

摘 要

斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮传动是贝特朗曲面原理指导下的一类典型工程实现,可望为中大型锥齿轮传动提供一种新技术原型。由于这类齿轮尚处于理论研究阶段,所以它的强度等特性是人们普遍关注的问题。但是,该新型齿轮应力分布为空间应力状态,强度问题十分复杂,无法用现有的强度计算公式解决。另外,其接触强度远远大于同等条件下的渐开线齿轮,一般可不作校核。因此,本文采用三维有限元法重点分析了该齿轮的弯曲强度。

根据贝特朗曲面应用于法向圆弧锥齿轮传动的原理推导出实际齿向线和齿形线的数学方程,并通过模拟实际加工的方法,解决了齿根圆弧和根锥面难以相切的难点。基于数学方程,利用 ANSYS 的 APDL 语言和实体造型功能建立齿轮的实体模型。从计算机容量和载荷特性等问题出发,简化实体模型并局部细化网格得到有限元模型。进而对边界施加固定全约束。

根据贝特朗曲面的特性,利用标架方法计算凸凹齿面在啮合点处的主曲率。利用赫兹理论分析得到接触域为椭圆形,椭圆中心位于啮合点,载荷在接触域上呈半椭球规律分布。

根据有限元的计算结果,分析了凸、凹齿轮齿根应力的变化规律。对于凸、凹齿轮,齿根应力沿齿向从大端到小端逐渐增大,小端齿根应力最大。对于同一啮合点,凹齿轮齿根应力大于凸齿轮的齿根应力。并对得到的齿根应力的产生原因做了进一步探讨。

综上所述,本论文的意义与价值在于:应用有限元所提供的平台,对新型齿轮进行三维有限元的应力分析,得到该齿轮副在实际载荷下各部分应力变化规律,从工程角度回答了斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮的强度特性等问题,为其技术实现提供重要依据。

关键词: 斜航式; 接触椭圆; 法向圆弧; 有限元法

Finite Element Stress Analysis for Loxodrome Normal Circular-arc Spiral Bevel Gear

Abstract

Loxodrome normal circular-arc spiral bevel gear transmission is a typical engineering application based on the principle of Bertrand conjugate surface. It is likely to be the hi-tech prototype for the middle or large spiral bevel gear. Researchers generally pay more attention to its intensity property because it is just on the stage of research. But the stress distribution of this new kind of gear is 3D state and the intension is very complex, it cannot be calculated by the current formulas. And the contact intensity of the circular-arc is greatly higher than the involute gear, so it does not need to be calculated. Therefore, 3D FEM is presented to lay stress on bending stress analysis.

Mathematics Equations of actual gear alignment lines and tooth profile lines are developed on the basis of Bertrand conjugate surface. The difficulty to make the profile and the fillet on tangent is solved through simulating process in practice. According to the equations, the solid models of a pair of loxodrome normal circular-arc spiral bevel gear are given by using APDL language and the modeling function in ANSYS. Boundary is located on the solid model and the mesh is denser in contact zones, taking into account the limit of the computer memory and stress property. The rigid constraints are applied along boundaries of the finite element models.

According to the property of Bertrand, the main curvature on the mesh point is calculated by using the frame. Based on the Hertz theory, it can be work out that the contact force is spread over an elliptical area whose center is the theoretical point of contact and the distribution of pressure is a semi-ellipsoid on the contacting surface.

The variational trends of bending stress of the gear and pinion are analyzed based on the FEM results. For the gear and pinion, the bending stress increase steadily along the gear alignment line, and reaches the maximum on the small end. At the same mesh point, the bending stress on the gear is bigger than that on the pinion. The reasons for these trends are discussed farther.

Above all, the meaning and value of the paper are as follows. By using FEM the stress of 3D finite model is analyzed. The trend of stress in different parts of the tooth is got and questions about the intensity of the loxodrome normal circular-arc spiral bevel gear are answered. Results of this paper give the important bases for applying the new gear into practice.

Key Words: Loxodrome; Contact ellipse; Normal circular tooth profile; Finite element Method

独创性说明

作者郑重声明：本硕士学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得大连理工大学或其他单位的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

作者签名：_____ 日期：_____

1 绪 论

1.1 研究背景

齿轮作为工业的象征,在现代工业生产系统中得到广泛使用。齿轮传动作为一门具有明显产品特征的共性技术,它的发展和成熟无一不和工业产品的发展密切相关。作为动力传动的主体,齿轮传动在 21 世纪的成套机械装备中仍然是机械传动系统的基础元件。在古代的齿轮传动中,由于齿轮传动的速度低、功率小,齿轮能相互传动就已满足要求,齿廓曲线往往采用最简单的直线。随着生产的发展,齿轮传动的功率日益增大,速度越来越高,齿廓曲线的选择就显得十分重要。

1674 年,丹麦天文学家 Olaf Roemer 提出摆线作为轮齿齿廓曲线,但由于摆线齿轮的制造和安装都较困难,所以它的发展受到了限制。1765 年,Leonard Euler 提出用渐开线作为轮齿齿廓曲线,渐开线齿轮在制造和安装上都显示出很大的优越性。随着科学技术的发展,对高速、重载、大功率的齿轮提出了更高的要求。因此,一种新的啮合制——圆弧齿轮啮合便应运而生。由于圆弧齿轮的承载能力比同样条件下的渐开线齿轮高,且工艺简单、成本低,所以圆弧齿轮的思想很快引起国内外的广泛重视,在国际范围内显示出其强大的生命力及广泛的应用前景。

圆弧齿轮发展早期,曾有过一次较为激烈的学术性争论。Novikov 在端面圆弧齿形的基础上证明了此类传动的啮合原理,但这给工艺带来了很大的挑战,因为生产上是基于法向圆弧进行滚刀设计和加工的,因而就出现了啮合原理与工艺实践之间严重脱节的局面。有鉴于此,大连理工大学刘健教授在中国机械工程学会十周年年会上曾指出,工程上采用的实质为法向圆弧齿轮,并证明法向圆弧齿轮也满足啮合原理。同时指出,这种齿轮的廓面为法向圆弧螺旋面,其重要性质为曲面沿母圆上各点的法线共面,即诸法线共面于圆心螺旋线的法平面内,这也是法向圆弧螺旋面容易制造的根本原因。法向圆弧的思想不仅为工程界所接受,也为圆弧齿轮的发展历史所证实。与此相应,在圆弧齿轮的相交轴传动、交错轴传动中并没有注意“法向圆弧”这一重要特征,仅仅是将现有的加工刀具的刃形改为圆弧,这种做法所带来的好处往往被加工的复杂性所抵消,因此圆弧齿轮在相交轴、交错轴传动中的应用并不广泛。

贝特朗曲面正是在上述背景下,将法向圆弧螺旋面沿母线“法线共面”这一基本特征进行提炼与升华而提出的一类特殊曲面。贝特朗曲面的提出是出于工程需要的考虑,它是以平面曲线为母线做单自由度运动形成的轨迹面,其基本特征为曲面沿着母线各点处的法线共面于母线所在的平面^[1]。研究表明,这类曲面的母线必为曲面的曲率线之

一,而与之正交的另一组曲率线与微分几何中研究过的贝特朗曲线有着相似的性质。工程上广泛应用的回转面、可展面、法向圆弧曲面等都属于贝特朗曲面的范畴,而指状、盘状铣刀的刃形曲面、渐开线齿轮传动中的渐开线柱面、渐开线螺旋面、圆弧齿轮传动中的法向圆弧螺旋面等则属于此类曲面的特例。

斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮就是贝特朗共轭曲面基本原理指导下的一类典型的工程实现,是一类相交轴条件下法向圆弧齿轮传动。该新型齿轮是将贝特朗共轭曲面基本原理向工程应用转化的联系纽带,研究内涵更为丰富,涵盖面更宽。

1.2 圆弧齿轮发展概况

齿轮是机械产品的重要基础零件,而齿轮传动则是传递机器动力和运动的一种主要形式。齿轮传动与皮带、摩擦、液压等机械传动相比,具有功率大、传动效率高、传动比准确、使用寿命长、安全可靠等特点,因此,齿轮已成为许多机械产品中不可缺少的传动部件,齿轮的设计和制造水平也直接影响到机械产品的性能和质量。由于齿轮在工业发展中的突出地位,致使它被认为是工业化的一种象征。

齿轮传动的历史几乎与人类文明史同步,早在公元前 400 ~ 200 年,中国古代就开始使用齿轮。17 世纪末,人们开始研究能正确传递运动的轮齿形状。18 世纪欧洲工业革命以后,齿轮传动应用日益广泛,先是发展摆线齿轮,而后是渐开线齿轮。一直到 20 世纪初,渐开线齿轮在应用中占据绝对优势。

早在 1694 年,法国学者 Philippe De La Hire 首先提出渐开线可作为齿轮曲线。1733 年,法国人 Camus 提出 Camus 定理,考虑两齿面的啮合状态,明确建立了现代关于接触点轨迹的概念。1765 年, Euler 提出渐开线齿形解析研究的数学基础,阐明了相啮合的一对齿轮,其齿形曲线的曲率半径和曲率中心位置的关系。后来, Savary 进一步完成这一方法,成为现在的 Euler-Savary 方程。19 世纪中叶,英国的 Robert Willis 提出中心距变化时,渐开线齿轮具有角速度不变的优点,使它对制造和安装误差有很强的适应性。1873 年,德国工程师 Hoppe 提出对于不同齿数的齿轮在压力角改变时的渐开线齿形,从而奠定了现代变位齿轮的思想基础,该思想于 1899 年被拉舍最早实现,从而改善了渐开线齿轮的啮合性能。19 世纪末,以展成原理为基础的齿轮专用机床与专用刀具的相继出现,使渐开线齿轮的设计、加工、测量、精度标准等都发展到相当完善的地步。渐开线齿轮传动尽管有许多优点,但也存在一些缺陷,具体表现为:廓面为凸齿对凸齿啮合,诱导曲率大,接触强度差,尤其在一些重载场合,使用寿命较短。

为了提高动力传动齿轮的使用寿命并减小其尺寸,除了对现有齿轮的材料、热处理及结构等方面改进外,人们开始探索新的传动形式。1907 年,英国人 Frank Humphris

最早提出弧齿形的思想。1922 年, Vichers-Bostock-Bramley 提出并研究了 VBB 齿轮, 其特点为: 1. 齿轮副在端面内仍然有重合度存在; 2. 小齿轮为凸齿, 大齿轮为凹齿, 廓面间为凸凹搭配; 3. 具有较小的诱导曲率, 因此接触强度大大增加。然而, 这种齿轮由于凹齿齿顶厚度小, 弯曲强度低, 易于折断, 因此, VBB 齿轮并未能得到广泛的应用, 但它却是对渐开线齿轮挑战的一种尝试^[2]。

1926 年, 美国格利森公司的瑞士人 Wildhaber 在上述概念的基础上, 首次提出法面为圆弧齿廓的斜齿轮, 并取得专利。1956 年, 前苏联学者 Novikov 对 Wildhaber 的设想进行完善, 发明了一种端面为圆弧的圆弧齿轮, 并在完成实用性研究后正式进入工业应用阶段。1960 年 10 月在德国埃森(ESSEN)召开的国际齿轮会议上, 该齿轮被定名为 Wildhaber-Novikov 齿轮, 简称 W-N 齿轮。前苏联研制的单圆弧齿轮主要用于中、低速传动。1962 年, 英国已制造出传动比为 1~10, 功率达 8000 马力的圆弧齿轮, 并进行强度试验, 轮齿负荷可达渐开线齿轮的 5 倍, 效率最高达到 99.4%。1969 年, 前苏联制定了公切线式双圆弧齿轮的齿形标准; 1970 年, 英国 Rolls-Royce 公司的 Studer 工程师提出分阶式双圆弧齿轮的齿形方案, 并申请取得了美国专利; 双圆弧齿形大大提高了圆弧齿轮的弯曲强度^[2]。

齿轮在我国的发展是从渐开线齿廓起步的, 渐开线齿轮在技术上最成熟, 应用最具备条件, 因而使用也最为普遍, 并在机械传动设计中, 占有主导地位。渐开线齿廓具有中心距敏感性小, 可进行各种变位和修形设计, 易于进行精密加工、互换性好等一系列优点。从 50 年代起, 在一般重要的设备传动中, 都采用渐开线齿轮。但由于渐开线软齿面齿轮表面接触强度薄弱, 加之一般质量水平不高, 在使用中往往出现早期失效, 尤其在一些承载较重的场合, 使用寿命较低。1959 年春, 朱景梓教授将圆弧齿轮的资料由前苏联带回国内^[3-4], 各大院所、高校与工厂迅速开展了有关圆弧齿轮的研究工作, 并于当年分别在天津和洛阳召开了全国圆弧齿轮的技术会议。1961 年 11 月于中国机械工程学会在北京举行的十周年年会上, 将“圆弧齿轮在我国的应用与发展”列为中心议题之一, 在对圆弧齿轮传动充分肯定的基础上, 根据生产中迫切需要解决的问题, 从啮合原理、强度计算、减速器设计、计量与检验等四个方面进行了深入的讨论^[5]。这次会议对圆弧齿轮的理论研究与生产应用起到了巨大的推动作用。1962 年 12 月, 在上海召开的圆弧齿轮技术会议, 对圆弧齿轮所取得的成就进行了总结。1965 年, 在杭州召开了高速圆弧齿轮传动经验交流会, 重点讨论如何提高圆弧齿轮的传动质量问题。经过十多年的努力, 在圆弧齿轮制造工艺的改进、制造精度的提高等方面都取得了很大成绩。尤其是在中低速重载齿轮传动方面, 将圆弧齿轮用于轧钢机上, 技术和经济效果最为显

著,与原来使用的渐开线齿轮减速器相比,大大提高了使用功率,延长了齿轮使用寿命。在高速齿轮传动方面,圆弧齿轮也广泛应用于中小型气轮机、离心式鼓风机、空气压缩机等产品中。

为了进一步提高圆弧齿轮的弯曲强度,从1967年开始,我国对圆弧齿轮的研究主要集中于双圆弧齿轮上。1972年由郑州机械研究所、哈尔滨工业大学、太原工业大学、上海工业大学和上海汽车厂、杭州汽车厂等单位分别进行了分阶式双圆弧齿轮承载能力有限元计算、光弹试验、台架试验以及工业生产应用^[6],并于1980年12月在上海召开双圆弧齿轮技术鉴定会,逐步开始在风机、轧钢机、船舶等高速重载场合展开应用。文献[7-8]提出根据齿轮副的动态特性要求,利用有限元分析和模糊优化理论进行双圆弧齿轮参数模糊优化组合的观点。为了使双圆弧齿轮向更广阔的应用领域发展。文献[9]通过三维弹性接触有限元法和跑合仿真的耦合,提出了精确分析双圆弧齿轮跑合前后齿间、接触迹间载荷分配的方法,为研究双圆弧齿轮的强度特性、跑合特性提供了理论依据。

通过四十多年的努力,我国建立了具有自身特色的点啮合制圆弧齿轮的基本啮合理论、承载能力计算方法、热弹流润滑理论分析计算、齿端修形原理与计算、精度检验与测量尺寸计算、滚刀齿形设计与计算及制造工艺等一系列基础理论和工艺方法。上述研究,对圆弧齿轮的发展起到了推动作用,使我国的圆弧齿轮传动技术研究走在了世界前列,同时指出了圆弧齿轮今后的发展方向。随着齿轮技术,尤其是硬齿面齿轮技术的发展,对圆弧齿轮提出了更高的要求,也就是说,圆弧齿轮也必须向中硬齿面和硬齿面方向发展。另一方面,在产品设计上,应当采用现代化设计方法,用CAD技术进行优化设计^[10]。

圆弧齿轮从提出到广泛应用仅用了四十多年的时间,在Novikov的基础上从理论到技术都取得了突破性进展。与渐开线齿轮二百多年的历史相比,圆弧齿轮在如此短的时间内能取得这样大的成果,归纳起来主要有以下几点原因^[1]:

- (1) 圆弧齿廓为凸凹搭配,有很小的诱导曲率,因此接触强度高,承载能力大;
- (2) 圆弧齿轮的瞬时接触线在端面附近,传动过程中接触线由齿轮的一端向另一端迅速移动,有利于油膜的形成,因而具有优良的润滑性能,提高了齿轮的使用寿命;
- (3) 由于凸凹齿廓圆弧存在半径差,廓面间理论上为点接触,降低了齿轮副对误差的敏感度;
- (4) 齿廓的法向截形为圆弧,便于采用圆环面指状、盘状铣刀或滚刀加工,有良好的工艺性。

然而圆弧齿轮发展早期,对于 Novikov 选择端面齿形为圆弧,且将圆弧齿轮的优越性归功于点啮合传动原理,文献[1,5]提出了与之不同的观点。

首先,从工艺角度出发,圆弧齿轮设计上由于凸凹齿轮半径差的存在,致使啮合之初呈现点接触。这一点与渐开线齿轮的鼓形修形措施以及弧齿锥齿轮的局部共轭原理本质上是一致的,其实质都是将线啮合副“点啮合化”,从而放宽对传动副的约束条件,提高齿轮副对误差的适应性。并且,关于圆弧齿轮强度计算公式也大都是以线啮合为基础的。圆弧齿轮所表现出的巨大优越性,本质上并非点啮合所致。而且,圆弧齿轮的加工仍以包络法为基础,线啮合与以奥里佛包络原理为基础的加工工艺紧密联系。基于上述考虑,文献[1]认为,将圆弧齿轮传动建立在线啮合基础上更有利于讨论啮合制的发展。经过讨论最后达到较一致的意见:点啮合是手段,线啮合是目的,从点啮合原理或线啮合原理来研究圆弧齿轮,是对同一客观事物的不同理解和认识,二者不存在本质的区别。斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮的理论核心—贝特朗共轭曲面原理正是受上述思想的启发,将圆弧齿轮的“法向圆弧”与“线啮合”的本质属性加以提炼而提出的。

由于贝特朗共轭曲面是指一对共轭曲面均为贝特朗曲面,并且共轭的各瞬时接触线均为其母线。据此所发展的斜航线法向圆弧螺旋锥齿轮将不仅具有优良的传动性能,并且还将具有良好的工艺性,可以采用指状或盘状铣刀进行成型法加工。特别是当今数控技术的飞速发展,为贝特朗共轭曲面的加工提供了强有力的支持,反过来说,贝特朗共轭曲面在传动领域的发展,又为齿轮加工的数控化提供了必要的前提,从而降低了对齿轮专用机床和专用刀具的依赖程度,适应了当前小批量、多品种与大型、重载齿轮的加工需要。

1.3 齿轮强度分析发展概况

1.3.1 齿轮失效分类

无论是渐开线齿轮还是圆弧齿轮,它们的损伤形式都有共性。当齿轮参数和材料相同时,圆弧齿轮的抗点蚀能力比渐开线齿轮有较大幅度的提高。当圆弧齿轮的轮齿受集中载荷作用时,其弯曲折断能力需要重点考虑。圆弧齿轮的塑性流动比渐开线齿轮较多见,未经跑合而模数较大的圆弧齿轮容易胶合。圆弧齿轮在同一部位均有产生折断、点蚀和初始胶合这些损伤的可能,而渐开线齿轮发生这些损伤的危险区不在同一部位。

总的来说,齿轮主要有以下几种失效形式^[2]:

1. 轮齿折断

当齿根的循环弯曲应力超过材料的疲劳极限时，将引起齿根疲劳裂纹不断扩展而折断。圆弧齿轮的齿面瞬时载荷集中在齿宽上较窄的一段接触轨上，载荷由一部分齿宽的齿根承担。因此，齿根应力较大。当加工质量较好，材料中等硬度，且工作前经过仔细跑合时，齿轮多数是由于疲劳折断而失效。当重合度较小时，折断常发生于齿宽中部，这是因为齿宽中部受载时接触点数最少。断齿的断口可呈月牙状。

2. 齿端崩角

当齿轮的平稳性精度低，或轴系的刚度差时，轮齿在啮合交替过程中产生冲击，容易引起齿端崩角。通常崩角多发生在主动轮的啮合端，因为主动轮齿工作齿面与端面成锐角，承载齿厚和齿宽都小，强度薄弱，且啮入端冲击较大，易崩角。

3. 齿面疲劳点蚀

当轮齿表面承受循环接触应力超过材料的接触疲劳极限时，在齿面或表面内产生微小的裂纹，裂纹继续扩展，连成一小片，小片金属脱落，在齿面形成麻点，即出现疲劳点蚀。

4. 齿面胶合

齿面胶合是由于两齿面之间难以形成油膜或油膜遭到破坏，使两齿面金属直接接触，摩擦发热，从而使两齿面粘着，齿面金属沿着相对运动方向互相扯出一条条痕迹。当齿轮制造质量较差，齿面局部接触应力很大，瞬时温度很高，齿面油膜将遭到破坏；低速重载，或润滑油的吸附性能差时，均难形成油膜；大模数齿轮，由于齿廓圆弧半径的差值较大，不容易跑合，且齿面相对速度大，摩擦发热也大。在以上这些情况下都容易产生胶合。不经跑合就重载试车或使用，或跑合时不逐级加载，都会产生很大的接触应力，这将导致迅速发生胶合。

1.3.2 强度分析方法概述

到目前为止，对齿轮进行强度测试大约有三类方法：解析法，试验法和有限元法。

1.3.2.1 公式法

在强度计算中，基本考虑的是确定出能保证齿轮安全的形状、尺寸、材料等，使之不产生相应的各种失效。由于齿轮的损伤形式是多种多样的，其机理也各不相同，因此有必要对各种强度分别进行计算。然而一般情况下只是对经常发生的折断、点蚀以及胶合进行强度计算。本文主要以研究齿根弯曲强度和齿面接触强度（抗点蚀强度）的计算为主。

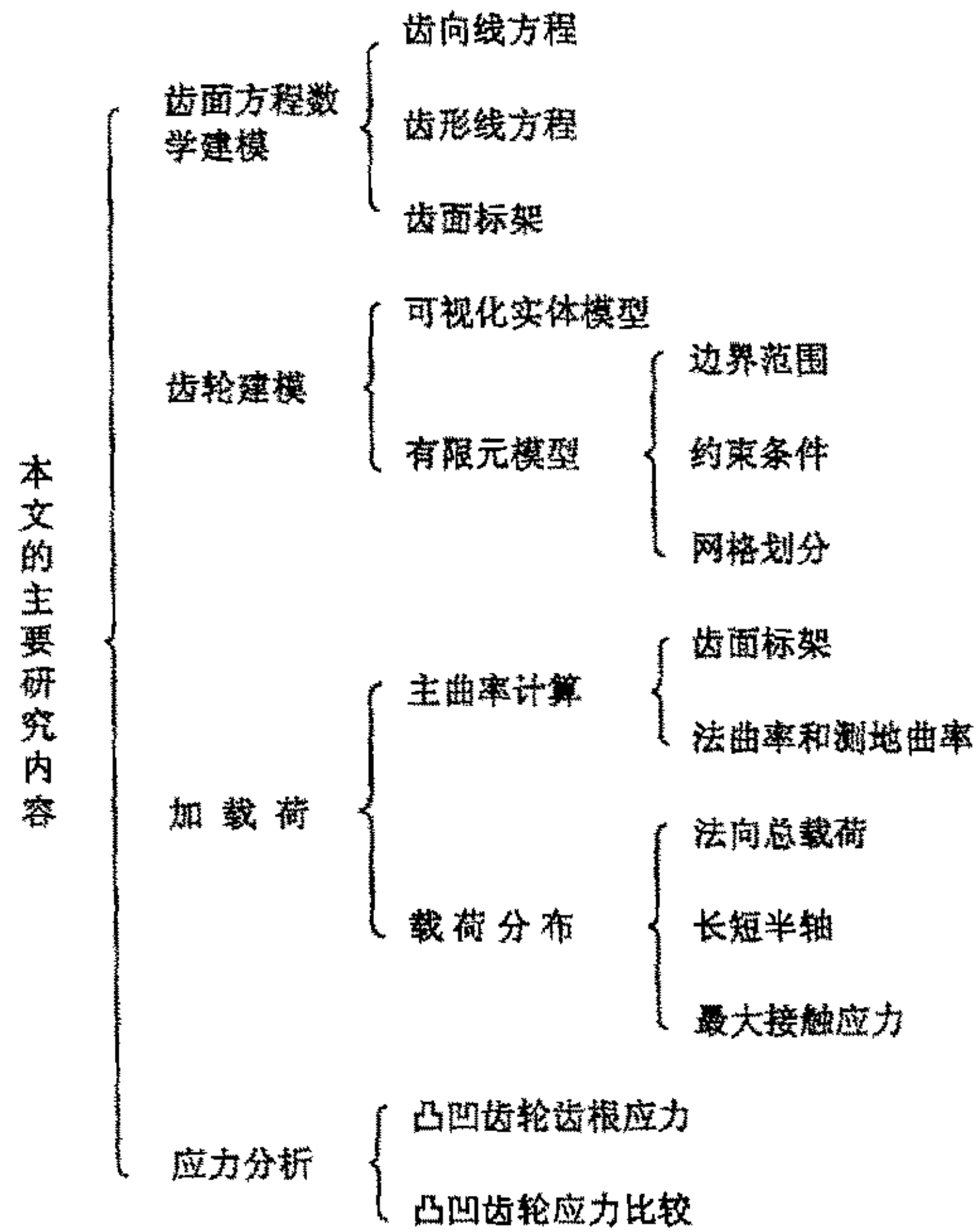


图 1-1 论文结构

Fig. 1-1 Structure of this paper

技术的迅猛发展为贝特朗曲面的成型法加工提供了强有力的支持。反过来说,斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮的在传动领域的应用,又为齿轮加工的数控化提供了必要的前提,从而降低了对齿轮专用机床和专用刀具的依赖程度,适应了当前小批量、多品种与大型、重载的螺旋锥齿轮加工需要。

本章将在此基础上,重点给出斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮传动的一般原理、准面及准线的确定方法、基本几何参数的设计等内容。

2.2 法向圆弧齿轮传动的一般原理

对于相交轴传动,节曲面即为节圆锥。首先在节圆锥上建立如图 2-1(a)所示的直角坐标系,原点 o 位于锥顶, z 为节锥面的轴线。根据回转面的基本公式可以得到节锥面的方程:

$$R(\lambda, v) = v[\sin \delta \mathbf{e}(\lambda) + \cos \delta \mathbf{k}] \quad (2-1)$$

式中, v 为直母线参数, λ 为转角参数, δ 为节锥角。

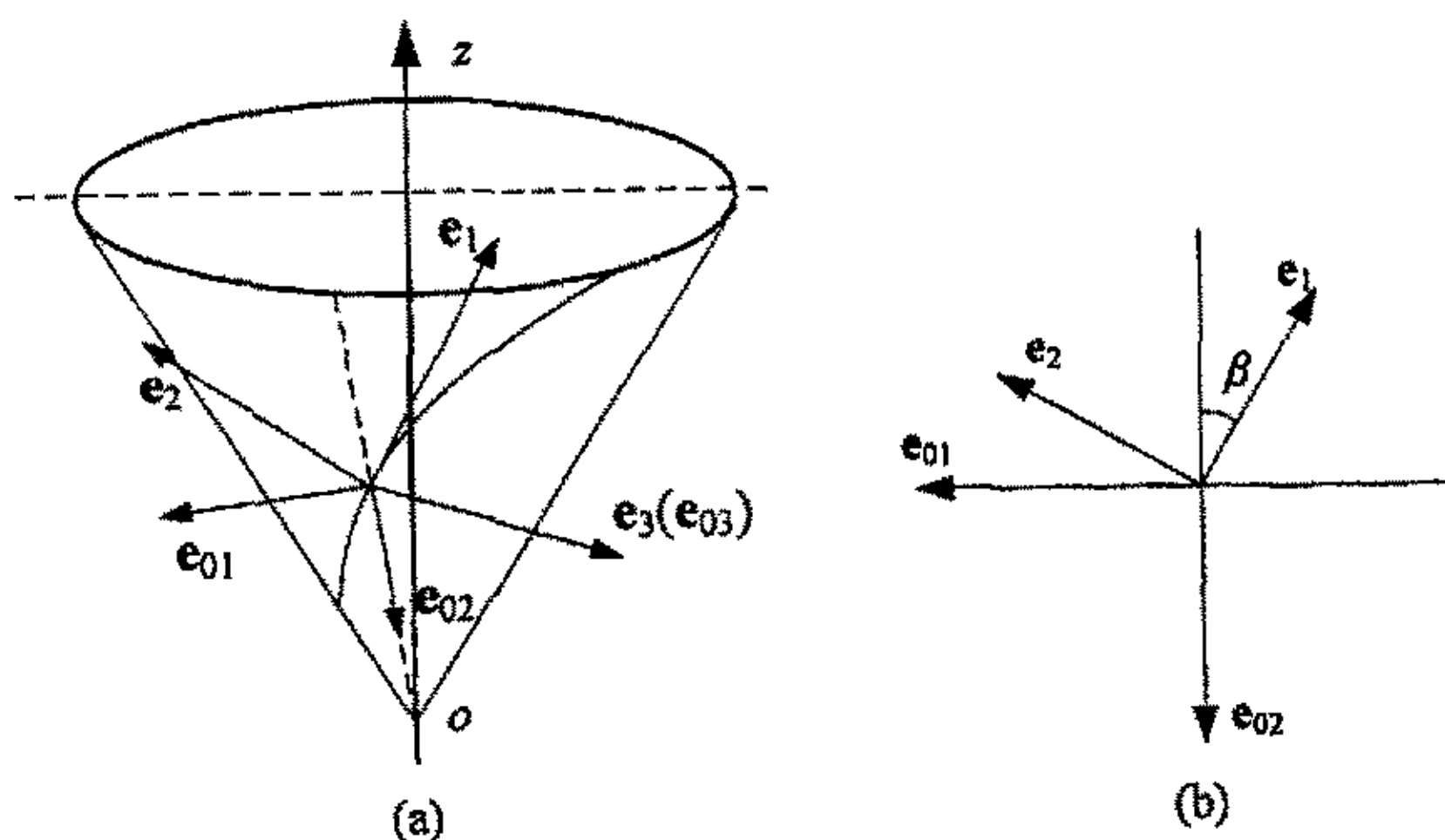


图 2-1 节锥面与准线的标架

Fig. 2-1 Pitch cone surface and coordinates of directrix

按照贝特朗曲面标架的设定方法,在节锥面上建立标架 $\{R, \mathbf{e}_{01} \mathbf{e}_{02} \mathbf{e}_{03}\}$, $\mathbf{e}_{01}$ 为纬线的单位切矢, $\mathbf{e}_{03}$ 为单位法矢,并规定为“离体”的方向,而 $\mathbf{e}_{02}$ 为直母线的单位切矢,如图 2-1(b)所示。节锥面的标架方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_{01} &= \mathbf{R}_\lambda / |\mathbf{R}_\lambda| = \mathbf{e}_1(\lambda) \\ \mathbf{e}_{02} &= \mathbf{R}_\nu / |\mathbf{R}_\nu| = \sin \delta \mathbf{e}(\lambda) + \cos \delta \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_{03} &= \mathbf{e}_{01} \times \mathbf{e}_{02} = \cos \delta \mathbf{e}(\lambda) - \sin \delta \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

由回转面的性质可知, 节锥面上的两族坐标曲线(λ 曲线和 ν 曲线)彼此正交, 构成了曲面的曲率线网, $\mathbf{e}_{01}$ 、 $\mathbf{e}_{02}$ 方向的法曲率即为主曲率; 由于直母线为节锥面的测地线, 因此两族坐标曲线又构成了曲面的半测地网; 节锥面的回转轴构成了纬线族的公共曲率轴。节锥面的这些性质为研究其不变量提供了很大方便。

由于 $\mathbf{e}_{02}$ 方向对应的曲率线为直母线, 因此该方向的主曲率

$$k_{02} = 0 \quad (2-3)$$

下面来看沿 $\mathbf{e}_{01}$ 方向的曲率特征。回转面纬线圆的曲率中心 o_c 、测地曲率中心 o_g 和法曲率中心 o_n 必定共线于回转轴上。如图 2-2 所示, 过节锥面上一点 p 作纬线圆的法截

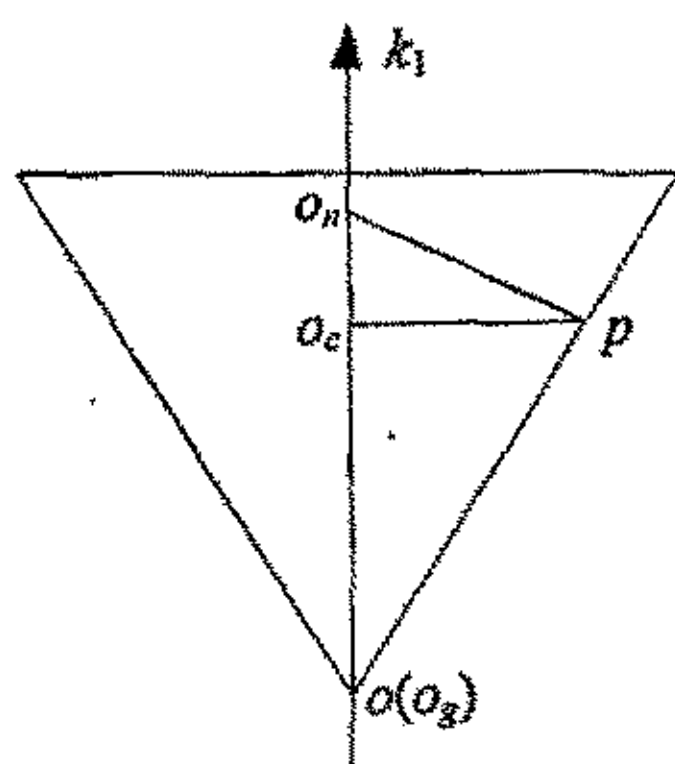


图 2-2 节锥面的曲率特征

Fig. 2-2 Curvature of pitch cone surface

面, 即为回转面的轴截面。过点 p 作直母线及回转轴的法线, 与回转轴的交点 o_n 、 o_c 即为法曲率中心及曲率中心。直母线与回转轴的交点 o_g , 即节锥面的锥顶, 为测地曲率中心。由图可以得到沿 $\mathbf{e}_{01}$ 方向的测地曲率、主曲率为

$$k_{g01} = \frac{1}{\nu}, \quad k_{01} = \frac{1}{\nu \tan \delta} \quad (2-4)$$

下面给出节锥面上的准线及其特征。当式(2-1)的参数 ν 与 λ 满足关系式 $\nu = \nu(\lambda)$, 则

表示了节圆锥上的一条曲线:

$$R_p(\lambda) = v(\lambda)[\sin \delta \mathbf{e}(\lambda) + \cos \delta \mathbf{k}] \quad (2-5)$$

上式对 λ 求导, 可得曲线的切线矢量为

$$\dot{R}_p(\lambda) = \dot{v}[\sin \delta \mathbf{e}(\lambda) + \cos \delta \mathbf{k}] + v \sin \delta \mathbf{e}_1(\lambda) \quad (2-6)$$

式中, $\dot{v}$ 为 v 对 λ 的一阶导数。进而可以求得准线的弧微分表达式

$$ds = |\dot{R}_p| d\lambda = \sqrt{\dot{v}^2 + (v \sin \delta)^2} d\lambda \quad (2-7)$$

准线上的标架除 $\mathbf{e}_1$ 为曲线的单位切矢, 有确定的方向外, $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$ 可以在法截面内任意选取。由于准线为节锥面上的曲线, 从而可以考虑采用节锥面的标架来研究准线的特征。即令 $\mathbf{e}_3$ 为圆锥面的单位法矢, 从而 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{03}$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 就构成了节锥面的切平面。这样就在准线的标架与准面的标架之间建立了联系, 如图 2-1(b) 所示, 只要令准面的标架绕 $\mathbf{e}_{03}$ 回转一个角度, 使新标架的 $\mathbf{e}_1$ 方向指向准线的切线方向, 就可以得到准线的标架 $\{\mathbf{R}_p, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。根据式(2-2)和(2-6), 曲线的标架可写为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\dot{v}^2 + (v \sin \delta)^2}} \{ \dot{v}[\sin \delta \mathbf{e}(\lambda) + \cos \delta \mathbf{k}] + v \sin \delta \mathbf{e}_1(\lambda) \} \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\dot{v}^2 + (v \sin \delta)^2}} \{ v \sin \delta [\sin \delta \mathbf{e}(\lambda) + \cos \delta \mathbf{k}] - \dot{v} \sin \delta \mathbf{e}_1(\lambda) \} \\ \mathbf{e}_3 &= \cos \delta \mathbf{e}(\lambda) - \sin \delta \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

由上面的分析可知, 标架 $\{\mathbf{R}, \mathbf{e}_{01}, \mathbf{e}_{02}, \mathbf{e}_{03}\}$ 与 $\{\mathbf{R}_p, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 之间在节锥面的切平面内旋转了一个角度 $(\pi/2 - \beta)$, 其中 β 为准线的切线与直母线方向的夹角, 也就是节锥面上准线的螺旋角。因此有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \sin \beta \mathbf{e}_{01} - \cos \beta \mathbf{e}_{02} \\ \mathbf{e}_2 &= \cos \beta \mathbf{e}_{01} + \sin \beta \mathbf{e}_{02} \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

分别用 $\mathbf{e}_{01}$ 、 $\mathbf{e}_{02}$ 与(2-9)的第一式作纯积, 并联系式(2-6)和(2-8)可以得到

$$\sin \beta = \frac{v \sin \delta}{\sqrt{\dot{v}^2 + (v \sin \delta)^2}} \quad (2-10)$$

$$\cos \beta = \frac{\dot{v}}{\sqrt{\dot{v}^2 + (v \sin \delta)^2}} \quad (2-11)$$

由此可以得到

$$\tan \beta = \frac{v \sin \delta}{\dot{v}} \quad (2-12)$$

2.3 斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮传动的基本原理

对于法向圆弧螺旋锥齿轮传动，其准线的形状对其啮合性能与承载能力影响不大，因此，准线选择的主要依据是便于加工制造。从工程角度考虑，一般选择节锥面上的螺旋线作为准线，参考平行轴传动时节圆柱上的螺旋线，它集等距螺线、斜航线、测地线三者于一身，已广为工程所应用。然而对于圆锥面上的螺旋线，情况并不那么简单。对圆锥面上的这三种曲线的研究表明，斜航线与测地线十分有利于采用指状、盘状铣刀来加工。本文讨论的法向圆弧螺旋锥齿轮选用节锥面上的斜航线作为准线，下面给出其传动的基本原理。

微分几何学将回转面上与母线夹定角的曲线称为斜航线^[10]。圆锥上的曲线与直母线的夹角，即螺旋角 β 满足

$$\tan \beta = \frac{v \sin \delta}{\dot{v}}$$

令 β 为定角，对上式求积分，可得

$$\ln v = \frac{(\lambda + \lambda_0) \sin \delta}{\tan \beta}$$

从而有

$$v = v_0 \exp(b\lambda) \quad (2-13)$$

式中， $v_0 = \exp(\frac{\lambda_0 \sin \delta}{\tan \beta})$ ， $b = \frac{\sin \delta}{\tan \beta}$ ，二者均为常数； β 为“+”时表示曲线右

旋，为“-”时表示左旋。

节锥面上的斜航线方程为

$$\mathbf{R}_p(\lambda) = v_0 \exp(b\lambda) [\sin \delta \mathbf{e}(\lambda) + \cos \delta \mathbf{k}] \quad (2-14)$$

由式(2-13)可求 v 对 λ 的一阶导数为

$$\dot{v} = bv_0 \exp(b\lambda) = bv \quad (2-15)$$

斜航线的弧微分与标架方程

$$ds = v \sqrt{b^2 + \sin^2 \delta} d\lambda = \frac{\sin \delta}{|\sin \beta|} v d\lambda = \frac{\sin \delta}{|\sin \beta|} v_0 \exp(b\lambda) d\lambda \quad (2-16)$$

对于一对凸凹齿轮, 斜航线上标架方向定为如下: 凸齿轮取负号, 凹齿轮取正号。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \pm \{ \cos \beta [\sin \delta \mathbf{e}(\lambda) + \cos \delta \mathbf{k}] + \sin \beta \mathbf{e}_1(\lambda) \} \\ \mathbf{e}_2 &= \pm \{ \sin \beta [\sin \delta \mathbf{e}(\lambda) + \cos \delta \mathbf{k}] - \cos \beta \mathbf{e}_1(\lambda) \} \\ \mathbf{e}_3 &= \cos \beta \mathbf{e}(\lambda) - \sin \beta \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

$\mathbf{e}_1$ 是齿向线的切线方向, 表示参数增加的方向。对于小齿轮, $\mathbf{e}_1$ 是大端指向小端; 对于大齿轮, $\mathbf{e}_1$ 是小端指向大端。对于大小齿轮, $\mathbf{e}_3$ 方向都是离体的方向。

由上面几个式子可以得到斜航线的特性。令 $\mathbf{k}$ 与 $\mathbf{e}_1$ 作纯积, 可得

$$\cos \varepsilon = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1 = \pm \cos \beta \cos \delta \quad (2-18)$$

由此可得出结论, 圆锥面上的斜航线不仅与母线成定角, 它与回转轴的夹角也定值。

2.4 法向圆弧螺旋锥齿轮传动设计

本节在以上讨论的准面及准线的基础上, 重点讨论斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮传动的设计问题。

2.4.1 基本概念及主要参数的定义

作为一种新型的锥齿轮传动形式, 为了方便设计, 有必要对其基本概念及主要参数进行规范和定义。考虑法向圆弧螺旋锥齿轮自身的特点, 并参考法向圆弧圆柱齿轮和弧齿锥齿轮的定义, 可以将其基本概念及主要参数归纳如下。

(1) 基本参数

a. 轴交角 Σ : 两锥齿轮轴线之间的夹角。

b. 传动比 I ：被动轮转速与主动轮转速之比。可表示为

$$I = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}$$

式中, z_1 、 z_2 分别为主动轮与被动轮的齿数。

c. 公称模数 m_n ：法向圆弧螺旋锥齿轮的小端法向模数。

(2) 基准面

a. 分度锥：锥齿轮设计时所依据的一个基准分度圆锥面。锥齿轮轴线与分度锥母线之间的夹角称为分锥角，用 δ 表示。由此，锥齿轮副的轴交角和传动比尚可用两锥齿轮的分锥角表示为

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2$$

$$I = \frac{\sin \delta_1}{\sin(\Sigma - \delta_1)}$$

b. 节锥：锥齿轮传动时作纯滚动的一对圆锥，锥齿轮轴线与节锥母线之间的夹角称为节锥角。一般情况下，节锥与分度锥重合，在工程习惯上往往将二者混用。

c. 节线与节平面：节线是指两个节锥相切的公共母线；节平面是指经过节线所作的两个节锥的公共切平面。

d. 节锥距 v ：节锥母线上任意一点到节锥顶点的距离。

e. 大端基面：锥齿轮的大端垂直于轴线的平面，是锥齿轮设计、加工及安装时的基准面。

(3) 齿向与齿形

a. 齿向线和螺旋角：法向圆弧螺旋锥齿轮分度锥上标识其廓面齿向特征的一条曲线称为齿向线；齿向线上某点的切线与该点所在的分度锥母线之间的夹角称为螺旋角，用 β 表示。

b. 公称齿向线与公称螺旋角：法向圆弧螺旋锥齿轮设计时在分度锥上首先确定的一条基准齿向线称为公称齿向线，公称齿向线上各点对应的螺旋角称为公称螺旋角。公称齿向线大致位于左右廓面的对称位置，它上面各点的螺旋角一般各不相同，为了规范起见，通常选择齿宽中点处的螺旋角来表征其弯曲程度，称为名义螺旋角，用 $\bar{\beta}$ 表示。本文齿向线选用的是斜航线，因此齿向线上各点螺旋角相等。

c. 实际齿向线和实际螺旋角：从等强度原则出发，在锥齿轮设计时对公称齿向线修

- (2) 令 $R_p^{(3)}$ 绕冕齿轮中心分别回转角度 $\pm \Delta\lambda_0$, 得到左右齿廓实际齿向线的原型曲线 $R_l^{(3)}$ 、 $R_r^{(3)}$, 二者与冕齿轮小端圆弧相交所得的弦长在公称齿向线法线方向的投影应等于法向圆弧半径。考虑偏心距的影响, 可有

$$\tan \Delta\lambda_0 = \frac{2(r_0 - c)}{m_n Z_3} \quad (2-20)$$

- (3) 令 $R_l^{(3)}$ 、 $R_r^{(3)}$ 分别向原回转角度的相反方向作法向等距线, 法向距离为圆弧半径 r_0 , 然后用两条标准齿向线 $R_{pl}^{(3)}$ 、 $R_{pr}^{(3)}$ 拟合等距线, 这两条曲线即为法向圆弧廓面左右齿廓的实际齿向线:

$$\left. \begin{aligned} R_{pl}^{(3)} &= v_0 \exp(\cot \beta_l \lambda_3) e(\lambda_3 + \lambda_l) \\ R_{pr}^{(3)} &= v_0 \exp(\cot \beta_r \lambda_3) e(\lambda_3 + \lambda_r) \end{aligned} \right\} \quad (2-21)$$

式中, β_l 、 β_r 为左右廓面实际齿向线的实际螺旋角; λ_l 、 λ_r 为左右廓面实际齿向线对应的初始相位角。

如图 2-3 所示, 由上述方法得到的左右廓面分别对应两条不同的实际齿向线。

2.4.2.3 齿形设计

法向圆弧螺旋锥齿轮的廓面由实际齿向线及其法截面内的圆弧齿形构成, 它仍然可

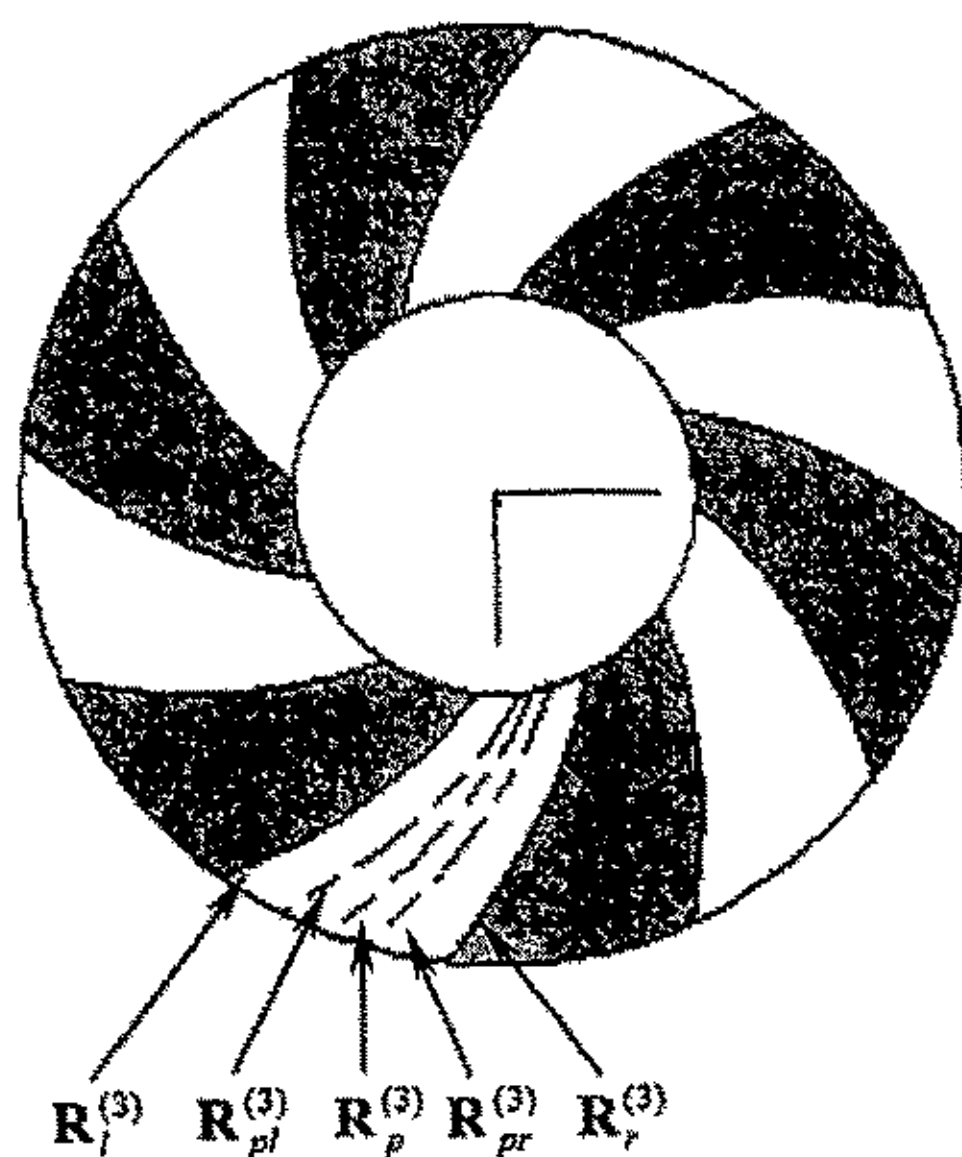


图 2-3 冕齿轮齿向线

Fig. 2-3 Gear alignment line of the crown gear

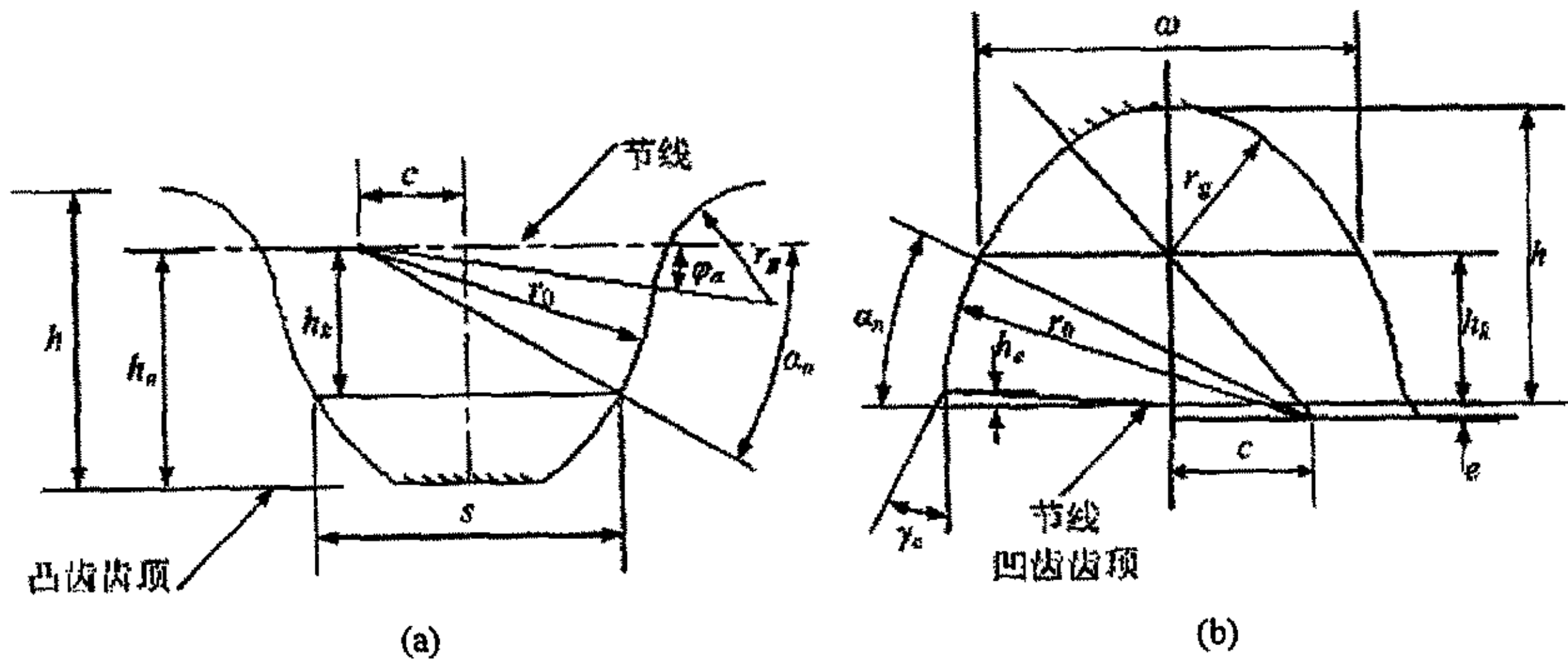


图 2-4 单圆弧基准齿形
Fig. 2-4 Single circular-arc tooth profile

2.5 本章小结

法向圆弧齿轮传动的是贝特朗共轭曲面原理指导下的一类典型的工程实现。本章介绍了法向圆弧齿轮传动的一般原理，确定了由准面到准线的设计路线。给出了斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮的传动原理。给出节锥面上准线的设计及标架。得到准线的曲率特征。重点介绍了法向圆弧螺旋锥齿轮的几何设计问题，包括基本参数的确定、齿向设计和齿形设计。将主要的几何参数规范在冕齿轮上讨论，给出了齿形和齿向的具体设计步骤。该章是后续齿轮的实体建模和有限元建模的理论基础。

3 实体建模

本章将在前两章讨论的基础上推导在 CAD/CAE 软件中建立齿轮齿面的方程。根据设计参数得到一对斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮的实体模型，并指出建模过程中由于齿面复杂而引起的技术难点，给予解决。

3.1 数学模型

3.1.1 凸齿轮齿面方程的建构

在凸齿轮准线上建立标架 $\{R, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。 $\mathbf{e}_1$ 是准线的单位切矢，其正方向由凸齿轮大端指向小端； $\mathbf{e}_3$ 是该点在节锥面的单位法矢，规定“离体”的方向为正。 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 构成右手系。如图 3-1(a)所示。

$$\mathbf{R}_{pl}^1(\theta, \lambda_r) = \mathbf{R}_{pr}^1(\lambda_r - \Delta\lambda_1) + \mathbf{r}_1 \quad (3-1)$$

$$\mathbf{R}_{pr}^1(\theta, \lambda_l) = \mathbf{R}_{pl}^1(\lambda_l + \Delta\lambda_1) + \mathbf{r}_1 \quad (3-2)$$

$$\mathbf{R}_{pl}^1(\lambda_l + \Delta\lambda_1) = v_0^1 \exp(b_l^1 \lambda_l) [\sin \delta_1 \mathbf{e}(\lambda_l + \Delta\lambda_1) + \cos \delta_1 \mathbf{k}], \quad b_l^1 = \sin \delta_1 / \tan \beta_l^1 \quad (3-3)$$

$$\mathbf{R}_{pr}^1(\lambda_r - \Delta\lambda_1) = v_0^1 \exp(b_r^1 \lambda_r) [\sin \delta_1 \mathbf{e}(\lambda_r - \Delta\lambda_1) + \cos \delta_1 \mathbf{k}], \quad b_r^1 = \sin \delta_1 / \tan \beta_r^1 \quad (3-4)$$

$$\mathbf{r}_1 = r_{01}(\mathbf{e}_2 \cos \theta + \mathbf{e}_3 \sin \theta)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -\cos \beta_{l/r}^1 [\sin \delta_1 \mathbf{e}(\lambda_{l/r} \pm \Delta\lambda_1) + \cos \delta_1 \mathbf{k}] - \sin \beta_{l/r}^1 \mathbf{e}_1(\lambda_{l/r} \pm \Delta\lambda_1) \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin \beta_{l/r}^1 [\sin \delta_1 \mathbf{e}(\lambda_{l/r} \pm \Delta\lambda_1) + \cos \delta_1 \mathbf{k}] + \cos \beta_{l/r}^1 \mathbf{e}_1(\lambda_{l/r} \pm \Delta\lambda_1) \\ \mathbf{e}_3 &= \cos \delta_1 \mathbf{e}(\lambda_{l/r} \pm \Delta\lambda_1) - \sin \delta_1 \mathbf{k} \end{aligned} \right\}$$

式(3-1)和(3-2)分别表示凸齿轮左齿廓面和右齿廓面的方程。 $\mathbf{R}_{pl}^1(\lambda_l + \Delta\lambda_1)$ 为实际左齿向线上一点在绝对系下的矢径， $\mathbf{R}_{pr}^1(\lambda_r - \Delta\lambda_1)$ 为实际右齿向线上一点在绝对系下的矢径。 $\mathbf{r}_1$ 为齿形上一点在法面内的矢径。 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$ 分别是凸齿轮准线标架， λ_l 和 λ_r 为左齿廓面和右齿廓面对应的转角参数， β_l^1 和 β_r^1 分别为左齿向线和右齿向线螺旋角， δ_1 为凸齿轮节锥角， v_0^1 为凸齿轮直母线参数， r_{01} 为凸齿轮齿廓圆弧半径， $\mathbf{e}(\lambda)$ 和 $\mathbf{e}_1(\lambda)$ 为互相正交的圆矢量函数。本文统一规定，左齿廓面和右齿廓面均指从齿轮的小端看去，对于凸齿轮看其齿条，对于凹齿轮看其齿槽。

3.1.2 凹齿轮齿面方程的构造

在凹齿轮准线上建立标架方程。 $\mathbf{e}_1$ 是准线的单位切矢，方向由小端指向大端，即参数增加的方向， $\mathbf{e}_3$ 是离体的方向， $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 构成右手系。如图 3-1(b)所示。

$$\mathbf{R}_{pl}^2(\theta, \lambda_r) = \mathbf{R}_{pr}^2(\lambda_r - \Delta\lambda_2) + \mathbf{r}_2 \quad (3-5)$$

$$\mathbf{R}_{pr}^2(\theta, \lambda_l) = \mathbf{R}_{pl}^2(\lambda_l + \Delta\lambda_2) + \mathbf{r}_2 \quad (3-6)$$

$$\mathbf{R}_{pl}^2(\lambda_l + \Delta\lambda_2) = v_0^2 \exp(b_l^2 \lambda_l) [\sin \delta_2 \mathbf{e}(\lambda_l + \Delta\lambda_2) + \cos \delta_2 \mathbf{k}], \quad b_l^2 = \sin \delta_2 / \tan \beta_l^2 \quad (3-7)$$

$$\mathbf{R}_{pr}^2(\lambda_r - \Delta\lambda_2) = v_0^2 \exp(b_r^2 \lambda_r) [\sin \delta_2 \mathbf{e}(\lambda_r - \Delta\lambda_2) + \cos \delta_2 \mathbf{k}], \quad b_r^2 = \sin \delta_2 / \tan \beta_r^2 \quad (3-8)$$

$$\mathbf{r}_2 = r_{02} (\mathbf{e}_2 \cos \theta + \mathbf{e}_3 \sin \theta)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \beta_{l/r}^2 [\sin \delta_2 \mathbf{e}(\lambda_{l/r} \pm \Delta\lambda_2) + \cos \delta_2 \mathbf{k}] + \sin \beta_{l/r}^2 \mathbf{e}_1(\lambda_{l/r} \pm \Delta\lambda_2) \\ \mathbf{e}_2 &= \sin \beta_{l/r}^2 [\sin \delta_2 \mathbf{e}(\lambda_{l/r} \pm \Delta\lambda_2) + \cos \delta_2 \mathbf{k}] - \cos \beta_{l/r}^2 \mathbf{e}_1(\lambda_{l/r} \pm \Delta\lambda_2) \\ \mathbf{e}_3 &= \cos \delta_2 \mathbf{e}(\lambda_{l/r} \pm \Delta\lambda_2) - \sin \delta_2 \mathbf{k} \end{aligned} \right\}$$

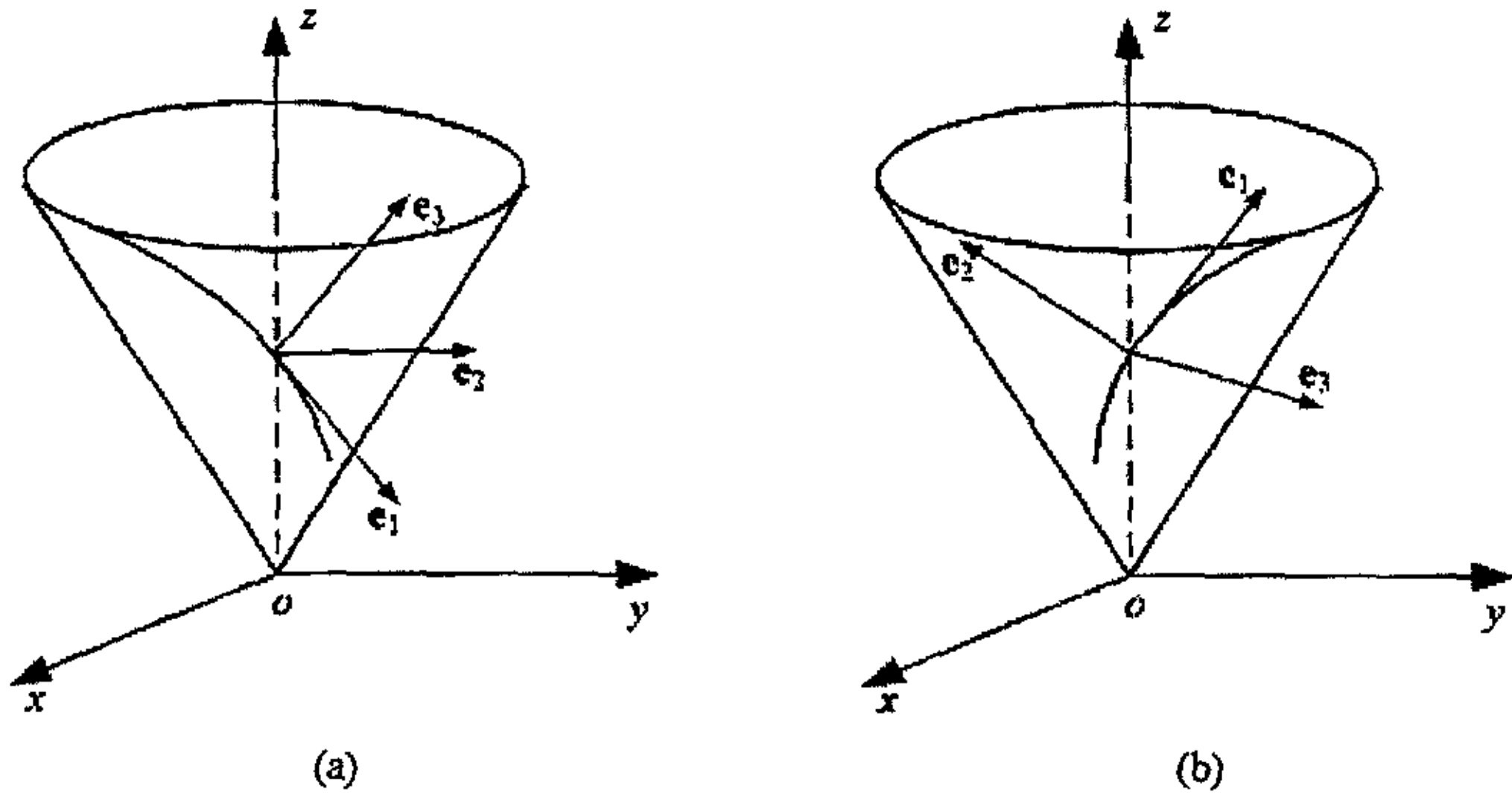


图 3-1 准线标架
Fig 3-1 Coordinates of directrix

式(3-5)和(3-6)分别表示凹齿轮左齿廓面和右齿廓面的方程。 $\mathbf{R}_{pl}^2(\lambda_l + \Delta\lambda_2)$ 为实际左齿向线上一点在绝对系下的矢径, $\mathbf{R}_{pr}^2(\lambda_r - \Delta\lambda_2)$ 为实际右齿向线上一点在绝对系下的矢径, $\mathbf{r}_2$ 为齿面上一点在法面内的矢径。 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$ 是凹齿轮准线标架, λ_l 和 λ_r 为左齿廓面和右齿廓面对应的转角参数, β_l^2 和 β_r^2 分别为左齿向线和右齿向线螺旋角, δ_2 为凹齿轮节锥角, v_0^2 为凹齿轮直母线参数, r_{02} 为凹齿轮齿廓圆弧半径。

下面以凸齿轮为例, 给出实体建模过程及各矢量间的关系。

3.2 实体建模

3.2.1 实际齿向线的生成

根据表 3-1 和式(3-3)、(3-4)得到齿轮锥面上左右廓面的实际齿向线, 如图 3-2 所示。从小端看去, R_{pl}^1 和 R_{pr}^1 分别表示凸齿轮的实际左齿向线和实际右齿向线, 这两条齿向线是该锥齿轮的准线。

表 3-1 斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮的初始参数

齿轮名称	参 数						
	公称模数 $m_n(mm)$	齿数 Z	公称齿向线名义螺旋角 $\bar{\beta}(^\circ)$	齿轮副节锥角 $\delta(^\circ)$	实际齿向线螺旋角		公称齿向线绕轴线回转角 $\Delta\lambda(^\circ)$
					左 $\beta_l(^\circ)$	右 $\beta_r(^\circ)$	
大齿轮	5	24	30	63.435	27.5	32.5	5.5
小齿轮	5	12	30	26.565	-27.5	-32.5	-1.89

齿轮名称	参 数					
	小端锥顶距(mm)	大端锥顶距(mm)	小端直径(mm)	大端直径(mm)	齿廓圆弧半径(mm)	齿根圆弧半径(mm)
大齿轮	77.460	181.203	85	324	$1.65m_n$	$0.6227m_n$
小齿轮	77.460	181.203	79.73	172.73	$1.5m_n$	$0.6248m_n$

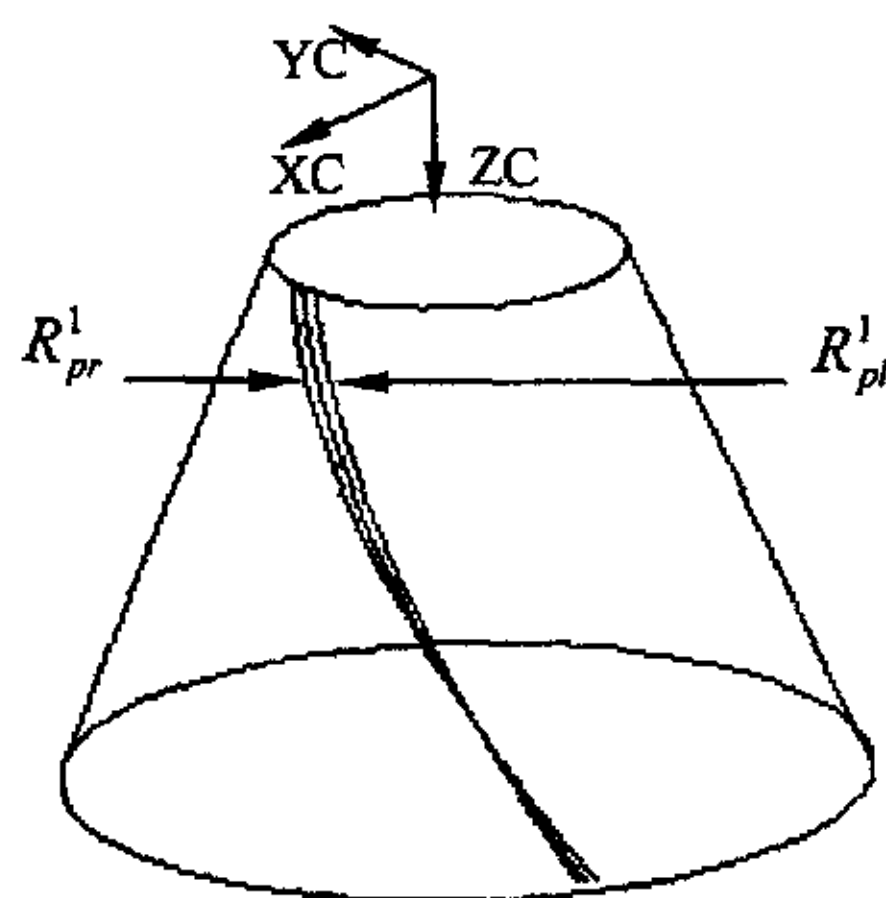


图 3-2 凸齿轮齿向线
Fig. 3-2 Gear alignment line of pinion

3.2.2 法面内的圆弧曲线

如图 3-3 所示, 点 c 和 g 分别为齿廓圆弧和齿根圆弧上任意一点, o 为绝对坐标系圆心, o_n 为齿根过渡圆弧圆心, φ_a 为工艺角, R_c 为齿廓圆弧半径, R_g 为齿根圆弧半径, r_c 、 r_g 和 R_c 、 R_g 分别为 c 点和 g 点在法面和绝对坐标系的矢径, R_{pr} 为右齿向线

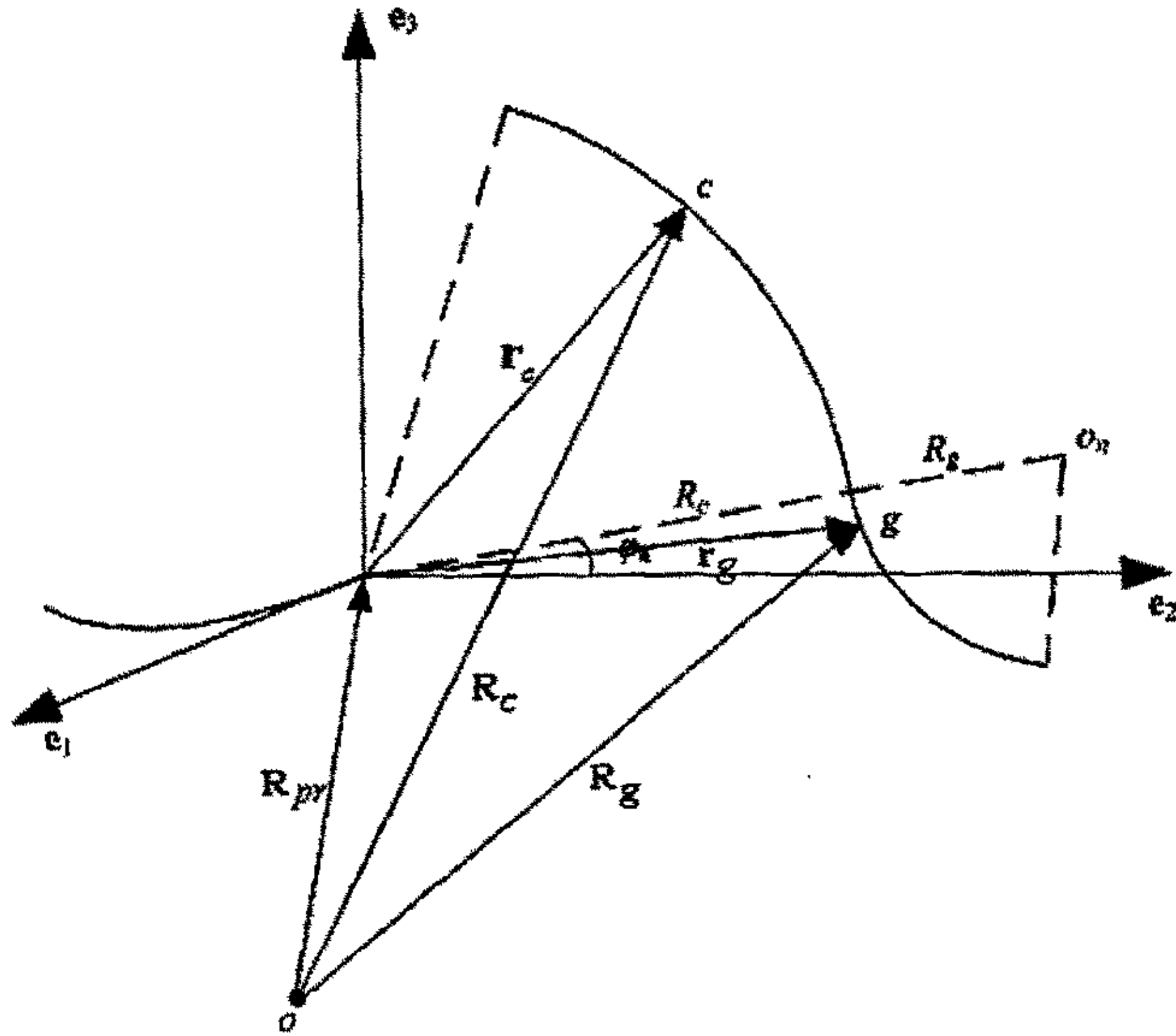


图 3-3 法面圆弧坐标

Fig.3-3 Coordinate of normal circular-arc

上一点在绝对坐标系下的矢径。根据式(3-1)可以得到齿廓圆弧和齿根圆弧上任一点在绝对坐标系下的矢径为

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_{pr} + \mathbf{r}_c \quad (3-9)$$

$$\mathbf{R}_{pr}(\lambda_r - \Delta\lambda_1) = v_0^1 \exp(b_r^1 \lambda_r) [\sin \delta_1 \mathbf{e}(\lambda_r - \Delta\lambda_1) + \cos \delta_1 \mathbf{k}]$$

$$b_r^1 = \sin \delta_1 / \tan \beta_r^1, \quad \mathbf{r}_c = R_c (\mathbf{e}_2 \cos \theta + \mathbf{e}_3 \sin \theta)$$

$$\mathbf{R}_g = \mathbf{R}_{pr} + \mathbf{r}_g \quad (3-10)$$

$$(x_n - x_{no})^2 + (y_n - y_{no})^2 = R_g^2 \quad (3-11)$$

$$\mathbf{r}_g = x_n \mathbf{e}_2 + y_n \mathbf{e}_3 \quad (3-12)$$

x_n 、 y_n 表示 g 点在法面内的坐标， x_{no} 、 y_{no} 为 o_n 点在法面内的坐标。 x_g 表示齿根过渡圆弧的起始点坐标。 a 表示齿根过渡圆弧和根锥面相切点轨迹。齿廓圆弧和齿根圆弧在起始点相切，该点坐标为

a 点矢径:

$$oa = oo_a + R_g n_0 \quad (3-18)$$

a 点的轨迹, 即是终止点的轨迹。图 3-5 所示, 凸齿轮实际齿向线上右齿向线的标架及其对应的左齿廓圆弧。

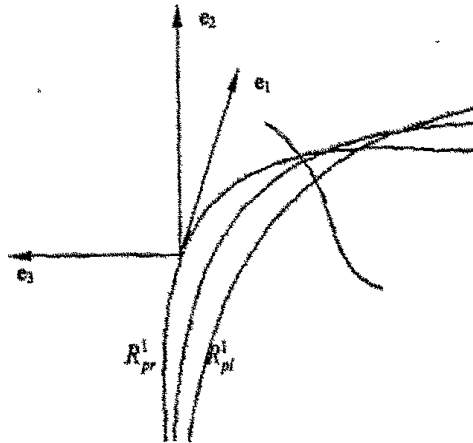


图 3-5 齿向线及法面标架

Fig. 3-5 Gear alignment line and normal coordinate

3.2.3 齿轮廓面的生成

令 λ 和 θ 变化, 根据 3.2.1 和 3.2.2 的结果利用 ANSYS 的 APDL 语言编写齿轮齿廓、齿形关键点坐标和轮廓曲线的自动生成程序, 其中齿轮关键参数都以变量定义, 将此命令流保存成文本文件。通过输入窗口将文本文件导入, 就可得到齿轮的三维齿形齿向线条模型, 如图 3-6 所示。

将公式(3-18)中得到的终止点生成样条曲线, 令其绕 z 轴回转即可得到齿根回转面。根据图 3-6 中生成的齿向方向的贝特朗曲线, 通过有限元软件中的 skinning 拟和曲线得到齿条表面。然后通过交互操作对得到的线条进行正向的 CAD 建模。根据基本参数建立齿轮上下端面关键点, 连接成线, 根据旋转功能得到齿轮上下端面。最后缝合所有外表面, 利用布尔运算填充为实体。这里要注意的是生成实体的过程中要保证各表面连接处不得有缝隙。至此, 整个建模过程完成。

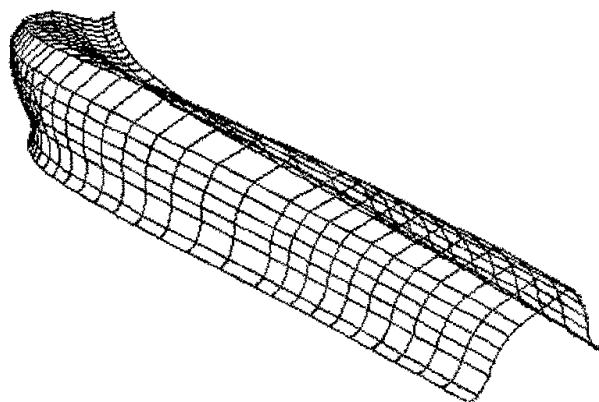


图 3-6 凸齿轮骨架网
Fig. 3-6 Framework of the pinion

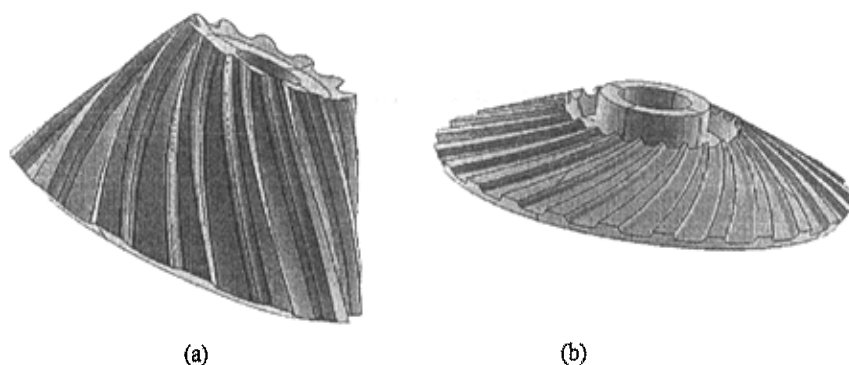


图 3-7 斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮实体模型
Fig. 3-7 3D solid model of the Loxodrome Normal Circular-arc Spiral Bevel Gear

3.3 本章小结

本章在前一章介绍的斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮理论上,推导出适用于在 CAD/CAM 软件中建立实体模型的数学方程。模拟实际加工有效地解决了由于齿面结构特殊而引起的齿根廓面难以与齿根锥面相切的难点。利用有限元软件 APDL 语言及布尔运算得到一对斜航式法向圆弧的凸、凹齿轮副实体模型。该章工作将该新型圆弧齿轮由理论公式转化为实体模型,是后文的有限元建模和应力分析必不可少的铺垫。

- c. 在几何模型或有限元模型上加载：点载荷、分布载荷、体载荷、函数载荷；
- d. 可扩展的标准梁截面形状库。

(2) 分析计算模块

包括结构分析（可进行线性分析、非线性分析和高度非线性分析）、流体动力学分析、电磁场分析、声场分析和压电分析。

(3) 后处理模块

可将计算结果以彩色等值线显示、剃度显示、矢量显示、粒子流迹显示、立体切片显示、透明及半透明显示（可以看到结构内部）等图形方式显示出来，也可将计算结果以图表、曲线形式显示或输出。

利用有限元法对齿根应力进行分析计算的过程可大致分为以下几步：

- a. 建立计算模型，确定边界条件；
- b. 划分网格，进行离散化处理，并准备好输入数据和信息；
- c. 构造位移函数；
- d. 建立单元刚度矩阵；
- e. 形成总刚度矩阵和总体平衡方程；
- f. 解线性方程组，求取节点位移；
- g. 由所得节点位移求取应力值；
- h. 分析整理计算结果。

对于目前国内常用的中、小型计算机而言，上述分析过程中的 a、b 和 h 均需计算者自己来做，其余各个步骤则可利用编制好的程序由电子计算机进行解算。下文给出建立该新型齿轮有限元模型的具体过程。

4.2 边界范围

为了进行齿根应力分析，必须首先建立正确的计算模型，平面应力和空间应力的齿轮分别对应不同的模型。本文研究对象为法向圆弧螺旋锥齿轮，属于空间应力状态，采用三维模型进行分析。由于齿轮在某一时刻不是所有齿都参与啮合，加上机器容量有限，无需分析整个齿轮的所有齿，因此有必要简化模型，确定正确的边界。

在进行齿根应力分析时，所选取边界范围的大小是否合理，对计算的结果是有较大影响的，关于边界范围的合理划分，许多人都进行过研究，但各国研究人员在进行计算时所取的边界范围都不是一致的。查伯特根据圣维南定理，在扩大的边界范围内进一

步缩小边界范围，并以缩小后的边界点上的位移不大于载荷作用点位移的 3.5% 来判断所取的范围是否合理。然而用这种方法问题在于扩大了原始边界和缩小后的边界都是人为的，特别是缩小后边界点的位移大小与这些点距原扩大边界的距离有直接关系^[12]。针对这一问题文献[12]给出了一种求边界范围的方法，该边界普遍适用于圆柱齿轮。由于本文讨论的不是圆柱齿轮，不能简单套用直齿轮的边界。因此本文根据文献[12]使用的方法对该新型齿轮进行边界确定。下面以凸齿轮为例，给出确定齿轮边界的过程。

首先从凸齿轮中取出一个齿来，在啮合点处加一法向力，将 PQ 、 QR 和 SR 边所在面上所有节点定为全约束，如图 4-1 所示。在其他条件不变的情况下，先保持 PQ 边所在的面不变，仅改变 PS 的长度，则可计算出齿根最大拉应力 σ_M 与宽度 PS （单位：

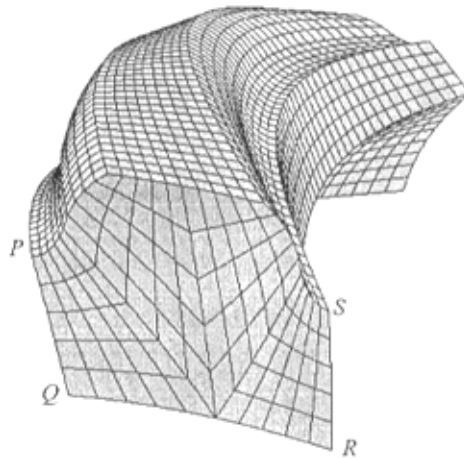


图 4-1 凸齿轮单齿边界
Fig 4-1 Boundary of single pinion

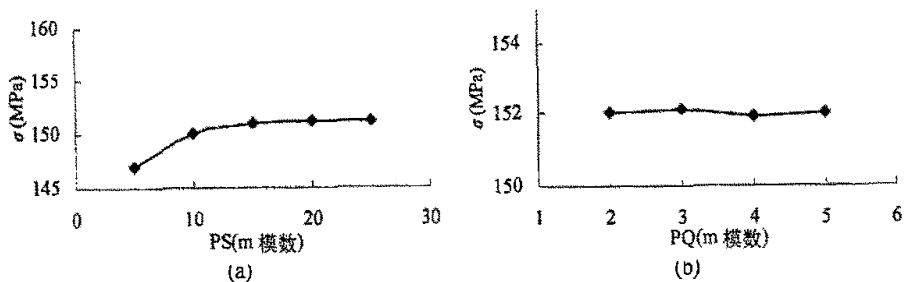


图 4-2 边界和弯曲应力关系
Fig. 4-2 Relation between boundary and bending stress

mm) 之间的关系曲线, 如图 4-2(a)所示。同样, 若保持宽度 PS 不变, 仅改变深度 PQ , 则可得到齿根最大拉应力与深度 PQ 的关系曲线, 如图 4-2 (b) 所示。

从图 4-2 可以看出, 对于齿根应力分析, 取宽度 $PS \geq 15m$ (模数), 深度 $\geq 2m$ (模数) 就已经足够, 因为当它们长度再增大时, 已不对齿根应力产生影响。因此根据以上计算可以得到该齿轮副的简化模型, 如图 4-3 所示。分别取三个齿为有限元分析的计算模型。4-3(a)表示凸齿轮, 4-3(b)表示凹齿轮。

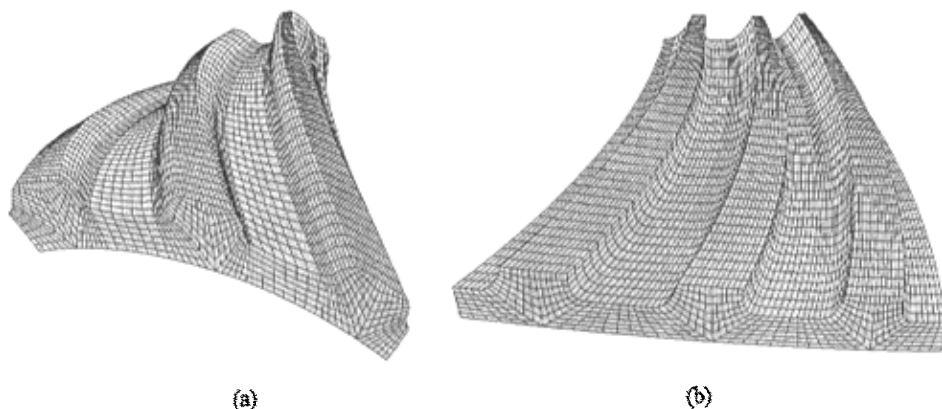


图 4-3 齿轮边界范围
Fig. 4-3 Boundary of the pinion and Gear

4.3 选取单元定义材料特性

在初步建立了计算模型之后, 应进一步考虑齿形的离散化处理, 这时应首先考虑究竟选择何种单元进行计算。在选择单元形式时主要考虑对计算精度的要求, 计算齿形的复杂程度以及计算的经济性等多种因素。

在二维分析中, 最简单常用的是三角形单元, 其次是四边形单元。三角形单元简单而且使用灵活, 只要加密网格划分就能近似拟合于齿形曲线, 其缺点是单元的应力和应变都是常数, 特别是在应力集中的部位产生的误差较大, 即使是在该范围内配置密集的单元仍不能较好地反映出实际应力变化的情况。四边形单元的优点是单元应力和应变是线性变化的, 因而反映实际应力分布的能力比三角形单元强, 缺点是单元不能适应曲线边界和斜边界, 也不能随便改变大小, 适应性是非常有限的。

与二维应力问题相比, 空间应力问题相对要复杂得多, 每个结点的位移增加为三个分量, 应变和应力增加为六个分量。所以, 空间问题的具体算式不同于平面问题, 它是

比较繁琐的，特别用同样大小的单元分析这两类问题时，空间问题的总未知数要比平面问题多得多，它对计算机的容量要求很高，计算时间也变长。因此，为了在有限的计算机容量和较短时间内，获得精度适宜的解答，通常采用高效率、高精度的空间单元。目前常见的高精度空间单元有两种类型。一种类型为含内节点的二次四面体单元，20个节点的六面体单元等等。另一种类型为以位移导数为节点自由度的高精度单元。用有限元法进行三维弹性体的应力分析时，为了提高有限元法的计算精度，使所划分的单元能够大小分级和适应复杂的曲面边界，通常使用等参元，一般认为等参元具有较高的计算精度，也能适应复杂的几何形状^[36]。

在通常使用的四面体等参元包括4节点四面体单元和10节点的四面体单元，常用的六面体单元包括8节点六面体单元和20节点的六面体单元。根据研究所得，高次单元的精度优于简单单元，相同节点自由度的六面体单元的精度优于四面体单元。在采用简单的四面体单元分析空间应力问题时，由于单元应力是常量，不易适应变化的应力场，必须采用密集的网格、大量单元，才能得到较好的计算精度，否则计算精度很差。根据研究所得，20节点的六面体等参单元对于结构的计算精度很好，8节点的六面体的计算精度较好。20节点曲边六面体单元相对与8节点曲边六面体单元能更好地拟合复杂曲边，具有较高的精度。参考相关文献，本文采用20节点曲边六面体单元^[33]，如图4-4所示。

选定了单元类型后，需要在ANSYS软件中设定相应的单元类型。20节点各项等参

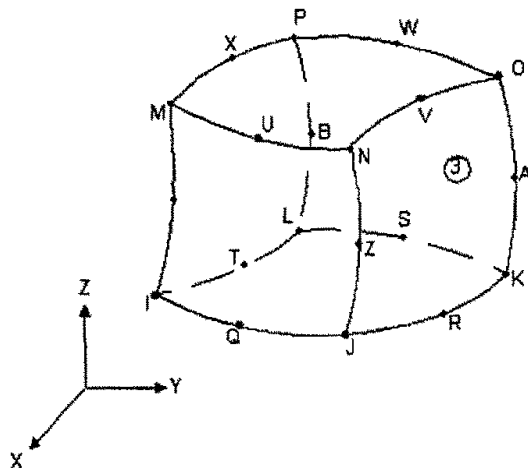


图 4-4 曲边 20 节点各项等参单元

Fig.4-4 Curved, twenty-node isoparametric element

的六面体单元与 ANSYS 单元库中的 Solid95 和 Solid186 相对应。执行 Main Menu → Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete 命令, 在出现的对话框中选择结构单元类型。选择 Structural Solid 20node 95 单元也就是 Solid95。

在定义材料之前, 需要设置学科范围, 不同学科材料的性质侧重点是不同的。这里属于结构分析, 执行 Main Menu → Preferences 命令, 选择 Stuctual(结构)分析类型。

齿轮实体材料定为碳钢, 其给定的材料特性包括弹性模量和泊松比。在定义材料特性的对话框中依次输入弹性模量 EX=2.068e+11 帕, 泊松比 PRXY=0.29。

4.4 划分网格

在确定单元类型后, 需要在具体计算中把模型分割成离散后的单元组合体, 称之为划分网格。在进行网格划分时需要考虑的两个问题:

- (1) 根据求解范围的大小、应力集中的部位以及计算机存储量的大小和计算时间的长短等因素来决定划分网格的疏密。网格越密, 单元和节点总数越多, 所需计算机的内存也就越大。同时, 所要求计算结果的精度的高低, 也是应考虑的因素。通常要求的精度越高, 所划分的网格也就应该越密。
- (2) 根据载荷只作用于接触迹上一点, 应力只出现在对应点齿根的特殊情况, 在不同部位采用不同疏密的网格划分, 通常在应力变化比较剧烈、应力剃度较大的区域划分得细密一些, 而在应力变化比较平缓的区域网格适当划分得稀疏一些。网格由疏到密或由密到疏应是逐渐过渡的, 这样比较有利于提高计算的精度。

ANSYS 有限元软件提供两种划分网格形式, 一种是自由网格划分(Free), 另一种是映射网格划分(Mapped)。自由网格对单元形状没有限制, 并且没有特定的准则。与自由网格相比, 映射网格对单元形状有限制, 而且必须满足特定的准则。映射面网格只能包含四边形或三角形单元, 映射体网格只能包含六面体单元。由此可知, 本文划分网格应选用映射网格划分齿轮体。映射网格具有规则的形状, 明显成排的单元。若想使用这种网格类型, 必须将模型生成具有一系列相当规则的体或面, 才能进行映射网格划分^[37]。

下面根据 ANSYS 软件中的相关功能结合本文中齿轮的特殊构造选用体扫描法进行网格划分。由于该齿轮载荷只作用于齿面一点, 应力变化比较剧烈、应力剃度值较大的区域主要出现在载荷点对应的齿根部位, 考虑到计算机容量大小及计算时间长短, 本文在载荷点邻近区域内网格划分得细密一些, 而在应力变化比较平缓的区域网格适当划分得稀疏一些。以凸齿轮划分过程为例, 凹齿轮过程相同。具体步骤如下:

- (1) 将计算模型中的三个齿利用辅助曲面分割成十四部分。如图 4-5(a)所示。
- (2) 沿着齿向利用辅助曲面将齿轮分成三部分, 中间部分的位置将随着啮合点的移动而

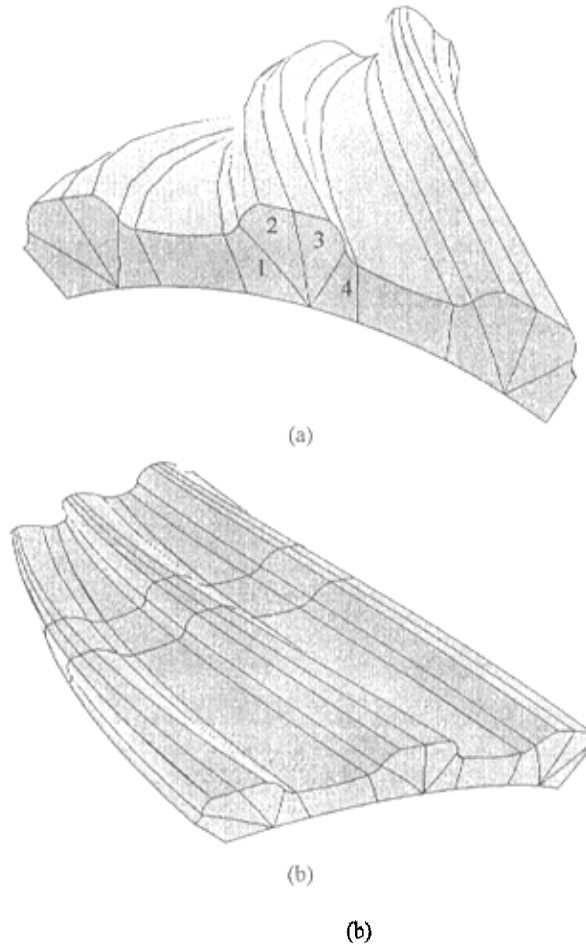


图 4-5 辅助曲面

Fig. 4-5 Auxiliary intermediate surfaces

移动，如 4-5(b)所示。

- (3) 划分网格中间部分区域受力集中，因此中间比两边划分网格要密，划分结果如图 4-6 所示，图 4-6(a)表示凸齿轮，图 4-6(b)表示凹齿轮。

不论齿的结构形状有何差异，在确定计算对象的具体约束时，要能够消除齿的刚体运动，只有这样才有可能求解。本文令模型的两侧面和底面上所有节点的位移为固定全约束。如图 4-7 所示，4-7(a)表示凸齿轮，4-7(b)表示凹齿轮。

经划分后可得凸、凹齿轮有限元计算模型各为 98000 个单元，416341 个节点，该数量的单元和节点数已经可以很好的满足齿轮分析精度的要求。

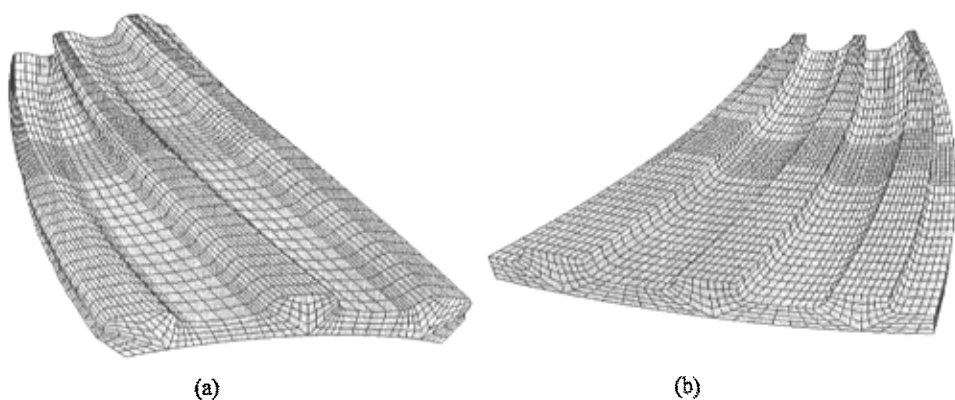


图 4-6 有限元离散实体

Fig. 4-6 Discretization of the volume by finite elements

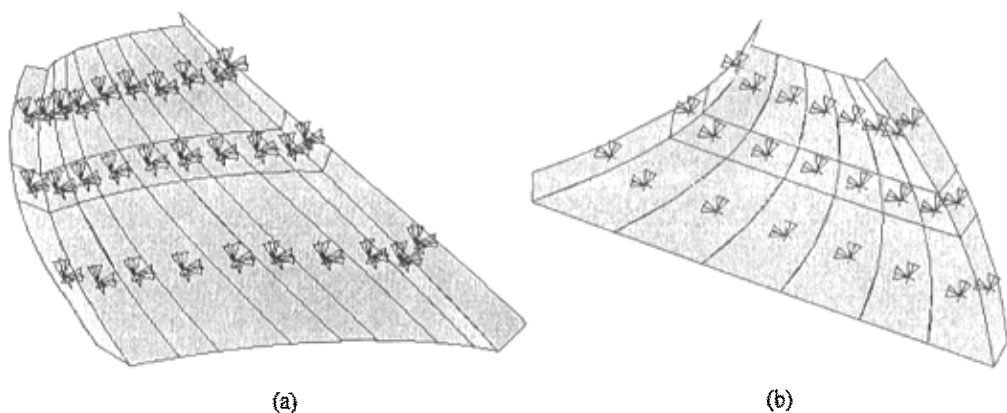


图 4-7 齿轮的约束条件

Fig. 4-7 Restriction for the pinion and the gear

4.5 本章小结

本章主要建立斜航式法向圆弧螺旋锥齿轮的有限元模型。确定了该齿轮的边界范围，选用三个齿作为有限元计算模型。确定了约束条件，在模型底面和两个侧面都加上全约束。选用 20 节点各项等参的六面体单元划分网格，并确定材料特性。根据该齿轮的力学和应力变化特性，考虑到计算机容量和计算时间，采用局部网格细密的方法，利用有限元软件中的体扫掠法划分网格，生成一对齿轮的有限元模型。有限元模型的建立为后续加载计算和齿根应力分析提供了必不可少的基础条件。

下面以凸齿轮为例求出斜航线的法曲率和测地曲率。

圆锥上的曲线与直母线的夹角，螺旋角 β 满足

$$\tan \beta = \frac{v \sin \delta}{\dot{v}} \quad (5-12)$$

$$\frac{de_1}{ds} = e_2 k_g + e_3 k_n \quad (5-13)$$

将式(5-13)的两边分别点乘 e_2 、 e_3 可以分别得到 K_g 和 K_n

$$K_g = e_2 \cdot \frac{de_1}{ds} \quad (5-14)$$

$$K_n = e_3 \cdot \frac{de_1}{ds} \quad (5-15)$$

由于

$$\frac{de_1}{d\lambda} = \pm [\cos \beta \sin \delta e_1(\lambda) - \sin \beta e(\lambda)] \quad (5-16)$$

又因为斜航线的弧微分与标架方程：

$$ds = v \sqrt{b^2 + \sin^2 \delta} d\lambda = \frac{\sin \delta}{|\sin \beta|} v d\lambda = \frac{\sin \delta}{|\sin \beta|} v_0 \exp(b\lambda) d\lambda \quad (5-17)$$

因此，

$$\frac{de_1}{ds} = \pm \frac{[\cos \beta \sin \delta e_1(\lambda) - \sin \beta e(\lambda)]}{\frac{\sin \delta}{|\sin \beta|} v_0 \exp(b\lambda)} \quad (5-18)$$

将 $\frac{de_1}{ds}$ 点乘 e_2 可以得到

$$K_g = \frac{de_1}{ds} \cdot e_2 = -\frac{|\sin \beta|}{v_0 \exp(b\lambda)} \quad (5-19)$$

由上式可以看到无论凸齿轮还是凹齿轮，测地曲率都是负的。对于法曲率，将 $\frac{de_1}{ds}$

点乘 e_3 可以得到

力为

$$q(\zeta, \eta) = q_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right)} \quad (5-21)$$

如图 5-3 所示, 将椭圆域法向总压力作用线简化为通过椭圆中心啮合点, 因此该力的作用线一定通过法面圆弧圆心, 法面圆弧的圆心在对应的齿向线上。令 q 表示力的作

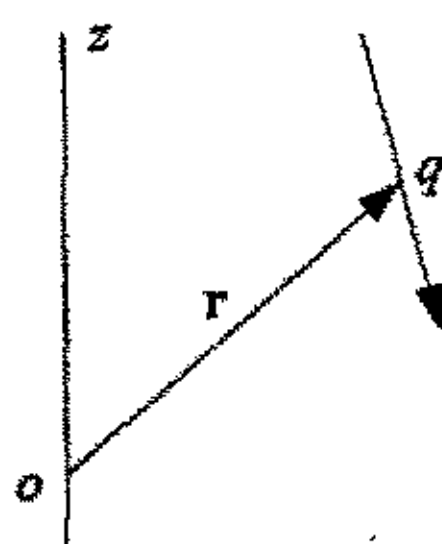


图 5-3 载荷作用方向
Fig.5-3 The action direction of load

用线与对应齿向线的交点, 即法向圆弧圆心。 oz 表示回转中心。令 q 点的矢径为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p$, 法向总载荷的作用线与经过该啮合点处的法线方向一致, 令 P 表示力 $\mathbf{P}$ 的模, 则

$$\mathbf{P} = P \mathbf{n}_0 = P(\mathbf{e}_2 \cos \theta + \mathbf{e}_3 \sin \theta) \quad (5-22)$$

转矩 T 为

$$T = (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_p) \cdot \mathbf{P} = P(\mathbf{k} \times \mathbf{r}_p) \cdot (\mathbf{e}_2 \cos \theta + \mathbf{e}_3 \sin \theta) \quad (5-23)$$

$$\mathbf{r}_p = v_0 \exp(b\lambda) [\sin \delta \mathbf{e}(\lambda) + \cos \delta \mathbf{k}] \quad (5-24)$$

则有

$$T = P v_0 \exp(b\lambda) \sin \delta \cos \theta \cos \beta \quad (5-25)$$

由此可得法向总载荷大小为

$$P = \frac{T}{v_0 \exp(b\lambda) \sin \delta \cos \theta \cos \beta} \quad (5-26)$$

椭圆形状由狭长形向圆形变化。

5.2.3 有限元加载

在求得了椭圆域大小以及总载荷后,就需要利用有限元软件将载荷按椭球分布正确加在有限元模型上,以便进行计算。

根据公式(5-27)可以得到椭圆域中心最大接触应力 q_0 , 凸凹齿轮在接触点中心处的最大接触应力的计算结果相等。但是计算过程有一点需要注意的是,由于转矩与齿数满足公式

$$\frac{T}{Z_1} = \frac{T'}{Z_2}$$

所以凹齿轮转矩 $T' = 2T = 1200\text{Nm}$ 。如图 5-2 所示,椭圆域上每一点的压应力满足公式(5-21),通过在每个单元上进行 $q_s = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} q(\xi, \eta) d\xi d\eta$ 的二重积分,即可得到每个单元上的法向压力,当然单元分的越细密,结果也会越精确。

在有限元软件中,结构分析中压力的载荷形式为 Surface load (表面载荷), ANSYS 中不仅可以将表面载荷施加到线和面上,还可以施加于节点和单元上。本文采用将法向压力直接作用于单元上,因此在选择单元表面时,要注意选择六面体单元面与法向力垂直的外表面。对应的 ANSYS 操作为:进入求解器 Solution,使用 SFE 命令,可对椭圆面内单元加载。这样就完成了力的加载。 A_1 点和 A_2 点的载荷分布在有限元软件中的显示如图 5-4 所示,5-4(a)表示凸齿轮,5-4(b)表示凹齿轮。箭头长短代表了力的大小。

5.2.4 两端点接触域

凸凹齿轮的齿厚从大端到小端逐渐变小,大小两端属于特殊的啮合域。从大端沿着接触迹到某一啮合点之间的区域上,所有的啮合点处的载荷分布均不是一个完整的椭圆,在此区域内的应力变化规律与中间区域应力变化规律不一致。小端亦是如此。

5.3 正式运转期加载

法向圆弧齿轮在设计时令凸凹齿轮存在半径差,致使在啮合之初呈现点接触,这只不过是为了补偿工艺误差对传动影响的一种手段,是为了保证能更好的在圆弧上呈“线接触”。跑合过程中,凸齿轮齿廓圆弧半径增大,而凹齿轮齿廓圆弧半径减小,凸凹齿轮的半径差减小。两齿轮由最初点啮合转成在接触域上很小的面啮合,进而再由啮合点

下面就根据 ANSYS 软件所具备的功能, 根据加载后模型所计算的结果得到齿轮体各处应力值及其变形, 并进一步对齿轮副的应力进行分析。

6.2.2 数据获取

首先通过 RESUME 命令读入数据文件 Jobname.db。数据库包含的模型数据与计算模型相同, 包括单元类型、节点、单元、单元实常数、材料特性和节点坐标系。首先进入通用后处理器(POST1), 然后再使用 LastSet 命令将结果读入数据库。

在主菜单中打开 Plot Results 命令, 点击命令栏中的 Contour Plot 命令。点击命令栏中的 Nodal Solu 或者 Element Solu 选项。就可以得到节点或单元的位移量及应力值。

选择 DOF Solution 命令, 可以得到节点或单元在绝对系下三个坐标轴方向的位移改变量和总的位移改变量。选择 Stress 命令, 可以得到此第一主应力(1st principal), 第二主应力(2nd principal), 第三主应力(3rd principal), 应力分量: SX、SY、SZ、SXY、SYZ、SXZ, Intensity 等效应力(SINT)和 von Mises 等效应力(SEQV)。选择 Def shape only 或 Def underdeformed 命令显示齿轮变形形状。

关于 Stress 获取应力的命令中, 第一、第二、第三主应力如前面理论基础中所述。其中应力强度 SINT 为

$$SINT = MAX(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)$$

选用第三强度理论则是以应力强度 SINT 作为失效判定准则。

von Mises 等效应力 σ_e (SEQV)为

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

其中选用第四强度理论则是以平均应力 SEQV 为失效判定准则。

由于上节讨论中选用第一和第四强度理论作为失效判定准则, 因此在后处理分析时检查节点处的第一主应力和 von Mises 等效应力值。

6.3 齿根应力云图

齿轮运转分为跑合期和正式运转期两个阶段。两个阶段内凸凹齿轮的最大拉应力和 Mises 等效应力的大小有所不同, 但变化规律相同。下面分别给出两个阶段, 载荷作用位置移动时齿根应力沿齿向的变化规律, 并给出凸凹齿轮的最容易折断位置。按上文给出的方法在所研究的齿根部位加密网格, 并施加载荷, 经过计算得到齿根的应力分布形

