





Y1741570

原创性声明

本人声明：所呈交的论文是本人在导师指导下进行的研究工作。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已发表和撰写过的研究成果。参与同一工作的其他同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了说明并表示了谢意。

签名： 张耕 日期： 2010.6.25

本论文使用授权说明

本人完全了解上海大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留论文及送交论文复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容。

(保密的论文在解密后应遵守此规定)

签名： 张耕 导师签名： 盛玉 日期： 2010.6.25



上海大学理学博士学位论文

二维可压流体 Euler 方程的
几类流动结构

作者: 赖耕

导师: 盛万成

专业: 应用数学

上海大学理学院

二零一零年五月



A Dissertation Submitted
To Shanghai University for the Degree
of Doctor in Science

**Some types of flow patterns of
Euler equations for
compressible flow in two dimensions**

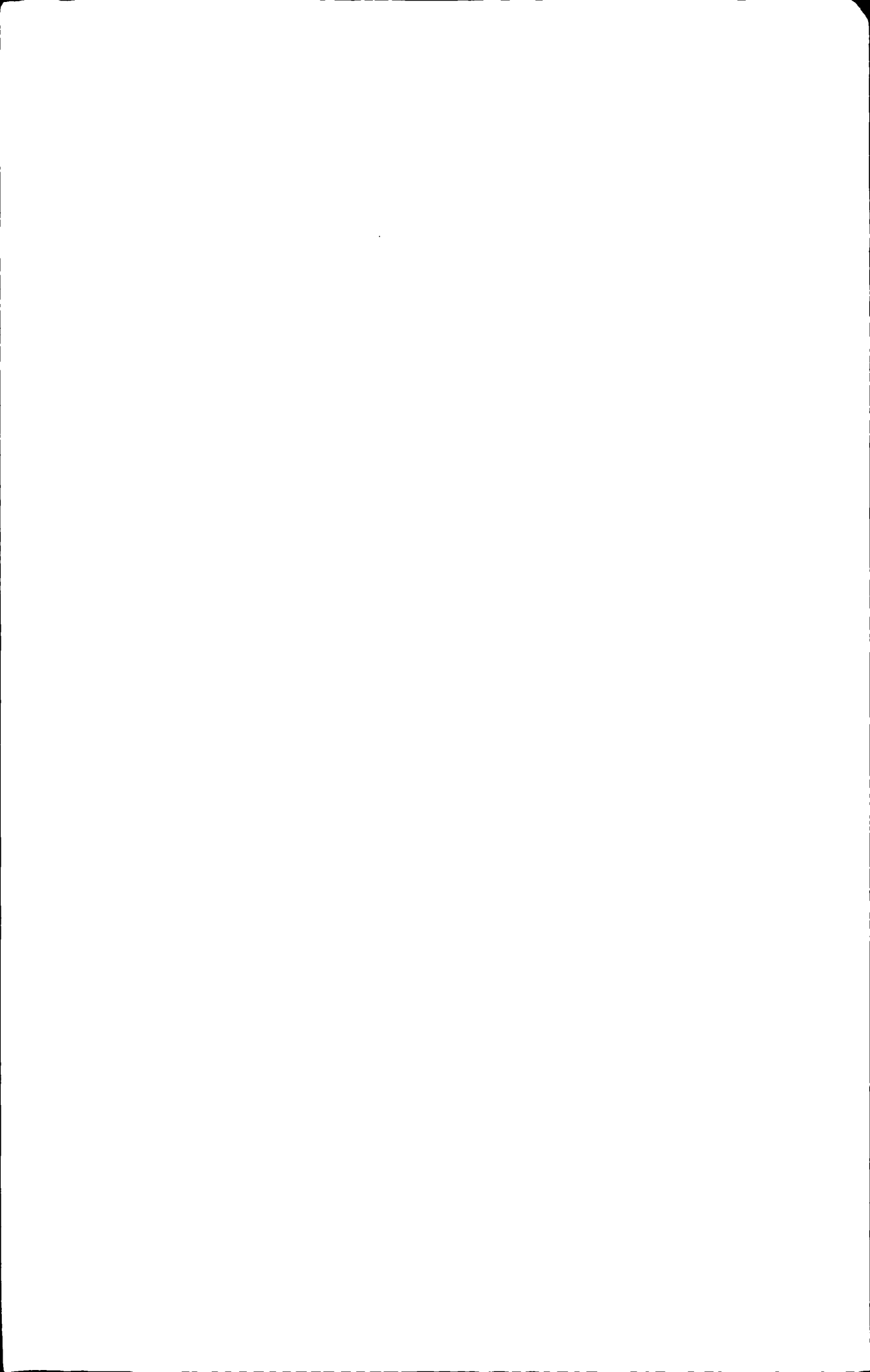
Ph. D. Candidate: Lai Geng

Supervisor: Sheng Wancheng

Major: Applied Mathematics

School of Sciences, Shanghai University

May, 2010



摘 要

本文主要研究二维可压流体 Euler 方程的几类流动结构, 它包括: 简单波, von Neumann 反射结构, 压力 δ 波和临界跨声冲击波。

本文的第二章研究了二维等熵无旋定常简单波. 二维等熵无旋定常简单波是这样一种类型的流动, 它的流动区域是被一族直特征所覆盖, 沿着每条直特征线 u, v 从而 p, ρ, c 均为常数. 一个重要的性质是: 与常状态相临区域内的非常状态流动总是简单波. 根据波的传播方向我们得到了二维等熵无旋定常 Euler 方程几类 Goursat 问题解的一阶导数先验估计. 利用这些先验估计我们构造了疏散简单波和疏散简单波相互作用、疏散简单波在声速线上的反射、压缩简单波和压缩简单波相互作用逆问题的全局解。

本文第三章研究了二维等熵无旋拟定常简单波. 类似于二维等熵无旋定常简单波, 二维等熵无旋拟定常简单波的流动区域也是被一族直特征所覆盖, 沿着每条直特征 u, v, c 从而 p, ρ 均为常数. 并且, 与常状态相临区域内的非常状态流动总是简单波; 几何上, 如果把简单波及其像表示在同一坐标平面下, 那么它的像可以由一单参数速度图曲线: $\xi = u(s), \eta = v(s)$ 和一族以该曲线上的点为圆心 $c(s)$ 为半径的声速圆来表示, 其中 $c(s)$ 满足方程 $c'(s)^2 = (\frac{\gamma-1}{2})^2(u'(s)^2 + v'(s)^2)$. 每一条直特征线均和相应状态的声速圆相切, 并且它的方向和速度图曲线在相应点的切线方向垂直. 我们还构造了绕一弯曲部拟流线的简单波结构以及两个疏散简单波相互作用的全局解。

为了解决 von Neumann 三波点悖论, Colella 和 Henderson(J. Fluid Mech., 213, 1990, 71-94) 在数值模拟弱冲击波反射问题时提出了一种新的反射结构, 他们称之为 von Neumann 反射 (vNR). 他们所提出的这种反射结构中入射冲击波和 Mach 杆在三波点处是光滑连接的, 三波点实际上不存在而是退化为一个很小的弯曲的区域, 流动在该区域是压缩的. 理论上的一个问题是: 这种反射结构是否是数学上可能的流动结构. 我们在第四章证明对于 Euler 方程该流动结构是不存在的。

本文第五章在研究 Chaplygin 气体 Euler 方程的二维 Riemann 问题的时候提出了一类新的基本波: 压力 Δ 波. 这类 Δ 波在一维流动中不会出现, 但在二维 Riemann 问题的解中会出现. 压力 Δ 波是关于压强 p 的 Dirac-Delta 函数, 这种间断和零压流模型的 Δ 波不同之处在于: 零压流模型的 Δ 波是由于输运现象而造成的质量集中. 通过将二维拟定常 Chaplygin 气体 Euler 方程的形式做一些改变, 我们能够在分布的意义定义这类 Δ 波解. 根据弱解的定义, 我们导出了

压力 Delta 波的广义 Rankine-Hugoniot 关系.

Sheng, Wang 和 Zhang “Critical transonic shock and supersonic bubble” 在用数值模拟方法研究疏散波爬坡问题时提出了临界跨声冲击波 (冲击波波后流动刚好为拟声速) 的概念. 本文最后一章证明了这样的冲击波在数学上是可能的.

关键词: Euler 方程, 多方气体, Chaplygin 气体, 二维 Riemann 问题, 冲击波反射, von Neumann 三波点悖论, von Neumann 反射, 临界跨声冲击波, 简单波, 压力 delta 波, 广义 Rankine-Hugoniot 关系.

Abstract

In this paper, we are mainly concerned with some types of flow patterns of Euler equations for compressible flow in two-dimensions. These flow patterns are simple waves, von Neumann reflection configuration, pressure delta waves and critical transonic shock.

The second chapter consider two-dimensional isentropic ir-rotational steady simple waves. The two-dimensional isentropic ir-rotational steady simple wave is a type of flow whose flow region is covered by a one parametric family of straight characteristics, along each of which u , v and consequently p , ρ , c remain constant. A significant property is: A non-constant state of flow adjacent to a constant state is always a simple wave. On the basis of the direction of wave propagation, we obtain the prior first-order derivative estimates of the solutions to some types of Goursat problems. By using these estimates the global solutions to the problems of two rarefaction simple waves interaction, rarefaction simple wave reflection on sonic curve, and the inverse problem of two compression simple waves interaction are constructed.

The third chapter study two-dimensional isentropic ir-rotational pseudo-steady simple waves. Similar to the two-dimensional isentropic ir-rotational steady simple wave, a two-dimensional isentropic ir-rotational pseudo-steady simple wave flow region is also covered by a one-parametric family of straight characteristics, along each of which u , v , c and consequently p , ρ remain constant; and a non-constant state of flow adjacent to a constant state is always a simple wave. Geometrically, if a simple wave and its images are represented in the same coordinate, the images of the simple wave can be represented by a hodograph curve $\xi = u(s)$, $\eta = v(s)$ equipped with sonic circles centered at $(u(s), v(s))$ with radius $c(s)$, $c(s)$ satisfy $c'(s)^2 = (\frac{\gamma-1}{2})^2(u'(s)^2 + v'(s)^2)$. Each straight characteristic is tangent to the corresponding sonic circle and its direction is perpendicular to the direction of the hodograph curve at the corresponding point. We also construct simple wave flow construction along a pseudo-stream line with a bend part and the global solutions to two rarefaction simple waves interaction.

In order to resolve von Neumann triple point paradox, a new reflection, called von Neumann reflection (vNR), was proposed by Colella and Henderson (J. Fluid Mech., 213, 1990, 71-94) in investigating numerically the weak shock reflection. In this shock reflection flow pattern, there is on discontinuity in the slop between the incident shock and the Mach

stem, and the triple point is not exist but degenerate to a curved band of region, the flow in this region is compressed. A theoretical problem about the von Neumann reflection is if the reflection configuration is a mathematically possible flow pattern. In the fourth chapter we prove that this flow pattern is impossible for Euler equations.

In the fifth chapter we present in investigating two-dimensional Riemann problems for Euler equations for a Chaplygin gas a new type of wave: pressure delta waves, which is absent in one space dimension, but appear in the solutions to two-dimensional Riemann problems. This type of Delta wave is a Dirac type concentration in the pressure variable. This type of discontinuities are different from delta shocks for the pressureless gas flow model, for which the delta shocks are associated with convection and concentration of mass. By writing the the Chaplygin gas system into a new form we are able to define distributional solutions that include the pressure delta waves. Generalized Rankine-Hugoniot conditions for the pressure delta wave are derived.

Sheng, Wang and Zhong "Critical transonic shock and supersonic bubble" introduce a concept of critical transonic shock (behind the shock wave the flow is pseudo-sonic) in investigating numerically climbing ramp problem of a rarefaction simple wave. In the last chapter we prove that this type of shock wave is mathematically possible.

Key words: Euler equations, polytropic gases, Chaplygin gas, two-dimensional Riemann problem, shock reflection, von Neumann triple point paradox, von Neumann reflection, simple wave, pressure delta wave, generalized Rankine-Hugoniot relations.

目 录

摘要	I
Abstract	III
第一章 绪 论	3
§1.1 气体运动的 Euler 方程	3
§1.2 弱解和 Rankine-Hugoniot 关系	4
§1.3 二维 Riemann 问题	5
§1.4 几个典型的 Riemann 问题	12
§1.4.1 4R Riemann 问题	12
§1.4.2 冲击波反射问题	13
§1.5 Chaplygin 气体模型	18
第二章 二维等熵无旋定常简单波	21
§2.1 Riemann 不变量	21
§2.2 特征分解	23
§2.3 简单波的相互作用	24
第三章 二维等熵无旋拟定常简单波	29
§3.1 广义特征分析	29
§3.2 简单波解	31
§3.3 简单波的几何结构	33
§3.4 Chaplygin 气体 Euler 方程二维 Riemann 问题中的简单波结构	37
§3.4.1 特征分解	37
§3.4.2 简单波中的贯穿特征线	38
§3.4.3 4J Riemann 问题中的简单波结构	40
§3.4.4 简单波的相互作用	43
第四章 冲击波反射现象中的 von Neumann 反射结构	46
§4.1 位势流模型的一类不可能的 von Neumann 反射结构	46
§4.2 Euler 方程组的一类不可能的 von Neumann 反射结构	50

第五章 二维 Chaplygin 气体的压力 Delta 波	59
§5.1 $\alpha < \pi$ 的情形	59
§5.2 $\alpha = \pi$ 的情形	62
§5.3 压力 Delta 波	66
§5.4 区域 Λ_c 内的流动	68
第六章 临界跨声冲击波	74
参考文献	77
博士期间的主要工作	83
致谢	84

第一章 绪 论

非线性双曲守恒律方程组是一个具有广泛实际和理论意义的领域, 近几十年吸引了众多的研究者. 1986年, 美国国家科学基金委员会组织了许多著名数学家讨论当前数学发展趋势, 出版了一本小册子《Mathematical Sciences- A unifying and Dynamic Resource》, 其中提出了六个具有代表性的研究方向, 非线性双曲守恒律方程组则是其中的第三个. 本文主要研究气体动力学的 Euler 方程组.

§1.1 气体运动的 Euler 方程

气体的运动可以由如下 Euler 方程来描述

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, & \text{(质量守恒)} \\ (\rho \mathbf{U})_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \nabla p = 0, & \text{(动量守恒)} \\ (\rho E)_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} E + \mathbf{U} p) = 0, & \text{(能量守恒)} \\ p = p(\rho, s), \quad e = e(\rho, s), & \text{(状态方程)} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

其中 ρ , $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$, p , s , e 和 $E = \frac{|\mathbf{U}|^2}{2} + e$ 分别代表密度, 速度, 压强, 比 (单位质量气体的) 熵, 比内能和比总能. 对于多方气体, 气体的状态方程具有如下形式

$$p(\rho, s) = \underbrace{(\gamma - 1) \exp c_v^{-1}(s - s_0)}_{A(s)} \rho^\gamma, \quad e = \frac{p\tau}{\gamma - 1}, \quad (1.1.2)$$

其中 $\tau = 1/\rho$ 代表比容, 绝热常数 γ 是介于 1 到 5/3 之间的常数, 中等温度下空气可以看成是 $\gamma = 1.4$ 的多方气体.

Euler 方程组的最大特点在于解会产生间断 (即使初始数据非常光滑解都可能在有限的时间内发生间断), 冲击波就是一种压缩性的间断. 冲击波在很多地方都会出现, 如: 超声速飞行的飞行物前面, 炸弹的爆炸等. 1858年, Riemann 抓住了间断这一特点研究了一维 Euler 方程在给定的初值为两段常数的 Cauchy 问题, 此后人们称此类问题为 Riemann 问题. Riemann 利用 "Riemann 不变量" 独立发展了简单波理论, 并详细建立了冲击波理论. 尽管 Riemann 做出了错误的假设, 认为穿过冲击波的跃变是绝热的, 但他开创了广义解的先河, 他的思想为非线性双曲守恒律的发展奠定了基石. 之后, Rankine 于 1869年指出穿过冲击波的跃变是非绝热的. Hugoniot 于 1878年首先指出冲击波上的绝热过渡将违背能量守恒原理, 事实上

Hugoniot 证明了能量守恒意味着穿过冲击波时熵要发生变化. Rankine 和 Hugoniot 在那段时间独立的导出了穿过冲击波阵面时两边的气体所满足的三个关系式, 即: Rankine-Hugoniot 关系. 1910 年, Rayleigh 指出穿过冲击波阵面熵要增加. 由此, 一维 Riemann 问题得到了彻底的解决, 它的解由冲击波 (S), 中心疏散波 (R) 和接触间断 (J) 三类基本波构成, 如图 1.4 所示. 从上世纪四五十年代开始一维非线性双曲守恒律的数学理论得到了飞速的发展, 关于一维的内容读者可以参考著作 ([5], [8], [18], [20], [67]).

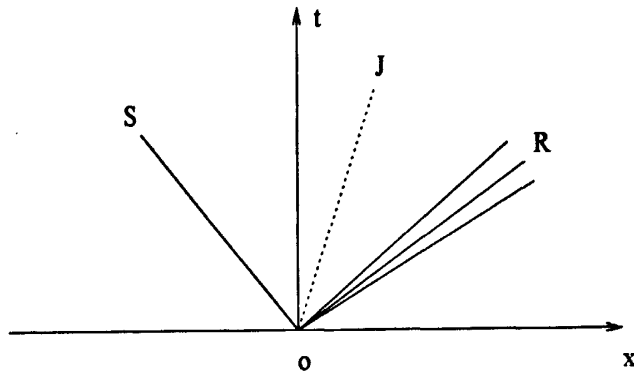


图 1.1 一维 Riemann 问题的一个解.

§1.2 弱解和 Rankine-Hugoniot 关系

物理上常见的非线性双曲守恒律方程组通常可以写成如下形式

$$u_t + \operatorname{div}_x f(u) = 0, \quad (1.2.1)$$

其中 $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $f(u) = (f_i^j(u))_{n \times d}$ 是 $n \times d$ 的矩阵.

定义 1.1. 如果可测向量函数 $u = (u^1, \dots, u^n) : \Omega \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足

1. $u \in L_{loc}^1(\Omega)$,
2. $f(u) \in L_{loc}^1(\Omega)$,
3. 对所有的 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ 都成立

$$\iint_{\Omega} u^j \phi_t + f^j(u) \cdot \operatorname{grad}_x \phi \, dx dt = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

则称 u 在分布的意义下满足双曲守恒律组 (1.2.1), 或称 u 是 (1.2.1) 的一个弱解.

对于 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div}_x f(u) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (1.2.2)$$

它的弱解可以按如下方式定义.

定义 1.2. 如果可测向量函数 $u = (u^1, \dots, u^n): [0, T] \times R^d \rightarrow R^n$ 是 (1.2.1) 的一个弱解, 且

1. $u(0, x) = u_0(x)$,
2. 映射 $t \mapsto u(t, \cdot)$ 是 $[0, T]$ 到 $L^1_{loc}(R^d)$ 的连续映射,

则称 u 是柯西问题 (1.2.2) 的一个弱解.

定理 1.3. (Rankine-Hugoniot 关系) 假设 S 是 (t, x) 空间的一个 d 维的超曲面, 双曲守恒律组 (1.2.1) 的一个弱解 u 在 S 的两边有直到 S 的光滑性, 但穿过 S 发生间断. 那么, 在 S 上 u 满足如下间断关系

$$[(u^i, f^i(u)) \cdot \nu]_S = 0, \quad (1.2.3)$$

其中 ν 为 S 的单位法向量, $[\cdot]$ 代表物理量在 S 两端的跳跃.

§1.3 二维 Riemann 问题

Euler 方程的二维 Riemann 问题是指给定如下初始数据

$$\text{当 } \frac{y}{x} = \tan \theta \text{ 时, } (u, v, p, \rho)(0, x, y) = (u_0, v_0, p_0, \rho_0)(\theta) \quad (1.3.1)$$

的 Cauchy 问题. 我们通常关心初始值为四片常数的情况, 即:

$$(u, v, p, \rho)(0, x, y) = (u_i, v_i, p_i, \rho_i), \quad (x, y) \in \text{第 } i \text{ 象限.} \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (1.3.2)$$

二维 Riemann 问题允许考虑所谓的自相似流动, 即流动仅依赖于自相似变量 $\xi = x_1/t$ 和 $\eta = x_2/t$. 因此, 在自相似变换下二维 Euler 方程变为如下形式

$$\begin{cases} -\xi \rho_\xi - \eta \rho_\eta + (\rho u)_\xi + (\rho v)_\eta = 0, \\ -\xi(\rho u)_\xi - \eta(\rho u)_\eta + (\rho u^2 + p)_\xi + (\rho uv)_\eta = 0, \\ -\xi(\rho v)_\xi - \eta(\rho v)_\eta + (\rho uv)_\xi + (\rho v^2 + p)_\eta = 0, \\ -\xi(\rho E)_\xi - \eta(\rho E)_\eta + (\rho u E + up)_\xi + (\rho v E + vp)_\eta = 0, \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Riemann 初值 (1.3.1) 变为: 当 $\frac{\eta}{\xi} = \tan \theta$ 且 $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty$ 时

$$(u, v, p, \rho)(\xi, \eta) \rightarrow (u_0, v_0, p_0, \rho_0)(\theta). \quad (1.3.4)$$

通过引入拟流速 $(U, V) = (u - \xi, v - \eta)$, 方程组 (1.3.3) 可以写成如下形式

$$\begin{cases} (\rho U)_\xi + (\rho V)_\eta + 2\rho = 0, \\ (\rho U^2 + p)_\xi + (\rho UV)_\eta + 3\rho U = 0, \\ (\rho UV)_\xi + (\rho V^2 + p)_\eta + 3\rho V = 0, \\ (\rho U \hat{E} + Up)_\xi + (\rho V \hat{E} + Vp)_\eta + 2\rho \hat{E} + 2p = 0, \end{cases} \quad (1.3.5)$$

其中

$$\hat{E} = \frac{U^2 + V^2}{2} + e \quad (1.3.6)$$

表示拟比总能. 方程组 (1.3.3) 和 (1.3.5) 称为二维拟定常 Euler 方程. 形式上, (1.3.5) 和二维定常 Euler 方程组仅在非其次项上有差别.

对于光滑流动, (1.3.5) 可以写成

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 1/\rho & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U \\ 0 & U & \gamma p & 0 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} \rho \\ p \\ U \\ V \end{pmatrix}_\xi + \underbrace{\begin{pmatrix} V & 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 1/\rho & 0 & V \\ 0 & v & 0 & \gamma p \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} \rho \\ p \\ U \\ V \end{pmatrix}_\eta + \begin{pmatrix} 2\rho \\ U \\ V \\ 2\gamma p \end{pmatrix} = 0. \quad (1.3.7)$$

该方程组的特征根由 $|D - \lambda B| = 0$ 确定, 即:

$$(V - \lambda U)^2 [(V - \lambda U)^2 - c^2(1 + \lambda^2)] = 0, \quad (1.3.8)$$

其中 $c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ 代表声速. 由计算可知

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{V}{U} \quad (\text{拟流特征}), \quad (1.3.9)$$

或

$$\lambda = \lambda_\pm = \frac{UV \pm \sqrt{c^2(U^2 + V^2 - c^2)}}{U^2 - c^2} \quad (\text{拟波特征}). \quad (1.3.10)$$

令

$$M = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{c} \quad (1.3.11)$$

表示拟 Mach 数. 因此, 当 (u, v, p, ρ) 有界时在离原点非常远的地方流动为拟超声 ($M > 1$), λ_\pm 是实的互异的, 方程组 (1.3.5) 为双曲型; 如果 p 和 ρ 具有非零下界,

那么存在一个区域, 使得流动在该区域为拟亚声的 ($M < 1$), 方程组 (1.3.5) 在该区域可以是一个二阶椭圆型方程和两个输运方程耦合的复合型方程.

对于光滑拟超声速流动, 方程组 (1.3.5) 还可以写成如下的特征形式 (见参考文献 [75])

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \eta})(p\rho^{-\gamma}) = 0, \\ \frac{1}{\rho}(\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \eta})p + U(\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \eta})u + V(\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \eta})v = 0, \\ \frac{\sqrt{c^2(U^2 + V^2 - c^2)}}{\rho c^2}(\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_+ \frac{\partial}{\partial \eta})p - V(\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_+ \frac{\partial}{\partial \eta})u + U(\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_+ \frac{\partial}{\partial \eta})v = 0, \\ -\frac{\sqrt{c^2(U^2 + V^2 - c^2)}}{\rho c^2}(\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_- \frac{\partial}{\partial \eta})p - V(\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_- \frac{\partial}{\partial \eta})u + U(\frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_- \frac{\partial}{\partial \eta})v = 0. \end{array} \right. \quad (1.3.12)$$

类似于定常流中的流线, 二维拟定常流的拟流线 (或称为拟流特征) 定义为 (ξ, η) 平面上的曲线, 曲线上各点的切线方向等于拟流速的方向. 在以后的讨论中, 拟流特征用 C_0 表示. 由计算可得

$$\dot{\xi} = \frac{\dot{x}}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{1}{t}(u - \xi) = \frac{U}{t}, \quad (1.3.13)$$

$$\dot{\eta} = \frac{\dot{y}}{t} - \frac{y}{t^2} = \frac{1}{t}(v - \eta) = \frac{V}{t}. \quad (1.3.14)$$

其中, $' \cdot '$ 代表随体导数, 即: $\frac{d}{dt}$. 因此, 流体质团在 (ξ, η) 平面上的运动轨迹是一条拟流线, 且运动方向与拟流速的方向一致. 和流线不同的是两条拟流线可以相交一点. C_{\pm} 特征线定义为 (ξ, η) 平面上满足

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \lambda_{\pm} \quad (1.3.15)$$

的曲线. 由 (1.3.8) 可得

$$c = \frac{|(U, V) \cdot (\lambda_{\pm}, -1)|}{|(\lambda_{\pm}, -1)|}, \quad (1.3.16)$$

它表明拟流速在 C_{\pm} 特征线的法线方向的分量等于声速. 因此, 如果沿着 C_{\pm} 特征线 u, v 和 c 为常数, 则该特征线为直线.

由于在自相似平面上没有时间轴, 因此要体现波的传播就有必要引入特征方向的概念. 拟流特征 C_0 的方向定义就为拟流速的方向. C_{\pm} 特征方向定义为它的与拟流速方向成一个锐角 ω 的切线方向, ω 称为拟 Mach 角. 通过简单的计算可以发现 C_+ 特征方向反时针选转 ω 角度到拟流速方向, C_- 特征方向顺时针旋转 ω 角度到拟流速的方向. 由 (1.3.16) 可知

$$c^2 = q^2 \sin^2 \omega, \quad M = q/c = 1/\sin \omega, \quad (1.3.17)$$

其中 $q^2 = U^2 + V^2$. 因此, 当流动为拟声速时 $\omega = 90^\circ$, 这时拟流速的方向和 C_\pm 特征的方向垂直. 我们举常状态流动 $(u, v, p, \rho) = (u_0, v_0, p_0, \rho_0)$ 为例, 它的声速线为

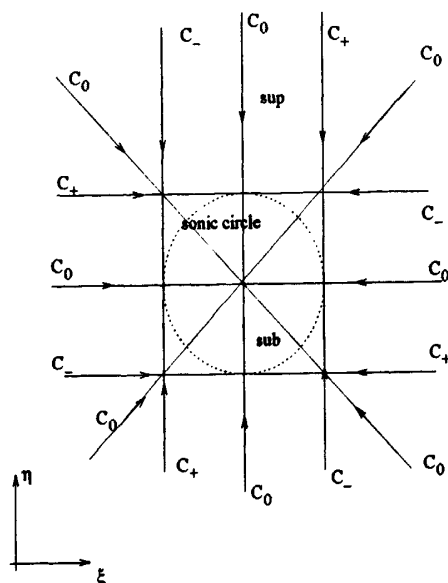


图 1.2 常状态流动的特征线.

以 (u_0, v_0) 为圆心 c_0 为半径的圆 (称为声速圆), 流动在声速圆外为拟超声的, 在声速圆内为拟亚声的. 拟流线 C_0 是指向圆心的射线, 声速圆外的 C_\pm 特征与声速圆相切, 如图 1.2 所示.

如果在一个流动区域内熵为常数, 则该区域的流动称为等熵流. 这时, 流动可以由方程组

$$\begin{cases} (\rho U)_\xi + (\rho V)_\eta + 2\rho = 0, \\ (\rho U^2 + p)_\xi + (\rho UV)_\eta + 3\rho U = 0, \\ (\rho UV)_\xi + (\rho V^2 + p)_\eta + 3\rho V = 0 \end{cases} \quad (1.3.18)$$

来描述, 其中

$$p(\rho) = A\rho^\gamma, \quad (1.3.19)$$

A 为一个大于零的常数. 方程组 (1.3.18) 称为二维等熵拟定常 Euler 方程组. 对于光滑流动, 方程组 (1.3.18) 可以简化为

$$\begin{cases} (\rho U)_\xi + (\rho V)_\eta + 2\rho = 0, \\ UU_\xi + VU_\eta + \left(\frac{c^2}{\gamma-1}\right)_\xi + U = 0, \\ UV_\xi + VV_\eta + \left(\frac{c^2}{\gamma-1}\right)_\eta + V = 0. \end{cases} \quad (1.3.20)$$

如果流动还为无旋的, 即: $u_y = v_x \Rightarrow U_\eta = V_\xi$, 那么, 我们可以引入拟速度势函数 $\phi(\xi, \eta)$, 使得

$$\phi_\xi = U, \quad \phi_\eta = V. \quad (1.3.21)$$

于是, 由 (1.3.20) 的最后两个方程可得

$$\frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} + \phi = \text{Const.}, \quad (1.3.22)$$

称为拟 Bernoulli 定律. 又由 (1.3.18) 的第一个方程, 我们可以得到一个二阶方程

$$\text{div}(\rho\nabla\phi) + 2\rho = 0, \quad (1.3.23)$$

其中

$$\rho = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma A} (\text{Const.} - \phi - \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (1.3.24)$$

方程 (1.3.23) 称为拟定常位势流方程. 由计算可知: 当 $c^2 > |\nabla\phi|^2$ 时 (1.3.23) 为椭圆型的; 当 $c^2 < |\nabla\phi|^2$ 时 (1.3.23) 为双曲型的.

二维流动的一个研究难点和热点是跨声流问题. 通常情况下分隔拟超声流动区域和拟亚声流动区域的曲线有两类: 一类为声速线, 另外一类为跨声冲击波. 对于

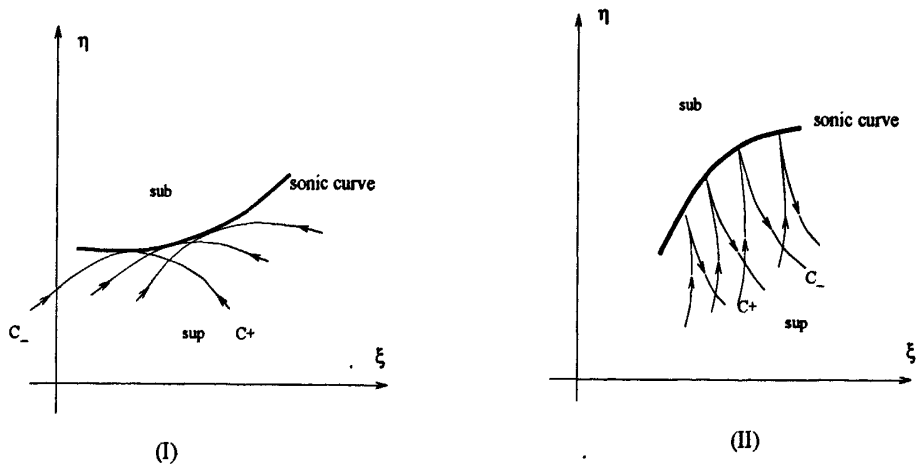


图 1.3 (I): Keldysh 型问题; (II): Tricomi 型问题.

一些常见的问题声速线两边的流动为等熵无旋的, 所以这些问题可以用位势流模型来研究声速线附近的流动. 令 $F(\xi, \eta) = U^2 + V^2 - c^2$, 那么, 由拟 Bernoulli 定律知

$$F = -2\phi - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} c^2 + \text{常数}. \quad (1.3.25)$$

由 (1.3.25) 可得

$$\nabla F = -2(U, V) - \frac{2(\gamma+1)c}{\gamma-1} \nabla c. \quad (1.3.26)$$

于是, 由前面特征分析的结果和 (1.3.26) 可知: $1 < \gamma < 5/3$ 时, 如果沿着声速线声速为常数则该声速线为 C_{\pm} 特征线的包络, [79] 给出了一个这样的整体流动; 如果声速沿着声速线的方向导数不为零, 则声速线上退化类型为 Tricomi 型的, 声速线附近拟超声区域内的流动为半双曲型的, 即: 两类波特征有一类沿着特征方向是从声速线上发出的另一类是沿着特征方向走到声速线上的 (在声速线 C_+ 特征方向和 C_- 特征方向所成的角为 π); 当 $\gamma = -1$ (Chaplygin 气体, 见本章最后一节) 时,

$$\nabla F = -2(U, V), \quad (1.3.27)$$

声速线是 C_{\pm} 特征线的包络.

对于冲击波, 由 Rankine-Hugoniot 关系 (1.2.3) 可知 (ξ, η) 平面上的冲击波两边的状态满足关系

$$\begin{cases} [\rho U] d\eta = [\rho V] d\xi, \\ [\rho U^2 + p] d\eta = [\rho UV] d\xi \\ [\rho UV] d\eta = [\rho V^2 + p] d\xi, \\ [\rho U \dot{E} + Up] d\eta = [\rho V \dot{E} + Vp] d\xi. \end{cases} \quad (1.3.28)$$

如果用 N 和 L 来分别代表拟流速在冲击波曲线法线方向和切线方向的分量, 那么冲击波的间断关系 (1.3.28) 可以简化为

$$\begin{cases} [\rho N] = 0, \\ [\rho N^2 + p] = 0 \\ [L] = 0, \\ \left[\frac{N^2 + L^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} \right] = 0. \end{cases} \quad (1.3.29)$$

因此, 对于法方向为 $(1, 0)$ 的平面冲击波, 间断线左右两边的状态满足 (见参考文献 [50])

$$\begin{cases} \xi_0 = u_l + \sqrt{\frac{\rho_r(p_r - p_l)}{\rho_l(\rho_r - \rho_l)}}, \\ \frac{u_r - u_l}{\rho_r - \rho_l} = \sqrt{\frac{p_r - p_l}{\rho_r \rho_l (\rho_r - \rho_l)}}, \\ v_r = v_l, \\ \frac{p_r}{\rho_l} = \frac{(\gamma + 1)\rho_r - (\gamma - 1)\rho_l}{(\gamma + 1)\rho_l - (\gamma - 1)\rho_r}, \end{cases} \quad (1.3.30)$$

其中 ξ_0 代表该平面冲击波在 (ξ, η) 平面的位置.

二维拟定常的冲击波可以分为三类：一类冲击波波后状态为拟超声的，称为超声冲击波；一类冲击波波后状态为拟声速的，称为声速冲击波；一类冲击波波后状态为拟亚声的，称为跨声冲击波。对于超声冲击波，冲击波两边共有 $4+4=8$ 个特征。这时，按照 Lax([42]) 的几何熵条件的思想它的八个特征沿着特征方向应该是五进三出的。这是因为冲击波是一个自由边界，它的九个未知量（冲击波曲线的斜率和两端的八个状态）可由四个 Rankine-Hugoniot 关系加上五个进入的特征来决定。对于跨声冲击波，冲击波两边共有 $4+2=6$ 个特征，它的六个特征沿着特征方向应当是四进二出的。这是由于跨声冲击波波后的方程可以看成是一个二阶椭圆方程和两个输运方程的耦合，二阶椭圆方程只能给一个边界条件，一个进入的特征提供椭圆方程的边界条件来求解椭圆问题而得到冲击波波后的两个信息。因此， $4-1+2+4=9$ 符合要求。

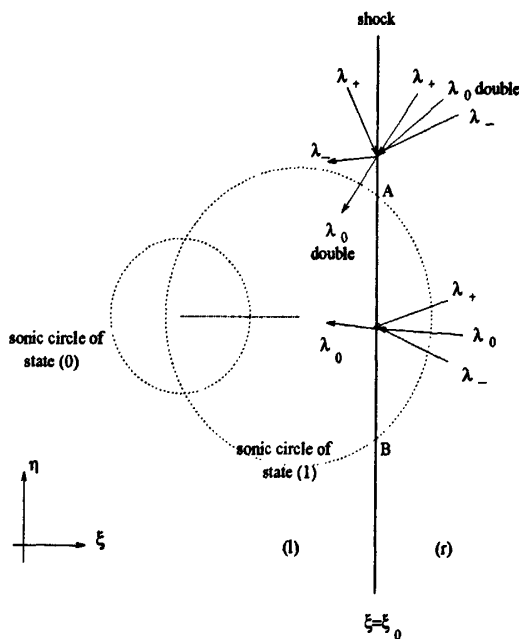


图 1.4 (ξ, η) 平面上的一个平面冲击波，波前为 (r) 状态，波后为 (l) 状态， AB 为跨声冲击波。

对理想气体的 Euler 方程的二维 Riemann 问题，1990 年 Zhang 和 Zheng ([75]) 给出了一套分析和猜想。他们假设每条初始间断线在 $t > 0$ 只发射出一道平面基本波（冲击波 S，接触间断 J 或平面疏散波 R）。于是，问题就简化为四道平面基本波的相互作用。根据四道波的不同组合，他们将问题分为十六类。随后，Schulz-Rinne(1993)([58])，Chen-Zhang-Yang(1995,2001)([14],[15])，Lax-Liu(1998)([43]) 对这一猜想进行数值模拟将分类最终完善为 19 类。

§1.4 几个典型的 Riemann 问题

§1.4.1 4R Riemann 问题

给定 Riemann 初值 (1.3.2), 使得常状态 (1) 和 (2), (2) 和 (3), (3) 和 (4), (1) 和 (4) 在 $t = 0$ 时刻分别由平面疏散波 R_{12}^+ , R_{23}^- , R_{34}^+ , R_{14}^- 连接. 从数值算例 (图 1.5) 可以看出这一问题在 (ξ, η) 平面上的整体流动包含许多复杂的流动结构, 这些结构随着近年来许多研究者不断的努力而逐渐变得清晰.

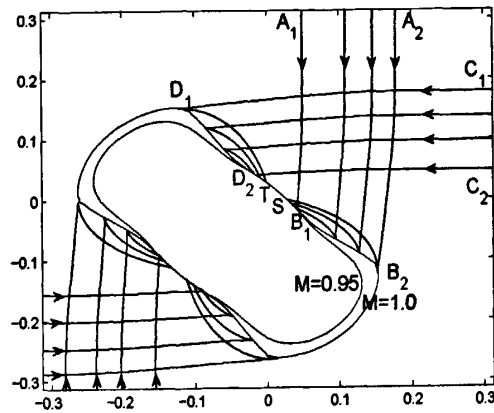


图 1.5 4R Riemann 问题, 见参考文献 [64].

2000 年, Dai 和 Zhang ([19]) 得到了压差模型的两个平面疏散简单波相互作用的整体解的存在性, 这实际构造了压差模型图 1.6 区域 I 的流动. 2001 年, Li ([45]) 巧妙地找到了二维等熵无旋拟定常 Euler 方程的一组 Riemann 变量, 并利用速度变换的方法研究了两个平面疏散波的相互作用. 2006 年, Li, Zhang 和 Zheng ([51]) 在文章 ([19]) 的启发下得到了二维等熵无旋拟定常 Euler 的一组特征分解式, 并证明了和常状态相临的区域内的非常状态流动总是简单波, 这说明图 1.6 的区域 II 的流动为一个简单波. 2009 年, Li 和 Zheng ([52]) 利用特征分解的方法得到了 Euler 方程两个平面简单波相互作用整体解的存在性, 即得到了图 1.6 区域 I 的流动. 2008 年, Glimm, Ji, Li, Li, Zhang, Zhang, Zheng 七人 ([26]) 通过数值模拟发现在该流动中还存在跨声冲击波, 即图 1.6 的曲线 FG 为一个跨声冲击波, 其中 F 和 G 为跨声冲击波的起点, 在这两点冲击波的强度为零. 在研究压差模型声速线附近双曲区域的流动时, Zheng 和 Song ([68]) 提出了半双曲结构的概念. 他们还构造了声速线附近的一个这样的半双曲结构流动. 对于拟定常 Euler 方程组 (1.3.3) 拟亚声区域的研究目前的结果还不多, 但对于其它模型这方面的研究已有非常多的结果. Gilbarg 和

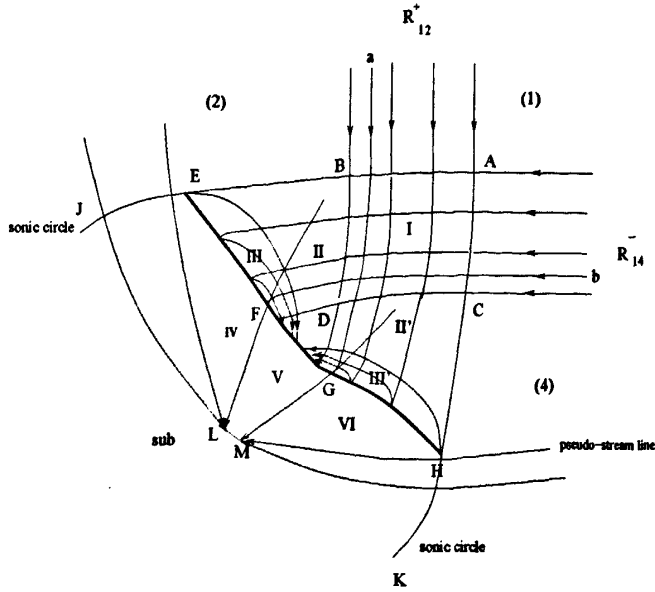


图 1.6 由于穿过弯曲的冲击波流动会从等熵无旋的变为有旋非等熵的，所以在区域 V 的流动为有旋非等熵的。由 Kelvin 环量定理和 $Us_{\xi} + Vs_{\eta} = 0$ 可知，在 IV 和 VI 中流动为等熵无旋的；穿过声速圆 EJ 和声速线 EF 的拟流线可能汇集于一点 L，类似的，穿过声速圆 HK 和声速线 HG 的拟流线汇集于点 M，穿过冲击波 FG 的拟流线终止于 LM。

Trudinger 的经典著作 [25] 介绍了定常位势流模型的亚声区域的流动；Zheng[76] 得到了压差模型的椭圆性原理，即如果流动在边界上为亚声的在区域内也一定为亚声的，该文章还得到了压差模型 Dirichlet 问题的解；关于拟定常位势流模型，这方面的研究已有 ([16], [22], [23], [24], [33], [34], [35])。

§1.4.2 冲击波反射问题

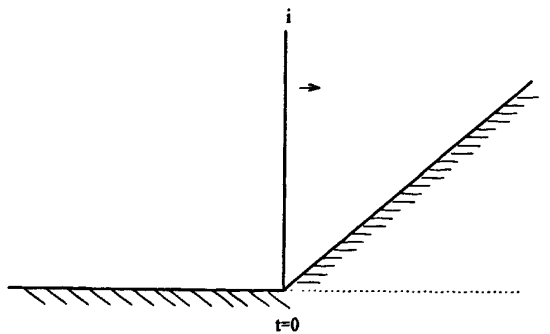


图 1.7 冲击波爬坡问题。

另外一类典型的二维 Riemann 问题就是冲击波爬坡问题 (或称为冲击波反射问

题). 在 $t = 0$ 时刻一个以常速度向前进行的平面冲击波打到一个笔直的斜坡上, 根据不同的坡角 θ_w 和入射冲击波的强度 M_i , 不同类型的冲击波反射现象将会发生. 激波反射现象最早于 1878 年由 Mach 在实验中观察到, 当时 Mach 在实验中观测到了两类激波反射现象, 一类是正规反射, 另外一类是 Mach 反射. 很多年以后, von Neumann 和他的同事们开始系统地建立冲击波反射理论.

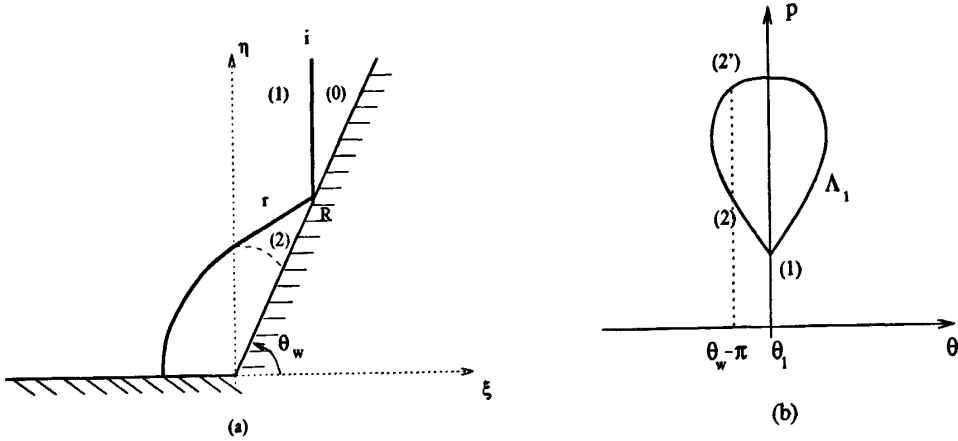


图 1.8 (a): 拟定常正规反射结构. (b) 利用 (θ, p) 冲击波极线所表示的两种可能的正规反射.

当斜坡的坡角 θ_w 大于某个临界值 $\theta^*(M_i)$ 时将会发生正规反射, 正规反射是指由一个入射冲击波 (i) 和一个从位于斜坡上的反射点 R 反射出来反射冲击波 (r) 所构成的流动结构, 如图 1.8a 所示. 图 1.8b 给出了如何利用 (θ, p) 冲击波极线来寻找正规反射波后的状态. Λ_1 表示过点 (θ_1, p_1) 的 (θ, p) 冲击波极线, 其中 θ_1 为 (1) 状态在反射点 R 处的拟流速方向和正 ξ 轴的夹角. 为了得到反射冲击波后的状态我们在极线圈上寻找 (2) 状态, 使得 (2) 状态在反射点 R 处的拟流速的方向和正 ξ 轴方向的夹角 θ_2 为 $\theta_w - \pi$. 由 ([18]) 知存在一个 $\hat{\theta}(M_i)$, 使得

当 $\theta_w > \hat{\theta}(M_i)$ 时有两个可能: 对应于 (2) 的具有较小压力值 p_2 的弱反射和对应于 (2') 的具有较大压力值 p_2' 的强反射. 有意思的是, 在试验中只观测到弱正规反射. 正规反射整体解的唯一性很早就引起了 von Neumann 等人的注意 ([60]), 这一问题的数学理论仍是一个公开性的难题. 在文章 ([63]) 中, 作者得到了一个 $\bar{\theta}(M_1)$ 的一个显示表达式, 使得当 $\theta_w > \bar{\theta}(M_1)$ 时, 强反射的反射冲击波波后的状态 (2') 在反射点 R 处为拟亚声的, 弱反射的反射冲击波波后的状态 (2) 在反射点 R 处为拟超声的. 当 $\hat{\theta}(M_i) < \theta_w < \bar{\theta}(M_1)$ 时, 两种反射的反射冲击波波后的状态在反射点处均为拟亚声的. 关于临界值 $\theta^*(M_i)$ 的选取, 即正规反射到非正规反射的过渡 $RR \rightleftharpoons IR$ 一直是一个悬而未决的问题.

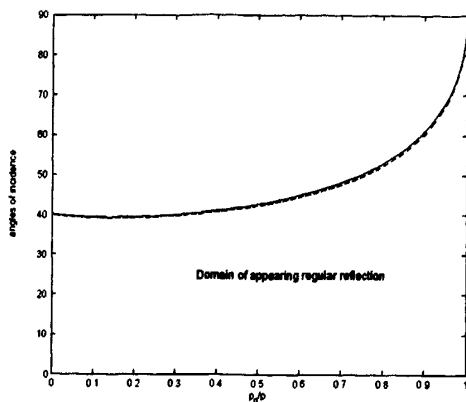


图 1.9 其中实线为曲线 $\theta = \frac{\pi}{2} - \hat{\theta}(M_i)$, 虚线为曲线 $\theta = \frac{\pi}{2} - \bar{\theta}(M_i)$. 此处, 入射冲击波强度 M_i 用 $\frac{p_1}{p_0}$ 来表征. 图中显示了两条曲线之间有一段非常窄区域. 该数值算例出自 [63]

入射冲击波强度不变且坡角变小时情况下就可能会出现 Mach 反射. Mach 反射可以描述如下: 一部分气体流过入射冲击波 (i) 和反射冲击波 (r) 两个波阵面, 另一部分气体流过一个冲击波阵面 -Mach 波阵面 (m); 这两部分气体穿过冲击波阵面后, 被一接触间断线 (j) 隔开, 如图 1.10a 所示. 图 1.10b 给出了用 (θ, p) 极线来构造三波点 T 附近的 Mach 反射结构, 通过状态 (0): (θ_0^T, p_0) 作冲击波极线 Λ_0 , 同样过 Λ_0 上的状态 (1): (θ_1^T, p_1) 作另一冲击波极线 Λ_1 . 因为状态 (3) 是通过 Mach 冲击波与状态 (0) 相连接的, 所以点 (3) 落在 Λ_0 上. 另一方面, 状态 (2) 是从状态 (1) 通过一冲击波达到的, 因此点 (2) 必须在 Λ_1 上. 又因为状态 (2) 和 (3) 具有相同的压力和拟流速方向, 所以 Λ_0 和 Λ_1 的交点就得到 (2,3).

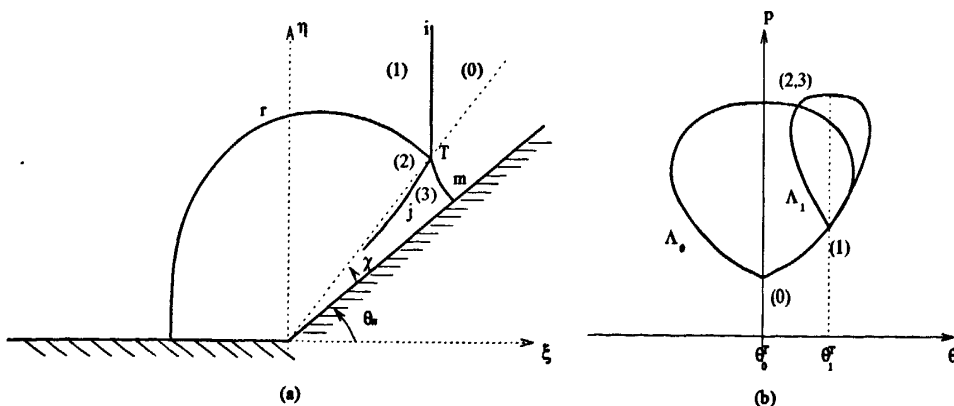


图 1.10 (a): 拟定常简单 Mach 反射. T : 三波点; χ : 三波点的轨迹与斜边的夹角. (b): 利用 (θ, p) 冲击波极线所表示的 Mach 反射.

上面所描述的 Mach 反射结构是一个简单的数学模型, 有许多现象与它极其符

合. 但也存在着许多实验现象与三冲击波理论不一致的情况, 例如: 当入射冲击波的强度非常弱的情况下在实验中观测到一些反射现象非常像 Mach 反射, 如图 1.11 所示, 但是 von Neumann 三冲击波理论在三波点 (假设反射为 Mach 反射情况下) 附近没有解, 如图 1.12 所示. 这种明显的理论和实验现象不一致最早由 von Neumann, Seeger, Smith 等人在广泛的计算比较中发现, 后来称之为 von Neumann 三波点悖论.

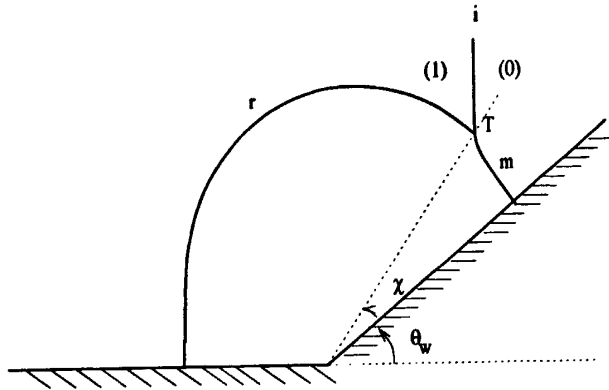


图 1.11 一个长的非常像 Mach 反射的反射结构.

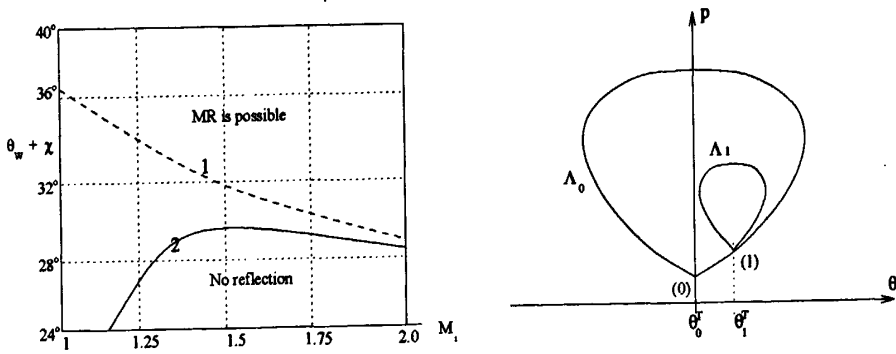


图 1.12 ([3]) 当 $(M_1, \theta_w + \chi)$ 落在左图的曲线 1 和 2 之间时, 过 $(0):(\theta_0^T, p_0)$ 的冲击波极线 Λ_0 和过 Λ_0 上的状态 $(1):(\theta_1^T, p_1)$ 的冲击波极线 Λ_1 没有交点.

为了试图解决这个悖论, Guderley 在 1947 年提出了一种修正的 Mach 反射结构. 他是在三波点处添加一个中心简单波 (R) 来对 Mach 反射结构加以修正的, 如图 1.13 所示. 通过状态 $(0):(\theta_0^T, p_0)$ 作冲击波极线 Λ_0 , 同样过 Λ_0 上的状态 $(1):(\theta_1^T, p_1)$ 作另一冲击波极线 Λ_1 . 过 Λ_1 上的状态 (3) 作简单波线. (注意: 反射冲击波在 T 点的波后的状态 (3) 必须为拟声速的, 这是由于如果 (3) 的状态为拟超声的那么与超声冲击波的同类特征沿着特征方向是指向冲击波相矛盾.) 由于状态 (4) 是从状态 (3)

通过一个中心简单波达到的，所以状态 (4) 落在过状态 (3) 作简单波线上。 另一方

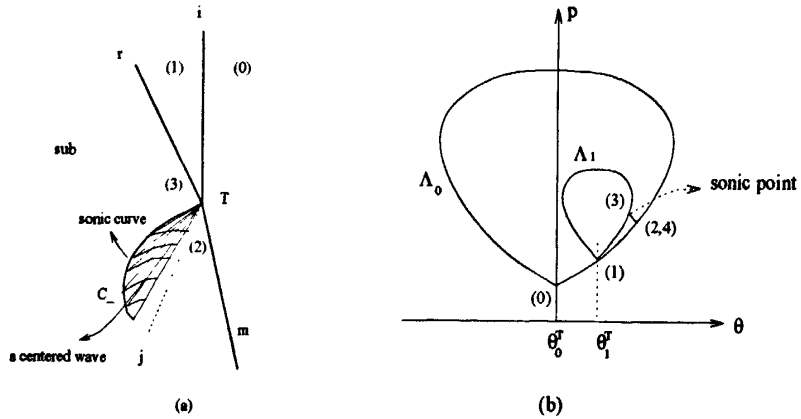


图 1.13 Guderley 反射结构和利用 (θ, p) 冲击波极线所表示的 Guderley 反射结构.

面，状态 (2) 是从状态 (0) 通过一冲击波达到的，因此点 (2) 必须在 Λ_0 上. 又因为状态 (2) 和 (4) 具有相同的压力和拟流速方向，所以 Λ_0 和过状态 (3) 作简单波线的交点就得到 (2, 4). 很久以来尽管有大量的数值模拟和实验，但这都没有明显的显示这

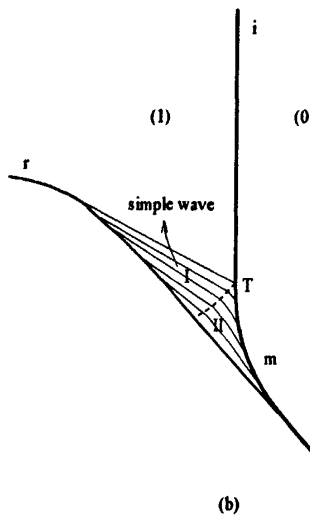


图 1.14 一个拟定常 von-Neumann 反射结构：虚线为过点 T 的拟流线；由开尔文环量定理和在光滑流动区域中熵沿着拟流线保持不变可知流动在区域 I 中为等熵无旋的。因此，根据和常状态流动区域相临的非常状态流动为简单波 [51] 可知区域 I 中的流动为简单波。区域 II 中的流动为非等熵且有旋的。

个中心疏散波的存在。直到最近， [30] 和 [74] 分别在对跨声小扰动方程和 Euler 方程的弱冲击波反射进行数值模拟时才观测到了 Guderley 反射结构。更有意思的是， [71] 通过对 Euler 方程的弱冲击波反射进行数值模拟时观测到一个很窄的区域里

有一列 Guderley 反射结构. 另外的一种尝试解决 von Neumann 三波点悖论来自于 [17], 他们在数值实验中发现某些情况下入射冲击波和 Mach 杆在三波点处是光滑连接的, 三波点实际上不存在而是退化为一个很小的弯曲的区域, 流动在该区域是压缩的, 如图 1.14 所示.

在近几年, 冲击波反射的数学理论上已经有许多重要的结果. ([78]) 得到了压差模型当坡角非常接近 90° 时正规反射问题整体解的存在性; ([16]) 得到了位势流模型当坡角非常接近 90° 时正规反射问题整体解的存在性; ([21],[23],[24]) 得到了对任意的 $\theta_w > \bar{\theta}(M_1)$ 时的位势流模型正规反射问题整体解的存在性; ([6],[7]) 研究了非定常跨声小扰动方程 (UTSD) 的正规反射问题; [59] 研究了 Chaplygin 气体模型的正规反射问题; ([12],[13]) 研究了 Mach 反射结构的稳定性; [40] 证明了对于 Euler 方程 von Neumann 反射结构是不存在的.

§1.5 Chaplygin 气体模型

Chaplygin 气体是最早是由 Chaplygin ([9]) 引入的, 随后钱学森 ([72]), von Karman ([73]) 也引入状态方程

$$p = A\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right) \quad (1.5.1)$$

来研究研究机翼的升力问题, 其中 A 是一个正的常数. 我们在本文主要研究如下状态方程的 Chaplygin 气体

$$p(\rho) = -\frac{1}{\rho}. \quad (1.5.2)$$

它实际上可以看成是 $\gamma = -1$ 的等熵多方气体.

对于 Chaplygin 气体, 它的所有波特征均为线性退化的. 一维 Chaplygin 气体模型

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 - \frac{1}{\rho})_x = 0, \end{cases} \quad (1.5.3)$$

的特征值和右特征向量为

$$\lambda_{\pm} = u \pm \frac{1}{\rho}, \quad r_{\pm} = \left(\rho, \pm \frac{1}{\rho}\right). \quad (1.5.4)$$

由简单计算可知

$$(\partial_\rho, \partial_u)\lambda_{\pm} \cdot r_{\pm} \equiv 0. \quad (1.5.5)$$

二维拟定常 Chaplygin 气体 Euler 方程具有如下形式

$$\begin{cases} (\rho U)_\xi + (\rho V)_\eta + 2\rho = 0, \\ (\rho U^2 - \frac{1}{\rho})_\xi + (\rho UV)_\eta + 3\rho U = 0, \\ (\rho UV)_\xi + (\rho V^2 - \frac{1}{\rho})_\eta + 3\rho V = 0. \end{cases} \quad (1.5.6)$$

因此, 由 Rankine-Hugoniot 关系 (1.2.3) 知穿过 (ξ, η) 平面的间断线有

$$[\rho U n_1 + \rho V n_2] = 0, \quad (1.5.7)$$

$$[(\rho U^2 + p)n_1 + \rho UV n_2] = 0, \quad (1.5.8)$$

$$[\rho UV n_1 + (\rho V^2 + p)n_2] = 0, \quad (1.5.9)$$

其中, 向量 $\vec{n} = (n_1, n_2)$ 代表间断线的单位法向量. 如果令 N 和 L 分别代表拟流速在间断线法线方向和切线方向分量, 那么当有质量流穿过间断线时 (1.5.7)-(1.5.9) 可以简化成

$$[\rho N] = 0, \quad (1.5.10)$$

$$[L] = 0, \quad (1.5.11)$$

$$\left[\frac{1}{\rho} ((\rho N)^2 - 1) \right] = 0. \quad (1.5.12)$$

由 (1.5.12) 可知 $\rho_0 N_0 = \rho_1 N_1 = \pm 1$. 于是, 过冲击波线的切线和冲击波两边状态的声速圆相切, 冲击波两边状态的声速圆相内切, 如图 1.15 所示. 因此, 如果冲击波波前的状态为拟超声的那么冲击波波后的状态也为拟超声的, 如果冲击波波前的状态为拟声速的那么冲击波波后的状态也为拟声速的.

令 $\omega = V_\xi - U_\eta$, 那么由 (1.5.6) 的最后两个方程可得

$$\left(\frac{U^2 + V^2}{2} - \frac{1}{2\rho^2} \right)_\xi - V\omega = -U, \quad (1.5.13)$$

$$\left(\frac{U^2 + V^2}{2} - \frac{1}{2\rho^2} \right)_\eta + U\omega = -V. \quad (1.5.14)$$

令 (τ_1, τ_2) 为冲击波的单位法向量, 则

$$\tau_1 \left(\frac{U^2 + V^2}{2} - \frac{1}{2\rho^2} \right)_\xi + \tau_2 \left(\frac{U^2 + V^2}{2} - \frac{1}{2\rho^2} \right)_\eta + \tau_1(U - V\omega) + \tau_2(U\omega + V) = 0, \quad (1.5.15)$$

也就是

$$\tau_1 \left(\frac{L^2}{2} \right)_\xi + \tau_2 \left(\frac{L^2}{2} \right)_\eta + L - N\omega = 0. \quad (1.5.16)$$

因此, 由 (1.5.11) 可得

$$[N\omega] = 0. \quad (1.5.17)$$

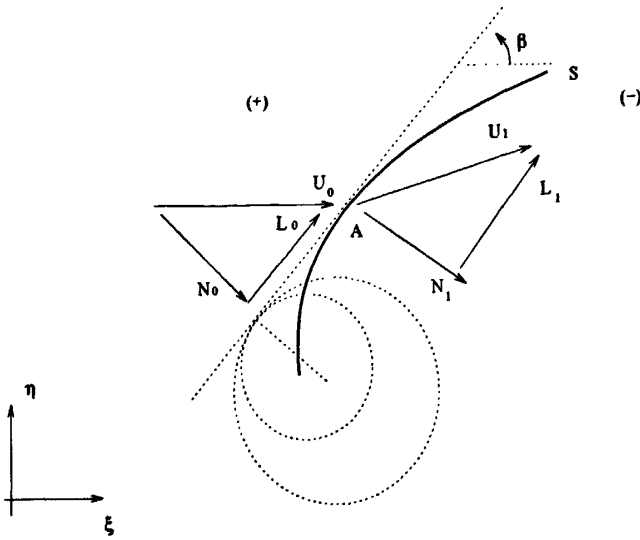


图 1.15 (ξ, η) 平面上的二维拟定常冲击波.

这表明对于 Chaplygin 气体, 如果在冲击波的一端流动为无旋的那么在冲击波的另一端流动也为无旋的.

容易验证, 如果冲击波两端的流动是无旋的那么穿过冲击波方程 (1.5.6) 和位势流模型 (1.3.23) 满足同样的 Rankine-Hugoniot 关系. 因此, 可以用拟定常位势流方程来代替 (1.5.6).

近年来, Chaplygin 气体模型吸引了不少的研究者. Y. Brenier([4]) 研究了一维 Chaplygin 气体的 Riemann 问题, 并得到了质量集中现象. D. Serre([59]) 构造了 Chaplygin 气体 Euler 方程几类二维 Riemann 问题的整体解. Guo, Sheng 和 Zhang([27]) 把 Chaplygin 气体的二维 Riemann 问题进行了分类. Sheng, Wang 和 Zhang([66]) 用数值广义特征分析的方法对上述分类进行了数值模拟. Lu([57]) 得到了一维 Cauchy 问题 BV 弱解的整体存在性. Kong 和 Wang([36]) 在假设初始数据满足一定条件下二维 Chaplygin 气体 Euler 方程整体光滑解的存在性.

第二章 二维等熵无旋定常简单波

二维定常简单波是由 Prandtl 发现的, 理论是由 Meyer 建立的. 二维等熵无旋定常简单波是在数学上为 (x, y) 平面上一区域中这样的流动, 它在 (u, v) 平面上的像是一条 Γ 特征线的一段弧. 这表明简单波区域是被一族直特征线所覆盖, 沿上述每一条直特征线 u, v 从而 c, p, ρ, τ 均为常数. 一个重要的性质是: 与常状态相邻的非常状态流动总是简单波. 关于这一部分内容的详细论述, 可以参考 Courant 和 Friedrichs 的著作 [18]. 最近, Cheng 和 Qu ([11]) 得到二维等熵无旋定常流两个疏散简单波的相互作用的全局解, 以及疏散简单波在接触间断上反射的局部解. 我们将根据波的传播原理讨论更一般的简单波相互作用的全局解的存在性.

§2.1 Riemann 不变量

二维等熵无旋定常流动可以由方程

$$\begin{cases} (c^2 - u^2)u_x - uv(u_y + v_x) + (c^2 - v^2)v_y = 0, \\ u_y - v_x = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

和 Bernoulli 定律

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{\dot{q}^2}{2}, \quad (2.1.2)$$

来描述, 其中 \dot{q} 为极限速度.

方程组 (2.1.1) 可以写成矩阵形式

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c^2 - u^2 & -uv \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} -uv & c^2 - v^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.3)$$

因此, (2.1.1) 的特征根由 $|D - \lambda B| = 0$ 来决定, 即:

$$(v - \lambda u)^2 - c^2(1 + \lambda^2) = 0. \quad (2.1.4)$$

由计算可得

$$\lambda = \lambda_{\pm} = \frac{uv \pm c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}}{u^2 - c^2}. \quad (2.1.5)$$

因此, 如果 $u^2 + v^2 > c^2$ 那么 (2.1.1) 为双曲型的. 这时, (2.1.1) 的两类特征和相应的左特征向量为

$$C_{\pm}: \frac{d\eta}{d\xi} = \lambda_{\pm}, \quad l_{\pm}: (1, \mp c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}). \quad (2.1.6)$$

将 (2.1.3) 两边左乘 l_{\pm} 可得如下的特征形式

$$\begin{cases} \partial_+ u + \lambda_- \partial_+ v = 0, \\ \partial_- u + \lambda_+ \partial_- v = 0, \end{cases} \quad (2.1.7)$$

其中 $\partial_{\pm} = \partial_x + \lambda_{\pm} \partial_y$.

由 (2.1.4), 可得

$$c^2 = \left(\frac{(u, v) \cdot (\lambda, -1)}{|(\lambda, -1)|} \right)^2. \quad (2.1.8)$$

这意味着: 流动速度在垂直于 C_{\pm} 特征的分量等于声速. 类似地, C_{\pm} 特征方向定义为它的与流动速度方向成一个锐角 ω 的切线方向. 几何上, C_+ 特征方向反时针选转 ω 角度到流速方向, C_- 特征方向顺时针旋转 ω 角度到流速的方向. 因此, 我们有

$$\sin \omega = \frac{c}{q}, \quad \cos \omega = \frac{\sqrt{q^2 - c^2}}{q}, \quad \tan \omega = \frac{c}{\sqrt{q^2 - c^2}}, \quad (2.1.9)$$

其中 $q^2 = u^2 + v^2$.

对于 (2.1.1) 的一个给定的超声速流动, 那么它的 C_+ 和 C_- 特征可以分别用 $\beta(\xi, \eta) = \text{const.}$ 和 $\alpha(\xi, \eta) = \text{const.}$ 来描述, 并形成一曲线坐标网. 令 θ 为流动方向和正 x 轴方向的夹角, 那么通过引入新的参数 α, β , 我们有:

$$C_+: \cos(\theta + \omega)y_{\alpha} = \sin(\theta + \omega)x_{\alpha}, \quad C_-: \cos(\theta - \omega)y_{\beta} = \sin(\theta - \omega)x_{\beta}, \quad (2.1.10)$$

$$\Gamma_+: \sin(\theta - \omega)v_{\alpha} = -\cos(\theta - \omega)u_{\alpha}, \quad \Gamma_-: \sin(\theta + \omega)v_{\beta} = -\cos(\theta + \omega)u_{\beta}, \quad (2.1.11)$$

其中 (u, v) 平面上的 Γ_{\pm} 特征线为 (x, y) 平面上的 C_{\pm} 特征线的像.

由于 $u = q \cos \theta, v = q \sin \theta$, 因此, 根据 (2.1.11) 有

$$q_{\alpha} \cos \omega - q \theta_{\alpha} \sin \omega = 0, \quad q_{\beta} \cos \omega + q \theta_{\beta} \sin \omega = 0. \quad (2.1.12)$$

通过积分 (2.1.12), 我们有

$$R_-(\theta, q) = \theta - \int^q \frac{\sqrt{q^2 - c^2}}{qc} dq \quad \text{和} \quad R_+(\theta, q) = \theta + \int^q \frac{\sqrt{q^2 - c^2}}{qc} dq \quad (2.1.13)$$

分别沿着 Γ_+ 和 Γ_- 为常数. R_{\pm} 称为方程组 (2.1.1) 的 Riemann 不变量. 因此, 我们有

$$\begin{cases} \bar{\partial}_+ R_- = 0, \\ \bar{\partial}_- R_+ = 0, \end{cases} \quad (2.1.14)$$

其中 $\bar{\partial}_{\pm} = \cos(\theta \pm \omega) \partial_x + \sin(\theta \pm \omega) \partial_y$.

§2.2 特征分解

为了得到双曲型方程 Goursat 问题的全局解, 我们通常需要得到一阶导数估计. R_{\pm} 的一阶导数估计可以从 R_{\pm} 的一阶导数所满足的方程得到, 我们接下来的目的就是要导出 R_{\pm} 的一阶导数所满足的微分方程. 由

$$\begin{cases} \cos(\theta - \omega)\partial_x R_- + \sin(\theta - \omega)\partial_y R_- = \bar{\partial}_- R_-, \\ \cos(\theta + \omega)\partial_x R_- + \sin(\theta + \omega)\partial_y R_- = 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

和

$$\begin{cases} \cos(\theta + \omega)\partial_x R_+ + \sin(\theta + \omega)\partial_y R_+ = \bar{\partial}_+ R_+, \\ \cos(\theta - \omega)\partial_x R_+ + \sin(\theta - \omega)\partial_y R_+ = 0, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

可得

$$\frac{\partial R_+}{\partial x} = -\frac{\sin(\theta - \omega)\bar{\partial}_+ R_+}{\sin 2\omega}, \quad \frac{\partial R_+}{\partial y} = \frac{\cos(\theta - \omega)\bar{\partial}_+ R_+}{\sin 2\omega}, \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial R_-}{\partial x} = \frac{\sin(\theta - \omega)\bar{\partial}_- R_-}{\sin 2\omega}, \quad \frac{\partial R_-}{\partial y} = -\frac{\cos(\theta + \omega)\bar{\partial}_- R_-}{\sin 2\omega}. \quad (2.2.4)$$

通过计算, 我们有

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_+ \bar{\partial}_- R_- &= \bar{\partial}_+ \bar{\partial}_- R_- - \bar{\partial}_- \bar{\partial}_+ R_- \\ &= (\cos(\theta + \omega)\partial_x + \sin(\theta + \omega)\partial_y)(\cos(\theta - \omega)\partial_x + \sin(\theta - \omega)\partial_y)R_- \\ &\quad - (\cos(\theta - \omega)\partial_x + \sin(\theta - \omega)\partial_y)(\cos(\theta + \omega)\partial_x + \sin(\theta + \omega)\partial_y)R_- \\ &= (\bar{\partial}_-(\theta + \omega) - \cos 2\omega\bar{\partial}_+(\theta - \omega))\frac{\bar{\partial}_- R_-}{\sin 2\omega} \\ &= \left(\frac{\partial(\theta + \omega)}{\partial R_-}\bar{\partial}_- R_- - \cos 2\omega\frac{\partial(\theta - \omega)}{\partial R_+}\bar{\partial}_+ R_+ \right)\frac{\bar{\partial}_- R_-}{\sin 2\omega}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

类似的, 我们可得

$$\bar{\partial}_- \bar{\partial}_+ R_+ = \left(\cos 2\omega\frac{\partial(\theta + \omega)}{\partial R_-}\bar{\partial}_- R_- - \frac{\partial(\theta - \omega)}{\partial R_+}\bar{\partial}_+ R_+ \right)\frac{\bar{\partial}_+ R_+}{\sin 2\omega}. \quad (2.2.6)$$

由 (2.1.12), (2.1.13) 可知, 沿着 Γ_{\pm}

$$\frac{dR_{\pm}}{d\theta} = 2, \quad \frac{dR_{\pm}}{dq} = \pm \frac{2\sqrt{q^2 - c^2}}{qc}. \quad (2.2.7)$$

因为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_+}{\partial \theta} & \frac{\partial R_+}{\partial q} \\ \frac{\partial R_-}{\partial \theta} & \frac{\partial R_-}{\partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial R_+} & \frac{\partial \theta}{\partial R_-} \\ \frac{\partial q}{\partial R_+} & \frac{\partial q}{\partial R_-} \end{pmatrix} = I, \quad (2.2.8)$$

所以,

$$\frac{\partial \theta}{\partial R_{\pm}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial q}{\partial R_{\pm}} = \pm \frac{2qc}{\sqrt{q^2 - c^2}}. \quad (2.2.9)$$

根据 (2.1.2) 和 (2.1.9), 我们可得

$$\frac{d\omega}{dq} = -\frac{2c^2 + (\gamma - 1)q^2}{2cq\sqrt{q^2 - c^2}}. \quad (2.2.10)$$

因此, 我们有

$$\frac{\partial(\theta \pm \omega)}{\partial R_{\mp}} = \frac{\partial \theta}{\partial R_{\pm}} \pm \frac{d\omega}{dq} \cdot \frac{\partial q}{\partial R_{\mp}} = \frac{(2\gamma - 1)q^2 + 3c^2}{2(q^2 - c^2)}. \quad (2.2.11)$$

将 (2.2.11) 代入 (2.2.5) 和 (2.2.6) 可得

$$\begin{cases} \bar{\partial}_+ \bar{\partial}_- R_- = f(\bar{\partial}_- R_- - \cos 2\omega \bar{\partial}_+ R_+) \bar{\partial}_- R_-, \\ \bar{\partial}_- \bar{\partial}_+ R_+ = f(\cos 2\omega \bar{\partial}_- R_- - \bar{\partial}_+ R_+) \bar{\partial}_+ R_+. \end{cases} \quad (2.2.12)$$

其中 $f = \frac{(2\gamma - 1)q^2 + 3c^2}{2(q^2 - c^2)} \cdot \frac{1}{\sin 2\omega} > 0$.

§2.3 简单波的相互作用

简单波的相互作用可由 Goursat 问题 (GP) 来描述: 在相互作用区域内

$$\begin{cases} \bar{\partial}_- R_+ = 0, \\ \bar{\partial}_+ R_- = 0, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$$\text{在 } \widehat{PB} \text{ 上 } R_+ = f_+(x, y), \quad R_- = f_-(x_P, y_P); \quad (2.3.2)$$

$$\text{在 } \widehat{PC} \text{ 上 } R_- = f_-(x, y), \quad R_+ = f_+(x_P, y_P), \quad (2.3.3)$$

\widehat{PB} 为过 P 点的 C_+ 贯穿特征线, \widehat{PC} 为过 P 的 C_- 贯穿特征线, 如图 3.3 所示.

定理 2.1. (局部解) 在 P 点附近存在一个小的领域 Ω_ϵ , 使得问题 (GP) 在 Ω_ϵ 上解存在且唯一.

证明: 局部解的存在性的证明可以参考著作 [55] 和 [56].

引理 2.1. 对于如下常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x)(1-y)y, & x > 0; \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

其中 $0 < y_0 < 1$, $f(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的非负连续函数, 我们有当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $y(x) < 1$.

证明: 通过简单的求积我们有

$$y(x) = \frac{\frac{y_0}{1+y_0} + \exp(\int_0^x f(x)dx)}{1 + \frac{y_0}{1+y_0} + \exp(\int_0^x f(x)dx)}. \quad (2.3.5)$$

于是, 该引理得证. \square

定理 2.2. 如果边界数据为下列四种情况之一

1. $\bar{\partial}_+ R_+ |_{\widehat{PB}} > 0, \bar{\partial}_- R_- |_{\widehat{PC}} < 0$, 并且沿着特征方向, C_+ 特征线 \widehat{PB} 是从 P 走到 B 的, C_- 特征线 \widehat{PC} 是从 P 走到 C 的;
2. $\bar{\partial}_+ R_+ |_{\widehat{PB}} > 0, \bar{\partial}_- R_- |_{\widehat{PC}} > 0$, 并且沿着特征方向, C_+ 特征线 \widehat{PB} 是从 P 走到 B 的, C_- 特征线 \widehat{PC} 是从 C 走到 P 的;
3. $\bar{\partial}_+ R_+ |_{\widehat{PB}} < 0, \bar{\partial}_- R_- |_{\widehat{PC}} < 0$, 并且沿着特征方向, C_+ 特征线 \widehat{PB} 是从 B 走到 P 的, C_- 特征线 \widehat{PC} 是从 C 走到 P 的;
4. $\bar{\partial}_+ R_+ |_{\widehat{PB}} > 0, \bar{\partial}_- R_- |_{\widehat{PC}} < 0$, 并且沿着特征方向, C_+ 特征线 \widehat{PB} 是从 P 走到 B 的, C_- 特征线 \widehat{PC} 是从 C 走到 P 的,

那么, 在流动区域 Ω 内

$$\sup_{\Omega} \max \{ |\bar{\partial}_+ R_+|, |\bar{\partial}_- R_-| \} \leq \sup_{\widehat{PB} \cup \widehat{PC}} \max \{ |\bar{\partial}_+ R_+|, |\bar{\partial}_- R_-| \}, \quad (2.3.6)$$

其中 $\sup_{\widehat{PC}} \{ |\bar{\partial}_+ R_+| \}, \sup_{\widehat{PB}} \{ |\bar{\partial}_- R_-| \}$ 可由 (2.2.12) 得到.

证明: 我们首先证明第一种情况. 由特征分解式 (2.2.12) 可知在 Ω 内恒成立

$$\bar{\partial}_+ R_+ > 0, \quad \bar{\partial}_- R_- < 0. \quad (2.3.7)$$

对任给的点 $D \in \Omega$, 有如下三种可能 (i) $\bar{\partial}_+ R_+ |_D > -\bar{\partial}_- R_- |_D$, (ii) $\bar{\partial}_+ R_+ |_D = -\bar{\partial}_- R_- |_D$, (iii) $\bar{\partial}_+ R_+ |_D < -\bar{\partial}_- R_- |_D$. 如果 $\bar{\partial}_+ R_+ |_D > -\bar{\partial}_- R_- |_D$, 那么

$$\bar{\partial}_- \bar{\partial}_+ R_+ |_D = f(\cos 2\omega \bar{\partial}_- R_- - \bar{\partial}_+ R_+) \bar{\partial}_+ R_+ |_D < 0. \quad (2.3.8)$$

令 C_+^D 为过 D 点的 C_+ 特征线, C_+^D 和 \widehat{PB} 相交于点 D_1 . 如果 $\bar{\partial}_+ R_+ |_{D_1} > \bar{\partial}_+ R_+ |_D$, 那么我们得到所要的估计. 否则, 在 C_+^D 上的点 D 和 D_1 之间存在一个点 D_2 , 使得

$$\bar{\partial}_+ R_+ |_D < \bar{\partial}_+ R_+ |_{D_2} = -\bar{\partial}_- R_- |_{D_2}. \quad (2.3.9)$$

令 $C_+^{D_1 D_2}$ 为连接 D_1 和 D_2 的 C_+ 特征线部分, 我们能够在 $C_+^{D_1 D_2}$ 上找到一点 D_3 , 使得

$$-\bar{\partial}_- R_- |_{D_2} < -\bar{\partial}_- R_- |_{D_3}. \quad (2.3.10)$$

这是由于, 如果在 $C_+^{D_1 D_2}$ 上 $-\bar{\partial}_- R_- < -\bar{\partial}_- R_- |_{D_2}$, 那么通过比较

$$\begin{cases} \bar{\partial}_- H = f(-\bar{\partial}_- R_-(D_2) - H)H, \\ H(D_2) = \bar{\partial}_+ R_+(D_2), \end{cases} \quad (2.3.11)$$

和

$$\begin{cases} \bar{\partial}_- \bar{\partial}_+ R_+ = f(\cos 2\omega \bar{\partial}_- R_- - \bar{\partial}_+ R_+) \bar{\partial}_+ R_+, \\ \bar{\partial}_+ R_+(D_2) = \bar{\partial}_+ R_+(D_2) \end{cases} \quad (2.3.12)$$

因此, 由比较原理和引理 2.1 我们有

$$\bar{\partial}_+ R_+(D_2) < H(D_2) < -\bar{\partial}_- R_-(D_2), \quad (2.3.13)$$

这和 (2.3.15) 相矛盾. 如果 $-\bar{\partial}_- R_-(D_3) \leq \bar{\partial}_+ R_+(D_3)$, 我们接下来可以采用上述相同的步骤向边界逼近. 如果 $-\bar{\partial}_- R_-(D_3) > \bar{\partial}_+ R_+(D_3)$, 那么

$$\bar{\partial}_+ \bar{\partial}_- R_- |_{D_3} = f(\bar{\partial}_- R_- - \cos 2\omega \bar{\partial}_+ R_+) \bar{\partial}_- R_- |_{D_3} > 0. \quad (2.3.14)$$

令 $C_-^{D_3}$ 为过点 D_3 的 C_- 特征线 $C_-^{D_3}$ 和 \widehat{PC} 交于点 D_4 . 如果 $-\bar{\partial}_- R_- |_{D_4} > -\bar{\partial}_- R_- |_{D_3}$, 那么我们得到所要的估计. 否则, 我们能够找到点 D_5 , 使得

$$-\bar{\partial}_- R_- |_{D_3} < -\bar{\partial}_- R_- |_{D_5} = \bar{\partial}_+ R_+ |_{D_5}. \quad (2.3.15)$$

于是, 通过重复这些过程我们有

$$\begin{aligned} & -\bar{\partial}_- R_- |_D < \bar{\partial}_+ R_+ |_D < \bar{\partial}_+ R_+ |_{D_2} = -\bar{\partial}_- R_- |_{D_2} < -\bar{\partial}_- R_- |_{D_3} \\ & < -\bar{\partial}_- R_- |_{D_5} = \bar{\partial}_+ R_+ |_{D_5} < \dots < \sup_{\widehat{PB} \cup \widehat{PC}} \max \{ |\bar{\partial}_+ R_+|, |\bar{\partial}_- R_-| \}. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

因此, 情况 (1) 证毕. 从证明的过程我们能够发现只要保证在 $|\bar{\partial}_\pm R_\pm| > |\bar{\partial}_\mp R_\mp|$ 的点有 $(-1)^Z \bar{\partial}_\mp \bar{\partial}_\pm |R_\pm| < 0$, 其中

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{如果特征线方向指向特征边界;} \\ 1, & \text{如果特征线方向背向特征边界.} \end{cases} \quad (2.3.17)$$

我们就能得到估计. 因此, 我们得到情况 (2), (3) 和 (4) 的证明. \square

定理 2.3. (全局解) 假设 Goursat 问题的边界数据为定理 2.2 的四种情况之一, 那么我们能够得到全局解.

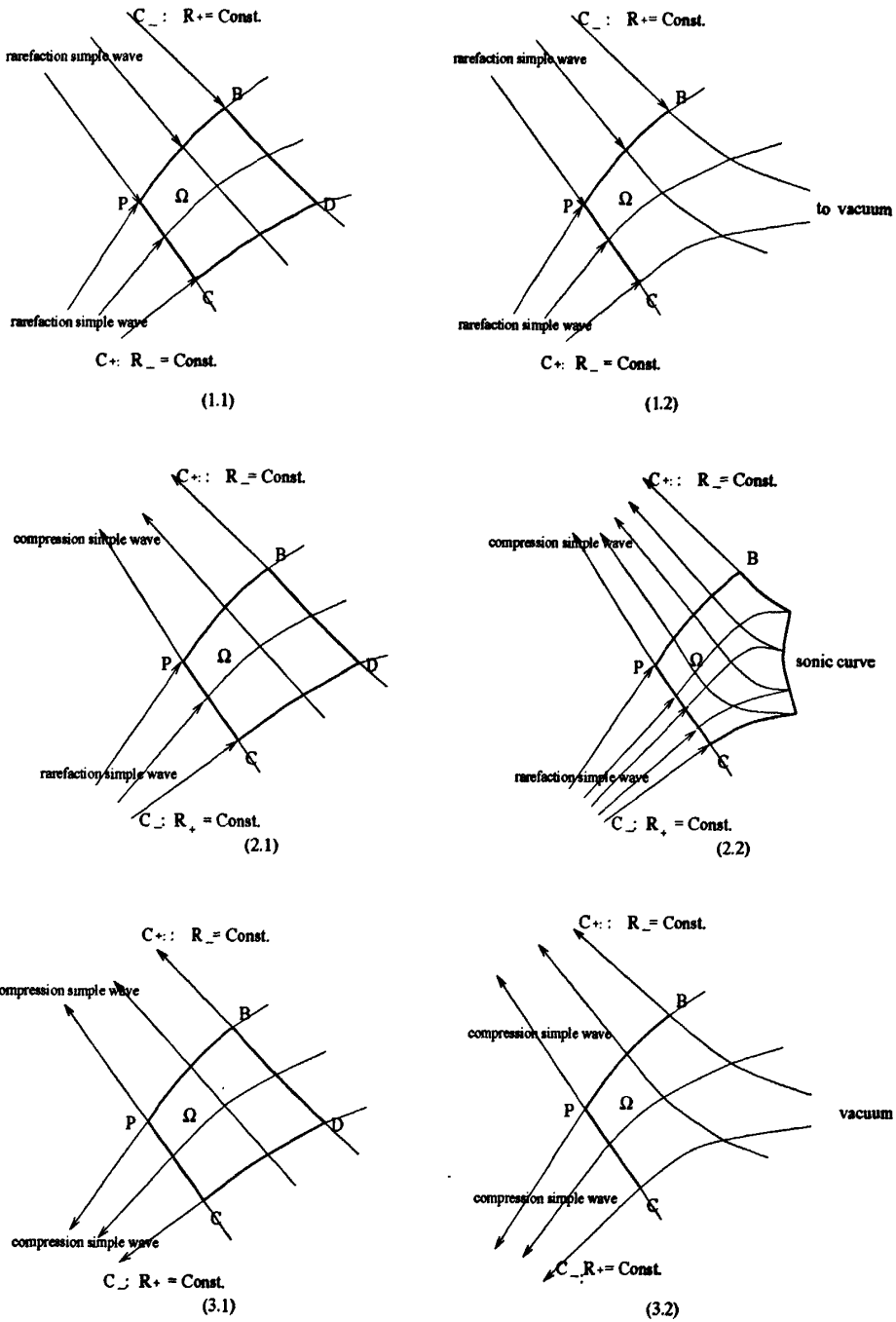


图 2.1 (1) 沿着特征方向两个疏散简单波的直特征线是进入相互作用区域的, (1.1) 完全作用; (1.2) 疏散到真空. (2) 沿着特征的方向疏散简单波的直特征线是进入相互作用区域, 而压缩简单波的直特征线是从相互作用区域出来的: (2.1) 完全作用; (2.2) 可以看成是疏散简单波在声速线上的反射. 作为相互作用的边界, 它也可以看成是疏散简单波在声速线上的反射. (3) 沿着特征线的方向两个压缩简单波的直特征均是从相互作用区域出来的, 该 Goursat 问题可以看成是求一个两个压缩简单波相互作用的逆过程.

证明: 令 $\chi: c(x, y) = \text{Const.}$ 为等声速线. 显然, χ 不和特征线相切. 这是由于: 如果在 χ 上的某一点 χ 和 C_- 相切, 那么在该点有 $\partial_+ c = 0$, 又由 Bernoulli 定律可得 $u\partial_+ u + \partial_+ v = 0$, 这和 $\partial_+ u + \lambda_- \partial_+ v = 0$ 相矛盾. 所以, 通过延拓 χ 和其它非特征曲线并不断地求解初边值问题的局部解我们能够得到相互作用的全局解, 图 3.3 给出了这几类相互作用的流动结构. \square

第三章 二维等熵无旋拟定常简单波

本章的主要目的是将二维等熵无旋定常简单波的结论推广到二维等熵无旋拟定常流动. 二维等熵无旋拟定常流动可以由

$$\begin{cases} (c^2 - U^2)u_\xi - UV(u_\eta + v_\xi) + (c^2 - V^2)v_\eta = 0, \\ u_\eta = v_\xi, \end{cases} \quad (3.0.1)$$

及拟 Bernoulli 定律

$$U^2 + V^2 + \frac{c^2}{\gamma - 1} + 2\phi = \text{Const.} \quad (3.0.2)$$

来描述. 我们本章主要研究二维等熵无旋拟定常流的简单波的几何结构及其相互作用.

§3.1 广义特征分析

方程组 (3.0.1) 可以写成矩阵形式

$$B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\xi + D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.1)$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} c^2 - U^2 & -UV \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -UV & c^2 - V^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.2)$$

方程组 (3.1.1) 的特征方根可以由 $|D - \lambda B| = 0$ 来确定, 即:

$$(V - \lambda U)^2 - c^2(1 + \lambda^2) = 0. \quad (3.1.3)$$

由计算可知

$$\lambda = \lambda_\pm = \frac{UV \pm \sqrt{c^2(U^2 + V^2 - c^2)}}{U^2 - c^2}. \quad (3.1.4)$$

因此, 当 $U^2 + V^2 > c^2$ 时方程组 (3.0.1) 为双曲型的. 这时, (3.0.1) 的两类特征和相应的左特征向量为

$$C_\pm: \frac{d\eta}{d\xi} = \lambda_\pm, \quad l_\pm: (1, \mp c\sqrt{U^2 + V^2 - c^2}). \quad (3.1.5)$$

将 (3.1.1) 两边左乘 l_\pm 可得如下的特征形式

$$\begin{cases} \partial_+ u + \lambda_- \partial_+ v = 0, \\ \partial_- u + \lambda_+ \partial_- v = 0, \end{cases} \quad (3.1.6)$$

其中 $\partial_{\pm} = \partial_{\xi} + \lambda_{\pm} \partial_{\eta}$.

由 (3.1.3) 可得

$$c = \frac{|(U, V) \cdot (\lambda_{\pm}, -1)|}{|(\lambda_{\pm}, -1)|}, \quad (3.1.7)$$

它表明拟流速在 C_{\pm} 特征线的法线方向的分量等于声速. 因此, 如果沿着一条 C_{\pm} 特征线 u, v 和 c 为常数, 则该特征线为直线. C_{\pm} 特征方向定义为它的与拟流速方向成一个锐角 ω 的切线方向, ω 称为拟 Mach 角. 通过简单的计算可以发现 C_+ 特征方向反时针选转 ω 角度到拟流速方向, C_- 特征方向顺时针旋转 ω 角度到拟流速的方向. 由 (3.1.7) 可知

$$c^2 = q^2 \sin^2 \omega, \quad M = q/c = 1/\sin \omega, \quad (3.1.8)$$

其中 $q^2 = U^2 + V^2$. 当流动为拟声速时 $\omega = 90^\circ$, 这时拟流速的方向和 C_{\pm} 特征的方向垂直.

C_+ 和 C_- 特征线可以分别用 $b(\xi, \eta) = \text{常数}$ 和 $a(\xi, \eta) = \text{常数}$ 来表示, 它们形成一个曲线坐标网. 这时, 我们可以在流动区域引入特征参数 a, b 来代替 ξ, η . 于是, 我们得到下列的特征方程组

$$C_+ : \eta_a = \lambda_+ \xi_a, \quad C_- : \eta_b = \lambda_- \xi_b, \quad (3.1.9)$$

$$\Gamma_+ : u_a + \lambda_- v_a = 0, \quad \Gamma_- : u_b + \lambda_+ v_b = 0, \quad (3.1.10)$$

其中 Γ_{\pm} 特征线是 C_{\pm} 特征线在 (u, v) 平面中的像. 由 (3.1.9) 和 (3.1.10), 我们有

$$u_a \xi_b + v_a \eta_b = 0, \quad u_b \xi_a + v_b \eta_a = 0. \quad (3.1.11)$$

(3.1.11) 表明如果 (u, v) 和 (ξ, η) 表示在同一个坐标平面下, 那么, 通过相应点 (ξ, η) 和 (u, v) , C_+ 和 Γ_- 的方向垂直, C_- 和 Γ_+ 的方向垂直. 将拟 Bernoulli 定律 (3.0.2) 两边沿着 C_{\pm} 特征方向求导可得

$$(u - \xi) \partial_{\pm} u + (v - \eta) \partial_{\pm} v + \frac{2c}{\gamma - 1} \partial_{\pm} c = 0. \quad (3.1.12)$$

因此, 通过引入特征参数我们有

$$(u - \xi) u_a + (v - \eta) v_a + \left(\frac{c^2}{\gamma - 1}\right)_a = 0, \quad (3.1.13)$$

$$(u - \xi) u_b + (v - \eta) v_b + \left(\frac{c^2}{\gamma - 1}\right)_b = 0. \quad (3.1.14)$$

我们定义两个符号函数 $s_+(a, b)$ 和 $s_-(a, b)$,

$$s_+(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{if } (u - \xi, v - \eta) \cdot (u_a, v_a) > 0, \\ 0, & \text{if } (u - \xi, v - \eta) \cdot (u_a, v_a) = 0, \\ -1, & \text{if } (u - \xi, v - \eta) \cdot (u_a, v_a) < 0, \end{cases} \quad (3.1.15)$$

$$s_-(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{if } (u - \xi, v - \eta) \cdot (u_b, v_b) > 0, \\ 0, & \text{if } (u - \xi, v - \eta) \cdot (u_b, v_b) = 0, \\ -1, & \text{if } (u - \xi, v - \eta) \cdot (u_b, v_b) < 0, \end{cases} \quad (3.1.16)$$

那么, 由 (3.1.7), (3.1.15) 和 (3.1.16) 可得

$$c_a = -\frac{\gamma-1}{2}s_+\sqrt{u_a^2+v_a^2}, \quad c_b = -\frac{\gamma-1}{2}s_-\sqrt{u_b^2+v_b^2}. \quad (3.1.17)$$

所以, 我们有

$$(c'(s))^2 = \frac{(\gamma-1)^2}{4}(r'(s))^2, \quad (3.1.18)$$

其中 $r(s)$ 代表 Γ 特征线的弧长.

§3.2 简单波解

对于一般的双曲型偏微分方程组, 我们按照 [31] 给出简单波的一般定义.

定义 3.1. 简单波是指这样一个区域中的流动, 它在像空间中的像为一条单参数的曲线, 即:

$$u(\xi, \eta) = \bar{u}(s), \quad v(\xi, \eta) = \bar{v}(s), \quad c(\xi, \eta) = \bar{c}(s), \quad (3.2.1)$$

其中 $s = s(\xi, \eta)$.

将 (3.2.1) 代入 (3.1.6), 可得

$$\begin{cases} (\bar{u}'(s) + \lambda_- \bar{v}'(s))\partial_+ s = 0, \\ (\bar{v}'(s) + \lambda_+ \bar{u}'(s))\partial_- s = 0. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

因此, 由 (3.2.2) 可知简单波的流动区域是被一组直的波特征所覆盖, 并且沿着每条直特征 u, v 和 c 保持不变.

定理 3.2. [51] 与常状态流动相临的区域中的非常状态流动总是简单波.

研究在给定的曲线 $l: \xi = \bar{\xi}(s), \eta = \bar{\eta}(s)$ 上给什么样的初值可以确定一个简单波很有意义的. 一种可能性是: 沿着该曲线我们令 $u = \bar{u}(s), v = \bar{v}(s), c = \bar{c}(s)$, 使得

$$(\bar{u}(s) - \bar{v}(s))^2 + (\bar{v}(s) - \bar{\eta}(s))^2 > \bar{c}^2, \quad (3.2.3)$$

$$\bar{u}'(s) + \bar{\lambda}_-(s)\bar{v}'(s) = 0, \quad (3.2.4)$$

$$(\bar{u}(s) - \bar{\xi}(s))\bar{u}'(s) + (\bar{v}(s) - \bar{\eta}(s))\bar{v}'(s) + \frac{2\bar{c}(s)}{\gamma-1}\bar{c}'(s) = 0, \quad (3.2.5)$$

其中

$$\bar{\lambda}_- = \frac{(\bar{u} - \bar{\xi})(\bar{v} - \bar{\eta}) - \sqrt{\bar{c}^2((\bar{u} - \bar{\xi})^2 + (\bar{v} - \bar{\eta})^2 - \bar{c}^2)}}{(\bar{u} - \bar{\xi})^2 - \bar{c}^2}. \quad (3.2.6)$$

令坐标变换 $T : (s, \sigma) \rightarrow (\xi, \eta)$ 为 $\xi = \bar{\xi}(s) + \sigma$, $\eta = \bar{\eta}(s) + \sigma\bar{\lambda}_-(s)$. 如果 $\bar{\eta}'(s) \neq \bar{\xi}'(s)\bar{\lambda}_-(s)$, 那么 Jacobin 行列式 $\partial(\xi, \eta)/\partial(s, \sigma) = \bar{\xi}'(s)\bar{\lambda}_-(s) - \bar{\eta}'(s) - \sigma\bar{\lambda}_-'(s)$ 在 l 上不为零. 因此, 变换 T 在 l 的一个邻域 $N(l)$ 上为光滑可逆的. 对 $(\xi, \eta) \in N(l)$, 我们令

$$(u, v, c)(\xi, \eta) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{c})(s(\xi, \eta)), \quad (3.2.7)$$

这意味着在从 l 上发出的以 $d\eta/d\xi = \bar{\lambda}_-(s)$ 为斜率的直线 $C_-(s)$ 上 u, v, c 为常数: $u(s), v(s), c(s)$. 如图 3.1 所示. 我们将要证明由 (3.2.7) 定义的 $(u, v, c)(\xi, \eta)$ 是一个简单波解.

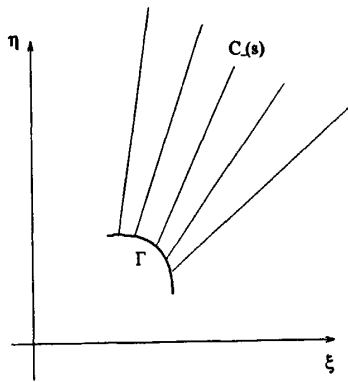


图 3.1 与一曲线 l 相毗邻的简单波.

定理 3.3. 由 (3.2.7) 定义的 $(u, v, c)(\xi, \eta)$ 是一个简单波解.

证明: 我们只要证明 (3.1.6), (3.1.12) 成立即可. 由 (3.2.6) 可知直线 $C_-(s)$ 是和以 $(\bar{u}(s), \bar{v}(s))$ 为圆心 $\bar{c}(s)$ 为半径的圆 C_s 相切, 并且沿着每一条直线 $C_-(s)$ 均成立 $\lambda_- \equiv \bar{\lambda}_-(s)$. 因此, 我们有 $\partial_- u = \partial_- v = \partial_- c = 0$. 所以,

$$\partial_- u + \lambda_+ \partial_- v = 0, \quad (u - \xi)\partial_- u + (v - \eta)\partial_- v + \partial_- \left(\frac{c^2}{\gamma-1} \right) = 0$$

由计算可得

$$\begin{aligned} \partial_+ u + \lambda_- \partial_+ v &= u_\xi + \lambda_+ u_\eta + \lambda_- (v_\xi + \lambda_+ v_\eta) \\ &= (\bar{u}'(s) + \bar{\lambda}_-(s)\bar{v}'(s))(s_\xi + \lambda_+ s_\eta) = 0. \end{aligned}$$

由 (3.2.4) 可知直线 $C_-(s)$ 是和向量 $(\bar{u}'(s), \bar{v}'(s))$ 垂直, 因此我们有 $(u - \xi)\bar{u}'(s) + (v - \eta)\bar{v}'(s)$ 沿着每条直线 $C_-(s)$ 为常数. 所以,

$$\begin{aligned} & (u - \xi)\partial_+ u + (v - \eta)\partial_+ v + \frac{2c}{\gamma - 1}\partial_+ c \\ &= ((u - \xi)\bar{u}'(s) + (v - \eta)\bar{v}'(s) + \frac{2\bar{c}}{\gamma - 1}\bar{c}'(s))(s_\xi + \lambda_+ s_\eta) \\ &= ((\bar{u}(s) - \bar{\xi}(s))\bar{u}'(s) + (\bar{v}(s) - \bar{\eta}(s))\bar{v}'(s) + \frac{2\bar{c}}{\gamma - 1}\bar{c}'(s))(s_\xi + \lambda_+ s_\eta) = 0. \end{aligned}$$

于是, 该定理证毕. \square

类似的, 如果 (3.2.4) 为

$$\bar{u}'(s) + \bar{\lambda}_+(s)\bar{v}'(s) = 0, \quad (3.2.8)$$

其中

$$\bar{\lambda}_+ = \frac{(\bar{u} - \bar{\xi})(\bar{v} - \bar{\eta}) + \sqrt{\bar{c}^2((\bar{u} - \bar{\xi})^2 + (\bar{v} - \bar{\eta})^2 - \bar{c}^2)}}{(\bar{u} - \bar{\xi})^2 - \bar{c}^2}, \quad (3.2.9)$$

我们能够得到 l 附近的一个以 C_+ 特征为直特征的简单波解.

§3.3 简单波的几何结构

由前面的讨论我们知道简单波的像是一条曲线 $u = \bar{u}(s)$, $v = \bar{v}(s)$, $c = \bar{c}(s)$, $s_1 < s < s_2$. 并且沿着该曲线成立

$$\bar{c}'(s) = \frac{\gamma - 1}{2} \sqrt{\bar{u}'(s)^2 + \bar{v}'(s)^2} \quad (3.3.1)$$

或

$$\bar{c}'(s) = -\frac{\gamma - 1}{2} \sqrt{\bar{u}'(s)^2 + \bar{v}'(s)^2}. \quad (3.3.2)$$

每条直特征线都映到该曲线上的点. 如果把简单波及其像表示在同一坐标平面下, 那么它的像可以由一速度图曲线 $\Lambda: \xi = \bar{u}(s), \eta = \bar{v}(s)$ 和一族以该曲线上的点为圆心 $\bar{c}(s)$ 为半径的声速圆 C_s 来表示. 每一条直特征线 $C(s)$ 均和相应状态的声速圆 C_s 相切, 并且它的方向和速度图曲线 Λ 在相应点的切线方向垂直.

如果沿着简单波中的每一条直特征线 $(\bar{u}(s) - \xi)\bar{u}'(s) + (\bar{v}(s) - \eta)\bar{v}'(s) > 0$, 那么由计算可知上述直特征线 $C_-(s)$ (或 $C_+(s)$) 可以表示成如下形式:

$$\xi = \bar{\xi}(s) + t\bar{v}'(s), \quad \eta = \bar{\eta}(s) - t\bar{u}'(s), \quad (3.3.3)$$

其中

$$\bar{\xi}(s) = \bar{u}(s) - \frac{\bar{c}(s)\bar{u}'(s)}{\sqrt{\bar{u}'(s)^2 + \bar{v}'(s)^2}}, \quad \bar{\eta}(s) = \bar{v}(s) - \frac{\bar{c}(s)\bar{v}'(s)}{\sqrt{\bar{u}'(s)^2 + \bar{v}'(s)^2}}, \quad (3.3.4)$$

$t < 0$ (或 $t > 0$) 是沿着直线 $s = \text{const.}$ 的参数. 我们称曲线 $\xi = \bar{\xi}(s), \eta = \bar{\eta}(s), s_1 < s < s_2$ 为简单波的声速边界. 相反, 如果沿着简单波中的每一条直特征线 $(\bar{u}(s) - \xi)\bar{u}'(s) + (\bar{v}(s) - \eta)\bar{v}'(s) < 0$, 那么上述直特征线 $C_-(s)$ (或 $C_+(s)$) 可以表示成

$$\xi = \bar{\xi}(s) - t\bar{v}'(s), \quad \eta = \bar{\eta}(s) + t\bar{u}'(s), \tag{3.3.5}$$

其中

$$\bar{\xi}(s) = \bar{u}(s) + \frac{\bar{c}(s)\bar{u}'(s)}{\sqrt{\bar{u}'(s)^2 + \bar{v}'(s)^2}}, \quad \bar{\eta}(s) = \bar{v}(s) + \frac{\bar{c}(s)\bar{v}'(s)}{\sqrt{\bar{u}'(s)^2 + \bar{v}'(s)^2}}, \tag{3.3.6}$$

$t < 0$ (或 $t > 0$).

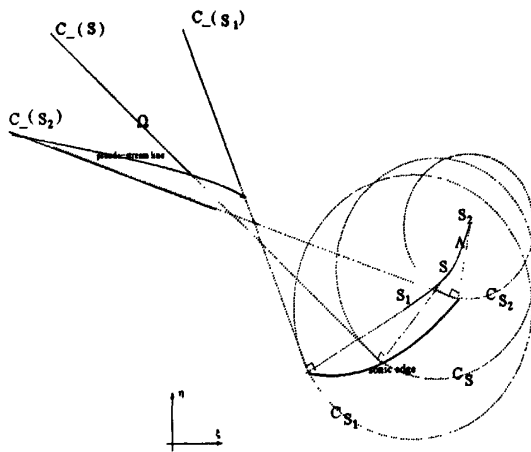


图 3.2 (ξ, η) 平面上的一个简单波.

定理 3.4. 对于多方气体 ($1 < \gamma < \frac{5}{3}$), 沿着直特征的方向疏散简单波的直特征线能够延伸到声速边界而不彼此相交.

证明: 我们只要证明沿着直特征线的方向这族直特征线是收缩的情况. 这时, 曲线 $\Lambda: \xi = \bar{u}(s), \eta = \bar{v}(s), s_1 < s < s_2$ 是一条凸或凹的曲线. 不失一般性, 我们假设直特征线为 $C_-(s), s_1 \leq s \leq s_2$, 并且沿着每一条直特征线 $(\bar{u}(s) - \xi, \bar{v}(s) - \eta) \cdot (\bar{u}'(s), \bar{v}'(s)) > 0$. 因此, 由前面的结论可知沿着拟流线的方向参数 s 是单调递增的. 令 $C_-(s'), C_-(s''), s' < s''$ 为任意给定的两条直特征线, 角 α 为 $C_-(s')$ 和 $C_-(s'')$ 按顺时针方向形成的角, 如图 3.3 所示. 只要证明当 α 小于 π 时 $C_-(s')$ 和 $C_-(s'')$ 在到达声速边界时不相交. 假设 $C_-(s')$ 和 $C_-(s'')$ 在到达声速边界之前相交于点 A . 令点 B 为 $(\bar{u}(s'), \bar{v}(s'))$; 点 C 为 $(\bar{u}(s''), \bar{v}(s''))$; 点 E 为 $C_-(s'')$ 上的点, 使得 CE 和 $C_-(s'')$ 垂直; 点 D 和 F 为 $C_-(s')$ 上的点, 使得 BD 和 CF 垂直于 $C_-(s')$. CE 和 $C_-(s')$ 相交

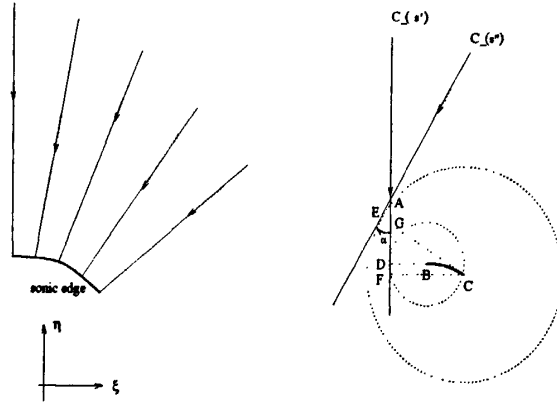


图 3.3 沿着直特征的方向疏散简单波的直特征线能够延伸到声速边界而不彼此相交.

于点 G . 由于沿着 $C_-(s')$ $(\bar{u}(s) - \xi, \bar{v}(s) - \eta) \cdot (\bar{u}'(s), \bar{v}'(s)) > 0$, $s' < s''$ 以及 $\alpha < \pi$, 因此

$$|BD| < |CF|. \tag{3.3.7}$$

所以, 我们有

$$\bar{c}(s'') = |CE| > |CG| > |CF| > |BD| = \bar{c}(s'), \tag{3.3.8}$$

这和 $\bar{c}(s'') < \bar{c}(s')$ 相矛盾. 于是, 该定理证毕. \square

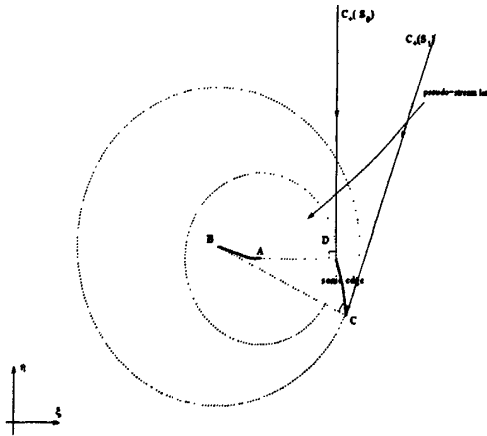


图 3.4 沿着直特征的方向压缩简单波的直特征线在到达声速边界之前会彼此相交.

定理 3.5. 对于多方气体 ($1 < \gamma < \frac{5}{3}$), 沿着直特征的方向压缩简单波的直特征线在到达声速边界之前会彼此相交.

证明: 不失一般性, 我们假设直特征线为 C_+ 特征线, 并且沿着拟流线 s 是单调递增的. 我们假设这些直特征能够延伸到声速边界而不相互相交, 如图 3.4 所示. 由

于该简单波为一压缩简单波, 于是存在 $s_0 \in (s_1, s_2)$ 使得 $(\bar{u}'(s_0), \bar{v}'(s_0))$ 不为零, 并且沿着直特征线 $C_+(s_0)$ 成立 $(\bar{u}(s_0) - \xi)\bar{u}'(s_0) + (\bar{v}(s_0) - \eta)\bar{v}'(s_0) < 0$. 由绪论的结论可知 $C_+(s_0)$ 和声速边界不相切, 那么存在一个非常小的 $\delta > 0$ 使得 $\{(\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)) \mid 0 < s_0 - s < \delta\}$ 落在声速圆 C_{s_0} 外. 令点 A, B, C, D 分别为 $(\bar{u}(s_0), \bar{v}(s_0)), (\bar{u}(s_1), \bar{v}(s_1)), (\bar{\xi}(s_0), \bar{\eta}(s_0)), (\bar{\xi}(s_1), \bar{\eta}(s_1))$. 由于沿着直特征线 $C_+(s_0)$ $(\bar{u}(s_0) - \xi)\bar{u}'(s_0) + (\bar{v}(s_0) - \eta)\bar{v}'(s_0) < 0$, 所以当 $s_0 - s_1$ 充分小时 $\bar{u}(s_0) > \bar{u}(s_1)$, 于是 $\bar{c}(s_0) = |AD| < |BC| = \bar{c}(s_1)$, 这和 $\bar{c}(s_0) > \bar{c}(s_1)$ 相矛盾. 于是, 该定理证毕. \square

定理 3.6. 对于 Chaplygin 气体 ($\gamma = -1$), 简单波的声速边界是直特征线的包络.

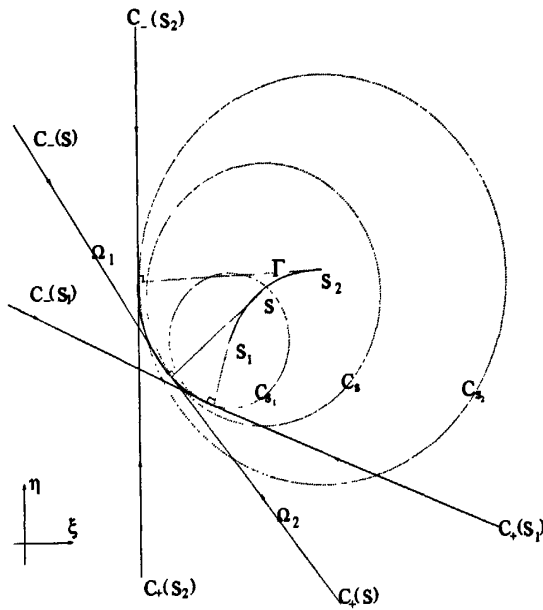


图 3.5 Chaplygin 气体的简单波.

上述简单波的几何结构也提供了我们一种图解的方法构造简单波. 令 $\Gamma: \xi = \bar{u}(s), \eta = \bar{v}(s), s_1 < s < s_2$ 为 (ξ, η) 平面上的一条光滑凸曲线. 沿着该曲线我们令 $\bar{c}(s)$ 满足 $\bar{c}'(s) = -\frac{\gamma-1}{2} \sqrt{\bar{u}'(s)^2 + \bar{v}'(s)^2}$. 因此, 我们得到一族以 $(\bar{u}(s), \bar{v}(s))$ 为圆心 $\bar{c}(s)$ 为半径的声速圆 C_s . 过曲线 Γ 上的点 $(\bar{u}(s), \bar{v}(s))$ 作曲线 Γ 的切线, 该切线与相应的声速圆 C_s 相交于两点. 根据 (3.1.17) 我们选择其中满足 $(\bar{u}(s) - \bar{\xi}(s))\bar{u}'(s) + (\bar{v}(s) - \bar{\eta}(s))\bar{v}'(s) > 0$ 的点 $(\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s))$. 于是, 我们得到一条单参数曲线 $L: \xi = \bar{\xi}(s), \eta = \bar{\eta}(s), s_1 < s < s_2$, 该曲线将称为简单波的声速边界. 过曲线 L 上的每一点 $(\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s))$ 作相应的声速圆 C_s 的切射线 $C_-(s)$ (或 $C_+(s)$). 令 Ω_1 是由单参数射线族 $C_-(s)$ 所单覆盖的区域, Ω_2 是由单参数射线族 $C_+(s)$ 所单覆盖的区域. 沿着射线 $C_-(s)$ (或 $C_+(s)$), 我们令 $(u, v, c)(\xi, \eta) \equiv (\bar{u}(s), \bar{v}(s), \bar{c}(s))$. 这样, 我们就得到区域 Ω_1 和 Ω_2 中的一个简单波解.

§3.4 Chaplygin 气体 Euler 方程二维 Riemann 问题中的简单波结构

本章的最后一节将重点讨论二维 Chaplygin 气体 Euler 方程的 Riemann 问题中的简单波流动结构.

§3.4.1 特征分解

令 θ 为拟流速方向和正 ξ 轴方向的夹角, α, β 和 θ 分别为 C_+, C_- 和 C_0 特征方向和正 ξ 轴方向的夹角. 那么

$$\alpha = \theta + \omega, \quad \beta = \theta - \omega. \quad (3.4.1)$$

于是,

$$u - \xi = c \frac{\cos \theta}{\sin \omega}, \quad v - \eta = c \frac{\sin \theta}{\sin \omega}. \quad (3.4.2)$$

对 (3.4.2) 两边求微分, 我们有

$$\bar{\partial}_- u = \cos \beta + \frac{\cos \theta}{\sin \omega} \bar{\partial}_- c + \frac{c \cos \alpha \bar{\partial}_- \beta - c \cos \beta \bar{\partial}_- \alpha}{2 \sin^2 \omega}, \quad (3.4.3)$$

$$\bar{\partial}_+ u = \cos \alpha + \frac{\cos \theta}{\sin \omega} \bar{\partial}_+ c + \frac{c \cos \alpha \bar{\partial}_+ \beta - c \cos \beta \bar{\partial}_+ \alpha}{2 \sin^2 \omega}, \quad (3.4.4)$$

$$\bar{\partial}_- v = \sin \beta + \frac{\sin \theta}{\sin \omega} \bar{\partial}_- c + \frac{c \sin \alpha \bar{\partial}_- \beta - c \sin \beta \bar{\partial}_- \alpha}{2 \sin^2 \omega}, \quad (3.4.5)$$

$$\bar{\partial}_+ v = \sin \alpha + \frac{\sin \theta}{\sin \omega} \bar{\partial}_+ c + \frac{c \sin \alpha \bar{\partial}_+ \beta - c \sin \beta \bar{\partial}_+ \alpha}{2 \sin^2 \omega}, \quad (3.4.6)$$

其中 $\bar{\partial}_+ = \cos \alpha \partial_\xi + \sin \alpha \partial_\eta$, $\bar{\partial}_- = \cos \beta \partial_\xi + \sin \beta \partial_\eta$. 又由 $\bar{\partial}_\pm u + \lambda_\mp \bar{\partial}_\pm v = 0$ 可得

$$\cot \omega \bar{\partial}_- c = -\cos(2\omega) + \frac{c}{2 \sin^2 \omega} (\cos 2\omega \bar{\partial}_- \alpha - \bar{\partial}_- \beta), \quad (3.4.7)$$

$$\cot \omega \bar{\partial}_+ c = -\cos(2\omega) + \frac{c}{2 \sin^2 \omega} (-\cos 2\omega \bar{\partial}_+ \beta + \bar{\partial}_+ \alpha). \quad (3.4.8)$$

由拟 Bernoulli 定律, 可得

$$\bar{\partial}_- c = \frac{c}{\sin(2\omega)} (\bar{\partial}_- \alpha - \bar{\partial}_- \beta) - \frac{1}{\cot \omega}, \quad (3.4.9)$$

$$\bar{\partial}_+ c = \frac{c}{\sin(2\omega)} (\bar{\partial}_+ \alpha - \bar{\partial}_+ \beta) - \frac{1}{\cot \omega}. \quad (3.4.10)$$

将 (3.4.9) 和 (3.4.10) 分别代入 (3.4.7) 和 (3.4.8), 可得

$$\bar{\partial}_- \alpha = \frac{2 \sin^2 \omega}{c}, \quad \bar{\partial}_+ \beta = -\frac{2 \sin^2 \omega}{c}. \quad (3.4.11)$$

因此, 由 (3.4.11) 可得

$$\bar{\partial}_+ c = \frac{c}{\sin(2\omega)} \bar{\partial}_+ \alpha, \quad \bar{\partial}_- c = -\frac{c}{\sin(2\omega)} \bar{\partial}_- \beta, \quad (3.4.12)$$

$$\bar{\partial}_- u = c \left(\frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \omega} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta \sin(2\omega)} \right) \bar{\partial}_- \beta, \quad (3.4.13)$$

$$\bar{\partial}_+ u = c \left(-\frac{\cos \beta}{2 \sin^2 \omega} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta \sin(2\omega)} \right) \bar{\partial}_+ \alpha, \quad (3.4.14)$$

$$\bar{\partial}_- v = c \left(\frac{\sin \alpha}{2 \sin^2 \omega} - \frac{\sin \theta}{\sin \theta \sin(2\omega)} \right) \bar{\partial}_- \beta, \quad (3.4.15)$$

$$\bar{\partial}_+ v = c \left(-\frac{\sin \beta}{2 \sin^2 \omega} + \frac{\sin \theta}{\sin \theta \sin(2\omega)} \right) \bar{\partial}_- \beta. \quad (3.4.16)$$

由于 $\bar{\partial}_0 = \frac{1}{2 \cos \omega} (\bar{\partial}_+ + \bar{\partial}_-)$, 于是

$$\bar{\partial}_0 c = \frac{c}{4 \cos^2 \omega \sin \omega} (\bar{\partial}_+ \alpha - \bar{\partial}_- \beta), \quad (3.4.17)$$

$$\bar{\partial}_+ \alpha = 2 \cos \omega \bar{\partial}_0 \alpha - \frac{2 \sin^2 \omega}{c}, \quad (3.4.18)$$

$$\bar{\partial}_- \beta = 2 \cos \omega \bar{\partial}_0 \beta + \frac{2 \sin^2 \omega}{c}. \quad (3.4.19)$$

将 (3.4.18) 和 (3.4.19) 代入 (3.4.17), 我们有

$$\cos^2 \omega \sin \omega \bar{\partial}_0 c - c \cos \omega \bar{\partial}_0 \omega = -\sin^2 \omega. \quad (3.4.20)$$

因此, 由 (3.4.20) 可得

$$\bar{\partial}_0 (c^2 \cot^2 \omega) = -\frac{2c}{\sin \omega}. \quad (3.4.21)$$

引理 3.1. (交换关系 [51])

$$\bar{\partial}_+ \bar{\partial}_- I - \bar{\partial}_- \bar{\partial}_+ I = \frac{1}{\sin(2\omega)} [(\bar{\partial}_+ \beta - \cos(2\omega) \bar{\partial}_- \alpha) \bar{\partial}_+ I + (\bar{\partial}_- \alpha - \cos(2\omega) \bar{\partial}_+ \beta) \bar{\partial}_- I]. \quad (3.4.22)$$

由交换关系 (3.4.22), 我们可以得到特征分解

$$\bar{\partial}_- \bar{\partial}_+ \alpha = \frac{\sin(3\omega)}{c \cos \omega} \bar{\partial}_+ \alpha, \quad \bar{\partial}_+ \bar{\partial}_- \beta = \frac{\sin(3\omega)}{c \cos \omega} \bar{\partial}_- \beta. \quad (3.4.23)$$

§3.4.2 简单波中的贯穿特征线

简单波中的贯穿特征线是指简单波中的非直特征线. 我们首先讨论疏散简单波, 即: $\bar{\partial}_0 c > 0$ 的情况. 不失一般性, 我们假设直特征为 C_- 特征且 $s = s(\xi, \eta)$ 沿着拟流线是递增的. 那么, 由 (3.4.11) 知 $\beta'(s) < 0$. 由 (3.4.17) 及 $\bar{\partial}_- \beta = 0$ 有

$$\bar{\partial}_+ \alpha > 0. \quad (3.4.24)$$

由 (3.4.12) 可得

$$\alpha'(s) = \frac{\sin(2\omega)}{c} c'(s). \quad (3.4.25)$$

因此, $\alpha(s)$ 可以通过求解常微分方程 (3.4.25) 在给定初始数据

$$\alpha(s_1) = \alpha_0 \quad (3.4.26)$$

的初值问题得到. 于是, C_+ 贯穿特征线可以由如下常微分方程组的初值问题得到

$$\begin{cases} \eta'(s) \cos \alpha(s) = \xi'(s) \sin \alpha(s), \\ ((\bar{u}(s) - \xi(s))^2 + (\bar{v}(s) - \eta(s))^2) \sin^2 \omega = c^2(s), \\ (\xi, \eta)(s_1) = (\xi_0, \eta_0). \end{cases} \quad (3.4.27)$$

又由 (3.4.25), 可知

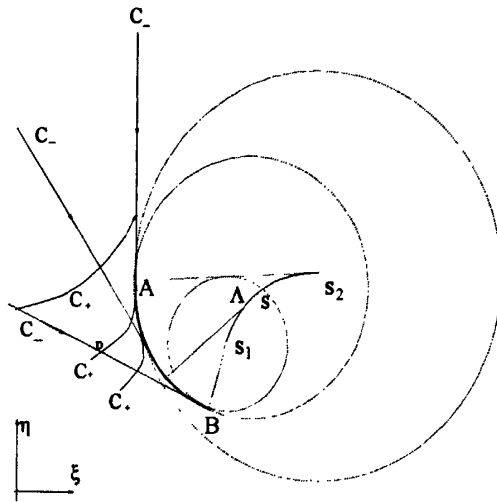


图 3.6 疏散简单波中的贯穿特征线.

$$2\omega'(s) = \frac{\sin(2\omega)}{c} c'(s) - \beta'(s). \quad (3.4.28)$$

由于 $\beta'(s_1) < 0$, 所以如果 $\omega(s_1)$ 充分接近 $\pi/2$ 那么存在 $s \in (s_1, s_2)$ 使得 $\omega(s) = \frac{\pi}{2}$. 这表明有一些贯穿特征线会终止在简单波的声速边界上. 图 3.6 示意从 BD 上发出的贯穿特征线 C_+ 终止在声速边界 \widehat{AB} 上.

接下来我们讨论压缩简单波, 即: $\bar{\partial}_0 c < 0$ 中的贯穿特征线. 不失一般性, 我们假设直特征为 C_+ 特征且 $s = s(\xi, \eta)$ 沿着拟流线是递增的, 那么由 (3.4.11) 知 $\alpha'(s) > 0$. 由 (3.4.17) 及 $\bar{\partial}_+ \alpha = 0$, 可得

$$\bar{\partial}_- \beta > 0. \quad (3.4.29)$$

由 (3.4.12) 可得

$$\beta'(s) = -\frac{\sin(2\omega)}{c} c'(s). \quad (3.4.30)$$

因此, $\beta(s)$ 可以通过求解常微分方程 (3.4.30) 在给定初始数据

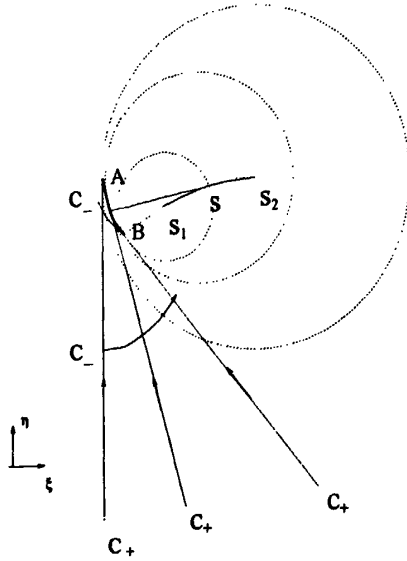


图 3.7 压缩简单波中的贯穿特征线.

$$\beta(s_1) = \beta_0 \tag{3.4.31}$$

的初值问题得到. C_- 贯穿特征线可以由如下常微分方程组的初值问题得到

$$\begin{cases} \cos \beta \eta'(s) = \sin \beta \xi'(s), \\ ((\bar{u}(s) - \xi(s))^2 + (\bar{v}(s) - \eta(s))^2) \sin^2 \omega = c^2(s), \\ (\xi, \eta)(s_1) = (\xi_0, \eta_0). \end{cases} \tag{3.4.32}$$

又由 (3.4.30) 可知

$$2\omega'(s) = \alpha'(s) + \frac{\sin(2\omega)}{c} c'(s). \tag{3.4.33}$$

由于 $\alpha'(s_1) > 0$, 因此如果 $\omega(s_1)$ 充分接近 $\pi/2$ 那么存在 $s \in (s_1, s_2)$ 使得 $\omega(s) = \frac{\pi}{2}$, 如图 3.7 所示.

§3.4.3 4J Riemann 问题中的简单波结构

本节我们要考虑绕一弯曲拟流线部的简单波结构, 该流动结构出现在 4J Riemann 问题的流动. 如果 Riemann 初值

$$(u, v, c)(0, x, y) = (u_i, v_i, c_i), \quad (x, y) \in \text{第 } i \text{ 象限}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3.4.34}$$

满足 $u_1 = u_2, u_3 = u_4, v_1 = v_4, v_2 = v_3, v_1 < v_2, v_4 < v_3, u_4 < u_1, u_3 < u_2$ 以及 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$, 那么常状态 (1) 和 (2), (2) 和 (3), (3) 和 (4), (4) 和 (1) 分别由接触间断 $J_{12}, J_{23}, J_{34}, J_{14}$ 连接, 如图 3.8 所示. 常状态 (2) 是以从 A 发出的终止在声速

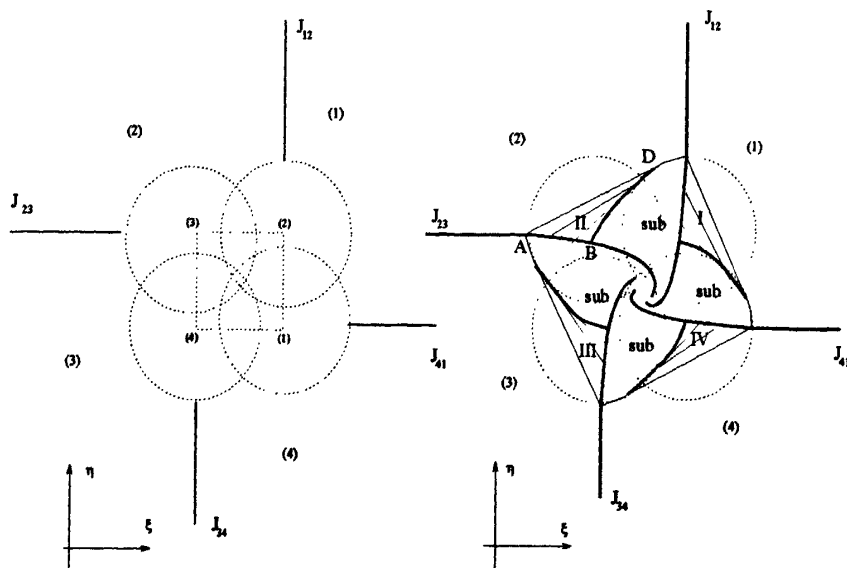


图 3.8 4J Riemann 问题.

圆 C_2 上的点 D 的 C_+ 特征为终界的. 由定理 3.2 可知 AD 附近的流动是一个简单波. 令 II 是由拟流线 J_{23} , C_+ 特征线 \overline{AD} , 声速线 \widehat{DB} (\widehat{DB} 待定) 所围成的区域. 我们将证明区域 I, II, III 和 IV 中流动是简单波. 我们接下来仅构造 II 中的简单波.

假设拟流线 J_{23} 的弯曲部可以表示成 $\eta = f(\xi)$, $\eta_A = f(\xi_A)$, 且 $f' < 0$, $f'' < 0$. 沿着 $\eta = f(\xi)$ 有 $u = \bar{u}(\xi)$, $v = \bar{v}(\xi)$, $c = \bar{c}(\xi)$, $\xi > \xi_A$. 因此, 由特征分析的结论可得

$$\bar{u}'(\xi) + \lambda_+(\xi)\bar{v}'(\xi) = 0, \quad (3.4.35)$$

其中

$$\lambda_+(\xi) = \frac{(\bar{u}(\xi) - \xi)(\bar{v}(\xi) - f(\xi)) + \sqrt{\bar{c}^2(\xi)((\bar{u}(\xi) - \xi)^2 + (\bar{v}(\xi) - f(\xi))^2 - \bar{c}^2(\xi))}}{(\bar{u}(\xi) - \xi)^2 - \bar{c}^2(\xi)}, \quad (3.4.36)$$

由于 $\eta = f(\xi)$ 是一条拟流线, 于是

$$\frac{\bar{v}(\xi) - f(\xi)}{\bar{u}(\xi) - \xi} = f'(\xi). \quad (3.4.37)$$

又因为沿着直特征 $(u - \xi)\bar{u}'(\xi) + (v - \eta)\bar{v}'(\xi) > 0$, 所以由 (3.1.17) 可知

$$\bar{c}'(\xi) = \sqrt{\bar{u}'(\xi)^2 + \bar{v}'(\xi)^2}. \quad (3.4.38)$$

因此, 通过求解常微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} (3.4.35, 3.4.37, 3.4.38); \\ (\bar{u}, \bar{v}, \bar{c})(\xi_A) = (u_2, v_2, c_2), \end{cases} \quad (3.4.39)$$

以及向量 $(1, f'(\xi_A))$ 和向量 $(u_2 - \xi_A, v_2 - f(\xi_A))$ 平行, 因此由特征分析的结论可知

$$1 + \lambda_+(\xi_A)f'(\xi_A) > 0. \quad (3.4.47)$$

所以, F_1 和 F_2 在 (ξ_A, u_2, c_2) 的一个小领域内是连续可微的. 因此, 由存在性定理知存在一个 $\delta > 0$, 使得在 $(\xi_A, \xi_A + \delta)$ 存在唯一解. 由解的延拓定理知解能够延拓到点 ξ_B , 在该点

$$(\bar{u}(\xi_B) - \xi_B)^2 + (\bar{v}(\xi_B) - f(\xi_B))^2 - \bar{c}(\xi_B)^2 = 0, \quad (3.4.48)$$

以及

$$1 + \lambda_+(\xi_B)f'(\xi_B) = 0. \quad (3.4.49)$$

由 (3.4.23) 以及上一节的结论知流动在整个区域 II 中为简单波, 如图 3.9 所示.

§3.4.4 简单波的相互作用

如果 Riemann 初值 (3.4.34) 满足 $v_1 = v_2, u_2 < u_1, c_2 < c_1, v_2 = v_3, u_2 < u_3, c_2 = c_3, u_3 = u_4, v_4 < v_3, c_4 = c_3, u_4 = u_1, v_4 < v_1$ 以及 $c_1 > c_4$, 那么常状态 (1) 和 (2), (2) 和 (3), (3) 和 (4), (4) 和 (1) 分别由 $R_{12}, J_{23}, J_{34}, R_{41}$ 过渡, 如图 3.10 所示. 拟流线 J_{23} 的弯曲部发出的疏散简单波 I 和拟流线 J_{41} 的弯曲部发出的简单波 II 从点 E 开始相互作用, 如图 3.10 所示. 我们本节将要研究两个疏散简单波的相互作用的全局解.

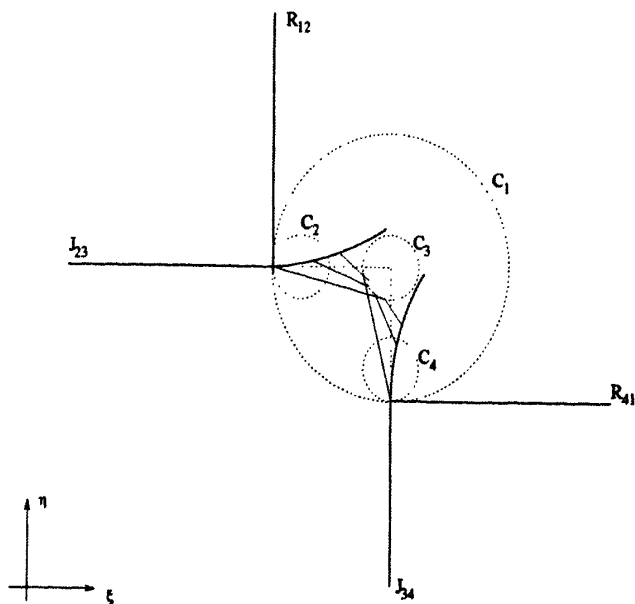


图 3.10 2J 和 2R Riemann 问题.

令 RS_1 和 RS_2 是两个疏散简单波, 它们的直特征线分别为 C_- 和 C_+ 特征. RS_1 和 RS_2 从 A 开始相互作用. 令 \widehat{AB} 是 RS_1 中过 A 的 C_+ 贯穿特征线, \widehat{AC} 为 RS_2 中过 A 的 C_- 贯穿特征线. RS_1 和 RS_2 在区域 Ω 中相互作用. 该问题可以转化为如下的 Goursat 问题

$$\begin{cases} \bar{\partial}_- \alpha = \frac{2 \sin^2 \omega}{c}, \\ \bar{\partial}_+ \beta = -\frac{2 \sin^2 \omega}{c}, \\ \bar{\partial}_0(c^2 \cot^2 \omega) = -\frac{2c}{\sin \omega}, \\ (\alpha, \beta, c)|_{\widehat{AB}} = (\alpha_+, \beta_+, c_+)(\xi, \eta), \\ (\alpha, \beta, c)|_{\widehat{AC}} = (\alpha_-, \beta_-, c_-)(\xi, \eta), \end{cases} \quad (3.4.50)$$

其中 \widehat{AB} , \widehat{AC} , $\alpha_{\pm}(\xi, \eta)$, $\beta_{\pm}(\xi, \eta)$ 和 $c_{\pm}(\xi, \eta)$ 可由前面的结论确定. 显然边界条件 $(\alpha_{\pm}, \beta_{\pm}, c_{\pm})$ 在 A 点满足相容性条件. 于是我们能得到问题 (3.4.50) 局部解的存在性.

引理 3.2. (局部存在性) Goursat 问题 (3.4.50) 在 A 点的一个小领域内解存在且唯一.

引理 3.3. (先验估计) 如果在相互作用区域 Ω' 内拟马赫数 $M > 1 + \epsilon$, 其中 $\epsilon > 0$, 那么

$$|D\alpha|, |D\beta|, |Dc| < K, \quad (3.4.51)$$

其中 K 仅依赖于 ϵ 和边界 \widehat{AB} , \widehat{AC} 上的数据.

证明: 由于 RS_1 和 RS_2 为疏散简单波, 于是有

$$\bar{\partial}_+ \alpha|_{\widehat{AB}} > 0, \quad \bar{\partial}_- \beta|_{\widehat{AC}} < 0. \quad (3.4.52)$$

由 (3.4.23) 可得在 Ω' 上

$$\bar{\partial}_+ \alpha > 0, \quad \bar{\partial}_- \beta < 0. \quad (3.4.53)$$

因此, 由 (3.4.12) 可得在 Ω' 上

$$\bar{\partial}_{\pm} c > 0, \quad (3.4.54)$$

以及

$$c > c(\omega). \quad (3.4.55)$$

由 (3.4.11) 和 (3.4.55) 可得

$$0 < \bar{\partial}_- \alpha < \frac{2}{c(\omega)}, \quad -\frac{2}{c(\omega)} < \bar{\partial}_+ \beta < 0. \quad (3.4.56)$$

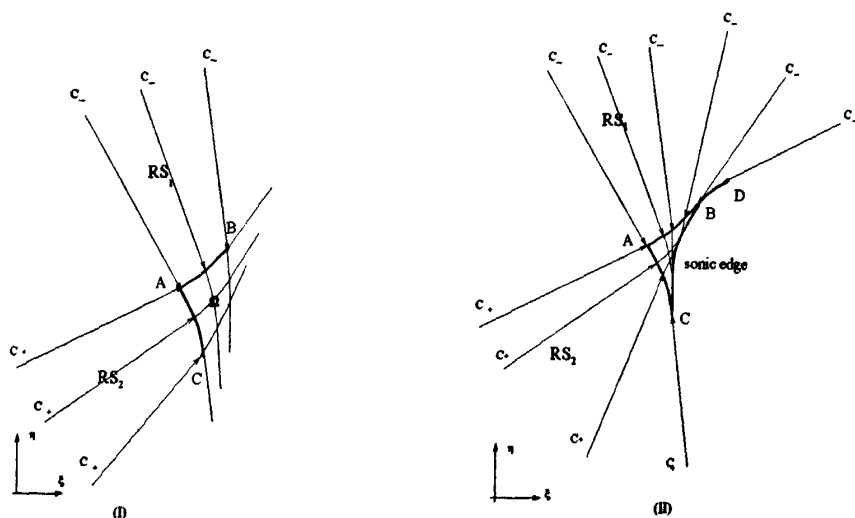


图 3.11 两个疏散简单波的相互作用: (I) 完全作用; (II) 相互作用直到声速边界.

又因为在 Ω' 上 $\cos \omega > \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$, 所以通过将 (3.4.23) 沿着 C 特征积分可得

$$0 < \bar{\partial}_+ \alpha < K, \quad -K < \bar{\partial}_- \beta < 0. \quad (3.4.57)$$

该定理证毕. \square

由特征分析的结论可知, 相互作用区域内的曲线 $\ell: F(\xi, \eta) = U^2 + V^2 - c^2 = \text{常数} > 0$ 和特征线不相切, 并且沿着 ℓ 有

$$\frac{U^2 + V^2}{c^2} - 1 = \frac{\text{常数}}{c^2}. \quad (3.4.58)$$

因此, 由引理 3.2 和引理 3.3 及 [55] 和 [56] 的结论可知通过延拓 ℓ 可得整体解的存在性.

定理 3.7. (全局解) (3.4.50) 的局部解能够延拓到整个相互作用区域 Ω , 如 3.11 的图 (I) 所示, 或结束到一条声速边界, 如图 (II) 所示.

第四章 冲击波反射现象中的 von Neumann 反射结构

为了试图解决 von Neumann 三波点悖论, Colella 和 Henderson (J. Fluid Mech., 213, 1900, 71-94.) 在数值模拟弱冲击波反射的时候提出了一种新的反射结构, 称为 von Neumann 反射. 他们根据他们的数值模拟结果提出在这种反射结构中入射冲击波和 Mach 杆在三波点处是光滑连接的, 三波点实际上不存在而是退化为一个很小的弯曲的区域, 流动在该区域是压缩的. G. Ben-Dor 在他的著作 "Shock wave reflection phenomena" 对该类反射结构给出了一个示意图, 如图 4.1 所示. 数学理论上的一个问题是: 如果将 von Neumann 三波点悖论发生时所发生的反射称为 von Neumann 反射, 那么 von Neumann 反射的数学结构是什么样的? 上述反射结构是否是一个可能的 von Neumann 反射结构? 我们本章的目的是要证明图 4.1 所示意的 von Neumann 反射结构是不存在的.

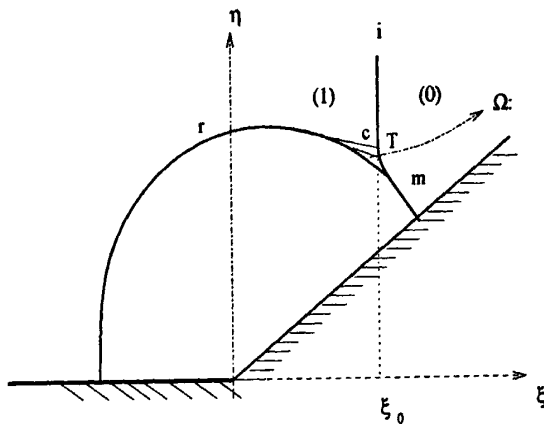


图 4.1 一个假想的拟定常 von-Neumann 反射结构.

§4.1 位势流模型的一类不可能的 von Neumann 反射结构

由于和常状态流动区域相临的非常状态流动为简单波. 因此, 位势流模型的上述 von Neumann 反射结构实际为入射冲击波的弯曲部分发出的一个以 C_- 特征为直特征简单波.

根据拟定常位势方程 (1.3.23) 的弱解的定义 ([16]), 我们有穿过冲击波 ϕ 满足如下的 Rankine-Hugoniot 条件

$$[\rho(\phi, |\nabla\phi|)\nabla\phi \cdot \nu]_{\text{shock}} = 0, \quad (4.1.1)$$

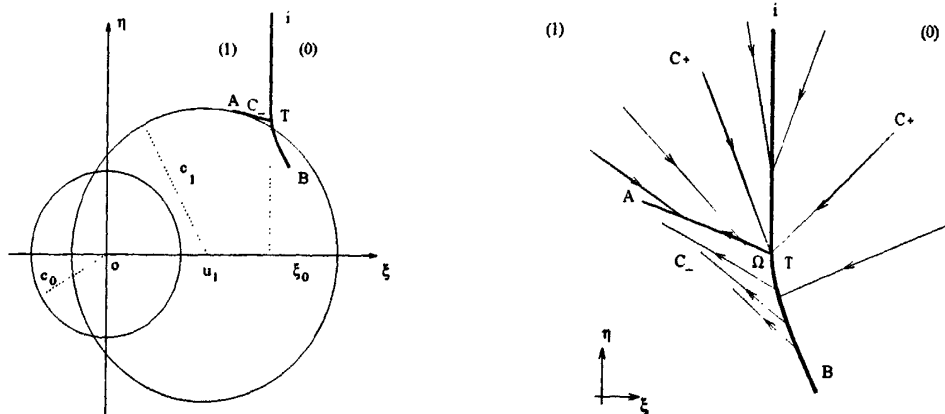


图 4.2 位势流模型的一个不可能的拟定常 von-Neumann 反射结构.

$$[\phi]_{\text{shock}} = 0 \Rightarrow [\nabla\phi \cdot \tau]_{\text{shock}} = 0, \quad (4.1.2)$$

其中 ν 和 τ 分别代表冲击波曲线的单位法向量和切向量. 假设入射冲击波波前和波后的状态分别为 $(\rho_0, u_0, v_0) = (1, 0, 0)$ 和 $(\rho_1, u_1, v_1) = (\rho_1, u_1, 0)$, 其中 $\rho_1 > 1, u_1 > 0$. 那么, 入射冲击波波前的速度势函数 $\phi(\xi, \eta)$ 为

$$\phi(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \text{Const}. \quad (4.1.3)$$

不失一般性, 我们假设 (4.1.3) 中的常数为 0, 并假设 $A = \frac{\gamma-1}{\gamma}$. 那么, 拟 Bernoulli 定律 (1.3.22) 中的常数为 1. 于是, 由 (1.3.24) 有

$$\rho(\phi, |\nabla\phi|) = (1 - \phi - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (4.1.4)$$

假设入射冲击波在 (ξ, η) 平面中的位置为 $\xi = \xi_0$, 那么, 由 (4.1.1)-(4.1.2) 可得

$$\rho_1(u_1 - \xi_0) = -\xi_0 \Rightarrow u_1 = \frac{\rho_1 - 1}{\rho_1}\xi_0, \quad (4.1.5)$$

$$\frac{1}{2}((u_1 - \xi_0)^2 + \eta^2) + \rho_1^{\gamma-1} - \frac{1}{2}(\xi_0^2 + \eta^2) = 1. \quad (4.1.6)$$

因此,

$$u_1 = (\rho_1 - 1)\sqrt{\frac{2(\rho_1^{\gamma-1} - 1)}{\rho_1^2 - 1}}, \quad \xi_0 = \rho_1\sqrt{\frac{2(\rho_1^{\gamma-1} - 1)}{\rho_1^2 - 1}}. \quad (4.1.7)$$

由于入射冲击波后 T 点的流动为拟超声的, 因此我们有 $\eta_T > \hat{\eta}$, $\hat{\eta}$ 满足

$$(u_1 - \xi_0)^2 + \hat{\eta}^2 = c^2(\rho_1) = (\gamma - 1)\rho_1^{\gamma-1}. \quad (4.1.8)$$

由 (4.1.7) 和 (4.1.8), 我们有

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)\rho_1^{\gamma+1} - (\gamma + 1)\rho_1^{\gamma-1} + 2}{\rho_1^2 - 1}}. \quad (4.1.9)$$

假设 T 点附近入射冲击波的弯曲部可以表示成 $\xi = f(\eta)$, $\eta < \hat{\eta}$, $\xi_0 = f(\eta_T)$, 弯曲冲击波波后的状态为 $u = u(\eta)$, $v = v(\eta)$. 那么, 由 Rankine-Hugoniot 条件 (4.1.1)-(4.1.2) 可得

$$\rho(\eta)(f(\eta) - u(\eta) + f'(\eta)v(\eta) - \eta f'(\eta)) = f(\eta) - \eta f'(\eta), \quad (4.1.10)$$

$$u(\eta)f'(\eta) + v(\eta) = 0. \quad (4.1.11)$$

由 (4.1.2)-(4.1.4), 我们有

$$\rho(\eta) = (1 + u(\eta)f(\eta) + \eta v(\eta) - \frac{1}{2}(u(\eta)^2 + v(\eta)^2))^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (4.1.12)$$

又由于简单波的直特征和速度图曲线在相应点的切线方向垂直, 所以我们有

$$u'(\eta) + \lambda_-(\eta)v'(\eta) = 0, \quad (4.1.13)$$

其中

$$\lambda_-(\eta) = \frac{(u(\eta) - f(\eta))(v(\eta) - \eta) - \sqrt{(\gamma-1)\rho^{\gamma-1}(\eta)((u(\eta) - f(\eta))^2 + (v(\eta) - \eta)^2 - (\gamma-1)\rho^{\gamma-1}(\eta))}}{(u(\eta) - f(\eta))^2 - (\gamma-1)\rho^{\gamma-1}(\eta)}. \quad (4.1.14)$$

因此, 为了得到一个 von Neumann 反射结构我们需要考虑如下常微分方程组的初值问题

$$(IP): \begin{cases} (4.1.10, 4.1.11, 4.1.13) & \text{当 } \eta < \eta_T; \\ (u, v, f)(\eta_T) = (u_1, 0, \xi_0), \end{cases} \quad (4.1.15)$$

定理 4.1. 对任意的 $\eta_T \in (\hat{\eta}, +\infty)$, $(u, v, f)(\eta) \equiv (u_1, 0, \xi_0)$ 是问题 (IP) 的唯一解.

证明: 显然, $(u, v, f)(\eta) \equiv (u_1, 0, \xi_0)$ 是 (IP) 的解. 因此, 我们只要证明唯一性. 由 (4.1.11) 可得

$$f' = -v/u. \quad (4.1.16)$$

将 (4.2.23) 代入 (4.1.10), 我们有

$$(\rho - 1)(uf + v\eta) - \rho(u^2 + v^2) = 0. \quad (4.1.17)$$

将 (4.1.17) 两边关于 η 求导, 我们可得

$$\frac{\rho^{2-\gamma}}{\gamma-1}(uf + v\eta - u^2 - v^2)(u'f + v'\eta - uu' - vv') + (\rho-1)(u'f + v'\eta) - 2\rho(uu' + vv') = 0. \quad (4.1.18)$$

将 $u' = -\lambda_-v'$ 代入 (4.1.18), 我们有

$$\left(\frac{\rho^{2-\gamma}}{\gamma-1}(uf + v\eta - u^2 - v^2)(u\lambda_- + \eta - f\lambda_- - v) + (\rho-1)(\eta - f\lambda_-) - 2\rho(v - u\lambda_-) \right) v' = 0. \quad (4.1.19)$$

当 $\eta \leq \eta_T$ 时, 我们令

$$F_{\eta_T}(\eta) = \frac{\rho^{2-\gamma}}{\gamma-1}(uf + v\eta - u^2 - v^2)(u\lambda_- + \eta - f\lambda_- - v) + (\rho-1)(\eta - f\lambda_-) - 2\rho(v - u\lambda_-) \quad (4.1.20)$$

对于 $\eta_T \geq \hat{\eta}$, 我们定义

$$G(\eta_T) = F_{\eta_T}(\eta_T). \quad (4.1.21)$$

由计算可得

$$G(\eta_T) = A\eta_T + B\hat{\lambda}_-(\eta_T), \quad (4.1.22)$$

其中

$$A = \frac{\rho_1^{2-\gamma}}{\gamma-1}u_1(\xi_0 - u_1) + (\rho_1 - 1) > 0, \quad B = -\frac{\rho_1^{2-\gamma}}{\gamma-1}u_1(u_1 - \xi_0)^2 - (\rho_1 - 1)\xi_0 + 2\rho_1u_1, \quad (4.1.23)$$

$$\hat{\lambda}_-(\eta_T) = \frac{-\eta_T(u_1 - \xi_0) - \sqrt{(\gamma-1)\rho_1^{\gamma-1}((u_1 - \xi_0)^2 + \eta_T^2 - (\gamma-1)\rho_1^{\gamma-1})}}{(u_1 - \xi_0)^2 - (\gamma-1)\rho_1^{\gamma-1}}. \quad (4.1.24)$$

接下来我们要证明对任意的 $\eta_T \geq \hat{\eta}$ 我们有 $G(\eta_T) > 0$. 由 (4.1.7) 有

$$B = \frac{\rho_1u_1}{(\gamma-1)(\rho_1^2 - 1)} [(\gamma-1)(\rho_1^2 - 1) - 2(1 - \rho_1^{1-\gamma})]. \quad (4.1.25)$$

因为, $\rho_1 > 1$,

$$\frac{d}{d\rho_1} [(\gamma-1)(\rho_1^2 - 1) - 2(1 - \rho_1^{1-\gamma})] = 2(\gamma-1)(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1}) > 0, \quad (4.1.26)$$

所以我们有 $B > 0$. 又由计算可得

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\lambda}_-(\eta_T)}{d\eta_T} &= \frac{(\xi_0 - u_1)\sqrt{(u_1 - \xi_0)^2 + \eta_T^2 - (\gamma-1)\rho_1^{\gamma-1}} - \eta_T\sqrt{(\gamma-1)\rho_1^{\gamma-1}}}{((u_1 - \xi_0)^2 - (\gamma-1)\rho_1^{\gamma-1})\sqrt{(u_1 - \xi_0)^2 + \eta_T^2 - (\gamma-1)\rho_1^{\gamma-1}}} \\ &= \frac{1}{((u_1 - \xi_0)^2 - (\gamma-1)\rho_1^{\gamma-1})\sqrt{(u_1 - \xi_0)^2 + \eta_T^2 - (\gamma-1)\rho_1^{\gamma-1}}} \\ &\quad \cdot \frac{((\xi_0 - u_1)^2 - (\gamma-1)\rho_1^{\gamma-1})((u_1 - \xi_0)^2 + \eta_T^2)}{(\xi_0 - u_1)\sqrt{(u_1 - \xi_0)^2 + \eta_T^2 - (\gamma-1)\rho_1^{\gamma-1}} + \eta_T\sqrt{(\gamma-1)\rho_1^{\gamma-1}}} > 0. \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

因此, $G(\eta_T)$ 是 $[\hat{\eta}, +\infty)$ 的单调递增函数. 所以, 要证明 $G(\eta_T) > 0$ 只须证明 $G(\hat{\eta}) > 0$.

由计算, 我们有

$$\hat{\lambda}_-(\hat{\eta}) = \frac{\sqrt{2(\rho_1^{\gamma-1} - 1)}\sqrt{(\gamma-1)\rho_1^{\gamma+1} - (\gamma+1)\rho_1^{\gamma-1} + 2}}{-2 - (\gamma-1)\rho_1^{\gamma+1} + (\gamma+1)\rho_1^{\gamma-1}}. \quad (4.1.28)$$

因此,

$$\begin{aligned}
 G(\hat{\eta}) &= A\hat{\eta} + B\lambda_-(\hat{\eta}) \\
 &= \frac{(\rho_1 - 1)[2\rho_1 - 2\rho^{2-\gamma} + (\gamma - 1)\rho_1^2 + 1 - \gamma]}{(\gamma - 1)(\rho_1^2 - 1)} \sqrt{\frac{(\gamma - 1)\rho_1^{\gamma+1} - (\gamma + 1)\rho_1^{\gamma-1} + 2}{\rho_1^2 - 1}} \\
 &\quad + \frac{\rho_1(\rho_1 - 1)}{(\gamma - 1)(\rho_1^2 - 1)} \sqrt{\frac{2(\rho_1^{\gamma-1} - 1)}{\rho_1^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{2(\rho_1^{\gamma-1} - 1)} \sqrt{(\gamma - 1)\rho_1^{\gamma+1} - (\gamma + 1)\rho_1^{\gamma-1} + 2}}{-\rho_1^{\gamma-1}} \\
 &= (\rho_1 - 1) \sqrt{\frac{(\gamma - 1)\rho_1^{\gamma+1} - (\gamma + 1)\rho_1^{\gamma-1} + 2}{\rho_1^2 - 1}} > 0.
 \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

于是, 对任意的 $\eta_T > \hat{\eta}$ 我们有 $G(\eta_T) > 0$. 所以, 对一固定的 $\eta_T > \hat{\eta}$, 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 在 $(\eta_T - \varepsilon, \eta_T)$ 上有 $F_{\eta_T}(\eta) \neq 0$. 于是, 在 $(\eta_T - \varepsilon, \eta_T)$ 上有 $v'(\eta) \equiv 0$. 由此, 该定理证毕. \square

由定理 4.1 我们可以立刻得到如下结论

结论 4.1. 对于拟定常位势流模型图 4.2 所示意的 von Neumann 反射结构在数学是不可能的.

§4.2 Euler 方程组的一类不可能的 von Neumann 反射结构

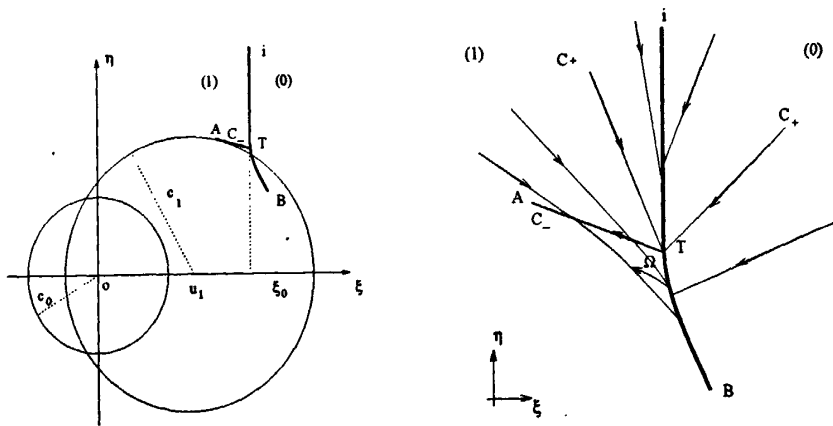


图 4.3 Euler 方程的一个不可能的拟定常 von-Neumann 反射结构.

类似于上一节, 我们令入射冲击波波前和波后的状态分别为 $(u_0, v_0, p_0, \rho_0) = (0, 0, 1, 1)$ 和 $(u_1, v_1, p_1, \rho_1) = (u_1, 0, p_1, \rho_1)$, 其中 $1 < \rho_1 < \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$, $u_1 > 0$. 那么, 由

Rankine-Hugoniot 关系式 (1.3.30) 可得

$$\begin{cases} p_1 = \frac{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1)\rho_1}, \\ u_1 = (\rho_1 - 1) \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho_1 [(\gamma+1) - (\gamma-1)\rho_1]}}, \\ \xi_0 = \rho_1 \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho_1 [(\gamma+1) - (\gamma-1)\rho_1]}}, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

假设在该 von Neumann 反射结构中入射冲击波从点 $T: (\xi_0, \eta_T)$ 开始弯曲. 由于 T 点冲击波波后的状态为拟超声的, 因此, 由计算可知

$$\eta_T > \hat{\eta} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_1} \cdot \frac{(\gamma+1)(\rho_1 - 1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1)\rho_1}}. \quad (4.2.2)$$

假设 T 点附近的冲击波可以由一条 C^2 光滑曲线 $\xi = f(\eta)$ 来表示, 其中 $f'(\eta_T) = 0$, 那么由 Rankine-Hugoniot 关系 (1.3.29) 我们有沿着弯曲冲击波冲击波波后的状态满足

$$\begin{cases} (\rho - 1)(\eta f' + u f) + \rho(u - v f') = 0; \\ f' = -\frac{v}{u}; \\ \rho((u - f) - f'(v - \eta))^2 + p(1 + f'^2) = (\eta f' - f)^2 + (1 + f'^2); \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - (u f + v \eta) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p}{\rho} - 1 \right) = 0. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

将 $f' = -\frac{v}{u}$ 代入其它三个关系式我们有

$$\begin{cases} (\rho - 1)(v \eta + u f) - \rho(u^2 + v^2) = 0; \\ f' = -\frac{v}{u}; \\ \rho(u(u - f) + v(v - \eta))^2 + (p - 1)(u^2 + v^2) - (u f + v \eta)^2 = 0; \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - (u f + v \eta) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p}{\rho} - 1 \right) = 0. \end{cases} \quad (4.2.4)$$

从现在开始, 我们将 (u, v, p, ρ) 记作 (w_1, w_2, w_3, w_4) , 那么 (1.3.12) 可以写成

$$\sum_{j=1}^4 \zeta_{lj}(w, \xi, \eta) \left(\frac{\partial w_j}{\partial \xi} + \lambda_l(w, \xi, \eta) \frac{\partial w_j}{\partial \eta} \right) = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4, \quad (4.2.5)$$

其中 $\lambda_1 = \lambda_-$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$, $\lambda_4 = \lambda_+$; 在边界 TB 上

$$\begin{cases} f' = -\frac{w_2}{w_1}, \\ F_1(w_1, w_2, w_3, w_4, f, \eta) = (w_4 - 1)(w_2\eta + w_1f) - w_4(w_1^2 + w_2^2) = 0, \\ F_2(w_1, w_2, w_3, w_4, f, \eta) = w_4(w_1(w_1 - f) + w_2(w_2 - \eta))^2 \\ \quad + (w_3 - 1)(w_1^2 + w_2^2) - (w_1f + w_2\eta)^2 = 0, \\ F_3(w_1, w_2, w_3, w_4, f, \eta) = \frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2) - (w_1f + w_2\eta) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{w_3}{w_4} - 1\right) = 0. \end{cases} \quad (4.2.6)$$

在边界 TA 上

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (u_1, 0, \rho_1, \rho_1). \quad (4.2.7)$$

引理 4.1. 令

$$J(\eta_T) = \begin{pmatrix} \zeta_{41} & \zeta_{42} & \zeta_{43} & \zeta_{44} \\ \frac{\partial F_1}{\partial w_1} & \frac{\partial F_1}{\partial w_2} & \frac{\partial F_1}{\partial w_3} & \frac{\partial F_1}{\partial w_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial w_1} & \frac{\partial F_2}{\partial w_2} & \frac{\partial F_2}{\partial w_3} & \frac{\partial F_2}{\partial w_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial w_1} & \frac{\partial F_3}{\partial w_2} & \frac{\partial F_3}{\partial w_3} & \frac{\partial F_3}{\partial w_4} \end{pmatrix}_{(u_1, 0, \rho_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T)} \quad (4.2.8)$$

, 那么当 $\eta_T > \hat{\eta}$ 时, 我们有 $\det(J(\eta_T)) \neq 0$.

证明: 由于 $\rho_1(\xi_0 - u_1) = \xi_0$, $\rho_1 - 1 = u_1\xi_0$, 因此由计算可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial w_1}(u_1, 0, \rho_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T) &= (\rho_1 - 1)\xi_0 - 2\rho_1u_1 = -\rho_1u_1, \\ \frac{\partial F_1}{\partial w_2}(u_1, 0, \rho_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T) &= (\rho_1 - 1)\eta_T, \quad \frac{\partial F_1}{\partial w_3}(u_1, 0, \rho_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T) = 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial w_4}(u_1, 0, \rho_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T) &= u_1(\xi_0 - u_1), \\ \frac{\partial F_2}{\partial w_1}(u_1, 0, \rho_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T) &= 2\rho_1u_1(u_1 - \xi_0) + 2(\rho_1 - 1)u_1 - 2u_1\xi_0^2 \\ &= -2u_1\xi_0(u_1 - \xi_0) + 2u_1\xi_0^2 - 2u_1\xi_0^2 = -2u_1^2\xi_0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial w_2}(u_1, 0, \rho_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T) &= -2\rho_1u_1(u_1 - \xi_0)\eta_T - 2u_1\xi_0\eta_T = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial w_3}(u_1, 0, \rho_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T) &= u_1^2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial w_4}(u_1, 0, \rho_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T) = u_1^2(u_1 - \xi_0)^2, \\ \frac{\partial F_3}{\partial w_1}(u_1, 0, \rho_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T) &= u_1 - \xi_0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial w_2}(u_1, 0, \rho_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T) = -\eta_T, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial w_3}(u_1, 0, p_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T) = \frac{\gamma}{(\gamma-1)\rho_1}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial w_4}(u_1, 0, p_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T) = -\frac{\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1^2}.$$

因此, 通过提取公因式我们有

$$\begin{aligned} \det(J(\eta_T)) &= \begin{vmatrix} \eta_T & u_1 - \xi_0 & \frac{\sqrt{c_1^2((u_1 - \xi_0)^2 + \eta_T^2 - c_1^2)}}{\rho_1 c_1^2} & 0 \\ -\rho_1 u_1 & (\rho_1 - 1)\eta_T & 0 & u_1(\xi_0 - u_1) \\ -2u_1^2 \xi_0 & 0 & u_1^2 & u_1^2(\xi_0 - u_1)^2 \\ u_1 \xi_0 & -\eta_T & \frac{\gamma}{(\gamma-1)\rho_1} & -\frac{\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{(\rho_1 - 1)u_1^2 \xi_0^3}{\rho_1^3} \begin{vmatrix} \eta_T/\xi_0 & u_1 - \xi_0 & \frac{\sqrt{c_1^2((u_1 - \xi_0)^2 + \eta_T^2 - c_1^2)}}{\rho_1 c_1^2} & 0 \\ -1 & \eta_T & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -\eta_T \rho_1 & \frac{\gamma}{\gamma-1} & \frac{(\gamma-1) - (\gamma+1)\rho_1}{2(\gamma-1)} \end{vmatrix} \\ &= \frac{(\rho_1 - 1)u_1^2 \xi_0^3}{\rho_1^3} \left(\frac{\eta_T^2}{\xi_0} \cdot \frac{(\gamma-3)\rho_1 - (\gamma+1)}{2(\gamma-1)} + \frac{\xi_0}{\rho_1} \cdot \frac{(\gamma+1)(\rho_1 - 1)}{2(\gamma-1)} \right) \\ &\quad - \frac{(\rho_1 - 1)u_1^2 \xi_0^3}{\rho_1^3} \cdot \frac{2\rho_1 \eta_T}{\gamma-1} \cdot \frac{\sqrt{c_1^2((u_1 - \xi_0)^2 + \eta_T^2 - c_1^2)}}{\rho_1 c_1^2} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

所以, 由 (4.2.9) 可知 $\det(J)(\eta_T)$ 是 $(\hat{\eta}, +\infty)$ 上的单调递减函数. 又由计算可知

$$\det(J)(\hat{\eta}) = -\frac{(\rho_1 - 1)^2 u_1^2 \xi_0^2}{\rho_1^4} \cdot \frac{\gamma(\gamma+1)}{2(\gamma-1)} < 0, \quad (4.2.10)$$

因此, 在 $(\hat{\eta}, +\infty)$ 上 $\det(A)(\eta_T) < 0$. \square

为了在同一区域内比较 (w_1, w_2, w_3, w_4) 和常状态流动 $(u_1, 0, p_1, \rho_1)$ 我们引入坐标变换

$$x = \xi - (f(\eta) - \xi_0), \quad y = \eta - \Lambda(f(\eta) - \xi_0), \quad (4.2.11)$$

其中 $\Lambda = \lambda_-(u_1, 0, p_1, \rho_1, \xi_0, \eta_T)$. 那么 TA 映为 (x, y) 平面下的直线 $T'A'$: $\{(x, y) \mid y - \eta_T = \Lambda(x - \xi_0), x < \xi_0\}$, 不难发现 TA 和 $T'A'$ 具有相同的表示式, TB 映为 $T'B'$: $\{(x, y) \mid x = \xi_0, y < \eta_T\}$, TA 和 TB 之间的区域 Ω 映到 $T'A'$ 和 $T'B'$ 之间的角形区域, 为了方便我们仍记它为 Ω . 由于在 T 点

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 1,$$

因此上述坐标变换在 T 附近的一个小领域内是光滑可逆的. 于是, 在 T 附近我们有逆变换

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(y). \quad (4.2.12)$$

由计算可知

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = -f'(\eta) \frac{\partial}{\partial x} + (1 - \Lambda f'(\eta)) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.2.13)$$

因此, 在 (x, y) 平面下 w 满足

$$\sum_{j=1}^4 \zeta_{lj}(w, \xi, \eta) \left[(1 - \lambda_l(w, \xi, \eta) f'(\eta)) \frac{\partial w_j}{\partial x} + \lambda_l(w, \xi, \eta) (1 - \Lambda f'(\eta)) \frac{\partial w_j}{\partial y} \right] = 0, \quad (4.2.14)$$

其中 $l = 1, 2, 3, 4$.

令 $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4) = (u_1, 0, p_1, \rho_1) \bar{w}_j = w_j - \bar{w}_j, j = 1, 2, 3, 4$, 那么 \bar{w} 满足

$$\sum_{j=1}^4 \zeta_{lj}(\bar{w}, x, y) \left(\frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x} + \lambda_l(\bar{w}, x, y) \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial y} \right) = \mu_l(x, y), \quad l = 1, 2, 3, 4, \quad (4.2.15)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_l(x, y) &= \sum_{j=1}^4 \left[\zeta_{lj}(\bar{w}, x, y) - \zeta_{lj}(w, \xi, \eta) (1 - \lambda_l(w, \xi, \eta) f'(\eta)) \right] \frac{\partial w_j}{\partial x} \\ &+ \sum_{j=1}^4 \left[\zeta_{lj}(\bar{w}, x, y) \lambda_l(\bar{w}, x, y) - \zeta_{lj}(w, \xi, \eta) \lambda_l(w, \xi, \eta) (1 - \Lambda f'(\eta)) \right] \frac{\partial w_j}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

在边界 $T'A'$ 上

$$(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4) = (0, 0, 0, 0). \quad (4.2.17)$$

接下来我们要得到 \bar{w} 在边界 $T'B'$ 上的估计. 令

$$y = g_l(x; x_0, y_0) \quad (4.2.18)$$

为双曲型方程组 (4.2.15) 的过点 $(x_0, y_0) \in \Omega$ 的第 l 类特征线. 我们有

$$\begin{cases} \frac{dg_l(x; x_0, y_0)}{dx} = \lambda_l(\bar{w}, x, g_l(x; x_0, y_0)); \\ g_l(x_0; x_0, y_0) = y_0. \end{cases} \quad (4.2.19)$$

过点 $B'_\delta: (\xi_0, \eta_T - \delta)$ 的第四类特征线与 $T'A'$ 交于点 A'_δ . 令 Ω_δ 为 $T'B'_\delta, T'A'_\delta$ 和 $A'_\delta B'_\delta$ 围成的区域, 如图 4.4 所示. 很容易发现过 Ω_δ 内的任意点 (x_0, y_0) 的任何一类特征线的 $x \geq x_0$ 的部分都落在 Ω_δ 内直到和边界 $T'B'_\delta$ 或 $T'A'_\delta$ 相交.

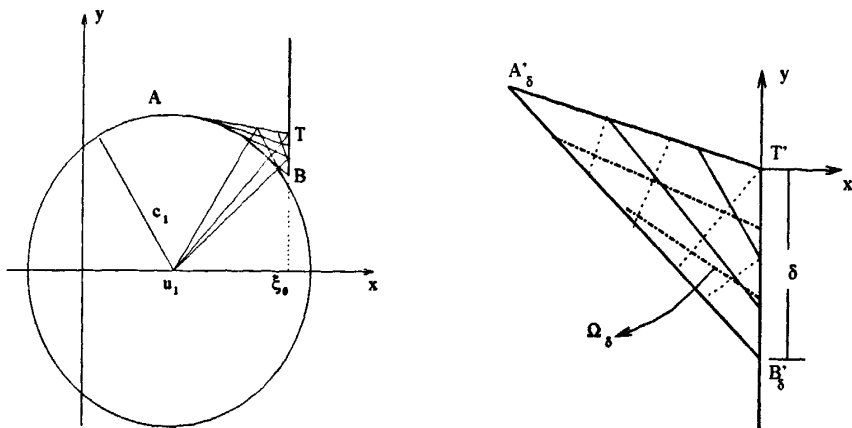


图 4.4 (x, y) 平面上的区域 Ω 及其特征线.

$$\begin{aligned} \text{令 } R_M = \{ & (r_1, r_2, r_3, r_4, q_1, q_2) \mid |r_1 - u_1| \leq M, |r_2| \leq M, \\ & |r_3 - p_1| \leq M, |r_4 - \rho_1| \leq M, |q_1 - \xi_0| \leq M, |q_2 - \eta_T| \leq M \}, \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

因此当 M 充分小时 $\zeta_{lj}(r, q), \lambda_l(r, q), l, j = 1, 2, 3, 4$, 在 R_M 上是连续可微的. 由 (4.2.11) 我们有

$$\xi(x, y) - \xi_0 = (x - \xi_0) + (f(\eta(y)) - \xi_0), \quad \eta(y) - \eta_T = (y - \eta_T) + \Lambda(f(\eta(y)) - \xi_0). \quad (4.2.21)$$

利用 (4.2.11) 可得

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{1 - \Lambda f'(\eta)}. \quad (4.2.22)$$

于是, 由 (4.2.6) 的第一个关系可得

$$f'(\eta) \frac{d\eta}{dy} = -\frac{w_2(\xi_0, y)}{w_1(\xi_0, y)} \cdot \frac{1}{1 - \Lambda f'(\eta)}. \quad (4.2.23)$$

将 (4.2.23) 从 η_T 到 y 积分, 我们有

$$f(\eta(y)) - \xi_0 = \int_{\eta_T}^y -\frac{w_2(\xi_0, y)}{w_1(\xi_0, y)} \cdot \frac{1}{1 - \Lambda f'(\eta(y))} dy. \quad (4.2.24)$$

所以, 由 (4.2.24) 和 (4.2.21) 可知存在 $\delta_1 > 0$ 使得当 $0 < \delta < \delta_1$ 时对任意的 $(x, y) \in \bar{\Omega}_\delta$ 我们有

$$(w(x, y), \xi(x, y), \eta(y)) \in R_M. \quad (4.2.25)$$

过点 $(\xi_0, y), \eta_T - \delta < y < \eta_T$, 的第四类特征线和 $T'A'_\delta$ 交于点 $(\tau_4(y), \mu_4(y))$. 将 (4.2.15) 的第四个方程沿着第四类特征线从点 $(\tau_4(y), \mu_4(y))$ 到点 (ξ_0, y) 积分并利用

条件 (4.2.17) 我们有

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^4 \zeta_{4j}(\bar{w}, \xi_0, y) \bar{w}_j(\xi_0, y) \\ &= \int_{\tau_4(y)}^{\xi_0} \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial \zeta_{4j}(\bar{w}, t, s)}{\partial t} + \lambda_4(\bar{w}, t, s) \frac{\partial \zeta_{4j}(\bar{w}, t, s)}{\partial s} \right) \bar{w}_j(t, s) + \mu_4(t, s) dt, \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

其中 $s = g_4(t; \xi_0, y)$. 又由于在边界 $T'B'$ 上

$$\begin{cases} (\bar{w}_4 - 1)(\bar{w}_2 \eta + \bar{w}_1 \xi_0) - \bar{w}_4(\bar{w}_1^2 + \bar{w}_2^2) = 0, \\ \bar{w}_4(\bar{w}_1(\bar{w}_1 - \xi_0) + \bar{w}_2(\bar{w}_2 - \eta))^2 + (\bar{w}_3 - 1)(\bar{w}_1^2 + \bar{w}_2^2) - (\bar{w}_1 \xi_0 + \bar{w}_2 \eta)^2 = 0, \\ \frac{1}{2}(\bar{w}_1^2 + \bar{w}_2^2) - (\bar{w}_1 \xi_0 + \bar{w}_2 \eta) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}(\frac{\bar{w}_3}{\bar{w}_4} - 1) = 0, \end{cases} \quad (4.2.27)$$

因此根据 (4.2.6), (4.2.26) 和 (4.2.27) 我们有在边界 $T'B'_s$ 上

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}}_{\mathfrak{R}} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \\ \bar{w}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (4.2.28)$$

其中

$$a_{0j} = \zeta_{4j}(\bar{w}, \xi_0, y), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (4.2.29)$$

$$b_0 = \int_{\tau_4(y)}^{\xi_0} \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial \zeta_{4j}(\bar{w}, t, s)}{\partial t} + \lambda_4(\bar{w}, t, s) \frac{\partial \zeta_{4j}(\bar{w}, t, s)}{\partial s} \right) \bar{w}_j(t, s) + \mu_4(t, s) dt, \quad (4.2.30)$$

$$a_{k1} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_1} F_k(\underbrace{\bar{w}_1 + t(w_1 - \bar{w}_1)}_{z_1}, \underbrace{\bar{w}_2}_{z_2}, \underbrace{\bar{w}_3}_{z_3}, \underbrace{\bar{w}_4}_{z_4}, f, y) dt, \quad k = 1, 2, 3; \quad (4.2.31)$$

$$a_{k2} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_2} F_k(\underbrace{\bar{w}_1}_{z_1}, \underbrace{\bar{w}_2 + t(w_2 - \bar{w}_2)}_{z_2}, \underbrace{\bar{w}_3}_{z_3}, \underbrace{\bar{w}_4}_{z_4}, f, y) dt, \quad k = 1, 2, 3; \quad (4.2.32)$$

$$a_{k3} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_3} F_k(\underbrace{\bar{w}_1}_{z_1}, \underbrace{\bar{w}_2}_{z_2}, \underbrace{\bar{w}_3 + t(w_3 - \bar{w}_3)}_{z_3}, \underbrace{\bar{w}_4}_{z_4}, f, y) dt, \quad k = 1, 2, 3; \quad (4.2.33)$$

$$a_{k4} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z_4} F_k(\underbrace{\bar{w}_1}_{z_1}, \underbrace{\bar{w}_2}_{z_2}, \underbrace{\bar{w}_3}_{z_3}, \underbrace{\bar{w}_4 + t(w_4 - \bar{w}_4)}_{z_4}, f, y) dt, \quad k = 1, 2, 3; \quad (4.2.34)$$

$$b_k = (f - \xi_0) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial f} F_k(\underbrace{\tilde{w}_1}_{z_1}, \underbrace{\tilde{w}_2}_{z_2}, \underbrace{\tilde{w}_3}_{z_3}, \underbrace{\tilde{w}_4}_{z_4}, \underbrace{\xi_0 + t(f - \xi_0)}_f, y) dt, \quad k = 1, 2, 3; \quad (4.2.35)$$

由 (4.2.24) 我们立刻可以得出

$$\max_{y \in |\eta_T - \delta, \eta_T|} |f(\eta(y)) - \xi_0| < \frac{\delta}{2(u_1 - M)} \|\bar{w}\|_{C^0(\bar{\Omega}_\delta)}. \quad (4.2.36)$$

由 (4.2.6) 的第一个方程, 我们有

$$\max_{y \in |\eta_T - \delta, \eta_T|} |f'(\eta(y))| < \frac{1}{u_1 - M} \|\bar{w}\|_{C^0(\bar{\Omega}_\delta)}. \quad (4.2.37)$$

所以, 计算 b_i 并利用 (4.2.11), (4.2.36) 和 (4.2.37) 我们有

$$\max_{y \in |\eta_T - \delta, \eta_T|} |b_i(y)| < L_1 \delta \|\bar{w}\|_{C^0(\bar{\Omega}_\delta)}, \quad (4.2.38)$$

其中 L_1 是一个正的常数仅依赖于

$$\begin{aligned} H = \max \{ & \|\zeta_{lj}\|_{C^0(R_M)}, \|\frac{\partial \zeta_{lj}}{\partial r_k}\|_{C^0(R_M)}, \|\frac{\partial \zeta_{lj}}{\partial q_n}\|_{C^0(R_M)}, \|\lambda_l\|_{C^0(R_M)}, \\ & \|\frac{\partial \lambda_l}{\partial r_k}\|_{C^0(R_M)}, \|\frac{\partial \lambda_l}{\partial q_n}\|_{C^0(R_M)}, \|\frac{\partial w_i}{\partial x}\|_{C^0(\bar{\Omega}_\delta)}, \|\frac{\partial w_i}{\partial y}\|_{C^0(\bar{\Omega}_\delta)}, \\ & \|F_m\|_{C^0(R_M)}, \|\frac{\partial F_m}{\partial q_n}\|_{C^0(R_M)}, \|\frac{\partial F_m}{\partial q_m}\|_{C^0(R_M)}, l, j = 1, 2, 3, 4; \\ & k = 1, 2, 3, 4, 5, 6; n = 1, 2; m = 1, 2, 3. \} \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

由于在点 T 成立 $\det(\mathfrak{R}) = \det(J(\eta_T)) \neq 0$, 那么存在 $0 < \delta_2 < \delta_1$ 使得当 $0 < \delta < \delta_2$ 时

$$\max_{y \in |\eta_T - \delta, \eta_T|} |\bar{w}(\xi_0, y)| < L_2 \delta \|\bar{w}\|_{C^0(\bar{\Omega}_\delta)}, \quad (4.2.40)$$

其中 L_2 是一个正的常数仅依赖于 H 和 $\det J(\eta_T)$.

对任意的 $(x, y) \in \Omega_\delta$, 过点 (x, y) 的第 l 类特征线 $y = g_l(t; x, y)$, $t > x$, $l = 1, 2, 3, 4$ 和边界 $T'A'_l$ 或 $T'B'_l$ 交于点 $(\tau_l(x, y), \mu_l(x, y))$. 将 (4.2.15) 的第 l 个方程沿着第 l 类特征线 $y = g_l(t; x, y)$ 从点 (x, y) 到点 $(\tau_l(x, y), \mu_l(x, y))$ 积分我们有

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^4 \zeta_{lj}(\tilde{w}, x, y) \bar{w}_j(x, y) \\ = & \sum_{j=1}^4 \zeta_{lj}(\tilde{w}, \tau_l(x, y), \mu_l(x, y)) \bar{w}_j(\tau_l(x, y), \mu_l(x, y)) \\ & - \int_x^{\tau_l(x, y)} \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial \zeta_{lj}(\tilde{w}, t, s)}{\partial t} + \lambda_l(\tilde{w}, t, s) \frac{\partial \zeta_{lj}(\tilde{w}, t, s)}{\partial s} \right) \bar{w}_j(t, s) + \mu_l(t, s) dt, \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

其中 $s = g_i(t; x, y)$. 由计算我们有

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \zeta_{11}(\bar{w}, x, y) & \zeta_{12}(\bar{w}, x, y) & \zeta_{13}(\bar{w}, x, y) & \zeta_{14}(\bar{w}, x, y) \\ \zeta_{21}(\bar{w}, x, y) & \zeta_{22}(\bar{w}, x, y) & \zeta_{23}(\bar{w}, x, y) & \zeta_{24}(\bar{w}, x, y) \\ \zeta_{31}(\bar{w}, x, y) & \zeta_{32}(\bar{w}, x, y) & \zeta_{33}(\bar{w}, x, y) & \zeta_{34}(\bar{w}, x, y) \\ \zeta_{41}(\bar{w}, x, y) & \zeta_{42}(\bar{w}, x, y) & \zeta_{43}(\bar{w}, x, y) & \zeta_{44}(\bar{w}, x, y) \end{pmatrix}}_{\zeta(\bar{w}, x, y)} \begin{pmatrix} \bar{w}_1(x, y) \\ \bar{w}_2(x, y) \\ \bar{w}_3(x, y) \\ \bar{w}_4(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_4 \end{pmatrix}, \quad (4.2.42)$$

\hat{b}_i 满足

$$|\hat{b}_i| < L_3 \delta |\bar{w}|_{C^0(\bar{\Omega}_\delta)}, \quad (4.2.43)$$

其中 L_3 是仅依赖于 H 和 $\det J(\eta_T)$ 的常数. 又由于 $\det(\zeta(\bar{w}, \xi_0, \eta_T)) \neq 0$, 所以存在一个 $0 < \delta_3 < \delta_2$ 使得当 $\delta < \delta_3$ 时

$$|\bar{w}|_{C^0(\bar{\Omega}_\delta)} < L_4 \delta |\bar{w}|_{C^0(\bar{\Omega}_\delta)}, \quad (4.2.44)$$

其中 L_4 仅依赖于 H , $\det J(\eta_T)$ 和 $\det(\zeta(\bar{w}, \xi_0, \eta_T))$. 因此, 通过选择一个充分小的 δ 使得 $L_4 \delta < 1$ 我们有

$$|\bar{w}|_{C^0(\bar{\Omega}_\delta)} < |\bar{w}|_{C^0(\bar{\Omega}_\delta)}. \quad (4.2.45)$$

于是, 我们有在 Ω_δ 上 $\bar{w} \equiv 0$. 因此, 我们有如下结论

结论 4.2. 对于拟定常 Euler 方程图 4.3 所示意的 von Neumann 反射结构在数学是不可能的.

第五章 二维 Chaplygin 气体的压力 Delta 波

我们在本章主要考虑方程 (1.3.18) 在给定 Riemann 初值

$$\begin{cases} u_1 = 0, v_1 = 0, 0 < c_1 < 1, \\ u_2 = \frac{c_1-1}{2}, v_2 = 0, c_2 = \frac{1+c_1}{2}, \\ u_3 = v_3 = \frac{c_1-1}{2}, c_3 = 1, \\ u_4 = \frac{c_1-1}{2}, u_4 = 0, c_4 = \frac{1+c_1}{2} \end{cases} \quad (5.0.1)$$

的 Riemann 问题. 那么, 在 $t=0$ 时刻常状态 (1) 和 (2), (2) 和 (3), (3) 和 (4), (4) 和 (1) 可分别由疏散冲击波 $R_{12}^+, R_{23}^+, R_{34}^-, R_{14}^-$ 连接. R_{12}^+ 和 R_{14}^- 在达到声速圆之前相交于一点 P , 点 P 位于声速圆 C_1, C_2 和 C_4 的外面. R_{23}^+ 和声速圆 C_3 相切于点 D, R_{34}^+ 和声速圆 C_4 相切于点 E . 过点 P 分别作声速圆 C_2 和 C_4 的切线 PF 和 PG . 令角 α 表示向量 \overrightarrow{PF} 反时针旋转到向量 \overrightarrow{PG} 所成的角. 由计算可知存在 $c_* = \frac{1}{1+2\sqrt{2}}$ 使得: 如果 $c_* < c_1 < 1$, 那么 $\alpha < \pi$; 如果 $c_1 = c_*$, 那么 $\alpha = \pi$; 如果 $0 < c_1 < c_*$, 那么 $\alpha > \pi$.

§5.1 $\alpha < \pi$ 的情形

当 $\alpha < \pi$ 时, 存在以 (u_5, v_5) 为圆心 c_5 为半径的圆 C_5 , 使得 C_5 和 C_2 相内切于点 F , 和 C_4 相内切于点 G . 这时, 冲击波 R_{12}^+ 和 R_{14}^- 相互作用生成两个新的冲击波 PF 和 PG , 如图 5.1 所示. 由计算可知

$$u_5 = v_5 = c_1 \left(1 - \frac{\sqrt{1+k^2}}{1-k}\right), \quad c_5 = c_1 \frac{1+k}{1-k}, \quad (5.1.1)$$

其中 $k = \frac{c_2}{2c_1} - \frac{c_1}{2c_2}$. PF 可以表示成参数形式

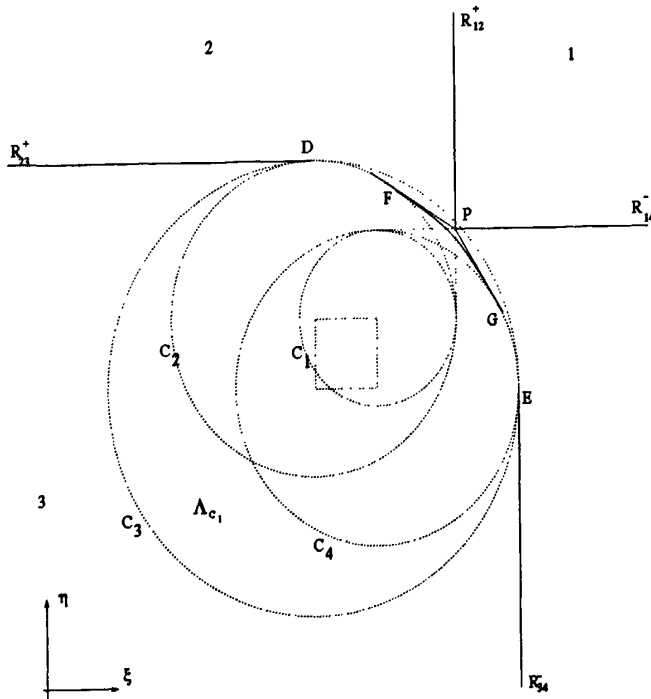
$$\begin{cases} \bar{\xi}(s) = c_1 + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}s, \\ \bar{\eta}(s) = c_1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}s, \end{cases} \quad (5.1.2)$$

其中 $-c_1 < s < 0$. PG 可以表示成参数形式

$$\begin{cases} \bar{\xi}(s) = c_1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}s, \\ \bar{\eta}(s) = c_1 - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}s, \end{cases} \quad (5.1.3)$$

其中 $0 < s < c_1$.

令 Λ_{c_1} 为由圆弧 $\widehat{DE}, \widehat{EG}, \widehat{GF}$ 和 \widehat{FD} 围成的区域. 由于区域 Λ_{c_1} 外的流动是已知的, 要得到整个 (ξ, η) 平面的流动我们只需要构造区域 Λ_{c_1} 内的流动. 又由于

图 5.1 $\alpha < \pi$ 的流动结构.

区域 Λ_{c_1} 外的流动为无旋的, 所以我们可以利用位势流模型来求解区域 Λ_{c_1} 内的流动. 不失一般性, 令 (1.3.22) 的拟 Bernoulli 常数为 0, 因此

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\phi + |\nabla\phi|^2}}. \quad (5.1.4)$$

于是通过求解 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\phi}{\sqrt{2\phi + |\nabla\phi|^2}}\right) + \frac{2}{\sqrt{2\phi + |\nabla\phi|^2}} = 0, & \text{当 } (\xi, \eta) \in \Lambda_{c_1} \text{ 时;} \\ \phi|_{\partial\Lambda_{c_1}} = 0 \end{cases} \quad (5.1.5)$$

我们就能得到区域 Λ_{c_1} 内的流动.

定理 5.1. [59] 假设 Λ 是一个边界具有分片 C^2 光滑的凸区域, 且边界曲率具有非零下界, 那么 Dirichlet 问题 (5.1.5) 具有唯一的正解, 且该解属于 $C(\bar{\Lambda}) \cap C^\infty(\Lambda)$.

Dirichlet 问题 (5.1.5) 的解 ϕ 在声速边界 $\partial\Lambda_{c_1}$ 上的正则性仍是一个未解决的难题. 假设 ϕ 具有直到声速边界 $\partial\Lambda_{c_1}$ (除去点 D, E, F 和 G 点以外) 的 C^1 性质, 那么在边界 $\partial\Lambda_{c_1}$ 上有

$$|\rho\nabla\phi \cdot \nu| = \left| \frac{|\nabla\phi|}{\sqrt{2\phi + |\nabla\phi|^2}} \right| = [1] = 0, \quad (5.1.6)$$

其中 ν 表示边界 $\partial\Lambda_{c_1}$ 的单位外法向量. 因此, ϕ 在边界 Λ_{c_1} 上按分布的意义满足方程 (1.3.23). 又假设 ϕ 在声速边界 $\partial\Lambda_{c_1}$ 上具有更好的光滑性. 那么, 由边界条件知

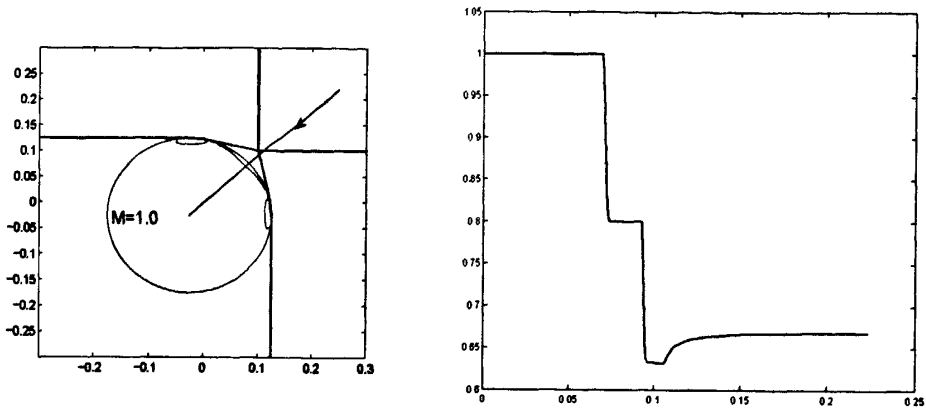


图 5.2 左图, 带箭头的线为一条拟流线; 右图, 沿着那条拟流线的密度函数曲线. 该数值算例出自 Sheng, Wang 和 Zhang 的 [66]

$$\nabla\phi \cdot \tau = 0, \quad (5.1.7)$$

其中 τ 为 $\partial\Lambda_{c_1}$ 的单位切向量. 方程 (5.1.5) 可以写成如下形式

$$(2\phi + |\nabla\phi|^2)\Delta\phi - \nabla\phi^T D^2\phi \nabla\phi + 4\phi + |\nabla\phi|^2 = 0. \quad (5.1.8)$$

因此, 我们有

$$D^2\phi(\tau, \tau) = -1. \quad (5.1.9)$$

将 (5.1.7) 沿着边界求导可得

$$D^2\phi(\tau, \tau) + \nabla\phi \cdot \dot{\tau} = 0. \quad (5.1.10)$$

于是, 我们有

$$\nabla\phi \cdot \nu = -R, \quad (5.1.11)$$

其中 R 为边界的曲率半径. 因此, 由 (5.1.7) 可知

$$|\nabla\phi|_{\partial\Lambda_{c_1}} = R. \quad (5.1.12)$$

又由拟 Bernoulli 定律 (1.3.22) 可知

$$[\rho] = 0. \quad (5.1.13)$$

这说明流动在穿过圆弧在边界 \widehat{DE} , \widehat{EG} , \widehat{GF} 和 \widehat{FD} 时密度和速度不发生跳跃. 从数值模拟的结果 (图 5.2) 可以看出穿过声速圆 C_5 密度确实没有发生跳跃.

§5.2 $\alpha = \pi$ 的情形

很显然, 当 $\alpha \rightarrow \pi$ 时 PF 和 PG 将和圆弧 \widehat{FG} 重合变成成 $F'G'$. $\Lambda_{c_1} \rightarrow \Lambda_{c_*}$, 其中 Λ_{c_*} 是由 $\widehat{D'E'}$, $\widehat{E'G'}$, $\widehat{G'F'}$ 和 $\widehat{D'F'}$ 围成的区域. $F'G'$ 可以表示成参数形式

$$\begin{cases} \dot{\xi}(s) = c_* + \frac{\sqrt{2}}{2}s, \\ \dot{\eta}(s) = c_* - \frac{\sqrt{2}}{2}s, \end{cases} \quad (5.2.1)$$

其中 $-c_* < s < c_*$, 如图 5.3 所示.

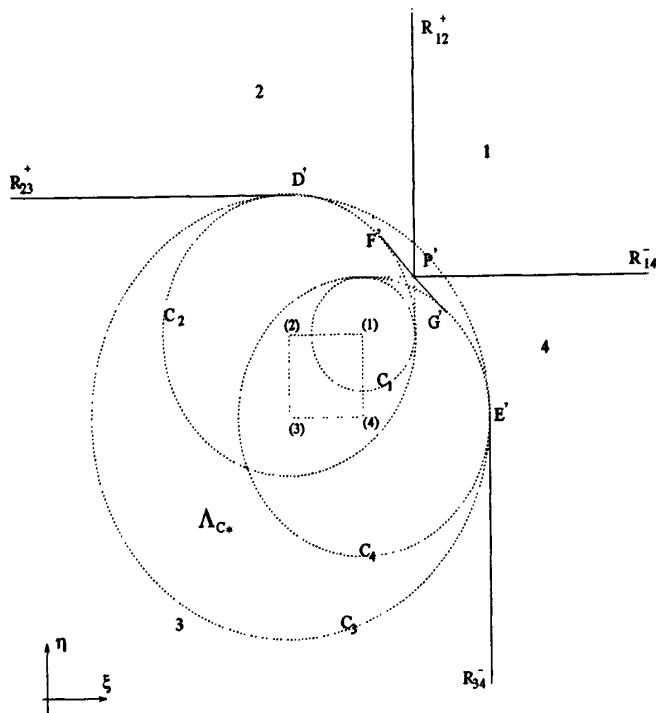


图 5.3 $\alpha = \pi$ 的流动结构.

令 H 是 PF 或 PG 上的一点, I 为曲线 \widehat{FG} 上的一点, HI 平行于 PO_5 , 如图 5.4 所示. 因此, 由计算可知

$$\lim_{c_1 \rightarrow c_*} (p_5 \cdot |HI|)(s) = \begin{cases} -\frac{(c_*+s)^2}{2}, & \text{当 } -c_* < s < 0; \\ -\frac{(c_*-s)^2}{2}, & \text{当 } 0 < s < c_*; \end{cases} \quad (5.2.2)$$

$$\lim_{c_1 \rightarrow c_*} \frac{d}{ds} (p_5 \cdot |HI|)(s) = \begin{cases} -c_* - s, & \text{当 } -c_* < s < 0; \\ c_* - s, & \text{当 } 0 < s < c_*; \end{cases} \quad (5.2.3)$$

$$\lim_{c_1 \rightarrow c_*} \rho_5 u_5 = \lim_{c_1 \rightarrow c_*} \rho_5 v_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (5.2.4)$$

从关系式 (5.2.2, 5.2.3) 我们发现当气体质团穿过区域 R_{PFG} 时, 区域内压力在切向的冲量不会随 $\alpha \rightarrow \pi$ 而趋于 0. 这表明气体质团穿过 $F'G'$ 时, $F'G'$ 上的压强会对气体质团产生冲量.

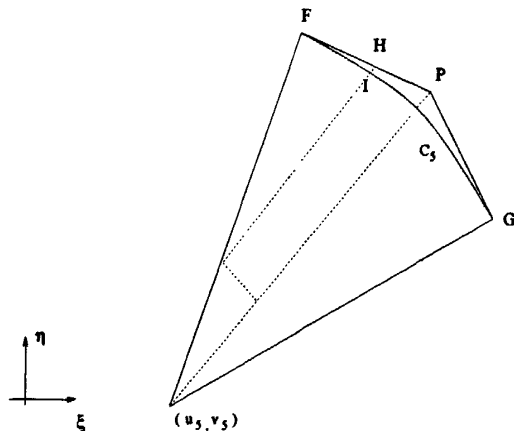


图 5.4 区域 R_{PFG} .

由于 $F'G'$ 一侧的流动为拟超声的, 因此 $F'G'$ 不可能为一个冲击波. 我们将通过令 $\alpha \rightarrow \pi$ 取极限的方法导出穿过 $F'G'$ 的间断关系式. 假设一团气体在时刻 t 占据 (x, y) 平面区域 $\Omega_{c_1}(t)$ ($c_* < c_1 < 1$), 那么 $\partial\Omega_{c_1}(t)$ 代表那团气体边界质点所占据的位置. 假设 $\Omega_{c_1}(t)$ 是由 $\Omega_{c_1}^1(t)$, $\Omega_{c_1}^2(t)$ 和 $\Omega_{c_1}^3(t)$ 构成, 其中 $\Omega_{c_1}^1(t)$, $\Omega_{c_1}^2(t)$ 和 $\Omega_{c_1}^3(t)$ 在 (ξ, η) 平面的投影分别落入常状态 2 或 4 区域, 区域 R_{PFG} 和拟亚声区域 Λ_{c_1} . 并假设 $\partial\Omega_{c_1}(t) = \widehat{JK}_{dotted} \cup \overline{KL} \cup \widehat{LI}_{dotted} \cup \overline{IJ}$, 其中 \overline{IJ} 和 \overline{LK} 平行于向量 (u_5, v_5) , 如图 5.5 所示.

记

$$(\rho, u, v)(x, y, t) = \begin{cases} (\hat{\rho}_1, \hat{u}_1, \hat{v}_1)(x, y, t) & \text{if } (x, y) \in \Omega_{c_1}^1(t); \\ (\hat{\rho}_2, \hat{u}_2, \hat{v}_2)(x, y, t) & \text{if } (x, y) \in \Omega_{c_1}^2(t); \\ (\hat{\rho}_3, \hat{u}_3, \hat{v}_3)(x, y, t) & \text{if } (x, y) \in \Omega_{c_1}^3(t); \end{cases} \quad (5.2.5)$$

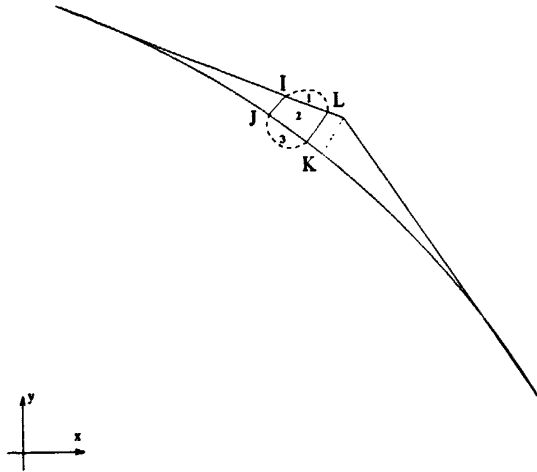
显然,

$$(\hat{\rho}_1, \hat{u}_1, \hat{v}_1)(x, y, t) \equiv (\rho_2, u_2, v_2) \text{ or } (\rho_4, u_4, v_4), \quad (5.2.6)$$

$$(\hat{\rho}_2, \hat{u}_2, \hat{v}_2)(x, y, t) \equiv (\rho_5, u_5, v_5), \quad (5.2.7)$$

$$(\hat{\rho}_3, \hat{u}_3, \hat{v}_3)(x, y, t) = (\sqrt{2\phi + |D\phi|^2}, \phi_\xi, \phi_\eta) \left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t} \right) + \left(0, \frac{x}{t}, \frac{y}{t} \right), \quad (5.2.8)$$

其中 ϕ 是 (5.1.5) 的解.

图 5.5 (x, y) 平面上的一团气体.

引理 5.1. [69] 对与时间有关的区域 $\Omega(t)$, 有积分关系

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega(t)} \Phi dx dy = \iint_{\Omega(t)} \Phi_t + (\Phi u)_x + (\Phi v)_y dx dy = \iint_{\Omega(t)} \Phi_t dx dy + \int_{\partial\Omega(t)} \Phi u dy - \Phi v dx, \quad (5.2.9)$$

其中 u 和 v 代表边界 $\partial\Omega(t)$ 变化的速率.

由质量守恒和动量守恒我们有

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega_{c_1}(t)} \rho dx dy = 0, \quad (5.2.10)$$

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega_{c_1}(t)} \rho u dx dy = - \int_{\partial\Omega_{c_1}(t)} p dy, \quad \frac{d}{dt} \iint_{\Omega_{c_1}(t)} \rho v dx dy = \int_{\partial\Omega_{c_1}(t)} p dx. \quad (5.2.11)$$

由于 $\Omega_{c_1}(t) = \Omega_{c_1}^1(t) \cup \Omega_{c_1}^2(t) \cup \Omega_{c_1}^3(t)$, 于是

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega_{c_1}(t)} \rho dx dy = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} \iint_{\Omega_{c_1}^i(t)} \hat{\rho}_i dx dy. \quad (5.2.12)$$

由引理 5.1 可知

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega_{c_1}^i(t)} \hat{\rho}_i dx dy = I_{i1} + I_{i2} + I_{i3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.2.13)$$

其中

$$I_{i1} = \iint_{\Omega_{c_1}^i(t)} (\hat{\rho}_i)_t dx dy, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned}
I_{12} &= - \int_{\overline{IL}} \hat{\rho}_1(\hat{u}_1 - \xi)dy - \hat{\rho}_1(\hat{v}_1 - \eta)dx, & I_{13} &= \int_{\widehat{LI}+\overline{IL}} \hat{\rho}_1\hat{u}_1dy - \hat{\rho}_1\hat{v}_1dx, \\
I_{22} &= \int_{\overline{KL}+\overline{IJ}} -\hat{\rho}_2\hat{v}_2dx + \hat{\rho}_2\hat{u}_2dy, & I_{23} &= \int_{\overline{LI}+(\widehat{JK})_{\text{solid}}} \hat{\rho}_2\xi dy - \hat{\rho}_2\eta dx, \\
I_{32} &= - \int_{(\widehat{KJ})_{\text{dotted}}} \hat{\rho}_3(\hat{u}_3 - \xi)dy - \hat{\rho}_3(\hat{v}_3 - \eta)dx, \\
I_{33} &= \int_{(\widehat{KJ})_{\text{solid}}+(\widehat{JK})_{\text{dotted}}} \hat{\rho}_3\xi dy - \hat{\rho}_3\eta dx.
\end{aligned}$$

由于 $\hat{\rho}_1$ 和 $\hat{\rho}_2$ 分别在 $\Omega_{c_1}^1(t)$ 和 $\Omega_{c_1}^2(t)$ 为常数, 所以有 $I_{11} = I_{21} = 0$. 又由于 IJ 和 LK 平行于向量 (u_5, v_5) , 于是有 $I_{22} = 0$. 我们通过令 $c_1 \rightarrow c_*$ 和区域 $\Omega_{c_1}(t)$ 的面积趋于 0 取极限运算, 有 I_{13}, I_{23}, I_{31} 和 I_{33} 均趋于 0. 所以, 在 (ξ, η) 平面下沿着间断 $F'G'$ 有

$$[\rho(u - \xi)\dot{\eta}'(s) - \rho(v - \eta)\dot{\xi}'(s)] = 0. \quad (5.2.14)$$

在公式 (5.2.14) 以及随后的讨论中 $[(\cdot)] = (\cdot)_+ - (\cdot)_-$, 下标 + 和 - 分别代表区域 Λ_c 外和内的流动.

又由于

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega_{c_1}(t)} \rho u dx dy = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} \iint_{\Omega_{c_1}^i(t)} \hat{\rho}_i \hat{u}_i dx dy. \quad (5.2.15)$$

因此, 我们有

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega_{c_1}^i(t)} \hat{\rho}_i \hat{u}_i dx dy = F_{i1} + F_{i2} + F_{i3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.2.16)$$

其中

$$\begin{aligned}
F_{i1} &= \iint_{\Omega_{c_1}^i(t)} (\hat{\rho}_i \hat{u}_i)_t dx dy, & i &= 1, 2, 3, \\
F_{12} &= - \int_{\overline{IL}} \hat{\rho}_1 \hat{u}_1 (\hat{u}_1 - \xi) dy - \hat{\rho}_1 \hat{u}_1 (\hat{v}_1 - \eta) dx, & F_{13} &= \int_{\widehat{LI}+\overline{IL}} \hat{\rho}_1 \hat{u}_1 \hat{u}_1 dy - \hat{\rho}_1 \hat{u}_1 \hat{v}_1 dx, \\
F_{22} &= \int_{\overline{KL}+\overline{IJ}} -\hat{\rho}_2 \hat{u}_2 \hat{v}_2 dx + \hat{\rho}_2 \hat{u}_2 \hat{u}_2 dy, & F_{23} &= \int_{\overline{LI}+(\widehat{JK})_{\text{solid}}} \hat{\rho}_2 \hat{u}_2 \xi dy - \hat{\rho}_2 \hat{u}_2 \eta dx, \\
F_{32} &= - \int_{(\widehat{KJ})_{\text{dotted}}} \hat{\rho}_3 \hat{u}_3 (\hat{u}_3 - \xi) dy - \hat{\rho}_3 \hat{u}_3 (\hat{v}_3 - \eta) dx,
\end{aligned}$$

$$F_{33} = \int_{(\widehat{KJ})_{\text{solid}} + (\widehat{JK})_{\text{dotted}}} \hat{\rho}_3 \hat{u}_3 \xi dy - \hat{\rho}_3 \hat{u}_3 \eta dx.$$

通过取极限以及 (5.2.11) 和 (5.2.3), 我们可得穿过间断 $F'G'$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} [\rho u(u - \xi) + p] + \frac{\sqrt{2}}{2} [\rho u(v - \eta)] = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(c_* + s) & \text{if } -c_* < s < 0; \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(c_* - s) & \text{if } 0 < s < c_*. \end{cases} \quad (5.2.17)$$

由 (5.2.14) 可知, 关系式 (5.2.17) 可以写成如下形式

$$\frac{\sqrt{2}}{2} [\rho U^2 + p] + \frac{\sqrt{2}}{2} [\rho UV] = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(c_* + s) & \text{if } -c_* < s < 0; \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(c_* - s) & \text{if } 0 < s < c_*. \end{cases} \quad (5.2.18)$$

类似地, 我们可得

$$\frac{\sqrt{2}}{2} [\rho UV] + \frac{\sqrt{2}}{2} [\rho V^2 + p] = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}(c_* + s) & \text{if } -c_* < s < 0; \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(c_* - s) & \text{if } 0 < s < c_*. \end{cases} \quad (5.2.19)$$

令 $L = U\hat{\xi}'(s) + V\hat{\eta}'(s)$, $N = U\hat{\eta}'(s) - V\hat{\xi}'(s)$, 那么间断关系式 (5.2.14), (5.2.18) 和 (5.2.19) 能够简化成

$$[\rho N] = 0, \quad (5.2.20)$$

$$\left[\frac{1}{\rho} (\rho^2 N^2 - 1) \right] = 0, \quad (5.2.21)$$

$$[\rho NL] = \begin{cases} -(c_* + s) & \text{if } -c_* < s < 0; \\ c_* - s & \text{if } 0 < s < c_*. \end{cases} \quad (5.2.22)$$

通过比较 (5.2.22) 和 (1.5.11), 我们可以看出穿过 $F'G'$ 切向的动量发生了变化.

§5.3 压力 Delta 波

在本节我们将要给出压力 Delta 波的数学定义. 我们首先将方程组 (1.3.18) 写成如下形式

$$\begin{cases} (\rho U)_\xi + (\rho V)_\eta + 2\rho = 0, \\ (p(1 - \rho^2 U^2))_\xi - (p\rho U\rho V)_\eta + 3\rho U = 0, \\ -(p\rho U\rho V)_\xi + (p(1 - \rho^2 V^2))_\eta + 3\rho V = 0. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

假设 Ω 是 (ξ, η) 平面上的一个区域, Ω 由曲线 $l = \{(\hat{\xi}(s), \hat{\eta}(s)) : s_0 < s < s_1\}$ 分割成 Ω^+ 和 Ω^- . $\hat{p}(s)\delta_l$ 为一个二维带权 Delta 函数可以定义为 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 上泛函, 即: 对

任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\langle \dot{p}(s)\delta_l, \varphi(\xi, \eta) \rangle = \int_{s_0}^{s_1} \dot{p}(s)\varphi(\xi(s), \eta(s))\sqrt{\dot{\xi}'(s)^2 + \dot{\eta}'(s)^2}ds. \quad (5.3.2)$$

压强 p 在 Ω 定义为

$$p(\xi, \eta) = p_0(\xi, \eta) + \dot{p}(s)\delta_l, \quad (5.3.3)$$

其中

$$p_0(\xi, \eta) = \begin{cases} p_+(\xi, \eta) & \text{if } (\xi, \eta) \in \Omega^+; \\ p_-(\xi, \eta) & \text{if } (\xi, \eta) \in \Omega^-. \end{cases} \quad (5.3.4)$$

ρU 和 ρV 为

$$(\rho U)(\xi, \eta) = \begin{cases} (\rho U)_+(\xi, \eta) & \text{if } (\xi, \eta) \in \Omega^+; \\ f(s) & \text{if } (\xi, \eta) \in l; \\ (\rho U)_-(\xi, \eta) & \text{if } (\xi, \eta) \in \Omega^-, \end{cases} \quad (\rho V) = \begin{cases} (\rho V)_+(\xi, \eta) & \text{if } (\xi, \eta) \in \Omega^+; \\ g(s) & \text{if } (\xi, \eta) \in l; \\ (\rho V)_-(\xi, \eta) & \text{if } (\xi, \eta) \in \Omega^-, \end{cases} \quad (5.3.5)$$

其中 $p_\pm(\xi, \eta)$, $(\rho U)_\pm(\xi, \eta)$ 和 $(\rho V)_\pm(\xi, \eta)$ 均为光滑函数, 且具有直到边界的一致连续性.

定义 5.2. (弱解的定义) 如果对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 都成立

$$\iint_{\Omega} \{(\rho U)\varphi_\xi + (\rho V)\varphi_\eta - 2\rho\varphi\}d\xi d\eta = 0, \quad (5.3.6)$$

$$\iint_{\Omega} \{p(1 - (\rho U)^2)\varphi_\xi - p(\rho U)(\rho V)\varphi_\eta - 3\rho U\varphi\}d\xi d\eta = 0, \quad (5.3.7)$$

$$\iint_{\Omega} \{p(1 - (\rho V)^2)\varphi_\eta - p(\rho U)(\rho V)\varphi_\xi - 3\rho V\varphi\}d\xi d\eta = 0, \quad (5.3.8)$$

则称 p , ρU 和 ρV 在分布意义下满足 (5.3.1).

我们现在要根据上述定义导出压力 Delta 波两边的间断关系. 由 (5.3.6) 及 ϕ 的任意性, 可得沿着 l 有

$$[\rho U]\dot{\eta}' - [\rho V]\dot{\xi}' = 0. \quad (5.3.9)$$

又由 (5.3.7) 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega} p(1 - (\rho U)^2) \phi_{\xi} - p(\rho U)(\rho V) \phi_{\eta} - 3\rho U \phi d\xi d\eta \\ &= \int_{s_0}^{s_1} [p(1 - (\rho U)^2)] \eta' \phi + [p(\rho U)(\rho V)] \xi' \phi ds \\ &\quad + \int_{s_0}^{s_1} ((1 - f^2) \dot{p} \phi_{\xi} - f g \dot{p} \phi_{\eta}) \sqrt{\hat{\xi}'^2 + \hat{\eta}'^2} ds, \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

因此穿过 l 成立

$$(1 - f^2) \hat{\eta}' = -f g \hat{\xi}', \quad (5.3.11)$$

$$\frac{d}{ds} \left(-\frac{f g \dot{p}}{\eta'} \sqrt{\hat{\xi}'^2 + \hat{\eta}'^2} \right) = [p(1 - (\rho U)^2)] \hat{\eta}' + [p(\rho U \rho V)] \hat{\xi}'. \quad (5.3.12)$$

类似地, 由 (5.3.8) 我们有

$$(1 - g^2) \hat{\xi}' = -f g \hat{\eta}', \quad (5.3.13)$$

$$\frac{d}{ds} \left(-\frac{f g \dot{p}}{\xi'} \sqrt{\hat{\xi}'^2 + \hat{\eta}'^2} \right) = -[p(1 - (\rho V)^2)] \hat{\xi}' - [p(\rho U \rho V)] \hat{\eta}'. \quad (5.3.14)$$

关系式 (5.3.9)-(5.3.14) 称为压力 Delta 波的广义 Rankine-Hugoniot 条件.

定理 5.3. 由广义 Rankine-Hugoniot 关系式的推导我们可以发现这类 Delta 不会在一维流动中出现.

注意 5.1. 由 (5.2.2), (5.2.4) and (5.2.1) 知如果令 $f = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $g = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\hat{\xi}' = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\hat{\eta}' = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\dot{p}(s) = \begin{cases} -\frac{(c_*+s)^2}{2}, & \text{for } -c_* < s < 0; \\ -\frac{(c_*-s)^2}{2}, & \text{for } 0 < s < c_*, \end{cases}$ 那么 (5.3.11) 和 (5.3.13) 显然成立, 并且条件 (5.3.12) 和 (5.3.14) 等价于 (5.2.18) 和 (5.2.19).

§5.4 区域 Λ_c 内的流动

为了得到区域 Λ_c 内的流动我们考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\sqrt{2\phi + |\nabla \phi|^2}} \right) + \frac{2}{\sqrt{2\phi + |\nabla \phi|^2}} = 0, & \text{当 } (\xi, \eta) \in \Lambda_c, \\ \phi|_{\partial \Lambda_c} = 0 \end{cases} \quad (5.4.1)$$

的解的存在性.

上述问题解的存在性主要依赖于下面的先验估计.

引理 5.2. (一致内估计) 设 Λ' 是 Λ_{c_*} 的任一紧子集. 令 ϕ_{c_1} ($c_* < c_1 < 1$) 为问题 (5.1.5) 的正解. 那么存在充分小的 $\delta > 0$ 和一常数 $M > 0$, δ 和 M 仅依赖于 R , $R = \text{dist}(\Lambda', \partial\Lambda_{c_*})$, 使得对所有的 $c_* < c_1 < c_* + \delta$ 都成立

$$\|\phi_{c_1}\|_{1; \Lambda'} < M. \quad (5.4.2)$$

证明: , 我们采用类似于 [38] 中的估计方法来证明该引理. 为了方便我们将 D_ξ 记为 D_1 , D_η 记为 D_2 . 令 $w_{c_1} = \sqrt{2\phi_{c_1}}$, 那么 w_{c_1} 满足方程

$$a^{ij} D_{ij} w_{c_1} = -\frac{2}{w_{c_1}}, \quad (5.4.3)$$

其中 $a^{ij} = \delta^{ij} - D_i w_{c_1} D_j w_{c_1} (1 + |Dw_{c_1}|^2)^{-1}$, $i, j = 1, 2$. 由于当 $c_1 \rightarrow c_*$ 时 $\Lambda_{c_1} \rightarrow \Lambda_{c_*}$, 因此存在 $\delta > 0$, 使得, 当 $c_* < c_1 < c_* + \delta$ 对任意的 $(\xi_0, \eta_0) \in \Lambda'$ 有 $B_{R/2}((\xi_0, \eta_0)) \subset \Lambda_{c_1}$. 对任一给定的 $(\xi_0, \eta_0) \in \Lambda'$, 令 $g(\xi, \eta, z): B_{R/2}((\xi_0, \eta_0)) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为一非负函数, 且在 $\{(\xi, \eta, z) \mid (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 = (R/2)^2, z > 0\}$ 上 $g = 0$. 令 $v = \sqrt{1 + |Dw_{c_1}|^2}$. 因此, $g(\xi, \eta, w_{c_1}(\xi, \eta))v(\xi, \eta)$ 能够在 $B_{R/2}((\xi_0, \eta_0))$ 内的一点 P 取到正的最大值. 于是, 在 P 我们有

$$D_i(gv) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.4.4)$$

$$|D_{ij}(gv)| \leq 0, \quad (5.4.5)$$

以及

$$\text{Trace}(|D_{ij}(gv)| \cdot [a^{ij}]) = a^{ij} D_{ij}(gv) < 0. \quad (5.4.6)$$

由 (5.4.4) 可知, 在 P 点

$$a^{ij} D_{ij}(gv) = a^{ij} v D_{ij} g + g a^{ij} \left(D_{ij} v - \frac{2D_i v D_j v}{v} \right). \quad (5.4.7)$$

令 $\nu = (\nu^1, \nu^2)$, 其中 $\nu^i = \frac{D_i w_{c_1}}{\sqrt{1 + |Dw_{c_1}|^2}}$. 那么,

$$a^{ij} = \delta^{ij} - \nu^i \nu^j, \quad (5.4.8)$$

$$D_i v = \nu^k D_{ik} w_{c_1}, \quad (5.4.9)$$

$$D_{ij} v = \frac{D_{kj} w_{c_1} D_{ik} w_{c_1} + D_k w_{c_1} D_{ijk} w_{c_1}}{\sqrt{1 + |Dw_{c_1}|^2}} - \frac{D_k w_{c_1} D_{ik} w_{c_1} D_l w_{c_1} D_{lj} w_{c_1}}{(1 + |Dw_{c_1}|^2)^{3/2}}, \quad (5.4.10)$$

$$a^{ij} D_{ij} v = a^{ij} \nu^k D_{ijk} w_{c_1} + \frac{a^{ij}}{v} (D_{ki} w_{c_1} D_{kj} w_{c_1} - \nu^k \nu^l D_{ik} w_{c_1} D_{lj} w_{c_1}). \quad (5.4.11)$$

由计算知

$$\begin{aligned} a^{ij}\nu^k D_{ijk}w_{c_1} &= D_k(a^{ij}D_{ij}w_{c_1})\nu^k - D_k a^{ij}\nu^k D_{ij}w_{c_1} \\ &= \frac{2D_k w_{c_1} D_k w_{c_1}}{w_{c_1}^2 v} + \frac{\nu^j \nu^k D_{ij}w_{c_1} (D_{ki}w_{c_1} - \nu^i \nu^l D_{lk}w_{c_1})}{v} \\ &\quad + \frac{\nu^i \nu^k D_{ij}w_{c_1} (D_{kj}w_{c_1} - \nu^j \nu^l D_{lk}w_{c_1})}{v} \\ &= \frac{2D_k w_{c_1} D_k w_{c_1}}{w_{c_1}^2 v} + \frac{2a^{ij} D_i v D_j v}{v} > \frac{2a^{ij} D_i v D_j v}{v}. \end{aligned}$$

又由于 $|\nu| < 1$, 于是

$$\frac{a^{ij}}{v} (D_{ki}w_{c_1} D_{kj}w_{c_1} - \nu^k \nu^l D_{ik}w_{c_1} D_{lj}w_{c_1}) > 0. \quad (5.4.12)$$

所以, 我们有

$$ga^{ij} \left(D_{ij}v - \frac{2D_i v D_j v}{v} \right) > 0. \quad (5.4.13)$$

令 $f: R \rightarrow R$ 为一光滑的单调递增的凸函数, 且满足 $f(0) = 0$. 令

$$\varphi(\xi, \eta, z) = \left(\frac{R^2 - 4((\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2)}{R^2} - \frac{z}{2w_0} \right)^+, \quad (5.4.14)$$

其中 $w_0 = w_{c_1}(x_0) > 0$. 定义 $g = f(\varphi(\xi, \eta, w_{c_1}))$. 于是, 我们有 $g(\xi_p, \eta_p, w_{c_1}(\xi_p, \eta_p)) \neq 0$.

那么, 在 P 点我们有

$$0 < \varphi < 1, \quad (5.4.15)$$

$$\varphi_z = -\frac{1}{2w_0}, \quad (5.4.16)$$

$$D_{ij}\varphi = -2\delta^{ij}, \quad (5.4.17)$$

$$\Sigma(D_i\varphi)^2 = \frac{64(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}{R^4} < \frac{16}{R^2}, \quad (5.4.18)$$

$$D_i g = (D_i\varphi + D_z\varphi D_i w_{c_1})f', \quad (5.4.19)$$

$$D_{ij}g = (D_i\varphi + D_z\varphi D_i w_{c_1})(D_j\varphi + D_z\varphi D_j w_{c_1})f'' + (D_{ij}\varphi + D_z\varphi D_{ij}w_{c_1})f'. \quad (5.4.20)$$

由计算知, 在 P 点我们有

$$\begin{aligned} &a^{ij}D_{ij}g \\ &= a^{ij}((D_i\varphi + D_z\varphi D_i w_{c_1})(D_j\varphi + D_z\varphi D_j w_{c_1})f'' + (D_{ij}\varphi + D_z\varphi D_{ij}w_{c_1})f') \\ &= \left(\frac{(D_z\varphi)^2 |Dw_{c_1}|^2}{1 + |Dw_{c_1}|^2} + \frac{2D_z\varphi D_i w_{c_1} D_i\varphi}{1 + |Dw_{c_1}|^2} + D_i\varphi D_i\varphi - D_i\varphi \nu^i D_j\varphi \nu^j \right) f'' \\ &\quad + (a^{ij}D_{ij}\varphi + D_z\varphi a^{ij}D_{ij}w_{c_1})f' \\ &> \left(\frac{|Dw_{c_1}|^2}{4w_0^2(1 + |Dw_{c_1}|^2)} + \frac{2D_z\varphi D_i w_{c_1} D_i\varphi}{1 + |Dw_{c_1}|^2} \right) f'' + (a^{ij}D_{ij}\varphi - \frac{2D_z\varphi}{w_{c_1}})f' \\ &> \left(\frac{|Dw_{c_1}|^2}{4w_0^2(1 + |Dw_{c_1}|^2)} - \frac{D_i w_{c_1} D_i\varphi}{w_0(1 + |Dw_{c_1}|^2)} \right) f'' - 4f'. \end{aligned}$$

因此, 由 Schwarz 不等式可得

$$\frac{|Dw_{c_1}|^2}{4w_0^2(1+|Dw_{c_1}|^2)} - \frac{D_i w_{c_1} D_i \varphi}{w_0(1+|Dw_{c_1}|^2)} > \frac{|Dw_{c_1}|^2 - (\frac{16w_0}{R})^2}{8w_0^2(1+|Dw_{c_1}|^2)}.$$

进一步, 我们可得

$$a^{ij} D_{ij} g > \left(\frac{|Dw_{c_1}|^2 - (\frac{16w_0}{R})^2}{8w_0^2(1+|Dw_{c_1}|^2)} \right) f'' - 4f'. \quad (5.4.21)$$

令 $f = e^{a\varphi} - 1$, 那么存在一个充分大 $b > 0$, 使得, 如果 $|Dw_{c_1}(\xi_p, \eta_p)| > b$ 那么对于充分大的 $a > 0$ 有

$$\left(\frac{|Dw_{c_1}|^2 - (\frac{16w_0}{R})^2}{8w_0^2(1+|Dw_{c_1}|^2)} \right) f'' > 4f'. \quad (5.4.22)$$

显然 a 和 b 仅依赖于 R 和 w_0 . 于是, 由 (5.4.7) 和 (5.4.13) 可得

$$a^{ij} D_{ij}(gv) > 0. \quad (5.4.23)$$

这和 (5.4.6) 相矛盾. 因此, 我们有

$$|Dw_{c_1}(\xi_p, \eta_p)| < b, \quad (5.4.24)$$

$$\begin{aligned} g(\xi_0, \eta_0, w_{c_1}(\xi_0, \eta_0))v(\xi_0, \eta_0) &= (e^{a/2} - 1)v(\xi_0, \eta_0) \\ &< g(\xi_p, \eta_p, w_{c_1}(\xi_p, \eta_p))v(\xi_p, \eta_p) < (b+1)e^a. \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

所以,

$$v(\xi_0, \eta_0) < \frac{(b+1)e^a}{e^{a/2} - 1}. \quad (5.4.26)$$

下一步我们要证明 ϕ_{c_1} ($c_* < c_1 < 1$) 具有一致的上界. 令 $B_{R'}(0)$ 为以原点为圆心 R' 为半径的圆, 使得对所有的 $c_* < c_1 < 1$ 都成立 $\Lambda_{c_1} \subset B_{R'}(0)$. 令 $\phi_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(R'^2 - \xi^2 - \eta^2)$, 显然 $\phi_0(x)$ 满足位势流方程 (1.3.23). 那么, 由比较原理知在 Λ_{c_1} 内 $\phi_{c_1} < \phi_0$, 于是有 $w_0 < R'$. 由于

$$|D\phi_{c_1}| = |Dw_{c_1}| \sqrt{2\phi_{c_1}}, \quad (5.4.27)$$

所以

$$|D\phi_{c_1}(\xi_0, \eta_0)| < R' \frac{(b+1)e^a}{e^{a/2} - 1}. \quad (5.4.28)$$

又由 (ξ_0, η_0) 在 Λ' 内的任意性知该引理成立. \square

引理 5.3. 令 A 为边界 $\partial\Lambda_{c_1}$ ($c_* < c_1 < 1$) 上的任意一点, $\mathbf{n}_A = (n_1^A, n_2^A)$ 为 $\partial\Lambda_{c_1}$ 在 A 点的单位外法向量. 令 $\psi(\xi, \eta) = s(n_1^A(\xi - \xi_A) + n_2^A(\eta - \eta_A))^t$, 那么存在 $s > 0$ 和 $0 < t < 1$, s 和 t 不依赖于 A 和 c_1 , 使得在 Λ_{c_1} 上

$$\phi_{c_1} < \psi. \quad (5.4.29)$$

证明: 由计算可知

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}\left(\frac{D\psi}{\sqrt{2\psi+|D\psi|^2}}\right) + \frac{2}{\sqrt{2\psi+|D\psi|^2}} \\ &= \frac{s(n_1^A(\xi-\xi_A) + n_2^A(\eta-\eta_A))^t (4 + st(3t-2)(n_1^A(\xi-\xi_A) + n_2^A(\eta-\eta_A))^{t-2})}{2s(n_1^A(\xi-\xi_A) + n_2^A(\eta-\eta_A))^t + s^2t^2(n_1^A(\xi-\xi_A) + n_2^A(\eta-\eta_A))^{2t-2}}. \end{aligned} \quad (5.4.30)$$

于是, 当 $0 < t < 2/3$ 及 s 充分大时

$$\operatorname{div}\left(\frac{D\psi}{\sqrt{2\psi+|D\psi|^2}}\right) + \frac{2}{\sqrt{2\psi+|D\psi|^2}} < 0. \quad (5.4.31)$$

因此, 由比较原理可得该引理成立. \square

定理 5.4. Dirichle 问题 (5.4.1) 的解存在, 且该解属于 $C(\bar{\Lambda}) \cap C^\infty(\Lambda)$.

证明: 令 $\Lambda_i, i = 1, 2, \dots$ 为一列具有光滑边界的开区域, 且满足 $\bar{\Lambda}_1 \subset\subset \bar{\Lambda}_2 \subset\subset \dots \subset \bar{\Lambda}_i \subset\subset \dots$ 及 $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i = \Lambda_{c_*}$. 令 $R_2 = \operatorname{dist}(\Lambda_2, \partial\Lambda_{c_*})$, 那么存在一个 $\delta_2 > 0$, 使得对任意的 $c_1 \in (c_*, c_* + \delta_2)$ 和 $(\xi_0, \eta_0) \in \Lambda_2$, 我们有 $B_{R_2/2}((\xi_0, \eta_0)) \subset \Lambda_{c_1}$. 对任一给定的 $(\xi_0, \eta_0) \in \Lambda_2$, 令 $h(\xi, \eta) = \frac{(R_2/2)^2 - (\xi - \xi_0)^2 - (\eta - \eta_0)^2}{2}$. 因此, 由比较原理可知当 $c_1 \in (c_*, c_* + \delta_2)$ 时, $\phi_{c_1}(\xi_0, \eta_0) > h(\xi_0, \eta_0) = \frac{R_2^2}{8}$. 于是, 在 Λ_2 上

$$\frac{R_2^2}{8} < \phi_{c_1} < \frac{R'^2}{2}, \quad (5.4.32)$$

其中 R' 是引理 5.2 中定义的. 由引理 5.2 可得对任意的 $c_1 \in (c_*, c_* + \delta_2)$ 都成立

$$\sup_{(\xi, \eta) \in \Lambda_2} |D\phi_{c_1}(\xi, \eta)| < M(R_2). \quad (5.4.33)$$

因此, 由 (5.4.32), (5.4.33) 和 [25] 的定理 13.6 可得存在 $\alpha \in (0, 1)$, α 依赖于 M, R_2 和 R' , 使得

$$\|\phi_{c_1}\|_{1, \alpha; \Lambda_1} < C, \quad (5.4.34)$$

其中 C 仅依赖于 $M, R_2, \operatorname{dist}(\Lambda_1, \partial\Lambda_2)$ 和 $\operatorname{diam}(\Lambda_2)$. 又由 Schauder 估计可得

$$\|\phi_{c_1}\|_{2, \alpha; \Lambda_1} < C', \quad (5.4.35)$$

其中 C' 是一常数仅依赖于 C, α 和 Λ_1 . 于是, 我们能够找到一子列 $\phi_{c_1^j}, j = 1, 2, 3, \dots$, $c_* < c_1^j < c_* + \delta_2$, 使得在 $C^2(\bar{\Lambda}_1)$ 上

$$\phi_{c_1^j} \rightarrow \phi. \quad (5.4.36)$$

重复该过程并利用对角线法则我们能够找到一子列 ϕ_{c_j} (为了方便我们仍记该子列为 ϕ_{c_j}) 和一 ϕ_{c_*} , 使得对任意的 $\Lambda' \subset \subset \Lambda_{c_*}$, 有在 $C^2(\Lambda')$ 上

$$\phi_{c_j} \rightarrow \phi_{c_*}. \quad (5.4.37)$$

显然 ϕ_{c_*} 满足方程 (1.3.23). 又由引理 5.3 可得

$$\phi_{c_*}|_{\partial\Lambda_{c_*}} = 0. \quad (5.4.38)$$

于是, 该定理证毕. \square

第六章 临界跨声冲击波

Sheng, Wang 和 Zhang “Critical transonic shock and supersonic bubble.” 在用数值模拟的方法研究疏散波爬坡问题时提出了临界跨声冲击波 (冲击波波后的速度刚好为声速). 我们在这一章要说明这种流动结构在数学上是可能的. 至于临界跨声冲击波是否会在二维 Riemann 问题的整体流动中出现仍然是一个有争议的话题, 我们对此不做定论.

我们接下来要构造一个拟定常位势流模型的临界跨声冲击波. 假设常状态 (0) 和 (1) 被一平面冲击波连接, 该平面冲击波在 (ξ, η) 平面的位置为 $\xi = \xi_0$. 假设点 $A: (\xi_0, \hat{\eta})$ 为 $\xi = \xi_0$ 和声速圆 $(\xi - u_1)^2 + \eta^2 = c_1^2$ 的交点. 我们的目的是要构造一个过点 A 的临界跨声冲击波. 不失一般性, 我们令 $\gamma = 2$. 那么由前几章的结论可知

$$u_1 = (\rho_1 - 1) \sqrt{\frac{2(\rho_1 - 1)}{\rho_1^2 - 1}}, \quad \xi_0 = \rho_1 \sqrt{\frac{2(\rho_1 - 1)}{\rho_1^2 - 1}}, \quad \hat{\eta} = \sqrt{\frac{\rho_1^3 - 3\rho_1 + 2}{\rho_1^2 - 1}}. \quad (6.0.1)$$

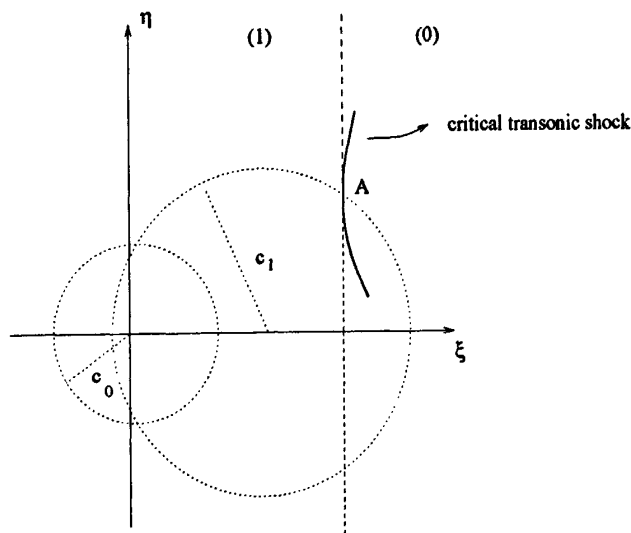


图 6.1 (ξ, η) 平面上从 A 点发出的一段临界跨声冲击波.

我们假设过点 A 的临界跨声冲击波可以用 $\xi = f(\eta)$, $\xi_0 = f(\eta_A)$ 来表示, 假设该冲击波波后的状态为 $u = u(\eta)$, $v = v(\eta)$, $\rho = \rho(\eta)$. 那么, 由上一章的结论可得

$$u f' + v = 0. \quad (6.0.2)$$

$$\rho(f - u + f'v - \eta f') = f - \eta f', \quad (6.0.3)$$

$$\rho = 1 + uf + \eta v - \frac{1}{2}(u^2 + v^2). \quad (6.0.4)$$

又由于冲击波波后的状态为声速 (当 $A = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ 且 $\gamma = 2$ 时, $c^2 = \gamma A \rho^{\gamma-1} = \rho$), 所以

$$(u-f)^2 + (v-\eta)^2 = \rho. \quad (6.0.5)$$

我们可以把 (6.0.3-6.0.5) 写成 $F_i(u, v, \rho, f, f', \eta) = 0, i = 1, 2, 3$, 且有

$F_i(u_1, 0, \rho_1, \xi_0, 0, \hat{\eta}) = 0$. 由计算可知, 当 $(u, v, \rho, f, f', \eta) = (u_1, 0, \rho_1, \xi_0, 0, \hat{\eta})$ 时

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \rho} & \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \rho} & \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \rho} & \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1 - \xi_0 & \rho_1 & 0 \\ 1 & u_1 - \xi_0 & -\hat{\eta} \\ 1 & 2(\xi_0 - u_1) & 2\hat{\eta} \end{pmatrix} = -3\rho_1 \hat{\eta}. \quad (6.0.6)$$

因此, 由隐函数定理可知在点 $(f, f', \eta) = (\xi_0, 0, \hat{\eta})$ 附近我们有

$$\begin{cases} u = u(f, f', \eta) \\ v = v(f, f', \eta) \\ \rho = \rho(f, f', \eta) \end{cases} \quad (6.0.7)$$

将 (6.0.7) 代入 (6.0.2), 我们有

$$G(f, f', \eta) = u(f, f', \eta)f' + v(f, f', \eta) = 0. \quad (6.0.8)$$

在 (6.0.3-6.0.5) 中, 我们将 (u, v, ρ) 看成是 (f, f', η) 的函数. 这时, 将 (6.0.3-6.0.5) 两边关于变量 f' 求导可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial f'}(f-u+f'v-\eta f') + \rho(v-\eta+f'\frac{\partial v}{\partial f'} - \frac{\partial u}{\partial f'}) = -\eta, \quad (6.0.9)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial f'} = (f-u)\frac{\partial u}{\partial f'} + (\eta-v)\frac{\partial v}{\partial f'}, \quad (6.0.10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial f'} = -2((f-u)\frac{\partial u}{\partial f'} + (\eta-v)\frac{\partial v}{\partial f'}). \quad (6.0.11)$$

显然, (6.0.9-6.0.11) 中 $(\frac{\partial u}{\partial f'}, \frac{\partial v}{\partial f'}, \frac{\partial \rho}{\partial f'})$ 在点 $(u_1, 0, \rho_1, \xi_0, 0, \hat{\eta})$ 的系数行列式不为零.

由 (6.0.8) 可得

$$\frac{\partial G}{\partial f'}(\xi_0, 0, \hat{\eta}) = u_1 + \frac{\partial v}{\partial f'}(\xi_0, 0, \hat{\eta}). \quad (6.0.12)$$

又由 (6.0.9-6.0.11) 有

$$\frac{\partial v}{\partial f'}(\xi_0, 0, \hat{\eta}) = \frac{u_1 - \xi_0}{\rho_1} + \xi_0 - u_1. \quad (6.0.13)$$

将 (6.0.1), (6.0.13) 代入 (6.0.12) 可得

$$\frac{\partial G}{\partial f'}(\xi_0, 0, \hat{\eta}) = \left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1}\right) \sqrt{\frac{2(\rho_1 - 1)}{\rho_1^2 - 1}} > 0. \quad (6.0.14)$$

因此, 由隐函数存在定理可知在点 $(f, \eta) = (\xi_0, \hat{\eta})$ 附近有 $f' = J(f, \eta)$, 且满足 $J(\xi_0, \hat{\eta}) = 0$. 所以, 由常微分方程初值问题局部解的存在性知定解问题

$$\begin{cases} (6.0.2, 6.0.3, 6.0.4, 6.0.5); \\ (u, v, \rho, f)(\hat{\eta}) = (u_1, 0, \rho_1, \xi_0). \end{cases} \quad (6.0.15)$$

的局部解存在.

这样, 我们就构造了一个过点 A 的临界跨声冲击波. 对于 $\gamma \neq 2$ 的情况, 我们可以用类似的方法得到. 对于拟定常 Euler 方程, 用同样的方法我们也能得到一个这样的冲击波只是计算会烦琐一些, 在此不做详细论述.

参考文献

- [1] M. BAE, G. Q. CHEN AND M. FELDMAN, *Regularity of solutions to regular shock reflection for potential flow*, *Inventiones Mathematicae*, 175 (2009), 505-543.
- [2] S. BANG, *Interaction of three and four rarefaction waves of the pressure-gradient system*, *J. Differential Equations*, 246 (2009).
- [3] G. BEN-DOR, *Shock Wave Reflection Phenomena*, Springer Verlag, New York, 1991.
- [4] Y. BRENIER, *Solutions with concentration to the Riemann problem for one-dimensional Chaplygin gas equations*, *J. Math. Fluid Mech.*, 7 (2005), 326-331.
- [5] A. BRESSAN, *Hyperbolic systems of conservation laws: the one-dimensional Cauchy problem*, Oxford University Press, 2000.
- [6] S. CANIC, B. L. KEYFITZ AND E. H. KIM, *Free boundary problem for the unsteady transonic small disturbance equation: Transonic regular reflection*, *Meth. Appl. Anal.* 7 (2000), 313-335.
- [7] S. CANIC, B. L. KEYFITZ AND E. H. KIM, *A free boundary problem for a quasilinear degenerate elliptic equation: regular reflection of weak shock*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 55 (2002), 71-92.
- [8] T. CHANG, L. HSIAO, *The Riemann Problem and Interaction of Waves in Gas Dynamics*, in: *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 41, Longman Scientific and Technical, Essex, England, 1989.
- [9] S. CHAPLYGIN, *On gas jets*, *Mem. Moscow Univ. Math. Phys.*, 21 (1904), 1-121.
- [10] T. CHANG, G. CHEN AND S. YANG, *On the 2-D Riemann problem for the compressible Euler equation, II. Interaction of contact discontinuities*, *Disc. Cont. Dyna. Syst.*, 6 (2000), 419-430.
- [11] S. X. CHEN AND A. F. QU, *Interaction of rarefaction waves in jet stream*, *J. Diff. Equ.*, to appear.
- [12] S. X. CHEN, *Stability of Mach Configuration*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 59 (2006), 1-35.
- [13] S. X. CHEN, *Mach Configuration in Pseudo-Stationary Compressible Flow*, *J. Amer. Math. Soc.*, 21 (2008), 23-61.
- [14] T. CHANG, G. Q. CHEN AND S. YANG, *On the 2-D Riemann problem for the compressible Euler equations, I. Interaction of shock and rarefaction waves*, *Discrete and Continuous Dynamical System*, 1 (1995), 555-584.

- [15] T. CHANG, G. Q. CHEN AND S. YANG, *On the 2-D Riemann problem for the compressible Euler equations, I. Interaction of contact discontinuities*, Discrete and Continuous Dynamical System, 6 (2000), 419-430.
- [16] G. CHEN AND M. FELDMAN, *Global solutions of shock reflection by large-angle wedges for potential flow*, Ann. Math., to appear.
- [17] P. COLELLA AND L. F. HENDERSON, *The von Neumann paradox for the diffraction of weak shock waves*, J. Fluid Mech., 213 (1990), 71-94.
- [18] R. COURANT AND K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New York, 1948.
- [19] Z. DAI AND T. ZHANG, *Existence of a global smooth solution for a degenerate Goursat problem of gas dynamics*, Arch. Rat. Mech. Anal., 155 (2000), 277-298.
- [20] C.M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in Continuum Physics*, Springer, New York, 1999.
- [21] V. ELLING, *Regular reflection in self-similar potential flow and the sonic criterion*, 2007.
- [22] V. ELLING AND T. P. LIU, *The ellipticity principle for self-similar potential flows*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, Vol. 2, No. 4 (2005), 909-917.
- [23] V. ELLING AND T. P. LIU, *Supersonic flow onto a solid wedge*, Communication on Pure and Applied Mathematics, 61(10): 2008, 1347-1448.
- [24] V. ELLING AND T. P. LIU, *Exact solutions to supersonic flow onto a solid wedge*, 2008.
- [25] D. GILBARG AND N. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 2003.
- [26] J. GLIMM, X. JI, J. LI, X. LI, P. ZHANG, T. ZHANG, Y. ZHENG, *Transonic shock formation in a rarefaction Riemann problem for the 2-D compressible Euler Equations*, SIAM J. Appl. Math., 69 (2008), 720-742.
- [27] L. H. GUO AND W. C. SHENG AND T. ZHANG, *The 2D Riemann problem for isentropic Chaplygin gas dynamic system*, submitted for publication, 2009.
- [28] YANBO HU AND JIEQUAN LI AND WANCHENG SHENG, *Interaction of rarefaction waves for 2D isothermal Euler equations*, submitted for publication, 2009.
- [29] F. HUANG AND Z. WANG, *Well posedness for pressureless flow*, Comm. Math. Phys., 222 (2001), 117-146.

- [30] J. K. HUNTER AND M. BRIO, *Weak shock reflection*, J. Fluid. Mech., 410 (2000), 235-261.
- [31] F. JOHN, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1982.
- [32] B. L. KEYFITZ AND H. C. KRANZER, *Spaces of weighted measures for conservation laws with singular shock solutions*, J. Differential Equations, 118 (1995), 420-451.
- [33] E. H. KIM, *Subsonic solutions for compressible transonic potential flows*, J. Differential Equations, 233 (2007), 276-290.
- [34] E. H. KIM, *Subsonic solutions to compressible transonic problems for isothermal self-similar flows and steady flows*, J. Differential Equations, 233 (2007), 601-621.
- [35] E. H. KIM, *Boundary gradient estimates for subsonic solutions of compressible transonic potential flows*, Discrete and Continuous Dynamical System, supplement (2007), 573-579.
- [36] D. X. KONG AND Y. Z. WANG, *Global existence of smooth solutions to two-dimensional compressible isentropic Euler equations for Chaplygin gases*, to appear.
- [37] D. J. KORCHINSKI, *Solutions of a Riemann problem for a 2×2 system of conservation laws crossing no classical solutions*, thesis, Adelphi University, Garden City, NY, 1977.
- [38] N. KOREVAAR, *An easy proof of the interior gradient bound for solutions to the prescribed mean curvature equation*, In: Nonlinear functional analysis and its applications. Proc. Symp. Pure Math. 45, (2), 81-90, Providence, Amer. Math. Soc. 1986.
- [39] GENG LAI AND W. C. SHENG, *Simple waves for 2D isentropic ir-rotational self-similar Euler system*, Appl. Math. Mech, to appear.
- [40] GENG LAI AND W. C. SHENG, *An impossible von Neumann reflection configuration for two-dimensional pseudo-steady Euler equations*, submitted for publication, 2010.
- [41] GENG LAI, W. C. SHENG AND Y. X. ZHENG, *Simple waves and pressure delta waves for a Chaplygin gas in two-dimensions*, submitted for publication, 2010.
- [42] P. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws, II*. Comm. Pure Appl. Math., 10 (1957), 537-566.
- [43] P. LAX AND X. D. LIU, *Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes*, SIAM J. Sci. Comput., 19 (1998), 319-340.
- [44] ZHEN LEI AND YUXI ZHENG, *A complete global solution to the pressure gradient equation*, J. Differential Equations, 236 (2007), 280-292.

- [45] J. LI, *On the 2D gas expansion for compressible Euler equations*, SIAM J. Appl. Math., 62 (2001), 831-852.
- [46] J. LI, *Global solution of an initial-value problem for 2D compressible Euler equations*, J. Differential Equations, 179 (2002), 178-194.
- [47] J. LI AND H. YANG, *Delta-shocks as limits of vanishing viscosity for multidimensional zero-pressure gas dynamics*, Quart. Appl. Math., 59 (2001), 315-342.
- [48] J. LI, ZHICHENG YANG AND Y. ZHENG, *Characteristic decompositions and interaction for rarefaction waves of the 2D Euler equations*, submitted for publication.
- [49] J. LI AND T. ZHANG, *Generalized Rankine-Hugoniot relations of delta-shocks in solutions of transportation equations*, in "Nonlinear PDE and Related Areas" (G. Q. Chen et al., Eds.), pp. 219-232, World Scientific, Singapore, 1998.
- [50] J. LI, T. ZHANG AND S. YANG, *The two-dimensional Riemann problem in gas dynamics*, Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics, 1998.
- [51] J. LI, T. ZHANG AND Y. ZHENG, *Simple waves and a characteristic decomposition of the two dimensional compressible Euler equations*, Commu. Math. Phys, 267 (2006), 1-12.
- [52] J. LI AND Y. ZHENG, *Interaction of rarefaction waves of the 2D self-similar Euler equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., 193 (2009), 623-657.
- [53] J. LI AND Y. ZHENG, *Interaction of Four Rarefaction Waves in the Bi-Symmetric Class of the Two-Dimensional Euler Equations*, Comm. Math. Phys., 296 (2009), 303-321.
- [54] M. LI AND Y. ZHENG, *Semi-hyperbolic patches of solutions of the 2D Euler equations*, submitted for publication, 2008.
- [55] T. LI, *Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems*, John Wiley and Sons, 1994.
- [56] T. LI AND W. YU, *Boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems*, Duke University, 1985.
- [57] Y. G. LU, *Existence of global BV bounded weak solutions to isentropic gas dynamics with negative pressure*, to appear.
- [58] C. W. SCHULZ-RINNE, *Classification of Riemann problem for two-dimensional gas dynamics*, SIAM J. Math. Anal., 24 (1993), 76-88.
- [59] D. SERRE, *Multi-dimensional shock interaction for a Chaplygin gas*, Arch. Rat. Mech. Anal., 191 (2008), 539-577.

- [60] D. SERRE, *von Neumann's comments about existence and uniqueness for the initial-boundary value problem in gas dynamics*, Bulletin of the American Mathematical Society, 47(2010), pp. 139-144.
- [61] V. M. SHELKOVICH, *δ and δ' wave types of singular solutions of systems of conservation laws and transport and concentration process*, Russian Math. Surveys, 63:3 (2008), 473-546.
- [62] W. SHENG AND T. ZHANG, *The Riemann problem for transportation equations in gas dynamics*, Mem. Amer. Math. Soc. 137, No. 564 (1999).
- [63] W. SHENG AND G. YIN, *Transonic shock and supersonic shock in the regular reflection of a planar shock*, Z. angew. Math. Phys. 60 (2009), 438-449.
- [64] W. SHENG, G. WANG AND T. ZHANG, *Oblique rarefaction wave reflection and critical transonic shock*, submitted for publication, 2010.
- [65] W. SHENG, G. WANG AND T. ZHANG, *Numerical generalized characteristic analysis to the Riemann problems for two dimensional Euler equations*, preprint, 2010.
- [66] W. SHENG, G. WANG AND T. ZHANG, *Numerical generalized characteristic analysis to the Riemann problems for isentropic Chaplygin gas*, preprint, 2010.
- [67] J. SMOLLER, *Shock wave and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, 1983.
- [68] K. SONG AND Y. ZHENG, *Semi-hyperbolic patches of solutions of the pressure gradient system*, Disc. Cont. Dyna. Syst., 24 (2009), 1365-1380.
- [69] J. H. SPURK AND N. AKSEL, *Fluid Mechanics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [70] D. TAN AND T. ZHANG AND Y. ZHENG, *Delta-shock waves as limits of vanishing viscosity for hyperbolic systems of conservation laws*, J. Differential Equations, 112 (1994), 1-32.
- [71] A. M. TESDALL AND J. K. HUNTER, *Self-similar solutions for weak shock reflection*, SIAM J. Appl. Math, 63 (2002), 42-61.
- [72] H. S. TSIEN, *Two dimensional subsonic flow of compressible fluids*, J. Aeron. Sci., 6 (1939), 399-407.
- [73] T. VON KARMAN, *Compressibility effects in aerodynamics*, J. Aeron. Sci., 8 (1941), 337-365.
- [74] E. VASIL'EV AND A. KRAIKO, *Numerical simulation of weak shock diffraction over a wedge under the von Neumann paradox conditions*, Comput. Math. Math. Phys., 39 (1999), 1335-1345.

- [75] T. ZHANG AND Y. ZHENG, *Conjecture on the structure of solution of the Riemann problem for 2D gas dynamics system*, SIAM J. Math. Anal., 21 (1990), 593-630.
- [76] Y. ZHENG, *Existence of solutions to the transonic pressure gradient equations of the compressible Euler equations in elliptic regions*, Comm. Partial Differential Equations, 22 (1997), 1849-1868.
- [77] Y. ZHENG, *Systems of Conservation Laws: 2D Riemann Problems*, 38 PNLDE, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [78] Y. ZHENG, *Two-dimensional regular shock reflection for the pressure gradient system of conservation laws*, Acta Math. Appl. Sin., 19 (2003), 559-572.
- [79] Y. ZHENG, *Absorption of characteristics by sonic curves of the 2D Euler equations*, Disc. Cont. Dyna. Syst., 23 (2009), 605-616.

博士期间的主要工作

1. GENG LAI AND WANCHENG SHENG, *Riemann problem for a simplest scalar non-convex ZND combustion model*, J. Shanghai Univ.(English edition), 12(5), 2008: 383-387.
2. GENG LAI AND WANCHENG SHENG, *Simple waves for two-dimensional pseudo-steady compressible Euler system*, Appl. Math. Mech, to appear.
3. GENG LAI, WANCHENG SHENG AND YUXI ZHENG, *Simple waves and pressure delta waves for a Chaplygin gas in two-dimensions*, submitted to Disc. Cont. Dyna. Syst. for publication, 2010.
4. GENG LAI AND WANCHENG SHENG, *An impossible von Neumann reflection configuration for two-dimensional pseudo-steady Euler equations*, preprint, 2010.
5. GENG LAI AND WANCHENG SHENG, *Detonation and deflagration wave curves for a two-dimensional combustion model*, preprint, 2010.

参加的科研课题

国家自然科学基金项目：激波的数学理论， No. 10671120.

国家自然科学基金项目：拟定常流和冲击波， No. 10971130.

致 谢

值此论文完成之际,我首先要感谢我的父亲和母亲!

在这几年的研究生学习期间我还非常幸运地认识了许多善良、有才华的老师 and 朋友。他(她)们中的每个人都给予过我各种各样的帮助,并教给了我许多的知识、看问题的方法、对待工作的态度、以及做人的道理。所有这一切将会是我以后人生道路上的一笔宝贵的财富。

我要衷心地感谢我的导师盛万成教授!感谢他将我引入非线性双曲守恒律方程组这一研究领域,并和我们一起上讨论课,通过这些讨论课我学习了许多基础知识;还要感谢他在学习上不给我过多的压力,让我能够自己做自己喜欢做的研究,并在我需要帮助的时候给予最及时的帮助;更要感谢他这几年在其它许多方面给予我的关心、鼓励和帮助。盛老师严谨治学的态度、乐观豁达的心态、勤奋敬业的精神都为我树立了良好的榜样!

我必须感谢我的另外一位导师郑玉玺教授!2008年8月-2009年8月,我有幸获得国家留学基金委资助的公派出国的机会访问美国宾夕法尼亚州立大学的郑玉玺教授,郑老师在我访问期间以及现在都给了我很多的关心和指导,我的论文的很大一部分也是在那完成的。郑老师组织的讨论和他每周邀请的那些专家的报告大大地开阔了我的视野。郑老师的严谨治学、对待问题坚持不懈的态度,以及他的待人友善、乐于助人、为人谦逊的品格都让我十分敬佩!

我还要感谢中科院的张同教授和首都师范大学的李杰权教授!在张老师每次访问上海大学的时候,他都会给我们讲述他以前的研究经历,并会经常地给予我鼓励,对此我深受感激!2007年夏天,我有幸参加李老师组织的关于气体向真空扩散的讨论课。在那里,我学习了特征分解方法。李老师给我讲述的他对偏微分方程的认识让我十分受益,对此我非常感谢!也要感谢那几周李老师的照顾。

我也要感谢数学系的所有老师,感谢他(她)们为数学系作出的贡献,使我作为数学系的一名研究生也有机会享受他(她)们的服务。我同时要感谢我的那些师姐、师兄、师弟、师妹。他(她)们是孙梅纳、孙文华、尹淦、潘丽君、陈荣三、王国栋、刘玉锦、唐云良、丛翠、张莉英、刘凤玲、胡燕波、孙士阳、朱荔、蔡宇欣。感谢他(她)们与我度过一段美好和难忘的研究生生活!

我特别要感谢我的好朋友温存、孙晶晶、吴锐。感谢他(她)们总是在我遇到困难的时候给予我真诚的关心和及时的帮助。也还要感谢我那大学同学吴鸿、许昊、王大威、梁思辉、郑晋。

最后，我要感谢我的外公、外婆、爷爷、奶奶、姨妈、姑姑、舅舅、叔叔、表姐，感谢他（她）们一直以来的支持、关心和照顾。

赖耕

2010 年 5 月

