

广西大学学位论文原创性声明和使用授权



原创性声明

本人声明：所呈交的学位论文是在导师指导下完成的，研究工作所取得的成果和相关知识产权属广西大学所有，本人保证不以其它单位为第一署名单位发表或使用本论文的研究内容。除已注明部分外，论文中不包含其他人已经发表过的研究成果，也不包含本人为获得其它学位而使用过的内容。对本文的研究工作提供过重要帮助的个人和集体，均已在论文中明确说明并致谢。

论文作者签名：

潘义前

2010年6月22日

学位论文使用授权说明

本人完全了解广西大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版：

学校有权保留学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务；

学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；

在不以赢利为目的的前提下，学校可以公布论文的部分或全部内容。

请选择发布时间：

☒ 即时发布

☐ 解密后发布

(保密论文需注明，并在解密后遵守此规定)

论文作者签名：

潘义前

导师签名：

姜永波 2010年6月22日

几类经济订购批量模型及其优化

摘要

库存是企业经营过程中的重要组成部分。如何保持适当的库存量,以减少库存成本,又不影响正常的企业经营活动,已经成为企业管理者必须考虑的问题。影响库存成本的因素是多方面的,本文从二层信用支付、存货影响销售率与产品的市场生命周期等方面研究了零售商的库存成本问题,主要内容如下安排。

第一章介绍库存管理的基础知识,总结了相关库存模型的研究现状。

第二章研究了一类存货影响销售率的库存问题,其中采用二层信用支付策略,即供应商向零售商提供信用支付期,同时零售商也向顾客提供信用支付期,建立了相应的库存模型,证明了零售商最优订购策略是存在且唯一的,然后给出确定最优订货策略的算法与数值例子。

第三章假设需求率与变质率均为常数,研究了在二层信用策略下的两货栈系统的库存模型,并讨论了模型最优解的存在性及唯一性,然后给出确定最优订购策略的算法步骤与数值例子。

第四章建立了一类采用先订货后缺货策略变质物品库存模型,其中需求率是时间的双斜坡函数,拖后率和损耗率均为时间的一般函数,目的是极小化总成本,讨论了最优解的存在性及唯一性,并给出了确定最优订购策略的计算步骤及数值例子。

最后，对本文的研究成果进行总结，并提出了将来进一步的研究方向.

关键词：库存 延期支付 存货影响销售率 产品生命周期 变质物品

SEVERAL KINDS OF ECONOMIC ORDER QUANTITY MODEL AND THEIR OPTIMIZATION

ABSTRACT

Inventory is a very importance component element in business process for enterprises. It an issue that must be considered by the manager to keep inventory appropriate so as to cut down inventory cost without influencing normal business activity of enterprise. The factors that influence inventory cost are various. The thesis studies the retailer's inventory cost problem based on two levels of credit trade, stock-de- pendent selling rate and product life cycle. The thesis is organized as follows.

Chapter 1 is the brief introduction of the basic knowledge of inventory management and the review of the relative research on inventory models.

In Chapter 2, an inventory problem of stock-dependent selling rate is studied, in which two levels of trade credit policy is adopted by the retailer and the supplier, namely the supplier offers a credit period to the retailer, and the retailer, in turn, offers a credit period to his/her customers. A relevant inventory model for the problem is developed and we prove the existence and uniqueness of the optimal ordering policy for the retailer. Then, an algorithm of determining the optimal ordering policy and numerical examples are presented.

In Chapter 3, we study a two-warehouse model under two levels of credit trade policy, in which we assume that demand rate and deteriorating rate are both constant. The existence and uniqueness of optimal solution to the model are discussed. Then, an algorithm to determine the optimal ordering policy and numerical examples are given.

In Chapter 4, an inventory model for deteriorating items starting without shortages is developed, where demand rate is a bi-ramp type function and backlogging rate and deterioration rate is respectively a general function of time. Our purpose is to minimize the total cost. The existence and uniqueness of the optimal solution to the model are discussed. Then, a simple procedure finding the optimal order policy and numerical examples are presented.

Finally, the research results of the theme are summarized and the further researches are discussed.

KEY WORDS: Inventory; delay in payments; stock-dependent selling rate; product life cycle; deteriorating items

目 录

第一章 绪论.....	1
1.1 库存管理基础知识.....	1
1.2 库存理论的产生与发展.....	3
1.3 相关库存模型的研究现状.....	3
1.4 本文的主要工作.....	6
第二章 基于二层信用策略且存货影响销售率的库存模型.....	8
2.1 符号与假设.....	9
2.2 模型的建立与求解.....	9
2.3 算法步骤.....	14
2.4 数值例子.....	15
2.5 本章小结.....	16
第三章 两货栈及二层信用策略下的库存模型优化.....	17
3.1 符号说明与假设.....	18
3.2 模型建立.....	19
3.3 模型分析.....	22
3.4 算法步骤.....	30
3.5 数值例子.....	31
3.6 本章小结.....	32
第四章 基于产品生命周期的变质物品库存模型.....	34
4.1 符号说明与假设.....	34
4.2 模型建立.....	35
4.3 理论结果及计算步骤.....	40
4.4 数值例子.....	42
4.5 本章小结.....	44
结论.....	45
参考文献.....	46
致谢.....	52
攻读硕士学位期间发表论文情况.....	53

第一章绪论

1.1 库存管理基础知识

1.1.1 库存的概念

库存是指暂时闲置的,为了满足未来需求而临时储备的一切资源.这里的资源泛指企业已经购买但是尚未投入使用的原材料、半成品或是尚未销售的产品^[1].

库存的产生原因是多方面的,一般主要有以下几个方面.

- 一、当物资的供应量大于需求量时,多余的部分物资就成为库存^[1].
- 二、当物资供应时间与物资的实际需求时间不同步时,暂时积压的物资就成为库存.
- 三、为了避免供应市场发生波动而造成缺货,防止供应过程中的不确定因素造成的供应不及时,在供需之间需设置一定量的库存储备,以保证物资实时仍能维持企业的正常工作^[1].

1.1.2 库存的作用

企业保持一定的库存,可以有效地缓解供需矛盾,尽量均匀地保持生产,有利于预防不确定性、调节季节差异、降低成本与稳定生产等作用^{[1],[2]}.

(1) 预防不确定性、提高客户服务水平. 顾客的需求很难预测,持有一定量的库存有利于调节供需之间的不平衡,预防由于不确定的供应引起的停工,保证企业按时交货,避免由于库存缺货或供应延迟造成的损失,对企业提高客户服务水平具有重要作用^{[1],[2]}.

(2) 调节季节差异. 企业可以利用产成品库存来平衡因季节性、促销活动与节假日等因素造成的需求波动,维持正常的经营秩序^{[1],[2]}.

(3) 降低成本. 当大批量的采购物资进行储备时,可以获得价格优惠,减少采购次数,从而可以降低总费用. 如果能够预测到未来价格会上涨,可以在低价位时购进额外数量的产品进行储备,避免价格上涨带来的成本增加^{[1],[2]}.

(4) 稳定生产. 在许多情况下,供应的数量及交货时间存在很大的不确定性,而库存具有保持企业经营的连续性、及时满足客户订货需求,以及协调生产资源在时间、空间上的相衔接^{[1],[2]}.

1.1.3 库存的弊端

虽然库存有很多好处,但是库存也存在弊端,它包括下面几点.

(1) 占用资金. 库存中的物资占用了企业的大量流动资金, 大多数企业的资金都是有限的, 当预测不准时, 多余的库存没有用处, 只会占用了企业的资金^[2].

(2) 产生库存成本. 库存成本是指企业为了持有库存所必需开支的成本, 包括: 保管费、仓库设施设备、保险费、物资价值损失(丢失或变旧、损耗)等^[2].

(3) 库存会掩盖企业经营过程中存在的问题, 使管理者忽视众多管理漏洞. 比如, 供应物品质量问题, 交货不及时, 以及计划安排等诸多问题, 都可能被库存掩盖^[2].

总之, 持有库存就要产生成本, 还可能带来一些其他管理上的问题, 因此要在库存的利弊之间进行权衡. 这将是库存管理者所要研究和解决的问题.

1.1.4 库存成本的构成

对库存进行分析, 不仅要定性分析其优缺点以便形成库存管理的指导原则与思想, 还需进行必要的量化分析. 在进行定量分析时, 常常将库存决策表达为一个成本(或利润)问题进行分析, 这时就需要分析库存成本的构成^[2]. 库存成本一般包括订购费, 购置费, 存贮成本, 变质损耗成本, 缺货费与资金机会成本等^{[1][3]}.

(1) 订购费. 订购费是指与发出订单或收货相关的费用, 通常包括通讯、下单、订单跟踪、收货与差旅等费用. 订货费仅与订货次数有关, 而与一次的订购量的大小无关.

(2) 购置费. 购置费是指因购进物资而产生的费用, 取决于购买的单价与购买数量.

(3) 存储成本. 该费用包括用于库存所必需的仓库, 设施设备等的折旧, 如: 看管、通风、取暖与照明等所需的开支.

(4) 变质损耗成本. 在持有库存的过程中, 一部分物资会被污染、损坏、变旧、盗窃或不适合销售造成的损失.

(5) 缺货费. 缺货费是指由于库存不足导致缺货而发生的费用. 比如干扰了企业正常运作而另作计划, 需增加额外的费用等. 缺货费与缺货数量有关, 缺货量越多, 缺货费就越高, 缺货的数量越少, 缺货费就会越低^[3].

(6) 丢单成本. 在仓库空出时不能及时满足顾客的需求而失去的销售机会, 产生商业信誉损失.

(7) 资金机会成本. 投资于库存的资金不能用于其他的投资活动而产生. 投资于库存的资金被库存占用而失去了其他投资机会, 必须算作库存投资的资金成本.

1.2 库存理论的产生与发展

在企业的经营过程中,企业物资的库存数量经常会发生变化,为了使得库存量保持在一个合理的水平,就要进行合理的、科学的库存控制.早在1915年经济学家Harris提出了经济订货批量模型,从经济的角度确定最佳的库存量,1934年,Wilson R. H. 重新提出了Harris的公式,即经典的经济订购批量公式(EOQ),“经济批量”的提出,从根本上改变了人们对库存问题的传统认识,是现代库存理论的基石^[1].

从20世纪50年代以来,随着运筹学,数理统计等理论与方法的广泛应用,学者们开始运用系统工程理论来研究和解决企业经营过程中的库存控制问题,从而逐步形成了较为完整的库存理论体系,亦称存储论^[1].特别是近二十多年以来,随着电子计算机应用技术的快速发展及经济全球化快速推进,库存理论的研究已经取得了巨大的成就,许多具有应用价值的研究成果不断涌现.如,有在产品生命周期内考虑了产品的库存问题的,也有从存货影响需求率的角度来研究库存问题的,也有从延期支付对库存成本的影响来研究库存模型的,也有研究如何确定最优的订货时间与订货量的多周期库存模型,还有考虑了两货栈库存模型的,等等.随着研究的不断深入,相信还会有更多的具有应用价值的研究成果相继出现.

1.3 相关库存模型的研究现状

1.3.1 基于二层信用策略的库存模型研究现状

信用支付(或延期支付)作为一种短期的商业信贷策略,是指卖方允许买方在购买货物时延期支付货款,在信用支付期限内买方不需向卖方支付任何费用,信用支付期结束时买方必须向卖方支付全部货款.信用支付策略不但能够鼓励买方购买更多的货物、增加订货量,减少卖方的库存压力,而且还能使得买方在延期时间内把现有的资金用于其他投资,以获得额外的收益,因此信用支付广泛存在于现代商业交易中.

本文将供应商向零售商提供信用期的情形定义为一层信用策略,把供应商向零售商提供信用期,零售商又提供给自己顾客信用期的情形定义为二层信用策略.自从文献[4]建立了基于一层信用策略的EOQ模型以来,关于一层信用策略的库存问题得到了深入的研究,最近,基于二层信用策略的库存问题,引起了学者们的重视.如:文献[5]把文

献[4]的模型扩展为二层信用策略的情形;文献[6]建立了变质物品的 EOQ 模型,探讨了二层信用期对零售商年费用的影响;文献[7]、[8]在补货率与需求率为常数的假设下,建立了基于二层信用策略的生产库存模型,并讨论了最优订货策略的存在性;文献[9]假设物品有变质的情形下,研究了二层信用策略对 EPQ 模型的影响;文献[10]、[11]考虑了零售商提供给顾客部分延期支付的库存问题;文献[12]研究了需求与零售商提供给顾客信用期限正相关的生产库存模型,而文献[13]进一步考虑了销售价格对需求的影响,扩展了文献[12];文献[14]在模糊环境下研究了关于二层信用策略的库存模型.

1.3.2 存货影响销售率的库存模型研究现状

空调、电脑、彩电与洗衣机等家电产品在卖场排放得越多越能吸引顾客,销售率也越高,这种现象被市场研究者称为存货影响销售率.许多学者对存货影响销售率的库存问题进行了大量的研究.如:

文献[15]的综述把存货影响销售率的库存问题分为两类,总结了存货影响销售率的库存模型的研究进展.文献[16]假设缺货时拖后率是等待时间的减函数,建立了以订货周期和缺货时间为决策变量的库存模型,目的是极大化平均利润,并证明了平均利润函数的凹性.文献[17]以采购次数和服务水平为决策变量,探讨了采购价格为时变的库存问题.文献[18]在两货栈条件下,研究了考虑运输费用的存货影响销售率的库存模型,并给出确定最优订货策略的有效算法.文献[19]考虑了通货膨胀下,短缺量部分拖后的变质物品最优生产策略问题,并证明了最优生产策略的存在性.文献[20]考虑了通货膨胀和货币存在时间价值,建立了物品变质率为常数,短缺量完全拖后的多个等周期的库存模型,并讨论了总成本函数的凸性.文献[21]建立了非瞬时变质物品的库存模型,以缺货时间点与订货周期为决策变量,讨论了成本函数的凸性.文献[22]假设库存维持费是物品在库时间的递增函数,建立了最小化成本的库存模型.文献[23]假设库存维持费离散可变,扩展了文献[22]的库存模型,建立了最大化总利润的库存模型.文献[24]研究了厂商与零售商构成的供应链协调库存问题,建立了极大化利润的库存模型,讨论了厂商与零售商获得最优利润的订货策略.文献[25]在信用期策略下,讨论了零售商的最优订货策略,并给出确定最优订购策略的算法.文献[26]建立了零售商边补货边需求的多个补货周期的库存模型,最后对总成本的最小值解用遗传算法进行仿真求解.

1.3.3 基于产品生命周期的库存模型的研究现状

产品生命周期是指产品的市场寿命,即一种新产品从进入市场到被市场淘汰的整个过程.一般地,产品的生命周期可以分成四个阶段,即萌芽期(或引入期)、成长期、成熟期和衰退期.在产品的生命周期的各个阶段,市场对产品的需求是不同的.在萌芽期,需求缓慢增长.进入成长期后,需求迅速上升.在成熟期,需求增长速度缓慢直至转而下降.在衰退期,需求持续下降,以至最后退出市场.随着科学技术的快速发展、市场竞争的加剧与人们消费习惯的改变,产品的市场寿命有变得越来越短的趋势,对库存管理的影响越来越大.

不少研究者选择了适当的函数来拟合产品在生命周期内的需求的变化规律,研究了在产品生命周期内多次订货的库存问题,如:文献[27]引入需求率函数 $\lambda(t) = Kt(T-t)^m$, ($t \in [0, T]$, $m \in N$)讨论了一类需求随产品生命周期变化的库存模型的最优解;文献[28]假设需求率为 $D(t) = at^b e^{ct}$, ($a > 0, b \in N, c < 0$),把产品生命周期分为多个时间间隔相同的订货周期,建立了易变质物品库存模型,并用穷举法求解模型;文献[29]选择一个Ramp型函数刻画季节性产品在生命周期内需求的变化,建立了多周期库存模型,讨论了零售商最优订购策略的存在性;文献[30]利用Beta函数刻画了产品在整个生命周期的需求变化特性,考虑了货币时间价值与允许缺货的情形,建立了多周期的库存模型.

还有研究者采用分段函数刻画产品生命周期内需求的变化,分析了单周期的库存问题,如:文献[31]研究了Ramp型函数需求率的变质物品生产库存问题,分别建立了不允许缺货和允许缺货的库存模型;文献[32]研究了Trapezoidal型函数需求率的变质物品库存模型,其中需求函数是分段线性函数,变质率是常数;文献[33]假设需求率是一般Ramp型函数,变质率服从Weibull分布,分别就采取先缺货策略与后缺货策略两种情形建立模型,并分别讨论了最优解的存在性与唯一性.

1.3.4 文献评述

关于存货影响销售率的库存模型中,已有学者研究了一层信用策略的库存问题,如文献[25],但是未见有从存货影响销售率的角度,研究基于二层信用策略的库存模型.即未见有把存货影响销售率与二层信用策略结合起来,研究二者对库存系统成本的影响.

在二层信用策略条件下, 研究两货栈系统中变质物品的库存问题的成果也较少. 基于产品生命周期的库存模型中, 选择适当的函数来刻画产品在其整个市场生命周期内的需求变化趋势的模型较少, 文献[32]选择Trapezoidal型函数来拟合了需求的变化, 但是其在假设缺货时缺货量完全拖后, 实际上, 拖后量会随着缺货时间的推移而减少. 文献[33]考虑了拖后率是时间的递减函数的库存问题, 但是其需求率函数只刻画了需求“上升-平稳”的变化趋势.

1.4 本文的主要工作

考虑到存货影响销售率的现象在产品营销中比较常见, 信用支付越来越受消费者与商家的推崇, 产品的市场生命周期有越来越短的趋势, 本文主要围绕二层信用支付, 存货影响销售率与产品的生命周期等因素对成本的影响, 建立了极小化成本的库存模型, 并对模型的性质进行分析, 给出了模型最优解存在的定理与确定最优订货策略的算法, 主要工作如下.

(一) 假设供应商向零售商提供信用支付期, 零售商也向顾客信用支付期, 销售率受当前库存水平的影响. 即把存货影响销售率与二层信用策略结合起来, 建立了极小化零售商库存成本的模型, 证明了零售商最优订购策略是存在且唯一的, 给出了确定最优订货策略的算法与数值例子. 文献[8]在二层信用策略条件下, 研究了一类EPQ模型. 文献[38]在两阶段信用策略下, 考虑了存货影响销售率的库存模型, 但是其未对模型的最优解的存在与唯一性进行证明, 本章的模型是结合了文献[8]、[38]的研究而得的成果.

(二) 假设零售商的仓库容量是有限的, 以极小化零售商库存系统年平均成本为目标, 考虑物品有变质的情形, 研究了二层信用策略下的两货栈系统的库存模型, 其中供应商提供给零售商的信用期限 M 可以小于零售商提供给顾客的信用期限 N , 使其更具有普遍性, 并证明了模型最优解的存在性及唯一性, 然后给出确定最优订购策略的算法步骤与数值例子.

(三) 假设需求率是时间的双斜坡函数, 缺货时缺货量拖后率是等待时间的递减函数, 损耗率是时间的一般函数, 用需求函数模拟了产品在其生命周期内的变化趋势, 即上升-平稳-下降, 以缺货时间为决策变量, 极小化零售商的库存系统总成本为目标, 建立了一类采用先订货后缺货策略的变质物品库存模型, 最后证明了模型最优解的存在性及

唯一性，同时给出了寻求最优订货策略的算法与数值例子.

第二章 基于二层信用策略且存货影响销售率的库存模型

传统的经济订购模型(EOQ模型)是假设零售商收到货物立即支付全部货款,而现实中,供应商为了提高销量,常常允许零售商延期支付,即信用支付.采用信用支付策略一方面可以增加零售商(或顾客)的订购量,另一方面可以降低供应商(或零售商)的库存,减少库存管理费,间接增加了收入.本文将供应商向零售商提供信用期的情形定义为一层信用策略,把供应商向零售商提供信用期,零售商又提供给自己顾客信用期的情形定义为二层信用策略.不少学者对基于一层信用策略的库存模型进行了深入的研究,并取得了很多研究成果,如文献[33]-[35].近年来,不少研究者对二层信用策略下的库存问题进行了深入研究.如:文献[8]在二层信用策略下,建立了需求率与补货率均为常数的EPQ模型,并证明了厂商的最优补货策略存在且唯一.文献[9]考虑了需求率,生产率与变质率均为常数的生产库存问题,建立了基于二层信用策略的零售商库存模型,最后证明了零售商最优补货策略存在且唯一;文献[12]假设需求率与零售商提供给顾客信用期限正相关,研究了二层信用策略下的库存问题,并讨论了零售商最优订货策略的存在性;文献[13]假设需求率受销售价格与信用期限的影响,改进了文献[12].

国外学者的研究表明,产品在货架上摆放得越多越能吸引顾客来购买,这种现象被称为存货影响销售率.这引起了广大理论工作者的研究兴趣.如:文献[20]在通货膨胀和资金存在时间价值的情形下,建立了存货影响销售率的多周期库存模型,并给出确定最优订购策略的算法;文献[21]假设库存维持费是物品在库时间的递增函数,探讨了存货影响销售率的库存问题;文献[37]建立了存货影响销售率的短生命周期物品库存模型,证明了最优订货策略存在且唯一;文献[38]在一层信用策略下,建立了存货影响销售率的库存模型,并给出确定最优订购策略的算法,但是未证明其存在性与唯一性;文献[39]假定价格和库存均影响需求,缺货部分拖后供给,建立了易变质产品的生产库存模型;文献[40]研究了一类需求受当前库存水平影响的非立即变质物品的库存模型.

本章将二层信用策略与存货影响销售率相结合,假设销售率是当前库存水平的线性函数,建立了零售商成本最小化的库存模型,并证明了零售商最优订购策略存在且唯一,最后给出寻求最优订购策略的算法与数值例子.

2.1 符号与假设

符号说明

$I(t)$ 表示 t 时刻的库存水平, $t \in [0, T]$; T 表示一个计划期的长度(决策变量); A 表示每一个周期的订购费; c 与 s 分别表示每单位商品的购买成本与销售价格; h 表示单位商品单位时间的库存维持费; I_e 与 I_c 分别表示每年每单位货币的收益利率与支付利率.

模型假设

- (1) $D(t) = a + bI(t)$ 表示 t 时刻的需求率, 其受当前库存水平的影响, b 为库存影响因子 ($a > 0, b > 0$).
- (2) 计划期无限长, 瞬时补货, 不允许缺货, 提前期为零.
- (3) 供应商给零售商信用期 M , 即在信用期 $[0, M]$ 之内, 零售商不须向供应商支付任何费用, 零售商的销售收入可以存入银行赚得利息, 信用期结束时, 零售商须在时点 $t = M$ 支付全部货款, 而且还要为未销售的商品及已经销售但未收到顾客货款的商品支付利息.
- (4) 零售商给顾客信用期 N , 顾客在时刻 $t = t_0$ 购买商品, 在时刻 $t = t_0 + N$ 付清货款.
- (5) 在计算支付利息时, 把未收到顾客货款的商品看成在库库存.
- (6) $I_c > I_e, s > c, c - sI_e(M - N) > 0$.

2.2 模型的建立与求解

2.2.1 模型建立

由于受需求的影响, t 时刻库存水平 $I(t)$ 的变化应满足微分方程:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -D(t), \quad 0 \leq t \leq T, I(T) = 0.$$

解之, 得

$$I(t) = \frac{a}{b}(e^{b(T-t)} - 1). \quad (2.1)$$

此时需求率函数可以化为

$$D(t) = ae^{b(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

根据(2.1)可以得

订货批量

$$Q = I(0) = \frac{a}{b}(e^{bT} - 1).$$

商品成本费

$$C = \frac{ac}{b}(e^{bT} - 1).$$

库存维持费

$$H = h \int_0^T I(t) dt = \frac{ha}{b^2}(e^{bT} - bT - 1).$$

零售商是赚得利息还是支付利息是随 N, M 及 $T + N$ 的大小关系变化而相应变化, 因此需要分 $N < M \leq T + N$, $T + N \leq M$ 和 $M \leq N$ 三种情形讨论.

(1) $N < M \leq T + N$

在此种情形下, 零售商在 $[0, M - N]$ 内的销售收入可以赚得利息, 需为在 $[M - N, T]$ 内未销售的商品及已销售但未收到顾客货款支付利息. 所以支付利息 IP_1 与收益利息 IE_1 分别为

$$IP_1 = \frac{acI_e}{b} \int_{M-N}^T (e^{b(T-t)} - 1) dt = \frac{acI_e}{b^2} [e^{b(T-M+N)} - b(T - M + N) - 1].$$

$$IE_1 = sI_e \int_0^{M-N} (M - N - t) D(t) dt = \frac{asI_e}{b^2} e^{bT} (Mb - Nb - 1 + e^{b(N-M)}).$$

此种情形下的平均总成本 $TVC_1(T)$ 为

$$TVC_1(T) = \frac{1}{T} (A + C + H + IP_1 - IE_1). \quad (2.2)$$

(2) $N < T + N \leq M$

此种情形下, 零售商在信用期内销售完所有商品, 所以在 $[0, T + N]$ 内赚得利息, 不需付任何利息. 支付利息 $IP_2 = 0$, 收益利息为

$$\begin{aligned} IE_2 &= sI_e \left[\int_0^T (T - t) D(t) dt + Q(M - T - N) \right] \\ &= \frac{asI_e}{b^2} [b(e^{bT} - 1)(M - N - T) + bTe^{bT} - e^{bT} + 1]. \end{aligned}$$

则此种情形下的平均总成本 $TVC_2(T)$ 为

$$TVC_2(T) = \frac{1}{T}(A + C + H - IE_2). \quad (2.3)$$

(3) $M \leq N$

此种情形下, 在收到顾客的货款之前零售商需付给供应商全部货款, 所以零售商没有任何收益利息; 在 $[M, N]$ 内零售商需为所有商品支付利息, 在 $[N, T + N]$ 内零售商为未收到顾客货款及在库库存支付利息, 所以收益利息为 $IE_3 = 0$. 支付利息为

$$\begin{aligned} IP_3 &= cI_c \left[\int_N^{N+T} I(t - N) dt + (N - M)Q \right] \\ &= \frac{acI_c}{b^2} [b(e^{bT} - 1)(N - M) - (bT - e^{bT} + 1)]. \end{aligned}$$

此种情况下的平均总成本 $TVC_3(T)$ 为

$$TVC_3(T) = \frac{1}{T}(A + C + H + IP_3). \quad (2.4)$$

因此, 在一个计划期 $[0, T]$ 内库存系统的平均总成本 $TVC(T)$ 可以表示为

$$TVC(T) = \begin{cases} TVC_1(T), & N < M \leq T + N; \\ TVC_2(T), & N < T + N \leq M; \\ TVC_3(T), & M \leq N. \end{cases}$$

我们的目标是求解最优的 T^* 使平均总成本 $TVC(T)$ 最小, 从而求出最优的订货批量

Q^* , 库存模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & TVC(T) \\ \text{s.t.} \quad & T > 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2.2 模型的求解

现在证明模型(2.5)存在最优解.

(I) 当 $N < M \leq T + N$ 时, 有

$$TVC_1'(T) = \frac{1}{b^2 T^2} f(T),$$

其中,

$$\begin{aligned}
 f(T) &= E_1 + (F_1 - bF_1T)e^{bT}, \\
 E_1 &= -Ab^2 + ah + abc + acI_c + abcI_c(N-M), \\
 F_1 &= -ab[c - sI_c(M-N)] - ah - asI_c[1 - e^{b(N-M)}] - acI_ce^{b(N-M)}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

关于 $TVC_1(T)$, 我们得到下面结论.

引理 2.1 如果 $f(M-N) < 0$, 那么 $TVC_1(T)$ 存在唯一的最小值解 $T_1 > M-N$. 否则 $TVC_1(T)$ 在 $[M-N, +\infty)$ 上的唯一最小值在 $T_1 = M-N$ 取得.

证明: 因为 $N < M, c - sI_c(M-N) > 0$, 所以有 $F_1 < 0$. 从而可知当 $T > M-N$ 时, 有

$f'(T) = -F_1b^2Te^{bT} > 0$, 即 $f(T)$ 在 $[M-N, +\infty)$ 上是严格单调递增函数. 又因为

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{f(T)}{-bF_1Te^{bT}} = 1, \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} -bF_1Te^{bT} = +\infty.$$

所以

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} f(T) = +\infty.$$

即存在充分大的 $T' > M-N$, 使得 $f(T') > 0$.

如果 $f(M-N) < 0$, 根据中值定理及 $f(T)$ 的单调性知, 方程 $f(T) = 0$ 在 $(M-N, T')$ 内有唯一解 T_1 . 又因为

$$TVC_1'(T) \Big|_{T=T_1} = \frac{1}{b^2T_1^2} [f'(T_1) - \frac{2}{T_1} f(T_1)] = \frac{1}{b^2T_1^2} f'(T_1) > 0.$$

所以 $TVC_1(T)$ 存在唯一的最小值点 $T_1 > M-N$.

如果 $f(M-N) \geq 0$, 因为 $f(T)$ 是关于 T 严格递增函数, 所以当 $T > M-N$ 时, $f(T) > f(M-N) \geq 0$, 此时 $TVC_1'(T) > 0$, 即 $TVC_1(T)$ 在 $[M-N, +\infty)$ 上是严格递增函数, 从而可知 $TVC_1(T)$ 在 $[M-N, +\infty)$ 上的唯一最小值在 $T_1 = M-N$ 取得. $\square$

(II) 当 $N < T+N \leq M$ 时, 有

$$TVC_2'(T) = \frac{1}{b^2T^2} g(T),$$

其中,

$$\begin{aligned}
 g(T) &= E_2 + (F_2 - bF_2T)e^{bT}, \\
 E_2 &= -Ab^2 + ah + abc - asI_e(bM - bN - 1), \\
 F_2 &= -ah - asI_e - ab[c - sI_e(M - N)].
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

关于 $TVC_2(T)$, 我们得到下面结论.

引理 2.2 (1) 如果 $g(M - N) > 0$, 那么 $TVC_2(T)$ 在 $(0, M - N)$ 上有唯一的最小值解 T_2 .

(2) 如果 $g(M - N) \leq 0$, 那么 $TVC_2(T)$ 在 $(0, M - N]$ 上的唯一最小值在 $T_2 = M - N$ 取得.

证明: 因为 $0 < T \leq M - N$, $c - sI_e(M - N - T) > 0$, 所以有 $F_2 < 0$. 从而可知当 $T > 0$ 时

$g'(T) = -F_2b^2Te^{bT} > 0$, 即 $g(T)$ 在 $(0, M - N]$ 上是严格单调递增函数.

(1) 因为 $g(0) = -Ab^2 < 0$, 所以, 如果 $g(M - N) > 0$, 由中值定理及 $g(T)$ 的单调性知, 方程 $g(T) = 0$ 在 $(0, M - N)$ 有唯一解 T_2 . 又因为

$$TVC_2'(T)|_{T=T_2} = \frac{1}{b^2T_2^2}[g'(T_2) - \frac{2}{T_2}g(T_2)] = \frac{1}{b^2T_2^2}g'(T_2) > 0.$$

所以 $TVC_2(T)$ 在 $(0, M - N)$ 内有唯一的最小值点 T_2 .

(2) 如果 $g(M - N) \leq 0$, 因为 $g(T)$ 是单调递增函数, 所以当 $0 < T \leq M - N$ 时, $g(T) \leq g(M - N) \leq 0$, 此时 $TVC_2'(T) \leq 0$, 即 $TVC_2(T)$ 在 $(0, M - N]$ 上是递减函数. 从而可知 $TVC_2(T)$ 在 $(0, M - N]$ 上的唯一最小值在 $T_2 = M - N$ 取得. $\square$

(III) 当 $M \leq N$ 时, 有

$$TVC_3'(T) = \frac{1}{T^2b^2}\varphi(T),$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \varphi(T) &= E_3 + (F_3 - bF_3T)e^{bT}, \\
 E_3 &= -Ab^2 + abc + ah + acI_e + abcI_e(N - M), \\
 F_3 &= -abc - ah - acI_e - abcI_e(N - M).
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

关于 $TVC_3(T)$, 我们得到下面结论.

引理 2.3 $TVC_3(T)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在唯一的最小值点 T_3 , 其中 T_3 是方程 $\varphi(T) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内的解.

证明: 因为 $-bF_3 > 0$, 所以 $\varphi'(T) = -b^2 F_3 e^{bT} > 0$. 从而可知函数 $\varphi(T)$ 在 $(0, +\infty)$ 严格单调递增. 又因为

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(T)}{-bF_3 T e^{bT}} = 1, \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} -bF_3 T e^{bT} = +\infty.$$

所以

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \varphi(T) = +\infty.$$

即存在充分大的 $T'' > 0$, 使得 $\varphi(T'') > 0$. 由于 $\varphi(0) = -Ab^2 < 0$, 所以, 根据中值定理及 $\varphi(T)$ 的单调性知, 方程 $\varphi(T) = 0$ 在 $(0, T'')$ 内有唯一解 T_3 . 又因为

$$TVC_3'(T) \Big|_{T=T_3} = \frac{1}{T_3^2 b^2} [\varphi'(T_3) - \frac{2}{T_3} \varphi(T_3)] = \frac{1}{T_3^2 b^2} \varphi'(T_3) > 0.$$

因此 T_3 是 $TVC_3(T)$ 在 $(0, +\infty)$ 上唯一的最小值点. $\square$

定理 2.1 假设 T^* 为 (2.5) 的最优解, 那么, 当 $N < M$ 时, (2.5) 的最优值 $TVC(T^*) = \min\{TVC_1(T_1), TVC_2(T_2)\}$; 当 $N \geq M$ 时, (2.5) 的最优值 $TVC(T^*) = TVC_3(T_3)$.

证明: (1) 若 $N < M$, 则根据引理 2.1 与引理 2.2 可知, 当 $f(M-N) < 0$ 时, $TVC_1(T)$ 的最小值点是方程 $f(T) = 0$ 的解 T_1 , 当 $f(M-N) \geq 0$ 时, $TVC_1(T)$ 的最小值点是 $T_1 = M - N$; 当 $g(M-N) > 0$ 时, $TVC_2(T)$ 的最小值点是方程 $g(T) = 0$ 的解 T_2 , 当 $g(M-N) \leq 0$ 时, $TVC_2(T)$ 的最小值点是 $T_2 = M - N$. 因此, 当 $N < M$ 时, (2.5) 的最优值 $TVC(T^*) = \min\{TVC_1(T_1), TVC_2(T_2)\}$.

(2) 若 $N \geq M$, 则由引理 2.3 易知, $TVC(T^*) = TVC_3(T_3)$, $T^* = T_3$. $\square$

2.3 算法步骤

按照定理 2.1 的结论, 我们得到确定最优订购策略的算法步骤.

第一步: 输入参数, 当 $N < M$ 时转到第二步; 当 $N \geq M$ 时转到第五步.

第二步: 根据 (2.6) 与 (2.7), 分别计算 $f(M-N)$ 与 $g(M-N)$.

第三步：①如果 $f(M-N)<0$ ，则根据 (2.6) 解方程 $f(T)=0$ 得 T_1 ，否则令 $T_1=M-N$ 。

②如果 $g(M-N)>0$ ，则根据 (2.7) 解方程 $g(T)=0$ 得 T_2 ，否则令 $T_2=M-N$ 。

第四步：根据 (2.2) 和 (2.3) 分别计算 $TVC_1(T_1)$ 和 $TVC_2(T_2)$ ，当 $TVC_2(T_2)>TVC_1(T_1)$ 时， $TVC(T^*)=TVC_1(T_1)$ ， $T^*=T_1$ ；否则 $TVC(T^*)=TVC_2(T_2)$ ， $T^*=T_2$ 。

第五步：根据 (2.8) 解方程 $\varphi(T)=0$ 得 $T^*=T_3$ ，根据 (2.4) 计算得 $TVC(T^*)=TVC_3(T_3)$ 。

第六步： $Q^*=a(e^{bT^*}-1)/b$ ，停止。

2.4 数值例子

考虑如下数值例子。

例2.1 设库存系统参数为: $a=1000, b=0.2, c=20, s=30, A=200, h=0.2, I_e=0.12, I_c=0.18, M=50/365, N=30/365$ 。根据2.3节给出的算法步骤得最优订购策略为: $T^*=0.2237, Q^*=228.74, TVC(T^*)=21577.90$ 。当参数 b 变化时, 其对最优订购策略的影响如表2-1所示。

例2.2 设库存系统参数为: $a=1000, b=0.3, c=20, s=30, A=200, h=0.2, I_e=0.12, I_c=0.18, M=40/365, N=30/365$ 。根据2.3节给出的算法步骤得最优订购策略为: $T^*=0.1983, Q^*=204.37, TVC(T^*)=21898.18$ 。当参数 M 变化时, 其最优订购策略的影响如表2-2所示。

表2-1 例2.1计算结果

b	T*(年)	Q*	TVC(T*)
0.2	0.2237	228.74	21577.90
0.3	0.1986	204.69	21796.55
0.4	0.1803	186.99	21994.53
0.5	0.1662	173.28	22176.90
0.6	0.1548	162.24	22346.96
0.7	0.1454	153.11	22506.97

表2-2 例2.2计算结果

	M=40/365	M=50/365	M=60/365	M=70/365
T*	0.1983	0.1986	0.1989	0.1992
Q*	204.37	204.68	205.00	205.32
TVC(T*)	21898.18	21796.55	21694.92	21593.29

例2.3 设库存系统参数为: $a=1000, b=0.3, c=20, s=30, A=200, h=0.2, I_e=0.12, I_c=0.18, M=50/365, N=30/365(N<M)$ ，根据2.3节的算法步骤得最优订购策略为: $T^*=0.1986, Q^*=204.69,$

$TVC(T^*)=21796.55$. 当参数 N 变化时, 其对最优订购策略的影响如表2-3所示.

表2-3 例2.3计算结果

	$N=30/365(N<M)$	$N=40/365(N<M)$	$N=50/365(N=M)$	$N=53/365(M<N)$	$N=55/365(M<N)$
T^*	0.1986	0.1983	0.1981	0.1388	0.0797
Q^*	204.69	204.37	204.06	141.75	80.62
$TVC(T^*)$	21796.55	21898.18	21999.79	22160.70	22954.07

数值例子表明, 当需求率中的参数 b 从 0.2 变化到 0.5, 其余参数不变时, 最优订货周期 T^* 和最优订货批量 Q^* 逐渐减小, 而平均总成本 $TVC(T^*)$ 逐渐增大; 当供应商给零售商的信用期 M 逐渐增大, 其余参数不变时, 最优订货周期 T^* 和最优订货批量 Q^* 逐渐增大, 而平均总成本 $TVC(T^*)$ 逐渐减小; 当零售商给顾客的信用期 N 逐渐增大, 其余参数不变时, 最优订货周期 T^* 和最优订货批量 Q^* 逐渐减小, 而平均总成本 $TVC(T^*)$ 逐渐增大.

2.5 本章小结

文献[38]在一层信用策略下, 考虑了存货影响销售率的库存问题, 但是其没有证明最优补货策略的存在性. 关于二层信用策略的库存模型中, 未见有考虑了销售率受存货影响的. 本章考虑了零售商采用二层信用策略的库存问题, 假设销售率是当前库存水平的线性函数, 建立了存货影响销售率的库存模型, 并证明模型最优解的存在性与唯一性, 同时给出了最优订购策略的算法步骤. 需求是影响库存系统的重要因素之一, 在二层信用策略的库存模型中, 以后还可以考虑需求是随价格、信用期限变化的情形或需求是随机变化的情形.

第三章 两货栈及二层信用策略下的库存模型优化

传统 EOQ 模型只是考虑单个货栈的情形并且假设货栈的容量是无限的,而现实中任何货栈容量都是有限的.当订货量超出自有货栈(Owned Warehouse, OW)的容量时,零售商往往会利用租用货栈(Rented Warehouse, RW)贮存货物.近年来,不少学者对两货栈的库存模型进行了深入的研究.如,文献[18]假设需求率是当前库存量的幂函数,建立了考虑运输费用的库存模型;文献[41]通过考虑时变需求,增加量价格折扣,研究了采用间隔运输模式运送 RW 的物品到 OW 的两货栈库存模型;文献[42]在有限计划期内,讨论了需求是抛物型函数,允许缺货的变质物品的库存问题;文献[43]在通货膨胀和允许缺货且缺货量部分拖后的情形下讨论了易变质物品的库存问题;文献[44]、[45]则在模糊环境下,研究了两货栈的库存模型;文献[46]在有限时域内考虑了通货膨胀和资金的时间价值,讨论了允许缺货且缺货量部分拖后的多个周期库存问题;文献[47]通过极小化总成本现值,证明了零售商的最优补货策略的存在且唯一;文献[48]在补货率有限和时变需求的情形下,研究了多次订货的变质物品的两货栈系统.

当零售商的订货量很大的时候,供应商往往会提供给零售商一定的延期支付优惠.信用支付(或延期支付)是现代商业活动常见的一种短期商业信贷方式,其作用除了能够刺激买方增加订购量之外,还可以减小卖方的库存压力与管理费用.最近,基于二层信用策略的库存问题引起了许多学者的研究兴趣,并取得了不少的研究成果.如:文献[49]在库存容量无限条件下,探讨了零售商的最优补货策略问题;文献[50]在文献[49]的基础上假设零售商的库存容量是有限的,研究了两货栈情形下变质物品的库存模型,但是,其假设零售商提供给顾客的延期支付期限 N 小于供应商提供给零售商的延期支付期限 M ;文献[51]、[52]以极小化成本为目的,建立了关于两货栈的库存模型,并分析了最优解的存在性,但是,其未考虑物品有变质的情形.文献[53]在供应商允许零售商延期支付的情形下,建立了变质性物品的两货栈库存模型,并分析了最优解的存在性,但其未讨论零售商允许顾客延期支付的情形.

据第 25 届世界批发市场大会披露,我国果蔬等农产品采摘后损耗率高达 25%-30%,而欧美发达国家普遍低于 5%^[54].因此加强易损耗(或变质)产品的库存控制,减少不必要的损失,对提高企业业绩与节约资源均有重要意义.本章假设物品变质率 θ 为常数,

在二层信用策略下, 建立了两货栈系统的库存模型, 然后讨论了模型最优解的存在性及唯一性. 当变质率 θ 趋于零时, 本章的模型即是文献[52]的库存模型.

3.1 符号说明与假设

符号说明

$I(t)$ 表示 t 时刻的库存水平, $t \in [0, T]$.

T 表示一个订货周期的长度(决策变量).

D 表示需求率.

A 表示每一个周期的固定订购费.

W 表示零售商自有仓库(OW)的容量.

T_a 表示库存量 W 降为零所需的时间.

t_0 表示库存水平降到 W 时所需的时间, 即 $t_0 = \begin{cases} \frac{Q-W}{D}, & Q > W (T > T_a), \\ 0, & Q \leq W (T \leq T_a). \end{cases}$

Q 表示一个周期的订购量.

c 表示每单位商品的购买成本.

s 表示每单位商品的销售价格.

h 表示单位商品单位时间的自有仓库库存维持费.

k 表示单位商品单位时间的租用仓库库存维持费($k > h$).

I_e 表示每年每单位货币的收益利率.

I_c 表示每年每单位货币的支付利率.

T^* 表示最优订货周期.

$TVC(T^*)$ 表示库存系统的最优平均成本.

模型假设

1. 计划期无限长, 瞬时补货, 不允许缺货, 提前期为零.
2. 物品只有在仓库时候发生变质, 发生变质的物品不可再用, 物品的变质率为 $\theta > 0$.

3. 供应商给零售商信用期 M , 即在信用期 $[0, M]$ 之内, 零售商不须向供应商支付任何费用, 零售商的销售收入可以存入银行赚得利息; 信用期结束时, 零售商须在 $t = M$ 时支付全部货款, 而且还要为未销售的商品及已经销售但未收到顾客货款的商品支付利息.
4. 在计算支付利息时, 把未收到顾客货款的商品看成在库库存.
5. 零售商给顾客信用期 N , 顾客在时刻 t 购买商品, 在时刻 $t + N$ 付清货款.
6. 租用仓库(RW)容量无限大, 当零售商的订购量 Q 超过自有仓库(OW)的容量 W 时, 超出的订货量需存放到租用仓库(RW). 在销售时, 应先销售租用仓库(RW)中的物品再销售自有仓库(OW)的物品.

3.2 模型建立

由于受需求与变质的影响, 库存水平 $I(t)$ 的变化应满足以下微分方程

$$\frac{dI(t)}{dt} + \theta I(t) = -D, \quad 0 \leq t \leq T, I(T) = 0. \quad (3.1)$$

解上述微分方程得

$$I(t) = \frac{D}{\theta} (e^{\theta(T-t)} - 1), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.2)$$

于是, 一个周期内的订购量

$$Q = I(0) = \frac{D}{\theta} (e^{\theta T} - 1). \quad (3.3)$$

一个订货周期内的物品变质量

$$Q - DT = \frac{D}{\theta} (e^{\theta T} - \theta T - 1). \quad (3.4)$$

根据(3.2)得 $T_a = \frac{1}{\theta} \ln(\frac{\theta W}{D} + 1)$, 当且仅当 $Q > W$ 时, $T > T_a$.

在一个订货周期 $[0, T]$ 零售商的固定订购费、变质损失费与库存维持费分别为:

固定订购费: A .

变质损失费: $\frac{Dc}{\theta} (e^{\theta T} - \theta T - 1)$.

零售商库存维持费须分两种情形计算.

(i) 当 $T \leq T_a$ ($Q \leq W$) 时, 不需要租用仓库, 所以库存维持费为

$$h \int_0^T I(t) dt = \frac{Dh}{\theta^2} (e^{\theta T} - \theta T - 1). \quad (3.5)$$

(ii) 当 $T_a < T$ ($W < Q$) 时, 零售商需要租用仓库, 库存维持费=自有仓库库存费+租用仓库库存费, 即

$$\begin{aligned} & h[Wt_0 + \int_0^T I(t) dt] + k \int_0^{T_a} I(t) dt \\ &= h[\frac{D}{\theta^2} (e^{\theta T_a} - \theta T_a - 1) + W(T - T_a)] + k[\frac{D}{\theta^2} (e^{\theta T} - e^{\theta T_a}) - (\frac{D}{\theta} + W)(T - T_a)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

零售商的利息须分三种情形: (1) $M > N$ 且 $T_a \leq M - N$, (2) $M > N$ 且 $M - N < T_a$, (3) $M \leq N$ 来讨论. 对应地, 可以计算出零售商的平均总成本.

情形 3.2.1 $M > N$ 且 $T_a \leq M - N$

(i) $T < T_a$

此时有 $T + N < M$, 零售商在信用期限 M 内, 已全部收到顾客货款. 所以支付利息为零, 收益利息为

$$sI_e [\int_0^T (T-t) D dt + DT(M-N-T)] = sI_e D(M-N)T - \frac{1}{2} sI_e DT^2.$$

(ii) $T_a < T \leq M - N$. 利息的计算与(i)相同.

(iii) $T_a \leq M - N < T$

此时有 $T_a + N \leq M < T + N$, 零售商收到最后一位顾客货款的期限 $T + N$ 大于供应商提供给零售商的信用期限 M , 在时间段 $[0, M - N]$ 内零售商可以获得收益利息, 在时间段 $[M - N, T]$ 内需支付利息, 所以

支付利息为

$$cI_c \int_{M-N}^T I(t) dt = \frac{DcI_c}{\theta} [\frac{1}{\theta} (e^{\theta(T-M+N)} - 1) + (M - N - T)].$$

收益利息为

$$sI_e \int_0^{M-N} (M - N - t) D dt = \frac{1}{2} sI_e D(M - N)^2.$$

一个订货周期 $[0, T]$ 内, 零售商的平均成本 $TVC(T) = (\text{订购费} + \text{变质损失费} + \text{库存费} +$

支付利息-收益利息)/ T . 因此, 当 $M \geq N$ 且 $T_a \leq M - N$ 时, 零售商的平均成本函数可以表示为

$$TVC(T) = \begin{cases} TVC_1(T), & 0 < T \leq T_a, \\ TVC_2(T), & T_a < T \leq M - N, \\ TVC_3(T), & M - N < T. \end{cases} \quad (3.7)$$

其中,

$$TVC_1(T) = \frac{1}{T} \left[A + \frac{Dc}{\theta} (e^{\theta T} - \theta T - 1) + \frac{Dh}{\theta^2} (e^{\theta T} - \theta T - 1) - DsI_e(M - N)T + \frac{1}{2} sI_e D T^2 \right]. \quad (3.8)$$

$$TVC_2(T) = \frac{1}{T} \left\{ A + \frac{Dc}{\theta} (e^{\theta T} - \theta T - 1) + h \left[\frac{D}{\theta^2} (e^{\theta T_a} - \theta T_a - 1) + W(T - T_a) \right] + k \left[\frac{D}{\theta^2} (e^{\theta T} - e^{\theta T_a}) - \left(\frac{D}{\theta} + W \right) (T - T_a) \right] - DsI_e(M - N)T + \frac{1}{2} sI_e D T^2 \right\}. \quad (3.9)$$

$$TVC_3(T) = \frac{1}{T} \left\{ A + \frac{Dc}{\theta} (e^{\theta T} - \theta T - 1) + h \left[\frac{D}{\theta^2} (e^{\theta T_a} - \theta T_a - 1) + W(T - T_a) \right] + k \left[\frac{D}{\theta^2} (e^{\theta T} - e^{\theta T_a}) - \left(\frac{D}{\theta} + W \right) (T - T_a) \right] + \frac{DcI_c}{\theta} \left[\frac{1}{\theta} (e^{\theta(T-M+N)} - 1) + (M - N - T) \right] - \frac{1}{2} sI_e D (M - N)^2 \right\}. \quad (3.10)$$

情形 3.2.2 $M > N$ 且 $M - N < T_a$

类似于情形 3.2.1 的讨论, 库存系统的平均成本函数为

$$TVC(T) = \begin{cases} TVC_1(T), & 0 < T \leq M - N, \\ TVC_4(T), & M - N \leq T \leq T_a, \\ TVC_3(T), & T_a < T. \end{cases} \quad (3.11)$$

其中,

$$TVC_4(T) = \frac{1}{T} \left\{ A + \frac{Dc}{\theta} (e^{\theta T} - \theta T - 1) + \frac{Dh}{\theta^2} (e^{\theta T} - \theta T - 1) + \frac{DcI_c}{\theta} \left[\frac{1}{\theta} (e^{\theta(T-M+N)} - 1) + (M - N - T) \right] - \frac{1}{2} sI_e D (M - N)^2 \right\}. \quad (3.12)$$

情形 3.2.3 $M \leq N$

因为供应商提供给零售商的信用期限 M 小于零售商提供给顾客的信用期限 N , 所

以零售商不但没有利息收入,而且在时段 $[M, N+T]$ 内还须支付利息,故收益利息为零.

支付利息为

$$cI_c \left[\int_N^{N+T} I(t-N)dt + Q(N-M) \right] = \frac{DcI_c}{\theta} \left[\frac{1}{\theta} (e^{\theta T} - \theta T - 1) + (e^{\theta T} - 1)(N-M) \right].$$

因此,当 $M \leq N$ 时,一个订货周期 $[0, T]$ 内零售商的平均成本函数为

$$TVC(T) = \begin{cases} TVC_5(T), & 0 < T \leq T_a \\ TVC_6(T), & T_a < T. \end{cases} \quad (3.13)$$

其中,

$$\begin{aligned} TVC_5(T) = & \frac{1}{T} \left\{ A + \frac{Dc}{\theta} (e^{\theta T} - \theta T - 1) + \frac{Dh}{\theta^2} (e^{\theta T} - \theta T - 1) \right. \\ & \left. + \frac{DcI_c}{\theta} \left[\frac{1}{\theta} (e^{\theta T} - \theta T - 1) + (e^{\theta T} - 1)(N-M) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} TVC_6(T) = & \frac{1}{T} \left\{ A + \frac{Dc}{\theta} (e^{\theta T} - \theta T - 1) + h \left[\frac{D}{\theta^2} (e^{\theta T_a} - \theta T_a - 1) + W(T - T_a) \right] \right. \\ & + k \left[\frac{D}{\theta^2} (e^{\theta T} - e^{\theta T_a}) - \left(\frac{D}{\theta} + W \right) (T - T_a) \right] + \frac{DcI_c}{\theta} \left[\frac{1}{\theta} (e^{\theta T} - \theta T - 1) \right. \\ & \left. \left. + (e^{\theta T} - 1)(N-M) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

我们的目标是寻求两货栈库存系统在二层信用策略下的最优订货周期及最优订货量,使得零售商的平均成本最小.

3.3 模型分析

在这一节里,我们将证明二层信用策略下两货栈库存系统存在唯一的最优订货策略.

情形 3.3.1 $M > N$ 且 $T_a \leq M - N$

(I) 对 $TVC_1(T)$ 求导得

$$TVC_1'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_1(T),$$

其中,

$$\varphi_1(T) = -A\theta^2 + D(h+c\theta)(\theta Te^{\theta T} - e^{\theta T} + 1) + \frac{1}{2}sI_e D\theta^2 T^2. \quad (3.16)$$

因为 $\varphi_1(0) = -A\theta^2$, $\varphi_1'(T) = D(h+c\theta)\theta^2 Te^{\theta T} + sI_e D\theta^2 T > 0$, 即 $\varphi_1(T)$ 在 $(0, T_a]$ 上是关于 T 的单调递增函数.

(a) 若 $\varphi_1(T_a) \geq 0$, 则根据中值定理及 $\varphi_1(T)$ 的单调性知, 方程 $\varphi_1(T) = 0$ 在 $(0, T_a]$ 有唯一解 T_1 . 又因为

$$TVC_1'(T) \Big|_{T=T_1} = \frac{1}{\theta^2 T_1^2} \varphi_1'(T_1) > 0.$$

故 T_1 是 $TVC_1(T)$ 在 $(0, T_a]$ 的最小值点.

(b) 若 $\varphi_1(T_a) < 0$, 则当 $0 < T \leq T_a$ 时, 有

$$TVC_1'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_1(T) \leq \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_1(T_a) < 0.$$

所以当 $0 < T \leq T_a$ 时候, $TVC_1(T)$ 是单调递减函数, 故 T_a 是 $TVC_1(T)$ 的最小值点.

(II) 对 $TVC_2(T)$ 求导得

$$TVC_2'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_2(T),$$

其中,

$$\begin{aligned} \varphi_2(T) = & -A\theta^2 + D(k+c\theta)(\theta Te^{\theta T} - e^{\theta T} + 1) \\ & - D(k-h)(\theta T_a e^{\theta T_a} - e^{\theta T_a} + 1) + \frac{1}{2}sI_e D\theta^2 T^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

因为 $\varphi_2'(T) = D(k+c\theta)\theta^2 Te^{\theta T} + sI_e D\theta^2 T > 0$, 所以 $\varphi_2(T)$ 在 $(T_a, M-N]$ 上是关于 T 单调递增函数, 有 $\varphi_2(T_a) < \varphi_2(M-N)$.

(a) 若 $\varphi_2(T_a) \geq 0$, 则当 $T_a < T \leq M-N$ 时, 有

$$TVC_2'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_2(T) > \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_2(T_a) \geq 0.$$

所以 $TVC_2(T)$ 在 $(T_a, M-N]$ 上单调递增函数, 故 T_a 是 $TVC_2(T)$ 的最小值点.

(b) 若 $\varphi_2(T_a) < 0$, $\varphi_2(M-N) \geq 0$, 则根据中值定理及 $\varphi_2(T)$ 的单调性知, 方程 $\varphi_2(T) = 0$ 在 $(T_a, M-N]$ 内有唯一解 T_2 . 又因为

$$TVC_2'(T)\Big|_{T=T_2} = \frac{1}{\theta^2 T_2^2} \varphi_2'(T_2) > 0.$$

故 T_2 是 $TVC_2(T)$ 在 $(T_a, M-N]$ 的最小值点.

(c) 若 $\varphi_2(M-N) \leq 0$, 则当 $T_a < T \leq M-N$ 时, 有

$$TVC_2'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_2(T) < \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_2(M-N) \leq 0.$$

所以 $TVC_2(T)$ 在 $(T_a, M-N]$ 上单调递减函数, 故 $T = M-N$ 是 $TVC_2(T)$ 的最小值点.

(III) 对 $TVC_3(T)$ 求导得

$$TVC_3'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_3(T),$$

其中,

$$\begin{aligned} \varphi_3(T) = & -A\theta^2 + D(k+c\theta)(\theta T e^{\theta T} - e^{\theta T} + 1) - D(k-h)(\theta T_a e^{\theta T_a} - e^{\theta T_a} + 1) + DcI_c[\theta T e^{\theta(T-M+N)} \\ & - e^{\theta(T-M+N)} - (M-N)\theta + 1] + \frac{1}{2} sI_e D\theta^2 (M-N)^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

因为 $\varphi_3'(T) = D(k+c\theta)\theta^2 T e^{\theta T} + DcI_c\theta^2 T e^{\theta(T-M+N)} > 0$, 故 $\varphi_3(T)$ 在 $[M-N, +\infty)$ 是关于 T 的单调递增函数. 当 $T \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi_3(T)$ 与 $D[(k+c\theta)+cI_c e^{-M+N}]\theta T e^{\theta T}$ 同阶, 因此

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \varphi_3(T) = +\infty.$$

(a) 若 $\varphi_3(M-N) \leq 0$, 则根据中值定理及 $\varphi_3(T)$ 的单调性知, 方程 $\varphi_3(T) = 0$ 在 $[M-N, +\infty)$ 有唯一解 T_3 , 又因为

$$TVC_3'(T)\Big|_{T=T_3} = \frac{1}{\theta^2 T_3^2} \varphi_3'(T_3) > 0.$$

故 T_3 是 $TVC_3(T)$ 的最小值点.

(b) 若 $\varphi_3(M-N) > 0$, 则当 $T > M-N$ 时, 有

$$TVC_3'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_3(T) > \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_3(M-N) > 0.$$

所以 $TVC_3(T)$ 在 $[M-N, +\infty)$ 是单调递增函数, 故 $T = M-N$ 是 $TVC_3(T)$ 的最小值点.

注意到下面等式成立.

$$\varphi_1(T_a) = \varphi_2(T_a)$$

$$= -A\theta^2 + D(h+c\theta)(\theta T_a e^{\theta T_a} - e^{\theta T_a} + 1) + \frac{1}{2} s I_e D T_a^2 \theta^2. \quad (3.19)$$

$$\varphi_2(M-N) = \varphi_3(M-N)$$

$$\begin{aligned} &= -A\theta^2 + D(k+c\theta)[\theta(M-N)e^{\theta(M-N)} - e^{\theta(M-N)} + 1] \\ &\quad - D(k-h)(\theta T_a e^{\theta T_a} - e^{\theta T_a} + 1) + \frac{1}{2} s I_e D (M-N)^2 \theta^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$TVC_1(T_a) = TVC_2(T_a), \quad TVC_2(M-N) = TVC_3(M-N).$$

当 $T_a < M-N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \varphi_2(M-N) - \varphi_2(T_a) &= D(k+c\theta)[\theta(M-N)e^{\theta(M-N)} - e^{\theta(M-N)} + 1 \\ &\quad - (\theta T_a e^{\theta T_a} - e^{\theta T_a} + 1)] + \frac{1}{2} s I_e D \theta^2 [(M-N)^2 - T_a^2] > 0. \end{aligned}$$

令 $\Delta_{11} = \varphi_2(T_a)$, $\Delta_{12} = \varphi_2(M-N)$, 即有 $\Delta_{11} < \Delta_{12}$.

(1) 若 $\Delta_{11} \geq 0$, 有 $\Delta_{12} > \Delta_{11} \geq 0$, 即 $\varphi_3(M-N) = \varphi_2(M-N) > \varphi_2(T_a) = \varphi_1(T_a) \geq 0$. 于是最优平均成本

$$\begin{aligned} TVC(T^*) &= \min\{TVC_1(T_1), TVC_2(T_a), TVC_3(M-N)\} \\ &= \min\{TVC_1(T_1), TVC_2(T_a), TVC_2(M-N)\} \\ &= \min\{TVC_1(T_1), TVC_2(T_a)\} \\ &= \min\{TVC_1(T_1), TVC_1(T_a)\} \\ &= TVC_1(T_1). \end{aligned}$$

从而可知最优订货周期 $T^* = T_1$.

(2) 若 $\Delta_{11} < 0, \Delta_{12} \geq 0$, 即 $\varphi_2(T_a) = \varphi_1(T_a) < 0$, $\varphi_3(M-N) = \varphi_2(M-N) \geq 0$. 于是最优平均成本

$$\begin{aligned} TVC(T^*) &= \min\{TVC_1(T_a), TVC_2(T_2), TVC_3(M-N)\} \\ &= \min\{TVC_2(T_a), TVC_2(T_2), TVC_2(M-N)\} \\ &= TVC_2(T_2). \end{aligned}$$

从而可知最优订货周期 $T^* = T_2$.

(3) 若 $\Delta_{12} < 0$, 即 $0 > \varphi_3(M-N) = \varphi_2(M-N) > \varphi_2(T_a) = \varphi_1(T_a)$. 于是最优平均成本

$$\begin{aligned} TVC(T^*) &= \min\{TVC_1(T_a), TVC_2(M-N), TVC_3(T_3)\} \\ &= \min\{TVC_2(T_a), TVC_3(M-N), TVC_3(T_3)\} \\ &= \min\{TVC_3(M-N), TVC_3(T_3)\} \\ &= TVC_3(T_3). \end{aligned}$$

从而可知最优订货周期 $T^* = T_3$.

因此, 根据情形 3.3.1 的分析可以得到下面定理 3.1.

定理 3.1 当 $M > N$ 且 $T_a \leq M-N$ 时,

- ① 若 $\Delta_{11} \geq 0$, 则 $TVC(T^*) = TVC_1(T_1)$, $T^* = T_1$;
- ② 若 $\Delta_{11} < 0, \Delta_{12} \geq 0$, 则 $TVC(T^*) = TVC_2(T_2)$, $T^* = T_2$;
- ③ 若 $\Delta_{12} < 0$, 则 $TVC(T^*) = TVC_3(T_3)$, $T^* = T_3$.

其中 T_i 是方程 $\varphi_i(T) = 0$ ($i=1,2,3$) 的解.

情形 3.3.2 $M > N$ 且 $M-N < T_a$

对 $TVC_4(T)$ 求导得

$$TVC_4'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_4(T),$$

其中,

$$\begin{aligned} \varphi_4(T) &= -A\theta^2 + D(h+c\theta)(\theta T e^{\theta T} - e^{\theta T} + 1) + DcI_c[\theta T e^{\theta(T-M+N)} - e^{\theta(T-M+N)} - (M-N)\theta + 1] \\ &\quad + \frac{1}{2}sI_c D\theta^2(M-N)^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

从而得 $\varphi_4'(T) = D(h+c\theta)\theta^2 T e^{\theta T} + DcI_c\theta^2 T e^{\theta(T-M+N)} > 0$, 即 $\varphi_4(T)$ 在 $[M-N, T_a]$ 是关于 T 的单调递增函数, 有 $\varphi_4(M-N) < \varphi_4(T_a)$.

(a) 若 $\varphi_4(M-N) \geq 0$, 则当 $M-N \leq T \leq T_a$ 时, 有

$$TVC_4'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_4(T) > \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_4(M-N) \geq 0.$$

所以 $TVC_4(T)$ 在 $[M-N, T_a]$ 上单调递增函数, 故 $T = M-N$ 是 $TVC_2(T)$ 的最小值点.

(b) 若 $\varphi_4(M-N) < 0$, $\varphi_4(T_a) \geq 0$, 则根据中值定理及 $\varphi_4(T)$ 的单调性知, 方程 $\varphi_4(T) = 0$ 在 $[M-N, T_a]$ 上有唯一解 T_4 , 又因为

$$TVC_4'(T) \Big|_{T=T_4} = \frac{1}{\theta^2 T_4^2} \varphi_4'(T_4) > 0.$$

所以 $TVC_4(T)$ 在 $[M-N, T_a]$ 的最小值点为 T_4 .

(c) 若 $\varphi_4(T_a) < 0$, 则当 $M-N \leq T \leq T_a$ 时, 有

$$TVC_4'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_4(T) < \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_4(T_a) < 0.$$

所以 $TVC_4(T)$ 在 $[M-N, T_a]$ 上单调递减函数, 故 $T = T_a$ 是 $TVC_2(T)$ 的最小值点.

注意到下面等式成立.

$$\begin{aligned} \varphi_1(M-N) &= \varphi_4(M-N) \\ &= -A\theta^2 + D(h+c\theta)[\theta(M-N)e^{\theta(M-N)} - e^{\theta(M-N)} + 1] \\ &\quad + \frac{1}{2} sI_e D\theta^2 (M-N)^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(T_a) &= \varphi_4(T_a) \\ &= -A\theta^2 + D(h+c\theta)(\theta T_a e^{\theta T_a} - e^{\theta T_a} + 1) + DcI_c [\theta T_a e^{\theta(T_a-M+N)} - e^{\theta(T_a-M+N)} \\ &\quad - (M-N)\theta + 1] + \frac{1}{2} sI_e D\theta^2 (M-N)^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$TVC_1(M-N) = TVC_4(M-N), \quad TVC_4(T_a) = TVC_3(T_a).$$

当 $M-N < T_a$ 时, 有 $\varphi_4(T_a) - \varphi_4(M-N) > 0$, 令 $\Delta_{21} = \varphi_1(M-N)$, $\Delta_{22} = \varphi_3(T_a)$, 即有 $\Delta_{21} < \Delta_{22}$.

因此, 结合情形 3.3.1 与情形 3.3.2 的分析可以得到下面定理 3.2.

定理 3.2 当 $M > N$ 且 $M-N < T_a$ 时,

① 若 $\Delta_{21} \geq 0$, 则 $TVC(T^*) = TVC_1(T_1)$, $T^* = T_1$;

②若 $\Delta_{21} < 0, \Delta_{22} \geq 0$, 则 $TVC(T^*) = TVC_4(T_4)$, $T^* = T_4$;

③若 $\Delta_{22} < 0$, 则 $TVC(T^*) = TVC_3(T_3)$, $T^* = T_3$.

其中 T_1 、 T_4 与 T_3 分别是方程 $\varphi_1(T) = 0$ 、 $\varphi_4(T) = 0$ 与方程 $\varphi_3(T) = 0$ 的解.

情形 3.3.3 $M \leq N$

对 $TVC_5(T)$ 与 $TVC_6(T)$ 分别求导得

$$TVC_5'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_5(T),$$

$$TVC_6'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_6(T),$$

其中,

$$\varphi_5(T) = -\theta^2 A + D[h + c\theta + cI_c + c\theta I_c(N - M)](\theta T e^{\theta T} - e^{\theta T} + 1). \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \varphi_6(T) = & -\theta^2 A + D[k + c\theta + cI_c + c\theta I_c(N - M)](\theta T e^{\theta T} - e^{\theta T} + 1) \\ & - D(k - h)(\theta T_a e^{\theta T_a} - e^{\theta T_a} + 1). \end{aligned} \quad (3.25)$$

因此, 有

$$\varphi_5(0) = -\theta^2 A < 0.$$

$$\varphi_5'(T) = D[h + c\theta + cI_c + c\theta I_c(N - M)]\theta^2 T e^{\theta T} > 0.$$

$$\varphi_6'(T) = D[k + c\theta + cI_c + c\theta I_c(N - M)]\theta^2 T e^{\theta T} > 0.$$

所以 $\varphi_5(T)$ 与 $\varphi_6(T)$ 分别在区间 $(0, T_a]$ 与 $[T_a, +\infty)$ 是单调递增函数. 当 $T \rightarrow +\infty$ 时,

$\varphi_5(T)$ 与 $D[k + c\theta + cI_c + c\theta I_c(N - M)]\theta T e^{\theta T}$ 同阶, 因此

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \varphi_6(T) = +\infty.$$

(I) $0 < T \leq T_a$

(a) 若 $\varphi_5(T_a) \geq 0$, 则根据中值定理及 $\varphi_5(T)$ 的单调性知, 方程 $\varphi_5(T) = 0$ 在 $(0, T_a]$ 上有唯一解 T_5 , 又因为

$$TVC_5'(T)|_{T=T_5} = \frac{1}{\theta^2 T_5^2} \varphi_5'(T_5) > 0.$$

故 $TVC_5(T)$ 在 $(0, T_a]$ 的最小值点为 T_5 .

(b) 若 $\varphi_5(T_a) < 0$, 则当 $0 < T \leq T_a$ 时, 有

$$TVC_5'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_5(T) < \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_5(T_a) < 0.$$

所以 $TVC_5(T)$ 在 $(0, T_a]$ 上是单调递减函数, 其最小值点为 T_a .

(II) $T_a < T$

(a) 若 $\varphi_6(T_a) \geq 0$, 则当 $T_a < T$ 时, 有

$$TVC_6'(T) = \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_6(T) > \frac{1}{\theta^2 T^2} \varphi_6(T_a) \geq 0.$$

所以 $TVC_6(T)$ 在 $[T_a, +\infty)$ 上是单调递增函数, 其最小值点为 T_a .

(b) 若 $\varphi_6(T_a) < 0$, 则根据中值定理及 $\varphi_6(T)$ 的单调性知, 方程 $\varphi_6(T) = 0$ 在 $[T_a, +\infty)$ 上有唯一解 T_6 , 又因为

$$TVC_6'(T)|_{T=T_6} = \frac{1}{\theta^2 T_6^2} \varphi_6'(T_6) > 0.$$

故 $TVC_6(T)$ 在 $[T_a, +\infty)$ 上的最小值点为 T_6 .

注意到下面等式成立.

$$\varphi_6(T_a) = \varphi_5(T_a)$$

$$= -\theta^2 A + D[h + c\theta + cI_c + c\theta I_c(N - M)](\theta T_a e^{\theta T_a} - e^{\theta T_a} + 1). \quad (3.26)$$

$$TVC_5(T_a) = TVC_6(T_a).$$

令 $\Delta_3 = \varphi_5(T_a)$, 因此, 根据情形 3.3.3 的分析可以得到下面定理 3.3.

定理 3.3 当 $M \leq N$ 时,

① 若 $\Delta_3 \geq 0$, 则 $TVC(T^*) = TVC_5(T_5)$, $T^* = T_5$;

② 若 $\Delta_3 < 0$, 则 $TVC(T^*) = TVC_6(T_6)$, $T^* = T_6$.

其中 T_5 与 T_6 分别是方程 $\varphi_5(T) = 0$ 与 $\varphi_6(T) = 0$ 的解.

3.4 算法步骤

定理3.1、定理3.2与定理3.3表明两货栈的库存系统是存在最优解的,下面是确定最优解的算法步骤.

第一步:输入参数.(I) 若 $M > N$, 则比较 $M - N$ 与 T_a 的大小. 当 $T_a \leq M - N$ 时, 转到第二步. 当 $M - N < T_a$ 时, 转到第三步.(II) 若 $M \leq N$, 则转到第四步.

第二步: 根据(3.19)与(3.20)分别计算 Δ_{11} 与 Δ_{12} .

(1)若 $\Delta_{11} \geq 0$, 则根据(3.16)解方程 $\varphi_1(T) = 0$ 的根为 T_1 , 故 $T^* = T_1$,

$TVC(T^*) = TVC_1(T_1)$. 转到第五步.

(2)若 $\Delta_{11} < 0, \Delta_{12} \geq 0$, 则根据(3.17)解方程 $\varphi_2(T) = 0$ 的根为 T_2 , 故 $T^* = T_2$,

$TVC(T^*) = TVC_2(T_2)$. 转到第五步.

(3)若 $\Delta_{12} < 0$, 则根据(3.18)解方程 $\varphi_3(T) = 0$ 的根为 T_3 , 故 $T^* = T_3$,

$TVC(T^*) = TVC_3(T_3)$, 转到第五步.

第三步: 根据(3.22)与(3.23)分别计算 Δ_{21} 与 Δ_{22} .

(1)若 $\Delta_{21} \geq 0$, 则根据(3.16)解方程 $\varphi_1(T) = 0$ 的解为 T_1 , 故 $T^* = T_1$,

$TVC(T^*) = TVC_1(T_1)$. 转到第五步.

(2)若 $\Delta_{21} < 0, \Delta_{22} \geq 0$, 则根据(3.21)解方程 $\varphi_4(T) = 0$ 的解为 T_4 , 故 $T^* = T_4$,

$TVC(T^*) = TVC_4(T_4)$. 转到第五步.

(3)若 $\Delta_{22} < 0$, 则根据(3.18)解方程 $\varphi_3(T) = 0$ 的解为 T_3 , 故 $T^* = T_3$,

$TVC(T^*) = TVC_3(T_3)$. 转到第五步.

第四步: 根据(3.26)计算 Δ_3 .

(1)若 $\Delta_3 \geq 0$, 则解方程 $\varphi_5(T) = 0$ 的解 T_5 , 故 $T^* = T_5, TVC(T^*) = TVC_5(T_5)$. 转到第五步.

(2)若 $\Delta_3 < 0$, 则解方程 $\varphi_6(T) = 0$ 的解 T_6 , 故 $T^* = T_6, TVC(T^*) = TVC_6(T_6)$.

第五步: 根据(3.3)计算最优订购量 Q^* . 停止.

3.5 数值例子

考虑如下数值例子, 各参数取值情况参照文献[50]参数的取值.

例3.1 假设库存系统参数为: $\theta=0.05, c=100, s=150, h=1, k=3, I_e=0.02, I_c=0.05, M=0.25, N=0.08$. 对于 D, A 与 W 取不同的值, T, Q 与 $TVC(T)$ 的最优值如表3-1所示.

表3-1 例3.1计算结果

情形一 $T_0 > T_a$ 且 $N < M$							
D	A	W	Δ_{11}	Δ_{12}	T^*	Q^*	$TVC(T^*)$
2000	30	150	0.0512	0.6949	$T_1=0.0576$	115.5626	19.5638
2000	140	150	-0.2237	0.4199	$T_2=0.1170$	234.8638	1261.4422
1900	1500	150	-3.6170	-3.0214	$T_3=0.3546$	679.7661	6900.0365
情形二 $T_0 \leq T_a$ 且 $N < M$							
D	A	W	Δ_{21}	Δ_{22}	T^*	Q^*	$TVC(T^*)$
1300	60	300	0.2742	0.7013	$T_1=0.1011$	131.8412	522.5718
1200	300	300	-0.3583	0.1869	$T_4=0.2246$	271.1544	1955.5469
1100	400	300	-1.8910	-1.21330	$T_3=0.3840$	426.5044	3861.2883

例3.2 假设库存系统参数为: $\theta=0.05, a=0.05, c=100, s=150, h=1, k=3, I_e=0.02, I_c=0.05, M=0.20, N=0.25$. 对于 D, A 与 W 取不同的值, T, Q 与 $TVC(T)$ 的最优值如表3-2所示.

表3-2 例3.2计算结果

情形三 $N \geq M$						
D	A	W	Δ_3	T^*	Q^*	$TVC(T^*)$
1500	200	300	0.3226	$T_5=0.1552$	233.7195	2948.8369
1500	900	300	-1.4273	$T_6=0.3389$	512.7887	5933.4266

例3.3 假设库存系统参数为： $c=100, s=150, h=1, k=3, I_e=0.02, I_c=0.05$. 变质率 θ 的变化对最优解的影响如表3-3所示.

表3-3 变质率 θ 对最优解的影响

情形一 $T_0>T_a$ 且 $N<M$								
D	A	W	M	N	θ	T^*	Q^*	$TVC(T^*)$
2000	140	150	0.25	0.08	0.01	$T_2=0.1469$	294.1184	738.1805
					0.02	$T_2=0.1374$	275.2154	880.5893
					0.03	$T_2=0.1295$	259.5453	1014.3957
					0.04	$T_2=0.1228$	246.2809	1140.9951
					0.05	$T_2=0.1171$	234.8639	1261.4422
情形二 $T_0<T_a$ 且 $N<M$								
D	A	W	M	N	θ	T^*	Q^*	$TVC(T^*)$
1200	300	300	0.25	0.08	0.01	$T_3=0.2838$	341.0440	1356.5487
					0.02	$T_3=0.2675$	321.8638	1517.5511
					0.03	$T_4=0.2486$	299.4738	1670.2437
					0.04	$T_4=0.2358$	284.2588	1816.4161
					0.05	$T_4=0.2247$	271.1544	1955.5469
情形三 $N\geq M$								
D	A	W	M	N	θ	T^*	Q^*	$TVC(T^*)$
1500	200	300	0.20	0.25	0.01	$T_3=0.1950$	292.8129	2425.4226
					0.02	$T_3=0.1823$	273.9422	2567.9077
					0.03	$T_3=0.1718$	258.3133	2701.7572
					0.04	$T_3=0.1629$	245.0928	2828.3794
					0.05	$T_3=0.1552$	233.7196	2948.8370

由表3-1与表3-2可知, T, Q 与 $TVC(T)$ 的最优值随着 A 的增加而增加; 由表3-3可知, 最优订货周期 T^* 对参数 θ 的灵敏度较低. 而最优成本 $TVC(T^*)$ 对参数 θ 的灵敏度较高, T, Q 与 $TVC(T)$ 的最优值随着 θ 的增加而增加. 由此管理者应该严格控制订购费, 加强管理减少损耗, 从而可以减少企业库存系统的成本.

3.6 本章小结

文献[52]在二层信用策略下, 分析了两货栈系统的最优订货问题, 但是在其模型中没有考虑物品变质(或损耗)的情形. 物品变质(或损耗)是普遍存在的, 文献[53]在延期支付的情形下, 研究了变质性物品的两货栈库存模型, 但其未考虑零售商允许顾客延期

支付的情形. 本章假设供应商提供给零售商延期支付期, 同时零售商为了刺激销售又提供给顾客延期支付期, 研究了两货栈系统的变质物品库存模型, 并讨论了零售商的最优订购策略是存在且唯一, 然后给出了数值例子. 数值例子结果表明本章的模型是有效的, 可为管理决策者提供参考. 在将来的研究中还可以考虑需求随时间变化而改变, 或是需求受销售价格的影响, 或是需求与零售商给顾客延期支付期正相关的情形.

第四章 基于产品生命周期的变质物品库存模型

按照产品生命周期原理可知,产品在引入期与成长期阶段,市场需求逐步增大,在成熟期阶段,市场需求比较平稳;在衰退期,市场需求逐渐下降.现有的关于库存模型的文献中,分别用常数、线性函数或是指数函数表示处在成长期、成熟期或是衰退期的产品的需求率.例如:经典 EOQ 模型^[65],其中用常数表示需求率;文献[56]假设需求率为单斜坡型函数,建立了相应的库存模型;文献[57]、[58]则考虑物品变质率是 Weibull 函数,建立了需求率为单斜坡型函数库存模型;文献[59]–[61]考虑了需求率为单斜坡型函数,变质率是常数的库存问题;文献[32]假设需求率为线性双斜坡型函数,变质率为常数,缺货时缺货量完全拖后,研究了产品处在成长期,成熟期和衰退期的库存问题;文献[33]建立了需求率为一般单斜坡型函数,变质率是 Weibull 函数,缺货量部分拖后的库存模型,并证明了模型最优解的存在且唯一.

在现实生活中,当缺货发生时,部分顾客是不愿意等待供货的,这样会造成部分缺货量丢失,而文献[32]假设缺货量完全拖后,是不恰当的,随着缺货时间的推移愿意等待供货的顾客越来越少.文献[33]考虑了缺货量拖后率是时间的递减函数,但是其需求率函数只是刻画需求“上升-平稳”的情形,变质率是 Weibull 函数.本章建立了需求率为一般双斜坡型函数、变质率是一般函数且缺货时拖后率是递减函数的库存模型,其中需求率函数拟合了需求在整个生命周期的变化,即“上升-平稳-下降”.然后证明了模型存在唯一的最优解,并给出了确定最优订购策略的算法步骤.

4.1 符号与假设

符号说明

$I(t)$ 表示在时刻 t 的库存水平 $t \in [0, T]$.

T 表示产品生命周期长度(常数).

t_1 表示库存水平降为零的时间(决策变量).

c_1 和 c_2 分别表示每单位时间单位物品的库存维持费和缺货费.

c_3 和 c_4 分别表示每单位物品的变质处置成本费和由于失去销售而产生的机会损失费.

$TC(t_1)$ 表示一个周期 $[0, T]$ 内的库存总成本.

Q 表示每次订货量, S 表示一个周期的最大正库存水平.

模型假设

假设初始库存水平是 S , 受损耗与需求的影响, 库存逐渐减少, 在 $t = t_1$ 时库存为零,

库存在时间 $[t_1, T]$ 内发生短缺且部分拖后.

(1) 提前期为零, 瞬时补货, 补货率无限大.

(2) 需求拖后率 $\beta(x)$ 是等待时间 x 的函数, $\beta(x)$ 满足条件 $\beta(0) = 1$ 且

$$\beta'(x) \leq 0, 0 < \beta(x) \leq 1, \beta(x) + T\beta'(x) \geq 0.$$

(3) 损耗率 $\theta(t)$ 和需求率 $D(t)$ 分别是关于时间 t 的连续函数, 其中 $D(t) > 0$ 是双斜坡型函数

$$D(t) = \begin{cases} f_1(t), & 0 \leq t \leq \lambda, \\ f_1(\lambda), & \lambda \leq t \leq \mu, \\ f_2(t), & \mu \leq t \leq T. \end{cases}$$

其中 $f_1'(t) > 0$, $f_2'(t) < 0$, $f_1(0) > 0$, $f_2(T) > 0$, $f_1(\lambda) = f_2(\mu)$, $D(t)$ 在 $t \in [0, T]$ 上是连续函数.

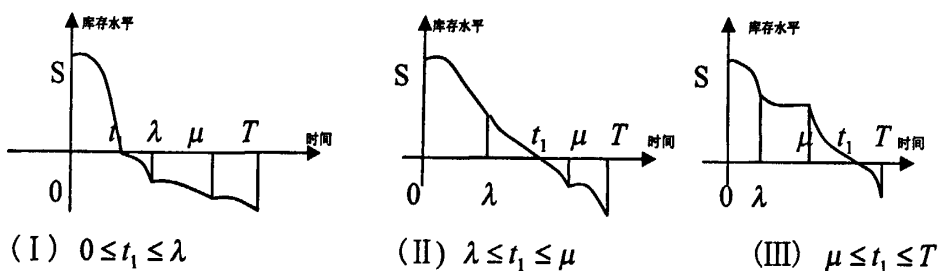


图 4.1 库存水平变化图示

4.2 模型建立

受变质和需求的影响, 库存在 $[0, t_1]$ 内逐渐减少, 在 $t = t_1$ 时刻库存降为零, 在 $[t_1, T]$ 内发生缺货且部分短缺量拖后, 所以 t 时刻的库存水平 $I(t)$ 应满足以下微分方程

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} + \theta(t)I(t) &= -D(t), & 0 \leq t \leq t_1, I(t_1) &= 0. \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -D(t)\beta(T-t), & t_1 \leq t \leq T, I(t_1) &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

根据需求率 $D(t)$ 中的参数 λ, μ 与 t_1 之间的大小关系, 需分三种情形 (1) $0 \leq t_1 \leq \lambda$,
(2) $\lambda \leq t_1 \leq \mu$ 与 (3) $\mu \leq t_1 \leq T$ 来讨论库存系统的相关成本.

情形 4.2.1 $0 \leq t_1 \leq \lambda$

此时 (4.1) 为

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} + \theta(t)I(t) &= -f_1(t), & 0 \leq t \leq t_1, I(t_1) &= 0. \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -f_1(t)\beta(T-t), & t_1 \leq t \leq \lambda, I(t_1) &= 0. \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -f_1(\lambda)\beta(T-t), & \lambda \leq t \leq \mu, I(\lambda^-) &= I(\lambda^+). \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -f_2(t)\beta(T-t), & \mu \leq t \leq T, I(\mu^-) &= I(\mu^+). \end{aligned}$$

分别求解上述微分方程, 得

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{\int_0^{\theta(x)} dx} \int_1^t f_1(x) e^{\int_0^{\theta(u)} du} dx, & 0 \leq t \leq t_1. \\ I(t) &= -\int_1^t (x)\beta(T-x)dx, & t_1 \leq t \leq \lambda. \\ I(t) &= -f_1(\lambda) \int_1^t \beta(T-x)dx - \int_1^{t_1} f_1(x)\beta(T-x)dx, & \lambda \leq t \leq \mu. \\ I(t) &= -\int_1^t f_2(x)\beta(T-x)dx - f_1(\lambda) \int_1^t \beta(T-x)dx - \int_1^{t_1} f_1(x)\beta(T-x)dx, & \mu \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.2)$$

根据 (4.2) 可知, 在 $[0, t_1]$ 内物品变质损失费 D_1 及库存维持费 H_1 分别为

$$D_1 = c_3 [I(0) - \int_0^{t_1} f_1(t)dt] = c_3 \left[\int_0^{t_1} f_1(t) e^{\int_0^{\theta(x)} dx} dt - \int_0^{t_1} f_1(t)dt \right]. \quad (4.3)$$

$$H_1 = c_1 \int_0^{t_1} I(t)dt = c_1 \int_0^{t_1} e^{-\int_0^{\theta(x)} dx} \left[\int_1^t f_1(x) e^{\int_0^{\theta(u)} du} dx \right] dt. \quad (4.4)$$

在 $[t_1, T]$ 内, 缺货损失费 I_1 及因失去销售而产生的机会损失费 L_1 分别为

$$\begin{aligned} I_1 &= c_2 \left[\int_{t_1}^T \int_1^t f_1(x)\beta(T-x)dxdt + \int_{t_1}^T [f_1(\lambda) \int_1^t \beta(T-x)dx - \int_1^{t_1} f_1(x)\beta(T-x)dx]dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^T \left[\int_1^t f_2(x)\beta(T-x)dx - f_1(\lambda) \int_1^t \beta(T-x)dx - \int_1^{t_1} f_1(x)\beta(T-x)dx \right] dt \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$L_1 = c_4 \left[\int_1^T [1 - \beta(T-t)] f_1(t) dt + f_1(\lambda) \int_\lambda^\mu [1 - \beta(T-t)] dt + \int_\mu^T [1 - \beta(T-t)] f_2(t) dt \right]. \quad (4.6)$$

情形 4.2.2 $\lambda \leq t_1 \leq \mu$

此时(4.1)为

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} + \theta(t)I(t) &= -f_1(t), \quad 0 \leq t \leq \lambda, \quad I(\lambda^-) = I(\lambda^+). \\ \frac{dI(t)}{dt} + \theta(t)I(t) &= -f_1(\lambda), \quad \lambda \leq t \leq t_1, \quad I(t_1) = 0. \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -f_1(\lambda)\beta(T-t), \quad t_1 \leq t \leq \mu, \quad I(t_1) = 0. \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -f_2(t)\beta(T-t), \quad \mu \leq t \leq T, \quad I(\mu^-) = I(\mu^+). \end{aligned}$$

解上述微分方程, 得

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{-\int_0^t \theta(x) dx} \left[\int_1^t f_1(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx + D_0 \int_\lambda^t e^{\int_0^x \theta(u) du} dx \right], \quad 0 \leq t \leq \lambda. \\ I(t) &= f_1(\lambda) e^{-\int_0^t \theta(x) dx} \int_1^t e^{\int_0^x \theta(u) du} dx, \quad \lambda \leq t \leq t_1. \\ I(t) &= -f_1(\lambda) \int_1^t \beta(T-x) dx, \quad t_1 \leq t \leq \mu. \\ I(t) &= -\int_\mu^t f_2(x) \beta(T-x) dx - f_1(\lambda) \int_1^\mu \beta(T-x) dx, \quad \mu \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.7)$$

根据(4.7)可知, 在 $[0, t_1]$ 内物品变质损失费 D_2 及库存维持费 H_2 分别为

$$\begin{aligned} D_2 &= c_3 [I(0) - \int_1^t f_1(t) dt] \\ &= c_3 \left[\int_1^t f_1(t) e^{\int_0^t \theta(x) dx} dt + f_1(\lambda) \int_\lambda^t e^{\int_0^t \theta(x) dx} dt - \int_1^t f_1(t) dt - f_1(\lambda)(t_1 - \lambda) \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} H_2 &= c_1 \int_1^t I(t) dt \\ &= c_1 \int_1^t e^{-\int_0^t \theta(x) dx} \left[\int_1^t f_1(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx + f_1(\lambda) \int_\lambda^t e^{\int_0^x \theta(u) du} dx \right] dt \\ &\quad + c_1 f_1(\lambda) \int_1^t e^{-\int_0^t \theta(x) dx} \int_1^t e^{\int_0^x \theta(u) du} dx dt. \end{aligned} \quad (4.9)$$

在 $[t_1, T]$ 内的缺货损失费 I_2 及因失去销售而产生的机会损失费 L_2 分别为

$$I_2 = c_2 f_1(\lambda) \int_1^\mu \int_1^\mu \beta(T-x) dx dt + c_2 \int_\mu^T \left[\int_1^\mu f_2(x) \beta(T-x) dx + f_1(\lambda) \int_1^\mu \beta(T-x) dx \right] dt. \quad (4.10)$$

$$L_2 = c_4 [f_1(\lambda) \int_1^\mu [1 - \beta(T-t)] dt + \int_\mu^T [1 - \beta(T-t)] f_2(t) dt]. \quad (4.11)$$

情形 4.2.3 $\mu \leq t_1 \leq T$

此时 (4.1) 为

$$\begin{aligned}\frac{dI(t)}{dt} + \theta(t)I(t) &= -f_1(t), \quad 0 \leq t \leq \lambda, \quad I(\lambda^-) = I(\lambda^+). \\ \frac{dI(t)}{dt} + \theta(t)I(t) &= -f_1(\lambda), \quad \lambda \leq t \leq \mu, \quad I(\mu^-) = I(\mu^+). \\ \frac{dI(t)}{dt} + \theta(t)I(t) &= -f_2(t), \quad \mu \leq t \leq t_1, \quad I(t_1) = 0. \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -f_2(t)\beta(T-t), \quad t_1 \leq t \leq T, \quad I(t_1) = 0.\end{aligned}$$

解上述微分方程, 得

$$\begin{aligned}I(t) &= e^{-\int_0^t \theta(x) dx} \left[\int_0^t f_1(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx + f_1(\lambda) \int_\lambda^t e^{\int_0^x \theta(u) du} dx + \int_\mu^t f_2(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx \right], \quad 0 \leq t \leq \lambda. \\ I(t) &= e^{-\int_0^t \theta(x) dx} \left[f_1(\lambda) \int_\lambda^t e^{\int_0^x \theta(u) du} dx + \int_\mu^t f_2(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx \right], \quad \lambda \leq t \leq \mu. \\ I(t) &= e^{-\int_0^t \theta(x) dx} \int_\mu^t f_2(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx, \quad \mu \leq t \leq t_1. \\ I(t) &= -\int_t^{t_1} f_2(x) \beta(T-x) dx, \quad t_1 \leq t \leq T.\end{aligned} \quad (4.12)$$

根据 (4.12) 可知, 在 $[0, t_1]$ 内物品变质损失费 D_3 及库存维持费 H_3 分别为

$$\begin{aligned}D_3 &= c_3 [I(0) - \int_0^{t_1} f_1(t) dt] \\ &= c_3 \left[\int_0^t f_1(t) e^{\int_0^t \theta(x) dx} dt + f_1(\lambda) \int_\lambda^t e^{\int_0^t \theta(x) dx} dt + \int_\mu^t f_2(t) e^{\int_0^t \theta(x) dx} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_1} f_1(t) dt - f_1(\lambda)(\mu - \lambda) - \int_\mu^{t_1} f_2(t) dt \right].\end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}H_3 &= c_1 \int_0^{t_1} I(t) dt \\ &= c_1 \int_0^t e^{-\int_0^t \theta(x) dx} \left[\int_0^t f_1(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx + f_1(\lambda) \int_\lambda^t e^{\int_0^x \theta(u) du} dx + \int_\mu^t f_2(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx \right] dt \\ &\quad + c_1 \int_\lambda^\mu e^{-\int_0^t \theta(x) dx} \left[f_1(\lambda) \int_\lambda^t e^{\int_0^x \theta(u) du} dx + \int_\mu^t f_2(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx \right] dt \\ &\quad + c_1 \int_\mu^{t_1} e^{-\int_0^t \theta(x) dx} \int_\mu^t f_2(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx dt.\end{aligned} \quad (4.14)$$

在 $[t_1, T]$ 内缺货损失费 I_3 及因失去销售而产生的机会损失费 L_3 分别为

$$I_3 = c_2 \int_{t_1}^T \left[\int_{t_1}^t f_2(x) \beta(T-x) dx \right] dt. \quad (4.15)$$

$$L_3 = c_4 \int_{t_1}^T [1 - \beta(T-t)] f_2(t) dt. \quad (4.16)$$

在一个订货周期 $[0, T]$ 内, 库存系统成本=库存维持费+缺货损失+变质损失+机会损失费. 因此, 库存系统的总成本函数为

$$TC(t_1) = \begin{cases} TC_1(t_1), & 0 \leq t_1 \leq \lambda; \\ TC_2(t_1), & \lambda \leq t_1 \leq \mu; \\ TC_3(t_1), & \mu \leq t_1 \leq T. \end{cases} \quad (4.17)$$

其中,

$$\begin{aligned} TC_1(t_1) = & c_1 \int_0^t e^{-\int_0^x \theta(x) dx} \left[\int_0^x f_1(x) e^{\int_0^x \theta(\mu) d\mu} dx \right] dt + c_2 \left\{ \int_0^t \int_0^x f_1(x) \beta(T-x) dx dt \right. \\ & + f_1(\lambda) \int_0^t \left[\int_0^x \beta(T-x) dx + \int_0^x f_1(x) \beta(T-x) dx \right] dt \\ & + \left. \int_0^t \left[\int_0^x f_2(x) \beta(T-x) dx + f_1(\lambda) \int_0^x \beta(T-x) dx + \int_0^x f_1(x) \beta(T-x) dx \right] dt \right\} \\ & + c_3 \left[\int_0^t f_1(t) e^{\int_0^t \theta(x) dx} dt - \int_0^t f_1(t) dt \right] + c_4 \left\{ \int_0^t [1 - \beta(T-t)] f_1(t) dt \right. \\ & + f_1(\lambda) \int_0^t [1 - \beta(T-t)] dt + \left. \int_0^t [1 - \beta(T-t)] f_2(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} TC_2(t_1) = & c_1 \int_0^t e^{-\int_0^x \theta(x) dx} \left[\int_0^x f_1(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx + f_1(\lambda) \int_0^x e^{\int_0^x \theta(u) du} dx \right] dt \\ & + c_1 f_1(\lambda) \int_0^t e^{-\int_0^x \theta(x) dx} \int_0^x e^{\int_0^x \theta(u) du} dx dt + c_2 f_1(\lambda) \int_0^t \int_0^x \beta(T-x) dx dt \\ & + c_2 \int_0^t \left[\int_0^x f_2(x) \beta(T-x) dx + f_1(\lambda) \int_0^x \beta(T-x) dx \right] dt + c_3 \left[\int_0^t f_1(t) e^{\int_0^t \theta(x) dx} dt \right. \\ & + f_1(\lambda) \int_0^t e^{\int_0^t \theta(x) dx} dt - \int_0^t f_1(t) dt - f_1(\lambda)(t_1 - \lambda) \left. \right] + c_4 \left[f_1(\lambda) \int_0^t [1 - \beta(T-t)] dt \right. \\ & + \left. \int_0^t [1 - \beta(T-t)] f_2(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} TC_3(t_1) = & c_1 \int_0^t e^{-\int_0^x \theta(x) dx} \left[\int_0^x f_1(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx + f_1(\lambda) \int_0^x e^{\int_0^x \theta(u) du} dx + \int_0^x f_2(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx \right] dt \\ & + c_1 \int_0^t e^{-\int_0^x \theta(x) dx} \left[f_1(\lambda) \int_0^x e^{\int_0^x \theta(u) du} dx + \int_0^x f_2(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx \right] dt \\ & + c_1 \int_0^t e^{-\int_0^x \theta(x) dx} \int_0^x f_2(x) e^{\int_0^x \theta(u) du} dx dt + c_2 \int_0^t \left[\int_0^x f_2(x) \beta(T-x) dx \right] dt \\ & + c_3 \left[\int_0^t f_1(t) e^{\int_0^t \theta(x) dx} dt + f_1(\lambda) \int_0^t e^{\int_0^t \theta(x) dx} dt + \int_0^t f_2(t) e^{\int_0^t \theta(x) dx} dt - \int_0^t f_1(t) dt \right. \\ & \left. - f_1(\lambda)(\mu - \lambda) - \int_0^t f_2(t) dt \right] + c_4 \int_0^t [1 - \beta(T-t)] f_2(t) dt. \end{aligned} \quad (4.20)$$

我们的目的是求出最优的 t_1^* 使得总成本 $TC(t_1^*)$ 最小, 从而确定最优的订购数量 Q^* .
本章的库存模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & TC(t_1) \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq t_1 \leq T. \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.3 理论结果及算法步骤

在这一节中, 我们将证明模型 (4.21) 存在唯一的最优解 t_1^* , 并给出最优订购策略的计算方法.

设 $0 \leq t_1 \leq T$, 令

$$\begin{aligned} g(t_1) = & c_1 e^{\int_0^{t_1} \theta(x) dx} \int_{t_1}^T e^{-\int_0^{\theta(x)} dx} dt + c_3 (e^{\int_0^{t_1} \theta(x) dx} - 1) \\ & - c_2 (T - t_1) \beta(T - t_1) - c_4 [1 - \beta(T - t_1)]. \end{aligned}$$

可得下面结论.

引理 4.1 如果 $\beta(0) = 1$ 且对 $\forall x \in [0, T]$ 有 $\beta'(x) \leq 0$, $0 < \beta(x) \leq 1$, $\beta(x) + T\beta'(x) \geq 0$,

那么方程 $g(t_1) = 0$ 在 $(0, T)$ 内有唯一的解.

证明: 求函数 $g(t_1)$ 的导数, 得

$$\begin{aligned} g'(t_1) = & c_1 \theta(t_1) e^{\int_0^{t_1} \theta(x) dx} \int_{t_1}^T e^{-\int_0^{\theta(x)} dx} dt + c_1 + c_3 \theta(t_1) e^{\int_0^{t_1} \theta(x) dx} \\ & + c_2 [\beta(T - t_1) + T\beta'(T - t_1)] - (c_2 + c_4) \beta'(T - t_1). \end{aligned}$$

因为对 $\forall x \in [0, T]$ 有 $\beta'(x) \leq 0$, $\beta(x) + T\beta'(x) \geq 0$, 所以 $g'(t_1) > 0$, 可知 $g(t_1)$ 在 $[0, T]$ 上是单调递增函数. 又由 $\beta(0) = 1$, $0 < \beta(x) \leq 1$, 得 $g(0) = -c_2 T\beta(T) - c_4 [1 - \beta(T)] < 0$. 显然有

$$g(T) = c_1 e^{\int_0^T \theta(x) dx} \int_T^T e^{-\int_0^{\theta(x)} dx} dt + c_3 (e^{\int_0^T \theta(x) dx} - 1) > 0.$$

根据中值定理及 $g(t_1)$ 的单调性, 可知方程 $g(t_1) = 0$ 在 $(0, T)$ 存在唯一解 t_1^* . $\square$

引理 4.2 如果 $\beta(0) = 1$ 且对 $\forall x \in [0, T]$ 有 $\beta'(x) \leq 0$, $0 < \beta(x) \leq 1$, $\beta(x) + T\beta'(x) \geq 0$,

那么 $TC_i(t_1)$ ($i=1,2,3$) 在 $(0, T)$ 内存在唯一的最小值解.

证明: 分别求 $TC_1(t_1)$, $TC_2(t_1)$ 与 $TC_3(t_1)$ 关于 t_1 的一阶导数, 得

$$TC_1'(t_1) = f_1(t_1)g(t_1).$$

$$TC_2'(t_1) = f_1(\lambda)g(t_1).$$

$$TC_3'(t_1) = f_2(t_1)g(t_1).$$

令 $TC_i'(t_1) = 0$ ($i=1,2,3$), 由于 $f_1(t_1) > 0, f_2(t_1) > 0, f_1(\lambda) > 0$, 必有 $g(t_1) = 0$, 根据引理 4.1 知方程 $g(t_1) = 0$ 在 $(0, T)$ 有唯一解 t_1^* . 又因为

$$TC_1''(t_1) \Big|_{t_1=t_1^*} = f_1(t_1^*)g'(t_1^*) > 0.$$

$$TC_2''(t_1) \Big|_{t_1=t_1^*} = f_1(\lambda)g'(t_1^*) > 0.$$

$$TC_3''(t_1) \Big|_{t_1=t_1^*} = f_2(t_1^*)g'(t_1^*) > 0.$$

因此, t_1^* 就是 $TC_i(t_1)$ ($i=1,2,3$) 唯一的最小值解. $\square$

定理 4.1 如果 $\beta(0) = 1$ 且对 $\forall x \in [0, T]$ 有 $\beta'(x) \leq 0$, $0 < \beta(x) \leq 1$, $\beta(x) + T\beta'(x) \geq 0$,

那么 $TC(t_1)$ 在 $(0, T)$ 内存在唯一的最小值 $TC(t_1^*)$.

证明: 注意到

$$TC_1(\lambda) = TC_2(\lambda), TC_2(\mu) = TC_3(\mu), TC_1'(\lambda) = TC_2'(\lambda), TC_2'(\mu) = TC_3'(\mu).$$

即 $TC(t_1)$ 在 $[0, T]$ 是连续函数, 在 $(0, T)$ 内可导. 根据引理 4.2 可知

$$TC''(t_1^*) = D(t_1^*)g'(t_1^*) > 0.$$

所以 t_1^* 是 $TC(t_1)$ 在 $(0, T)$ 内的唯一最小值点.

由引理 4.2 得, 若 $0 < t_1^* \leq \lambda$, 则 $TC(t_1^*) = TC_1(t_1^*)$; 若 $\lambda \leq t_1^* \leq \mu$, 则 $TC(t_1^*) = TC_2(t_1^*)$;

若 $\mu \leq t_1^* \leq T$, $TC(t_1^*) = TC_3(t_1^*)$. $\square$

根据定理 4.1, 可以得到确定最优订货策略的计算步骤.

第一步: 求方程 $g(t_1) = 0$ 在区间 $(0, T)$ 上的解 t_1^* .

第二步: (1) 如果 $t_1^* \leq \lambda$, 则根据 (4.18) 得最小总成本 $TC(t_1^*) = TC_1(t_1^*)$, 根据 (4.2)

可计算得最优订购量 Q^* .

(2) 如果 $\lambda \leq t_1^* \leq \mu$, 则根据 (4.19) 得最小总成本 $TC(t_1^*) = TC_2(t_1^*)$, 根据 (4.7) 可计

算得最优订购量 Q^* .

(3) 如果 $\mu \leq t_1^* \leq T$, 则根据(4. 20)得最小总成本 $TC(t_1^*) = TC_3(t_1^*)$, 根据(4. 12)可计算得最优订购量 Q^* .

第三步: 停止.

4.4 数值例子

例 4.1 假设需求函数 $D(t) = \begin{cases} a_1 + b_1 t, & 0 \leq t \leq \lambda \\ a_1 + b_1 \lambda, & \lambda \leq t \leq \mu, \\ a_2 - b_2 t, & \mu \leq t \leq T \end{cases}$, $\beta(x) = \frac{1}{1 + 0.01x}$, $T = 12$. $a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4, \theta(t), \lambda$ 与 μ 的取值如表 4-1 中所示, 在 MATLAB7.0 的运行环境下, 计算结果见表 4-1.

表 4-1 例 4.1 计算结果

参数											计算结果		
c_1	c_2	c_3	c_4	$\theta(t)$	λ	μ	a_1	b_1	a_2	b_2	t_1^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
10	5	3	12	0.2	4	10	100	5	220	5	2.945	1585.8	29570
10	5	3	12	0.2	2	10	100	5	160	5	2.945	1373.3	27967
2	10	3	10	0.4	2	4	100	4	112	1	5.432	2740.0	49810

例 4.2 假设需求函数 $D(t) = \begin{cases} ae^{bt}, & 0 \leq t \leq \lambda \\ ae^{b\lambda}, & \lambda \leq t \leq \mu, \\ ae^{b(\lambda + \mu - t)}, & \mu \leq t \leq T \end{cases}$, $\theta(t) = 0.002t$, $\beta(x) = e^{-0.2x}$, $T = 1$. $a, b, c_1, c_2, c_3, c_4, \lambda$ 与 μ 的取值如表 4-2 中所示. 在 MATLAB7.0 的运行环境下, 计算结果见表 4-2.

表 4-2 例 4.2 计算结果

参数								计算结果		
c_1	c_2	c_3	c_4	λ	μ	a	b	t_1^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
3	15	5	20	0.2	0.6	3	4.5	0.8604	5.2908	6.6193
3	15	5	20	0.2	0.6	5	7	0.8604	13.0111	16.0389
2	5	4	10	0.2	0.8	3	4.5	0.7706	6.3434	1.9633

例 4.3 假设需求函数 $D(t)=\begin{cases} a_1+b_1t, & 0\leq t\leq \lambda \\ a_1+b_1\lambda, & \lambda\leq t\leq \mu, \\ a_2-b_2t, & \mu\leq t\leq T \end{cases}$ $\beta(x)=\frac{1}{1+0.01x}$, $T=12$, $a_1=100$,

$b_1=5$, $a_2=220$, $b_2=5$, $c_1=10$, $c_2=5$, $c_3=3$, $c_4=12$, $\theta(t)=0.2$, $\lambda=4$. 参数 μ 的变化对最优订购策略的影响如表 4-3 所示.

表 4-3 例 4.3 计算结果			
计算结果			
μ	t_1^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
6	2.945	1662.2	31833
6.5	2.945	1644.5	31277
7	2.945	1629.1	30822
7.5	2.945	1615.9	30456
8	2.945	1605.2	30169
8.5	2.945	1596.7	29948
9	2.945	1590.7	29783
9.5	2.945	1587.0	29661
10	2.945	1585.8	29570

例 4.4 假设需求函数 $D(t)=\begin{cases} a_1+b_1t, & 0\leq t\leq \lambda \\ a_1+b_1\lambda, & \lambda\leq t\leq \mu, \\ a_2-b_2t, & \mu\leq t\leq T \end{cases}$ $\beta(x)=\frac{1}{1+0.01x}$, $T=12$, $a_1=100$,

$b_1=5$, $a_2=220$, $b_2=5$, $c_1=10$, $c_2=5$, $c_3=3$, $c_4=12$, $\theta(t)=0.2$, $\mu=10$. 参数 λ 的变化对最优订购策略的影响如表 4-4 所示.

表 4-4 例 4.4 计算结果			
计算结果			
λ	t_1^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
3	2.945	1459.2	29921
3.5	2.945	1515.5	29860
4	2.945	1585.8	29570
4.5	2.945	1672.0	29039
5	2.945	1776.2	28253
5.5	2.945	1900.5	27201
6	2.945	2047.4	25870

例 4.3 的数值试验表明, 当参数 μ 的取值逐渐增加时, 最佳缺货时间点 t_1^* 没有变化, 而最佳订购量 Q^* 与最小总成本 $TC(t_1^*)$ 逐渐变小; 例 4.4 的数值试验表明, 当参数 λ 的取值逐渐增加时, 最佳订购量 Q^* 也逐渐增加, 最小总成本 $TC(t_1^*)$ 逐渐变小, 而最佳缺货时间点 t_1^* 没有变化. 例 4.3 与例 4.4 的计算结果可以理解为: 当成熟期的时间越长, 最优订购量与最优总成本也越小. 当成长期的时间越长, 最优订购量越大, 而最优总成本越小, 所以当成长期阶段较长时, 零售商应该增加订购量.

4.5 本章小结

本章研究了需求率是一般双斜坡型函数, 缺货量部分拖后的变质物品库存模型, 其中变质率是一般函数, 并证明了模型最优解的存在性及唯一性, 同时给出了寻求最优订货策略的方法与数值例子. 本章的模型主要从三方面改进了文献[32]的模型: (1)把模型[32]的 Trapezoidal 型函数需求率扩展为一般双斜坡型函数需求率; (2)把模型[32]的常数变质率推广为随时间变化的一般函数; (3)把模型[32]的缺货量完全拖后改进为缺货量拖后率是时间的递减函数. 准确地预测需求是库存管理的重要内容之一, 而影响需求的因素有很多, 将来的研究方向可以将这种双斜坡型函数的需求率与价格、存货水平结合起来, 研究其对库存成本或是利润的影响.

结论

库存管理的目的是满足顾客需求的前提下,通过对企业的库存水平进行有效的控制,尽可能的降低库存管理费用.影响企业库存管理费用的因素是多方面的,本文从二层信用支付、存货影响销售率与产品的生命周期等方面考虑,建立了几类极小化成本的库存模型,并利用最优化方法对模型性质进行分析,得出一些有用的研究性结论.主要完成了以下几个工作.

(一)把存货影响销售率与二层信用支付策略结合起来,建立了极小化成本的库存模型,证明了零售商最优订购策略是存在且唯一的,给出了确定最优订货策略的算法,并用数值例子验证了模型的有效性.

(二)假设零售商的仓库容量是有限的,研究了在二层信用策略下的两货栈系统的库存模型,其中需求率与变质率均为常数,本章的模型是对文献[52]的模型进行扩展,并讨论了模型最优解的存在性及唯一性,最后给出确定最优订购策略的算法步骤与数值例子.

(三)根据产品在其生命周期内的需求变化具有“上升-平稳-下降”的特性,采用双斜坡函数刻画需求率,建立了一类采用先订货后缺货策略的易变质物品库存模型,其中拖后率和变质率均为时间的一般函数,证明了存在唯一的最佳缺货时间点,从而可以得出最佳的订货量,并给出了确定最优订货策略的方法.

本文只对几类经济订购批量模型进行初步的研究,建立了极小化成本的库存模型,实际上影响库存成本的因素很多,仍然有很多问题需要进一步的研究.

(一)需求是影响库存系统的重要因素,在建模时可考虑需求受价格、广告促销等因素的影响来进行建模,研究如何定价订货使得零售商获利最大,或者考虑多周期的库存模型.

(二)在基于二层信用策略的库存模型中,可考虑货币的时间价值,价格影响需求率或随机需求的情形,或在模糊环境下考虑允许缺货的情形进行建模.

参考文献

- [1] 徐晨. 物流与供应链管理 [M]. 北京, 北京大学出版社, 2008, 9.
- [2] 陈廷斌, 吴贇书. 供应链与物流管理 [M]. 北京, 清华大学出版社, 2008, 11.
- [3] 孔庆善. 运作管理 [M]. 北京, 科学出版社, 2006, 12.
- [4] S. K. Goyal. Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments [J]. *Journal of Operational Research Society*, 1985, 36: 335-338.
- [5] Y.F. Huang. Optimal retailer's ordering policies in the EOQ model under trade credit financing [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2003, 54: 1011-1015.
- [6] 邱昊, 梁樑, 余玉刚等. 基于订货量的延期付款条件下三阶段经济订货模型 [J]. *系统管理学报*, 2007, 6: 669-672.
- [7] Yung-Fu Hung. Optimal retailer's replenishment decisions in the EPQ model under two levels of trade credit Policy [J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 176: 1577-1591.
- [8] Jinn-Tsair Teng, Chun-Tao Chang. Optimal manufacturer's replenishment policies in the EPQ model under two levels of trade credit policy [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 195: 358-363.
- [9] Jui-Jung Liao. An EOQ model noninstantaneous receipt and exponentially deteriorating items under two-level trade credit [J]. *International journal of production economics*, 2008, 113: 852-861.
- [10] Yung-Fu Huang, Kuang-Hua Hsu. An EOQ model under retailer partial trade credit policy in supply chain [J]. *International journal of production economics*, 2008, 112: 655-664.
- [11] Jinn-Tsair Teng. Optimal ordering policies for a retailer who offers distinct trade credits to its good and bad credit customers [J]. *International journal of production economics*, 2009, 119: 415-423.
- [12] Chandra K. Jaggi, S. K. Goyal, S. K. Goel. Retailer's optimal replenishment decisions with credit-linked demand under permissible delay in payments [J]. *European Journal of Operational Research*, 2008, 190(1): 130-135.

- [13] A. Thangam, R. Uthayakumar. Two-echelon trade credit financing for perishable items in a supply chain when demand depends on both selling price and credit period [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2009, 57(3): 773-786.
- [14] 张华芳, 戴更新, 秦君雪等. 信用支付条件下需求不确定的最优订购模型 [J]. *青岛大学学报(自然科学版)*, 2009, 2(22): 77-80.
- [15] Timothy L. Urban. Inventory models with inventory-level-dependent demand: A comprehensive review and unifying theory [J]. *European Journal of Operational Research*, 2005, 162: 792-804.
- [16] Chung-Yuan Dye, Liang-Yuh Ouyang. An EOQ model for perishable items under stock-dependent selling rate and time-dependent partial backlogging [J]. *European Journal of Operational Research*, 2005, 163: 776-783.
- [17] 罗兵, 杨帅, 李宇雨. 变质物品在存货影响销售率且需求和采购价均为时变时的 EOQ 模型 [J]. *工业工程与管理*, 2005, 3:40-44.
- [18] Yong-Wu Zhou, Shan-Lin Yang. A two-warehouse inventory model for items with stock-level-dependent demand rate [J]. *Int. J. Production Economics*, 2005, 95: 215-228.
- [19] Fariborz Jolai, R. Tavakkoli-Moghaddam, M. Rabbani, M.R. Sadoughian. An economic production lot size model with deteriorating items, stock-dependent demand inflation, and partial backlogging [J], *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 181: 380-389.
- [20] Kuo-Lung Hou. An inventory model for deteriorating items with stock-dependent consumption rate and shortages under inflation and time discounting [J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 168: 463-474.
- [21] Kun-Shan Wu, Liang-Yuh Ouyang, Chih-Te Yang. An optimal replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging [J]. *Int. J. Production Economics*, 2006, 101: 369-384.
- [22] Hesham K. Alfares. Inventory model with stock-level dependent demand rate and variable holding cost [J]. *Int. J. Production Economics*, 2007, 108: 259-265.
- [23] Timothy L. Urban, An extension of inventory models with discretely variable holding costs [J]. *Int. J. Production Economics*, 2008, 114: 399-403.
- [24] Yong-Wu Zhou, Jie Min, Suresh K. Goyal. Supply-chain coordination under an inventory-level-dependent demand rate [J]. *Int. J. Production Economics*, 2008, 113:

518-527.

- [25] Hardik Soni, Nita H. Shah, Optimal ordering policy for stock-dependent demand under progressive payment scheme [J], European Journal of Operational Research. 2008, 184: 91-100.
- [26] 张旭梅, 邱晗光, 陈军. 补货能力影响部分短缺量拖后率的边补货边需求 EOQ 模型 [J]. 中国管理科学, 2008, 16(1): 96-103.
- [27] 韩松. 一类需求符合产品寿命周期存贮模型的最优解 [J]. 系统工程, 2001, 19(4): 13-15.
- [28] 朱传华, 骆建文. 需求符合市场生命周期变化的易腐品库存模型 [J]. 工业工程, 2006, 9(4): 58-60.
- [29] S. Panda, S. Senapati, M. Basu. Optimal replenishment policy for perishable seasonal products in a season with ramp-type time dependent demand [J]. Computers & Industrial Engineering, 2008, 54: 301-314.
- [30] Cheng-Kang Chen, Chechen Liao, Tzu-Chun Weng. Optimal replenishment policies for the case of a demand function with product-life-cycle shape in a finite planning horizon [J]. Expert Systems with Applications, 2007, 32: 65-67.
- [31] S.K. Manna, K.S. Chaudhuri. An EOQ model with ramp type demand rate, time dependent deterioration rate, unit production cost and shortages [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 171: 557-566.
- [32] Mingbao Cheng, Guoqing Wang, A note on the inventory model for deteriorating items with trapezoidal type demand rate, Computers & Industrial Engineering [J], 2009, 56(4) : 1296-1300.
- [33] K. Skouri, I. Konstantaras, S. Papachristos, I. Ganas. Inventory models with ramp type demand rate, partial backlogging and Weibull deterioration rate [J]. European Journal of Operational Research, 2009, 192: 79-92.
- [34] 杨树, 梁樑, 董骏峰. 延期支付条件下单个生产商多个销售商库存模型 [J]. 系统工程, 2007, 4(25): 9-14.
- [35] 查迎春, 华中生, 吴杰. 分段的延期支付条件下临时订货策略分析 [J]. 管理学报, 2008, 5(2): 188-192.
- [36] Jui-Jung Liao. On an EPQ model for deteriorating items under permissible delay in

- payments [J]. Applied Mathematical Modelling, 2007, 31: 393-403.
- [37] 徐贤浩, 李锐娟. 存货影响销售率的短生命周期物品库存管理 [J]. 系统管理学报, 2007, 16(2): 135-138.
- [38] Hardik Soni, Nita H. Shah. Optimal ordering policy for stock-dependent demand under progressive payment Scheme [J]. European Journal of Operational Research, 2008, 184: 91-100.
- [39] 陈六新, 李军, 谢天帅. 价格和库存均影响需求、部分拖后供给的易变质品生产库存 [J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(8): 61-67.
- [40] 闵杰, 周永务. 存货影响销售率的非立即变质物品的库存模型 [J]. 系统工程学报, 2009, 24(2): 198-204.
- [41] 杨善林, 周永务. 两货栈库存模型: 考虑时变需求和价格折扣 [J]. 系统工程学报, 2003, 18(6): 498-505.
- [42] 杨志林, 周永务, 杨善林. 带有两货栈具有抛物型需求的变质性物品经济批量问题 [J]. 系统工程理论与实践, 2005, 14(4): 376-378.
- [43] Hui-Ling Yang. Two-warehouse partial backlogging inventory models for deteriorating items under inflation, Int. J. Production Economics [J]. 2006, 103: 362-370.
- [44] Manas Kumar Maiti, anoranjana Maiti. fuzzy inventory model with two warehouses under possibility constraints [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157: 52-73.
- [45] Manas Kumar Maiti. Fuzzy inventory model with two warehouses under possibility measure on fuzzy goal [J]. European Journal of Operational Research, 2008, 188: 746-774.
- [46] Jayanta Kumar Dey, Shyamal Kumar Mondal, Manoranjan Maiti. Two storage inventory problem with dynamic demand and interval valued lead-time over finite time horizon under inflation and time-value of money [J]. European Journal of Operational Research, 2008, 185: 170-194.
- [47] Tsu-Pang Hsieh, Chung-Yuan Dye, Liang-Yuh Ouyang. Determining optimal lot size for a two-warehouse system with deterioration and shortages using net present value [J]. European Journal of Operational Research, 2008, 191: 182-192.
- [48] Chun Chen Lee, Shu-Lu Hsu. A two-warehouse production model for deteriorating inventory items with time-dependent demands [J]. European Journal of Operational

Research, 2009, 194: 700-710.

- [49] Huang, Y. F. Optimal retailer's ordering policies in the EOQ model under trade credit financing. *Journal of the Operational Research Society* [J]. 2003, 54: 1011-1015.
- [50] Kun-Jen Chung , Tien-Shou Huang. The optimal retailer's ordering policies for deteriorating items with limited storage capacity under trade credit financing [J]. *International Journal of Production Economics*, 2007, 106: 127-145.
- [51] Yung-Fu Huang, An inventory model under two levels of trade credit and limited storage space derived without derivatives [J]. *Applied mathematical modeling*, 2006, 30: 418-436.
- [52] Jinn-Tsair Teng, Jenner Chen, S.K. Goyal., A comprehensive note on: An inventory model under two levels of trade credit and limited storage space derived without derivatives [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, 3(12): 4388-4396.
- [53] 闵杰, 常浩. 两货栈及允许延期付款情形下变质性物品的最优订货策略 [J]. *系统工程理论与实践*, 2009, 29(3): 90-99.
- [54] 陈军, 但斌, 张旭梅. 多级价格折扣下基于损耗控制的生鲜农产品 EOQ 模型 [J]. *系统工程理论与实践*, 2009, 29(7): 43-54.
- [55] Harris F W. *Operations and Cost* [M]. Chicago: Factory Management Series, A. W. 1915.
- [56] Hill, R.M. Inventory model for increasing demand followed by level demand [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1995, 46: 1250-1259.
- [57] Wu, K.S. An EOQ inventory model for items with Weibull distribution deterioration, ramp type demand rate and partial backlogging [J]. *Production Planning and Control*, 2001, 12: 787-793.
- [58] Giri, B.C. Jalan, A.K., Chaudhuri, K.S. Economic order quantity model with Weibull deterioration distribution, shortage and ramp type demand [J]. *International Journal of Systems Science*, 2003, 34: 237-243.
- [59] S.K. Manna, K.S. Chaudhuri. An EOQ model with ramp type demand rate, time dependent deterioration rate, unit production cost and shortages [J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 171: 557-566.
- [60] Peter Shaohua Dend, Robert H.-J. Lin, Peter Chu. A note on the inventory models for

- deteriorating items with ramp type demand rate [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 178: 112-120.
- [61] S.Panda, S. Senapati, M.Basu. Optimal replenishment policy for perishable seasonal products in season with ramp-type time dependent [J]. Computers & industrial engineering, 2008, 54: 301-312.

致谢

在我论文完成之际，我要特别感谢我的导师莫降涛教授，在论文的完成过程中他给出了很多宝贵的建议，是他把我引入科研的道路，在这三年的研究生学习当中，我的科研能力得到了很大的提高，这得益于他的悉心教导。他高度的责任心，独特的教学方法与严谨的治学态度使我受益匪浅。

感谢广西大学数信学院给我深造的机会和诸位老师的教导。

感谢我的同学曹亮，周优军，在我的论文写作过程中他们给我很多的帮助。

最后，对各位评审专家、给我帮助和支持的各位老师、同学表示我最诚挚的谢意！

攻读硕士学位期间发表论文情况

- [1] 莫降涛, 潘义前, 曹亮, 周优军. 基于产品生命周期的库存模型 [J], 重庆工学院学报, 2009, 23(2):55-60.
- [2] 莫降涛, 潘义前, 曹亮, 周优军. 基于二层信用策略且存货影响销售率的库存模型 [J], 系统工程, 2009,9:108-112.
- [3] 周优军, 曹亮, 潘义前. 基于价格折扣的生命周期产品库存模型 [J], 物流技术, 2009, 28(11):76-79.
- [4] 周优军, 曹亮, 潘义前. 一类基于价格折扣的短生命周期易变质物品库存模型 [J], 物流工程与管理, 2009, 31(7): 35-38.
- [5] 曹亮, 周优军, 潘义前. 多次订货允许缺货的最优库存模型 [C]. 决策科学与评价-中国系统工程学会决策科学专业委员会第八届学术年会论文集, 2009,10: 416-422.