

摘 要

本文研究了结构动力学中的特征值反问题，包括弹簧-质点系统振动反问题、离散梁振动反问题、阻尼振动系统的振动反问题以及振动杆结构探伤问题。全文主要包括以下内容：

首先，研究了弹簧-质点系统的振动反问题。对二自由度简单连接度弹簧-质点系统分别通过加刚性约束、弹性约束和质量摄动得到修改系统，研究了利用原系统和修改系统的两组特征值(频率)和修改量识别系统的物理参数问题，给出了解的表达式。对于多自由度简单连接度弹簧-质点系统，研究了增容修改系统的频率反问题。提出了由多自由度简单连接弹簧-质点系统的四个和五个特征对(频率和模态)识别系统物理参数的振动反问题，分别研究了解的存在性，给出了解的表达式、相应算法和算例。提出并研究了一类混合连接弹簧-质点系统的振动反问题，提出了利用三个特征对(频率和模态)以及部分系统物理参数识别系统其它物理参数的振动反问题，研究了解的存在性，给出了解的表达式、相应算法和模型算例。

其次，研究了有限差分离散梁振动反问题，利用有限差分法得到振动梁的弹簧-质点-刚杆模型，质量矩阵为对角矩阵而刚度矩阵为对称五对角矩阵。提出了基于三个特征对的频率模态反问题，研究了解的存在性，给出了解存在惟一的充要条件和解的表达式、数值算法和算例。

再次，研究了阻尼振动系统中的二次特征值反问题。研究了阻尼弹簧-质点系统的物理参数识别，包括：由全部频率信息模态识别阻尼振动系统的结构物理参数；由部分频率模态信息识别比例阻尼振动系统的结构物理参数；由两对频率模态信息识别比例阻尼振动系统的结构物理参数；由频率模态信息识别非比例阻尼振动系统的结构物理参数。对每种提法分别研究了问题解的存在性，给出了数值算法，并对每种问题给出了阻尼振动模型算例。

最后，研究了振动杆结构探伤的特征值反问题。给出了利用未发生结构损伤状态和发生结构损伤状态的各一个特征对进行结构探伤的方法，并给出了数值例子。

关键词：结构动力学，特征值，振动反问题，弹簧-质点系统，离散梁，结构探伤

ABSTRACT

This dissertation studies the inverse eigenvalue problems in structural dynamics, including vibration inverse problems for the spring-mass system, the discrete beam, damped systems and the damage detection in rods. The main contribution is as follows.

First of all, the inverse eigenvalue problems of the spring-mass systems are studied. The simply connected spring-mass system of two freedoms and the modified system with a simple oscillator of mass or spring attached to one end of the system are considered. For simply connected spring-mass system of n freedoms, the necessary and sufficient conditions for the reconstruction of a physical realizable system from the known four and five eigenpairs are established. Also, the inverse eigenvalue problems of the hybrid connected spring-mass system are considered. The necessary and sufficient conditions for the solvability of the problems are obtained. Numerical methods and numerical experiments are given.

Secondly, an inverse vibration problem for the discrete beam is considered. Given the three frequencies and corresponding modes of the axial vibrating beam, the problem of constructing the structural physical parameters of the discrete model of the beam from the known data is considered. The problem is transferred into inverse eigenvalue problems for real symmetric pentadiagonal matrices. The necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem are obtained. Numerical methods and numerical experiments are presented.

Afterwards, the inverse quadratic eigenvalue problems in damped vibration system are studied. These problems include the construction of the stiffness matrix and damped matrix of the damped vibration systems from the full frequencies and corresponding modes, the construction of the stiffness matrix and damped matrix of damped vibration systems with proportional damping from the some frequencies and corresponding modes, the construction of the stiffness matrix and damped matrix of the proportional damped vibration systems from the two frequencies and corresponding modes, and the construction

of the stiffness matrix and damped matrix of the non-proportional damped vibration systems from the frequencies data. The solvability of the problems is established. The numerical methos and numerical experiments are given.

At last, an inverse eigenvalue procedure for damage detection in homogeneous vibration rods is studied. It is shown that a finite element model based on the geometric parameters of the rod can be reconstructed from two eigenpairs, respectively corresponding to the undamaged state and the damaged state. An inverse eigenvalue produre for damage detection of rods is established. The numerical methos and numerical experiments are given.

KEY WORDS : structural dynamics, eigenvalue, vibration inverse problem, spring-mass system, discrete beam, damage detection

图、表清单

图 2.1	n 自由度弹簧-质点系统.....	11
图 2.2	原系统.....	13
图 2.3	加刚性约束.....	13
图 2.4	加弹性约束.....	13
图 2.5	加质点摄动.....	13
图 2.6	多自由度无阻尼弹簧-质点系统.....	18
图 2.7	混合连接的弹簧-质点系统.....	32
图 4.1	单自由度阻尼弹簧-质点系统.....	63
图 4.2	欠阻尼状态-时间关系图.....	70
图 4.3	过阻尼状态-时间关系图.....	70
图 4.4	临界阻尼状态-时间关系图.....	71
图 4.5	多自由度阻尼弹簧-质点系统.....	71
图 4.6	二次特征值问题的特征值分布图.....	72
图 4.7	自由度 1 的位移时间关系图.....	72
图 4.8	自由度 2 的位移时间关系图.....	73
图 4.9	自由度 3 的位移时间关系图.....	73
图 4.10	自由度 4 的位移时间关系图.....	73
图 4.11	自由度 5 的位移时间关系图.....	73
图 4.12	二次特征值问题的特征值分布图.....	74
图 4.13	二次特征值问题的特征值分布图.....	74
图 4.14	n 自由度阻尼弹簧-质点系统.....	77
图 4.15	n 自由度阻尼弹簧-质点系统.....	81
图 5.1	结构探伤示意图.....	97
图 5.2	结构探伤示意图.....	98
图 5.3	结构探伤示意图.....	99
图 5.4	结构探伤示意图.....	99
图 5.5	结构探伤示意图.....	100
图 5.6	结构探伤示意图.....	101
表 2.1	识别的质量与刚度.....	23
表 2.2	识别的质量与刚度.....	23

承诺书

本人声明所呈交的博士学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得南京航空航天大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。

本人授权南京航空航天大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

作者签名：

日期：2006年6月20日

第一章 绪论

1.1 振动问题与振动反问题

1.1.1 振动问题

物体的运动状态随时间在极大值和极小值之间交替变化的过程称为振动。振动是自然界和工程上最常见的现象。振动现象对于大多数的工业机械、工程结构、飞行器、仪器仪表等都是有害的，它常常是造成机械和结构产生恶性破坏和失效的直接和主要原因；另一方面，振动也有有利的一面，例如振动筛选、振动传输、振动沉桩等都是利用振动的典型例子。

实际工程中的振动问题研究的对象是系统，它可以是一个部件、一台机器甚至一个完整的工程结构等。把外界对系统的作用或机器运动所产生的力称为激励或输入；把机器或结构在激励作用下产生的动态行为称为响应或输出。

振动分析的基本任务就是研究系统的激励、响应和系统三者之间的相互关系。从计算分析的观点，知道其中二者就可得第三者，从这个意义上讲，振动问题的提法按要求响应、系统和激励三者中的某一个可归纳为如下三类^[1,2]：

(1) 响应分析，即已知系统和激励，求响应。

这是在已知系统参数和外部激励的情况下求系统响应的问题，包括位移、速度、加速度和力的响应。这是工程中最常见的问题，主要任务是计算系统或结构等工作时的动力响应，检验系统的响应是否满足预定的安全等要求，为结构设计提供依据，也就是为计算系统或结构的强度、刚度允许的振动能量水平提供了根据。动力响应问题属于振动问题中的正问题，这是研究得最早最多的一类问题。

(2) 系统识别，即已知激励和响应，求系统。

这是在已知输入和输出的情况下求系统的参数，称为系统识别。这类问题的提出实际是源于上述响应分析问题，尽管已知激励和振动结构可求得响应，但许多情况下响应结果并不满足要求，需要修改结构。如果结构修改只凭经验，会带来很大的盲目性。不仅效果经常不满意，效率也很低，要反复多次才能达到基本满意的结果。有限元是进行结构分析的有力工具，然而有限元初试建模往往存在较大误差。鉴于此，人们开始探索根据激励和响应反推振动结构参数的规律和方法。其主要任务是确定系统的物理参数（如质量、刚度及阻尼系数等）和系统关于振动的固有特性（如固有频率、振型等）。以估计物理参数为任务的系统识别称为物理参数识别；以估计系统的振动固有特性为任务的系统识别称为模态参数识别。系统物理参数识别属于振动问题中的一类反问题。

(3) 环境预测, 即已知系统和响应, 求激励。

这是在已知系统的输入和系统参数的情况下确定系统的输入, 以判别系统的振动环境特性。如车、船、飞机的运行, 地震、风、波浪引起的建筑物振动问题, 在这些问题中, 已知振动结构并较容易测得振动引起的动力响应, 但激励却不容易确定。为了进一步研究在这些特定激励下原振动结构及新振动结构的动力响应, 需要确定这些激励。这样的问题通常称为环境预测或环境模拟。环境预测属于振动问题中的另一类反问题。

任何力学系统, 只要具有弹性和惯性, 都可能发生振动。振动系统分为两大类: 离散系统和连续系统。离散系统由集中参量元件组成。力学系统中的集中参量元件有三种: 质量、弹簧和阻尼器。它们都是理想化的力学模型。质量(包括转动惯量)是指具有惯性的力学模型。弹簧是不计本身质量只具有弹性的模型。弹性力和形变一次方成正比的弹簧称为线性弹簧。阻尼器模型不具有惯性也不具有弹性, 是耗能元件, 在运动中产生阻力。连续系统是由弹性元件组成的。弹性体可以看作由无数质点组成, 各质点间有弹性联系, 只要满足连续条件, 任何微小的相对位移都是可能的。因此, 一个弹性体有无数多个自由度。典型的弹性元件有杆、梁、轴、板、壳等。弹性体的惯性、弹性和阻尼是连续分布的, 故称为连续系统。连续系统具有连续分布的参量, 但是可以通过适当的方法化为离散模型。

振动系统按不同范畴可以给出多种分类。

按自由度划分, 振动系统分为有限自由度系统和无限自由度系统。前者对应离散系统, 后者对应连续系统。所谓一个系统的自由度是指完全描述该系统的一切部位在任何瞬时的位置所需要的独立坐标的数目。

按运动描述的微分方程形式划分, 振动系统分为线性振动和非线性振动。由线性微分方程描述的系统称为线性系统; 由非线性微分方程描述的系统称为非线性系统。

按激励的有无和性质划分, 振动还可以分为固有振动、自由振动、受迫振动、随机振动、自激振动和参数振动等。固有振动是无激励时系统的所有可能的运动集合, 它反映系统关于振动的固有属性。自由振动是激励消失后系统所作的振动; 受迫振动是系统在外界激励下所作的振动; 随机振动是系统在非确定性的随机激励下所作的振动, 物理参数具有随机性质的系统发生的振动也属于随机振动; 自激振动是系统受到其自身运动诱发出来的激励作用而产生和维持的振动, 一般来说, 这时系统包含补充能量的能源; 参数振动是激励因素以系统本身的参数随时间变化的形式出现的振动。

1.1.2 振动系统的特征值问题

(1) 广义特征值问题

n 自由度无阻尼线性振动系统的运动微分方程可表示为

$$M\ddot{u} + Ku = f(t) \quad (1.1)$$

其中 u 是位移向量, M 和 K 分别是系统的质量矩阵和刚度矩阵, 都是 n 阶正定矩阵, $f(t)$ 是激励向量。

此系统的自由振动微分方程为

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (1.2)$$

设其主振动为

$$u = v \sin(\omega t + \phi) \quad (1.3)$$

其中 v 为振幅向量, ω 为圆频率, ϕ 为初相位。将(1.3)代入自由振动微分方程(1.2), 得

$$Kv = \lambda Mv \quad (1.4)$$

其中 $\lambda = \omega^2$, (1.4)具有非零解 v 的条件是

$$\det(\lambda M - K) = 0 \quad (1.5)$$

(1.4)称为系统的特征方程, 由此可以确定方程的 n 个正实根 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, 称为系统的特征值, $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ 称为系统的固有频率, $v_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为对应于特征值的特征向量或称为系统的振型或模态。

(2) 标准特征值问题

因为 M 正定, 则 M 有 Cholesky 分解^[3]

$$M = LL^T \quad (1.6)$$

其中 L 是下三角矩阵。引入向量 x

$$x = L^T v, \quad v = (L^T)^{-1} x \quad (1.7)$$

代入(1.4), 得

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (1.8)$$

其中 $A = L^{-1}K(L^T)^{-1}$, 式(1.8)称为标准特征值问题。

(3) 二次特征值问题

考虑多自由度阻尼自由振动系统, 其运动方程为如下二阶常系数微分方程组

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad (1.9)$$

其中 M, C, K 分别是 n 阶的质量、阻尼和刚度矩阵, $q(t)$ 是 n 维可微向量函数。用分离

变量法, 设 $q(t) = xe^{\lambda t}$, 其中 $x \in C^n$ 是与时间 t 无关的常向量, $\lambda \in C$ 为待定参数。将 $q(t)$ 代入上述齐次方程, 得确定参数 λ, x 的特征方程

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0. \quad (1.10)$$

由此可知, $q(t) = xe^{\lambda t}$ 是微分方程(1.9)的解当且仅当 λ, x 是(1.10)的解。因此, 微分方程(1.9)的解可以用式(1.10)的解来表示。式(1.10)称为二次特征值问题。

在结构动力分析中, 质量矩阵 M 和刚度矩阵 K 往往是正定的。

1.1.3 振动反问题

振动理论的一个基本问题是确定振动物体的固有频率(或称为特征值)以及振型(或称为模态或特征向量)。这是振动中的正问题, 这类问题归结为矩阵特征值问题。此类问题无论从理论还是数值算法方面, 已经有比较成熟的结果。相反地, 考虑构造某种给定模型, 例如弹簧-质点系统、杆、梁等, 使之具有给定的频率(特征值)和/或模态(特征向量), 即具有给定的谱数据, 这就是振动中的反问题。对这类问题, 人们需要研究如下问题:

- 1) 为了保证存在一个真实的系统, 即一个具有正质量、正长度、正的截面面积等的系统, 数据必须满足什么条件?
- 2) 如果系统存在, 为了保证此系统惟一, 数据需要满足什么条件?
- 3) 这个惟一的系统如何构造?

振动反问题按模型、自由度、已知数据的不同又分为如下问题:

按弹性体模型的不同, 可将振动反问题分为弹簧-质点系统的振动反问题、杆的振动反问题、梁的振动反问题、板和壳的振动反问题等。

按自由度不同, 可将振动反问题分为离散系统(有限自由度)振动反问题和连续系统(无限自由度)振动反问题。

按已知数据的不同, 可将振动反问题分为: 频谱反问题(基于给定的频谱数据的反问题); 频率模态反问题(基于给定部分的频谱和相应模态数据的反问题); 混合反问题(基于给定部分的频谱和相应模态数据、甚至子结构或其它辅助信息的反问题)。

1.2 结构动力学中的特征值反问题的研究现状

结构动力学中的特征值反问题研究由频谱和/或模态数据确定结构的物理和几何参数或者设计结构使其具有要求的频谱和/或模态。该问题在航空、航天、机械工程

以及土木工程等诸多工程领域具有重要的应用,诸如在结构动力分析与设计、振动设计与控制、动力模型修正、系统物理参数识别等。由于实际工程问题不同或者考虑问题的角度不同,特征值反问题有各种各样的提法。对这些提法的解的适定性,理论和数值算法的研究是特征值反问题的主要研究内容。由于反问题所具有的内在不稳定性,使得无论是理论研究还是数值方法的设计都比较困难,且富有挑战性和吸引力。上世纪 60 年代末以来,已经和正在吸引着大批的优秀数学家,力学家和工程技术人员的密切关注和对这个领域中的各种问题进行广泛的研究^[3-12,86-88,91-104]。

以下简要概述弹簧-质点系统、梁振动反问题以及阻尼系统振动反问题的研究现状。

1.2.1 弹簧-质点系统的振动反问题

弹簧-质点系统的振动反问题是最基本的振动反问题。杆和弦等的振动反问题采用集中质量法或有限差分法都可以离散为弹簧-质点系统的振动反问题。弹簧-质点振动反问题归结为 Jacobi 矩阵特征值反问题。上世纪 60 年代, Hochstadt^[13,14] 最早研究了一类基于谱数据的 Jacobi 矩阵特征值反问题。

设 J 是 n 阶 Jacobi 矩阵, J_{n-1} 是 J 的 $n-1$ 阶顺序主子矩阵, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{\mu_i\}_{i=1}^{n-1}$ 是给定的实数,且满足如下分隔关系

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots < \mu_{n-1} < \lambda_n$$

Hochstadt^[14]和 Hald^[15]证明了存在惟一的 n 阶 Jacobi 矩阵,使得 J 具有特征值 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, 并且 J_{n-1} 具有特征值 $\{\mu_i\}_{i=1}^{n-1}$ 。

De Boor 和 Golub^[16], Boley 和 Golub^[8], Parlett^[17], Gragg 和 Harrod^[18], 沈启钧^[19], 戴华^[20]等给出了求解该问题的一些数值方法。应用 Jacobi 矩阵特征值反问题的理论和方法可解决由频谱数据构造弹簧-质点系统的问题。

蒋尔雄^[21]、Gladwell 和 Gbadeyan^[22]、Eganâ 和 Sotô^[23]给出了固定-自由和固定-固定边界条件下的两组谱数据构造弹簧-质点系统的数值方法; Ram^[24]提出了由弹簧-质点系统和在该系统末端附加质量和弹簧所得修改系统的固有频率确定弹簧-质点系统物理参数的反问题; Gladwell 和 Willms^[25]、Nylen 和 Uhlig^[26,27]给出由弹簧-质点系统的固有频率和固定该系统的一个内部质点所得两个子系统的固有频

率构造弹簧 - 质点系统；王其申和王大钧^[28]提出了由弹簧 - 质点系统的前 $i(i=1, \dots, n)$ 个质点组成截断系统的最小和最大固有频率构造固定 - 自由弹簧 - 质点系统的振动反问题。Ram 和 Caldwell 等^[29-31]考虑了由给定的频谱数据确定重连接弹簧-质点系统的物理参数。

鉴于获得弹簧-质点系统的全部谱数据并非易事，而工程问题可以测得系统低阶频率对应的模态，因此人们考虑弹簧-质点系统的频率模态型反问题，即由部分低阶频率和相应的模态构造弹簧-质点系统的物理参数。Porter^[32]、Gladwell^[33]、Sivan 和 Ram^[34]考虑了由模态数据构造弹簧-质点系统的问题。Gladwell 等^[35,36]研究了由特征数据构造离散杆模型的振动反问题。弹簧-质点系统的模态反问题可以转化为 Jacobi 矩阵的特征值反问题。戴华等人^[37-45]从数学角度研究了由部分特征值和相应特征向量构造 Jacobi 矩阵的问题。王其申和王大钧^[28]给出了由弹簧-质点系统对应于最小固有频率的模态和该系统所有截断系统最小固有频率构造自由-固定或固定-固定的弹簧-质点系统。

1.2.2 离散梁的振动反问题

Barcilon^[46-52]、Gladwell 等^[53-55]研究了梁的振动反问题。横向振动梁的离散模型振动反问题可以转化为对称带状矩阵特征值反问题。Boley 和 Golub^[56]、Biegler-Konig^[57]、殷庆祥^[58]、戴华^[59]等人研究了由 r 组特征值构造带宽 $2r+1$ 实对称带状矩阵的特征值反问题，给出了求解这类问题的块 Lanczos 方法、Householder 方法、拟 Lanczos 方法、广义 Lanczos 方法和 Givens 方法。孙合明等^[60]给出了由三组特征值构造对称五对角矩阵的一个数值方法。

Barcilon^[51]、Gladwell^[53]建立了横向振动梁的弹簧-质点-刚杆离散模型。Barcilon^[50,52]研究了由给定梁离散模型对应三种不同边界条件的固有频率确定梁离散模型物理参数的问题，证明了由对应于三种不同边界条件的频谱数据可构造梁的离散模型，但其解是不唯一。Gladwell^[53,54]给出了由对应于三种不同边界条件的频谱数据构造梁的真实离散模型时频谱数据需满足的条件，提出了利用块 Lanczos 方法给出了构造梁离散模型物理参数的数值方法。Gladwell 等^[55]给出了由频谱数据构造 Euler-Bernoulli 的过程和数值例子。何北昌等^[61]利用变步长的二阶差分格式建立了 Euler 梁的离散

模型，并证明了该模型与一个弹簧-质点-刚杆系统等价，给出了由对应于三种不同边界条件的频谱数据构造离散梁的刚度参数、质量参数和刚杆长度，进而确定离散梁的截面参数和线密度参数。王其中等^[62]研究了由左端铰支和右端反共振、铰支、固支这三种边界条件下的频谱数据构造简支梁的有限差分离散模型，给出了一个数值方法。

实际问题中要获得梁在不同边界条件下的全部频率是困难的，甚至是不可能的。通常由振动试验可得到梁的低阶频率和相应的振型。Gladwell 等^[63]给出了一个向量是悬臂梁离散模型模态的充分必要条件，并给出了由一个模态构造悬臂梁离散模型的数值方法。Ram^[64]考虑了由频率和相应模态构造非均匀悬臂梁的离散模型，说明了如果给定步长，悬臂梁的离散模型可以由两个特征向量、一个特征值和梁的总质量构造；如果步长未知，悬臂梁的离散模型可以由三个特征向量、一个特征值、梁的总质量和总长度构造。Ahmadian 和 Gladwell^[65]、Ram 和 Elhay^[66]研究了利用几个频率及相应的模态构造悬臂梁有限元离散模型的问题。Lai 和 Ananthasuresh^[67]考虑在梁的横截面积非均匀，而其余的参数如弹性模量、密度及二次惯性矩均为常数的情况下，由梁的一个特征值及相应的模态构造梁离散模型的横截面积。何北昌等^[68]考虑了由一个模态确定悬臂梁离散模型的截面参数。王大钧等^[69]研究了由两个频率及相应的模态构造有限差分悬臂梁的截面抗弯刚度和线密度的问题，给出了问题解存在唯一的条件以及求解问题的一个数值方法。

横向振动梁的弹簧-质点-刚杆离散模型由一个对称五对角矩阵描述，周小庄等^[70]讨论了由两个特征对确定一个特殊对称五对角矩阵的问题。

1.2.3 阻尼系统振动反问题

由于阻尼是相对运动表面的摩擦力、液体与气体的介质阻力、电磁力以及材料变形时的内阻力等造成的，因此实际遇到的振动问题大多数是阻尼振动系统。阻尼是描述结构动力学性能的基本参数之一，对结构动力学分析结果的可靠性和精度有很大的影响，因此一般不能忽略阻尼的影响。但是因为影响阻尼的因素很复杂，所以对阻尼的描述是一个困难的问题。

阻尼系统的振动与分析归结为二次特征值问题。Lancaster^[71]研究了二次特征值

问题的性质。Tisseur^[72]对二次特征值问题的理论、数值方法和应用作了综述。

关于阻尼振动系统的振动反问题,最近几年,国际上不少力学家和数学家越来越关注并开始研究这个问题^[73-85]。对 n 阶首一二次矩阵束, Ram 和 Elhay^[73]研究了由给定 $2n$ 个特征值和去掉 n 阶首一二次矩阵束的最后一行和最后一列所得 $n-1$ 阶首一二次矩阵束的 $2n-2$ 个特征值构造 n 阶首一对称三对角二次矩阵束的问题,讨论了问题解的适定性理论,给出了求解问题的数值方法,并讨论结果对阻尼弹簧-质点系统振动反问题的应用。Nylen^[74]研究了由阻尼系统的特征值和无阻尼系统的构造阻尼系统的质量矩阵 M ,刚度矩阵 K 和阻尼矩阵 C 的问题,讨论了问题解存在的条件,给出了构造解的方法。Starek 和 Inman^[75]研究了在过阻尼情况下如何由特征值和相应的特征向量构造质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵的问题。Gladwell 等^[76,77]研究了由两组复谱数据构造阻尼弹簧-质点系统振动反问题,给出了问题有解的条件以及构造阻尼弹簧-质点系统物理参数的方法。Friswell 等^[78,79]基于优化思想给出了一种修正刚度矩阵和阻尼矩阵的方法。Halevi 等^[80]讨论了复模态和阻尼矩阵的模型修正的一种方法。Park^[81]研究了基于频率响应函数的结构修正方法,给出了存在惟一解的条件,并检验了可行性。Chu 等^[82]研究了基于部分特征对重构二次矩阵束的问题,给出了问题的可解性理论。Agranovich 等^[83]研究了由两个首一的复系数多项式构造二次 Jacobi 矩阵束的问题,给出了解存在的条件。Ram^[84]考虑了保持某些极点约束下的振动系统的极点配置问题,讨论了问题的可解性。Lancaster^[85]研究了由特征值和相应特征向量构造阻尼振动系统的反问题,给出了由全部特征对构造阻尼系统的具有正定性的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵的理论和方法。

但是,目前在很多工程领域,特别是在结构振动的分析与设计中,特征值反问题在理论上、解法上仍处在具体问题具体处理的状态,需要建立相对比较完整的系统。有的可解性理论的限制条件超出了工程上的可实现性,数值方法也不完善,有效性不能令人满意。而且随着特征值反问题的不断扩大的新领域的广泛应用,已有结论和研究水平远不能有效和广泛地解决实际工程问题,需要给出更多新的合理提法,并需要研究提法的可解性理论,需要寻求更加有效的数值方法。因此,矩阵特征值反问题研究任重而道远。

目前在结构动力学领域,对于结构离散化后形成的结构矩阵(例如 Jacobi、实对称带状矩阵等)和矩阵束的特征值反问题,特别是阻尼振动系统中的二次特征值反问题,如何给出的合理提法、完善解的适定性理论以及有效的数值算法是解决工程实际问题的急迫需要解决的课题。

1.3 本文的主要工作和论文的结构安排

本文从数学和力学相结合的角度，研究弹簧-质点系统、离散梁系统和阻尼振动系统的振动反问题等，提出结构动力学中的一些特征值反问题，研究问题解的适定性（包括解的存在性和唯一性），设计求解问题的算法，并结合实际模型，说明其在结构动力学中的应用。

第二章研究了弹簧-质点系统的振动反问题。对二自由度简单连接弹簧-质点系统分别通过加刚性约束、弹性约束和质量摄动得到修改系统，研究了利用原系统和修改系统的两组特征值（频率）和修改量识别系统的物理参数问题，给出了解的表达式。对于多自由度简单连接弹簧-质点系统，研究了利用系统全部频率模态构造系统的振动反问题；研究了基于增减容修改系统的频率反问题，即利用原系统和增/减容修改系统的特征值（频率）识别系统的物理参数问题，给出了算法和算例。另外，提出了利用多自由度简单连接弹簧-质点系统的四个和五个特征对（频率和模态）识别系统物理参数的振动反问题，分别研究了解的存在性，给出了解的表达式、相应算法和算例。对于一类混合连接弹簧-质点系统，提出了利用三个特征对（频率和模态）及部分系统物理参数识别系统其它物理参数的振动反问题，研究了解的存在性，给出了解的表达式、相应算法和模型算例。

第三章讨论离散梁系统的振动反问题。对于离散梁系统，利用集中质量法或有限差分法得到横向振动梁的弹簧-质点-刚杆模型，质量矩阵为对角矩阵而刚度矩阵为对称五对角矩阵。提出了基于三个特征对的频率模态反问题，由梁的三个特征对及总质量构造梁的物理参数，研究了解的存在性，给出了解存在唯一的充要条件和解的表达式、相应算法和算例。

第四章研究了阻尼振动系统中的二次特征值反问题。研究了阻尼弹簧-质点系统的物理参数识别，包括：由全部频率信息模态识别阻尼振动系统的结构物理参数；由部分频率模态信息识别比例阻尼振动系统的结构物理参数；由两对频率模态信息识别比例阻尼振动系统的结构物理参数；由频率模态信息识别非比例阻尼振动系统的结构物理参数。对每种提法分别研究了问题解的存在性理论，给出了数值算法，并对每种问题给出了具体的阻尼振动模型例子，说明了在阻尼结构动力系统中的实用价值。

第五章研究基于特征值反问题的振动杆结构探伤问题。给出了利用振动杆的未发

生结构损伤状态和发生结构损伤状态的各一个特征对进行结构探伤的方法 ,并给出了三个模型例子 ,说明了理论的正确性和方法的实用性和有效性。

第六章总结全文的主要工作 ,指出有待进一步研究的问题。

第二章 弹簧-质点系统的振动反问题

弹簧-质点系统是基本的动力学模型。杆的纵向振动、弦的横向振动以及轴盘的扭转振动用集中质量法或有限差分法离散均可转化为弹簧-质点系统。弹簧-质点系统的振动反问题研究由频率（特征值）和/或模态（特征向量）数据确定系统的物理参数。

本章第一节讨论弹簧-质点系统的力学模型，给出该模型的质量矩阵和刚度矩阵。第二节讨论简单连接弹簧-质点系统，首先对二自由度弹簧-质点系统，分别在原系统附加质量扰动、弹性约束和刚度约束得到修改系统，由原系统和修改系统的两组特征值（频率）构造系统的物理参数，给出了解的表达式。其次，对于多自由度简单连接弹簧-质点系统，研究了利用系统全部频率模态的振动反问题；研究了基于增减容修改系统的频率反问题，即利用原系统和增/减容修改系统的特征值（频率）识别系统的物理参数问题，给出了算法和算例。最后，提出了由多自由度简单弹簧-质点系统的四个和五个对特征对（频率和模态）构造系统的问题，研究了解的存在性，给出了解的表达式、相应算法和模型算例。第三节对于一类混合连接弹簧-质点系统，提出了利用三个特征对（频率和模态）以及部分系统物理参数识别系统其它物理参数的振动反问题，研究了解的存在性。第四节给出本章小结。

2.1 弹簧-质点系统模型

考虑 n 自由度弹簧—质点系统振动模型

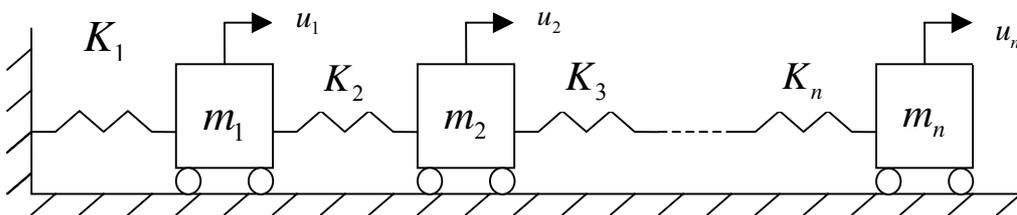


图 2.1 n 自由度弹簧—质点系统

由 n 个刚度为 $\{k_i\}_1^n$ 的弹簧连接 n 个质量为 $\{m_i\}_1^n$ 的质点构成的振动系统放置在光滑水平面上，该系统称为简单连接弹簧-质点系统，简称为弹簧-质点系统。

此系统的运动微分方程组为

$$M\ddot{U} + KU = 0$$

其中 $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ 是质量矩阵, $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ 是质点位置向量,

$$K = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & & & \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & (k_{n-1} + k_n) & -k_n \\ & & & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

是刚度矩阵。

二阶常系数微分方程组解的形式为 $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sin(\omega t + \phi)$, 其中常数 x_i , 频率

ω 和相角 ϕ 待定。代入微分方程, 得弹簧—质点系统的固有振动 (特征) 方程为

$$Kx = \omega^2 Mx$$

其中 ω 为系统的固有频率, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 为系统的固有振动型态 (简称固有振型)。

令 $\lambda = \omega^2$, $M^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_n})$, $X = M^{\frac{1}{2}}x$, 则固有振动方程化为

$$AX = \lambda X$$

其中

$$A = M^{-\frac{1}{2}}KM^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} & & & \\ -\frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} & & & & \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ & & & \frac{k_{n-1} + k_n}{m_{n-1}} & -\frac{k_n}{\sqrt{m_{n-1} m_n}} \\ & & & -\frac{k_n}{\sqrt{m_{n-1} m_n}} & \frac{k_n}{m_n} \end{bmatrix}$$

是 Jacobi 矩阵。

若已知弹簧 - 质点系统的物理参数 $m_i, k_i (i=1, \dots, n)$, 求系统的固有频率和固有振型就是矩阵特征值问题。

反之, 若已知这个振动系统的全部固有频率, 又知道这个系统的最后一段弹簧和最后一个质点去掉后所得振动系统的全部固有频率, 要求系统的物理参数 $m_i, k_i (i=1, \dots, n)$ 就是 Jacobi 矩阵特征值反问题。

2.2 简单连接弹簧-质点系统的振动反问题

2.2.1 两自由度系统结构物理参数识别

本节以两自由度弹簧 - 质点系统为例, 讨论频率模态反问题的理论和方法, 即矩阵特征值反问题的理论和算法。考察如下系统

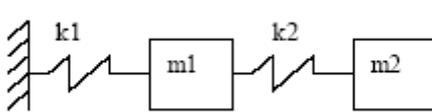


图 2.2 原系统

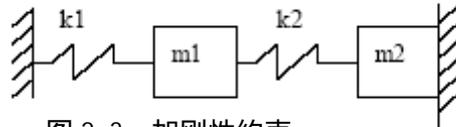


图 2.3 加刚性约束

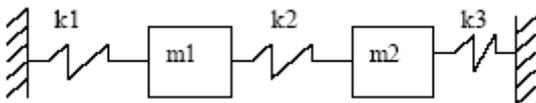


图 2.4 加弹性约束

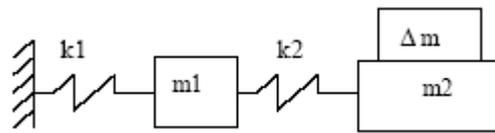


图 2.5 加质点摄动

2.2.1.1 由频率 (特征值) 识别结构物理参数

本节讨论由特征值信息识别结构物理参数。

假设系统物理模型如图 2.2 所示, 其质量和刚度矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

其广义特征值问题为

$$\lambda Mx = Kx \quad (2.1)$$

式(2.1)的特征方程为

$$|K - \lambda M| = m_1 m_2 \lambda^2 - [m_2(k_1 + k_2) + m_1 k_2] \lambda + k_1 k_2 = 0 \quad (2.2)$$

其根 λ_1, λ_2 满足如下关系

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \quad (2.3)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \quad (2.4)$$

若已知 λ_1, λ_2 ，由以上二式尚不能求出 m_1, m_2, k_1, k_2 四个参数，需补充条件。

这里提出三种处理方式：加刚性约束，如将 m_2 固定（如图 2.3 所示），建立新系统特征值与物理参数的关系作为补充方程；加弹性约束（如图 2.4 所示），处理方法同。对质点加摄动，建立新系统特征值与物理参数的关系作为补充方程。下面分三种情况讨论。

(1) 加刚性约束识别结构物理参数

易得加刚性约束后系统的特征值为

$$\lambda^0 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} \quad (2.5)$$

由式 (2.3) 和 (2.4)，知

$$0 < \lambda^0 < \lambda_1 + \lambda_2$$

式 (2.5) 即补充方程，与式 (2.3)、式 (2.4) 联立，可求得

$$\frac{k_2}{m_2} = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda^0 \quad (2.6-1)$$

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda^0} \quad (2.6-2)$$

$$\frac{k_2}{m_1} = \frac{(\lambda^0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda^0)}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda^0} \quad (2.6-3)$$

上式惟一确定了 m_1, m_2, k_1, k_2 之间的比例关系，假设其中任一参数已知（实测或计算得到），则可由式 (2.6) 求出其余参数。

此模型归纳为矩阵特征值反问题:已知原系统和加刚性约束所得修正系统的共三个特征值(频率)和任一物理参数,确定原系统的物理参数。

(2) 加弹性约束识别结构物理参数

加弹性约束所得修正系统物理模型(如图 2.4 所示),其质量和刚度阵为

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

由其广义特征值问题的特征方程,得到原系统(图 2.2)的特征值 λ_1, λ_2 有如下关系

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \quad (2.7)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \quad (2.8)$$

同理,得到修正系统(图 2.4 所示)的特征值 $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ 有如下关系

$$\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \quad (2.9)$$

$$\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 = \frac{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{m_1 m_2} \quad (2.10)$$

为简洁起见,不妨记 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b, \bar{\lambda}_1 = c, \bar{\lambda}_2 = d$ 和 $k_3 = k$ 。

由(2.8) - (2.10),可得

$$m_1 = \frac{kP^2}{(ad^2 + ac^2 + a^3 + bcd + 3adc + a^2b - 2a^2d - 2a^2c - c^2d - cd^2 - abc - abd)Q} \quad (2.11-1)$$

$$m_2 = \frac{k}{c + d - a - b} \quad (2.11-2)$$

$$k_1 = \frac{kabP}{(cd + a^2 - ac - ad)Q} \quad (2.11-3)$$

$$k_2 = \frac{kP}{2ac + 2ad + 2bc + 2bd - a^2 - 2ab - b^2 - c^2 - 2cd - d^2} \quad (2.11-4)$$

其中 $P = a^2 + b^2 + ab + cd - ac - ad - bd - bc$, $Q = b^2 + cd - bc - bd$ 。

若已知 λ_1 、 λ_2 和 $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, 并且 λ_1 、 λ_2 和 $\bar{\lambda}_1$ 、 $\bar{\lambda}_2$ 满足如下分隔关系

$$\lambda_1 < \bar{\lambda}_1 < \lambda_2 < \bar{\lambda}_2 ,$$

则 (2.11) 式中分母不为 0 , 于是由 (2.11) 式可惟一确定系统的物理参数。

此模型归结为矩阵特征值反问题：已知原系统和加弹性约束所得修正系统的两组特征值（频率）和所加弹性量，确定系统的物理参数。

(3) 通过对质点摄动识别结构物理参数

设原系统的特征值 λ_1 , λ_2 , 对质点 m_2 加摄动得修正系统物理模型（如图 2.5 所示），其质量和刚度阵为

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 + \Delta m \end{bmatrix} , K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

修正系统的特征值 $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ 有如下关系

$$\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2 + \Delta m} \quad (2.12)$$

$$\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 = \frac{k_1 k_2}{m_1 (m_2 + \Delta m)} \quad (2.13)$$

为简洁起见，不妨记 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b$, $\bar{\lambda}_1 = c$, $\bar{\lambda}_2 = d$ 和 $\Delta m = m > 0$ 。

与式 (2.3)(2.4) 联立，得

$$m_2 = \frac{mcd}{ab - cd} \quad (2.14-1)$$

$$k_2 = \frac{mabcd(a + b - c - d)}{(ab - cd)^2} \quad (2.14-2)$$

$$m_1 = \frac{m_2 k_2^2}{m_2 k_2 (a + b) - k_2^2 - ab m_2^2} \quad (2.14-3)$$

$$k_1 = \frac{m_1 m_2 ab}{k_2} \quad (2.14-4)$$

若已知 λ_1 、 λ_2 , $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ 和摄动质量 Δm , 并且 λ_1 、 λ_2 和 $\bar{\lambda}_1$ 、 $\bar{\lambda}_2$ 满足如下分隔关系

$$\bar{\lambda}_1 < \lambda_1 < \bar{\lambda}_2 < \lambda_2 ,$$

则 (2.14) 式中分母不为 0, 于是由 (2.14) 式可惟一确定系统的物理参数。

此模型归结为矩阵特征值反问题: 已知原系统和质点摄动所得修正系统的两组特征值 (频率) 和摄动质量, 确定系统的物理参数。

2.2.1.2 由频率和模态 (特征对) 识别结构物理参数

本节讨论由特征对信息识别结构物理参数。由式 (2.1) 可直接建立特征值、特征向量与物理参数的关系, 可得到与式 (2.4) 类似的结果。

将广义特征值问题 (2.1) 写成标准特征值问题

$$Dx = \lambda x \quad (2.15)$$

其中

$$D = M^{-1}K \quad (2.16)$$

对于二自由度问题, 即得

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & -b \\ -c & a_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$a_1 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, b = \frac{k_2}{m_1}, c = \frac{k_2}{m_2}, a_2 = \frac{k_2}{m_2} \quad (2.17)$$

设已知特征对 $(\lambda_1, \varphi_1), (\lambda_2, \varphi_2)$, 它们满足式 (2.15), 写成矩阵形式

$$D\varphi = \varphi\Lambda$$

式中

$$\varphi = [\varphi_1 \quad \varphi_2], \Lambda = \text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2]$$

如果 φ_1, φ_2 线性无关, 则

$$D = \varphi\Lambda\varphi^{-1} \quad (2.18)$$

再由式 (2.16) 可确定 $\frac{k_1}{m_1}, \frac{k_2}{m_1}, \frac{k_2}{m_2}$ 。与式 (2.6) 相似, 仍需已知 m_1, m_2, k_1, k_2 之

一再确定其余三个。

2.2.2 多自由度系统结构物理参数识别

对多自由度振动系统，其特征值问题可表示为

$$Kx = \lambda Mx$$

下面从两个不同角度来讨论多自由度弹簧-质点系统的特征值反问题。

(1) 部分频率和模态的反问题

标准特征值问题仍可写成式(2.15)形式，在已知部分频率和模态的情况下，对于特殊动力学模型，例如简单连接弹簧-质点模型、均匀杆离散模型等，若满足一定条件^[30,31,33,35,36,37,38]，则可求得 $D = M^{-1}K$ 。假设已知 M 或 K ，则求另一个矩阵是很方便的。但是，在一般情况下，由 D 再求 M, K 是困难的。

考察如下多自由度弹簧-质点系统。



图 2.6 多自由度无阻尼弹簧-质点系统

该振动系统的质量阵和刚度阵为

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_n & \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & \ddots & \\ & & & \ddots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

M 为对角阵， K 为对称三对角阵，则

$$D = M^{-1}K = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{-k_2}{m_1} & & & \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2 + k_3}{m_2} & \frac{-k_3}{m_2} & & \\ & \frac{-k_3}{m_3} & \frac{k_3 + k_4}{m_3} & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{k_{n-1} + k_n}{m_{n-1}} & \frac{-k_n}{m_{n-1}} \\ & & & \frac{-k_n}{m_n} & \frac{k_n}{m_n} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & & & & \\ -c_1 & a_2 & -b_2 & & & \\ & -c_2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{n-1} & -b_{n-1} & \\ & & & -c_{n-1} & a_n & \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

其中

$$a_i = \frac{k_i + k_{i+1}}{m_i}; b_i = \frac{k_{i+1}}{m_i}; c_i = \frac{k_{i+1}}{m_{i+1}}; k_{n+1} = 0, b_n = c_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.21)$$

若已知串联弹簧-质点模型的全部频率和模态，即已知模态矩阵和频率矩阵

$$\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_n], \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

由 (2.19) 可得到 D ，再利用递推关系式 (2.21) 可求得物理参数，具体步骤如下：

算法 2.1

(1) 若 m_1 已知，由 a_1, b_1 可得到

$$k_2 = m_1 b_1, k_1 = m_1 a_1 - k_2 = m_1 (a_1 - b_1)$$

(2) 由 c_1, b_2 ，可得 m_2, k_3

$$m_2 = \frac{k_2}{c_1} = m_1 \frac{b_1}{c_1}, \quad k_3 = m_2 b_2 = m_1 \frac{b_1}{c_1} b_2$$

(3) 由 c_{i-1}, b_i ，可得 m_i, k_{i+1}

$$m_i = \frac{k_i}{c_{i-1}} = m_1 \prod_{j=1}^{i-1} \frac{b_j}{c_j}, \quad k_{i+1} = m_i b_i = m_1 b_i \prod_{j=1}^{i-1} \frac{b_j}{c_j} \quad (i = 3, 4, \dots, n-2)$$

(4) 由 c_{n-2}, b_{n-1} ，可得 m_{n-1}, k_n

$$m_{n-1} = \frac{k_{n-1}}{c_{n-2}} = m_1 \prod_{j=1}^{n-2} \frac{b_j}{c_j}, \quad k_n = m_{n-1} b_{n-1} = m_1 b_{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{b_j}{c_j}$$

(5) 由 a_n ，可得 m_n

$$m_n = \frac{k_n}{a_n} = m_1 \frac{b_{n-1}}{a_n} \prod_{j=1}^{n-2} \frac{b_j}{c_j}$$

值得注意的是,式(2.19)的三对角矩阵 D 可经过相似变换约化为对称三对角矩阵 J (Jacobi 矩阵), 具体步骤如下:

选取可逆矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & p_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_{n-1} \end{bmatrix}$$

其中

$$p_i = \sqrt{\frac{c_1 c_2 \cdots c_i}{b_1 b_2 \cdots b_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

对(2.15)式作相似变换 $x = Py$, 得

$$Jy = \lambda y$$

其中 $J = P^{-1}DP$ 为对称三对角矩阵, 并与 D 相似从而具有相同的特征值。

(2) 增容频率反问题

本节提出基于增容的振动系统频率反问题。增容系统就是在最后一个质点上再串联上一个弹簧质点振子得到的修改模型。

多自由度弹簧-质点系统的固有振动方程, 即广义特征值问题为

$$Kx = \lambda Mx$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

可以相似约化为标特征值问题

$$Ay = \lambda y \quad (2.22)$$

其中

2.2.3 算例

例 2.1 考察如图 2.2-2.5 所示的两自由度弹簧 - 质点系统

(a) 刚性约束进行参数识别

假设已知 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda^0 = 2$ 以及 $m_1 = 2$, 由式 (2.21) 得

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

即得到原系统的其它三个结构物理参数 $m_2 = 0.5$, $k_1 = 3$, $k_2 = 1$ 。

(b) 弹性约束进行参数识别

假设已知 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 9$, $\bar{\lambda}_1 = 3$, $\bar{\lambda}_2 = 12$ 以及 $k_3 = 4$, 由 (2.11) 得

$$M = \begin{bmatrix} \frac{169}{45} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 16.9 & -6.5 \\ -6.5 & 6.5 \end{bmatrix}$$

则得到系统的结构物理参数 $m_1 = 3.7556$, $m_2 = 1$, $k_1 = 10.4$, $k_2 = 6.5$ 。

(c) 质点摄动进行参数识别

假设已知 $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 100$, $\bar{\lambda}_1 = 5$, $\bar{\lambda}_2 = 90$ 以及 $\Delta m = 4$, 由式 (2.14) 得

$$M = \begin{bmatrix} \frac{405}{209} & 0 \\ 0 & \frac{36}{11} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} \frac{10800}{121} + \frac{1350}{19} & -\frac{1350}{19} \\ -\frac{1350}{19} & \frac{1350}{19} \end{bmatrix}$$

则得系统的结构物理参数 $m_1 = 1.9378$, $m_2 = 3.2727$, $k_1 = 71.0526$, $k_2 = 89.2562$ 。

例 2.2 考察如图 2.6 所示的五自由度弹簧 - 质点系统为例

(1) 由两对频率和模态 (两个特征对)

已知系统的频率 432.7400 , 242.2059 和模态矩阵 φ 以及 $m_1 = 4$ 。

$$\varphi = \begin{bmatrix} -0.1638 & -0.6925 \\ 0.5224 & 0.3897 \\ -0.8232 & 0.5082 \\ 0.1428 & -0.3106 \\ -0.0260 & 0.1179 \end{bmatrix}, \text{ 由[3]中算法, 可识别出系统的质量和刚度:}$$

m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
4	3	2	5	6
k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
500	300	350	250	400

表 2.1 识别的质量与刚度

(2) 扩容问题

如果已知原四自由度系统的全部频率 432.1466, 49.2082, 126.6236, 238.6884 以及在最后增加一个弹簧质点振子的修改的五自由度系统的全部频率 432.7400, 242.2059, 69.4411, 162.7922, 6.1541, 经验证满足分隔条件 (2.24) 式, 为方便起见, 假设给定质量 4, 3, 2, 5, 6。于是, 由算法 2.2 识别出原系统的质量和刚度。

质量	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
	4	3	2	5	6
刚度	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
识别值	500.0031	300.0026	350.0035	249.9941	399.9988
精确值	500	300	350	250	400
相对误差 (%)	0.00062	0.00087	0.001	0.00236	0.0003

表 2.2 识别的质量与刚度

可见, 具有很高的识别精度。

2.2.4 基于部分特征对 (频率模态) 的弹簧-质点系统振动反问题

本节讨论由部分频率模态数据构造弹簧 - 质点系统的振动反问题。从数学上讲, 提出由部分特征对信息的 Jacobi 矩阵特征反问题的两个提法, 并研究解的存在性, 设计数值算法。

问题 2.1 给定四个互异实数 λ, μ, ξ, η 和四个 $n(n \geq 4)$ 维非零实向量 x, y, m, r , 要求构造一个 n 阶 Jacobi 矩阵 J , 使得 (λ, x) , (μ, y) , (ξ, m) 和 (η, r) 是 J 的特征对。

问题 2.2 给定五个互异实数 $\lambda, \mu, \nu, \xi, \eta$ 和五个 $n(n \geq 5)$ 维非零实向量 x, y, z, m, r , 要求构造一个 n 阶 Jacobi 矩阵 J , 使得 (λ, x) , (μ, y) , (ν, z) , (ξ, m) 和 (η, r) 是 J 的特征对。

本节主要研究了这两个问题解的适定性 , 给出了解存在的充要条件 , 并设计了相应的算法和给出了数值例子。

2.2.4.1 问题 2.1 的可解性

本节给出问题 2.1 和 2.2 解存在的条件和解的表达式。

引理 2.2^[3] : 设 λ, μ 为两个实数 , $\lambda > \mu$, x, y 为两个 n 维非零实向量 , 则存在唯一的 Jacobi 阵 J , 使 (λ, x) , (μ, y) 为 J 的特征对的充要条件是 :

- (i) $d_n = 0$;
- (ii) $d_k / D_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) ;

其中

$$\begin{cases} d_k = \sum_{i=1}^k x_i y_i, (k = 1, 2, \dots, n); \\ D_k = \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} \neq 0, (k = 1, 2, \dots, n-1); \end{cases} \quad (2.25)$$

并且矩阵 J 的元素表达式为

$$\begin{cases} b_k = (\lambda - \mu) d_k / D_k, (k = 1, 2, \dots, n-1); \\ a_1 = \lambda - b_1 x_2 / x_1, a_n = \lambda - b_{n-1} x_{n-1} / x_n; \\ a_k = \begin{cases} \lambda - (b_{k-1} x_{k-1} + b_k x_{k+1}) / x_k, x_k \neq 0; \\ \mu - (b_{k-1} y_{k-1} + b_k y_{k+1}) / y_k, x_k = 0; \end{cases} (k = 2, 3, \dots, n-1); \end{cases} \quad (2.26)$$

由引理 2.2 可知 , 在一定条件下两个特征对唯一确定一个 Jacobi 阵 J , 对问题 1 我们只需证明由 (λ, x) , (μ, y) ; (λ, x) , (ξ, m) 和 (λ, x) , (η, r) 分别确定的 Jacobi

阵是相等的。

定理 2.1 问题 2.1 有惟一解的充要条件是：

(i) $d_n^{(1)} = d_n^{(2)} = d_n^{(3)} = d_n^{(4)} = d_n^{(5)} = d_n^{(6)} = 0$;

(ii) $(\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)} = (\lambda - \xi)d_k^{(2)} / D_k^{(2)} = (\lambda - \eta)d_k^{(3)} / D_k^{(3)} > 0$;

(iii) 若 $x_k = 0$, $(\lambda - \mu)d_j^{(1)} / D_j^{(1)} = (\mu - \xi)d_j^{(4)} / D_j^{(4)} = (\mu - \eta)d_j^{(5)} / D_j^{(5)}$;

$j = k, k-1$

其中

$$\begin{cases} d_k^{(1)} = \sum_{i=1}^k x_i y_i, d_k^{(2)} = \sum_{i=1}^k x_i m_i, d_k^{(3)} = \sum_{i=1}^k x_i r_i; \\ d_k^{(4)} = \sum_{i=1}^k y_i m_i, d_k^{(5)} = \sum_{i=1}^k y_i r_i, d_k^{(6)} = \sum_{i=1}^k m_i r_i; \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} D_k^{(1)} = \begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(2)} = \begin{vmatrix} m_k & m_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(3)} = \begin{vmatrix} r_k & r_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}; \\ D_k^{(4)} = \begin{vmatrix} m_k & m_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(5)} = \begin{vmatrix} r_k & r_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(6)} = \begin{vmatrix} r_k & r_{k+1} \\ m_k & m_{k+1} \end{vmatrix}; \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

证明 由引理 2.2 ,满足定理条件的 (λ, x) , (μ, y) ; (λ, x) , (ξ, m) 和 (λ, x) , (η, r)

可分别惟一确定三个 Jacobi 阵 J , J' , J'' , 其元素可分别表示为

$$\begin{cases} b_k = (\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)}, k = 1, 2, \dots, n-1; \\ a_1 = \lambda - b_1 x_2 / x_1, a_n = \lambda - b_{n-1} x_{n-1} / x_n; \\ a_k = \begin{cases} \lambda - (b_{k-1} x_{k-1} + b_k x_{k+1}) / x_k, x_k \neq 0; \\ \mu - (b_{k-1} y_{k-1} + b_k y_{k+1}) / y_k, x_k = 0; \end{cases} k = 2, 3, \dots, n-1; \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} b'_k = (\lambda - \xi)d_k^{(2)} / D_k^{(2)}, k = 1, 2, \dots, n-1; \\ a'_1 = \lambda - b_1 x_2 / x_1, a'_n = \lambda - b_{n-1} x_{n-1} / x_n; \\ a'_k = \begin{cases} \lambda - (b_{k-1} x_{k-1} + b_k x_{k+1}) / x_k, x_k \neq 0; \\ \xi - (b_{k-1} m_{k-1} + b_k m_{k+1}) / m_k, x_k = 0; \end{cases} \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} b_k'' = (\lambda - \eta)d_k^{(3)} / D_k^{(3)}, k = 1, 2, \dots, n-1; \\ a_1'' = \lambda - b_1 x_2 / x_1, a_n'' = \lambda - b_{n-1} x_{n-1} / x_n; \\ a_k'' = \begin{cases} \lambda - (b_{k-1} x_{k-1} + b_k x_{k+1}) / x_k, x_k \neq 0; \\ \eta - (b_{k-1} r_{k-1} + b_k r_{k+1}) / r_k, x_k = 0; \end{cases} k = 2, 3, \dots, n-1; \end{cases} \quad (2.30)$$

由条件(ii)可得 $b_k = b_k' = b_k'' > 0, k = 1, 2, \dots, n-1$ 。(iii) 若 $x_k \neq 0$, 此时有 $a_k = a_k' = a_k''$;

若 $x_k = 0$, 则由条件

$$\begin{cases} (\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)} = (\mu - \xi)d_k^{(4)} / D_k^{(4)} \\ (\lambda - \mu)d_{k-1}^{(1)} / D_{k-1}^{(1)} = (\mu - \xi)d_{k-1}^{(4)} / D_{k-1}^{(4)} \end{cases};$$

$$\begin{cases} (\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)} = (\mu - \eta)d_k^{(4)} / D_k^{(4)} \\ (\lambda - \mu)d_{k-1}^{(1)} / D_{k-1}^{(1)} = (\mu - \eta)d_{k-1}^{(4)} / D_{k-1}^{(4)} \end{cases};$$

利用 b_{k-1}, b_k 的表达式 (2.28), 可得

$$\begin{cases} b_k D_k^{(4)} = (\mu - \xi)d_k^{(4)} \\ b_{k-1} D_{k-1}^{(4)} = (\mu - \xi)d_{k-1}^{(4)} \end{cases}$$

即有

$$(\mu - \xi)y_k m_k + b_{k-1} D_{k-1}^{(4)} - b_k D_k^{(4)} = 0 \quad (2.31)$$

由于 $D_k^{(i)} \neq 0$ 及 $x_k \neq 0$, 可得 $y_k \neq 0, m_k \neq 0$;

将 $D_{k-1}^{(4)} = m_{k-1} y_k - m_k y_{k-1}, D_k^{(4)} = m_k y_{k+1} - m_{k+1} y_k$ 代入 (2.31) 式, 再两边同除以 $y_k m_k$,

得

$$\mu - \xi + b_{k-1}(m_{k-1} / m_k - y_{k-1} / y_k) - b_k(y_{k+1} / y_k - m_{k+1} / m_k) = 0;$$

$$\text{即} \quad \mu - (b_{k-1} y_{k-1} + b_k y_{k+1}) / y_k = \xi - (b_{k-1} m_{k-1} + b_k m_{k+1}) / m_k;$$

所以当 $x_k = 0$ 时, 也有 $a_k = a_k'$;

同理可得 $a_k = a_k''$;

即 $a_k = a_k' = a_k''$

则 $J = J' = J''$, 且 J 以 $(\lambda, x), (\mu, y), (\xi, m)$ 和 (η, r) 为其特征对。充分性得证。

下面证明必要性。假定问题 1 存在解 J ，使得 (λ, x) ， (μ, y) ， (ξ, m) 和 (η, r) 是 J 的特征对。因为实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以条件 (i) 成立；条件 (ii) 成立显然。定理 2.1 得证。

引理 2.3^[31] 给定三个互异实数 λ, μ, ν 和三个 n 维非零向量 x, y, z 要求构造一个 n 阶 Jacobi 矩阵 J ，使得 (λ, x) ， (μ, y) ， (ν, z) 是 J 的特征对的充要条件是：

$$(i) \quad d_n^{(1)} = d_n^{(2)} = d_n^{(3)} = 0$$

$$(ii) \quad (\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)} = (\lambda - \nu)d_k^{(2)} / D_k^{(2)} > 0 ;$$

$$(iii) \quad \text{若 } x_k = 0, (\lambda - \mu)d_j^{(1)} / D_j^{(1)} = (\mu - \nu)d_j^{(3)} / D_j^{(3)} ; j = k, k-1$$

其中

$$\begin{cases} d_k^{(1)} = \sum_{i=1}^k x_i y_i, d_k^{(2)} = \sum_{i=1}^k x_i z_i, d_k^{(3)} = \sum_{i=1}^k y_i z_i, k = (1, 2, \dots, n); \\ D_k^{(1)} = \begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(2)} = \begin{vmatrix} z_k & z_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(3)} = \begin{vmatrix} z_k & z_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}, (k = 1, 2, \dots, n-1); \end{cases} \quad (2.32)$$

并且矩阵 J 的元素表达式为

$$\begin{cases} b_k = (\lambda - \mu)d_k / D_k, (k = 1, 2, \dots, n-1); \\ a_1 = \lambda - b_1 x_2 / x_1, a_n = \lambda - b_{n-1} x_{n-1} / x_n; \\ a_k = \begin{cases} \lambda - (b_{k-1} x_{k-1} + b_k x_{k+1}) / x_k, x_k \neq 0; \\ \mu - (b_{k-1} y_{k-1} + y_{k+1}) / y_k, x_k = 0; \end{cases} (k = 2, 3, \dots, n-1); \end{cases} \quad (2.33)$$

由引理 2.3 可知，在一定条件下三个特征对惟一确定一个 Jacobi 阵 J ，对问题 2.2 我们只需证明由 (λ, x) ， (μ, y) ， (ν, z) ； (λ, x) ， (μ, y) ， (ξ, m) 和 (λ, x) ， (μ, y) ， (η, r) 分别确定的 Jacobi 阵是相等的。

定理 2.2 问题 2.2 有惟一解的充要条件是：

$$(i) \quad d_n^{(1)} = d_n^{(2)} = d_n^{(3)} = d_n^{(4)} = d_n^{(5)} = d_n^{(7)} = d_n^{(8)} = d_n^{(9)} = d_n^{(10)} ;$$

$$(ii) (\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)} = (\lambda - \nu)d_k^{(2)} / D_k^{(2)} = (\lambda - \xi)d_k^{(3)} / D_k^{(3)} = (\lambda - \eta)d_k^{(4)} / D_k^{(4)} > 0$$

(iii) 若 $x_k = 0$,

$$(\lambda - \mu)d_j^{(1)} / D_j^{(1)} = (\mu - \nu)d_j^{(5)} / D_j^{(5)} = (\mu - \xi)d_j^{(6)} / D_j^{(6)} = (\mu - \eta)d_j^{(7)} / D_j^{(7)}$$

$$j = k, k-1$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} d_k^{(1)} = \sum_{i=1}^k x_i y_i, d_k^{(2)} = \sum_{i=1}^k x_i z_i, d_k^{(3)} = \sum_{i=1}^k x_i m_i, d_k^{(4)} = \sum_{i=1}^k x_i n_i; \\ d_k^{(5)} = \sum_{i=1}^k y_i z_i, d_k^{(6)} = \sum_{i=1}^k y_i m_i, d_k^{(7)} = \sum_{i=1}^k y_i n_i, d_k^{(8)} = \sum_{i=1}^k z_i m_i; \\ d_k^{(9)} = \sum_{i=1}^k z_i n_i, d_k^{(10)} = \sum_{i=1}^k m_i n_i, (k=1, 2, \dots, n); \\ \left. \begin{array}{l} D_k^{(1)} = \begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(2)} = \begin{vmatrix} z_k & z_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(3)} = \begin{vmatrix} m_k & m_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(4)} = \begin{vmatrix} n_k & n_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}; \\ D_k^{(5)} = \begin{vmatrix} z_k & z_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(6)} = \begin{vmatrix} m_k & m_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(7)} = \begin{vmatrix} n_k & n_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(8)} = \begin{vmatrix} m_k & m_{k+1} \\ z_k & z_{k+1} \end{vmatrix}; \\ D_k^{(9)} = \begin{vmatrix} n_k & n_{k+1} \\ z_k & z_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(10)} = \begin{vmatrix} n_k & n_{k+1} \\ m_k & m_{k+1} \end{vmatrix}, (k=1, 2, \dots, n-1) \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (2.34)$$

证明 由引理 2.3, 满足定理条件的 $(\lambda, x), (\mu, y), (\nu, z); (\lambda, x), (\mu, y), (\xi, m)$

和 $(\lambda, x), (\mu, y), (\eta, r)$ 可分别惟一确定三个 Jacobi 阵 J, J', J'' , 其元素可分别表示为:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_k = (\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)}, k=1, 2, \dots, n-1; \\ a_1 = \lambda - b_1 x_2 / x_1, a_n = \lambda - b_{n-1} x_{n-1} / x_n; \\ a_k = \begin{cases} \lambda - (b_{k-1} x_{k-1} + b_k x_{k+1}) / x_k, x_k \neq 0; \\ \mu - (b_{k-1} y_{k-1} + b_k y_{k+1}) / y_k, x_k = 0; \end{cases} k=2, 3, \dots, n-1; \end{array} \right. \quad (2.35)$$

$$\begin{cases} b_k' = (\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)}, k = 1, 2, \dots, n-1; \\ a_1' = \lambda - b_1 x_2 / x_1, a_n' = \lambda - b_{n-1} x_{n-1} / x_n; \\ a_k' = \begin{cases} \lambda - (b_{k-1} x_{k-1} + b_k x_{k+1}) / x_k, x_k \neq 0; \\ \mu - (b_{k-1} y_{k-1} + b_k y_{k+1}) / y_k, x_k = 0; \end{cases} \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\begin{cases} b_k'' = (\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)}, k = 1, 2, \dots, n-1; \\ a_1'' = \lambda - b_1 x_2 / x_1, a_n'' = \lambda - b_{n-1} x_{n-1} / x_n; \\ a_k'' = \begin{cases} \lambda - (b_{k-1} x_{k-1} + b_k x_{k+1}) / x_k, x_k \neq 0; \\ \mu - (b_{k-1} y_{k-1} + b_k y_{k+1}) / y_k, x_k = 0; \end{cases} \end{cases} \quad (2.37)$$

显然有 $b_k = b_k' = b_k'', a_k = a_k' = a_k''$ 。

充分性得证。

下面证明其必要性。假定问题 2.2 存在解 J ，使得 (λ, x) ， (μ, y) ， (ν, z) ， (ξ, m) 和 (η, n) 是 J 的特征对。因为实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交，所以条件 (i) 成立；条件 (ii) 成立可用反证法证明，其具体的证明过程这里就不再赘述。定理 2 得证。

2.2.4.2 数值算法

根据前面讨论，给出如下问题 2.1 的算法描述。

算法 2.3

(1) 计算

$$\begin{cases} \begin{cases} d_k^{(1)} = \sum_{i=1}^k x_i y_i, d_k^{(2)} = \sum_{i=1}^k x_i m_i, d_k^{(3)} = \sum_{i=1}^k x_i r_i; \\ d_k^{(4)} = \sum_{i=1}^k y_i m_i, d_k^{(5)} = \sum_{i=1}^k y_i r_i, d_k^{(6)} = \sum_{i=1}^k m_i r_i; \end{cases} & (k = 1, 2, \dots, n) \\ \begin{cases} D_k^{(1)} = \begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(2)} = \begin{vmatrix} m_k & m_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(3)} = \begin{vmatrix} n_k & n_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}; \\ D_k^{(4)} = \begin{vmatrix} m_k & m_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(5)} = \begin{vmatrix} n_k & n_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(6)} = \begin{vmatrix} n_k & n_{k+1} \\ m_k & m_{k+1} \end{vmatrix}; \end{cases} & (k = 1, 2, \dots, n-1) \end{cases} \quad (2.38)$$

(2) 如果 $d_n^{(1)}, d_n^{(2)}, d_n^{(3)}, d_n^{(4)}, d_n^{(5)}, d_n^{(6)}$ 有不为零的数, 则问题无解;

(3) 如果有 $D_k^{(1)}, D_k^{(2)}, D_k^{(3)}, D_k^{(4)}, D_k^{(5)}, D_k^{(6)}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) 为零, 则此算法不能求解;

(4) 对于 $k=1, 3, \dots, n-1$

当 $x_k = 0$ 时, 若有

$$(\lambda - \mu)d_j^{(1)} / D_j^{(1)} = (\mu - \xi)d_j^{(4)} / D_j^{(4)} = (\mu - \eta)d_j^{(5)} / D_j^{(5)} \quad j = k, k-1$$

$$\text{则} \quad \begin{cases} b_k = (\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)}; \\ a_k = \{\mu - (b_{k-1}y_{k-1} + b_k y_{k+1}) / y_k\}; \end{cases}$$

否则问题无解。

当 $x_k \neq 0$ 时, 若有

$$(\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)} = (\lambda - \xi)d_k^{(2)} / D_k^{(2)} = (\lambda - \eta)d_k^{(3)} / D_k^{(3)} > 0$$

$$\text{则} \quad \begin{cases} b_k = (\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)}; \\ a_k = \{\lambda - (b_{k-1}x_{k-1} + b_k x_{k+1}) / x_k\}; \end{cases}$$

否则问题无解;

(5) $a_n = \lambda - b_{n-1}x_{n-1} / x_n$

问题 2.2 的算法类似容易得到。

2.2.4.3 数值例子

本节给出两个数值例子。

例 2.3 给定四个特征值和特征向量: $\lambda = 3, \mu = 2, \xi = 1, \eta = 0.2679$,

$$x = [1, 1.732, 2, 1.732, 1], \quad y = [1, 1, 0, -1, -1], \quad m = [1, 0, -1, 0, 1], \quad n = [1, -1.732, 2, -1.732, 1].$$

容易验证满足定理 2.1 的条件, 由算法 2.3 计算可得

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

例 2.4 给定五个特征值和特征向量：

$$\lambda = 7.543, \mu = -3.543, \nu = 2, \xi = 4.296, \eta = -0.296,$$

$$x = [1, 1.848, 2.415, 2.614, 2.415, 1.848, 1], \quad y = [1, -1.848, 2.415, -2.614, 2.415, -1.848, 1],$$

$$m = [1, 0.766, -0.414, -1.083, -0.414, 0.766, 1], \quad n = [1, -0.766, -0.414, 1.083, -0.414, -0.766, 1],$$

$$z = [1, -1, -1, 0, 1, 0, -1].$$

容易验证满足定理 2.2 的条件，计算可得

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3 一类混合连接弹簧-质点系统的振动反问题

前面讨论的是简单连接弹簧-质点系统的振动反问题。但实际问题中的一些结构振动系统化为混合连接弹簧-质点系统模型。例如汽车悬挂的系统^[95]等都离散为混合连接的弹簧-质点系统。混合连接弹簧-质点系统的刚度矩阵是实对称带状矩阵，混合连接弹簧-质点系统的振动反问题归结为实对称带状矩阵特征值反问题。

例如考虑如图 2.7 所示的混合连接弹簧-质点系统

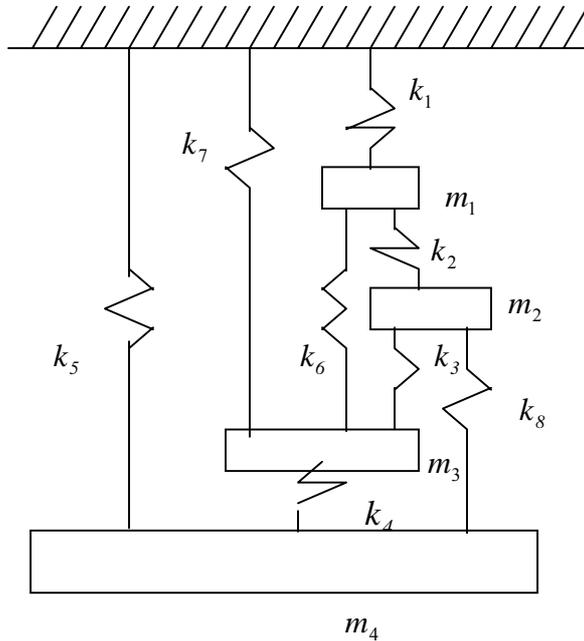


图 2.7 混合连接的弹簧-质点系统

此振动系统的特征方程

$$Kx = \lambda Mx \quad (2.39)$$

其中质量矩阵 $M = \text{diag}[m_1, \dots, m_4]$ ，刚度矩阵为实对称五对角矩阵

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_6 & -k_2 & -k_6 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 + k_8 & -k_3 & -k_8 \\ -k_6 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_6 + k_7 & -k_4 \\ 0 & -k_8 & -k_4 & k_4 + k_5 + k_8 \end{bmatrix}$$

(2.39) 式等价于

$$Ax = \lambda x \quad (2.40)$$

其中

$$A = M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2 + k_6}{m_1} & -\frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} & -\frac{k_6}{\sqrt{m_1 m_3}} & 0 \\ \frac{k_2}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{k_2 + k_3 + k_8}{m_2} & -\frac{k_3}{\sqrt{m_2 m_3}} & -\frac{k_8}{\sqrt{m_2 m_4}} \\ -\frac{k_6}{\sqrt{m_1 m_3}} & -\frac{k_3}{\sqrt{m_2 m_3}} & \frac{k_3 + k_4 + k_6 + k_7}{m_3} & -\frac{k_4}{\sqrt{m_3 m_4}} \\ 0 & -\frac{k_8}{\sqrt{m_2 m_4}} & -\frac{k_4}{\sqrt{m_3 m_4}} & \frac{k_4 + k_5 + k_8}{m_4} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

针对如上图所示的混合连接弹簧-质点系统，可以提出如下反问题：

已知系统的三个特征对和部分结构参数，例如已知刚度系数 k_6, k_8 和质点质量 m_1, m_2 ，识别系统的其它物理参数。

该问题可归结为如下特征值反问题。

问题 2.3 设 λ, μ, ν 是三个给定的不同实数， x, y, z 是三个给定的 n 维非零实向量以及给定 $n-2$ 个实数 c_1, c_2, \dots, c_{n-2} ，求一个 n 阶实对称五对角矩阵 T ，使得 $(\lambda, x), (\mu, y), (\nu, z)$ 是 T 的三个特征对，并且实数 c_1, c_2, \dots, c_{n-2} 是矩阵 T 的次对角线元素。

由于这个问题的数学理论等同于离散梁振动反问题，故将此理论部分归入在第三章中做详细讨论。这里仅给出一个数值例子。

例 2.5 若已知该系统的三个频率和相应模态（特征对）为 $\{5, (1, 0, -2, 1)\}$ 、 $\{3, (-1, 0, 0, 1)\}$ 、 $\{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, (1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}, 1, 1)\}$ 和 $m_i = 1, (i = 1, 2, 3, 4)$ ，由第三章的算法 3.4 构造得到系统的刚度矩阵

$$K = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

即得到刚度参数 $k_i = 1 (i = 1, 2, \dots, 8)$

当然，针对具体的振动模型，还可以提出更多的问题。例如：由部分特征对（两对或三对等）识别系统质量矩阵和刚度矩阵；由两或三组谱数据识别系统质量矩阵和刚度矩阵；由混合谱信息以及部分物理参数识别质量矩阵和刚度矩阵等。

2.4 本章小结

本章基于 Jacobi 矩阵特征值反问题的理论与算法讨论了弹簧-质点系统的振动反问题。首先，对二自由度系统到多自由度系统，给出了弹簧-质点系统振动反问题的不同提法，研究了问题解的理论，给出了解的表达式和数值算法。其次，讨论了基于部分频率模态的弹簧-质点系统振动反问题，研究了解存在的充分必要条件，给出了算法和算例。提出并讨论了一类混合连接弹簧-质点系统的振动反问题。

第三章 离散梁的振动反问题

3.1 Euler 梁离散系统

梁是基本的工程构件之一。本章讨论梁的弹簧-质点-刚杆离散模型的振动反问题,即由频率(特征值)和模态(特征向量)数据确定离散梁系统的物理参数如刚度和质量参数等以及几何参数。研究这类问题对结构设计、结构物理参数识别和结构探伤等具有重要的应用价值和理论意义。

非均匀悬臂梁(Bernoulli-Euler 梁)的横向振动由如下微分方程描述

$$L\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = F(x,t)$$

其中 $L\rho$, I 分别为梁的线密度和截面面积二次矩,这两个量都可能随着在梁上的位置 x 而变化, E 是杨氏模量。

利用有限差分方法^[51,53]或者利用变步长的二阶差分格式^[61]可建立梁系统的弹簧-质点-刚杆离散模型,即将振动梁的离散为长度 $\{l_i\}_0^n$ 的无质量刚杆连接 $n+2$ 个质量为 $\{m_i\}_1^n$ 的质点,再由 n 个刚度为 $\{k_i\}_1^n$ 的转动弹簧连在一起。实际上沿着梁分布的质量和刚度被集中到 $n+2$ 个质点上。

王其申等^[62]给出了由三组严格相间的频率数据构造简支梁差分离散模型的反问题,讨论了解的存在性,给出了算法和算例。何北昌等^[68]针对悬臂梁的离散模型,讨论了用一个模态数据构造梁的截面面积的反问题,给出了解存在的充分必要条件。Ram^[64]讨论了由频率和相应模态构造非均匀悬臂梁离散模型的振动反问题,研究了在给定步长的情况下,由一个特征值、两个特征向量和梁的总质量构造悬臂梁离散模型的问题以及在不给定步长的情况下,由三个特征值、相应的特征向量、梁的总质量和总长度构造此悬臂梁离散模型的问题。

考虑均匀梁的自由振动,即 $L\rho$, I 分别为常数, $F(x,t) = 0$ 。于是得到梁自由振动的微分方程

$$M\ddot{u} + Cu = 0$$

其中 $M = \text{diag}[m_i]$, $K = \text{diag}[k_i]$, $L = \text{diag}[l_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$

3.2 离散梁的模态反问题

本节提出如下离散梁的模态反问题。

提法 3.1 已知振动梁的三个特征对 (频率模态) 识别离散梁系统的质量矩阵和\或刚度矩阵。

提法 3.2 已知振动梁的由三个特征对和部分结构参数识别系统的质量矩阵和\或刚度矩阵。

下面基于对称五对角矩阵特征值反问题理论和方法 ,研究梁离散模型的结构参数识别。

3.2.1 实对称五对角矩阵特征值反问题

对于 n 阶实对称矩阵 $A = (a_{ij})$, r 是一个正整数 ,且 $1 \leq r \leq n-1$,当 $|i-j| > r$ 时 , $a_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 至少有一个 i 使得 $a_{i,i+r} \neq 0$, 则称矩阵 A 是带宽为 $2r+1$ 的实对称带状矩阵。特别地 , 当 $r=2$ 时 , 分别称 A 为实对称五对角矩阵。实对称五对角矩阵在结构动力学中有重要应用背景。

本节结合离散梁问题来研究实对称五对角矩阵的特征值反问题。

下面根据上述两种提法 , 讨论一类实对称五对角矩阵特征值反问题。

问题 3.1 设 λ, μ, ν 是三个给定的不同实数 (不妨假设 $\lambda > \mu > \nu$) , x, y, z 是三个给定的 n 维非零实向量 , 求一个 n 阶实对称五对角矩阵 A , 使得 $(\lambda, x), (\mu, y), (\nu, z)$ 是 A 的三个特征对。

问题 3.2 设 λ, μ, ν 是三个给定的不同实数 , x, y, z 是三个给定的 n 维非零实向量以及给定 $n-2$ 个实数 c_1, c_2, \dots, c_{n-2} , 求一个 n 阶实对称五对角矩阵 T , 使得 $(\lambda, x), (\mu, y), (\nu, z)$ 是 T 的三个特征对 , 并且实数 c_1, c_2, \dots, c_{n-2} 是矩阵 T 的次次对角线元素。

对于问题 3.1 , 本节研究其解的存在性 , 给出了解的表达式及求解的数值算法 ; 对于问题 3.2 , 研究了其存在惟一解的充分必要条件 , 并且给出了惟一解的表达式和求解的数值算法。

3.2.1.1 问题 3.1 有惟一解及有解的充分必要条件和数值算法

本节给出问题 3.1 有惟一解及有解的充分必要条件和求解的数值算法。

实对称五对角矩阵 T 可表示为

定理 3.1 问题 3.1 存在惟一解的充分必要条件是

$$(1) D_{ii} \neq 0, (i=1,2,\dots,n-2)$$

$$(2) \text{秩}(B_n) = \text{秩}(B_n, b^{(n-1)} - c_{n-3}X_{n-3} - b_{n-2}X_{n-2}) = 2$$

$$(3) \text{秩}(X_n) = \text{秩}(X_n, b^{(n)} - c_{n-2}X_{n-2} - b_{n-1}X_{n-1}) = 1$$

证明 问题 3.1 存在惟一解 \Leftrightarrow 线性方程组 (3.6) 存在惟一解

$\Leftrightarrow n$ 个方程组 (3.5) 的 (1-1) 至 (1- n) 存在惟一解 \Leftrightarrow 条件 (1)(2)(3)

定理 3.1 虽然不能由给定条件直接判断问题 3.1 解的存在性,但是在计算过程中,能够边验证条件,边得到问题 3.1 的解。这与直接由给定条件判断问题 3.1 解的存在性,具有等同的实际应用价值。

对于方程组 (3.5) 的 (1-1) 及 $D_{11} \neq 0$, 由线性方程组理论,得到惟一解

$$a_1 = \frac{D_1^{(1)}}{D_{11}}, b_1 = \frac{D_1^{(2)}}{D_{11}}, c_1 = \frac{D_1^{(3)}}{D_{11}},$$

将上式结果代入方程组 (3.5) 的 (1-2), 得 $B_{22}R_2 = b^{(2)} - b_1X_1$, 再由 $D_{22} \neq 0$, 得到惟一解 a_2, b_2, c_2 , 依此进行方程组 (3.5) 的 (1-($n-2$)), 可解得惟一解 $a_i, b_i, c_i (i=1,2,\dots,n-2)$ 。

将 c_{n-3}, b_{n-2} 代入方程组 (3.5) 的 (1-($n-1$)), 得

$$B_n \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = b^{(n-1)} - c_{n-3}X_{n-3} - b_{n-2}X_{n-2}$$

再由条件 (2), 可得其惟一解 a_{n-1}, b_{n-1} 。

最后,由条件 (3) 知,方程组 (3.5) 的 (1- n) 有惟一解,且由秩(X_n)=1,可知 x_n, y_n, z_n 中至少有一个不为零。于是,

$$\text{若 } x_n \neq 0, \text{ 则 } a_n = \lambda - \frac{x_{n-1}}{x_n}b_{n-1} - \frac{x_{n-2}}{x_n}c_{n-2};$$

若 $x_n = 0, y_n \neq 0$, 则 $a_n = \mu - \frac{y_{n-1}}{y_n} b_{n-1} - \frac{y_{n-2}}{y_n} c_{n-2}$;

若 $x_n = y_n = 0, z_n \neq 0$, 则 $a_n = \nu - \frac{z_{n-1}}{z_n} b_{n-1} - \frac{z_{n-2}}{z_n} c_{n-2}$ 。

下面给出求问题 3.1 惟一解的数值算法。

算法 3.1

(1) 计算 D_{ii} , 若 $D_{ii} \neq 0 (i=1,2,\dots,n-2)$, 则转 (2) , 否则问题无惟一解 ;

(2) 计算 $D_i^{(p)} (i=1,2,\dots,n-2; p=1,2,3)$ 和 $b^{(i)} (i=1,2,\dots,n)$, 并由此递推地求解 $(n-2)$ 个 3 阶的线性方程组 $(1-1) \sim (1-(n-2))$, 得到惟一解 $a_i, b_i, c_i (i=1,2,\dots,n-2)$;

(3) 计算秩 (B_n) 和秩 $(B_n, b^{(n-1)} - c_{n-3} X_{n-3} - b_{n-2} X_{n-2})$,

若秩 $(B_n) = \text{秩}(B_n, b^{(n-1)} - c_{n-3} X_{n-3} - b_{n-2} X_{n-2}) = 2$, 转 (4) , 否则问题 1 无惟一解 ;

(4) 由方程组 $B_n \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = b^{(n-1)} - c_{n-3} X_{n-3} - b_{n-2} X_{n-2}$, 求其惟一解 a_{n-1}, b_{n-1} ;

(5) 若 $x_n \neq 0$, 则 $a_n = \lambda - \frac{x_{n-1}}{x_n} b_{n-1} - \frac{x_{n-2}}{x_n} c_{n-2}$;

若 $x_n = 0, y_n \neq 0$, 则 $a_n = \mu - \frac{y_{n-1}}{y_n} b_{n-1} - \frac{y_{n-2}}{y_n} c_{n-2}$;

若 $x_n = y_n = 0, z_n \neq 0$, 则 $a_n = \nu - \frac{z_{n-1}}{z_n} b_{n-1} - \frac{z_{n-2}}{z_n} c_{n-2}$;

(6) 形成问题 1 的解 T 。

下面给出问题 3.1 存在解的充分必要条件。

定理 3.2 问题 3.1 存在解的充分必要条件是

(1) 秩 $(B_{11}) = \text{秩}(B_{11}, b^{(1)})$

$$(2) \quad \text{秩}(B_{22}) = \text{秩}(B_{22}, b^{(2)} - b_1 X_1)$$

$$(3) \quad \text{秩}(B_{ii}) = \text{秩}(B_{ii}, b^{(i)} - c_{i-2} X_{i-2} - b_{i-1} X_{i-1}) (i = 3, 4, \dots, n-2)$$

$$(4) \quad \text{秩}(B_n) = \text{秩}(B_n, b^{(n-1)} - c_{n-3} X_{n-3} - b_{n-2} X_{n-2})$$

(5) x_n, y_n, z_n 中至少有一个不为零。

证明 问题 3.1 存在解 \Leftrightarrow 线性方程组 (3.6) 存在解

$\Leftrightarrow n$ 个方程组 (3.5) 的 (1-1) 至 (1- n) 存在解 \Leftrightarrow 条件 (1) ~ (5)。证毕。
由线性方程组的广义逆理论, 可给出通解的表示式。

对于线性方程组 (3.6) 的前 ($n-2$) 个三阶线性方程组, 假定 B_{ii} 的奇异值分解为

$$B_{ii} = U_i \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_i^T (i = 1, 2, \dots, n-2),$$

其中 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{s_i}), \sigma_i > 0 (i = 1, 2, \dots, s_i), s_i = \text{秩}(B_{ii}), U_i, V_i$ 为三阶正交矩阵。此时, 其通解为

$$(1) \quad R_1 = B_{11}^- b^{(1)} + \sum_{j=s_1+1}^3 l_j v_j, \text{ 其中 } B_{11}^- \text{ 表示 } B_{11} \text{ 的广义逆, } l_j (j = s_1 + 1, \dots, 3) \text{ 为任意}$$

实数, $v_j (j = s_1 + 1, \dots, 3)$ 是 V_1 的第 j 列;

$$(2) \quad R_2 = B_{22}^- (b^{(2)} - b_1 X_1) + \sum_{j=s_2+1}^3 l_j v_j, \text{ 其中 } B_{22}^- \text{ 表示 } B_{22} \text{ 的广义逆, } l_j (j = s_2 + 1, \dots, 3)$$

为任意实数, $v_j (j = s_2 + 1, \dots, 3)$ 是 V_2 的第 j 列;

$$(3) \quad R_i = B_{ii}^- (b^{(i)} - c_{i-2} X_{i-2} - b_{i-1} X_{i-1}) + \sum_{j=s_i+1}^3 l_j v_j (i = 3, 4, \dots, n-2), \text{ 其中 } B_{ii}^- \text{ 表示 } B_{ii} \text{ 的}$$

广义逆, $l_j (j = s_i + 1, \dots, 3)$ 为任意实数, $v_j (j = s_i + 1, \dots, 3)$ 是 V_i 的第 j 列;

$$(4) \quad R_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = B_n^- (b^{(n-1)} - c_{n-3} X_{n-3} - b_{n-2} X_{n-2}) + \sum_{j=s_n+1}^3 l_j v_j, \text{ 其中 } B_n^- \text{ 表示 } B_n \text{ 的广}$$

义逆, $l_j (j = s_n + 1, \dots, 3)$ 为任意实数, $v_j (j = s_n + 1, \dots, 3)$ 是 V_n 的第 j 列, $s_n = \text{秩}(B_n)$,

B_n 的奇异值分解为 $B_n = U_n \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_n^T$;

(5) 若 $x_n \neq 0$, 则 $a_n = \lambda - \frac{x_{n-1}}{x_n} b_{n-1} - \frac{x_{n-2}}{x_n} c_{n-2}$;

若 $x_n = 0, y_n \neq 0$, 则 $a_n = \mu - \frac{y_{n-1}}{y_n} b_{n-1} - \frac{y_{n-2}}{y_n} c_{n-2}$;

若 $x_n = y_n = 0, z_n \neq 0$, 则 $a_n = \nu - \frac{z_{n-1}}{z_n} b_{n-1} - \frac{z_{n-2}}{z_n} c_{n-2}$ 。

下面给出求问题 3.1 解的数值算法。

算法 3.2

- (1) 由给定的 λ, μ, ν 和 x, y, z 计算 $B_{ii} (i = 1, 2, \dots, n-2)$, B_n 和 $b^{(i)}$;
- (2) 对 $B_{ii} (i = 1, 2, \dots, n-2)$ 和 B_n 作奇异值分解 , 由通解 (1) ~ (5) 边求解 $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 边验证定理 3.2 的条件 , 有其中一个条件不满足 , 则问题无解 ;
- (3) 形成问题 3.1 的解 T 。

3.2.1.2 问题 3.1 有解的条件和解的表达式

本节给出问题 3.1 有解的条件和解的表达式。

引理 3.1^[70] 两个不可约对称三对角矩阵的乘积是五对角矩阵 ; 特别地 , 若 J 是不可约实对称三对角矩阵 , 则 $A = J^2$ 是实对称五对角矩阵。

引理 3.2^[70] 设 (λ, x) 是不可约实对称三对角矩阵 J 的特征对 , 则 (λ^2, x) 是实对称五对角矩阵 $A = J^2$ 的特征对。特别地 , 若 J 的所有特征值非负 , 且 λ 是 J 的特征值 , 则 λ^2 是 A 的特征值。

引理 3.3^[70] 设 λ, μ, ν 是三个给定的不同实数 (不妨假设 $\lambda > \mu > \nu$) , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ 为三个不同的非零实向量 ,

记 $\alpha = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, a_n)^T$, 并作映射 φ :

$$\varphi : T \rightarrow \alpha$$

对于问题 3.2 中给定的三个实数 λ, μ, ν 和三个 n 维非零实向量 x, y, z ,

由 $Tx = \lambda x, Ty = \mu y, Tz = \nu z$, 可得

$$\begin{cases} x_1 a_1 + x_2 b_1 = \lambda x_1 - x_3 c_1 \\ y_1 a_1 + y_2 b_1 = \mu y_1 - y_3 c_1 \\ z_1 a_1 + z_2 b_1 = \nu z_1 - z_3 c_1 \end{cases} \quad (3.7-1)$$

$$\begin{cases} x_1 b_1 + x_2 a_2 + x_3 b_2 = \lambda x_2 - x_4 c_2 \\ y_1 b_1 + y_2 a_2 + y_3 b_2 = \mu y_2 - y_4 c_2 \\ z_1 b_1 + z_2 a_2 + z_3 b_2 = \nu z_2 - z_4 c_2 \end{cases} \quad (3.7-2)$$

$$\begin{cases} x_{k-1} b_{k-1} + x_k a_k + x_{k+1} b_k = \lambda x_k - x_{k-2} c_{k-2} - x_{k+2} c_k \\ y_{k-1} b_{k-1} + y_k a_k + y_{k+1} b_k = \mu y_k - y_{k-2} c_{k-2} - y_{k+2} c_k \\ z_{k-1} b_{k-1} + z_k a_k + z_{k+1} b_k = \nu z_k - z_{k-2} c_{k-2} - z_{k+2} c_k \end{cases} \quad k = 3, \dots, n-2 \quad (3.7-k) \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} x_{n-2} b_{n-2} + x_{n-1} a_{n-1} + x_n b_{n-1} = \lambda x_{n-1} - x_{n-3} c_{n-3} \\ y_{n-2} b_{n-2} + y_{n-1} a_{n-1} + y_n b_{n-1} = \mu y_{n-1} - y_{n-3} c_{n-3} \\ z_{n-2} b_{n-2} + z_{n-1} a_{n-1} + z_n b_{n-1} = \nu z_{n-1} - z_{n-3} c_{n-3} \end{cases} \quad (3.7-(n-1))$$

$$\begin{cases} x_{n-1} b_{n-1} + x_n a_n = \lambda x_n - x_{n-2} c_{n-2} \\ y_{n-1} b_{n-1} + y_n a_n = \mu y_n - y_{n-2} c_{n-2} \\ z_{n-1} b_{n-1} + z_n a_n = \nu z_n - z_{n-2} c_{n-2} \end{cases} \quad (3.7-n)$$

令 $x_{-1} = y_{-1} = z_{-1} = x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $x_{n+1} = x_{n+2} = y_{n+1} = y_{n+2} = z_{n+1} = z_{n+2} = 0$,

$c_{-1} = c_0 = c_{n-1} = c_n = 0$, $b'_0 = b'_n = 0, d_0^{(1)} = d_0^{(2)} = d_0^{(3)} = 0$,

$$\begin{cases} m_{k1} = \lambda x_k - x_{k-2} c_{k-2} - x_{k+2} c_k \\ m_{k2} = \mu y_k - y_{k-2} c_{k-2} - y_{k+2} c_k \\ m_{k3} = \nu z_k - z_{k-2} c_{k-2} - z_{k+2} c_k \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$b = (m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{21}, m_{22}, m_{23}, m_{31}, m_{32}, m_{33}, \dots, m_{n1}, m_{n2}, m_{n3})^T$$

则有

$$A\alpha = b \quad (3.8)$$

其中

$$a'_i = \begin{cases} \frac{m_{i1}}{x_i} - \frac{x_{i+1}}{x_i} b'_i - \frac{x_{i-1}}{x_i} b'_{i-1}, & x_i \neq 0 \\ \frac{m_{i2}}{y_i} - \frac{y_{i+1}}{y_i} b'_i - \frac{y_{i-1}}{y_i} b'_{i-1}, & x_i = 0, y_i \neq 0 \\ \frac{m_{i3}}{z_i} - \frac{z_{i+1}}{z_i} b'_i - \frac{z_{i-1}}{z_i} b'_{i-1}, & x_i = y_i = 0, z_i \neq 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \\ z_i & z_{i+1} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} x_i & x_{i+1} & m_{i1} - x_{i-1} b'_{i-1} \\ y_i & y_{i+1} & m_{i2} - y_{i-1} b'_{i-1} \\ z_i & z_{i+1} & m_{i3} - z_{i-1} b'_{i-1} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

引理 3.4 设方程组 (3.8) 的前 $3l (1 \leq l \leq n-1)$ 个方程组成的方程组有解

$$a_1 = a_1'', b_1 = b_1'', \dots, a_l = a_l'', b_l = b_l'' ,$$

$$\text{则 } D_i^{(p)} b_i'' = \sum_{j=1}^i M_j^{(p)} \quad (p = 1, 2, 3, i = 1, 2, \dots, l)。$$

证明 此处仅证 $p = 1$ 的情形，对 $p = 2, 3$ 类似可证。

$$\text{由假设和方程组 (3.7-1) 的前两个方程 } \begin{cases} x_1 a_1'' + x_2 b_1'' = m_{11} \\ y_1 a_1'' + y_2 b_1'' = m_{12} \end{cases}, \text{ 得 } b_1'' = \frac{M_1^{(1)}}{D_1^{(1)}}。$$

一般地，假设已证明了 $D_{k-1}^{(1)} b_{k-1}'' = \sum_{j=1}^{k-1} M_j^{(1)}$ ，则由方程组 (3.7-k) 的前两个方程及题设

$$\begin{cases} x_{k-1} b_{k-1}'' + x_k a_k'' + x_{k+1} b_k'' = m_{k1} \\ y_{k-1} b_{k-1}'' + y_k a_k'' + y_{k+1} b_k'' = m_{k2} \end{cases}$$

$$\text{因此, } D_k^{(1)} b_k'' = \begin{vmatrix} m_{k1} & m_{k2} \\ x_k & y_k \end{vmatrix} + D_{k-1}^{(1)} b_{k-1}'' = \sum_{j=1}^k M_j^{(1)}。$$

引理 3.5 对于整数 $i (1 \leq i \leq n-1)$ ，如果 $D_i^{(1)} \neq 0, D_i^{(2)} = D_i^{(3)} = 0$ ，则 $z_i = z_{i+1} = 0$ ；

如果 $D_i^{(2)} \neq 0, D_i^{(1)} = D_i^{(3)} = 0$ ，则 $x_i = x_{i+1} = 0$ ；如果 $D_i^{(3)} \neq 0, D_i^{(1)} = D_i^{(2)} = 0$ ，则

$y_i = y_{i+1} = 0$ 。

证明 如果 $D_i^{(2)} = D_i^{(3)} = 0$ ，即 $\begin{vmatrix} z_i & z_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_i & z_{i+1} \\ x_i & x_{i+1} \end{vmatrix} = 0$ ，且 z_i 与 z_{i+1} 不全为零，则

$$a_1 = \begin{cases} \frac{m_{11}}{x_1} - \frac{x_2}{x_1} b_1' & x_1 \neq 0 \\ \frac{m_{12}}{y_1} - \frac{y_2}{y_1} b_1' & x_1 = 0, y_1 \neq 0 \\ \frac{m_{13}}{z_1} - \frac{z_2}{z_1} b_1' & x_1 = y_1 = 0, z_1 \neq 0 \end{cases}$$

综上所述, 已知在条件(3.8) ($i=1$ 时)下, 方程组(3.7-1)有惟一解 $a_1 = a_1', b_1 = b_1'$ 。

一般地, 假设由条件(3.8) ($i=1, 2, \dots, k$ 时)求得了方程组(3.7-1)~(3.7-k)的惟一解

$$\begin{cases} a_1 = a_1' \\ b_1 = b_1' \end{cases}, \begin{cases} a_2 = a_2' \\ b_2 = b_2' \end{cases}, \dots, \begin{cases} a_k = a_k' \\ b_k = b_k' \end{cases}$$

则利用引理 3.4、3.5, 可得(3.7-(k+1))的惟一解 $a_{k+1} = a_{k+1}', b_{k+1} = b_{k+1}'$ 。

于是, 由条件就可求得(3.7-1)~(3.7-(n-1))的惟一解

$$\begin{cases} a_1 = a_1' \\ b_1 = b_1' \end{cases}, \begin{cases} a_2 = a_2' \\ b_2 = b_2' \end{cases}, \dots, \begin{cases} a_{n-1} = a_{n-1}' \\ b_{n-1} = b_{n-1}' \end{cases}$$

对于方程组(3.7-n) (此时已求得 $b_{n-1} = b_{n-1}'$), 有

$$\begin{cases} x_n a_n = m_{n1} - x_{n-1} b_{n-1}' \\ y_n a_n = m_{n2} - y_{n-1} b_{n-1}' \\ z_n a_n = m_{n3} - z_{n-1} b_{n-1}' \end{cases} \quad (3.7-n)'$$

由于秩 $(A_{n-1}) = 2$, 所以 x_n, y_n, z_n 不全为零。因此, 只要(3.7-n)' 相容, 则其有惟一解。

下面证明(3.7-n)' 相容,

由条件(3.9)知 x_n, y_n, z_n 中至少有一个不为零, 不妨设 $x_n \neq 0$, 由(3.7-n)' 的第一个方程得 $a_n = \frac{m_{n1}}{x_n} - \frac{x_{n-1}}{x_n} b_{n-1}'$, 因此要证(3.7-n)' 是相容的, 只需证明 $a_n = a_n'$ 满足

(3.7-n)' 的后两个方程即可。

首先证明 $a_n = a_n'$ 满足(3.7-n)' 的第二个方程, 若 $y_n = 0$, 则第一、二两个方程相互独立; 若 $y_n \neq 0$, 由条件(1) ($p=1$ 的情形)知, $M_n^{(1)} = -\sum_{i=1}^{n-1} M_i^{(1)}$, 又由引理 3.5

知, $\sum_{i=1}^{n-1} M_i^{(1)} = D_{n-1}^{(1)} b'_{n-1}$, 所以 $M_n^{(1)} = -D_{n-1}^{(1)} b'_{n-1}$, 即

$$\begin{vmatrix} m_{n1} & m_{n2} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_{n-1} & y_n \\ x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} b'_{n-1}$$

也就是 $m_{n1}y_n - m_{n2}x_n = (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1})b'_{n-1}$

由于 $x_n \neq 0$ 和 $y_n \neq 0$, 上式两边同除以 x_ny_n , 移项并整理, 得

$$y_n \left(\frac{m_{n1}}{x_n} - \frac{x_{n-1}}{x_n} b'_{n-1} \right) = m_{n2} - y_{n-1} b'_{n-1}$$

即

$$y_n a'_n = m_{n2} - y_{n-1} b'_{n-1}$$

从而有 $a_n = a'_n$ 满足 (3.7-n) 的第二个方程。

同理类似可证, $a_n = a'_n$ 满足 (3.7-n)' 的第三个方程。因此, 方程组 (3.7-n)' 是相容的。

必要性。设问题 3.2 存在惟一解, 则方程组 (3.8) 存在惟一解 α 。首先证明 (1)

$\sum_{j=1}^n M_j^{(p)} = 0$ (仅对 $p=1$ 的情形证明, $p=2,3$ 类似可证), 也就是要证

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} m_{n1} & m_{n2} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} = 0$$

即只需验证

$$m_{11}y_1 + m_{21}y_2 + \cdots + m_{n1}y_n = m_{12}x_1 + m_{22}x_2 + \cdots + m_{n2}x_n \quad (3.12)$$

事实上, 将方程组 (3.8) 右端的 $m_{ij} (i=1,2,\dots,n, j=1,2)$ 代入 (3.12) 中, 再注意

到 $\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i z_i = \sum_{i=1}^n x_i z_i = 0$ (因为 $(\lambda, x), (\mu, y), (\nu, z)$ 是实对称五对角矩阵 T 的三个

特征对, 并且 λ, μ, ν 是三个给定的不同实数, 于是特征向量 x, y, z 两两正交), 容易验证 (3.12) 式成立, 即 (1) 得以证明。

其次, 由线性方程组解的理论知, 秩 $(A) = \text{秩}(A, b) = 2n-1$, 下面先证对于任一个

$i(1 \leq i \leq n-1)$, 秩 $(A_i) = 2$ 。事实上, 若有某个 $k(1 \leq k \leq n-1)$ 使得秩 $(A_k) < 2$, 则或者 (x_k, y_k, z_k) 与 $(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1})$ 中至少有一个向量为零向量, 或者都不是零向量, 但它们成比例, 无论是哪种情况都易证秩 $(A) < 2n-1$, 矛盾。故秩 $(A_i) = 2, (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 。再由方程组 (3.8) 可解, 从而方程组 (3.7-1)~(3.7-(n-1)) 均可解, 从而秩 $(A_i) = \text{秩}(B_i) = 2, i = 1, 2, \dots, n-1$ 得以证明。

最后证明 (3), 事实上, 由于秩 $(A_{n-1}) = 2$, 于是由引理 3.5, 易得 $D_{n-1}^{(p)} (p = 1, 2, 3)$ 至少有一个不为零。

综上所述, 定理 3.4 得以证明。至于解的表达式, 由充分性的证明知惟一解 T 由 (3.11) 给出。

下面给出问题 3.2 的另外一个充分必要条件。

引理 3.6^[3] 设 λ, μ 是两个给定的不同实数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 为两个不同的非零实向量, 存在惟一的实对称五对角矩阵 T , 使其具有给定的两个特征对 $(\lambda, x), (\mu, y)$ 的充分条件是:

$$(1) d_n^{(1)} = 0 ;$$

$$(2) D_k^{(1)} \neq 0 (k = 1, 2, \dots, n-1) ;$$

$$(3) x_n y_n \neq 0 ,$$

且惟一解为

$$a_i = [\mu x_{i-1} y_i - \lambda x_i y_{i+1} + c_{i-2} (x_{i-2} y_{i+1} - x_{i+1} y_{i-2}) + c_i D_{i-1}^{(1)} + d_{i-1}^{(1)} (x_{i-1} y_{i+1} - x_{i+1} y_{i-1})] / D_i^{(1)}$$

$$b_i = [(\lambda - \mu) d_i^{(1)} + c_{i-1} (x_{i-1} y_{i+1} - x_{i+1} y_{i-1}) + c_i (x_i y_{i+2} - x_{i+2} y_i)] / D_i^{(1)}$$

$$a_n = \lambda - c_{n-2} x_{n-2} / x_n - d_{n-1}^{(1)} x_{n-1} / x_n$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

由引理 3.6 可知在一定条件下两个特征对惟一确定一个实对称五对角矩阵, 对于问题 3.2 只需证明由 $(\lambda, x), (\mu, y)$ 和 $(\mu, y), (v, z)$ 分别确定的实对称五对角矩阵是相同的。

定理 3.5 问题 3.2 存在惟一解的充分必要条件是

$$(1) d_n^{(1)} = d_n^{(2)} = 0 ;$$

$$(2) D_k^{(p)} \neq 0 \quad (p=1,2, \quad k=1,2,\dots,n-1) ;$$

$$\begin{aligned} (3) & [\mu x_{i-1}y_i - \lambda x_i y_{i+1} + c_{i-2}(x_{i-2}y_{i+1} - x_{i+1}y_{i-2}) + c_i D_{i-1}^{(1)} + d_{i-1}^{(1)}(x_{i-1}y_{i+1} - x_{i+1}y_{i-1})] D_i^{(2)} \\ & = [v y_{i-1}z_i - \mu y_i z_{i+1} + c_{i-2}(y_{i-2}z_{i+1} - y_{i+1}z_{i-2}) + c_i D_{i-1}^{(2)} + d_{i-1}^{(2)}(y_{i-1}z_{i+1} - y_{i+1}z_{i-1})] D_i^{(1)} ; \\ & \quad [(\lambda - \mu)d_i^{(1)} + c_{i-1}(x_{i-1}y_{i+1} - x_{i+1}y_{i-1}) + c_i(x_i y_{i+2} - x_{i+2}y_i)] D_i^{(2)} \\ & = \quad [(\mu - v)d_i^{(2)} + c_{i-1}(y_{i-1}z_{i+1} - y_{i+1}z_{i-1}) + c_i(y_i z_{i+2} - y_{i+2}z_i)] D_i^{(1)} \quad ; \end{aligned}$$

$$\lambda - c_{n-2}x_{n-2}/x_n - d_{n-1}^{(1)}x_{n-1}/x_n = \mu - c_{n-2}y_{n-2}/y_n - d_{n-1}^{(2)}y_{n-1}/y_n \quad i=1,2,\dots,n-1$$

$$(4) x_n y_n z_n \neq 0 ,$$

且惟一解为

$$\begin{aligned} a_i & = [\mu x_{i-1}y_i - \lambda x_i y_{i+1} + c_{i-2}(x_{i-2}y_{i+1} - x_{i+1}y_{i-2}) + c_i D_{i-1}^{(1)} + d_{i-1}^{(1)}(x_{i-1}y_{i+1} - x_{i+1}y_{i-1})] / D_i^{(1)} \\ b_i & = [(\lambda - \mu)d_i^{(1)} + c_{i-1}(x_{i-1}y_{i+1} - x_{i+1}y_{i-1}) + c_i(x_i y_{i+2} - x_{i+2}y_i)] / D_i^{(1)} \\ a_n & = \lambda - c_{n-2}x_{n-2}/x_n - d_{n-1}^{(1)}x_{n-1}/x_n \\ i & = 1,2,\dots,n \end{aligned}$$

证明 充分性。由引理 3.6 , 满足定理 3.5 条件的 $(\lambda, x), (\mu, y)$ 和 $(\mu, y), (v, z)$ 分别确

定两个实对称五对角矩阵 T 和 T' , 其元素可表示为

$$\begin{aligned} a_i & = [\mu x_{i-1}y_i - \lambda x_i y_{i+1} + c_{i-2}(x_{i-2}y_{i+1} - x_{i+1}y_{i-2}) + c_i D_{i-1}^{(1)} + d_{i-1}^{(1)}(x_{i-1}y_{i+1} - x_{i+1}y_{i-1})] / D_i^{(1)} \\ b_i & = [(\lambda - \mu)d_i^{(1)} + c_{i-1}(x_{i-1}y_{i+1} - x_{i+1}y_{i-1}) + c_i(x_i y_{i+2} - x_{i+2}y_i)] / D_i^{(1)} \\ a_n & = \lambda - c_{n-2}x_{n-2}/x_n - d_{n-1}^{(1)}x_{n-1}/x_n \\ i & = 1,2,\dots,n \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} a'_i & = [v y_{i-1}z_i - \mu y_i z_{i+1} + c_{i-2}(y_{i-2}z_{i+1} - y_{i+1}z_{i-2}) + c_i D_{i-1}^{(2)} + d_{i-1}^{(2)}(y_{i-1}z_{i+1} - y_{i+1}z_{i-1})] / D_i^{(2)} \\ b'_i & = [(\mu - v)d_i^{(2)} + c_{i-1}(y_{i-1}z_{i+1} - y_{i+1}z_{i-1}) + c_i(y_i z_{i+2} - y_{i+2}z_i)] / D_i^{(2)} \\ a'_n & = \mu - c_{n-2}y_{n-2}/y_n - d_{n-1}^{(2)}y_{n-1}/y_n \\ i & = 1,2,\dots,n \end{aligned}$$

由条件 (3), 易知 $T = T'$, 且以 $(\lambda, x), (\mu, y), (\nu, z)$ 为三个特征对。

由引理 3.6, 必要性显然。

算法 3.4

(1) 计算秩 (A_i) , 若秩 $(A_i) = 2, (i = 1, 2, \dots, n-1)$, 则转 (2), 否则问题 3.2 无惟一解;

(2) 计算 $\sum_{j=1}^n M_j^{(p)} (p = 1, 2, 3)$, 若 $\sum_{j=1}^n M_j^{(p)} = 0$, 则转 (3), 否则问题 3.2 无惟一解;

(3) 对每个 $i (1 \leq i \leq n-1)$ 按 $D_i^{(1)}, D_i^{(2)}, D_i^{(3)}$ 的顺序计算出第一个不为零的值, 并由此计算 $b'_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$, 转 (4);

(4) 计算 $\det(B_i)$, 若 $\det(B_i) = 0 (i = 1, 2, \dots, n-1)$, 则转 (5), 否则问题 3.2 无惟一解;

(5) 若 $D_{n-1}^{(p)} \neq 0 (p = 1, 2, 3)$, 或者 $D_{n-1}^{(1)} \neq 0, D_{n-1}^{(2)} = D_{n-1}^{(3)} = 0$, 或者 $D_{n-1}^{(2)} \neq 0, D_{n-1}^{(1)} = D_{n-1}^{(3)} = 0$, 或者 $D_{n-1}^{(3)} \neq 0, D_{n-1}^{(1)} = D_{n-1}^{(2)} = 0$, 则转 (6)

(6) 计算 $a'_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 并形成问题 3.2 的解 T 。

3.2.2 算例

例 3.1 设

$$\lambda = 4, \mu = 1, \nu = 7 - 4\sqrt{3}, x = (1, 0, -1, 0, 1)^T, y = (1, -1, 0, 1, -1)^T, z = (1, -\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}, 1)^T。$$

经计算满足定理 3.1 的条件, 由算法 3.1 得到惟一的实对称五对角矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & & \\ 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & 1 & 4 & 6 & 4 \\ & & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

例 3.2 设

$$\lambda = 5, \mu = 1, \nu = 2, x = (1, 1, 0, -1, -1)^T, y = (-1, 1, 0, -1, 1)^T, z = (1, 0, -1, 0, 1)^T。$$

经计算检验不满足定理 3.1 的条件, 问题没有惟一解, 但满足定理 3.2 的条件, 因此

由算法 3.2 得到不惟一的实对称五对角矩阵

$$T_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & & \\ 2 & 4 & 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 & 4 & 2 \\ & & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & & \\ 2 & 0 & 2 & -3 & \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ & -3 & 2 & 0 & 2 \\ & & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

例 3.3 设

$$\lambda = 4, \mu = 1, \nu = 7 - 4\sqrt{3}, x = (1, 0, -1, 0, 1)^T, y = (1, -1, 0, 1, -1)^T, z = (1, -\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}, 1)^T.$$

经计算满足定理 3.3 的条件, 选取 $p = 0$, 由算法 3.3 得到惟一的 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} 2 & I & & & \\ I & 2 & I & & \\ & I & 2 & I & \\ & & I & 2 & I \\ & & & I & 2 \end{bmatrix}$$

从而得到要求的实对称五对角矩阵 A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & & \\ 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & 1 & 4 & 6 & 4 \\ & & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

例 3.4 设

$$\lambda = 5, \mu = 1, \nu = 2,$$

$$x = (1, 1, 0, -1, -1)^T, y = (-1, 1, 0, -1, 1)^T, z = (1, 0, -1, 0, 1)^T$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = 1,$$

经计算满足定理 4.4 的条件, 由算法 3.4 得到惟一的实对称五对角矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & & \\ 2 & 4 & 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 & 4 & 2 \\ & & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

例 3.5 设

$$\begin{aligned} \lambda &= 6, \mu = 13, \nu = 9 + 6\sqrt{3}, \\ x &= (1, 0, -1, 0, 1)^T, y = (-1, -1, 0, 1, 1)^T, z = (1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, 1)^T, \\ c_1 &= c_2 = c_3 = 1, \end{aligned}$$

经计算满足定理 3.4 的条件，由算法 3.4 得到唯一的实对称五对角矩阵

$$T = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 & & \\ 6 & 8 & 6 & 1 & \\ 1 & 6 & 8 & 6 & 1 \\ & 1 & 6 & 8 & 6 \\ & & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

下面给出离散梁振动模型算例。

例 3.6 已知均匀悬臂梁的 6 阶弹簧-质点-刚杆离散模型，为方便起见，不失一般性，设质量矩阵 $M = I$ ，即各质点质量为 1，此时系统参数矩阵 C 形式为

$$C = \begin{bmatrix} k_1 + 4k_2 + k_3 & -(k_2 + k_3) & k_3 & & & \\ -2(k_2 + k_3) & k_2 + 4k_3 + k_4 & -2(k_3 + k_4) & k_4 & & \\ k_3 & -2(k_3 + k_4) & k_3 + 4k_4 + k_5 & -2(k_4 + k_5) & k_5 & \\ & k_4 & -2(k_4 + k_5) & k_4 + 4k_5 + k_6 & -2(k_5 + k_6) & k_6 \\ & & k_5 & -2(k_5 + k_6) & k_5 + 4k_6 & -2k_6 \\ & & & k_6 & -2k_6 & k_6 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

假设已知其三个特征对为

特征值	7.7641	18.0382	36.4072
特征向量	-0.5644	0.5335	-0.3249
	-0.1025	-0.4004	0.6067
	0.4552	-0.2607	-0.6211
	0.2553	-0.5969	0.3574
	-0.5942	-0.3535	-0.1124
	0.2134	0.0765	0.0164

表 3.1 三个特征对

由算法 3.1，得到刚度矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} 11.8403 & -10.1622 & 2.9244 & & & \\ -10.1622 & 16.8288 & -12.0864 & 2.9928 & & \\ 2.9244 & -12.0864 & 16.9525 & -9.9966 & 2.0244 & \\ & 2.9928 & -9.9966 & 12.0482 & -5.9150 & 1.0021 \\ & & 2.0244 & -5.9150 & 6.1215 & -2.0148 \\ & & & 1.00121 & -2.0148 & 0.9090 \end{bmatrix}$$

即得到系统结构参数为

$$k_1 = 1.4503, k_2 = 1.8664, k_3 = 2.9244, k_4 = 2.9928, k_5 = 2.0244, k_6 = 1.0021。$$

而实际模型物理参数为 $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3, k_4 = 3, k_5 = 2, k_6 = 1$ 。可见，此方法具有较高的识别精度。

例 3.7 仍以均匀悬臂梁的 5 阶弹簧-质点-刚杆离散模型为例，设质量矩阵 $M = \text{diag}[m_1, \dots, m_5]$ ，此时 (3.13) 式中矩阵 T 具有如下形式：

$$T = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + 4k_2 + k_3}{m_1} & \frac{-2(k_2 + k_3)}{\sqrt{m_1 m_2}} & \frac{k_3}{\sqrt{m_1 m_3}} & & & \\ & \frac{k_2 + 4k_3 + k_4}{m_2} & \frac{-2(k_3 + k_4)}{\sqrt{m_2 m_3}} & \frac{k_4}{\sqrt{m_2 m_4}} & & \\ & & \frac{k_3 + 4k_4 + k_5}{m_3} & \frac{-(k_2 + k_5)}{\sqrt{m_3 m_4}} & \frac{k_5}{\sqrt{m_3 m_5}} & \\ & & & \frac{k_4 + 5k_5}{m_4} & \frac{-2k_5}{\sqrt{m_4 m_5}} & \\ & & & & \frac{k_5}{m_5} & \\ & & & & & \frac{k_5}{m_5} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

对称

若已知系统的三个特征对和部分参数 k_3, k_4, k_5 , 则由算法 3.1 , 可以计算得到惟一矩阵 T , 再 (5,5) 位置元素识别出 m_5 ; 再 (4,5) 位置识别出 m_4 ; 依次向上 , 识别出 m_3, m_2, m_1 ; 同样由 (1, 2) 和 (1, 1) 位置元素识别出 k_2, k_1 , 就可以识别出系统所有结构参数。

假设已知振动梁的由三个特征对 (如表 3.2 所示)

特征值	1.2038	3.6010	17.4817
特征向量	0.2568	0.2659	-0.9158
	0.6311	0.4631	0.3939
	0.0477	-0.7126	-0.0768
	-0.6625	0.4410	0.0141
	0.3074	-0.1121	-0.0015

表 3.2 三个特征对

和部分刚度参数 $k_3 = k_4 = k_5 = 1$ 。由算法 3.4 , 计算得到

$$T = \begin{bmatrix} 15.00 & -5.6572 & 0.5771 & & \\ -5.6572 & 3.9998 & -1.6327 & 0.3535 & \\ 0.5771 & -1.6327 & 2.00 & -1.1547 & 0.2581 \\ & 0.3535 & -1.1547 & 1.2501 & -0.4472 \\ & & 0.2581 & -0.4472 & 0.200 \end{bmatrix}$$

由 (3.14) 式从中识别出质量矩阵

$M = \text{diag}[1.0001, 2.0005, 3.0023, 4.0002, 5]$ 以及参数 $k_1 = 1.9964, k_2 = 3.0009$ 。

而实际质量矩阵为 $M = \text{diag}[1, 2, 3, 4, 5]$, $k_1 = 2, k_2 = 3$ 。

可见同样具有较高识别精度。

3.3 梁有限元模型的振动反问题

振动梁的有限元离散模型得到的通常是实对称带状矩阵 , 因此此类模型的振动反问题就归结为实对称带状矩阵特征值反问题。下面基于三个特征对的实对称带状矩阵特征值反问题。

本节研究如下实对称带状矩阵的特征值反问题。

问题 3.3 设 λ, μ, ν 是三个给定的不同实数 (不妨假设 $\lambda > \mu > \nu$), x, y, z 是三个给定的 n 维非零实向量, 求一个 n 阶实对称九对角矩阵 A , 使得 $(\lambda, x), (\mu, y), (\nu, z)$ 是 A 的三个特征对。

研究了问题有解的充分条件, 从两个不同角度给出了解的表达式和两种数值算法。最后给出了这个问题的数值例子。另外, 本文中的算法思想可以方便地推广到实对称七对角矩阵、十一对角等其它实对称带状矩阵。

3.3.1 问题 3.3 的可解性及数值算法

本节从两个不同角度给出问题 3.3 有解的条件和解的表达式。

引理 3.6 两个不可约对称三对角矩阵的乘积是五对角矩阵; 三个不可约对称三对角矩阵的乘积是七对角矩阵; 四个不可约对称三对角矩阵的乘积是九对角矩阵, 依次类推; 特别地, 若 J 是不可约实对称三对角矩阵, 则 $A = J^2$ 是实对称五对角矩阵, $A = J^3$ 是实对称七对角矩阵, $A = J^4$ 是实对称九对角矩阵, 依次类推。

引理 3.7 两个不可约对称五对角矩阵的乘积是九对角矩阵; 特别地, 若 T 是不可约实对称五对角矩阵, 则 $A = T^2$ 是实对称九对角矩阵; 依次类推。

引理 3.8 设 (λ, x) 是不可约实对称三对角矩阵 J 的特征对, 则 (λ^4, x) 是实对称九对角矩阵 $A = J^4$ 的特征对。特别地, 若 J 的所有特征值非负, 且 λ 是 J 的特征值, 则 λ^4 是 A 的特征值。

引理 3.9 设 (λ, x) 是不可约实对称五对角矩阵 T 的特征对, 则 (λ^2, x) 是实对称九对角矩阵 $A = T^2$ 的特征对。特别地, 若 T 的所有特征值非负, 且 λ 是 T 的特征值, 则 λ^2 是 A 的特征值。

引入记号

$$d_k^{(1)} = \sum_{i=1}^k x_i y_i, d_k^{(2)} = \sum_{i=1}^k y_i z_i, d_k^{(3)} = \sum_{i=1}^k z_i x_i, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$D_k^{(1)} = \begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(2)} = \begin{vmatrix} z_k & z_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(3)} = \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ z_k & z_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

其中

$$c_k = b_{k-2}^2 b_{k-1}^2 + (a_{k-1} b_{k-1} + b_{k-1} a_k)^2 + (b_{k-1}^2 + a_k^2 + b_k^2) + (a_k b_k + b_k a_{k+1})^2 + b_k^2 b_{k+1}^2, \\ (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$l_k = (a_{k-1} b_{k-1} + b_{k-1} a_k) b_{k-1} b_k + (b_{k-1}^2 + a_k^2 + b_k^2) (a_k b_k + b_k a_{k+1}) + (a_k b_k + b_k a_{k+1}) (b_k^2 + a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2) + b_k b_{k+1} (a_{k+1} b_{k+1} + b_{k+1} a_{k+2}), \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$e_k = (b_{k-1}^2 + a_k^2 + b_k^2) b_k b_{k+1} + (a_k b_k + b_k a_{k+1}) (a_{k+1} b_{k+1} + b_{k+1} a_{k+2}) + b_k b_{k+1} (b_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 + b_{k+2}^2), \quad (k = 1, 2, \dots, n-2)$$

$$f_k = (a_k b_k + b_k a_{k+1}) b_{k+1} b_{k+2} + b_k b_{k+1} (a_{k+2} b_{k+2} + b_{k+2} a_{k+3}), \quad (k = 1, 2, \dots, n-3)$$

$$m_k = b_k b_{k+1} b_{k+2} b_{k+3}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-4)$$

$$b_{-1} = b_0 = b_n = 0$$

再通过平移, 令 $A = \tilde{A} - pI$, I 是单位矩阵, 则 A 为实对称九对角矩阵, 且以 $(\lambda, x), (\mu, y), (\nu, z)$ 为三个特征对。

下面给出求问题 3.3 解的数值算法。

算法 3.5

(1) 适当选取实数 p , 使 $\nu + p > 0$, 构造惟一的 Jacobi 矩阵 J , 使得 $(\sqrt[3]{\lambda + p}, x), (\sqrt[3]{\mu + p}, y), (\sqrt[3]{\nu + p}, z)$ 为 J 的三个特征对;

(2) 令 $\tilde{A} = J^4$ (具体计算公式如定理 3.6 证明过程), 再通过平移 $A = \tilde{A} - pI$, I 是单位矩阵, 得到要求的实对称九对角矩阵 A , 且以 $(\lambda, x), (\mu, y), (\nu, z)$ 为三个特征对。

下面从实对称五对角矩阵的角度给出问题 3.3 解的另一个条件和数值算法。

定理 3.7 如果给定的特征对 $(\bar{\lambda}, x), (\bar{\mu}, y), (\bar{\nu}, z)$ 满足定理 3.1 和定理 3.2 的条件, 其中 $\bar{\lambda} = \sqrt[3]{\lambda + p}, \bar{\mu} = \sqrt[3]{\mu + p}, \bar{\nu} = \sqrt[3]{\nu + p}$, p 为任意实数使得 $\nu + p > 0$, 则问题 3.3 有解。

证明 取实数 p , 使 $\nu + p > 0$, 根据定理 3.1、3.2 的条件, 由算法 3.1、3.2 可求出实对称五对角矩阵 T , 使得 $(\sqrt[3]{\lambda + p}, x), (\sqrt[3]{\mu + p}, y), (\sqrt[3]{\nu + p}, z)$ 为 T 的三个特征对, 即

单位矩阵，得到要求的实对称九对角矩阵 A ，且以 $(\lambda, x), (\mu, y), (\nu, z)$ 为三个特征对。

3.3.2 算例

本节给出求解问题 3.3 的一些数值例子。

例 3.8 设

$$\lambda = 16, \mu = 1, \nu = 81, x = (1, 0, -1, 0, 1)^T, y = (1, -1, 0, 1, -1)^T, z = (1, -\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}, 1)^T.$$

经计算满足定理 3.6 的条件，选取 $p = 0$ ，由算法 3.5 得到要求的实对称九对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 42 & 48 & 27 & 8 & 1 \\ 48 & 69 & 56 & 28 & 8 \\ 27 & 56 & 70 & 56 & 27 \\ 8 & 28 & 56 & 69 & 48 \\ 1 & 8 & 27 & 48 & 42 \end{bmatrix}$$

例 3.9 设

$$\lambda = 25, \mu = 1, \nu = 4, x = (1, 1, 0, -1, -1)^T, y = (-1, 1, 0, -1, 1)^T, z = (1, 0, -1, 0, 1)^T.$$

经计算满足定理 3.7 的条件，由算法 3.6 得到要求的实对称九对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 11 & 4 & 1 \\ 16 & 25 & 20 & 12 & 4 \\ 11 & 20 & 26 & 20 & 11 \\ 4 & 12 & 20 & 25 & 16 \\ 1 & 4 & 11 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

3.4 本章小结

本章讨论了梁离散模型的振动反问题：由三个频率和相应模态构造梁离散模型的结构参数。给出了问题有解的条件、数值算法和数值例子。说明了本章的理论与算法在梁离散模型参数识别中的实际应用。

第四章 阻尼振动系统中的二次特征值反问题

4.1 阻尼振动系统中二次特征值问题

由于阻尼是相对运动表面的摩擦力、液体与气体的介质阻力、电磁力以及材料变形时的内阻力等造成的，因此实际遇到的振动问题大多数是阻尼振动系统。阻尼是描述结构动力学性能的基本参数之一，对结构动力学分析结果的可靠性和精度有很大的影响。但是因为影响阻尼的因素很复杂，所以对阻尼的描述是一个困难的问题。

本节结合二次特征值问题的理论与算法和结构动力学理论讨论阻尼振动系统的响应等动力学特性。

4.1.1 单自由阻尼振动系统

首先考察单自由度阻尼振动系统模型，如下图单弹簧振子的自由振动问题。

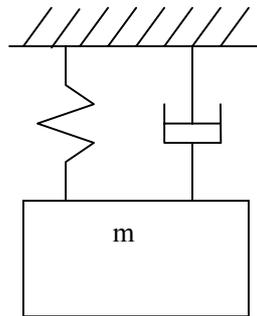


图 4.1 单自由度阻尼系统

此系统的运动方程为

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (4.1)$$

令

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c}{2\sqrt{mk}},$$

则上式化为

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (4.2)$$

其中 ω 称为系统的无阻尼固有频率， ζ 为无量纲的阻尼率。设方程(4.1)的解具有形式

$x(t) = ae^{\lambda t}$, 其中 a 为常数 , λ 为待定参数。将 $x(t)$ 代入方程(4.1) , 得系统的特征方程为

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega\lambda + \omega^2 = 0 ,$$

有两个特征根

$$\lambda_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega .$$

由此可讨论阻尼对系统自由振动的影响。根据无量纲阻尼率 ζ 的取值不同 , 可以将系统分为三类 :

(1) 当 $\zeta = 1$ 时 , 称为临界阻尼状态

此时 , 系统特征方程的两个特征根是相等的负实数 , 二阶微分方程 (4.1) 的基本解为 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}$, 它们随时间变化而趋于零。可见处于临界阻尼的系统在自由运动时不会产生振动。此时 , 系统的阻尼系数 $c^* = 2\sqrt{km}$, 称为临界阻尼系数 , 显然它是系统本身所具有的特性之一。

于是阻尼率 $\zeta = \frac{c}{c^*}$, 也就是说阻尼率 (相对阻尼系数) ζ 反映了系统的实际阻尼和临界阻尼的关系。

(2) 当 $\zeta > 1$ 时 , 称为过阻尼状态

此时 , 系统的特征值是两个互不相同的负实数 , 二阶微分方程 (4.1) 的基本解为 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$, 基函数随时间变化单调趋于零。此时 , 系统在自由运动下也不会产生振动。

(3) 当 $\zeta < 1$ 时 , 称为欠阻尼状态

此时 , 系统的特征值为具有负实部的一对共轭复数。二阶微分方程(4.1)的解为

$$x = e^{-\zeta\omega t} (c_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega t} + c_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega t})$$

其中 c_1, c_2 为积分常数 , 由振动的初始条件确定。这说明 , 系统在自由运动时将按正弦或余弦函数产生周期振动。同时 , 振幅将随时间按指数规律衰减。

综上所述 , 对于单自由度的阻尼振动系统 , 在临界阻尼和过阻尼的情形下 , 它的

自由运动都不具有振动性，只有在欠阻尼的情形下，它的自由运动才具有振动性，并且是衰减运动。在工程实际中，欠阻尼最为常见。

4.1.2 多自由度阻尼振动系统

考虑多自由度自由振动系统，其运动方程为如下二阶常系数微分方程

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad (4.3)$$

其中 M, C, K 是 $n \times n$ 复(实)矩阵， $q(t)$ 是 n 维可微向量函数。

用分离变量法，设 $q(t) = xe^{\lambda t}$ ，其中 $x \in C^n$ 是与时间 t 无关的常向量， $\lambda \in C$ 为待定参数。将 $q(t)$ 代入上述齐次方程，得待定参数 λ, x 的特征方程

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0. \quad (4.4)$$

由此可知， $q(t) = xe^{\lambda t}$ 是微分方程(4.3)的解当且仅当 λ, x 是二次特征值问题(4.4)的解。

因此，微分方程(4.3)的解可以用二次特征值问题的解来表示。

对于多自由度系统，可以类似地定义过阻尼和欠阻尼的概念。假设 $q(t) = xe^{\lambda t}$ 是齐次微分方程(4.3)的一个解，则 λ, x 是二次特征值问题(4.4)的特征对。此时有

$$(Mx, x)\lambda^2 + (Cx, x)\lambda + (Kx, x) = 0.$$

求解上述二次多项式方程得

$$\lambda = \frac{-(Cx, x) \pm \sqrt{(Cx, x)^2 - 4(Mx, x)(Kx, x)}}{2(Mx, x)}$$

于是有以下定义：

(1) 如果矩阵 M, C, K 对称正定，并且对任意不为零的向量 $x \in C^n$ 都有

$$\gamma(M, C, K) = (Cx, x)^2 - 4(Mx, x)(Kx, x) > 0$$

称系统为过阻尼状态^[71]。

(2) 如果矩阵 M, C, K 对称正定，并且对任意不为零的向量 $x \in C^n$ 都有

$$\gamma(M, C, K) = (Cx, x)^2 - 4(Mx, x)(Kx, x) < 0$$

称系统为欠阻尼状态^[71]。

显然，对过阻尼系统，它所有的特征值都是实数。而对欠阻尼系统，它的特征值是共轭成对出现的复数，并且都具有负实部。这与单自由度的情形是类似的。

Lancaster^[71]证明了过阻尼系统的几个性质：

- 系统的 n 个最大特征值和 n 个最小特征值之间有较大间隔；
- n 个最大特征值对应的 n 个特征向量是线性无关的。

假设二次特征值问题有 $2n$ 个不同的特征值 λ_i ， $i = 1, 2, \dots, 2n$ ，对应的右特征向量为 x_i 。记

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}), \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_{2n}]$$

显然齐次方程(4.3)的通解可以表示为

$$q(t) = \sum_{i=1}^{2n} x_i e^{\lambda_i t} c_i = X e^{\Lambda t} C_1$$

其中 $C = (c_1, c_2, \dots, c_{2n})^T$ 是常向量。如果二次特征值问题有一个特征值具有正实部，则随着时间的变化， $\|q(t)\|$ 可能按指数增长，即微分方程描述的系统在自由振动下是不稳定的。反之，如果对应的二次特征值问题所有的特征值都满足 $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$)，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|q(t)\| = 0$ ，所以微分方程描述的系统在自由运动下是稳定的。

4.1.3 二次特征值问题的理论及方法

最近，由于二次特征值问题 (QEP-Quadratic Eigenvalue Problem) 在结构动力学、电子振荡、陀螺系统、流体力学以及信号处理等领域中的广泛应用，已经吸引了越来越多的关注。

所谓二次特征值问题就是寻求标量 λ 和非零向量 x, y 满足：

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0, \quad y^H (\lambda^2 M + \lambda C + K) = 0 \quad (4.5)$$

其中 M, C 和 K 是 $n \times n$ 复矩阵， x, y 分别是属于特征值 λ 的右、左特征向量。记

$$Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K \quad (4.6)$$

为了简便起见,有时候也直接称 $Q(\lambda)$ 为二次特征值问题,并记 $\lambda(M, C, K)$ 为二次特征值问题的所有特征值的集合。对一般的二次特征值问题,沿用力学惯例,分别称 M, C, K 为质量矩阵,阻尼矩阵和刚度矩阵。设 $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$ 为二次特征值问题的特征多项式。显然, λ 是二次特征值问题的特征值当且仅当 $p(\lambda) = 0$ 。如果 M 非奇异,则 $p(\lambda)$ 是一个 $2n$ 次多项式,它在复平面上有 $2n$ (考虑重数)个有限的根。如果 M 奇异,则类似于广义特征值问题,二次特征值问题特征值的个数可以有无穷多个,也可以少于 $2n$ 个,甚至可能是空集。

二次特征值问题和标准特征值问题以及广义特征值问题的主要代数区别在于二次特征值问题有 $2n$ 个特征值(有限或无穷大的)。

二次特征值问题是一类重要的非线性特征值问题,它与标准特征值问题和广义特征值问题在理论和求解程序上很少相似。主要的复杂性在于二次特征值问题没有类似于标准特征值和广义特征值问题的 Schur 定理和广义 Schur 定理那样的规范形。

矩阵束 $Q(\lambda)$ 是二次矩阵多项式,称 $Q(\lambda)$ 为 λ -矩阵,并用 $\lambda(M, C, K)$ 表示它的谱 $\lambda(M, C, K) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det Q(\lambda) = 0\}$,即为 $Q(\lambda)$ 的特征值的集合。

如果对于任意的 λ 都有 $\det Q(\lambda)$ 恒不为零,则称 λ -矩阵 $Q(\lambda)$ 是正则的;反之则称 $Q(\lambda)$ 是非正则的。若不特别说明,假定 $Q(\lambda)$ 是正则的。文献[70]给出了另一个定义:当矩阵 M 是非奇异时,称 λ -矩阵 $Q(\lambda)$ 是正则的。

由于特征多项式是 $\det Q(\lambda) = \det(M)\lambda^{2n} + \lambda$ 低次项,所以当 M 非奇异时, $Q(\lambda)$ 是正则的,而且有 $2n$ 个有限特征值。当 M 奇异时, $\det Q(\lambda)$ 阶数 $r < 2n$ 并且 $Q(\lambda)$ 有 r 个有限特征值,这种情况下通常约定 $Q(\lambda)$ 有 $2n - r$ 个无穷大的特征值。值得注意的是,当 $Q(\lambda)$ 正则时,可能会出现同一个特征向量对应两个不同特征值的情况。

例如，定义 $Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 6\lambda^2 - 6\lambda & 0 \\ 2\lambda & 6\lambda^2 - 7\lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$ ，或等价定义 $M = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，

$C = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $K = I$ 。于是

$$\det Q(\lambda) = -6\lambda^5 + 11\lambda^4 - 12\lambda^3 + 12\lambda^2 - 6\lambda + 1 \neq 0$$

可见， $Q(\lambda)$ 是正则的。

计算得到其六个特征对 (λ_k, x_k) , $(k = 1, \dots, 6)$ 如下表：

k	1	2	3	4	5	6
λ_k	1/3	1/2	1	i	$-i$	∞
x_k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} NaN \\ NaN \\ NaN \end{bmatrix}$

表 4.1 特征值和特征向量

这些特征值中有五个是有限的（它们是 $\det Q(\lambda) = 0$ 的根），并且其中一个是无穷大的。可以看到，当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时，可以得到 $x_1 = x_2$ 。但是如果正则矩阵束 $Q(\lambda)$ 有 $2n$ 个互不相同的特征值，则存在 n 个线性无关的特征向量，这是标准特征值问题和广义特征值问题结果的一个非平凡推广。

与标准特征值问题和广义特征值问题一样，每一个特征值的代数重数定义为 $\det Q(\lambda) = 0$ 的根的重数。单特征值是指该特征值的代数重数为 1。半单特征值是指一个 k 重特征值有 k 个线性无关的特征向量。亏损特征值是指一个 k 重特征值对应的特征向量所张成子空间的维数小于 k 。因此，当特征值的重数 $k > n$ 时必然是亏损的。

二次特征值问题 $(\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$ 可以通过线性化得到如下等价的广义特征值问题

$$L1: \quad \lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & N \\ -K & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$L2: \quad \lambda \begin{bmatrix} C & M \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

其中 N 为一个非奇异调节矩阵，一般取为 M 或 K 。称(4.7)式为二次特征值问题的第一友矩阵形式，称(4.8)式为二次特征值问题的第二友矩阵形式。于是求解二次特征值问题，可转化为求解广义特征值问题。因此，所有求解广义特征值问题的算法都用来求解二次特征值问题。

另外，当系数矩阵是实矩阵时， $Q(\lambda)$ 的谱在复平面内关于实轴是对称的，即特征值或者是实数或者是共轭复数。

二次特征值问题的特征值分布具有以下特征：

矩 阵	特 征 值	特 征 向 量
M, C, K 均为实矩阵	λ 为实数或共轭成对出现	x 为 λ 和 $\bar{\lambda}$ 的右特征向量
M 为非奇异矩阵	有 $2n$ 个有限的特征值 λ	
M 为奇异矩阵	存在特征值 ∞	
M, K 为正定的实矩阵， C 为反对称矩阵	特征值均为纯虚数	
M, K 为 Hermite 阵，且 M 正定， $C = -C^*$	λ 为纯虚数或以 $(\lambda, -\bar{\lambda})$ 形式成对出现	x 是 λ 的右特征向量，且是 $-\bar{\lambda}$ 的左特征向量
M, C, K 均为 Hermite 阵	λ 为实数或共轭成对出现	x 为 λ 的右特征向量，且为 $\bar{\lambda}$ 的左特征向量
M 正定， K 半正定	$\text{Re}(\lambda) \leq 0$	
M, C 正定， K 半正定， 且 $\gamma(M, C, K) > 0$	λ 为实数且 n 个最大、 n 个最小特征值之间有间隔	n 个最大的特征值对应的特征向量是线性无关的

表 4.2 二次特征值问题的特征值分布性质

4.1.4 算例

例 4.1 如图 4.1 所示单自由度阻尼振动系统

(1) 取质量 $m = 2$, 阻尼 $c = 1.5$, 刚度 $k = 50$; 此时临界阻尼 $c^* = 2\sqrt{km} = 10$, 阻尼率 $\zeta = \frac{c}{c^*} = 0.15 < 1$, 系统为欠阻尼状态。

计算得到 $\lambda = -0.75 \pm 4.9434i$, 于是得到位移与时间的关系图如下 :

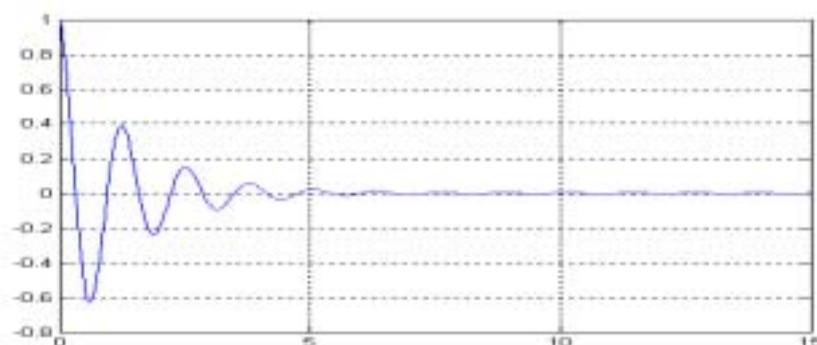


图 4.2 欠阻尼状态位移-时间关系图

(2) 取质量 $m = 2$, 阻尼 $c = 15$, 刚度 $k = 50$; 此时临界阻尼 $c^* = 2\sqrt{km} = 10$, 阻尼率 $\zeta = \frac{c}{c^*} = 1.5 > 1$, 系统为过阻尼状态。

计算得到 $\lambda = -1.9098$, 于是得到位移与时间的关系图如下 :

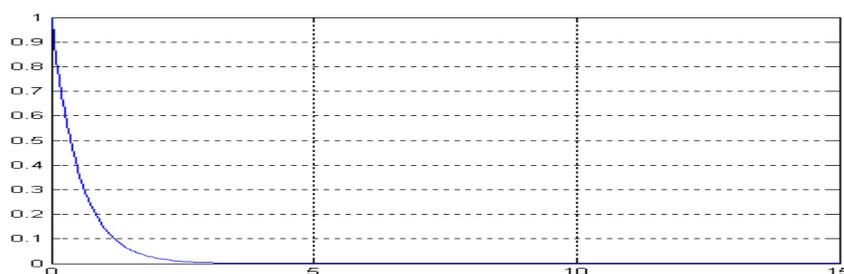


图 4.3 过阻尼状态位移-时间关系图

(3) 取质量 $m = 2$, 阻尼 $c = 10$, 刚度 $k = 50$; 此时临界阻尼 $c^* = 2\sqrt{km} = 10$, 阻尼率 $\zeta = \frac{c}{c^*} = 1$, 系统为临界阻尼状态。

计算得到 $\lambda = -5$, 于是得到位移与时间的关系图如下 :

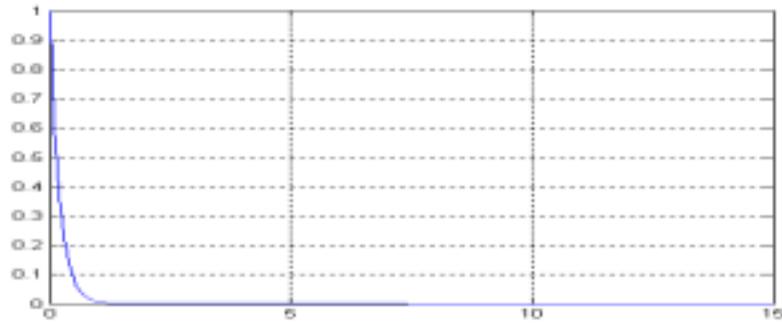


图 4.4 临界阻尼状态位移-时间关系图

例 4.2 考虑如下阻尼弹簧-质点系统

Mass-Spring System

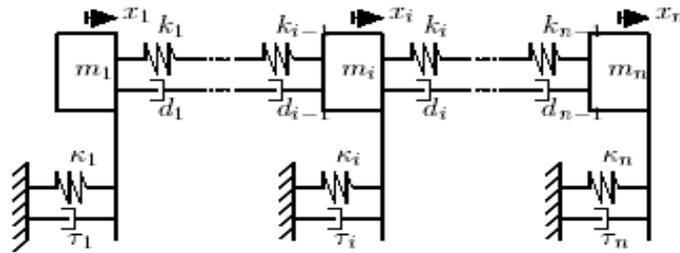


图 4.5 多自由度阻尼弹簧-质点系统

此系统微分方程

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0$$

其特征方程

$$Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$$

其中 $M = \text{diag}[m_1, \dots, m_n]$, $C = P \text{diag}[d_1, \dots, d_{n-1}, 0] P^T + \text{diag}[\tau_1, \dots, \tau_n]$,

$$K = P \text{diag}[k_1, \dots, k_{n-1}, 0] P^T + \text{diag}[k_1, \dots, k_n] , P = \delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} , \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

(1) 取 $n = 5$, $m_1 = \dots = m_n = 1$, $k_1 = k_n = 2k, k_2 = \dots = k_{n-1} = k$, $\tau_1 = \tau_n = 2\tau$,

$\tau_2 = \dots = \tau_{n-1} = \tau$, 此时

$$M = I, C = \tau * \text{tridiag}[-1, 3, -1], K = k * \text{tridiag}[-1, 3, -1]。$$

取 $\tau = 1, k = 50$ 时 , 系统为欠阻尼状态 , 通过 QZ 算法计算得相应的特征值如下 :

序号	特征值	序号	特征值
1	-2.3660 +15.1988i	2	-2.3660 -15.1988i
3	-2.0000 +14.0000i	4	-2.0000 -14.0000i
5	-0.6340 + 7.9370 i	6	-0.6340 - 7.9370i
7	-1.5000 +12.1552i	8	-1.5000 -12.1552i
9	-1.0000 + 9.9499i	10	-1.0000 - 9.9499i

表 4.3 特征值

特征值分布如图 4.6 所示：

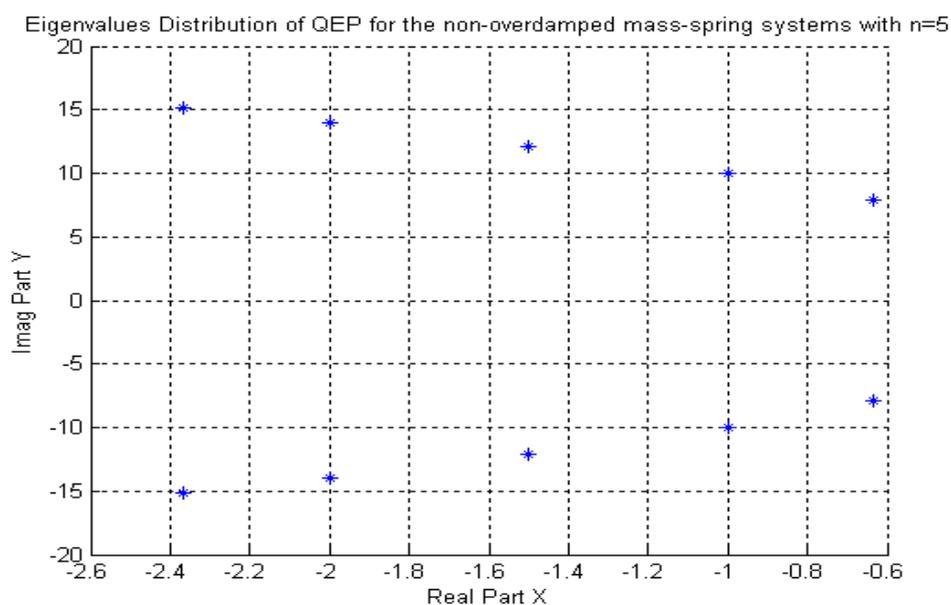


图 4.6 二次特征值问题的特征值分布图

对应各特征值的位移时间关系图如下

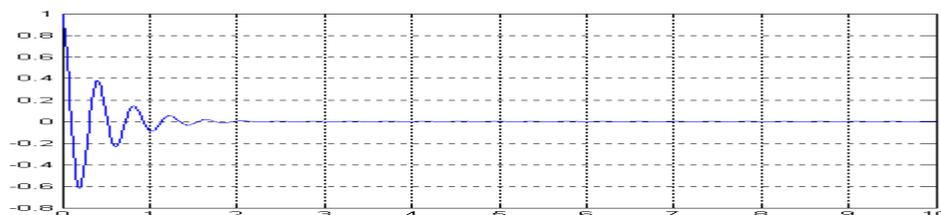


图 4.7 对应特征值 λ_1 的位移时间关系图

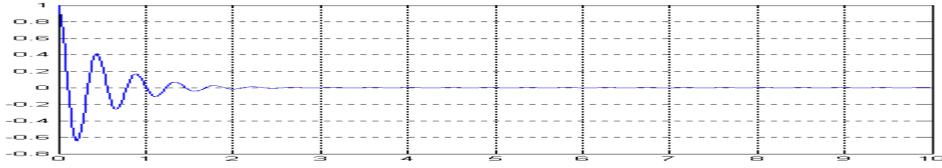


图 4.8 对应特征值 λ_3 的位移时间关系图

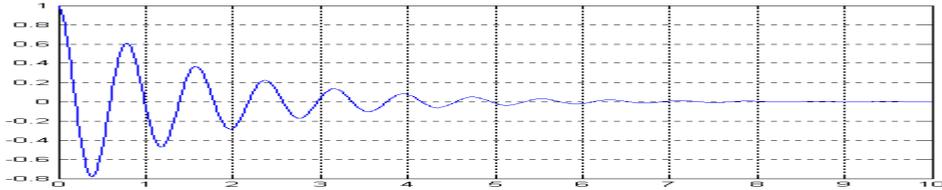


图 4.9 对应特征值 λ_5 的位移时间关系图

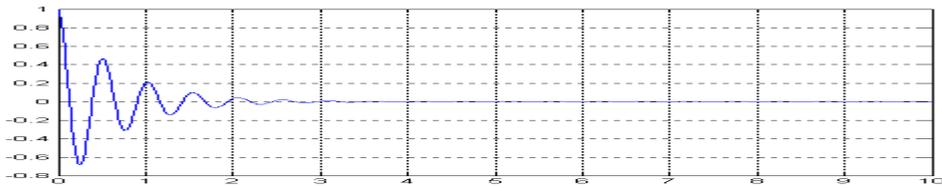


图 4.10 对应特征值 λ_7 的位移时间关系图

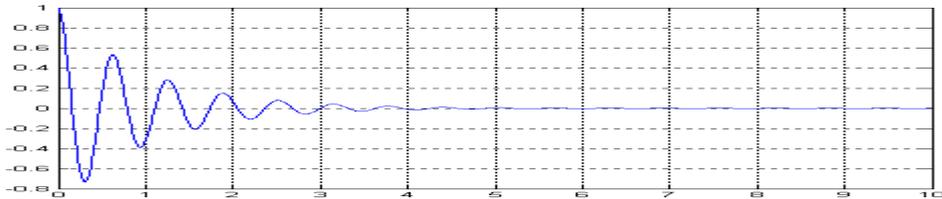


图 4.11 对应特征值 λ_9 的位移时间关系图

(2) 取 $n = 50$, $\tau = 3, k = 5$ 时 , 此时系统为欠阻尼状态。

由 QZ 算法得到特征值分布如下 :

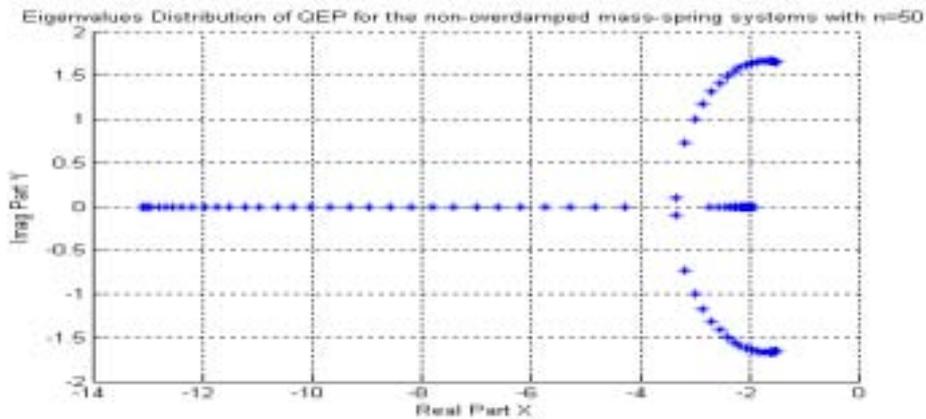


图 4.12 二次特征值问题的特征值分布图

在这种情况下，观察对应各特征值位移时间关系图，可见对应各特征值的位移很快趋于零。

限于篇幅，这里不再给出对应各特征值的位移时间曲线。

(3) 取 $n = 50$ ， $\tau = 10, k = 5$ 时，此时系统为过阻尼状态。

由 QZ 算法得到特征值分布如下：

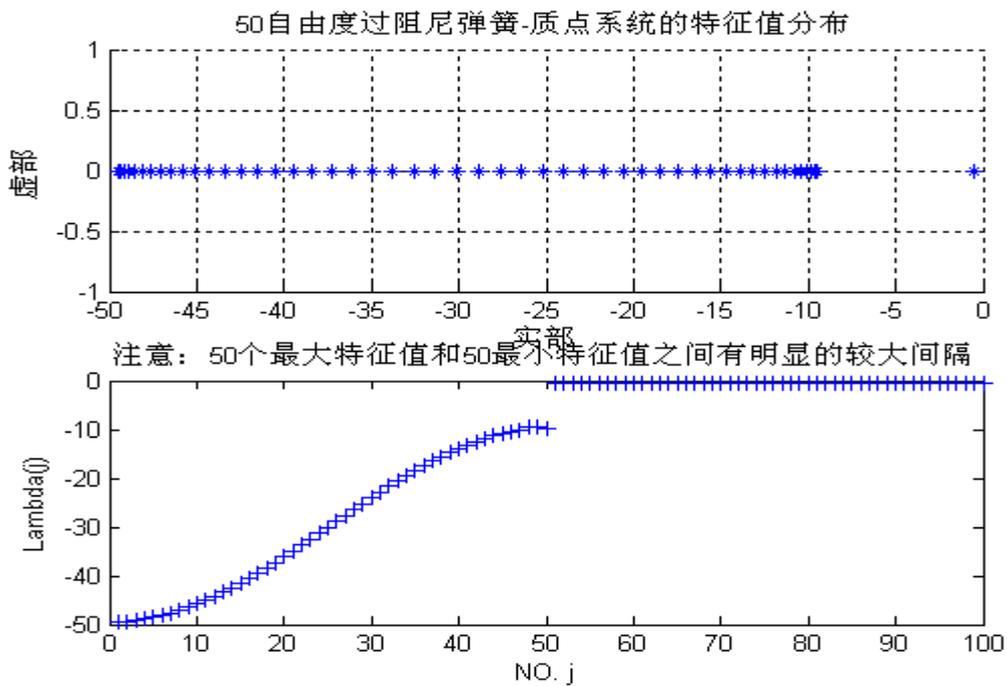


图 4.13 二次特征值问题的特征值分布图

此结果验证了 Lancaster 的理论^[71]。此时系统不产生振动。

4.2 由全部频率模态识别阻尼振动系统的结构物理参数

所谓二次特征值反问题 (IQEP-INVERSE QUADRATIC EIGENVALUE PROBLEM) 是与二次特征值问题相反的过程。从数学上讲二次特征值反问题就是由给定二次特征值问题的部分或全部特征信息确定或估计矩阵 M 、 C 和 K ；从工程上讲就是由系统的动力学特性识别系统的物理参数。

本节结合阻尼振动模型给出二次特征值反问题的合理提法,研究其解的存在性和数值算法,讨论由频率模态数据识别系统的物理参数,包括阻尼矩阵、质量矩阵和刚度矩阵,并分别举例说明理论和方法在阻尼系统振动反问题中的应用。

4.2.1 问题的提出

本节假定在阻尼振动系统中,质量矩阵是已知的,并且已知系统的全部频率和模态,需要识别系统的阻尼矩阵和刚度矩阵,即归纳为如下问题:

问题 4.1 给定 $2n$ 个复数 $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ 和 $2n$ 个向量 x_1, \dots, x_{2n} (实或复) 以及实对称正定矩阵 M , 求 n 阶矩阵 C 和 K , 使得二次特征值问题 $Q(\lambda) = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$ 具有给定的 $2n$ 个特征对 $(\lambda_i, x_i)_{i=1}^{2n}$ 。

下面给出问题 4.1 存在惟一解的充分条件, 提出求解问题 4.1 的数值算法, 并结合实际振动模型给出数值试验说明此类二次特征值反问题在阻尼弹簧-质点系统中的应用。

4.2.2 问题 4.1 的解和算法 二次特征值问题

$$Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0 \quad (4.7)$$

可转化为广义特征值问题

$$Az = \lambda Bz \quad (4.8)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

定理 4.1 若 $z_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \lambda_i x_i \end{bmatrix}, (i = 1, \dots, 2n)$ 线性无关, 则问题 4.1 的解存在且惟一。

证明 由已知条件 M 是给定的对称正定矩阵, 则 B 是 $2n$ 阶对称非奇异矩阵, 二次特征值问题转化为标准特征值问题

$$B^{-1}Az = \lambda z$$

由条件知, $2n \times 2n$ 矩阵 $Z = [z_1, \dots, z_{2n}]$ 是非奇异矩阵, 于是

$$\bar{A}Z = Z\Lambda$$

其中 $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{2n} \end{bmatrix}$, $\bar{A} = B^{-1}A$ 。因此

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix} = B\bar{A} = B(Z\Lambda Z^{-1}) \quad (4.10)$$

从而由(4.10)得到要求的 $Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$ 中的矩阵 C 和 K 。

特别地, 若 M 是对角正定阵时, 则 B 是 $2n$ 阶对角正定矩阵, 于是

$$B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}} \cdot B^{-\frac{1}{2}}z = \lambda \cdot B^{-\frac{1}{2}}z$$

令 $\bar{A} = B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$, $y = B^{-\frac{1}{2}}z$, 则上述广义特征值问题可写成如下标准特征值问题

$$\bar{A}y = \lambda y$$

因为 $2n$ 阶矩阵 $Z = [z_1, \dots, z_{2n}]$ 是非奇异矩阵, 则 $y_1 = B^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda_1 x_1 \end{bmatrix}, \dots, y_{2n} = B^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} x_{2n} \\ \lambda_{2n} x_{2n} \end{bmatrix}$ 是

线性无关的。于是 n 阶矩阵 M 、 C 和 K 非奇异。由

$$\bar{A}Y = Y\Lambda,$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{2n} \end{bmatrix},$$

因此

$$\bar{A} = Y\Lambda Y^{-1},$$

即有

$$A = B^{-\frac{1}{2}}\bar{A}B^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

从而得到要求的 $Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$ 中的矩阵 C 和 K 。

算法 4.1

- (a) 如果定理 4.1 的条件满足，则转 (b)；否则，此算法不能求解；
- (b) 由 (4.10)(4.11) 计算求矩阵 C 和 K 。

在中小型阻尼弹簧-质点系统中，可以通过实验手段测得系统的全部频率（特征值）和复模态（特征向量），然后利用算法 4.1 即可识别系统的物理参数（阻尼矩阵和刚度矩阵等）。

4.2.3 算例

例 4.3 考虑如下 n 自由度阻尼弹簧-质点系统：

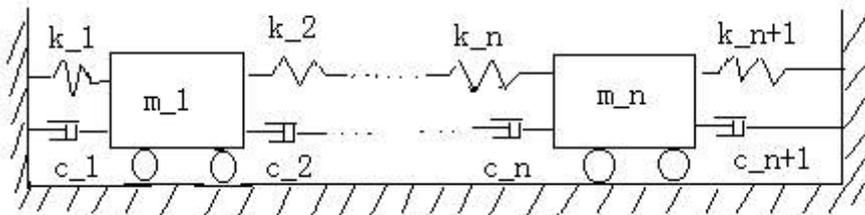


图 4.14 n 自由度阻尼弹簧-质点系统

此振动系统的二阶微分方程为

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0$$

其特征方程为二次特征值问题

$$Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$$

其中质量矩阵 $M = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix}$ ，阻尼矩阵 C 和刚度矩阵 K 是实对称三对角矩阵。

不失一般性，取 $n = 3$ ，且 $m_i = 1 (i = 1, 2, 3)$ ，即 $M = I$ 给定，且已知 $2n$ 个复数 $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ 和 $2n$ 个向量 x_1, \dots, x_{2n} 如下：

$$\lambda_{1,2} = -2.5607 \pm 12.8122i; \lambda_{3,4} = -1.5 \pm 9.8869i; \lambda_{5,6} = -0.4393 \pm 5.3941i$$

$$[x_1, \dots, x_6] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

经验证满足定理 4.1 的条件，于是由算法 4.1，得

$$A = B^{\frac{1}{2}} \bar{A} B^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -100 & 50 & 0 & -3 & 1.5 & 0 \\ 50 & -100 & 50 & 1.5 & -3 & 1.5 \\ 0 & 50 & -100 & 0 & 1.5 & -3 \end{bmatrix},$$

所要求的阻尼矩阵 C 和刚度矩阵 K 是如下实对称三对角矩阵

$$C = 1.5 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad K = 50 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.3 由部分频率模态识别比例阻尼振动系统的物理参数

4.3.1 问题的提出

工程上往往只能针对不同的影响因素，给出阻尼的不同描述模型，通常的做法是假设结构的阻尼满足某种阻尼模型，然后利用实验数据确定阻尼模型中的待定参数。在长期的工程实践中，工程技术人员提出了多种数学模型描述真实结构的阻尼，这些模型的形式由简单到复杂，对真实情况的描述精度也逐渐提高。总体来说，阻尼模型主要分为比例阻尼和非比例阻尼两大类。比例阻尼模型包括最初由 Rayleigh 首先提出的 Rayleigh 阻尼模型：认为结构的阻尼矩阵与质量矩阵和刚度矩阵成比例。本节讨论比例阻尼系统的二次特征值反问题。

假设已知比例阻尼振动系统的部分频率和模态，考虑识别系统的阻尼矩阵和刚度矩阵，即如下问题：

问题 4.2 由无阻尼系统的三个实特征对和实对角正定矩阵 M 以及阻尼比构造二次特征值问题： $Q(\lambda) = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$ 中的实对称三对角矩阵 C 和 K ，并计算得到二次特征值问题： $Q(\lambda) = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$ 的 $2n$ 个特征对。

问题 4.2 主要是基于阻尼弹簧-质点系统中的实际应用而提出的。下面分析解的适定性，给出求解问题的数值算法，并分析问题 4.2 在阻尼弹簧-质点系统中的应用。

4.3.2 问题 4.2 的解和算法

本节讨论 n 自由度阻尼弹簧-质点系统的一类特殊结构二次特征值反问题，即考虑如下二次特征值问题：

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0 \quad (4.12)$$

其中质量矩阵 $M = \text{diag}[m_1, m_2, \dots, m_n]$ 是已知 n 阶对角正定矩阵，而阻尼矩阵 C 和刚度矩阵 K 是 n 阶实对称三对角矩阵。

假设系统的阻尼是比例阻尼，即阻尼矩阵 C 是质量矩阵 M 和刚度矩阵 K 的线性组合

$$C = \alpha M + \beta K \quad (4.13)$$

其中 α, β 为比例常数，与结构的固有频率和阻尼有关。设 ω_i, ω_j 分别为第 i 个和第 j 个固有频率， ξ_i, ξ_j 分别为第 i 个和第 j 个振型的阻尼比（即实际阻尼和该振型的临界阻尼的比值），即 α, β 可表示为

$$\alpha = \frac{2(\xi_i \omega_j - \xi_j \omega_i)}{(\omega_j + \omega_i)(\omega_j - \omega_i)} \omega_i \omega_j, \quad \beta = \frac{2(\xi_j \omega_j - \xi_i \omega_i)}{(\omega_j + \omega_i)(\omega_j - \omega_i)}$$

特别地，当 $\xi_i = \xi_j = \xi$ 时，有

$$\alpha = \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \xi, \quad \beta = \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \xi \quad (4.14)$$

通常取 $i=1, j$ 取 2 或大于 2 的某个正整数。振型阻尼比 ξ_i 和 ξ_j 的数值可由试验确定或参考同类结构的已有数据确定。

因为对于给定的振动系统，它的质量和刚度是系统固有的物理性质，而对于一个大型或复杂的振动系统，测量其所有特征值和/或特征向量是不可能的。因此一般是先通过实验测得其几个低阶的频率（特征值）和/或振型（特征向量），然后再通过测得的数据重构系统，从而通过计算最终得到整个系统的振动特性。于是，这里采取了实验与计算相结合的思想采用分步处理的策略，首先由实验手段获得无阻尼系统的三个低阶频率和相应振型以及相关比例系数等数据信息来确定刚度矩阵 K 和阻尼矩阵

C ,再计算出二次特征值问题的所有特征对 ,从而可以分析整个阻尼振动系统的振动特性。

引理 4.1^[31] 设 λ, μ, ν 是三个给定的不同实数 (不妨假设 $\lambda > \mu > \nu$) ,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ 为三个不同的非零实向量 ,

有惟一的实对称三对角矩阵 J ,使其具有给定的三个特征对 $(\lambda, x), (\mu, y), (\nu, z)$ 的充分必要条件是 :

$$(1) d_n^{(1)} = d_n^{(2)} = d_n^{(3)} = 0$$

$$(2) (\lambda - \mu)d_k^{(1)} / D_k^{(1)} = (\mu - \nu)d_k^{(2)} / D_k^{(2)} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

若 $y_k = 0$,则有 $(\lambda - \mu)d_j^{(1)} / D_j^{(1)} = (\nu - \lambda)d_j^{(3)} / D_j^{(3)}$, $j = k-1, k$ 其中

$$\left\{ \begin{array}{l} d_k^{(1)} = \sum_{i=1}^k x_i y_i, d_k^{(2)} = \sum_{i=1}^k y_i z_i, d_k^{(3)} = \sum_{i=1}^k z_i x_i, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ D_k^{(1)} = \begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} \\ x_k & x_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(2)} = \begin{vmatrix} z_k & z_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}, D_k^{(3)} = \begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ z_k & z_{k+1} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \end{array} \right.$$

设 λ, μ, ν 是无阻尼系统的三个不同的特征值 (不妨假设 $\lambda > \mu > \nu$) ,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ 是相应的特征向量。

首先不考虑阻尼 ,即阻尼矩阵 $C = 0$,则得到频率 ω 与相应振型 ϕ 的方程

$$K\phi = \omega^2 M\phi \quad (4.15)$$

记 $\lambda = \omega^2$,有广义特征值问题 $K\phi = \lambda M\phi$ 。由于质量矩阵 M 是对角正定 ,于是

$$M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} \cdot M^{\frac{1}{2}} \phi = \lambda \cdot M^{\frac{1}{2}} \phi \quad (4.16)$$

令 $M^{\frac{1}{2}} \phi = y$, $M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} = A$,则 (4.16) 式化为 $Ay = \lambda y$,其中 A 为实对称三对角矩阵。

假定由实验测得无阻尼系统 (4.15) 的三个频率和相应振型 ,即给定三个特征对 (λ_1, y_1) , (λ_2, y_2) 和 (λ_3, y_3) 。若满足引理 4.1 ,则存在惟一的 A 为实对称三对角矩

阵，从而得到刚度矩阵 $K = M^{\frac{1}{2}} A M^{\frac{1}{2}}$ 。

再由实验手段或类似结构系统得到阻尼系数 α, β ，得到阻尼矩阵 $C = \alpha M + \beta K$ 。

这样得到二次特征值问题 $Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$ 的所有系数矩阵，于是可以计算得到二次特征值问题的所有 $2n$ 个特征对，从而可以分析整个阻尼弹簧-质点系统的振动特性。

算法 4.2：

- a) 验证三个特征对 (λ_1, y_1) ， (λ_2, y_2) 和 (λ_3, y_3) 满足引理 4.1 条件，由实对称三对角矩阵特征值反问题算法计算得到 A ；
- b) 计算刚度矩阵 $K = M^{\frac{1}{2}} A M^{\frac{1}{2}}$ ；
- c) 由实验手段或类似结构系统得到 α, β ，计算阻尼矩阵 $C = \alpha M + \beta K$ ；
- d) 计算得到二次特征值 $Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$ 的所有 $2n$ 个特征对。

4.3.3 算例

例 4.4 考虑如下 n 自由度阻尼弹簧-质点系统

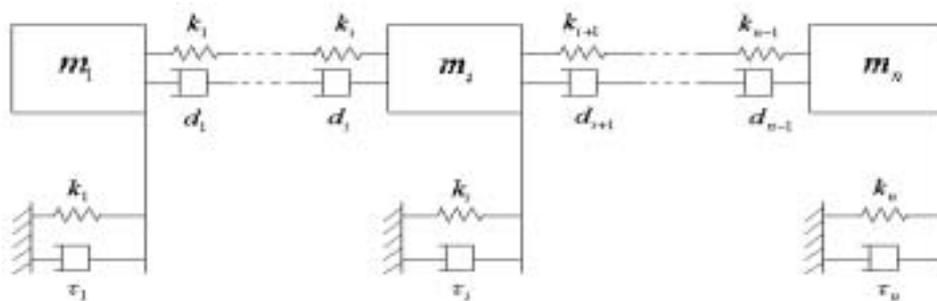


图 4.15 n 自由度阻尼弹簧-质点系统

此振动系统的二阶微分方程：

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0$$

其特征方程为二次特征值问题

$$Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$$

其中质量矩阵 $M = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix}$ 给定，而阻尼矩阵 C 和刚度矩阵 K 是实对称三对角

矩阵为：

$$C = P \text{diag}[d_1, \dots, d_{n-1}, 0] P^T + \text{diag}[\tau_1, \dots, \tau_n]$$

$$K = P \text{diag}[k_1, \dots, k_{n-1}, 0] P^T + \text{diag}[k_1, \dots, k_n]$$

其中 $P = (\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1})$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

不失一般性，限于篇幅起见，取 $n=5$ ，且 $m_i=1 (i=1,2,3,4,5)$ ，即 $M=I$ 。

于是 $(\lambda^2 I + \lambda C + K)x=0$

首先考虑无阻尼的情形，即 $C=0$ 时，由 3.1 节所述得频率 ω 与相应振型 ϕ 的方程

$$K\phi = \omega^2 M\phi$$

假设由实验手段测得 $\omega_1^2 = 15$, $\omega_2^2 = 10$, $\omega_3^2 = 20$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

则由算法 4.2 计算可得

$$K = \begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

又阻尼矩阵 C 可看作质量矩阵 M 和刚度矩阵 K 的线性组合，即 $C = \alpha M + \beta K$ ，而 α, β

可由实验测定或参考同类结构确定。这里不妨设 $\alpha=0.1$ ， $\beta=0.2$ ，于是

$C=0.1M+0.2K$ ，则可以求得阻尼矩阵 C ：

$$C = \begin{bmatrix} 3.1000 & -1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0000 & 3.1000 & -1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0000 & 3.1000 & -1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 3.1000 & -1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0000 & 3.1000 \end{bmatrix}$$

于是质量矩阵 M , 刚度矩阵 K 和阻尼矩阵 C 全部确定 , 从而可求解二次特征值问题的所有特征值 $\lambda_{1,2} = -2.4160 \pm 4.2217i$, $\lambda_{3,4} = -2.0500 \pm 3.974i$, $\lambda_{5,6} = -1.5500 \pm 3.5493i$, $\lambda_{7,8} = -1.0500 \pm 2.9829i$, $\lambda_{9,10} = -0.6840 \pm 2.4232i$ 。

4.4 由两对频率模态信息识别比例阻尼振动系统的结构物理参数

4.4.1 问题的提出

本节再从部分频率模态信息 (部分特征对信息) 的角度 , 来研究结构比例阻尼振动系统的结构参数识别问题 , 即构造质量矩阵 M 、 刚度矩阵 K 和比例阻尼矩阵 $C = \alpha M + \beta K$ 。

一般讲 , 阻尼振动系统的特征值一般为复数 , 由于质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵都是实数矩阵 , 其特征方程是实系数方程 , 因此 , 若 μ 是特征值 , 则其共轭复数 $\bar{\mu}$ 也是其特征值 ; 若对应 μ 的特征向量是 z , 则 \bar{z} 是 $\bar{\mu}$ 的特征向量。而且 , 阻尼振动系统的模态 (特征向量) 一般是复向量 , 但是在比例阻尼 $C = \alpha M + \beta K$ 的情况下 , 则特征向量是实向量。提出如下结构矩阵特征值反问题 :

问题 4.3 已知无阻尼系统的质量矩阵 $M > 0$ 和两个非零特征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 和相应的特征向量 $x_1, x_2 \in R^n$, 以及同结构有阻尼系统的与 λ_1, λ_2 有相同振型的两个特征值 μ_1, μ_2 , 来确定系统的刚度矩阵 K 和比例阻尼矩阵 C , 其中 K 为实对称三对角矩阵。

这样就可以由少量频率模态信息识别出整个系统的结构参数 , 从而实现整个比例阻尼系统的振动特性分析和仿真。

4.4.2 问题 4.3 的解和算法

设无阻尼振动系统的特征方程为

$$Kx = \lambda Mx \quad (4.17)$$

有阻尼振动系统的特征方程为

$$(\mu^2 M + \mu C + K)z = 0 \quad (4.18)$$

其中 K 为实对称三对角矩阵。

因为比例阻尼 $C = \alpha M + \beta K$ ，得

$$(\mu^2 M + \mu(\alpha M + \beta K) + K)z = 0$$

即

$$[(\mu^2 + \alpha\mu)M + (\beta\mu + 1)K]z = 0 \quad (4.19)$$

设 x 为 (4.17) 式的特征向量，如果 x 也为 (4.18) 式的特征向量（即 $z = x$ ），

则 (4.19) 式化为

$$[(\mu^2 + \alpha\mu)M + (\beta\mu + 1)K]x = 0 \quad (4.20)$$

比较 (4.17) 式和 (4.20) 式，得

$$\lambda = -\frac{\mu^2 + \alpha\mu}{\beta\mu + 1} \quad (4.21)$$

或

$$\mu^2 + (\alpha + \beta\lambda)\mu + \lambda = 0 \quad (4.22)$$

定理 4.2 若问题 4.3 中给定的数据满足引理 2.2 的条件，则系统的刚度矩阵 K 和比例阻尼矩阵 C 存在且惟一。

证明 由引理 2.2 和质量矩阵 M ，可以惟一地确定刚度矩阵 K 。又把 λ_1, λ_2 和 μ_1, μ_2 分别代入 (4.22) 式，得到关于 α, β 的线性方程组

$$\begin{cases} \mu_1\alpha + \lambda_1\mu_1\beta = -\lambda_1 - \mu_1^2 \\ \mu_2\alpha + \lambda_2\mu_2\beta = -\lambda_2 - \mu_2^2 \end{cases} \quad (4.23)$$

而且由于 λ_1, λ_2 和 μ_1, μ_2 都非零, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 得到其系数行列式

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \lambda_1\mu_1 \\ \mu_2 & \lambda_2\mu_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以由 Cramer 法则, 其解 α, β 存在惟一。于是比例阻尼矩阵 $C = \alpha M + \beta K$ 存在且惟一。归纳算法如下:

算法 4.3

- (1) 判断给定的数据是否满足引理 2.2 的条件, 若满足, 则由[3]的算法得到惟一的对称三对角矩阵 K ; 如不满足此算法失效;
- (2) 把 λ_1, λ_2 和 μ_1, μ_2 分别代入 (4.25) 式, 解得 α, β ;
- (3) 形成比例阻尼矩阵 $C = \alpha M + \beta K$;

至此得到系统所有结构参数, 就可以进行整个系统的振动特性分析和仿真。

另外, 假设已知无阻尼系统的所有频率 λ 以及比例阻尼系数 α, β , 利用 (4.22) 式求解一元二次方程, 可以得到同结构有比例阻尼系统的所有频率, 进而得到可以系统的所有模态。这里不再赘述。

4.4.3 算例

例 4.5 如图 4.15 所示的 n 自由度阻尼弹簧-质点系统。

取 $n=5$, 质量矩阵 $M = \text{diag}[1, 2, \dots, 5]$, 假设首先已知刚度矩阵 $K = \text{diag}[-5, 15, -5]$, $\alpha = 0.4, \beta = 0.6$, 则比例阻尼矩阵 $C = 0.4M + 0.6K$; 计算得到无阻尼系统的特征对如下:

特征值	16.4557	7.7173	4.9999	3.2719	1.8049
特征向量	0.9593	0.4692	-0.3015	-0.2082	0.0930
	-0.3950	0.9665	-0.8528	-0.6908	0.3471
	0.0714	-0.9156	-0.5222	-1.0701	0.8072
	-0.0082	0.3569	1.2060	-0.3043	1.2960
	0.0007	-0.0846	-0.6742	1.2514	1.2125

表 4.4 特征对

以及有阻尼系统的两个特征对如下：

特征值	-3.3911 +/- 2.2262i	-1.6434 +/- 2.2397i
特征向量	1.0000 -0.4117 0.0744 -0.0085 0.0007	1.0000 2.0600 -1.9514 0.7607 -0.1803

表 4.5 特征对

可见，有阻尼系统的这两个特征值与无阻尼系统的前两个特征值的振型相同。于是这里取 $\lambda_1 = 16.4557; \lambda_2 = 7.7173$ ； x_1, x_2 取其分别对应的特征向量；取 $\mu_1 = -3.3911 + 2.2262i$ ， $\mu_2 = -1.6434 + 2.2397i$ ；利用算法 4.3，计算得到刚度矩阵

$$K = \begin{bmatrix} 14.9999 & -4.9999 & & & \\ -4.9999 & 15.0012 & -4.9980 & & \\ & -4.9980 & 15.0062 & -4.9885 & \\ & & -4.9885 & 15.4263 & -3.1376 \\ & & & -3.1376 & 41.1843 \end{bmatrix}, \text{ 以及比例阻尼实数}$$

$\alpha = 0.19992$ ， $\beta = 0.40001$ ；从而得到比例阻尼矩阵

$$C = \alpha M + \beta K = \begin{bmatrix} 6.2000 & -2.0000 & & & \\ -2.0000 & 6.4005 & -1.9992 & & \\ & -1.9992 & 6.6023 & -1.9954 & \\ & & -1.9954 & 6.9704 & -1.2550 \\ & & & -1.2550 & 17.4737 \end{bmatrix}。$$

与前面已知的数据比较，可见算法 4.3 具有较高的识别精度。

4.5 由频率信息识别非阻尼振动系统的结构物理参数

4.5.1 问题的提出

比例阻尼模型虽然会使结构动力分析简单化，但它并不符合真实的阻尼情况，所以计算精度不够理想。而且，试验得到的振型基本上都是复振型，而比例阻尼是无法

描述这种复振型的，因此非比例阻尼模型更加符合工程实际情况。非比例阻尼结构系统进行动力学分析时得到是复振型，这就能够与试验结果保持一致。目前工程中普遍采用的非比例阻尼模型主要是 Liang 模型^[89,90]。1992 年美国国家地震研究中心 Liang 博士等人提出了一种阻尼矩阵的表达方式：

$$C = R + \alpha M + \beta K$$

将系统阻尼矩阵表示为一个对角阵 R 和比例阻尼矩阵之和，这样能导出复模态。并且 Liang 博士从有限元理论出发给出各项的物理解释： R 代表集中阻尼，表示在结构结点处产生的阻尼； αM 表示与速度成比例的粘性力引起的阻尼； βK 表示结构的应力分布引起的阻尼。Liang 模型不仅考虑了结构中比例阻尼的部分也考虑了非比例阻尼的部分，是目前工程上较为接受的一种非比例阻尼模型。为了便于工程应用，提出用数量矩阵代替对角阵 R ，即为简化的 Liang 模型：

$$C = \sigma I + \alpha M + \beta K \quad (4.24)$$

这样可以使阻尼矩阵试验建模得到简化。

此节讨论在串联阻尼弹簧-质点振动系统中，考虑非比例阻尼的简化 Liang 模型，假设已知系统的频率信息如何来识别系统的阻尼矩阵。此时质量矩阵 $M = \text{diag}[m_1, \dots, m_n]$ 为正定实对角阵，刚度矩阵 K 和阻尼矩阵 C 都是实对称三对角矩阵。

系统质量矩阵和刚度矩阵都可以类似问题 4.2 的讨论，基于无阻尼的标准矩阵特征值反问题的多种提法的解理论获得，比如由特征值信息、部分特征对信息、特征值和部分分量信息等等。比例阻尼系数 α, β 可由试验测得或参照类似结构获得。或者利用有限元法直接离散得到振动系统的质量矩阵和刚度矩阵，一般讲还是有相当精度的，即使精度较差，也可以通过不同的修正方法提高其精度。但是阻尼矩阵的估计却困难得多，如何合理地估计系统的阻尼矩阵将直接影响系统的建模精度。因此这里假设等质量矩阵和刚度矩阵等参数都是已知的。下面来专门识别非比例阻尼矩阵。问题归纳为如下提法：

$$\prod_{i=1}^{2n} (\lambda - \lambda_i) = (k_m + c_m \lambda + \lambda^2) \prod_{i=1}^{2n-2} (\lambda - \mu_i) - (c_{n-1,n} \lambda + k_{n-1,n})^2 q_{2n-4}(\lambda) \quad (4.27)$$

其中 $q_{2n-4}(\lambda)$ 是 $Q(\lambda)$ 的 $n-2$ 阶顺序主子矩阵的特征多项式。

比较 (4.27) 式两边 λ^{2n-4} 的系数，得到

$$c_m = \sum_{i=1}^{2n-2} \mu_i - \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i$$

于是由 (4.25) 式，得到

$$\sigma = c_m - \alpha m_n - \beta k_m \quad (4.28)$$

从而识别出系统的非比例阻尼矩阵

$$C = \sigma I + \alpha M + \beta K$$

4.5.3 算例

例 4.6 设 $n=5$ ，已知 $M = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 4 & \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$ ， $K = \begin{bmatrix} 3 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -2 & & \\ & -2 & 5 & -3 & \\ & & -3 & 6 & -4 \\ & & & -4 & 7 \end{bmatrix}$ ，

$\alpha = 0.2$ ， $\beta = 0.3$ ；假定已知 $\sigma = 0.1$ ，得到原系统和修正系统的两组谱数据：

λ	μ
-0.66250418821474 + 1.74743319452277i	-0.66215324163558 + 1.74529451532466i
-0.66250418821474 - 1.74743319452277i	-0.66215324163558 - 1.74529451532466i
-0.54574471164966 + 1.59055134473145i	-0.52196657304979 + 1.54090816427047i
-0.54574471164966 - 1.59055134473145i	-0.52196657304979 - 1.54090816427047i
-0.42334822735749 + 1.35396137660162i	-0.35960004243545 + 1.20411521742864i
-0.42334822735749 - 1.35396137660162i	-0.35960004243545 - 1.20411521742864i
-0.27844184071367 + 0.99385991397420i	-0.18544680954584 + 0.64843629870404i
-0.27844184071367 - 0.99385991397420i	-0.18544680954584 - 0.64843629870404i
-0.13912769873110 + 0.38461562216524i	
-0.13912769873110 - 0.38461562216524i	

表 4.6 阻尼系统的两组谱数据

然后再由这些谱数据，利用问题 4.3 的解理论和(4.28)式，识别出的 $\sigma = 0.099999999$ ，可见识别精度很高，于是识别出系统的非结构阻尼矩阵

$$C = \sigma I + \alpha M + \beta K = \begin{bmatrix} 1.19999 & -0.3 & & & \\ -0.3 & 1.69999 & -0.6 & & \\ & -0.6 & 2.19999 & -0.9 & \\ & & -0.9 & 2.69999 & -1.2 \\ & & & -1.2 & 3.19999 \end{bmatrix}$$

例 4.7 如图 4.15 所示的系统，设 $n = 100$ ，已知 $M = I$ ， $K = \text{diag}[-5, 15, -5]$ ， $\alpha = 3$ ， $\beta = 4$ ；假定已知 $\sigma = 2$ ，由得到原系统和修正系统的两组谱数据（限于篇幅，这里不罗列出来），由问题 4.3 的解理论，识别出的阻尼系数为 $\sigma = 2.0000000005839$ ，同样，可见对大规模非比例阻尼振动系统问题，识别精度仍很高。

4.6 本章小结

本章结合阻尼振动系统给出了二次特征值反问题的四种提法，分别研究了解的适定性理论，给出了数值算法，并重点介绍了其在阻尼弹簧-质点系统中的实际应用。对于其他阻尼振动系统模型，基于本章的思想方法可以类似地讨论振动反问题的合理提法，并研究解的存在性和数值算法。这些问题的研究在陀螺仪系统、流体力学、信号处理、电子振荡等其它工程领域同样具有重要的应用价值。

第五章 振动杆结构探伤中的反问题

5.1 引言

利用模态分析得到的频率模态参数等数据进行结构探伤、故障诊断和状态监测，日益成为一种有效而实用的故障诊断和安全检测方法。这是近年发展起来的一种新方法^[105-107]。当结构发生损伤或故障时，如出现裂纹、松动、零部件损坏等情况，结构物理参数发生变化，其特征参数（固有频率、模态、阻尼等）也随之改变。根据这些参数的变化情况，可以判断结构是否出现损伤，有时还可以判断出损伤位置。如根据频率模态的变化判断裂纹的出现，根据振型的分析判断裂纹的位置，土木工程中依据频率模态的变化诊断水泥桩是否有裂纹和空隙等等。

本章基于特征值反问题的理论和方法，研究了振动杆的结构损伤，给出了利用振动杆的未发生结构损伤状态和发生结构损伤状态的各一个特征对进行结构探伤的理论和方法。

5.2 振动杆结构探伤中的特征值反问题

5.2.1 问题的提出

结构动力学中的特征值反问题研究由系统的已知动力学行为（频率、模态等）确定振动系统的物理参数（质量、刚度等）和几何参数。自然地，结构探伤检测也可以归入此类问题。主要包括结构损伤的位置和损伤程度等。通常，损伤导致构件局部刚度的变化或损失。因此，可以通过比较未损伤状态和发生损伤后的状态来进行结构探伤。

本章研究振动杆的结构探伤问题。考察如下长度为 L 振动杆系统

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, 0 < x < L, t > 0 \quad (5.1)$$

其中 $A = A(x)$, $E = E(x)$, $\rho = \rho(x)$ 分别表示杆的横截面积、杨氏模量和单位长度的质量密度。其纵向位移量 $u(x,t)$ 可表示为 $u(x,t) = u(x) \sin(\omega t)$ ，其中 ω 是自由振动频率，

$u(x)$ 满足

$$\frac{d}{dx}(EA \frac{du}{dx}) + \lambda \rho A u = 0, \quad 0 < x < L, \lambda = \omega^2 \quad (5.2)$$

为简单起见，这里假设杆均匀且是左端固定右端自由的边界条件。 n 等分区间 $[0, L]$ ，步长为 $h = x_{i+1} - x_i = L/n$ ，并使用有限差分离散 (5.2) 式，得到

$$-k_i u_{i-1} + (k_i + k_{i+1})u_i - k_{i+1}u_{i+1} - \lambda m_i u_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (5.3)$$

其中 $k_i = E_i A_i / h$ ， $m_i = \rho_i A_i h$ ， $A_i = A(x_i)$ ， $E_i = E(x_i)$ ， $\rho_i = \rho(x_i)$ ， $u_i = u(x_i)$ 。

(5.3) 式写成矩阵形式

$$Ku = \lambda Mu \quad (5.4)$$

其中 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ ， M 是一个对角矩阵， K 是一个对称三对角矩阵。

事实上，(5.4) 式所描述离散杆模型是由质点 m_i 以及线刚度 k_2 组成的弹簧-质点系统。用矩阵对 (M, K) 表示这个系统，此问题归结为三对角矩阵特征值反问题，已有一些反问题的理论和方法来重构系统 (M, K) 。例如，给定总质量，由系统 (M, K) 的满足间隔条件的谱 $(\lambda_i)_1^n$ 和 $(\mu_i)_1^{n-1}$ ，使用 Lanczos 方法可以得到矩阵对 (M, K) [3]。

假设 (\bar{M}, \bar{K}) 表示未损伤杆系统的状态， (M, K) 表示发生损伤的杆系统状态。因为结构损伤与刚度改变有关，一个自然的基于特征值反问题的探伤策略如下：

- 检测损伤系统 (M, K) 的 $(\lambda_i)_1^n$ 和 $(\mu_i)_1^{n-1}$ ，然后从 $(\lambda_i)_1^n$ 和 $(\mu_i)_1^{n-1}$ 计算出质量 m_i 和刚度 k_i ；
- 刚度的不同 $(\bar{k}_i - k_i)_1^n$ 将会定位原始状态系统的损伤位置。

由方程(5.3)可知刚度和质量紧密联系在一起。损伤系统的变化在重构损伤系统时将会影响矩阵 M, K 。既然结构损伤不包括质量的变化，有必要在重构时引进一个可控制的参数来减少刚度变化而对 M 产生的影响。由于选择最佳的参数需要额外的工作，在工程实践中，测量谱 $(\lambda_i)_1^n$ 和 $(\mu_i)_1^{n-1}$ 可能是非常困难的，因此上面的策略不是一个解决探伤问题的最好方法。

文献[106]假设模型是均匀杆，其中 E 和 ρ 是常数，横截面积 A 是变量。那么，均匀杆满足方程

由(5.8)计算 $A_i, i = 1, 2, \dots, n-1$.

如果 $|d_i| \leq \varepsilon \bar{A}_i$, 则可以判断第 i 个区域发生损伤。

但是, 这种处理方法对扰动很敏感^[106]。下面提出改进方法, 考虑基于两个特征对进行结构探伤的问题。

5.2.2 基于两个特征对的杆结构探伤

假设 $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ 是未损伤状态 (\bar{M}, \bar{K}) 的一个特征对, (λ, u) 是损伤后状态 (M, K) 的一个特征对, 并且是已知的。

因此, 利用 (5.8) 式, 可以得到

$$L_i = \left(\frac{(1+\bar{\lambda})\bar{u}_{i+1} - (1-2\bar{\lambda})\bar{u}_i}{(1-2\bar{\lambda})\bar{u}_i - (1+\bar{\lambda})\bar{u}_{i-1}} \right) / \left(\frac{(1+\lambda)u_{i+1} - (1-2\lambda)u_i}{(1-2\lambda)u_i - (1+\lambda)u_{i-1}} \right) L_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \quad (5.9)$$

其中 L_i 表示未损伤状态和发生损伤状态的第 i 个单元横截面积的比值, 指标 i 表示发生损伤的区域, L_i 的大小反映损伤的程度。

如果某个 (些) L_i ($i = n-1, n-2, \dots, 1$) 不等于 1, 则可以判断在第 i 个单元发生损伤, 从而可以确定损伤定位和损伤程度。

算法 5.2: 基于两个特征对的探伤算法

输入: 原始杆 (未损伤状态) 的一个特征对 $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ 和损伤状态的一个特征对, 以及阈值 $\varepsilon > 0$;

输出: 利用式 (5.9) 计算 L_i , 损伤的数量和位置可记为

$$d_i = |L_i - 1|, i = 1, 2, \dots, p, 1 \leq p \leq n$$

如果 $|d_i| \leq \varepsilon$, 则可以判断第 i 个单元发生损伤。

与算法 5.1 相比, 算法 5.2 的优点在于不必已知杆的横截面积, 只需要两个特征对就可以作出是否损伤的判断。

5.2.3 算例

例 5.1 考虑一均匀杆, 作 10 等分($n=10$)。为了说明算法, 假设所有横面积 $A_i = 1$, 分别在单元 A_3, A_7 引进 40%, 80% 的减少量。 $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ 和 (λ, u) 分别表示未损伤状态的特征对和发生损伤状态的特征对。

表 5.1 给出了由算法 1 单元 A_i 和损伤 $d_i = |\bar{A}_i - A_i|$ 数量和位置。图 5.1 给出了基于算法 1 的结构探伤的示意图。

表 5.2 给出了由算法 2 得到的 L_i 数量和位置。图 5.2 给出了基于算法 2 的结构探伤的示意图。

i	$\bar{\lambda}$	\bar{u}	λ	u	\bar{A}_i	A_i
1	0.0377008 7507576	-0.19358219952623	0.0034611 5505213	0.04636173073546	1	1.000000000
2		0.34496600548920		0.09176399151384	1	1.000000007
3		-0.42115172350193		0.16490231495127	1	0.600000005
4		-0.40553186113760		0.20605514662267	1	1.000000009
5		-0.30151134457776		0.24294360508045	1	1.000000011
6		-0.13176528913359		0.27480427258565	1	1.000000009
7		0.06670388001857		0.41704613897330	1	0.200000002
8		0.25063247370404		0.44031597510766	1	1.000000009
9		0.37992645846897		0.45447333974809	1	1.000000006
10		0.42640143271122		0.45922524197669	1	1.000000000

表 5.1 结构探伤数据

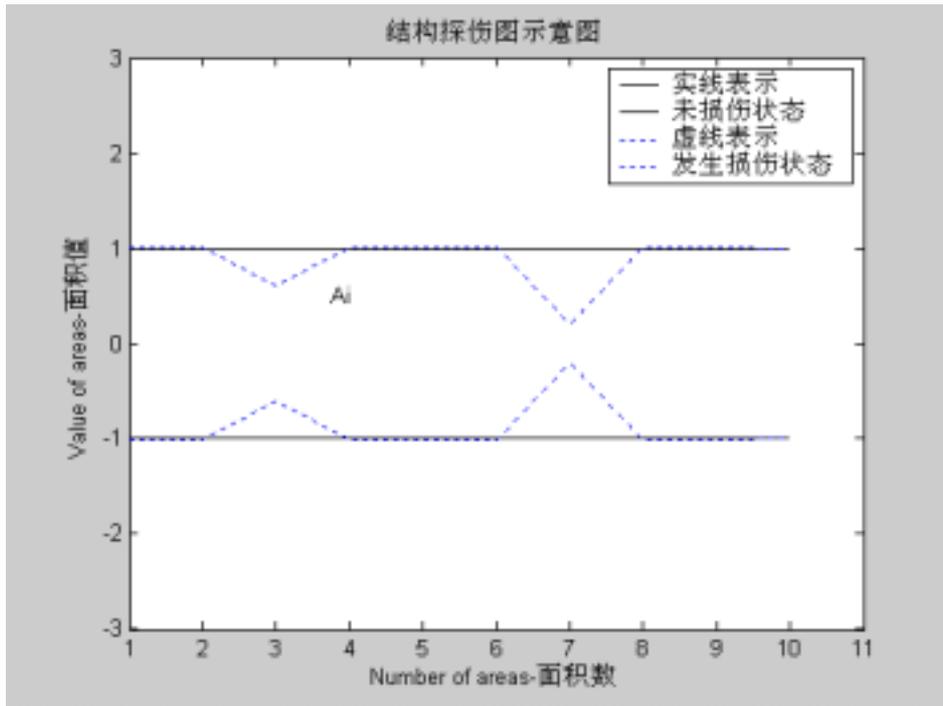


图 5.1 结构探伤示意图

i	L_i	损伤判断
1	0.99999999999989	
2	0.99999999999989	
3	1.66666666666647	损伤
4	0.99999999999993	
5	0.99999999999990	
6	0.99999999999991	
7	4.99999999999950	损伤
8	0.99999999999991	
9	0.99999999999994	
10	1.00000000000000	

表 5.2 结构探伤数据

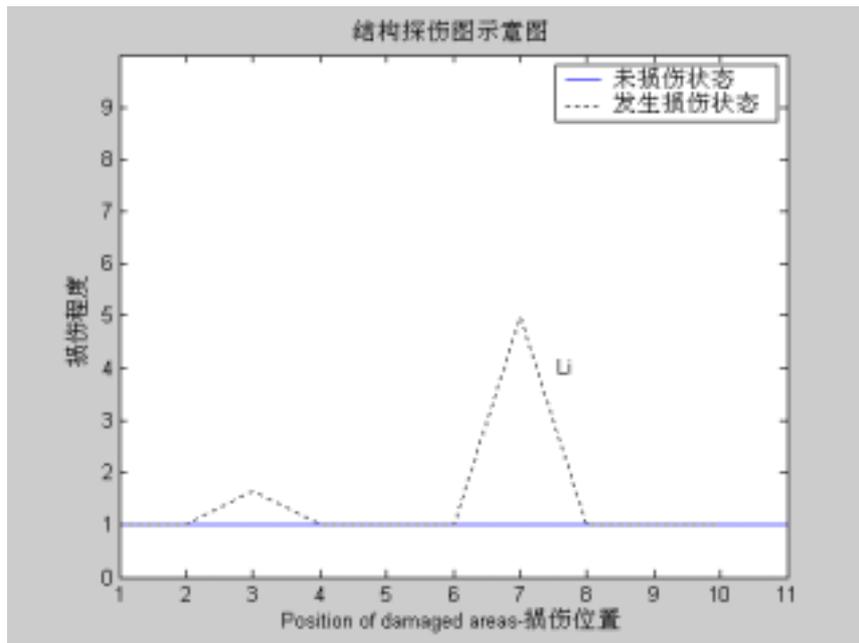


图 5.2 结构探伤示意图

例 5.2 考虑一均匀杆, 作 100 等分($n = 100$)。为了说明算法, 假设所有面积 $A_i = 1$, 假设分别在损伤杆的单元 $A_3, A_{13}, A_{37}, A_{53}, A_{59}, A_{87}, A_{91}$, 引进 50%, 80%, 60%, 70%, 90%, 20%, 65% 的减少量。 $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ 和 (λ, u) 分别表示未损伤状态的特征对和发生损伤状态的特征对。

图 5.1 给出了基于算法 1 的结构探伤的示意图。

图 5.2 给出了基于算法 2 的结构探伤的示意图。

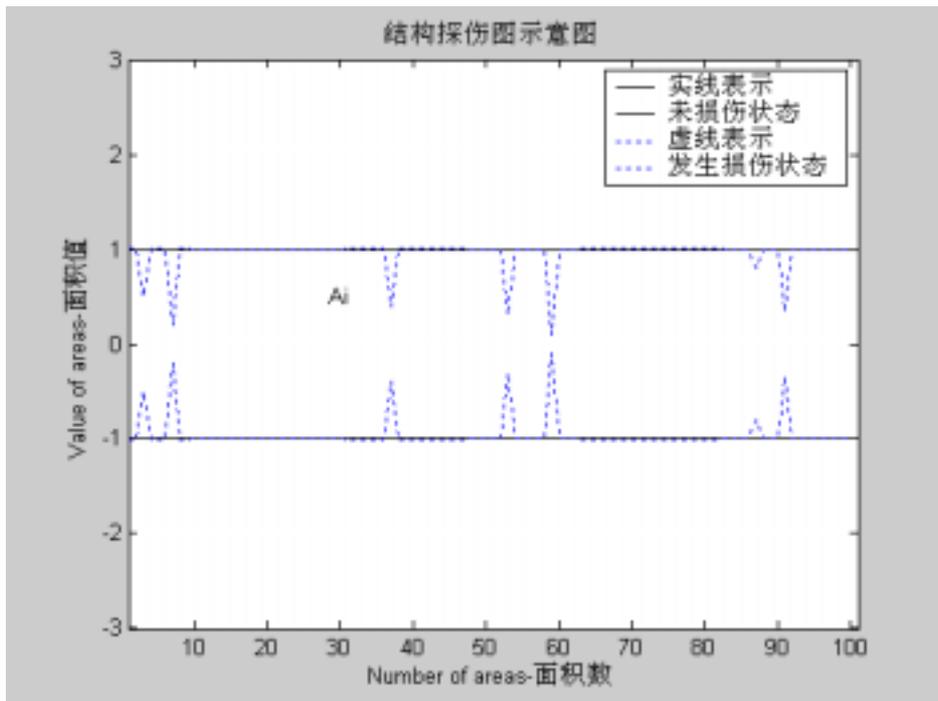


图 5.3 结构探伤示意图

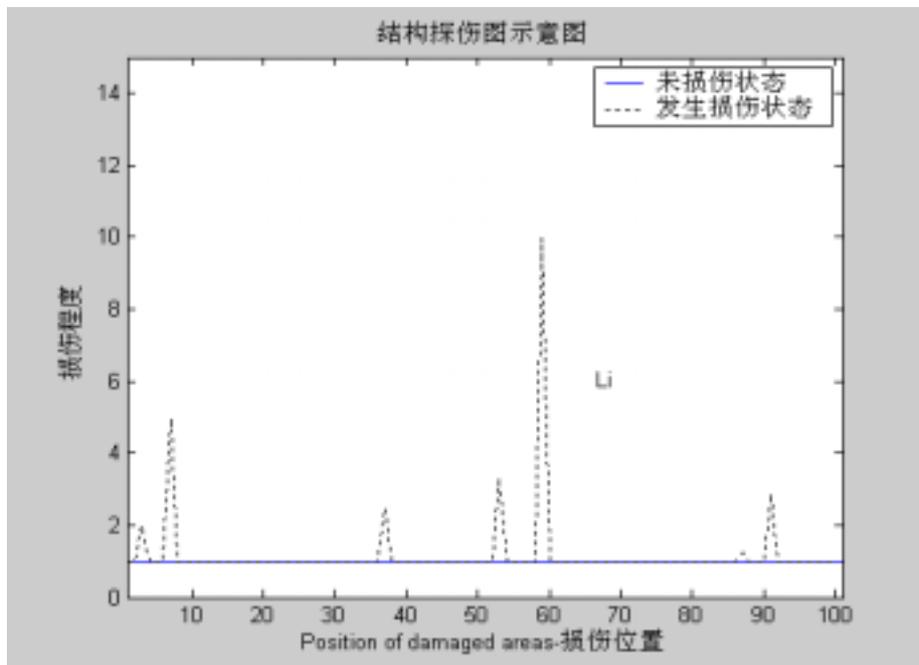


图 5.4 结构探伤示意图

例 5.3 考虑一非均匀杆, 作 100 等分($n = 100$)。为了说明算法, 假设所有面积

$$A_i = \begin{cases} 3, & i = 1:30 \\ 2, & i = 31:60 \\ 1, & i = 61:100 \end{cases}, \text{ 分别在损伤杆的单元 } A_3, A_{13}, A_{37}, A_{53}, A_{59}, A_{87}, A_{91}, \text{ 引进 } 50\%, 80\%,$$

60%, 70%, 90%, 20%, 65% 的减少量。($\bar{\lambda}, \bar{u}$) 和 (λ, u) 分别表示未损伤状态的特征对和发生损伤状态的特征对。

图 5.1 给出了基于算法 1 的结构探伤的示意图。

图 5.2 给出了基于算法 2 的结构探伤的示意图。

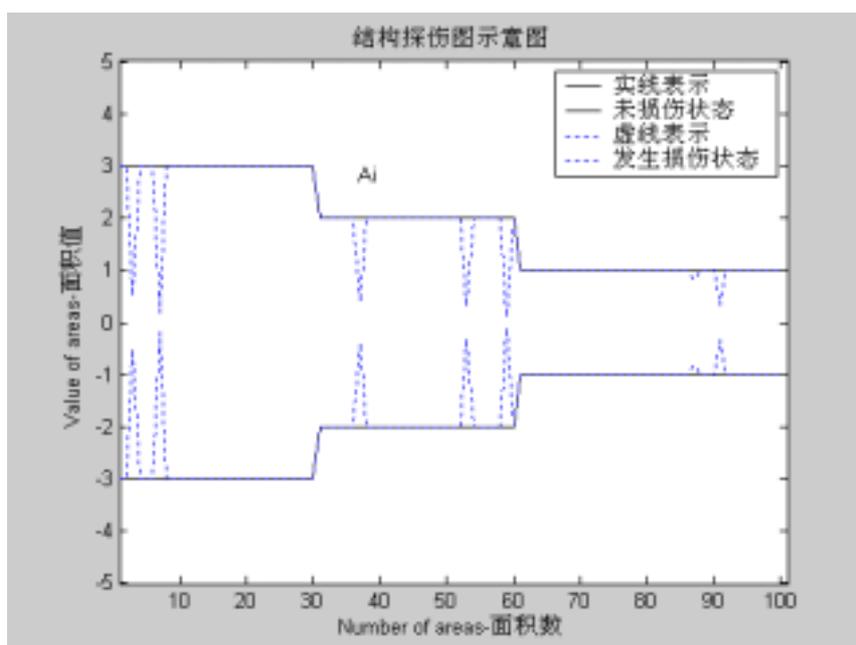


图 5.5 结构探伤示意图

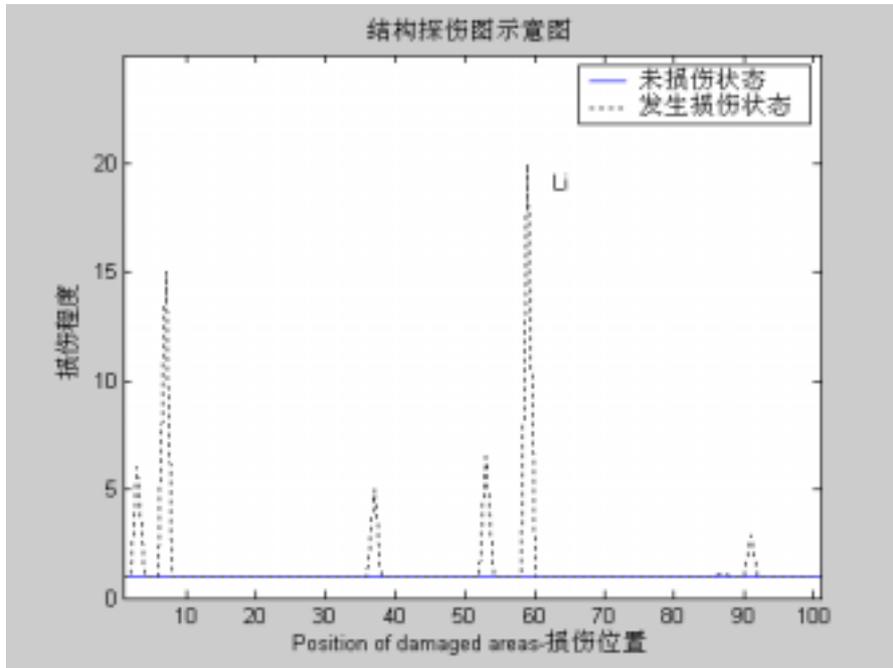


图 5.6 结构探伤示意图

5.3 本章小结

本章基于特征值反问题的理论和方法,研究了振动杆的结构损伤,给出了利用振动杆的未发生结构损伤状态和发生结构损伤状态的各一个特征对进行结构探伤的理论和方法。基于特征值反问题的结构探伤有自身的特点,但也有局限性,并非所有的损伤都可以由这种方法判断。比如,对金属结构小裂纹情形,这种方法往往效果不太好,因为固有频率和振型对这种小裂纹并不敏感,当然这种敏感性还与裂纹位置有关。再如阻尼和高阶频率对结构损伤的敏感性较强,但常常仍不足以判断出来。尽管如此,一般来讲,应用这种频率模态反问题的结构探伤方法对动态故障的诊断效果优于对静态故障的诊断,对大型复杂结构的结构探伤的效果优于对简单小型结构的探伤诊断,这也是频率模态反问题分析用于结构探伤、故障诊断和状态监测的优势所在。

因此,对于具体的结构系统,提出具体的结构探伤反问题,并研究其理论与方法,甚至软件开发,都具有重要的理论意义和实用价值。

第六章 总结与展望

6.1 本文的主要工作

本文在分析和总述矩阵特征值反问题的基础上,对结构矩阵特征值反问题的理论和算法及其在结构动力学中的应用等进行了较深入系统的理论与应用研究,取得了一些有益的研究成果。

本文工作的主要贡献与创新点为:

1. 研究弹簧-质点系统的振动反问题

(1) 对二自由度简单连接弹簧-质点系统,分别通过加刚性约束、弹性约束和质量摄动得到修改系统,研究了利用原系统和修改系统的两组特征值(频率)和修改量识别系统的物理参数问题,给出了解的表达式。

(2) 对多自由度简单连接弹簧-质点系统,研究了利用系统全部频率模态构造系统的振动反问题;研究了基于增减容修改系统的频率反问题,即利用原系统和增/减容修改系统的特征值(频率)识别原系统的物理参数问题,给出了算法和算例。

(3) 提出了利用多自由度简单连接弹簧-质点系统的四个和五个特征对(频率和模态)识别系统物理参数的振动反问题,给出了问题有解的条件、解的表达式、相应算法和数值例子。

(4) 对于一类混合连接弹簧-质点系统,提出了利用三个特征对(频率和模态)以及部分系统物理参数识别系统其它物理参数的振动反问题,给出了问题有解的条件、解的表达式、相应算法和数值例子。

2. 研究离散梁的振动反问题

对于离散梁系统,利用集中质量法或有限差分法得到横向振动梁的弹簧-质点-刚杆模型,质量矩阵为对角矩阵而刚度矩阵为对称五对角矩阵。提出了基于三个特征对的频率模态反问题,由梁的三个特征对及总质量构造梁的物理参数,给出了问题解存在惟一的充要条件和解的表达式、相应算法和算例。

3. 研究阻尼振动系统中的二次特征值反问题

(1) 从单自由度阻尼系统到多自由度阻尼系统分析讨论了二次特征值问题在结构动

力学中的应用，并结合振动模型给出数值例子；

(2) 研究阻尼振动系统的结构物理参数识别问题，给出了四种提法：

- 由全部频率信息模态识别阻尼振动系统的结构物理参数；
- 由部分频率模态信息识别比例阻尼振动系统的结构物理参数；
- 由两对频率模态信息识别比例阻尼振动系统的结构物理参数；
- 由频率模态信息识别非比例阻尼振动系统的结构物理参数。

对每种提法分别研究了问题解的存在性，给出了数值算法，并对每种问题给出了具体的阻尼振动模型例子，说明了在阻尼结构动力系统中的应用。

4. 研究基于特征值反问题的振动杆结构探伤问题

研究利用振动杆的未发生结构损伤状态和发生结构损伤状态的各一个特征对进行结构探伤的理论和方法，并给出了三个数值例子，说明了理论的正确性和方法的实用性和有效性。

6.2 后续研究工作展望

在本文的研究中，作者发现了如下一些有趣的问题值得深入研究：

1. 串联弹簧-质点系统振动反问题的研究已取得许多研究成果，但实际问题中，一些结构振动系统可简化为并联弹簧-质点振动系统，例如，汽车减振系统等。迄今有关并联弹簧-质点系统振动反问题的研究较少，因此并联以及混合连接弹簧-质点系统振动反问题有待进一步研究。
2. 梁有限元离散模型的振动反问题有待进一步研究。
3. 迄今对薄膜、板和壳等模型振动反问题的研究很少，这些力学模型的振动反问题有待进一步研究。
4. 梁等其它动力学模型基于特征值反问题的结构探伤有待进一步研究。

参考文献

1. 胡宗武. 工程振动分析基础[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1999
2. 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989
3. 周树荃, 戴华. 代数特征值问题[M]. 河南: 河南科学技术出版社, 1991
4. Chu M T, Golub G. Inverse Eigenvalue Problems: Theory and Applications[M]. Oxford: Oxford University Press, 2005
5. Gladwell G M L. Inverse Problems in Vibration (2nd edn) [M]. Kluwer Academic Publishers, 2004
6. Gladwell G M L. Inverse problems in vibration[J]. Applied Mechanics Reviews, 1986, 39(7):1013-1018
7. Gladwell G M L. Inverse problems in vibration-1 [J]. Appl. Mech. Rev., 1996, 49(10):25-34
8. Boley D, Golub G H. A survey of matrix inverse eigenvalue problems[J]. Inverse Problems, 1987, 3:595-622
9. 王大钧. 结构动力学中的特征值反问题[J]. 振动与冲击, 1988, 2:11-23
10. 戴华. 矩阵特征值反问题的若干进展[J]. 南京航空航天大学学报, 1995, 27(3):400-413
11. Chu M T. Inverse eigenvalue problems[J]. SIAM Rev, 1998,40:1-39
12. Chu M T, Golub G H. Structured inverse eigenvalue problems[J]. Acta Numerica, 2002,12: 1-17
13. Hochstadt H. On some inverse problem in matrix theory[J]. Arch Math, 1967, 18:201-207
14. Hochstadt H. On the construction of a Jacobi matrix from spectral data[J]. Linear Algebra Appl, 1974, 8(5):435-446
15. Hald O H. Inverse eigenvalue problems for Jacobi matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1976, 14:63-85
16. De Boor C, Golub G H. The numerically stable reconstruction of a Jacobi matrix from spectral data[J]. Linear Algebra Appl, 1978, 21(3):245-260.
17. Parlett B N. The Symmetric Eigenvalue Problem[J]. Prentice Hall, Engelwood Cliffs, NJ, 1980, 111-138
18. Gragg W B, Harrod W J. The numerically stable reconstruction of Jacobi matrices from spectral data[J]. Numer Math, 1984, 44:317-335
19. 沈启钧. Jacobi 矩阵反特征值问题的一种算法[J]. 南开大学学报, 1986, 1: 12-18
20. 戴华. 由谱数据数值稳定地构造 Jacobi 矩阵[J]. 数值计算与计算机应用, 1990, 11(1):27—34
21. 蒋尔雄. 一个固有频率的反问题及其解法[J]. 振动与冲击, 1983, 2(4):1-6

22. Gladwell G M L, Gbadeyan J A. On the inverse problem of the vibrating string or rod[J]. Q J Mech Appl Math, 1985, 38:169-174
23. Eganâ J C, Sotô R L. On the numerical reconstruction of a spring-mass system from its natural frequencies[J]. Proyecciones, 2000, 19(1):27-41
24. Ram Y M. Inverse eigenvalue problem for a modified vibrating system[J]. SIAM J Appl Math, 1993, 54(6):1762~1775
25. Gladwell G M L. Inverse problems in vibration[J]. Applied Mechanics Reviews, 1996, 48:25-34
26. Nylen P, Uhlig F. Inverse eigenvalue problem: existence of special spring-mass systems[J]. Inverse Problems, 1997, 13:1071~1081
27. Nylen P, Uhlig F. Inverse eigenvalue problems associated with spring-mass systems[J]. Linear Algebra Appl, 1997, 254: 409~425
28. 王其申, 王大钧. 两类矩阵特征值反问题及其应用[J]. 高等学校计算数学学报, 1995, 12(4): 291-297
29. Ram Y M, Galdwell J. Physical patameters reconstruction of a free-free mass-spring system from its spectra[J]. SIAM J Appl Math, 1992, 52(1):140~152
30. Gladwell G M L , Movahhedy M. Reconstruction of a mass-spring system from spectral data I : theory[J]. Inverse Problems in Engineering , 1995 , 1:179-189
31. Movahhedy M , Gladwell G M L , Ismail F. Reconstruction of a mass-spring system from spectral data II : experiment[J]. Inverse Problems in Engineering , 1995 , 1:315-327
32. Porter B. Synthesis of lumped-parameter vibrating systems using transfer matrices[J]. J Mech Eng Sci, 1971, 13: 29-34
33. Gladwell G M L. The inverse mode problem for lumped-mass system[J]. Q J Mech Appl Math, 1986, 39(2):297-307
34. Sivan D D, Ram Y M. Optimal construction of a mass-spring system with prescribed shapes[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 254(2): 393-406
35. Gladwell G M L, Dods S R A. Examples of reconstruction of vibrating rods from spectral data[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 119(2):267-276
36. Ram Y M, Gladwell G M L. Constructing a finite element model of a vibratory rod from eigendata[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 169(2):229-237
37. 戴华. Jacobi 矩阵和对称三对角矩阵特征值反问题[J]. 高等学校计算数学学报, 1990,12(1):1-13

38. 戴华. Jacobi 矩阵特征值反问题[J]. 计算物理, 1994, 11(4): 451-456
39. 胡锡炎, 周小庄. 三对角对称矩阵的逆特征值问题[J]. 数值计算与计算机应用, 1996, 2: 150-156
40. 廖安平, 张磊, 胡锡炎. 三对角对称矩阵逆特征值问题存在惟一解的条件[J]. 数值计算与计算机应用, 2000, 2:102—111
41. 胡锡炎, 张磊, 黄贤通. 由谱数据和主子阵构造 Jacobi 矩阵[J]. 数值计算与计算机应用, 1997, 2:143-150
42. 胡锡炎, 张磊, 黄贤通. Jacobi 矩阵的逆特征值问题[J]. 系统科学与数学, 1998, 18(4):410-416
43. 胡锡炎, 张磊, 彭振赞, 由主子阵和缺损特征对构造 Jacobi 矩阵, 计算数学, 2000, 22(3) : 345-354
44. 马昌社, 胡锡炎, 张磊, 由主子阵和特殊次序缺损特征对构造 Jacobi 矩阵, 计算数学, 2003, 25(4) : 463-470
45. Lu Linzhang, Ng M K. On sufficient and necessary conditions for the Jacobi matrix inverse eigenvalue problem[J]. Numer Math, 2004, 98:167-176
46. Barcion V. On the uniqueness of inverse eigenvalue problems[J]. Geophy J R Astr Soc, 1974, 38:287-296
47. Barcion V. On the solution of inverse eigenvalue problems of high orders[J]. Geophys J R Astron Soc, 1974, 39:143-154
48. Barcion V. On the solution of the inverse problem with amplitude and natural frequency data[J]. J Phys Earth Planet Int, 1976, 13:1-8
49. Barcion V. Inverse problem for a vibrating beam[J]. Appl Math and Phys, 1976, 27:346-358
50. Barcion V. On the multiplicity of solutions of the inverse problem for a vibrating beam[J]. SIAM J Appl Math, 1979, 37(3):605-613
51. Barcion V. Inverse problems for the vibrating beam in the free-clamped configurations[J]. Phil Trans R Soc Lond A, 1982, 304:211-252
52. Barcion V. Sufficient conditions for the solution of inverse problem for a vibrating beam[J]. Inverse Problems, 1987, 3:187-193
53. Gladwell G M L. Inverse problem for the vibrating beam[J]. Phil Trans R Soc Lond A, 1984, 393 : 277-295
54. Gladwell G M L. The inverse problems for the Euler-Bernoulli beam[J]. Proc R Soc Lond A, 1986,

- 407 : 199-218
55. Gladwell G M L, England H, Wang D. Examples of reconstruction of and Euler-Bernoulli beam from spectral data[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 119(1): 81-94
56. Boley D, Golub G H. Inverse eigenvalue problems for band matrices[J]. Watson G A, Proc Dundee Conf On Numerical Analysis, Berlin: Springer-Verlag, 1977,23-31
57. Biegler-Konig F W. Construction of band matrices from spectral data[J]. Linear Algebra Appl , 1981 , 40:79-87
58. 殷庆祥. 实对称带状矩阵特征值反问题的拟 Lanczos 方法[J]. 高等学校计算数学学报 , 1989,11(1):65-73
59. 戴华. 由谱数据数值稳定地构造实对称带状矩阵[J]. 计算数学, 1990, 12: 157-166
60. 孙合明, 吕炯兴, 赵淳生. 五对角阵逆特征值问题的一个数值解法及其应用[J]. 计算物理, 1997, 14: 632-636
61. 何北昌, 王大钧, 王其中. Euler 梁有限差分模型的振动逆问题[J]. 振动工程学报, 1989 , 2(2):1-9
62. 王其中, 王大钧, 何北昌. 由频谱数据构造两端铰支梁的差分离散系统[J]. 工程力学, 1991 , 8(4):10-19
63. Gladwell G M L , Willms N B , He BC etal , How can we recognize an acceptable mode shape for a vibrating beam[J]. Q J Mech Appl Math , 1989 , 42 : 303-316
64. Ram Y M. Inverse mode problems for the discrete model of a vibrating beam[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 169(2): 239-252
65. Ahmadian H, Gladwell G M L, Ismail F. Finite model identification using modal data[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 172(5): 657-669
66. Ram Y M, Elhay S. The construction of band symmetric models for vibratory systems from modal analysis Data[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 181(4):583-591
67. Lai E, Ananthasuresh G K. On the design of bars and beams for desired mode shapes[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 254(2): 393-406
68. 何北昌, 王大钧, 王其中. 用一个模态确定梁的截面物理参数[J]. 固体力学学报, 1991 , 12(1) : 85-89
69. 王大钧, 何北昌, 王其中. 由两组模态及相应频率构造 Euler 梁[J]. 力学学报, 1990 , 22 (4) : 479-483

70. 周小庄, 胡锡炎. 实对称五对角矩阵及其特征值反问题[J]. 湖南大学学报, 1996, 23(1):9-20
71. Lancaster P. Lambda-Matrices and Vibrating Systems[M]. Pergamon Press Inc., 1966
72. Tisseur F, Meerbergen K. The quadratic eigenvalue problems[J]. SIAM Review, 2001, 43:339-361
73. Ram Y M, Elhay S. An inverse eigenvalue problem for the symmetric tridiagonal quadratic pencil with application to damped oscillatory systems[J]. SIAM J Appl Math, 1996, 56(1):232-244
74. Nylén P. Inverse eigenvalue problem: existence of special mass-damper-spring systems[J]. Linear Algebra Appl, 1999, 297:107-132
75. Starek L, Inman D J. A symmetric inverse vibration problem with overdamped modes[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 181:893-903
76. Gladwell G M L. On the reconstruction of a damped vibrating system from two complex spectra, Part1: Theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 240: 203~217
77. Foltete E, Gladwell G M L, Lallement G. On the reconstruction of a damped vibrating system from two complex spectra, Part2: Experiment[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 240:219~240
78. Friswell M I, Lees A W. Resonance frequencies of viscously damped structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 217: 950-959
79. Friswell M I, Inman D J, Pjilkey D F. The direct updating of damping and stiffness matrices[J]. AIAA J, 1998, 36(3): 491-493
80. Halevi Y, Kenigsbuch P. Model updating of the complex modeshapes and the damping matrix[J]. Inverse Problem in Engineering, 2000, 8:143~162
81. Park Y H, Park Y S. Structural modification based on measured frequency response functions: an exact eigenproperties real location[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 237: 411-426
82. Chu M T, Kuo Yuencheng, Lin Wenwei. On inverse quadratic eigenvalue problems with partially described eigenstructure[J]. SIAM J Mat Anal Appl, 2004, 25:995-1020
83. Agranovich Y, Azizov T, Barsukov A, Dijksma A. On an inverse spectral problem for a quadratic Jacobi matrix pencil[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 306(1):1-17
84. Ram Y M. Pole Assignment in vibratory systems by multi-input control[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 230:309-321
85. Lancaster P, U Prells. Inverse problems for damped vibration systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 283: 891-914.
86. Farahani K, Bahai H. An inverse strategy for relocation of eigenfrequencies in structural design, Part

- I: first order approximate solutions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 274: 481-505
87. Farahani K, Bahai H. An inverse strategy for relocation of eigenfrequencies in structural design, Part II: second order approximate solutions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 274:507-528
88. Gladwell G M L. Inverse finite element vibrating problems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 221:309-324
89. Liang Z, Lee G C. Representation of damping matrix[J]. J Engng Mech ASCE, 1991, 117(5):1005-1020
90. 韦勇, 陈国平. 结构非比例阻尼矩阵的建模和识别[J]. 南京航空航天大学学报, 2004, 36(6): 70-74
91. Lin Haiping. Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply supported beams with a crack[J]. Engineering Structures, 2004, 26(4): 427-436
92. Djoudi M S, Bahai, Esat I I. An inverse eigenvalue formulation for optimization the dynamic the behavior of pin-jointed structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 253:1039-1050
93. Cottin N. Dynamic model updating - a multiparameter eigenvalue problem[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2001, 15(4):649-665
94. Starek L, Inman D J. Symmetric inverse eigenvalue vibration problem and its application[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2001, 15(1):11-29
95. 勒晓雄, 张立军, 江浩. 汽车振动分析[M]. 上海: 同济大学出版社, 2002.
96. Park Y H, Park Y S. Structural modification based on measured frequency response function: an exact eigenproblems reallocation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 237:411-426
97. Li Tao, He Jimin. Local structural modification using mass and stiffness changes[J]. Engineering Structures, 1999, 21(11):1028-1037
98. 李斌, 杨智春, 孙浩. 改进的基于附加已知质量的模型修正方法[J]. 振动工程学报, 2004, 17(3): 311-316
99. 于德介, 彭泽民. 改进的特征值修正方法及其在阻尼结构复模态综合中的应用[J]. 振动工程学报, 1990, 3(1):47-55
100. 李书, 冯太华, 范绪萁. 动力模型修正中逆特征值问题的数值解法[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(3): 276-280
101. 李书, 朱金才, 冯太华. 一种动力模型的局部修改方法[J]. 振动工程学报, 1995, 18(1):46-51
102. 杨杰, 耿遵敏, 谭雪琴. 基于复模态的结构有限元动态模型修正理论[J]. 振动与冲击, 2002,

- 21(1):30-32
103. 冯文贤, 陈新. 结构振动系统阻尼矩阵的估计方法[J]. 广东工业大学学报, 2001, 18(3):6-11
104. 张连文, 夏人伟, 曾广武. 自适应结构频率和阻尼比的计算[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(6): 647-653
105. Jiménez R, Santos L, Kuhl N, Egaña J. The reconstruction of a specially structured Jacobi matrix with an application to damage detection in rods[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2005, 49(11-12):1815-1823
106. Jiménez R D, Santos L, Kuhl N M, Egaña R J C, Soto L. An inverse eigenvalue procedure for damage detection in rods[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2004, 47(4-5): 643-657
107. 张敬芬, 赵德有. 工程结构裂纹损伤振动诊断的发展现状和展望[J]. 振动与冲击, 2002, 21(4):22-27

致 谢

本文是在我尊敬的导师戴华教授的悉心指导和帮助下完成的。从选题到完成的全部过程都是在戴老师的精心指导、热情帮助下完成的。衷心感谢戴老师多年来对我的辛勤培养和悉心指导。多年来，戴老师身体力行，言传身教，将我引上了从事科研之路，使我在专业研究领域得以窥豹一斑。他渊博的学识和丰富的科研经验给我以无穷的启迪，他严谨的治学态度和谦逊的工作作风给我以巨大的感染，我的每一点进步都得益他的指点和帮助，我所取得的每一点成绩都凝聚着他的辛勤和心血，我所学到的做人之道和为学之道将使我终生受益。戴老师对我在生活上的关心也坚定了我从事科学研究的信心，是我能够顺利完成学业的保障。学生对导师的培养和教育之恩难以言表，永世不忘。

感谢我的父母对我的养育之恩，感谢我的家人对三十年来对我生活的关心和求学的支持。感谢我的爱人赵婷婷对我生活的照顾和情感的支持。是他们给我的支持与鼓励，使我能够心无旁骛，安心于学业，致力于完成学业。

最后，对所有关心、支持、帮助过我的老师、同学和朋友们表示诚挚的谢意！向参加论文评阅和论文答辩的各位专家老师表示衷心的感谢！

王正盛

2006年6月

攻读博士学位期间发表的学术论文

- [1] Zhengsheng Wang, Hua Dai. On the construction of a real five-diagonal matrix from its three eigenpairs. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 175(1): 597-608 (SCI).
- [2] 王正盛. 阻尼弹簧-质点系统中的逆二次特征值问题, *高等学校计算数学学报*, 2005, 27(3): 217-224.
- [3] 王正盛. 实对称带状矩阵逆特征值问题, *高校应用数学学报*, 2004, 19(4): 451-459.
- [4] 王正盛. 实对称五对角矩阵逆特征值问题, *高等学校计算数学学报*, 2002, 24(4):366—376.
- [5] Wang Zhengsheng. A quasi-minimal residual variant of the IOM(q) for large unsymmetric systems. *Numerical Mathematics—A Journal of Chinese Universities*. 2001, 10(2):145-160.
- [6] 王正盛. 求解大型非对称线性方程组的拟最小残量 IOM(q)算法, *南京航空航天大学学报*, 2001, 33(2): 146-148.
- [7] Wang Zhengsheng. An adaptive block QMRIOM(q) method for solving unsymmetric linear systems with multiple right-hand sides, *Transactions of Nanjing university of Aeronautics & Astronautics*. 2002, 19(1): 108—112.
- [8] 王正盛. 科学计算及可视化独立应用程序的开发, 第七届全国计算数学会, 南京师范大学, 南京, 2003年10月.
- [9] 王正盛. 二次特征值问题理论方法及应用, 数学及其应用学术会议, 南京大学, 南京, 2003年12月.