^3 - 3A_{0103}^{j*} W_q M_q^2
 \end{aligned}$$

附录 5 子午方向聚焦条件下成像公式中的 $B_{j\mu}^*$ 具体形式

$W_p = 0$, 可得

$$M_x = -\frac{r_2 \cos \alpha}{r_1 \cos \beta} \quad M_p = -\frac{r_1 \cos \beta}{r_2 \cos \alpha}$$

$$B_{1010}^* = -\frac{r_1 r_2}{\cos^2 \alpha \cos \beta} \left[\frac{3}{R} \left(\frac{\cos \alpha \sin \alpha}{r_1} + \frac{\cos \beta \sin \beta}{r_2} \right) - \frac{\cos^2 \alpha}{r_1 R} (\tan \alpha - \tan \beta) - \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha}{r_1^2} - \frac{3 \cos^2 \beta \sin \beta}{r_2^2} - \frac{2 \cos^2 \alpha \sin \beta}{r_1 r_2} - 6m\lambda\sigma_3 \right]$$

$$B_{0200}^* = -\frac{r_2}{2 \cos \beta} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r_1} + \frac{\sin \beta \cos \beta}{r_2} \right) - \frac{\sin \beta}{F_y^2} - 2m\lambda\sigma_4 \right]$$

$$B_{0101}^* = -\frac{r_1 r_2}{\cos \beta} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r_1} + \frac{\sin \beta \cos \beta}{r_2} \right) + \frac{\sin \beta}{r_1 F_y} \left(1 - \frac{r_1}{F_y} \right) - 2m\lambda\sigma_4 \right]$$

$$B_{0020}^* = -\frac{3r_1^2 r_2}{2 \cos^2 \alpha \cos \beta} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r_1} + \frac{\sin \beta \cos \beta}{r_2} \right) - \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{r_1^2} - \frac{\sin \beta \cos^2 \beta}{r_2^2} - 2m\lambda\sigma_3 \right]$$

$$B_{0002}^* = -\frac{r_1^2 r_2}{2 \cos \beta} \left\{ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\cos \alpha \sin \alpha}{r_1} + \frac{\cos \beta \sin \beta}{r_2} \right) - \frac{1}{r_1^2} \left[\sin \alpha + \left(1 - \frac{r_1}{F_y} \right)^2 \sin \beta \right] - 2m\lambda\sigma_4 \right\}$$

$$B_{0030}^* = -\frac{r_1^3 r_2}{\cos^3 \alpha \cos \beta} \left\{ \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2R^3} + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha \tan \beta}{r_1} + \frac{2 \sin^2 \beta + 3 \sin \beta \cos \beta \tan \alpha}{r_2} \right) - \frac{1}{2R} \left[\frac{2 \cos \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha \tan \beta}{r_1^2} + \frac{2 \cos \beta + 3 \sin^2 \beta \cos \beta + 3 \sin \beta \cos^2 \beta \tan \alpha}{r_2^2} + \frac{6 \sin \alpha \sin \beta (\cos \alpha + \cos \beta)}{r_1 r_2} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \sin^4 \alpha}{r_1^3} + \frac{1 - \sin^4 \beta}{r_2^3} \right) + 3 \sin \alpha \sin \beta \left(\frac{\cos^2 \alpha}{r_1^2 r_2} + \frac{\cos^2 \beta}{r_1 r_2^2} \right) - 3 \left[\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{R} - 2 \left(\frac{\sin \alpha}{r_1} + \frac{\sin \beta}{r_2} \right) \right] m\lambda\sigma_3 - 4m\lambda\sigma_5 \right\}$$

$$\begin{aligned}
 N = & \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2R\rho^2} + \frac{1}{2R\rho} \left(\frac{2\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \tan \beta}{r_1} + \frac{3\sin \beta \cos \beta \tan \alpha}{r_2} \right) \\
 & - \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\cos \alpha}{r_1^2} + \frac{\cos^3 \beta + 3\sin \beta \cos^2 \beta \tan \alpha}{r_2^2} + \frac{2\sin \alpha \cos \alpha \sin \beta}{r_1 r_2} \right) \\
 & - \frac{\sin \beta}{F_y \rho} \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r_1} + \frac{\sin \beta \cos \beta}{r_2} \right) - \frac{1}{2F_y^2 R \cos \beta} + \frac{1}{2r_2 F_y^2} (1 + \sin^2 \beta) \\
 & - \frac{3 \tan \alpha}{\rho} m \lambda \sigma_3 + \left(\frac{2 \sin \beta}{r_2} + \frac{2 \sin \beta}{F_y} - \frac{\tan \beta}{R} \right) m \lambda \sigma_4 - 2m \lambda \sigma_6
 \end{aligned}$$

$$B_{0210}^* = -\frac{r_1 r_2}{\cos \alpha \cos \beta} N$$

$$\begin{aligned}
 B_{0111}^* = & -\frac{2r_1^2 r_2}{\cos \alpha \cos \beta} \left[N - \frac{1}{2r_1 \rho} (\sin \alpha - \sin \beta) \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r_1} + \frac{\sin \beta \cos \beta}{r_2} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2r_1 F_y R \cos \beta} - \frac{1}{2r_1 r_2 F_y} (1 + \sin^2 \beta) + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{2F_y^2 r_1} + \frac{1}{r_1} (\sin \alpha - \sin \beta) m \lambda \sigma_4 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{0012}^* = & -\frac{r_1^3 r_2}{\cos \alpha \cos \beta} \left[N - \frac{1}{r_1 \rho} (\sin \alpha - \sin \beta) \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r_1} + \frac{\sin \beta \cos \beta}{r_2} \right) \right. \\
 & - \frac{1}{r_1 R \cos \beta} \left(\frac{1}{2r_1} - \frac{1}{F_y} \right) + \frac{1}{r_1 r_2} \left(\frac{1}{2r_1} - \frac{1}{F_y} \right) (1 + \sin^2 \beta) - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{r_1 F_y} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{F_y} \right) \\
 & \left. - \frac{1}{2r_1^2 R} (\sin \alpha \tan \beta + \cos \alpha) + \frac{\cos^2 \alpha}{2r_1^3} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{2r_1^2 r_2} + \frac{2}{r_1} (\sin \alpha - \sin \beta) m \lambda \sigma_4 \right]
 \end{aligned}$$

附录 6 非子午聚焦条件下 B_{ijk}^* , C_{ijk}^* 的一般表达式

 B_{ijk}^* :

$$B_{1010}^* = (B_{1010}^*)_0 + \frac{2A_{1020}^* W_p}{F_x} - 2A_{2010}^* W_p M_x$$

$$B_{0200}^* = (B_{0200}^*)_0$$

$$B_{0101}^* = (B_{0101}^*)_0$$

$$B_{0020}^* = (B_{0020}^*)_0 - 2A_{1020}^* W_p M_p - A_{2010}^* W_p^2$$

$$\begin{aligned} B_{0030}^* &= (B_{0030}^*)_0 + W_p^3 \sum_{i \geq j} P_{ij} (A_{2010}^* A_{2010}^{j*} - 3A_{1020}^* A_{3000}^{j*}) \\ &\quad + W_p^2 M_p \sum_{i \geq j} P_{ij} (2A_{2010}^* A_{1020}^{j*} - A_{1020}^* A_{2010}^{j*} - 9A_{0030}^* A_{3000}^{j*}) \\ &\quad + W_p M_p^2 \sum_{i \geq j} P_{ij} (A_{1020}^* A_{1020}^{j*} - 6A_{0030}^* A_{2010}^{j*} + 3A_{2010}^* A_{0030}^{j*}) \\ &\quad - A_{3010}^* W_p^3 - 2A_{2020}^* W_p^2 M_p - 3A_{1030}^* W_p M_p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{0210}^* &= (B_{0210}^*)_0 + W_p \sum_{i \geq j} P_{ij} \left[(A_{0210}^* A_{1101}^{j*} - A_{1020}^* A_{1200}^{j*} + A_{2010}^* A_{0210}^{j*} - A_{0111}^* A_{1200}^{j*}) M_y^2 \right. \\ &\quad \left. + (A_{1020}^* A_{1101}^{j*} - A_{2010}^* A_{0111}^{j*} + 2A_{0012}^* A_{1200}^{j*} - 2A_{0210}^* A_{1002}^{j*}) \frac{M_y}{F_y} \right. \\ &\quad \left. + (A_{2010}^* A_{0012}^{j*} - A_{0012}^* A_{1101}^{j*} + A_{0111}^* A_{1002}^{j*} - A_{1020}^* A_{1002}^{j*}) \frac{1}{F_y^2} \right] \\ &\quad + W_p \left(A_{1111}^* \frac{M_y}{F_y} - A_{1201}^* M_y^2 - A_{1012}^* \frac{1}{F_y^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{0111}^* &= (B_{0111}^*)_0 + W_p \sum_{i \geq j} P_{ij} \left[(2A_{0210}^* A_{1002}^{j*} - 2A_{0012}^* A_{1200}^{j*} + A_{2010}^* A_{0111}^{j*} - A_{1020}^* A_{1101}^{j*}) M_y M_q \right. \\ &\quad \left. + (2A_{2010}^* A_{0210}^{j*} - 2A_{1020}^* A_{1200}^{j*} + 2A_{0210}^* A_{1101}^{j*} - 2A_{0111}^* A_{1200}^{j*}) M_y W_q \right. \\ &\quad \left. + (2A_{1020}^* A_{1002}^{j*} - 2A_{0111}^* A_{1002}^{j*} + 2A_{0012}^* A_{1101}^{j*} - 2A_{2010}^* A_{0012}^{j*}) \frac{M_q}{F_y} \right. \\ &\quad \left. + (2A_{0012}^* A_{1200}^{j*} - 2A_{0210}^* A_{1002}^{j*} + A_{1020}^* A_{1101}^{j*} - A_{2010}^* A_{0111}^{j*}) \frac{W_q}{F_y} \right] \\ &\quad + W_p \left(A_{1111}^* \frac{W_q}{F_y} - A_{1111}^* M_y M_q - 2A_{1210}^* W_q M_y + 2A_{1012}^* \frac{M_q}{F_y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{0012}^* &= (B_{0012}^*)_0 + W_p \sum_{i \geq j} P_y \left[(A_{0210}^{i*} A_{1101}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{1200}^{j*} + A_{2010}^{i*} A_{0210}^{j*} - A_{0111}^{i*} A_{1200}^{j*}) W_q^2 \right. \\
 &\quad + (A_{2010}^{i*} A_{0111}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{1101}^{j*} + 2A_{0210}^{i*} A_{1002}^{j*} - 2A_{0012}^{i*} A_{1200}^{j*}) W_q M_q \\
 &\quad \left. + (A_{2010}^{i*} A_{0012}^{j*} - A_{0012}^{i*} A_{1101}^{j*} + A_{0111}^{i*} A_{1002}^{j*} - A_{1020}^{i*} A_{1002}^{j*}) M_q^2 \right] \\
 &\quad - W_p (A_{1210}^* W_q^2 + A_{1111}^* W_q M_q + A_{1012}^* M_q^2)
 \end{aligned}$$

C_{ijkl}^* :

$$C_{0110}^* = (C_{0110}^*)_0 + 2A_{1002}^* \frac{W_p}{F_y} - A_{1101}^* W_p M_y$$

$$C_{0011}^* = (C_{0011}^*)_0 - A_{1101}^* W_p W_q - 2A_{1002}^* W_p M_q$$

$$C_{1100}^* = (C_{1100}^*)_0$$

$$C_{1001}^* = (C_{1001}^*)_0$$

$$C_{0201}^* = (C_{0201}^*)_0$$

$$C_{0120}^* = (C_{0120}^*)_0$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i \geq j} P_y \left\{ \left[(2A_{1101}^{i*} A_{1020}^{j*} - 2A_{0111}^{i*} A_{2010}^{j*} + A_{1101}^{i*} A_{0111}^{j*} + A_{0111}^{i*} A_{1101}^{j*} \right. \right. \\
 &\quad - 4A_{1002}^{i*} A_{0210}^{j*} - 4A_{0012}^{i*} A_{1200}^{j*}) M_y + (4A_{0012}^{i*} A_{2010}^{j*} - 4A_{1002}^{i*} A_{1020}^{j*} \\
 &\quad - 2A_{1101}^{i*} A_{0012}^{j*} - 2A_{0111}^{i*} A_{1002}^{j*} + 2A_{1002}^{i*} A_{0111}^{j*} + 2A_{0012}^{i*} A_{1101}^{j*}) \frac{1}{F_y} \left. \right] M_p W_p \\
 &\quad + \left[(A_{1101}^{i*} A_{2010}^{j*} - 4A_{1002}^{i*} A_{1200}^{j*} + A_{1101}^{i*} A_{1101}^{j*} - 3A_{0111}^{i*} A_{3000}^{j*}) M_y \right. \\
 &\quad \left. + (2A_{1002}^{i*} A_{1101}^{j*} - 2A_{1002}^{i*} A_{2010}^{j*} + 6A_{0012}^{i*} A_{3000}^{j*} - 2A_{1101}^{i*} A_{1002}^{j*}) \frac{1}{F_y} \right] W_p^2 \left. \right\} \\
 &+ \left(2A_{2002}^* \frac{1}{F_y} - A_{2101}^* M_y \right) W_p^2 + \left(2A_{1012}^* \frac{1}{F_y} - A_{1111}^* M_y \right) M_p W_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{0021}^* &= (C_{0021}^*)_0 \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i \geq j} p_{ij} \left\{ \left[(2A_{1101}^{i*} A_{1020}^{j*} - 2A_{0111}^{i*} A_{2010}^{j*} + A_{1101}^{i*} A_{0111}^{j*} + A_{0111}^{i*} A_{1101}^{j*} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 4A_{1002}^{i*} A_{0210}^{j*} - 4A_{0012}^{i*} A_{1200}^{j*}) W_q + (4A_{1002}^{i*} A_{1020}^{j*} - 4A_{0012}^{i*} A_{2010}^{j*} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2A_{1101}^{i*} A_{0012}^{j*} + 2A_{0111}^{i*} A_{1002}^{j*} - 2A_{1002}^{i*} A_{0111}^{j*} - 2A_{0012}^{i*} A_{1101}^{j*}) W_q \right] M_p W_p \right. \\
 &\quad \left. + \left[(A_{1101}^{i*} A_{2010}^{j*} - 4A_{1002}^{i*} A_{1200}^{j*} + A_{1101}^{i*} A_{1101}^{j*} - 3A_{0111}^{i*} A_{3000}^{j*}) W_q \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (2A_{1002}^{i*} A_{2010}^{j*} - 2A_{1002}^{i*} A_{1101}^{j*} + 2A_{1101}^{i*} A_{1002}^{j*} - 6A_{0012}^{i*} A_{3000}^{j*}) M_q \right] W_p^2 \right\} \\
 &\quad - (2A_{2002}^* M_q + A_{2101}^* W_q) W_p^2 - (2A_{1012}^* M_q + A_{1111}^* W_q) M_p W_p
 \end{aligned}$$

$$C_{0102}^* = (C_{0102}^*)_0$$

$$C_{0300}^* = (C_{0300}^*)_0$$

$$C_{0003}^* = (C_{0003}^*)_0$$

其中，上式中的第一项均表示该系数在子午聚焦条件下的表达式（附录3）。

附录 7 衍射光线方向余弦 p', q' 的表达式

$$p' = -\frac{1}{F_x}x + M_p p + D_{1010}^* xp + D_{0101}^* yq + D_{2000}^* x^2 + D_{0200}^* y^2 + D_{0020}^* p^2 + D_{0002}^* q^2$$

$$\text{其中, } D_{0020}^* = A_{1020}^* M_p^2 \quad D_{2000}^* = \frac{A_{1020}^*}{F_x^2} + 3A_{3000}^* M_x^2$$

$$D_{0200}^* = A_{1200}^* M_y^2 - A_{1101}^* \frac{M_y}{F_y} + A_{1002}^* \frac{1}{F_y^2} \quad D_{0002}^* = A_{1200}^* W_q^2 + A_{1101}^* W_q M_q + A_{1002}^* M_q^2$$

$$D_{1010}^* = -2A_{1020}^* \frac{M_p}{F_x} \quad D_{0101}^* = 2A_{1200}^* W_q M_y - A_{1101}^* \frac{W_q}{F_y} + A_{1101}^* M_y M_q - 2A_{1002}^* \frac{M_q}{F_y}$$

$$q' = -\frac{1}{F_y}y + M_q q + E_{1100}^* xy + E_{1001}^* xq + E_{0110}^* yp + E_{0011}^* pq$$

$$\text{其中, } E_{1100}^* = 2A_{1200}^* M_x M_y - A_{1101}^* \frac{M_x}{F_y} - 2A_{0210}^* \frac{M_y}{F_x} + A_{0111}^* \frac{1}{F_x F_y}$$

$$E_{0110}^* = 2A_{0210}^* M_y M_p - A_{0111}^* \frac{M_p}{F_y}$$

$$E_{1001}^* = 2A_{1200}^* M_x W_q + A_{1101}^* M_x M_q - 2A_{0210}^* \frac{W_q}{F_y} - A_{0111}^* \frac{M_q}{F_y}$$

$$E_{0011}^* = 2A_{0210}^* W_q M_p + A_{0111}^* M_p M_q$$

参考文献

- [1] A.N.扎伊德尔, E. Ya.希赖德,《真空紫外光谱学》,成都科技大学出版社, P101-120(1990).
- [2] M. Domke, A. Puschmann and C. Xue etc, Spectral resolution in the soft x-ray region up to 11,000, Synchrotron Radiat. News 3, 31-22 (1990).
- [3] M. P. Chrisp, X-ray spectrograph design, Appl. Opt. 22, 1519-1529 (1983).
- [4] T. Namioka, Theory of the concave grating. III. Seya-Namioka monochromator, J. Opt. Soc. Am. 49, 951-961 (1959).
- [5] K. Ito, T. Namioka and Y. Morioka etc, High-resolution VUV spectroscopic facility at the Photon Factory, Appl. Opt. 25, 837-847 (1986).
- [6] T. Namioka, H. Noda, K. Goto, and T. Katayama, Design studies of mirror-grating systems for use with an electron storage ring source at the Photon Factory, Nucl. Instrum. Methods 208, 215-222 (1983).
- [7] W. Meyer-Ilse, M. Koike and R. Beguiristain etc, X-Ray Microscopy Resource Center at the Advanced Light Source, in Soft X-Ray Microscopy, C. J. Jacobsen and J. E. Trebes, Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 1741, 112-115 (1992).
- [8] H. Petersen, The plane grating and elliptical mirror: a new optical configuration for monochromators, Opt. Commun. 40, 402-406 (1982).
- [9] H. Noda, T. Namioka, and M. Seya, Geometric theory of the grating, J. Opt. Soc. Am. 64, 1031-1036 (1974).
- [10] H. G. Beutler, The theory of the concave grating, J. Opt. Soc. Am. 35, 311 (1945).
- [11] T. Namioka, Theory of the concave grating. I, J. Opt. Soc. Am. 49, 951-961 (1959).
- [12] R. Grange and M. Laget, Holographic diffraction gratings generated by aberrated wave fronts: application to a high-resolution far-ultraviolet spectrograph, Appl. Opt. 30, 3598-3603 (1991).
- [13] M. P. Chrisp, Aberrations of holographic toroidal grating systems, Appl. Opt. 22, 1508-1518 (1983).
- [14] T. Namioka and M. Koike, Analytical representation of spot diagrams and its application to the design of monochromators, Nucl. Instrum. Methods A 139, 219-227 (1992).
- [15] T. Namioka, M. Koike and D. Content, Geometric theory of the ellipsoidal grating, Appl.

- Opt. 33, 7261-7274 (1994)
- [16] H. Noda, T. Namioka, and M. Seya, Design of holographic concave gratings for Seya-Namioka monochromators, *J. Opt. Soc. Am.* 64, 1043-1048 (1974).
- [17] T. Namioka, M. Seya, and H. Noda, Design and performance of holographic concave gratings, *Jpn. J. Appl. Phys.* 15, 1181-1197 (1976).
- [18] H. Noda, T. Namioka, and M. Seya, Ray tracing through holographic gratings, *J. Opt. Soc. Am.* 64, 1037-1042 (1974).
- [19] S. Masui, and T. Namioka, Geometric aberration theory of double-element optical systems, *J. Opt. Soc. Am.* 16, 2253-2268 (1999).
- [20] C. H. F. Velzel, A general theory of the aberrations of diffraction gratings and grating like optical instruments, *J. Opt. Soc. Am. A* 66, 346-353 (1976).
- [21] K. Goto and T. Kurosaki, Canonical formulation for the geometrical optics of concave gratings, *J. Opt. Soc. Am. A* 10, 451-465 (1993)
- [22] C.A. Palmer, W. R. McKinney and B. S. Wheeler, Imaging equations for spectroscopic systems using Lie transformations: I. Theoretical foundations, *Proc. SPIE* 3450, 55-66 (1998)
- [23] C.A. Palmer, W. R. McKinney and B. S. Wheeler, Imaging equations for spectroscopic systems using Lie transformations: II. Multi-element systems, *Proc. SPIE* 3450, 67-77 (1998)
- [24] W. R. Hamilton, *Mathematical Paper* (Cambridge U. Press, Cambridge, 1931), Vol. 1, p17
- [25] M. Born and E. Wolf, *Principle of Optics*, 2nd ed. (Macmillan, New York, 1964), pp. 134, 211, 221
- [26] K. Halbach, Matrix Representation of Gaussian Optics, *Am. J. Phys.* 32,90-108 (1964)
- [27] M. Klein. *Optics* (Wiley, New York, 1970), p84
- [28] H. Buchdahl, Systems without symmetries: foundations of a theory of lagrangian aberration coefficients, *J. Opt. Soc. Am.* 62, 1314-1324 (1972)
- [29] H. Buchdahl, *An Introduction to Hamiltonian Optics* (Cambridge U. Press, Cambridge, 1970), p36
- [30] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (Interscience, New York, 1953), vol. 1, pp. 164-190
- [31] W. Brouwer, *Matrix Methods in Optical Instrument Design* (Benjamin, New York, 1964)

- [32] A. J. Dragt, Lie algebraic theory of geometrical optics and optical aberrations [J], *J. Opt. Soc. Am.* 72, 372-379 (1982)
- [33] A. J. Dragt and J. Finn, Lie series and invariant functions for analytic symplectic maps [J], *J. Math. Phys.* 17, 2215(1976)
- [34] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Algebras, and Their Representations* (Springer-Verlag, New York, 1984), Chap 2
- [35] T. Namioka, and T. Kita, "Mechanically ruled aberration-corrected concave gratings," *Appl. Opt.* 19, 3987-3993 (1980).
- [36] K. Goto, Y. Kato, and K. Togawa, Design of holographic gratings, *Opt. Acta* 26, 841-861 (1979)

作者在攻读硕士学位期间公开发表的论文

- [1] 王洁玮, 王娟, 吴伟等, 消像差光栅的波像差分析, 上海大学学报(自然科学版), 已录用
- [2] 王云芳, 吴伟, 王洁玮等, HID 灯的 Pspice 模型研究, 上海大学学报(自然科学版), 11, 584-588 (2005)
- [3] 吴伟, 王云芳, 王洁玮, 加速器中高稳定度电源拓扑研究, 核电子学与探测技术, 25, 296-300 (2005)
- [4] 王云芳, 吴伟, 王洁玮, 高强度气体放电灯 HID 灯声共振检测方法研究, 中国照明电器, 8, 24-26 (2006)

作者在攻读硕士学位期间所作的项目

- [1] 建立真空紫外软 X 射线多元件光学系统的研究平台, 国家自然科学基金项目(No.60578040)
- [2] HID 灯电子镇流器消除声共振研究, 上海市教育委员会科研项目(No.04AB37)

致 谢

本文是在导师吴伟副教授和吕丽军教授的悉心指导下完成的。承蒙两位老师的亲切关怀和精心指导，虽然有繁忙的工作，但仍抽出时间给予我学术上的指导和帮助，特别是给我提供了良好的学习环境，使我从中获益非浅。两位老师对学生认真负责的态度、严谨的科学研究方法、敏锐的学术洞察力、勤勉的工作作风以及勇于创新、勇于开拓的精神是我永远学习的榜样。在此，谨向吴老师和吕老师致以深深的敬意和由衷的感谢。

还要感谢我的家人，他们在生活上给予我很大的支持和鼓励，是他们给予我努力学习的信心和力量。

最后，感谢所有关心我、支持我和帮助过我的同学、朋友、老师和亲人。在这里，我仅用一句话来表明我无法言语的心情：感谢你们！