



Classified Index: O175.1

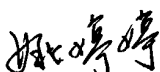
Dissertation for the Master Degree in Science

**Qualitative Analysis of Predator-prey  
System with the Holling IV  
Functional Response**

<b>Candidate:</b>	Yao Tingting
<b>Supervisor:</b>	Li Dongmei
<b>Academic Degree Applied for:</b>	Master of Natural Science
<b>Speciality:</b>	Pure Mathematics
<b>Date of Oral Examination:</b>	March, 2010
<b>University:</b>	Harbin University of Science and Technology

## 哈尔滨理工大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的硕士学位论文《具有 Holling IV 功能性反应函数的捕食系统的定性分析》，是本人在导师指导下，在哈尔滨理工大学攻读硕士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。据本人所知，论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文研究工作做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签名： 

日期：2010年4月6日

## 哈尔滨理工大学硕士学位论文使用授权书

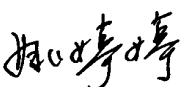
《具有 Holling IV 功能性反应函数的捕食系统的定性分析》系本人在哈尔滨理工大学攻读硕士学位期间在导师指导下完成的硕士学位论文。本论文的研究成果归哈尔滨理工大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解哈尔滨理工大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门提交论文和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权哈尔滨理工大学可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

本学位论文属于

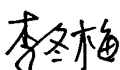
保密  ，在 年解密后适用授权书。

不保密  。

(请在以上相应方框内打√)

作者签名： 

日期：2010年4月6日

导师签名： 

日期：2010年4月6日

# 具有 Holling IV 功能性反应函数的捕食系统的 定性分析

## 摘 要

本文针对一类具有 Holling IV 功能性反应函数的捕食系统,应用微分方程稳定性和定性理论、重合度理论,证明了系统正平衡点全局稳定性,极限环的存在唯一性和周期解的存在性。主要内容如下:

第一部分,当食饵种群密度制约为一般函数时,分别研究了捕食者有密度制约和无密度制约的 Holling IV 型的捕食系统。利用根存在性定理,得到了正平衡点的存在条件。通过定性分析方法,给出平衡点的局部稳定性,运用 Dulac 函数法和构造恰当的 Liapunov 函数法,分别得到了系统无环的充分条件和正平衡点全局稳定性的充分条件。最后还利用 Bendixson 环域定理和张芷芬唯一性定理,证明了系统在一定条件下存在唯一稳定的极限环,并且利用 Matlab 软件对平衡点的全局稳定性和极限环的存在唯一性进行了数值模拟。

第二部分,考虑到离散系统比连续系统更加的符合实际,研究了当食饵种群密度制约为一般函数时,捕食者也有密度制约的 Holling IV 型的离散系统。通过利用特征值法,得到了系统正平衡点的局部稳定性充分条件。然后构造恰当的 Liapunov 函数,给出了系统正平衡点的全局稳定性的充分条件,利用 Matlab 软件进行了数值模拟。

第三部分,考虑到种群的许多动力学行为都是随着时间的变化而受影响的,研究了具有 Holling IV 型双密度制约变系数的离散捕食系统。运用重合度理论中的延拓定理,证明了周期系统正解的存在性。然后运用比较原理和不等式的性质,通过对系统进行适当的放缩,得到了系统持久性的充分条件。最后利用构造 Liapunov 函数,得到了系统正解的全局稳定性的充分条件。

关键词 Holling IV 型; 周期解; 平衡点; 全局稳定性

# Qualitative Analysis of Predator-prey Systems with the Holling IV Functional Response

## Abstract

In this paper, predator-prey systems with Holling IV functional response is studied. With utilizing differential equations stability and qualitative theory, coincidence degree theory, we prove the global stability of positive equilibrium point, the existence and uniqueness limit cycle and existence of periodic solutions. The main contents are as follows:

In the first part, when the density of the prey is an general function, we respectively study Holling IV functional response's predator-prey systems with the density or without the density in the predators. By using of the root existence theorem, we discuss the conditions for the existence of positive equilibrium. By using of qualitative analysis, the local stability of the equilibrium point is given. We respectively obtain sufficient conditions of no limit cycle and the global stability of positive equilibrium point by using of Dulac function method and Liapunov function method. Finally the existence and the uniqueness of limit cycle is proved by using of Bendixson Bendixson theorem and Zhang Zhifen uniqueness theorem under certain conditions. and the use of Matlab software for the global stability of equilibrium point and the existence and uniqueness of limit cycles were numerical simulation. By the Matlab software, the numerical simulation of the system is presented.

In the second part, taking into account the discrete system is more realistic than the continuous system. when the density of the prey is an general function as well as density of predator is considered, we study discrete-time systems of predator-prey system with Holling IV functional response. By using of the characteristic value method, we obtain sufficient conditions for local stability of positive equilibrium point. Then constructing an appropriate Liapunov function, we get sufficient conditions for the global stability of the equilibrium point. By the Matlab software, the numerical simulation of the system is presented.

In the third part, taking into account of the impact of the change, which in many acts and properties of the population along with the time, we study variable coefficient's discrete predator-prey systems with Holling IV functional response and with the double-density in the predators. And then the sufficient conditions for the existence of the positive periodic solution are obtained through the continuation theorem of coincidence degree. By applying inequalities properties, the comparison principle and properly zooming to the right function of the system, we can obtain the sufficient conditions for the persistence of the system. Finally, the global stability of the positive solution is studied by constructing a suitable Lyapunov function.

**Keywords** Holling IV, the periodic constant, persistence, global stability

# 目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
第 1 章 绪论.....	1
1.1 综述.....	1
1.2 国内外发展概况.....	1
1.2.1 具有密度制约的捕食系统.....	1
1.2.2 具有双密度制约的离散捕食系统.....	2
1.2.3 具有双密度制约变系数离散捕食系统.....	3
1.3 存在的问题及解决措施.....	4
1.4 课题来源.....	5
1.5 本文主要内容.....	5
1.5.1 具有密度制约的捕食系统.....	5
1.5.2 具有双密度制约的离散捕食系统.....	5
1.5.3 具有双密度制约变系数离散捕食系统.....	6
第 2 章 预备知识.....	7
2.1 基本定义.....	7
2.1.1 二维自治系统的相关概念.....	7
2.1.2 差分方程的相关概念.....	7
2.1.3 其他的相关概念.....	8
2.2 基本定理.....	9
第 3 章 具有密度制约的捕食系统.....	11
3.1 引言.....	11
3.2 系统建立.....	11
3.3 捕食者无密度制约的捕食系统.....	12
3.3.1 平衡点定性分析.....	12
3.3.2 解的有界性.....	14
3.3.3 极限环的不存在性.....	14
3.3.4 极限环的存在唯一性.....	15
3.3.5 数值模拟.....	17
3.4 捕食者有密度制约的捕食系统.....	18

3.4.1 正平衡点的存在性.....	19
3.4.2 正平衡点的全局稳定性.....	21
3.4.3 系统极限环存在唯一性.....	22
3.4.4 数值模拟.....	25
3.5 本章小结.....	26
第 4 章 具有双密度制约的离散捕食系统.....	28
4.1 引言.....	28
4.2 系统建立.....	28
4.3 正平衡点的存在性.....	29
4.4 正平衡点的局部稳定性.....	29
4.5 正平衡点的全局稳定性.....	31
4.6 数值模拟.....	33
4.7 本章小结.....	34
第 5 章 具有双密度制约变系数的离散捕食系统.....	35
5.1 引言.....	35
5.2 系统建立.....	35
5.3 周期系统正周期解的存在性.....	35
5.4 非周期系统的持久性.....	41
5.5 全局稳定性.....	48
5.6 本章小结.....	50
结论.....	52
参考文献.....	53
攻读硕士学位期间发表的学术论文.....	58
致谢.....	59

# 第1章 绪论

## 1.1 综述

在种群动力学中,不同的功能性反应函数,所体现的捕食者捕获食饵的能力不同。一类具有 Holling IV 功能反应函数的捕食系统是模拟废水分解或水净化中的“抑制”现象和“群体防御”现象的生态数学模型<sup>[1, 2]</sup>。具有 Holling IV 功能性反应函数的捕食系统,不仅有较强的生物背景和挑战性的复杂动力学性态<sup>[3]</sup>,而且对保护生态系统平衡,森林管理,渔业养殖,植物保护等方面具有很大的现实意义和应用价值。

在生态系统中,种群数量的变化又很多是服从离散规律的。差分方程是描述寿命较短,世代不重叠或数量较少的种群。因此,为了更加符合实际情况,就用差分方程来描述这种离散的生态数学模型

在种群动力学中,持久性是用来描述生物种群能否长时间存在下去的根据。对捕食系统中的一方灭绝,捕食关系是否会自然消失。特别是当食饵灭绝时,捕食者也会失去食物来源,进而灭绝。持久性的研究在生物控制,病虫害防治等方面有重要意义。

## 1.2 国内外发展概况

### 1.2.1 具有密度制约的捕食系统

关于食饵具有密度制约且捕食者无密度制约的 Holling IV 型的捕食系统的研究,已有许多结果,得到了系统轨线的全局稳定性,极限环的存在唯一性及无环性等问题研究取得了若干结果。但在现实生活中,有的捕食者也受密度制约的影响,对于具有功能反应函数及双密度制约的捕食系统研究成果甚少。

1968 年, Andrews 研究发现在废水分解或水净化的微生物动力学系统中会产生抑制现象,最早建立了非单调函数  $\varphi(x) = \frac{mx}{a+bx+x^2}$ <sup>[4]</sup>。随后, Sokol 和 Howell 发现将函数简化为  $\varphi(x) = \frac{mx}{a+x^2}$ , 使其更好的符合实验数据,更有生态意义<sup>[5]</sup>。

1986 年, Freedman 和 Wolkowicz 等人研究了食饵有密度制约且具有 Holling IV 功能性反应函数的捕食系统,讨论了该系统的奇点及轨线走向,提出了分界线的三种位置关系并举出了两种位置关系的特例<sup>[6]</sup>。Wolkowicz 和 G. S. K. 利用



Hopf 分支分析方法, 得到该系统极限环的存在性以及分支和奇异分支的产生<sup>[7]</sup>。

1988 年, 张发秦研究了群体防卫的捕食者厌食的捕食系统, 利用张芷芬唯一性定理得到极限环存在唯一性及系统的持续生存与绝灭<sup>[8]</sup>。

1998 年, 李贤彬和戴国仁也研究了食饵有密度制约的防御系统, 不仅得到系统极限环存在唯一性, 而且首次证明了该系统至少存在两个或三个极限环<sup>[9]</sup>。

2001 年, 陆世贵和肖冬梅, 研究了食饵种群密度制约为线性函数的简化的 Holling IV 功能反应函数的捕食系统, 得到了在不同的参数域中有唯一的稳定的极限环, 无环且在分支方面研究了鞍结点分支, Hopf 分支, 同宿轨分支和尖点分支。采用形式级数法且借助 mathematica 软件计算了细焦点最高阶数不小于 2。并对其系统稳定性进行判定, 由 Hopf 分支定理得到了在某领域内至少存在两个极限环<sup>[10]</sup>。

2005 年, 陈江姗研究了食饵种群密度制约为非线性函数的 Holling IV 功能反应函数的捕食系统, 采用形式级数法计算了细焦点最高阶数等于 2。由 Hopf 分支得到在某领域内至少存在两个极限环。由退化孤立奇点分支得到了退化奇点的余维为 2。最后在很小的参数扰动下得到了 Bogdanov-Takens 分支<sup>[11]</sup>。

2007 年, 李义龙, 肖冬梅研究了捕食者为 Leslie 形式, 食饵具有 Holling IV 功能性反应函数的捕食系统。利用了 Bendixson 环域定理得到了存在唯一极限环。由 Liapunov 函数构造法得到了正平衡点全局稳定性<sup>[12]</sup>。同年, 孙凤欣和林怡也研究了上述系统, 不同的是该文利用 Wiggins 判别方法得到系统稳定极限环的存在性<sup>[13]</sup>。

2007 年, Wang Yuquan 研究了具有 Monod-Haldane 功能反应的一类食物链模型的动力学系统, 应用定性分析和 Hopf 分支理论, 得到了该系统边界平衡点的全局稳定性和周期解存在性的判别准则<sup>[14]</sup>。

### 1.2.2 具有双密度制约的离散捕食系统

在工程技术和自然科学的很多领域, 有不少现象是用差分方程来描述这种离散系统的。种群数量的变化很多是服从离散规律的。因此, 用差分方程来描述种群动力学性态更加符合实际。对离散时间系统的研究表明, 离散系统比连续系统有更加复杂的种群动力学行为。

Sakovskii, 陈兰荪等人研究了一类单种群自治系统, 得到了正平衡点局部稳定性, 全局稳定性, 周期轨道和混沌现象产生条件等成果<sup>[15, 16, 17, 18, 19]</sup>。

1987 年, Hofbauer J, Hutsin V 和 Jansen W 研究了一类 Lotka-Volterra 离散自治的捕食系统, 应用分析方法给出了一般的 Lotka-Volterra 离散系统最终一致

有界和永久生存的条件<sup>[20]</sup>。

1988年, Cull.p 研究了单种群离散动力系统的性质, 应用 Liapunov 函数方法对平衡点的局部稳定性及全局稳定性进行了较全面的研究<sup>[21,22]</sup>。

2000年, 廖进昆等考虑了离散捕食链型系统的全局性态, 应用归纳法及线性变换等方法证明了三种群系统的最终一致有界性, 给出了系统永久性的充要条件, 讨论了系统全局稳定以及出现混沌的条件<sup>[23]</sup>。

2004年, 杨秀香应用分析方法对一类离散的捕食-食饵系统的奇点进行了定性分析, 从生态学的意义上解释了平衡点外围周期解的存在性、稳定性。另外, 给出了对此系统的两种群同时捕获时得到的最大持续收益的条件<sup>[24]</sup>。

2006年, 张悦等采用 Liapunov 指数方法, 验证了一类离散广义 Logistic 模型存在混沌现象, 并采用混沌控制中 OGY 方法的基本思想, 研究了这类模型的混沌控制问题, 得到了消除混沌、保持种群稳定到不动点和 2 周期轨道的充分条件<sup>[25]</sup>。

### 1.2.3 具有双密度制约变系数离散捕食系统

由于受现实中许多其他因素(气候的季节因素, 生殖习惯, 食物的供给等)的影响, 性质都会随着时间的变化而变化。因此, 对周期系数的离散系统进行详细的理论研究是非常必要的。近几年来, 一种强有力的方法-重合度理论<sup>[26]</sup>广泛应用于研究周期解存在性的捕食系统中。关于具有 Holling IV型连续的捕食周期系统的研究, 已经得到了正解的存在性, 持久性, 全局稳定性等若干结果。

2004年, 田宝单, 魏代俊和刘志军研究了具有 Holling IV功能性反应函数的非自治系统, 得到了系统一致持久的充分条件。并利用 Brower 不动点定理和 Liapunov 函数构造法, 分别得到了正周期解存在性和全局稳定性的充分条件<sup>[27]</sup>。

2006年, 田宝单研究了具有反馈控制且具有 Holling IV功能性反应函数的非自治系统, 得到了系统的一致持久生存的充分条件。建立了系统存在唯一的全局稳定的周期解的充分判据<sup>[28]</sup>。

2007年, 田德生研究了具有 Holling IV功能性反应函数且带有时滞的扩散的非自治系统, 利用重合度理论中的延拓定理, 建立了系统至少有两个正周期解的充分条件<sup>[29]</sup>。

2007年, Shen.C.S 研究了有 Holling IV功能性反应函数的三种群的非自治系统, 利用持久定义和 Liapunov 函数构造法, 分别得到了系统的持久性和全局吸引性<sup>[30]</sup>。

2007年, Mostafa Fazly, Mahmoud Hesaaraki 研究了具有一般功能性反应的

离散捕食系统, 利用重合度理论得到周期解的存在性判据<sup>[31]</sup>。

2007年 Jiao JJ 等人考虑了具有 Holling IV型阶段性结构的周期系统, 根据实际数据, 利用比较原理, 得到害虫灭绝周期解的全局吸引和系统持久生存的充分条件<sup>[32]</sup>。

2007年, Shen C X 研究了具有 Holling IV型食物链的捕食系统, 利用比较原理和构造恰当的 Liapunov 函数法, 分别得到了系统持久性和全局稳定性的充分条件<sup>[33]</sup>。

2008年, Yang W S 等人研究了具有 Holling IV型阶段结构的周期系统, 对不等式适当放缩, 证明了捕食者和被捕食者是持久生存的<sup>[34]</sup>。

2008年, 卢春研究了具有 Holling IV功能性反应的半比率依赖的非自治系统, 利用重合度理论中的延拓定理, 得到了正周期解的存在性<sup>[35]</sup>。王宜杰利用函数的上下平均值定义和微分方程的比较定理, 得到了该系统的持久性和周期解的存在性的充分条件<sup>[36]</sup>。2009年, Lijie Zhang 和 Chun Lu 不仅利用重合度理论中的延拓定理, 得到了正周期解的存在性, 而且构造 Liapunov 函数, 进一步得到了正周期解的全局稳定性, 并进行了数值模拟<sup>[37]</sup>。

2009年, Wang Q 等人研究了具有 Holling IV型的脉冲周期系统, 利用重合度理论, 得到了存在多个周期解的充分条件, 估计出了系统的周期解的上确界和下确界<sup>[38]</sup>。

2009年, 田德生等人应用重合度定理研究了一类具有 Holling IV类功能性反应时滞捕食系统的周期解的存在性问题, 建立了该系统至少存在两个正周期解的充分条件<sup>[39]</sup>。

2009年, 魏凤英研究了一类具有 Holling IV类功能反应的变系数多种群捕食系统, 利用比较定理得到种群一致持久生存的充分条件<sup>[40]</sup>。

### 1.3 存在的问题及解决措施

在 Holling IV型捕食系统的研究中, 众多学者研究的系统大部分都是食饵密度制约为具体函数。为了使密度制约更有概括性, 本文考虑了食饵种群密度制约为抽象函数。这在正平衡点性态的讨论, 系统转化为 Lienard 方程和满足张芷芬唯一性定理的三个条件时, 正负号的判断等方面就大大增加了难度, 需要借助数学分析的理论, 数形结合和分类讨论的思想来给予解决。

目前关于离散系统相关文献很少, 需要作者的自我探索和创新。利用重合度理论证明离散系统正周期解存在性时, 利用不等式放缩及不等式特殊的性质, 适当选取有界开集。

## 1.4 课题来源

本课题来源于导师的黑龙江省自然科学基金项目。

## 1.5 本文主要内容

### 1.5.1 具有密度制约的捕食系统

考虑食饵种群密度制约为一般函数  $g(x)$ ，分别讨论了捕食者无密度制约 ( $s=0$ ) 和有密度制约 ( $s \neq 0$ ) 时的 Holling IV 型的捕食系统

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)\left(g(x(t)) - \frac{y(t)}{a+x^2(t)}\right) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)\left(-d - sy(t) + \frac{\varepsilon x(t)}{a+x^2(t)}\right) \end{cases}$$

其中  $x(t)$ ,  $y(t)$  表示  $t$  时刻食饵, 捕食者的密度;  $d > 0$  为捕食者的死亡率,  $\varepsilon > 0$  为转化率;  $\frac{x}{a+x^2}$  为 Holling IV 功能反应函数;  $g(x)$  是食饵种群的相对增长率。

本文将研究具有 Holling IV 型食饵种群密度制约为一般函数  $g(x)$ , 分别讨论了  $s=0$  和  $s \neq 0$  时的捕食系统, 利用变分矩阵法分析平衡点的奇点类型; 并且运用 Dulac 函数法, 得到系统无环的充分条件; 构造恰当的 Liapunov 函数法, 给出正平衡点全局稳定性的充分条件; 利用 Bendixson 环域定理和张芷芬唯一性定理, 证明系统在一定条件下存在唯一稳定的极限环。并且利用 Matlab 软件对正平衡点的全局稳定性和极限环的存在唯一性进行了数值模拟。

### 1.5.2 具有双密度制约的离散捕食系统

在生态系统中, 种群数量的变化很多是服从离散规律的。因此, 用差分方程来描述种群动力学性态更与实际相符。对离散时间系统的研究表明, 离散系统比连续系统有更加复杂的种群动力学行为。考虑食饵种群密度制约为抽象函数  $g(x)$ , 捕食者有密度制约的 Holling IV 型的离散捕食系统如下

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) \exp\left\{g(x(t)) - \frac{y(t)}{a+x^2(t)}\right\} \\ y(t+1) = y(t) \exp\left\{-d - sy(t) + \frac{\varepsilon x(t)}{a+x^2(t)}\right\} \end{cases}$$

其中  $x(t)$ ,  $y(t)$  表示  $t$  时刻食饵, 捕食者的密度;  $d > 0$  为捕食者的死亡率,  $\varepsilon > 0$  为转化率;  $\frac{x}{a+x^2}$  为 Holling IV 功能反应函数;  $g(x)$  是食饵种群的相对增长率。

本文将研究食饵种群密度制约为一般函数  $g(x)$ ，捕食者有密度制约的 Holling IV 型的离散捕食系统，运用特征值法和构造恰当的 Liapunov 函数，详细研究系统正解的局部稳定性及全局稳定性，利用 Matlab 软件进行数值模拟。

### 1.5.3 具有双密度制约变系数离散捕食系统

关于捕食者无密度制约的 Holling IV 型变系数的离散捕食系统的研究，已经得到正周期解的存在性，持久性，全局稳定性等若干结果。考虑很多种群季节性繁殖的特点和当种群有互相不重叠的后代时，由差分方程来描述的离散系统会比连续系统更加的符合实际。因此，考虑具有 Holling IV 型双密度制约变系数的离散捕食系统如下

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) \exp \left\{ a(t) - b(t)x(t) - \frac{y(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \right\} \\ y(t+1) = y(t) \exp \left\{ -d(t) - g(t)y(t) + \frac{k(t)x(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \right\} \end{cases}$$

其中  $x(t)$ ， $y(t)$  表示  $t$  时刻食饵，捕食者的密度； $a(t), b(t), k(t), d(t), \beta(t), g(t)$  均为正函数。

本文将研究具有 Holling IV 型双密度制约变系数的离散捕食系统，利用重合度理论的延拓定理证明系统正周期解的存在性；利用比较原理，得到系统持久性的充分条件；利用 Liapunov 函数构造法，得到正解的全局稳定性。

## 第2章 预备知识

### 2.1 基本定义

#### 2.1.1 二维自治系统的相关概念

考虑一般二维自治系统

$$\begin{cases} x'(t) = P(x(t), y(t)) \\ y'(t) = Q(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (2-1)$$

定义 2.1<sup>[41]</sup> 若点  $(x_0, y_0)$  使  $P(x_0, y_0) = 0$ ,  $Q(x_0, y_0) = 0$ , 则称  $(x_0, y_0)$  为系统 (2-1) 的平衡点。

定义 2.2<sup>[41]31</sup> 设  $(x_0, y_0)$  是系统 (2-1) 的平衡点。如果对  $(x_0, y_0)$  的任一邻域  $U$ , 存在  $(x_0, y_0)$  的一个属于  $U$  的邻域  $U_1$ , 使系统 (2-1) 的每一条轨线  $(x(t), y(t))$ , 若有  $(x(0), y(0)) \in U_1$ , 则对一切  $t > 0$ , 有  $(x(t), y(t)) \in U$ , 就称平衡点  $(x_0, y_0)$  是稳定的; 否则就称为不稳定的。

如果  $(x_0, y_0)$  稳定, 并且有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}^T$$

就称平衡点  $(x_0, y_0)$  是渐近稳定的。

定义 2.3<sup>[41]74-75</sup> 孤立的闭轨叫做极限环。如果存在包含极限环  $\Gamma$  的环形域  $U$ , 使得从  $U$  内出发的轨线当  $t \rightarrow +\infty$  时都渐近地接近极限环  $\Gamma$ , 则称极限环  $\Gamma$  为稳定的; 否则, 称  $\Gamma$  为不稳定的。

#### 2.1.2 差分方程的相关概念

考虑二维差分系统

$$x_i(t+1) = G_i(x_1(t), x_2(t)) \quad (2-2)$$

其中,  $i=1, 2$ ,  $G_i(x(t))$  为连续函数,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ ,  $t \in Z$ 。

定义 2.4<sup>[42]</sup> 若存在点  $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))^T$ , 使得对所有的  $t \in Z$

$$G_i(x^*(t)) = x_i^*(t)$$

则  $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))^T$  称为系统 (2-2) 的平衡点。

定义 2.5<sup>[42]88-89</sup> 假设系统 (2-2) 有一个正平衡点  $x^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ , 设  $H$  是正象限内的一个开域,  $x^* \in H$ , 若函数  $V(x)$  具有下列性质:

(1) 对所有的  $x \in H$ , 且  $x \neq x^*$ , 有  $V(x) > 0$ , 且  $V(x^*) = 0$

(2) 在  $H$  内, 对于每一个  $K > 0$ , 曲面  $V(x) = K$  是一个闭曲面, 而且函数  $V(x)$  在  $x = x^*$  处有唯一的极小值;

(3) 函数

$$\Delta V(x) = V(G(x)) - V(x)$$

对所有的  $x \in H$  为非负的, 则称函数  $V(x)$  是系统(2-2)在区域  $H$  内的 Liapunov 函数。

定义 2.6<sup>[43]</sup> 若存在正常数  $M, m$ , 使系统(2-2)的任意正解  $(x_1(t), x_2(t))$  均满足  $m \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq M (i=1, 2)$ , 则系统(2-2)是持续生存的。

### 2.1.3 其他的相关概念

设  $Z, Z^+, R, R^+$  分别表示全体整数, 全体正整数, 全体实数和全体正实数所组成的集合;  $R^n$  表示  $n$  维欧氏空间。

设  $X, Y$  是两个 Banach 空间。设  $M: X \rightarrow Y$  是一个映射, 用  $Dom M$  表示  $M$  的定义域,  $Im M$  表示  $M$  的值域,  $Ker M$  表示  $M$  的核,  $Ker M = \{x | x \in X, M(x) = 0\}$ 。

设  $N, N' \subset X$  是  $X$  的子空间, 并且  $N \oplus N' = X$ 。用  $\dim N$  表示  $N$  的维数,  $co \dim N$  表示  $N$  的余维数, 即  $co \dim N = \dim X - \dim N = \dim N'$ 。设集合  $\Omega \subset X$ ,  $\bar{\Omega}$  表示集合  $\Omega$  的闭包,  $\partial \Omega$  表示集合  $\Omega$  的边界。

定义 2.7<sup>[44]</sup> 设  $l^\omega \subset l_n$  为全体  $\omega$  周期序列所组成的子空间, 则范数为通常的上确界范数  $\|\cdot\|$ , 即

$$\|x\| = \max_{t \in I_\omega} |x(t)|, \quad x(t) \in l^\omega, \quad I_\omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega - 1\}$$

其中  $l_n = \{x(t) | x(t) \in R^n, t \in Z\}$ ,  $\omega$  为给定的正整数。

定义 2.8<sup>[45]</sup> 设  $X, Y$  是赋范向量空间,  $L: Dom L \subset X \rightarrow Y$  为线性映射。如果  $\dim Ker L = co \dim Im L < +\infty$  且  $Im L$  为  $Y$  中闭子集, 则称映射  $L$  为指标为零的 Fredholm 映射。

定义 2.9<sup>[45]85</sup> 如果  $L$  为指标为零的 Fredholm 映射且存在连续投影  $P: X \rightarrow X$  及  $Q: Y \rightarrow Y$ , 使得  $Im L = Ker Q = Im(I - Q)$ , 则  $L|_{Dom L \cap Ker P}: (I - P)X \rightarrow Im L$  可逆, 记为  $K_p$ 。设  $\Omega$  为  $X$  中的有界开集,  $N: X \rightarrow Y$  为连续映射, 如果  $Im P = Ker L$ ,  $QN(\bar{\Omega})$  有界且  $K_p(I - Q)N: \bar{\Omega} \rightarrow X$  是紧的, 则称  $N$  在  $\Omega$  上是  $L$ -紧的。

定义 3.0<sup>[46]</sup> 设  $f: \bar{\Omega} \rightarrow R^n$ ,  $\Omega$  是  $R^n$  中的有界开集,  $p \in R^n$ 。考虑如下方程

$$f(x) = p \quad (2-3)$$

假定方程(2-3)在 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega$ 上无解, 即 $p \notin f(\partial\Omega)$ 。定义方程(2-3)关于集合 $\Omega$ 的拓扑度为

$$\deg(f, \Omega, p) = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} J_f(x^{(i)}) \quad (2-4)$$

$J_f(x^{(i)})$ 表示 $f$ 在点 $x^{(i)}$ 的Jacobi行列式

$$J_f(x^{(i)}) = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})} = \left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j^{(i)}} \right|$$

$x^{(i)} (i=1, 2, \dots, m)$ 表示方程(2-3)在 $\Omega$ 内的解。

## 2.2 基本定理

**定理 2.1**<sup>[41]169</sup> 如果 $U$ 是系统(2-1)的平衡点 $(x_0, y_0)$ 的邻域,  $U \subset W$ , 有函数 $V: U \rightarrow R$ , 在 $U$ 上连续, 在 $U - (x_0, y_0)$ 上可微, 满足:

(1)  $V(x_0, y_0) = 0, V(x, y) > 0$ , 当 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ ;

(2)  $V' = \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \leq 0$ , 当 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ , 其中 $(x(t), y(t))$ 是系统(2-1)的轨线, 则 $(x_0, y_0)$ 是稳定的;

(3) 若函数 $V$ 还满足 $V' < 0$ , 当 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ 。

则 $(x_0, y_0)$ 是渐近稳定的, 又称为Liapunov稳定性定理,

**定理 2.2**<sup>[47]</sup> (Bendixson 环域定理) 设由闭曲线 $L_1$ 与 $L_2$  ( $L_1 \supset L_2$ )所构成的环域 $D$ 内及其边界上不含奇点。若平面自治系统(2-1)凡与 $D$ 的边界 $\partial D$ 相交的正半轨均穿入(出)环域 $D$ , 则在 $D$ 内至少存在此系统(2-1)的一个内稳定(不稳定)的极限环和一个外稳定(不稳定)的极限环, 可能二者重合为一。

**定理 2.3**<sup>[47]181</sup> (极限环唯一性定理) 设有系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\phi(y) - F(x) \\ \frac{dy}{dt} = g(x) \end{cases} \quad (2-5)$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(u) du$ 。若

(1)  $f(x), g(x) \in C(-\infty, +\infty)$ ,  $g(x)$ 满足Lipschitz条件;

(2) 当 $x \neq 0$ 时,  $xg(x) > 0$ ,  $G(\pm\infty) = \pm\infty$ ,  $G(x) = \int_0^x g(u) du$ ;



(3)  $\frac{f(x)}{g(x)}$  分别在区间  $(-\infty, 0)$  与  $(0, +\infty)$  内不下降, 并且当  $0 < |x| \ll 1$  时,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \neq Const;$$

(4)  $y\varphi(y) > 0, y \neq 0; \varphi(\pm\infty) = \infty; \varphi(y) \in C(-\infty, +\infty)$  单调满足 Lipschitz 条件;  $\varphi(y)$  在  $y=0$  左、右导数存在, 且  $\varphi'_+(0)\varphi'_-(0) \neq 0$ ,

则系统(2-5)至多存在一个极限环, 若存在, 必稳定。

定理 2.4<sup>[42]81</sup> 若  $\lambda$  为系统(2-2)特征方程的所有特征根, 则有当  $|\lambda| < 1$  时, 系统(2-2)的正平衡点为局部稳定的; 当  $|\lambda| > 1$  时, 系统(2-2)的正平衡点为不稳定的;  $|\lambda| = 1$  为临界情况。

定理 2.5<sup>[48]</sup> 设  $f: Z \rightarrow R$  为  $\omega$  周期函数, 即  $f(t+\omega) = f(t), t \in Z$ , 对任意取定的  $t_1, t_2 \in I_\omega$  及任意的  $t \in Z$ , 有

$$f(t) \leq f(t_1) + \sum_{t=0}^{\omega-1} |f(t+1) - f(t)|$$

$$f(t) \geq f(t_2) - \sum_{t=0}^{\omega-1} |f(t+1) - f(t)|$$

定理 2.6<sup>[45]92</sup> 设  $L$  是指标为零的 Fredholm 映射,  $N$  在  $\bar{\Omega}$  上是  $L$ -紧的。假设

- (1) 对任意的  $\lambda \in (0, 1)$ , 方程  $Lx = \lambda Nx$  的解满足  $x \notin \partial\Omega \cap DomL$ ;
- (2) 对任意的  $x \in KerL \cap \partial\Omega, QNx \neq 0$ ;
- (3)  $deg\{JQN, \Omega \cap KerL, 0\} \neq 0$ ,

则方程  $Lx = Nx$  在  $DomL \cap \bar{\Omega}$  内至少存在一个解。

定理 2.7<sup>[49]</sup> (Arzela-Ascoli 定理) 若  $f \subset C(M)$  是一个列紧集, 必须且仅须  $f$  是一致有界且等度连续的函数族。

定理 2.8<sup>[42]90</sup> 若系统(2-2)满足:

- (1) 对所有的  $x \in H$ , 且  $x \neq x^*$ , 有  $V(x) > 0$ , 且  $V(x^*) = 0$ ;
- (2) 在  $H$  内, 对于每一个  $K > 0$ , 曲面  $V(x) = K$  是一个闭曲面, 而且函数  $V(x)$

在  $x = x^*$  处有唯一的极小值;

- (3) 条件  $\Delta V(x) = V(G(x)) - V(x) \leq 0$  对所有  $x \in \Gamma$  (正象限) 都满足;
- (4)  $\Delta V(x)$  不沿着在平凡解  $x = x^*$  近旁的解恒等于 0,

则称系统(2-2)是全局稳定的。

## 第3章 具有密度制约的捕食系统

### 3.1 引言

目前,关于食饵密度制约为具体函数的 Holling IV型的捕食系统,已得到正平衡点的全局稳定性,极限环的存在唯一性及无环性等结论。Wolkowicz 和 G.S.K. 讨论了系统极限环的存在性及分支和奇异分支的产生条件<sup>[7]592-606</sup>。1998年,李贤彬和戴国仁,得到系统极限环存在唯一性,而且首次证明了该系统至少存在两个或三个极限环<sup>[9]127-138</sup>。2001年,陆世贵和肖冬梅,讨论了系统的全局稳定性,鞍结点分支, Hopf 分支,同宿轨分支,尖点分支及系统至少存在两个极限环<sup>[10]1445-1472</sup>。2007年,李义龙,肖冬梅研究了系统极限环唯一性和正平衡点全局稳定性<sup>[13]947-950</sup>。因此,本章研究食饵种群密度制约为一般函数  $g(x)$  的 Holling IV型的捕食系统,讨论系统正平衡点的全局稳定性,无环性及极限环的存在唯一性。

### 3.2 系统建立

在种群动力学中具有密度制约的功能性反应捕食系统为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)g(x(t)) - y(t)\phi(x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(-d - sy(t) + \varepsilon\phi(x(t))) \end{cases} \quad (3-1)$$

其中  $x(t)$ ,  $y(t)$  分别表示  $t$  时刻食饵,捕食者的密度;  $d > 0$  为捕食者的死亡率,  $\varepsilon > 0$  为转化率;  $\phi(x)$  为捕食者功能反应函数;  $g(x)$  是食饵种群的相对增长率。

目前,当  $g(x)$  为具体函数时,且  $\phi(x)$  为 Holling I, II, III, IV类功能反应函数时,对系统(3-1)的全局稳定性,极限环的存在唯一性,无环性,正周期解存在性及持久性已有一系列的研究结果<sup>[51,52,53,54,55,56,57,58,59,60]</sup>。

根据此系统所描述的生态意义,下面仅在下列区域研究系统(3-1)

$$R_+^2 = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

系统(3-1)满足假设条件

$(H_1)$ : 存在  $K > 0$ , 使得  $g(K) = 0$ ,  $g(0) > 0$ ; 当  $0 < x \leq K$  时,  $g'(x) < 0$ ;  $g''(x)$  存在。

### 3.3 捕食者无密度制约的捕食系统

研究了食饵种群密度制约为一般函数  $g(x)$ , 捕食者无密度制约 ( $s=0$ ), 式(3-1)中  $\phi(x)$  为 Holling IV 功能反应函数的捕食系统

$$\begin{cases} x' = xg(x) - y \frac{x}{a+x^2} \\ y' = y(-d + \varepsilon \frac{x}{a+x^2}) \end{cases} \quad (3-2)$$

其中  $d, \varepsilon, a$ , 均为正常数。其它符号与式(3-1)相同。

#### 3.3.1 平衡点定性分析

对系统(3-2)作变换

$$\bar{x} = \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad \bar{y} = y, \quad d\tau = \frac{dt}{1+\bar{x}^2}$$

仍用  $\varepsilon, x, y, t, g(x)$  代替  $\bar{\alpha}, \bar{\varepsilon}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{g}(x)$ 。其中  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{a}} = \bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{g}(x) = g(\sqrt{a}\bar{x})$ ,  $\bar{g}(x)$  仍满足条件  $(H_1)$ , 则系统(3-2)可化为

$$\begin{cases} x' = x[(1+x^2)g(x) - y] \triangleq P(x, y) \\ y' = y(-dx^2 + \varepsilon x - d) \triangleq Q(x, y) \end{cases} \quad (3-3)$$

系统(3-3)平衡点应满足方程

$$\begin{cases} x[(1+x^2)g(x) - y] = 0 \\ y(-dx^2 + \varepsilon x - d) = 0 \end{cases} \quad (3-4)$$

下面用系统(3-3)的等倾线的性质讨论平衡点的存在性。由式(3-4)可求得系统(3-3)等倾线如下:

食饵等倾线  $I_1$

$$y = (1+x^2)g(x)$$

由假设条件  $(H_1)$  易知, 当  $x=0$  时,  $y=g(0)>0$ ; 当  $y=0$  时,  $x=K$ 。因此曲线  $I_1$  从正  $y$  轴上点  $(0, g(0))$  连续移动到正  $x$  轴上一个点  $(K, 0)$ 。

捕食者等倾线  $I_2$

当  $\varepsilon > 2d$  时,  $I_2$  为

$$x = x_1 = \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4d^2}}{2d}, \quad x = x_2 = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4d^2}}{2d}$$

易知  $x_i > 0$ , ( $i=1, 2$ )。

当  $\varepsilon = 2d$  时,  $I_2$  为

$$x=1$$

由曲线  $I_1, I_2$  的性质及式(3-4)知, 系统(3-3)有平凡平衡点  $O(0,0)$ ,  $E(K,0)$ , 而正平衡点情况如下。

定理 3.1 (i) 当  $\varepsilon > 2d$  时,

1) 若  $x_1 < K \leq x_2$ , 系统(3-3)有唯一的正平衡点  $E_1(x_1, y_1)$ 。

2) 若  $K > x_2$ , 系统(3-3)有二个正平衡点  $E_1(x_1, y_1)$ ,  $E_2(x_2, y_2)$ 。

其中  $y_i = (1+x_i^2)g(x_i)$ , ( $i=1,2$ )。

(ii) 当  $\varepsilon = 2d$ , 且  $1 < K$  时, 系统(3-3)有唯一的正平衡点  $E_0(1, 2g(1))$ 。

定理 3.2 (i)  $O(0,0)$  为系统(3-3)鞍点。

(ii) 当  $x_1 < K \leq x_2$  时, 点  $E(K,0)$  为系统(3-3)的鞍点。当  $K > x_2$  或  $K \leq x_1$  时, 点  $E(K,0)$  为系统(3-3)的稳定的结点或焦点。

(iii)  $E_2(x_2, y_2)$  为系统(3-3)的鞍点。

(iv) 当  $[(1+x_1^2)g(x_1)]' < 0 (> 0)$  时,  $E_1(x_1, y_1)$  为系统(3-3)的稳定(不稳定)的结点或焦点; 当  $[(1+x_1^2)g(x_1)]' = 0$  时,  $E_1(x_1, y_1)$  为系统(3-3)的细焦点。

(v)  $E_0(1, 2g(1))$  为系统(3-3)高次奇点。

证明 作系统(3-3)在平衡点  $(x, y)$  的变分矩阵为

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} (1+x^2)g(x) + 2x^2g'(x) + x(1+x^2)g''(x) - y & -x \\ y(\varepsilon - 2dx) & -dx^2 + \varepsilon x - d \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

由式(3-5)得

$$\det(J(0,0)) = -dg(0) < 0$$

$$\det(J(K,0)) = K(1+K^2)g'(K)(-dK^2 + \varepsilon K - d)$$

当  $x_1 < K \leq x_2$  时,  $\det(J(K,0)) < 0$ , 易知  $O(0,0)$ ,  $E(K,0)$  为系统(3-3)的鞍点。

当  $K > x_2$  或  $K \leq x_1$  时,  $\det(J(K,0)) > 0$ ,  $tr(J(K,0)) = K(1+K^2)g'(K) + (-dK^2 + \varepsilon K - d) < 0$ , 所以点  $E(K,0)$  为系统(3-3)的稳定的结点或焦点。

再由式(3-5)得

$$\det(J(x_i, y_i)) = x_i y_i (-2dx_i + \varepsilon) = 2dx_i y_i \left( \frac{\varepsilon}{2d} - x_i \right) \quad i=1,2 \quad (3-6)$$

由二次函数的性质可知

$$x_1 < \frac{\varepsilon}{2d} < x_2$$

由式(3-6)知,  $\det(J(x_1, y_1)) > 0$ ,  $\det(J(x_2, y_2)) < 0$ , 则  $E_2(x_2, y_2)$  为系

统(3-3)的鞍点。

再由式(3-5)知

$$\text{tr}(J(x_1, y_1)) = x_1[(1+x_1^2)g(x_1)]'$$

当 $[(1+x_1^2)g(x_1)]' < 0 (> 0)$ 时,  $E_1(x_1, y_1)$ 为系统(3-3)的稳定(不稳定)的结点或焦点。

当 $[(1+x_1^2)g(x_1)]' = 0$ 时, 则 $E_1(x_1, y_1)$ 为系统(3-3)的中心型结点或焦点。

由式(3-5)易得 $\det(J(1, 2g(1))) = 0$ , 则 $E_0(1, 2g(1))$ 为系统(3-3)的高次奇点。

证毕。

### 3.3.2 解的有界性

**定理 3.3** 系统(3-3)的一切正初始条件的解是有界的。

**证明** 当 $x(0), y(0)$ 为正, 当 $t \geq 0$ ,  $x(t), y(t)$ 也是正的。

(1) 如果 $0 < x(0) < K$ , 则有 $x(t) < K$ 。否则存在 $t_1 > 0$ , 使得 $x(t_1) = K$ 且

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} \geq 0, \text{ 由}(H_1)\text{知} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} = -x(t_1)y(t_1) < 0 \text{ 矛盾, 即 } x(t) < K.$$

(2) 如果 $x(0) \geq K$ , 又由 $(H_1)$ , 则或者 $x(t)$ 减少到某一个常数大于 $K$ , 或者存在 $t_2 > 0$ ,  $x(t_2) = K$ , 则有当 $t \geq t_2$ 时,  $x(t) < K \leq x(0)$ 。

事实上, 若 $\frac{dx(t)}{dt} = x[(1+x^2)g(x) - y] > 0$ , 则当 $t > 0$ 时,  $x(t) > K$ 。

即有 $[(1+x^2)g(x) - y] > 0$ 。

又由 $x(t) > K$ 可知,  $(1+x^2)g(x) - y < 0$ 。矛盾。

取 $x(t) \leq \max\{K, x(0)\}$ , 所以 $x(t)$ 有界。

(3) 由 $x(t)$ 有界,  $g(x)$ 连续, 将系统(3-2)的第一个方程的 $\varepsilon$ 倍与第二个方程相加得

$$\frac{d(\varepsilon x + y)}{dt} = \varepsilon x g(x) - dy \leq \eta - d(\varepsilon x + y)$$

解得 
$$\varepsilon x(t) + y(t) \leq A \exp\{-dt\} + \frac{\eta}{d}$$

其中 $A = \varepsilon x(0) + y(0) - \frac{\eta}{d}$ ,  $\eta = \max\{\varepsilon x g(x) + d \varepsilon x\}$ , 则 $y(t)$ 是有界的。证毕。

### 3.3.3 极限环的不存在性

**定理 3.4** 若 $x_1 < K \leq x_2$ , 系统(3-3)满足 $(H_1)$ 及 $((1+x^2)g(x))' < 0$ , 则系统(3-3)在第一象限内无环。

证明 取 Dulac 函数  $B = x^{-1}y^{-1}$ , 由定理条件可知

$$D = \frac{\partial PB}{\partial x} + \frac{\partial QB}{\partial y} = y^{-1}((1+x^2)g(x))' < 0$$

故系统(3-3)在第一象限内无环。证毕。

### 3.3.4 极限环的存在唯一性

定理 3.5 若  $x_1 < K \leq x_2$ ,  $[(1+x_1^2)g(x_1)]' > 0$ , 系统(3-3)满足  $(H_1)$  及  $xg(x) \cdot (-2\epsilon x + 4d) + g'(x)(3dx^4 - 4\epsilon x^3 + 4dx^2 + d) + xg''(x)(1+x^2)(dx^2 - \epsilon x + d) > 0$  则系统(3-3)在  $E_1(x_1, y_1)$  点外围至少存在唯一的稳定的极限环。

证明 作外境界线, 它是由  $\overline{BE}$ ,  $\overline{EO}$ ,  $\overline{OD}$ ,  $\overline{DC}$ ,  $\widehat{CB}$  所构成的, 如图 3-1。其中  $\widehat{CB}$  是曲线上  $xy = K(g(x_1)(1+K^2) + \epsilon K)$ ,  $(x_1 < x < K)$  的一段弧;  $C(x_1, y_c)$  是曲线  $\widehat{CB}$  与直线  $x = x_1$  的交点;  $B(K, y_B)$  是曲线  $\widehat{CB}$  与直线  $x = K$  的交点, 即  $y_B = g(x_1)(1+K^2) + \epsilon K$ ; 在  $\widehat{CB}$  上有  $y_c > y_B > y_1$ 。

事实上

$$\begin{aligned} y_B - y_1 &= g(x_1)(1+K^2) + \epsilon K - g(x_1)(1+x_1^2) = \\ &g(x_1)(K^2 - x_1^2) + \epsilon K > 0, \quad (x_1 < x < K) \end{aligned}$$

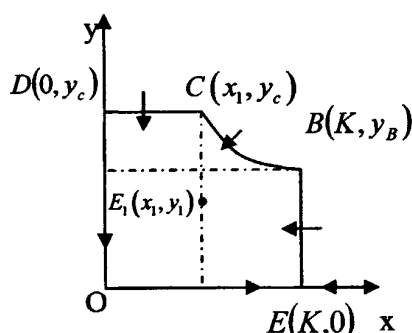


图 3-1 Bendixson 环域外境界线

Fig.3-1 The outer boundary lines of Bendixson's annular region

下面考察系统(3-3)在  $J$  曲线上的向量场

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=K} = -Ky < 0,$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=y_c} = y_c(-dx^2 + \epsilon x - d) < 0, (x < x_1)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(xy)}{dt} \right|_{(3-2)} &= y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} = xy((1+x^2)g(x) - y - dx^2 + \varepsilon x - d) \leq \\ &xy((1+x^2)g(x) - y + \varepsilon x) < xy((1+K^2)g(x_1) - y + \varepsilon K) = \\ &xy(y_B - y) < 0, \quad (x_1 < x < K) \end{aligned}$$

由定理 3.2 知  $O(0,0)$  为鞍点, 故线段  $OD$ ,  $OE$  都是系统(3-3)的解, 则系统(3-3)的轨线与  $J$  曲线相遇, 都正向进入曲线  $J$  的内部, 而  $E_1(x_1, y_1)$  为局部不稳定平衡点。则由定理 2.2 知, 系统(3-3)在  $E_1(x_1, y_1)$  外围至少存在一个稳定极限环。

下证系统(3-3)极限环的唯一性。

首先, 将系统(3-3)化为 Liénard 方程。

作变换  $x = u + x_1$ ,  $y = y_1 e^v$ ,  $dt = \frac{1}{x_1 + u} d\tau$  则系统(3-3)化为

$$\begin{cases} u' = -F(u) - \phi(v) \\ v' = \varphi(u) \end{cases} \quad (3-7)$$

其中

$$F(u) = -(1+(x_1+u)^2)g(x_1+u), \quad \phi(v) = y_1 e^v, \quad \varphi(u) = \frac{-d(x_1+u)^2 + \varepsilon(x_1+u) - d}{x_1+u}$$

在变换之下, 正平衡点  $E_1(x_1, y_1)$  变为  $(u, v)$  平面的原点  $(0,0)$ 。

下面在  $\Omega = \{(u, v) \mid -x_1 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty\}$  内考察系统(3-7)的唯一性。

(i) 当  $v \neq 0$  时,  $v\phi(v) > 0$ ;  $\phi(+\infty) = +\infty, \phi(-\infty) = 0$ ;  $\phi(v) \in (-\infty, +\infty)$  单调增且满足 Lipschitz 条件,  $\phi'(0) = y_1 \neq 0$ 。

(ii)  $\varphi(u)$  连续且在  $\Omega$  内部任何区间上满足 Lipschitz 条件; 当  $u \neq 0$  时, 由二次函数的性质可知

$$u\varphi(u) = \frac{u}{x_1+u} [-d(x_1+u)^2 + \varepsilon(x_1+u) - d] > 0$$

$$G(u) = \int_0^u \varphi(u) du, \quad G(-x_1) = +\infty, G(K-x_1) > 0, \quad G'(K-x_1) > 0$$

$$\text{构造 } G^*(u) = \begin{cases} G(u) & -x_1 < u < K-x_1 \\ G(K-x_1) + (u-K+x_1)^2 & K-x_1 \leq u \end{cases}$$

可得  $G^*(+\infty) = +\infty$ 。

(iii)  $f(u) \triangleq F'(u)$  则

$$\left( \frac{f(u)}{\varphi(u)} \right)' \Big|_{x=x_1+u} = \frac{\left( \frac{-x((1+x^2)g(x))'}{-dx^2 + \varepsilon x - d} \right)'}{(-dx^2 + \varepsilon x - d)^2} = \frac{1}{(-dx^2 + \varepsilon x - d)^2} [xg(x)(-2\varepsilon x + 4d) +$$

$$g'(x)(3dx^4 - 4\epsilon x^3 + 4dx^2 + d) + xg''(x)(1+x^2)(dx^2 - \epsilon x + d) > 0$$

所以  $\frac{f(u)}{\varphi(u)}$  在  $(-x_1, 0) \cup (0, +\infty)$  上单调不减。由定理 2.3 知, 系统(3-3)在  $\Omega$  内存在唯一的稳定极限环。证毕。

### 3.3.5 数值模拟

下面用 Matlab 软件对式(3-2)的正平衡点的全局稳定性进行数值模拟。

取  $\epsilon = 0.36$ ,  $d = 0.11$ ,  $a = 1$ ,  $g(x) = 0.4 - 0.4x$ , 得系统

$$\begin{cases} x' = x(0.4 - 0.4x) - y \frac{x}{1+x^2} \\ y' = y(-0.11 + \frac{0.36x}{1+x^2}) \end{cases} \quad (3-8)$$

此时, 系统(3-2)满足定理 3.3 和定理 3.4 的基本假设, 可知平衡点  $E_1(x_1, y_1)$  是全局稳定的。其中  $x_1 = 0.25$ ,  $y_1 = 0.9$ 。在  $\Omega$  内取初值  $x_{10} = 0.9$ ,  $y_{10} = 1.2$ ;  $x_{20} = 0.5$ ,  $y_{20} = 2$ 。得到式(3-8)的相轨线, 用 Matlab 软件数值模拟得到图 3-2。从图 3-2 可以看出, 这些轨线的  $\omega$  极限点均为奇点  $E_1(x_1, y_1)$ , 故  $E_1(x_1, y_1)$  在第一象限是全局稳定的。

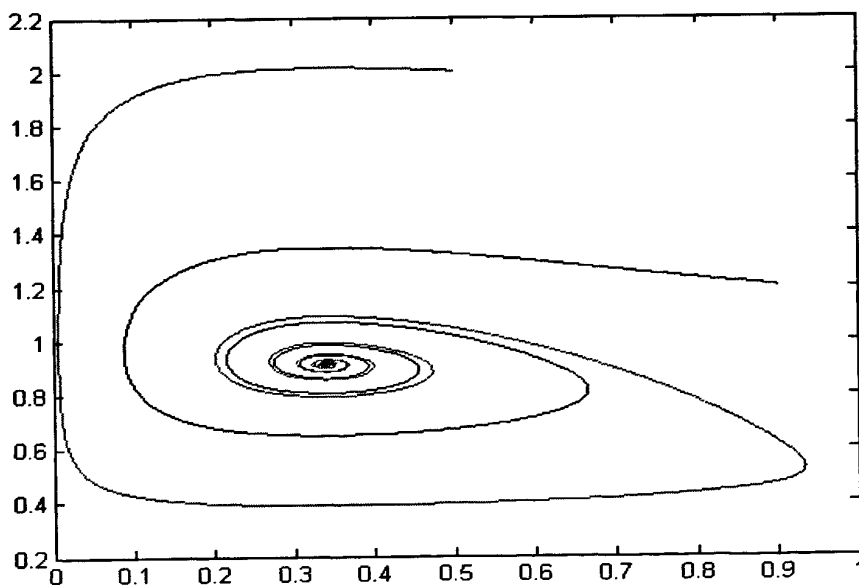


图 3-2 正平衡点的全局稳定性

Fig.3-2 The global stability of positive equilibrium point



下面用 Matlab 软件对式(3-2)的极限环的存在唯一性进行数值模拟。  
取  $\varepsilon = 0.5$ ,  $d = 0.1$ ,  $a = 1$ ,  $g(x) = 0.1 - 0.5x$ , 得系统

$$\begin{cases} x' = x(0.1 - 0.5x) - y \frac{x}{1+x^2} \\ y' = y(-0.1 + \frac{0.5x}{1+x^2}) \end{cases} \quad (3-9)$$

此时, 系统(3-9)满足定理 3.5 的基本假设均成立, 则在  $E_1(x_1, y_1)$  周围存在极限环。其中  $x_1 = 0.4$ ,  $y_1 = 1.2$ 。在  $\Omega$  内取初值  $x_{10} = 0.5$ ,  $y_{10} = 0.9$ ;  $x_{20} = 0.3$ ,  $y_{20} = 1.7$ 。得到在外围绕一个极限环的相轨线, 用 Matlab 软件数值模拟得到图 3-3。从图 3-3 可知, 上述极限环是唯一的。

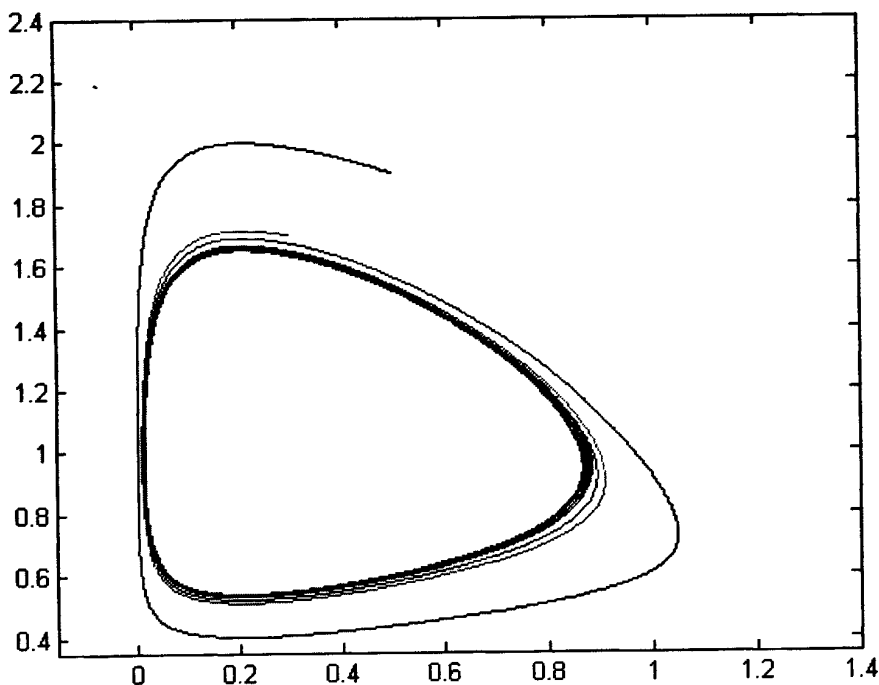


图 3-3 极限环的存在唯一性

Fig.3-3 The existence and uniqueness of the limit cycle

### 3.4 捕食者有密度制约的捕食系统

研究了食饵种群密度制约为一般函数  $g(x)$ , 捕食者有密度制约 ( $s \neq 0$ ), 式(3-1)中  $\phi(x)$  为 Holling IV 型的捕食系统

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)\left(g(x(t)) - \frac{y(t)}{a+x^2(t)}\right) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)\left(-d - sy(t) + \frac{\varepsilon x(t)}{a+x^2(t)}\right) \end{cases} \quad (3-10)$$

其中  $x(t)$ ,  $y(t)$  表示  $t$  时刻食饵, 捕食者的密度;  $d > 0$  为捕食者的死亡率,  $\varepsilon > 0$  为转化率;  $\frac{x}{a+x^2}$  为 Holling IV 功能反应函数;  $g(x)$  是食饵种群的相对增长率。

### 3.4.1 正平衡点的存在性

系统(3-10)的平衡点应满足

$$\begin{cases} x\left(g(x) - \frac{y}{a+x^2}\right) = 0 \\ y\left(-d - sy + \frac{\varepsilon x}{a+x^2}\right) = 0 \end{cases} \quad (3-11)$$

下面通过等倾线的性质来求系统(3-10)的平衡点。

由式(3-11)可求得其垂直等倾线为  $l_1$ :

$$y = (a+x^2)g(x) \quad (3-12)$$

由  $(H_1)$  知, 当  $x=0$  时,  $y=ag(0) > 0$ ; 当  $y=0$  时,  $x=K$ 。因此曲线  $l_1$  从正  $y$  轴上点  $(0, ag(0))$  连续移动到正  $x$  轴上一个点  $(K, 0)$ 。

再由式(3-11)可得水平等倾线  $l_2$ :

$$y = \frac{1}{s}\left(-d + \frac{\varepsilon x}{a+x^2}\right) \quad (3-13)$$

当  $x=0$  时,  $y = -\frac{d}{s}$ ; 当  $y=0$  时,  $l_2$  与  $x$  正半轴有两个交点且横坐标为

$$x_1 = \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4ad^2}}{2d}, \quad x_2 = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4ad^2}}{2d}$$

由曲线  $l_1$ ,  $l_2$  的性质及式(3-11)易知, 系统(3-10)有平凡平衡点  $O(0, 0)$ ,  $E(K, 0)$ , 而正平衡点存在情况有三种可能, 无正平衡点, 有唯一的正平衡点, 有两个或两个以上正平衡点。

**定理 3.6** 若系统(3-10)满足  $(H_1)$  及  $(H_2)$ :  $2Kg(0) + (a+x^2)g'(x) + \frac{\varepsilon}{4as} < 0$ ,

$(H_3)$ :  $\frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4ad^2}}{2d} < K < \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4ad^2}}{2d}$  时, 则系统(3-10)存在唯一的正平衡点  $(x_0, y_0)$ 。

证明 由等倾线  $l_1$ ,  $l_2$ , 令

$$M(x) = \frac{1}{s}(-d + \frac{\varepsilon x}{a+x^2}) - (a+x^2)g(x) \quad (3-14)$$

由条件  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  有

$$M(0) = -ag(0) - \frac{d}{s} < 0, \quad M(K) = \frac{1}{s(a+K^2)}(-dK^2 + \varepsilon K - ad) > 0$$

所以由根的存在性定理知,  $M(x)$  至少存在一个零根。

再由定理条件  $(H_3)$  可知

$$\begin{aligned} M'(x) &= \frac{\varepsilon(a-x^2)}{s(a+x^2)^2} - 2xg(x) - (a+x^2)g'(x) \geq - \\ &\quad \frac{x^2\varepsilon}{s(a+x^2)^2} - 2Kg(0) - (a+x^2)g'(x) \geq - \\ &\quad \frac{\varepsilon}{s} \cdot \frac{1}{\frac{a^2}{x^2} + x^2 + 2a} - 2Kg(0) - (a+x^2)g'(x) \geq - \\ &\quad \frac{\varepsilon}{4as} - 2Kg(0) - (a+x^2)g'(x) > 0 \end{aligned}$$

所以  $M(x)$  单调递增, 即  $M(x)$  存在唯一零根  $x_0$ , 在由式(3-12)或式(3-13)可解得  $y_0$ 。证毕。

定理 3.7 若系统(3-10)满足  $(H_1)$ – $(H_3)$ , 则有

(i) 平衡点  $O(0,0)$  和  $E(K,0)$  为系统(3-10)的鞍点。

(ii) 若  $(H_4)$ :  $2(d+sy_0)g(x_0) + \varepsilon g'(x_0) < \min\{\frac{(a-x_0^2)(d+sy_0)^3}{s\varepsilon x_0^3}, \frac{\varepsilon sy_0}{x_0}\}$  成立,

$(x_0, y_0)$  是系统(3-10)稳定的结点或焦点。

(iii) 若  $(H_5)$ :  $\frac{\varepsilon sy_0}{x_0} < 2(d+sy_0)g(x_0) + \varepsilon g'(x_0) < \frac{(a-x_0^2)(d+sy_0)^3}{s\varepsilon x_0^3}$  成立,

$(x_0, y_0)$  是系统(3-10)不稳定的结点或焦点。

证明 系统(3-10)的线性近似系统的系数矩阵为

$$J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} g(x) - \frac{y}{a+x^2} + x(g'(x) + \frac{2xy}{(a+x^2)^2}) & -\frac{x}{a+x^2} \\ \frac{\varepsilon y(a-x^2)}{(a+x^2)^2} & -d - 2sy + \frac{\varepsilon x}{a+x^2} \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

由式(3-13)及  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  可得

$$|J_{(0,0)}| = -dg(0) < 0$$

$$|J_{(K,0)}| = Kg'(K)(-d + \frac{\varepsilon K}{a+K^2}) < 0$$

则  $O(0,0)$  和  $E(K,0)$  为系统(3-10)的鞍点。

再由式(3-15)计算出矩阵  $J_{(x_0,y_0)}$  行列式及迹为

$$|J_{(x_0,y_0)}| = x_0(g'(x_0) + \frac{2x_0y_0}{(a+x_0^2)^2})(-sy_0) + \frac{\varepsilon x_0y_0(a-x_0^2)}{(a+x_0^2)^3} =$$

$$sx_0y_0 \left[ -g'(x_0) - \frac{2x_0y_0}{(a+x_0^2)^2} + \frac{\varepsilon(a-x_0^2)}{s(a+x_0^2)^3} \right] = \quad (3-16)$$

$$sx_0y_0 \left[ \frac{(a-x_0^2)(d+sy_0)^3}{sx_0^3\varepsilon^2} - g'(x_0) - \frac{2}{\varepsilon}(d+sy_0)g(x_0) \right]$$

$$\text{Tr}J_{(x_0,y_0)} = x_0(g'(x_0) + \frac{2x_0y_0}{(a+x_0^2)^2}) + (-sy_0) =$$

$$x_0 \left[ g'(x_0) + \frac{2x_0y_0}{(a+x_0^2)^2} - \frac{sy_0}{x_0} \right] = \quad (3-17)$$

$$x_0 \left[ g'(x_0) + \frac{2(d+sy_0)g(x_0)}{\varepsilon} - \frac{sy_0}{x_0} \right]$$

由定理条件  $(H_4)$ ,  $(H_5)$  易得结论成立。证毕。

### 3.4.2 正平衡点的全局稳定性

**定理 3.8** 若系统(3-10)满足  $(H_1)-(H_4)$  及  $g(x)(a+x^2) - y + a - xx_0 / (x-x_0) < 0$ , 则系统(3-10)的唯一正平衡点  $(x_0, y_0)$  在  $\Omega$  内全局稳定。

证明 构造 Liapunov 函数

$$V(x(t), y(t)) = \frac{\varepsilon}{(a+x_0^2)} \int_{x_0}^x \frac{x-x_0}{x} dx + \int_{y_0}^y \frac{y-y_0}{y} dy$$

将  $V(x(t), y(t))$  对式(3-10)关于  $t$  求导

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} =$$

$$\frac{\varepsilon}{(a+x_0^2)} \cdot \frac{x-x_0}{x} \cdot x(g(x) - \frac{y}{a+x^2}) + \frac{y-y_0}{y} \cdot y(-d-sy + \frac{\varepsilon x}{a+x^2}) =$$

$$\frac{\varepsilon(x-x_0)}{a+x_0^2} (g(x) - \frac{y}{a+x^2}) + (y-y_0) [(s(y_0-y) + \varepsilon(\frac{x}{a+x^2} - \frac{x_0}{a+x_0^2}))] =$$

$$\frac{\varepsilon(x-x_0)}{(a+x_0^2)(a+x^2)}[g(x)(a+x^2)-y+a-xx_0]-s(y-y_0)^2$$

由定理条件可知,  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ , 再由定理 2.3 知, 系统(3-10)唯一正平衡点  $(x_0, y_0)$

在  $\Omega$  内是全局稳定的。证毕。

### 3.4.3 系统极限环存在唯一性

定理 3.9 若系统(3-10)满足  $(H_1), (H_2), (H_3), (H_5)$  及  $\tilde{H}'(x)M(x) - \tilde{H}(x) \cdot M'(x) \geq 0$ , 则系统(3-10)在  $\Omega$  内存在唯一稳定的极限环。

证明 首先证明极限环的存在性。

作直线

$$L_1: x-K=0, \quad L_2: y-\frac{1}{s}(-d+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}})=0$$

由正平衡点  $(x_0, y_0)$  存在性可知,  $\varepsilon^2 - 4ad^2 > 0$ , 所以  $-d + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}} > 0$ 。

将系统(3-10)沿  $L_1, L_2$  的导数分别为

$$\left. \frac{dL_1}{dt} \right|_{L_1=0} = \frac{-Ky}{a+x^2} < 0$$

$$\left. \frac{dL_2}{dt} \right|_{L_2=0} = \frac{1}{s}(-d+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}})(-d-s \cdot \frac{1}{s}(-d+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}}) + \frac{\varepsilon x}{a+x^2}) \leq$$

$$\frac{1}{s}(-d+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}})(-d+d-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}}+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{a}}) = 0$$

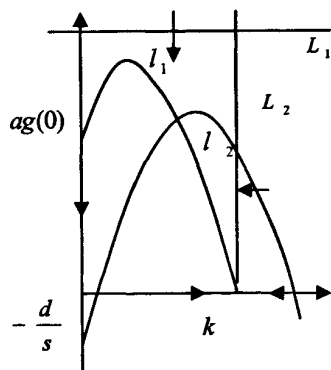


图 3-4 Bendixson 环域外境界线

Fig.3-4 The outer boundary lines of Bendixson's annular region

$L_1=0, L_2=0$  为系统(3-10)的无切线段, 轨线穿越方向如图 3-4 所示。再由

定理 3.9 知,  $x(t)=0, y(t)=0$  是系统(3-10)的轨线, 故系统(3-10)的轨线进入由  $L_1, L_2$  及  $x$  轴,  $y$  轴所围区域内。又因为  $(x_0, y_0)$  是不稳定平衡点, 再由定理 2.2 知, 在  $(x_0, y_0)$  外围至少存在一个极限环。

下面证明极限环的唯一性

对系统(3-10)作时间变换  $(a+x^2)d\tau = dt$ ,

则式(3-10)化为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{d\tau} = x(t)(a+x^2(t))g(x(t)) - x(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{d\tau} = (\varepsilon x(t) - d(a+x^2(t)))y(t) - s(a+x^2(t))y^2(t) \end{cases} \quad (3-18)$$

对式(3-18)作平移变换

$$\bar{x}(t) = x(t) - x_0, \quad \bar{y}(t) = y(t) - y_0$$

可得

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}(t)}{d\tau} = (\bar{x}(t) + x_0)(a + (\bar{x}(t) + x_0)^2)g((\bar{x}(t) + x_0)) - \\ \quad (\bar{x}(t) + x_0)(\bar{y}(t) + y_0) \\ \frac{d\bar{y}(t)}{d\tau} = (\bar{y}(t) + y_0)[\varepsilon(\bar{x}(t) + x_0) - d(a + (\bar{x}(t) + x_0)^2)] - \\ \quad s(a + (\bar{x}(t) + x_0)^2)(\bar{y}(t) + y_0)^2 \end{cases} \quad (3-19)$$

则系统(3-19)以  $(0,0)$  为平衡点。为了将式(3-18)化为 Liénard 系统, 对式(3-19)做变换

$$\bar{x}(u) = x_0(e^u - 1), \quad \bar{y}(v) = y_0(e^v - 1)$$

从而式(3-19)可化为

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = (a + (x_0 e^u)^2)g(x_0 e^u) - y_0 e^v \\ \frac{dv}{d\tau} = \varepsilon x_0 e^u - d(a + (x_0 e^u)^2) - s(a + (x_0 e^u)^2)y_0 e^v \end{cases} \quad (3-20)$$

再对式(3-20)做变换

$$W = u, Z = v - s\left(au + \frac{1}{2}(x_0 e^u)^2\right), d\tau' = e^{s\left(aW + \frac{1}{2}(x_0 e^W)^2\right)} d\tau$$

可将式(3-20)化为

$$\begin{cases} \frac{dW}{d\tau'} = -\varphi(Z) - F(W) \\ \frac{dZ}{d\tau'} = \tilde{g}(W) \end{cases} \quad (3-21)$$

其中

$$\varphi(Z) = y_0(e^Z - 1) \quad (3-22)$$

$$F(W) = y_0 - (a + (x_0 e^W)^2) g(x_0 e^W) e^{-s(aW + \frac{1}{2}(x_0 e^W)^2)} \quad (3-23)$$

$$\tilde{g}(W) = [\varepsilon x_0 e^W - d(a + (x_0 e^W)^2) - s(a + (x_0 e^W)^2)^2 g(x_0 e^W)] e^{-s(aW + \frac{1}{2}(x_0 e^W)^2)}$$

由式(3-14)可得

$$\tilde{g}(W) = s(a + (x_0 e^W)^2) \cdot e^{-s(aW + \frac{1}{2}(x_0 e^W)^2)} \cdot M(x_0 e^W) \quad (3-24)$$

下面验证系统(3-10)在  $\Omega$  内满足极限环唯一性定理

$$(i) \quad W\tilde{g}(W) = s(a + (x_0 e^W)^2) \cdot e^{-s(aW + \frac{1}{2}(x_0 e^W)^2)} \cdot WM(x_0 e^W) > 0$$

事实上,  $WM(x_0 e^W) > 0$  等价于  $(x - x_0)M(x) > 0$ ,  $(x \neq x_0)$

所以有

$$G(W) = \int_0^W \tilde{g}(W) dW > 0, \quad -\infty < W < \ln \frac{K}{x_0}$$

$$(ii) \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(Z) = y_0(e^Z - 1) \text{ 单调递增, } \varphi(+\infty) = +\infty;$$

$$(iii) \quad f(W) \triangleq F'(W) = e^{-s(aW + \frac{1}{2}(x_0 e^W)^2)} [g(x_0 e^W) s(a + (x_0 e^W)^2)^2 - 2(x_0 e^W)^2 - (a + (x_0 e^W)^2) g'(x_0 e^W) x_0 e^W]$$

令

$$\begin{aligned} H(x) &= g(x)s(a+x^2)^2 - 2x^2 - x(a+x)^2 g'(x) = \\ &= s(a+x^2)[g(x)((a+x^2) - \frac{2x^2}{(a+x^2)}) - \frac{x}{s} g'(x)] = \\ &= s(a+x^2)\tilde{H}(x) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \left( \frac{f(W)}{\tilde{g}(W)} \right)' &= \left( \frac{\tilde{H}(x_0 e^W)}{M(x_0 e^W)} \right)' \underset{x = x_0 e^W}{=} \frac{d}{dx} \left( \frac{\tilde{H}(x)}{M(x)} \right) \cdot \frac{dx}{dW} = \\ &= x_0 e^W \cdot \frac{\tilde{H}'(x)M(x) - \tilde{H}(x)M'(x)}{M^2(x)} \geq 0 \end{aligned}$$

即  $\frac{f(W)}{\tilde{g}(W)}$  在  $(-\infty, \ln \frac{K}{x_0})$  单调不减。

(iv)  $\varphi(Z), \tilde{g}(W)$  均为  $\mathbb{R}$  上的连续可微函数且满足 Lipschitz 条件, 由定理 2.3 知系统(3-10)在  $\Omega$  内的极限环是唯一的。证毕。

### 3.4.4 数值模拟

下面用 Matlab 软件对系统(3-10)唯一正平衡点全局稳定性进行数值模拟。

取  $a=0.9$ ,  $\varepsilon=0.9$ ,  $d=0.037$ ,  $s=0.3$ ,  $g(x)=1-\frac{x}{1.45}$ , 得系统

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{1.45} - \frac{y(t)}{0.9+x^2(t)} \right) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t) \left( -0.037 - 0.3y(t) + \frac{0.9x(t)}{0.9+x^2(t)} \right) \end{cases} \quad (3-25)$$

此时, 系统(3-25)满足定理 3.8 的基本假设。由此可知平衡点  $(x_0, y_0)$  是全局稳定的。其中  $x_0=0.37$ ,  $y_0=0.85$ 。在  $\Omega$  内取一系列初值, 得到式(3-25)的相轨线, 用 Matlab 软件数值模拟得到图 3-5。从图 3-5 可以看出, 这些轨线的  $\omega$  极限点均为奇点  $(x_0, y_0)$ , 故  $(x_0, y_0)$  在第一象限是全局稳定的。

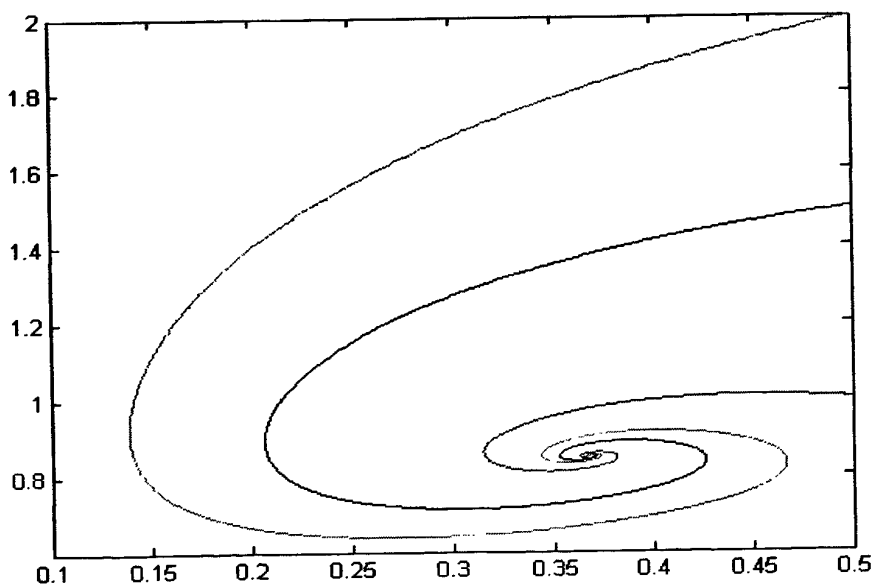


图 3-5 正平衡点的全局稳定性

Fig.3-5 The global stability of positive equilibrium point



下面用 Matlab 软件对系统(3-10)存在唯一稳定的极限环进行数值模拟。

取  $a = 0.35$ ,  $\varepsilon = 0.9$ ,  $d = 0.509$ ,  $s = 0.3$ ,  $g(x) = 1 - \frac{x}{1.45}$ , 得系统

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{1.45} - \frac{y(t)}{0.35 + x^2(t)} \right) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t) \left( -0.509 - 0.3y(t) + \frac{0.9x(t)}{0.35 + x^2(t)} \right) \end{cases} \quad (3-26)$$

此时, 系统(3-26)满足定理 3.9 基本假设, 则在  $(x_0, y_0)$  周围存在极限环。其中  $x_0 = 0.8$ ,  $y_0 = 0.5$ 。在  $\Omega$  内取初值  $x_{10} = 1.5$ ,  $y_{10} = 1$  得到在外围绕一个极限环的相轨线, 用 Matlab 软件数值模拟得到图 3-6。从图 3-6 可知, 上述极限环是唯一的。

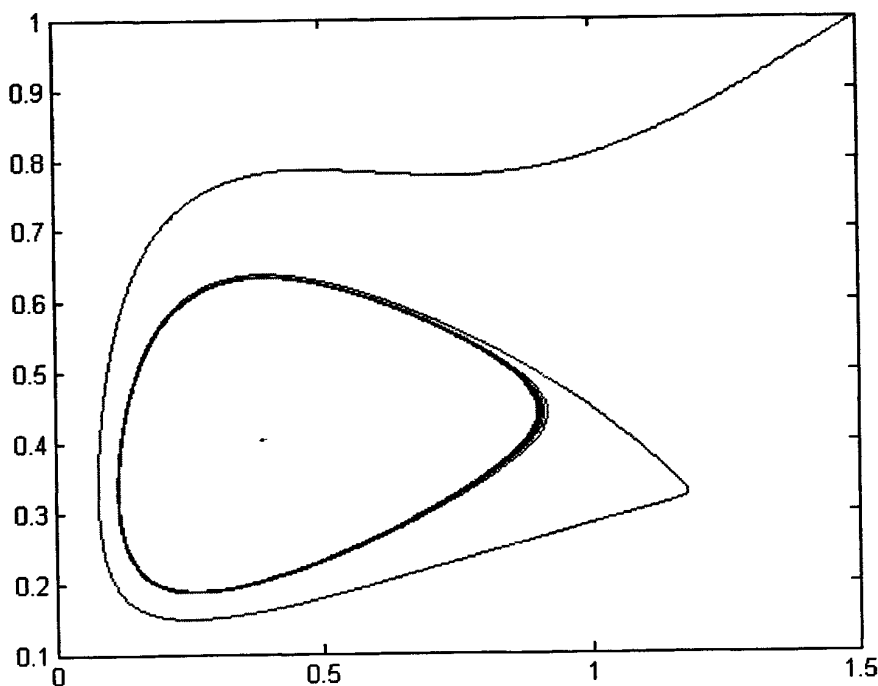


图 3-6 极限环的存在唯一性

Fig.3-6 The existence and uniqueness of the limit cycle

### 3.5 本章小结

本章研究了食饵种群密度制约为一般函数  $g(x)$ , 捕食者无密度制约 ( $s = 0$ )

和有密度制约( $s \neq 0$ )的 Holling IV型的捕食系统。利用变分矩阵法分析了平衡点的奇点类型；并且运用 Dulac 函数法，得到了系统无环的充分条件；构造恰当的 Liapunov 函数法，给出正平衡点全局稳定性的充分条件；利用 Bendixson 环域定理和张芷芬唯一性定理，证明了系统在一定条件下存在唯一稳定的极限环。并且利用 Matlab 软件对正平衡点的全局稳定性和极限环的存在唯一性进行了数值模拟。

## 第4章 具有双密度制约的离散捕食系统

### 4.1 引言

由于差分方程理论的研究始于90年代,所以关于离散系统的研究尚不成熟。陈兰荪等人研究了单种群离散系统,得到了正平衡点局部稳定性,全局稳定性,周期轨道和混沌现象产生条件等成果<sup>[15,18,42]78-120, 455-464,80-89</sup>。Hofbauer J, Hutsin V 和 Jansen W, 讨论了两种群离散的捕食系统,得到解的最终一致有界性和永久生存的条件<sup>[20]553-570</sup>。廖进昆讨论了三维离散捕食系统,得到正平衡点的全局稳定性及出现混沌的条件<sup>[23]150-152</sup>。本章将考虑具有 Holling IV型双密度制约的离散捕食系统,讨论正平衡点的局部稳定性和全局稳定性。

### 4.2 系统建立

在本章中考虑与系统(3-10)相对应的离散时间的捕食系统。先对系统(3-10)作时间变换  $dt = (a + x^2(t))d\tau$ , 仍用  $t$  表示  $\tau$ , 然后利用具有逐段常数变元的微分方程推导出相应的差分方程<sup>[45]179-185</sup>。

在系统(3-10)中,假设食饵种群和捕食者种群的平均增长率(或相对增长率)按一定时间区间规律变化,则有

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} \frac{1}{x(t)} = (a + x^2([t]))g(x([t])) - y([t]) \\ \frac{dy(t)}{dt} \frac{1}{y(t)} = (a + x^2([t]))(-d - sy([t])) + \varepsilon x([t]) \end{cases} \quad t \neq 0, 1, 2, \dots \quad (4-1)$$

其中  $[t]$  表示  $t$  的整数部分,  $t \in [0, +\infty)$ 。系统(4-1)即是具有逐段常数变元的微分方程,系统(4-1)的解  $(x(t), y(t))^T$  是定义在  $[0, +\infty)$  且具有如下性质的函数:

- (1)  $(x(t), y(t))^T$  在  $[0, +\infty)$  上连续;
- (2)  $dx(t)/dt$ ,  $dy(t)/dt$  在  $[0, +\infty)$  中除了  $\{0, 1, 2, \dots\}$  之外的所有点处存在, 在  $\{0, 1, 2, \dots\}$  存在左导数;
- (3) 在区间  $[k, k+1)$  上满足系统(4-1), 其中  $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

对任意的  $t \in [k, k+1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , 系统(4-1)两端同时从  $k$  到  $k+1$  积分, 再用  $t$  替换  $k$  得

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) \exp\{(a + x^2(t))g(x(t)) - y(t)\} \\ y(t+1) = y(t) \exp\{(a + x^2(t))(-d - sy(t)) + \varepsilon x(t)\} \end{cases} \quad (4-2)$$

系统(4-2)即是系统(4-1)离散化。

系统(4-2)中  $g(x)$  仍满足  $(H_1)$ 。

### 4.3 正平衡点的存在性

系统(4-2)的正平衡点应满足

$$\begin{cases} (a+x^2)g(x)-y=0 \\ (a+x^2)(-d-sy)+\varepsilon x=0 \end{cases} \quad (4-3)$$

正平衡点  $(x_0, y_0)$  唯一存在与 3.4 节讨论方法相同, 且满足式(4-3), 从而得到以下定理。

定理 4.1 若系统(4-2)满足  $(H_1)$  及  $(H_2)$ :  $2Kg(0)+(a+x^2)g'(x)+\frac{\varepsilon}{4as} < 0$

$(H_3)$ :  $\frac{\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-4ad^2}}{2d} < K < \frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-4ad^2}}{2d}$  时, 则系统(3-10)存在唯一的正平衡点  $(x_0, y_0)$ 。

### 4.4 正平衡点的局部稳定性

对系统(4-2)做变换

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = x(t) - x_0 \\ \bar{y}(t) = y(t) - y_0 \end{cases}$$

在变换后仍将  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{y}(t)$  记为  $x(t)$ ,  $y(t)$ , 系统(4-2)可化为

$$\begin{cases} x(t+1) = (x(t) + x_0) \cdot \exp\{(a + (x(t) + x_0)^2)g(x(t) + x_0) - (y(t) + y_0)\} - x_0 \\ y(t+1) = (y(t) + y_0) \cdot \exp\{[-d - s \cdot (y(t) + y_0)][a + (x(t) + x_0)^2] + \varepsilon(x(t) + x_0)\} - y_0 \end{cases} \quad (4-4)$$

系统(4-4)对应的线性化系统为

$$\begin{cases} x(t+1) = [1 + x_0((a + x_0^2)g(x_0))']x(t) - x_0y(t) \\ y(t+1) = y_0[2(-d - sy_0)x_0 + \varepsilon]x(t) + [1 - sy_0(a + x_0^2)]y(t) \end{cases} \quad (4-5)$$

则系统(4-5)是以  $(0, 0)$  为平衡点。

定理 4.2 若系统(4-2)满足  $(H_1)$  -  $(H_3)$  且下列条件之一成立

$$(1) \begin{cases} \Delta = 0 \\ -4 < x_0((a + x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a + x_0^2) < 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \Delta > 0 \\ -2 \leq x_0((a + x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a + x_0^2) \leq 0 \\ \sqrt{\Delta} < -x_0((a + x_0^2)g(x_0))' + sy_0(a + x_0^2) \end{cases}$$

或者

$$(3) \begin{cases} \Delta > 0 \\ -4 < x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2) < -2 \\ \sqrt{\Delta} < 4 + x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2) \\ \Delta < 0 \\ \Delta < 4 - [2 + x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2)]^2 \end{cases}$$

其中

$$\Delta = [2 + x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2)]^2 - 4\{[1 + x_0((a+x_0^2)g(x_0))'(1 - sy_0(a+x_0^2)) + x_0y_0(2x_0(-d - sy_0) + \varepsilon)]\}$$

则系统(4-2)的正平衡点 $(x_0, y_0)$ 是局部稳定的。

证明 由式(4-5)得其对应的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 + x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - \lambda & -x_0 \\ 2(-d - sy_0)x_0 + \varepsilon & 1 - sy_0(a+x_0^2) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

即有

$$\lambda^2 - [2 + x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2)]\lambda + [1 + x_0((a+x_0^2)g(x_0))'(1 - sy_0(a+x_0^2)) + x_0y_0(2x_0(-d - sy_0) + \varepsilon)] = 0 \quad (4-6)$$

方程(4-6)的判别式记为

$$\Delta = [2 + x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2)]^2 - 4\{[1 + x_0((a+x_0^2)g(x_0))'(1 - sy_0(a+x_0^2)) + x_0y_0(2x_0(-d - sy_0) + \varepsilon)]\} \quad (4-7)$$

由式(4-6)解得特征根

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 + x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (4-8)$$

分以下几种情况讨论:

(1) 当 $\Delta = 0$ 时, 有

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \frac{2 + x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2)}{2} \right| < 1 \quad (4-9)$$

由式(4-9)解得

$$-4 < x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2) < 0$$

由定理 2.4 可知, 系统(4-6)的平衡点 $(0, 0)$ 是局部稳定的, 由此可得 $(x_0, y_0)$ 是系统(4-2)的局部稳定平衡点。

(2) 当 $\Delta > 0$ 时, 有以下两种情况:

(i) 当  $-2 \leq x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2) \leq 0$  时, 即

$$0 \leq \frac{2+x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2)}{2} \leq 1$$

从而由式(4-8)得

$$|\lambda_{1,2}| \leq \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \left| \frac{2+x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2) + \sqrt{\Delta}}{2} \right| < 1 \quad (4-10)$$

由式(4-10)解得

$$\sqrt{\Delta} < -x_0((a+x_0^2)g(x_0))' + sy_0(a+x_0^2)$$

由定理 2.4 可知, 系统(4-5)的平衡点(0,0)是局部稳定的, 由此可得  $(x_0, y_0)$  是系统(4-2)的局部稳定平衡点。

(ii) 当  $-4 < x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2) < -2$  时, 即

$$-1 < \frac{2+x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2)}{2} < 0$$

再由式(4-8)得

$$|\lambda_{1,2}| \leq \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \left| \frac{2+x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2) - \sqrt{\Delta}}{2} \right| < 1 \quad (4-11)$$

由式(4-11)解得

$$\sqrt{\Delta} < 4 + x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2)$$

由定理 2.4 可知, 系统(4-5)的平衡点(0,0)是局部稳定的, 由此可得  $(x_0, y_0)$  是系统(4-2)的局部稳定平衡点。

(3) 当  $\Delta < 0$  时, 有

$$|\lambda_{1,2}| = \frac{\sqrt{[2+x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2)]^2 + \Delta}}{2} < 1 \quad (4-12)$$

由式(4-12)解得

$$\Delta < 4 - [2+x_0((a+x_0^2)g(x_0))' - sy_0(a+x_0^2)]^2$$

由定理 2.4 可知, 系统(4-5)的平衡点(0,0)是局部稳定的, 由此可得  $(x_0, y_0)$  是系统(4-2)的局部稳定平衡点。证毕。

## 4.5 正平衡点的全局稳定性

定理 4.3 系统(4-2)满足  $(H_1)-(H_3)$ , 若存在充分小的  $\delta$ , 正数  $v$  和  $n_i, i=1,2$  使得

$$(1) \quad n_2(2(d+sy_0)x_0 + \varepsilon) - 2n_1x_0g(x_0) - (a+x_0^2)g'(x_0) > v, \quad s(a+x_0^2) - n_1 > v$$

$$(2) 1 + 2x_0^2 g(x_0) + x_0(a + x_0^2)g'(x_0) > 0, \quad 2(d + sy_0)x_0 < \varepsilon, \quad sy_0(a + x_0^2) < 1$$

$$(3) -v + \frac{n_1 \delta}{x_0} + \frac{n_2 \delta}{y_0} < 0$$

则系统(4-2)正平衡点  $(x_0, y_0)$  是全局稳定的。

证明 将系统(4-4)等式右端函数在平衡点  $(0, 0)$  处展成泰勒展式有

$$\begin{cases} x(t+1) = [1 + 2x_0^2 g(x_0) + x_0(a + x_0^2)g'(x_0)]x(t) - x_0 y(t) + f_1(t, x(t), y(t)) \\ y(t+1) = y_0[2(-d - sy_0)x_0 + \varepsilon]x(t) + [1 - sy_0(a + x_0^2)]y(t) + f_2(t, x(t), y(t)) \end{cases} \quad (4-13)$$

记  $X(t) = (x(t), y(t))$ ,  $\|X(t)\| = |x(t)| + |y(t)|$ ,  $t \in Z$ 。当  $\|X(t)\| \rightarrow 0$  时,  $|f_i(t, x(t), y(t))| / \|X(t)\|$  收敛于 0, 即存在充分小的  $\delta$ , 当  $t \in Z$  使得

$$|f_i(t, x(t), y(t))| / \|X(t)\| < \delta, \quad i = 1, 2 \quad (4-14)$$

可将系统(4-13)改写为

$$\begin{cases} x(t+1) = x_0 \left\{ [1 + 2x_0^2 g(x_0) + x_0(a + x_0^2)g'(x_0)] \frac{x(t)}{x_0} - y(t) + \frac{f_1(t, x(t), y(t))}{x_0} \right\} \\ y(t+1) = y_0 \left\{ [2(-d - sy_0)x_0 + \varepsilon] \frac{x(t)}{y_0} + [1 - sy_0(a + x_0^2)] \frac{y(t)}{y_0} + \frac{f_2(t, x(t), y(t))}{y_0} \right\} \end{cases}$$

定义 Liapunov 函数如下

$$V(x(t), y(t)) = \frac{n_1}{x_0} |x(t)| + \frac{n_2}{y_0} |y(t)|$$

其中  $n_i$  是待定的正常数。

$V$  沿着系统(4-13)的差分为

$$\begin{aligned} \Delta V &= n_1 \left| [1 + 2x_0^2 g(x_0) + x_0(a + x_0^2)g'(x_0)] \frac{x(t)}{x_0} - y(t) + \frac{f_1(t, x(t), y(t))}{x_0} \right| + \\ &\quad n_2 \left| [2(-d - sy_0)x_0 + \varepsilon] \frac{x(t)}{y_0} + [1 - sy_0(a + x_0^2)] \frac{y(t)}{y_0} + \frac{f_2(t, x(t), y(t))}{y_0} \right| - \\ &\quad \frac{n_1}{x_0} |x(t)| - \frac{n_2}{y_0} |y(t)| \leq - \\ &\quad [n_2(2(d + sy_0)x_0 + \varepsilon) - 2n_1 x_0 g(x_0) - (a + x_0^2)g'(x_0)] \cdot |x(t)| - \\ &\quad (s \cdot (a + x_0^2) - n_1) |y(t)| + \frac{n_1}{x_0} \cdot |f_1(t, x(t), y(t))| + \frac{n_2}{y_0} \cdot |f_2(t, x(t), y(t))| \end{aligned}$$

由式(4-13)及条件(3)可得

$$\Delta V \leq (-v + \frac{n_1 \delta}{x_0} + \frac{n_2 \delta}{y_0}) \cdot \|X(t)\| < 0$$

综上所述, 由定理 2.9 可知, 系统(4-5)的平衡点(0,0)是全局稳定的, 从而系统(4-2)的正平衡点 $(x_0, y_0)$ 是全局稳定的。证毕。

### 4.6 数值模拟

下面用 Matlab 软件对系统(4-2)正平衡点的全局稳定性进行数值模拟。

取  $a=0.55$ ,  $d=0.091$ ,  $s=0.9$ ,  $\varepsilon=0.9$ ,  $g(x)=1-\frac{x(t)}{1.45}$ , 得系统

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) \exp\left\{1 - \frac{x(t)}{1.45} - \frac{y(t)}{0.55 + x^2(t)}\right\} \\ y(t+1) = y(t) \exp\left\{-0.091 - 0.9y(t) + \frac{0.9x(t)}{0.55 + x^2(t)}\right\} \end{cases} \quad (4-15)$$

此时, 系统(4-15)满足定理 4.3 的条件, 可知平衡点 $(x_0, y_0)$ 是全局稳定的, 其中  $x_0=1.34$ ,  $y_0=0.87$ 。在  $\Omega$  内取初值(1.2, 0.9), (1.475, 0.935), 得到式(4-15)的相轨线, 用 Matlab 软件数值模拟得到图 4-1, 故正平衡点 $(x_0, y_0)$ 在第一象限是全局稳定的。

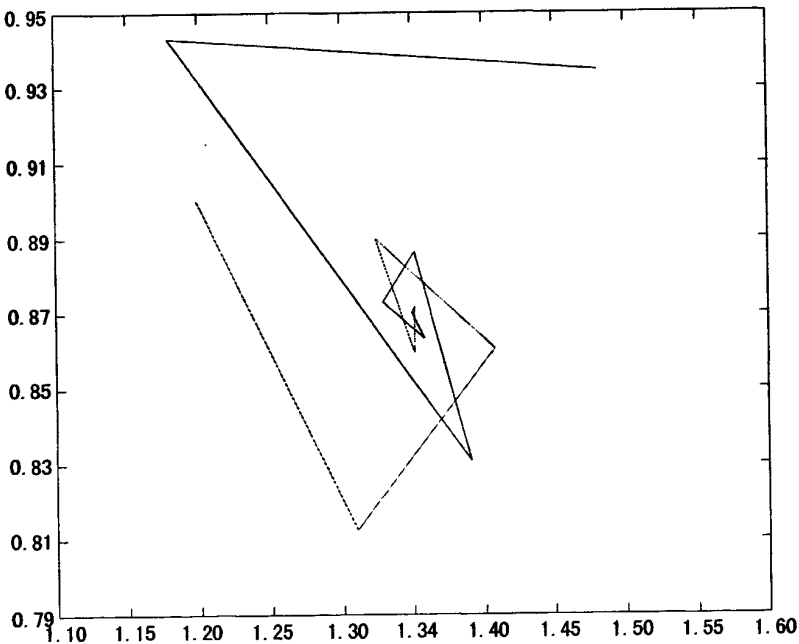


图 4-1. 平衡点的全局稳定性

Fig.4-1 The global stability of positive equilibrium point



## 4.7 本章小结

本章研究了具有食饵种群密度制约为抽象函数  $g(x)$ ，捕食者也有密度制约的 HollingIV型的离散捕食系统，运用特征值法得到了系统(4-2)平衡点的局部稳定性充分条件，然后构造恰当的 Liapunov 函数，给出了系统(4-2)正平衡点的全局稳定性的充分条件，利用 Matlab 软件进行了数值模拟。

## 第5章 具有双密度制约变系数的离散捕食系统

### 5.1 引言

近年来,不少学者研究了具有 Holling IV型捕食者无密度制约的变系数的离散捕食系统,得到了正周期解的存在性,持久性,全局稳定性等结论。2004年,田宝单,魏代俊和刘志军研究了具有 Holling IV型捕食者无密度制约的变系数的离散捕食系统,讨论了系统正周期解的存在性和全局稳定性<sup>[27]5-8</sup>。Shen.C.S研究了具有 Holling IV型的三种群的离散系统,讨论了系统的持久性和正解的全局吸引性<sup>[30]179-185</sup>。2007年,Mostafa Fazly等人研究了具有一般功能性反应的离散捕食系统,利用重合度理论得到周期解的存在性<sup>[31]199-202</sup>。2009年,Wei Fengying讨论了具有 Holling IV型变系数的多种群离散捕食系统的一致持久性<sup>[40]1-9</sup>。本章考虑捕食者也有密度制约,具有 Holling IV型变系数的离散捕食系统。讨论系统正解的存在性,持久性和全局稳定性。

### 5.2 系统建立

考虑具有 Holling IV型双密度制约变系数的离散捕食系统如下

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) \exp \left\{ a(t) - b(t)x(t) - \frac{y(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \right\} \\ y(t+1) = y(t) \exp \left\{ -d(t) - g(t)y(t) + \frac{k(t)x(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \right\} \end{cases} \quad (5-1)$$

其中  $x(t)$ ,  $y(t)$  分别表示  $t$  时刻食饵, 捕食者的密度。

假设系统(5-1)满足下列条件

( $T_1$ )  $a(t), b(t), d(t), g(t), \beta(t), k(t)$  均为在  $[0, +\infty)$  上具有一定生态意义的正的有界连续函数。

( $T_2$ ) 对于正数  $\omega$  为周期的连续函数  $f(x)$ , 记  $\bar{f} = \frac{1}{\omega} \sum_{t=0}^{\omega-1} f(t) > 0$ ,

$\bar{F} = \frac{1}{\omega} \sum_{t=0}^{\omega-1} |f(t)| > 0, (t \in Z)$ 。

( $T_3$ ) 对于连续有界函数  $g(x)$ , 记  $g^m = \sup_{[0, +\infty)} \{g(x)\}$ ,  $g^l = \inf_{[0, +\infty)} \{g(x)\}$ 。

### 5.3 周期系统正周期解的存在性

定理 5.1 系统(5-1)满足假设条件( $T_1$ ), ( $T_2$ )及下列

$$\frac{\bar{k}}{2\sqrt{\beta}} - \bar{d} > 0, \bar{a} - \frac{\exp\{B_{21}\}}{\beta} > 0, \frac{\bar{k} \exp\{B_{12}\}}{\beta + \exp\{2B_{11}\}} - \bar{d} > 0$$

成立, 则系统(5-1)至少有一个正  $\omega$  周期解  $(x^*(t), y^*(t))^T$ 。

其中  $B_{12} = \ln \frac{1}{b} (\bar{a} - \frac{\exp\{B_{21}\}}{\beta}) - (\bar{A} + \bar{a})\omega$ ,  $B_{21} = \ln \frac{1}{g} (\frac{\bar{k}}{2\sqrt{\beta}} - \bar{d}) + (\bar{D} + \bar{d})\omega$ 。

证明 令

$$I_2 = \{(z_1(t), z_2(t))^T \in R^2 : t \in Z\}$$

设  $I^\omega \subseteq I_2$  为全体  $\omega$  周期序列所组成的子空间, 即

$$I^\omega = \{z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T \in R^2 : z(t+\omega) = z(t), t \in Z\}$$

定义范数

$$\|z\| = \|(z_1(t), z_2(t))^T\| = \max_{t \in I_\omega} |z_1(t)| + \max_{t \in I_\omega} |z_2(t)|$$

其中  $I_\omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega-1\}$ , 则  $I^\omega$  在范数  $\|\cdot\|$  下成为有限维 Banach 空间, 记

$$I_0^\omega = \{z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T \in I^\omega : \sum_{t=0}^{\omega-1} z(t) = 0, t \in Z\}$$

$$I_c^\omega = \{z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T \in I^\omega : z(t) = \mu \in R^2, t \in Z\}$$

且  $I_0^\omega$  和  $I_c^\omega$  均为  $I^\omega$  的闭线性子空间, 并且

$$I^\omega = I_0^\omega \oplus I_c^\omega, \dim I_c^\omega = 2$$

对系统(5-1)做变换

$$x(t) = \exp\{z_1(t)\}, \quad y(t) = \exp\{z_2(t)\} \quad (5-2)$$

将式(5-2)代入式(5-1)得

$$\begin{cases} z_1(t+1) - z_1(t) = a(t) - b(t) \exp\{z_1(t)\} - \frac{\exp\{z_2(t)\}}{\beta(t) + \exp\{2z_1(t)\}} \\ z_2(t+1) - z_2(t) = -d(t) - g(t) \exp\{z_2(t)\} + \frac{k(t) \exp\{z_1(t)\}}{\beta(t) + \exp\{2z_1(t)\}} \end{cases} \quad (5-3)$$

为了利用定理 2.7 证明系统(5-1)的周期解存在性, 定义如下变换

$$L: \text{Dom}L \cap I^\omega \rightarrow I^\omega, \quad N: I^\omega \rightarrow I^\omega$$

$$L(z(t)) = z(t+1) - z(t)$$

$$(Nz)(t) = \begin{pmatrix} a(t) - b(t) \exp\{z_1(t)\} - \frac{\exp\{z_2(t)\}}{\beta(t) + \exp\{2z_1(t)\}} \\ -d(t) - g(t) \exp\{z_2(t)\} + \frac{k(t) \exp\{z_1(t)\}}{\beta(t) + \exp\{2z_1(t)\}} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \Delta z_1(t) \\ \Delta z_2(t) \end{pmatrix}$$

$L$  是一个有界线性算子并满足

$$\text{Ker}L = l_c^\omega, \text{Im}L = l_0^\omega, \dim \text{Ker}L = 2 = \text{codim Im}L$$

故  $L$  为指标为零的 Fredholm 映射。

现在定义两个映射

$$P: l^\omega \rightarrow l^\omega, Q: l^\omega \rightarrow l^\omega$$

使得

$$Pz = \frac{1}{\omega} \sum_{s=0}^{\omega-1} z(s), z \in l^\omega, Qu = \frac{1}{\omega} \sum_{s=0}^{\omega-1} u(s), u \in l^\omega$$

$P, Q$  是连续映射且使得

$$\text{Im}P = \text{Ker}L, \text{Im}L = \text{Ker}Q = \text{Im}(I-Q)$$

并且,  $L$  的广义逆  $K_p: \text{Im}L \rightarrow \text{Ker}P \cap \text{Dom}L$  存在, 可表示为

$$K_p(z) = \sum_{s=0}^{\omega-1} z(s) - \frac{1}{\omega} \sum_{s=0}^{\omega-1} (\omega-s)z(s)$$

则  $QN: X \rightarrow Y$  和  $K_p(I-Q): \text{Im}L \rightarrow \text{Ker}P \cap \text{Dom}L$  可表示为

$$QNz = \left( \frac{1}{\omega} \sum_{s=0}^{\omega-1} \Delta z_1(s), \frac{1}{\omega} \sum_{s=0}^{\omega-1} \Delta z_2(s) \right)^T$$

$$K_p(I-Q)Nz = \begin{pmatrix} \sum_{s=0}^{\omega-1} \Delta z_1(s) \\ \sum_{s=0}^{\omega-1} \Delta z_2(s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \sum_{s=0}^{\omega-1} (\omega-s) \Delta z_1(s) \\ \frac{1}{\omega} \sum_{s=0}^{\omega-1} (\omega-s) \Delta z_2(s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left( \frac{t}{\omega} - \frac{\omega+1}{2\omega} \right) \sum_{s=0}^{\omega-1} \Delta z_1(s) \\ \left( \frac{t}{\omega} - \frac{\omega+1}{2\omega} \right) \sum_{s=0}^{\omega-1} \Delta z_2(s) \end{pmatrix}$$

显然,  $QN$  和  $K_p(I-Q)N$  是连续的。因为  $l^\omega$  是有限维的 Banach 空间, 设  $\Omega \subset l^\omega$  为有界开集, 显然  $QN(\bar{\Omega})$  有界。由定理 2.8 可以证明, 对  $l^\omega$  中的任意有界子集  $\Omega$ ,  $K_p(I-Q)N(\bar{\Omega})$  是相对紧的, 故  $N$  在  $\bar{\Omega}$  上是  $L$  紧的。

考虑算子方程  $Lz = \lambda Nz$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ , 即

$$\begin{cases} z_1(t+1) - z_1(t) = \lambda [a(t) - b(t) \exp\{z_1(t)\}] - \frac{\exp\{z_2(t)\}}{\beta(t) + \exp\{2z_1(t)\}} \\ z_2(t+1) - z_2(t) = \lambda [-d(t) - g(t) \exp\{z_2(t)\}] + \frac{k(t) \exp\{z_1(t)\}}{\beta(t) + \exp\{2z_1(t)\}} \end{cases} \quad (t \in Z) \quad (5-4)$$

设  $(z_1(t), z_2(t))^T \in l^\omega$  是系统(5-4)对应于某个  $\lambda \in (0, 1)$  的周期解, 对系统(5-4)两端同时从 0 到  $\omega-1$  关于  $t$  求和, 于是有

$$\sum_{t=0}^{\omega-1} \left[ b(t) \exp\{z_1(t)\} + \frac{\exp\{z_2(t)\}}{\beta(t) + \exp\{2z_1(t)\}} \right] = \bar{a}\omega \quad (5-5)$$

$$\sum_{t=0}^{\omega-1} [-g(t) \exp\{z_2(t)\} + \frac{k(t) \exp\{z_1(t)\}}{\beta(t) + \exp\{2z_1(t)\}}] = \bar{d} \omega \quad (5-6)$$

由式(5-4), 式(5-5), 式(5-6)可得

$$\sum_{t=0}^{\omega-1} |z_1(t+1) - z_1(t)| \leq \sum_{t=0}^{\omega-1} |a(t)| + \sum_{t=0}^{\omega-1} [b(t) \exp\{z_1(t)\} + \frac{\exp\{z_2(t)\}}{\beta(t) + \exp\{2z_1(t)\}}] = (\bar{A} + \bar{a}) \omega \quad (5-7)$$

$$\sum_{t=0}^{\omega-1} |z_2(t+1) - z_2(t)| \leq \sum_{t=0}^{\omega-1} |d(t)| + \sum_{t=0}^{\omega-1} [-g(t) \exp\{z_2(t)\} + \frac{k(t) \exp\{z_1(t)\}}{\beta(t) + \exp\{2z_1(t)\}}] = (\bar{D} + \bar{d}) \omega \quad (5-8)$$

即有

$$\sum_{t=0}^{\omega-1} |z_1(t+1) - z_1(t)| \leq (\bar{A} + \bar{a}) \omega \quad (5-9)$$

$$\sum_{t=0}^{\omega-1} |z_2(t+1) - z_2(t)| \leq (\bar{D} + \bar{d}) \omega \quad (5-10)$$

因为  $z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T \in I^\omega$ , 故存在  $\xi_i, \eta_i \in I_\omega, i=1,2$ , 使得

$$z_i(\xi_i) = \min_{t \in I_\omega} \{z_i(t)\}, \quad z_i(\eta_i) = \max_{t \in I_\omega} \{z_i(t)\}, \quad i=1,2 \quad (5-11)$$

由式(5-5), 式(5-11), 有

$$\bar{a} \omega \geq \sum_{t=0}^{\omega-1} [b(t) \exp\{z_1(t)\}] \geq \sum_{t=0}^{\omega-1} [b(t) \exp\{z_1(\xi_1)\}] = \bar{b} \omega \exp\{z_1(\xi_1)\}$$

也就是

$$z_1(\xi_1) \leq \ln\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right) \quad (5-12)$$

由式(5-9), 式(5-12)及定理 2.5 有

$$z_1(t) \leq z_1(\xi_1) + \sum_{i=0}^{t-1} |z_1(i+1) - z_1(i)| \leq \ln\left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right) + (\bar{A} + \bar{a}) t \triangleq B_{11} \quad (5-13)$$

再由式(5-6), 式(5-11), 得

$$\bar{d} \omega \leq \sum_{t=0}^{\omega-1} \frac{k(t) \exp\{z_1(t)\}}{\beta(t) + \exp\{2z_1(t)\}} - \sum_{t=0}^{\omega-1} g(t) \exp\{z_2(\xi_2)\} \leq \sum_{t=0}^{\omega-1} \frac{k(t)}{2\sqrt{\beta(t)}} - \bar{g} \exp\{z_2(\xi_2)\}$$

即有

$$z_2(\xi_2) \leq \ln \frac{1}{\bar{g}} \left( \frac{\bar{k}}{2\sqrt{\beta}} - \bar{d} \right) \quad (5-14)$$

由式(5-10), 式(5-14)及定理 2.5 有

$$z_2(t) \leq z_2(\xi_2) + \sum_{t=0}^{\omega-1} |z_2(t+1) - z_2(t)| \leq \ln \frac{1}{\bar{g}} \left( \frac{\bar{k}}{2\sqrt{\beta}} - \bar{d} \right) + (\bar{D} + \bar{d})\omega \triangleq B_{21} \quad (5-15)$$

再由式(5-5), 式(5-11)有

$$\bar{a}\omega \leq \sum_{t=0}^{\omega-1} [b(t) \exp\{z_1(\eta_1)\} + \sum_{t=0}^{\omega-1} \frac{\exp\{B_{21}\}}{\beta(t)}] = \bar{b} \exp\{z_1(\eta_1)\} + \frac{\exp\{B_{21}\}}{\beta}$$

即有

$$\bar{b} \exp\{z_1(\eta_1)\} \geq \bar{a} - \frac{\exp\{B_{21}\}}{\beta} \quad (5-16)$$

也就是

$$z_1(\eta_1) \geq \ln \frac{1}{\bar{b}} \left( \bar{a} - \frac{\exp\{B_{21}\}}{\beta} \right) \quad (5-17)$$

由式(5-9), 式(5-16), 式(5-16) 及定理 2.5 有

$$z_1(t) \geq z_1(\eta_1) - \sum_{t=0}^{\omega-1} |z_1(t+1) - z_1(t)| \geq \ln \frac{1}{\bar{b}} \left( \bar{a} - \frac{\exp\{B_{21}\}}{\beta} \right) - (\bar{A} + \bar{a})\omega \triangleq B_{12} \quad (5-18)$$

再由式(5-6), 式(5-11)有

$$\bar{d}\omega \geq \sum_{t=0}^{\omega-1} \frac{k(t) \exp\{B_{12}\}}{\beta(t) + \exp\{2B_{11}\}} - \sum_{t=0}^{\omega-1} g(t) \exp\{z_2(\eta_2)\}$$

即有

$$\bar{g} \exp\{z_2(\eta_2)\} \geq \frac{\bar{k} \exp\{B_{12}\}}{\bar{\beta} + \exp\{2B_{11}\}} - \bar{d}$$

也就是

$$z_2(\eta_2) \geq \ln \frac{1}{\bar{g}} \left( \frac{\bar{k} \exp\{B_{12}\}}{\bar{\beta} + \exp\{2B_{11}\}} - \bar{d} \right) \quad (5-19)$$

通过式(5-10), 式(5-19), 及定理 2.5 有

$$z_2(t) \geq z_2(\eta_2) - \sum_{t=0}^{\omega-1} |z_2(t+1) - z_2(t)| \geq \ln \frac{1}{\bar{g}} \left( \frac{\bar{k} \exp\{B_{12}\}}{\bar{\beta} + \exp\{2B_{11}\}} - \bar{d} \right) - (\bar{D} + \bar{d})\omega \triangleq B_{22} \quad (5-20)$$

由式(5-13)及式(5-18)可得

$$\max_{t \in I_0} |z_1(t)| \leq \max \{|B_{11}|, |B_{12}|\} \triangleq B_1$$

同样由式(5-15)及式(5-20)可得

$$\max_{t \in I_0} |z_2(t)| \leq \max \{|B_{21}|, |B_{22}|\} \triangleq B_2$$

很明显  $B_{ij}, B_i (i=1, 2; j=1, 2)$  与  $\lambda$  无关。

令  $B = B_1 + B_2 + B_3$ , 其中  $B_3 > 0$  充分大使得代数方程

$$\begin{cases} \bar{a} - \bar{b} \exp\{v_1\} - \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{\omega} \frac{\exp\{v_2\}}{\beta + \exp\{2v_1\}} = 0 \\ -\bar{d} - \bar{g} \exp\{v_2\} + \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{\omega} \frac{k \exp\{v_1\}}{\beta + \exp\{2v_1\}} = 0 \end{cases}$$

的每个正解  $(v_1, v_2)^T$  满足  $\|(v_1, v_2)^T\| = |v_1| + |v_2| < B$  (若存在)。

定义  $\Omega = \{z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T \in I^{\omega} : \|z\| < B\}$ , 满足定理 2.7 中的条件(1)。

当  $(z_1, z_2)^T \in \partial\Omega \cap \text{Ker}L = \partial\Omega \cap R^2$ ,  $(z_1, z_2)^T$  在  $R^2$  中是一个常数向量且  $\|z\| = B$ 。那么

$$QN \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} - \bar{b} \exp\{z_1\} - \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{\omega} \frac{\exp\{z_2\}}{\beta + \exp\{2z_1\}} \\ -\bar{d} - \bar{g} \exp\{z_2\} + \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{\omega} \frac{k \exp\{z_1\}}{\beta + \exp\{2z_1\}} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

满足定理 2.7 中的条件(2)。

定义映射族  $\Phi: \text{Dom}L \times [0, 1] \rightarrow I^{\omega}$  为

$$\Phi(z_1, z_2, \mu) = \begin{pmatrix} \bar{a} - \bar{b} \exp\{z_1\} \\ \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{\omega} \frac{k \exp\{z_1\}}{\beta + \exp\{2z_1\}} - \bar{g} \exp\{z_2\} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{\omega} \frac{\exp\{z_2\}}{\beta + \exp\{2z_1\}} \\ -\bar{d} \end{pmatrix}$$

其中  $\mu \in [0, 1]$  是参数。当  $z \in \partial\Omega \cap \text{Ker}L = \partial\Omega \cap R^2$ ,  $z$  在  $R^2$  中是一个常数向量且  $\|z\| = B$ 。当  $z \in \partial\Omega \cap \text{Ker}L = \partial\Omega \cap R^2$  时,  $\Phi(z_1, z_2, \mu) \neq 0$ 。事实上, 若存在一个常数向量  $z \in R^2$  且  $\|z\| = B$  满足  $\Phi(z_1, z_2, \mu) = 0$ , 即

$$\begin{cases} \bar{a} - \bar{b} \exp\{z_1\} - \mu \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{\omega} \frac{\exp\{z_2\}}{\beta + \exp\{2z_1\}} = 0 \\ -\bar{g} \exp\{z_2\} + \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{\omega} \frac{k \exp\{z_1\}}{\beta + \exp\{2z_1\}} - \mu \bar{d} = 0 \end{cases}$$

矛盾。

因为  $J: \text{Im } Q \rightarrow \text{Ker } L$ ，所以在这里同构  $J$  取为恒等映射。又因为  $\Phi$  是同伦映射，由拓扑度同伦不变性知

$$\begin{aligned} \deg(JQN(z_1, z_2)^T, \Omega \cap \text{Ker } L, (0, 0)^T) &= \\ \deg(QN(z_1, z_2)^T, \Omega \cap \text{Ker } L, (0, 0)^T) &= \\ \deg(\Phi(z_1, z_2, 1), \Omega \cap \text{Ker } L, (0, 0)^T) &= \\ \deg(\Phi(z_1, z_2, 0), \Omega \cap \text{Ker } L, (0, 0)^T) & \end{aligned} \quad (5-21)$$

方程组

$$\begin{cases} \bar{a} - \bar{b} \exp\{z_1\} = 0 \\ -\bar{g} \exp\{z_2\} + \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{\omega} \frac{k \exp\{z_1\}}{\beta + \exp\{2z_1\}} = 0 \end{cases}$$

有唯一正解  $z_1 = \ln \frac{\bar{a}}{\bar{b}}, z_2 = \ln \frac{\bar{a}\bar{b}}{\bar{g}(\beta\bar{b}^2 + \bar{a}^2)}$ 。

因此由式(5-21)得

$$\begin{aligned} \deg(JQN(z_1, z_2)^T, \Omega \cap \text{Ker } L, (0, 0)^T) &= \\ \text{sign} \begin{vmatrix} -\bar{b} \exp\{z_1\} & 0 \\ \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{\omega} \frac{k(\beta \exp\{z_1\} - \exp\{3z_1\})}{[\beta + \exp\{2z_1\}]^2} & -\bar{g} \exp\{z_2\} \end{vmatrix} &= \\ \text{sign}[\bar{b}\bar{g} \exp\{z_1 + z_2\}] = 1 \neq 0 & \end{aligned}$$

满足定理 2.7 中的条件(3)。

因此，系统(5-3)满足定理 2.7 在  $\Omega$  上的所有条件，故系统(5-3)在  $\text{Dom } L \cap \bar{\Omega}$  上至少有一个  $\omega$  周期解  $(z_1(t), z_2(t))^T$ 。则  $(x^*(t), y^*(t))^T$  为系统(5-1)的一个正  $\omega$  周期解。证毕。

## 5.4 非周期系统的持久性

定理 5.2 系统(5-1)的任一正解  $(x(t), y(t))$  均满足  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq B_1$ ，  
 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq B_2$ 。其中

$$B_1 = \max\left\{\frac{a^M}{b^L}, \frac{\exp(a^M - 1)}{b^L}\right\}, \quad B_2 = \max\left\{\frac{k^M B_1}{g^L \beta^L}, \frac{1}{g^L} \exp\left\{\frac{k^M B_1}{\beta^L} - 1\right\}\right\}$$

证明 由于系统(5-1)右端是指数形式，故对满足初始条件  $x(0) > 0, y(0) > 0$  的任意解  $(x(t), y(t))$ ，有  $x(t) > 0, y(t) > 0, t \geq 0$ 。

先证



$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq B_1 \quad (5-22)$$

(1) 当  $\{x(t)\}$  为递减序列时, 即对任意  $t \in N$ , 有  $x(t+1) < x(t)$

则有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x} \leq \frac{a^M}{b^L}$$

反证, 若有

$$\bar{x} > \frac{a^M}{b^L}$$

对系统(5-1)的第一个方程取极限得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [a(t) - b(t)x(t) - \frac{y(t)}{x^2(t) + \beta(t)}] = 0 \quad (5-23)$$

又因为

$$a(t) - b(t)x(t) - \frac{y(t)}{x^2(t) + \beta(t)} \leq a(t) - b(t)x(t) \leq a^M - b^L \bar{x} < 0$$

与式(5-23)矛盾。所以存在  $t \in N$ , 有

$$x(t) \leq \frac{a^M}{b^L} \quad (5-24)$$

(2) 当  $\{x(t)\}$  为递增序列时, 即对任意  $t \in N$ , 有  $x(t+1) > x(t)$

由  $r_1(t)$ ,  $b_1(t)$  的有界性和系统(5-1)的第一个方程的最后一项是非负的, 可得

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) \exp \left\{ a(t) - b(t)x(t) - \frac{y(t)}{x^2(t) + \beta(t)} \right\} \leq \\ &x(t) \exp \{ a(t) - b(t)x(t) \} \leq \\ &x(t) \exp \{ a^M - b^L x(t) \} \end{aligned} \quad (5-25)$$

又由式(5-25)的右端函数有最大值可知

$$x(t+1) \leq \frac{\exp(a^M - 1)}{b^L}$$

所以存在  $t \in N$ , 有

$$x(t) \leq \frac{\exp(a^M - 1)}{b^L} \quad (5-26)$$

(3) 当  $\{x(t)\}$  为非单调序列时, 假设存在  $l_0 \in N$ , 使得  $x(l_0 + 1) \geq x(l_0)$

由系统(5-1)的第一个方程有

$$x(l_0+1) = x(l_0) \exp \left\{ a(l_0) - b(l_0)x(l_0) - \frac{y(l_0)}{x^2(l_0) + \beta(l_0)} \right\} \geq x(l_0) \quad (5-27)$$

由(5-27)式得

$$a(l_0) - b(l_0)x(l_0) - \frac{y(l_0)}{x^2(l_0) + \beta(l_0)} \geq 0$$

即有

$$a(l_0) - b(l_0)x(l_0) \geq 0$$

因此可得

$$x(l_0) \leq \frac{a(l_0)}{b(l_0)} \leq \frac{a^M}{b^L} \quad (5-28)$$

取

$$B_1 = \max \left\{ \frac{a^M}{b^L}, \frac{\exp(a^M - 1)}{b^L} \right\}$$

反证, 假设存在  $p_0 > l_0 + 1$ , 有  $x(p_0) > B_1$ .

由假设当  $p_0 \geq l_0 + 2$  时, 取  $\tilde{p}_0 \geq l_0 + 2$  是最小正整数, 有

$$x(\tilde{p}_0) > B_1 \quad (5-29)$$

又因为  $x(\tilde{p}_0 - 1) < x(\tilde{p}_0)$ , 由(5-28)式得  $x(\tilde{p}_0) \leq B_1$ . 与(5-29)式矛盾. 所以当  $t \geq l_0$ , 都有  $x(t) \leq B_1$ .

同理可证

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq B_2 \quad (5-30)$$

(1) 当  $\{y(t)\}$  为递减序列时, 即对任意  $t \in N$ , 使得  $y(t+1) < y(t)$

则有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \bar{y} \leq \frac{k^M B_1}{g^L \beta^L}$$

反证, 若有

$$\bar{y} > \frac{k^M B_1}{g^L \beta^L}$$

对系统(5-1)的第二个方程取极限得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [-d(t) - g(t)y(t) + \frac{k(t)x(t)}{\beta(t) + x^2(t)}] = 0 \quad (5-31)$$

又因为

$$-d(t) - g(t)y(t) + \frac{k(t)x(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \leq -g(t)y(t) + \frac{k(t)x(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \leq -g^L \bar{y} + \frac{k^M B_1}{\beta^L} < 0$$

与式(5-31)矛盾。所以存在  $t \in N$ , 有

$$y(t) \leq \frac{k^M B_1}{g^L \beta^L} \quad (5-32)$$

(2) 当  $\{y(t)\}$  为递增序列时, 即对任意  $t \in N$ , 使得  $y(t+1) > y(t)$

由系统(5-1)的第二个方程得

$$\begin{aligned} y(t+1) &= y(t) \exp\left\{-d(t) - g(t)y(t) + \frac{k(t)x(t)}{\beta(t) + x^2(t)}\right\} \leq \\ & y(t) \exp\left\{\frac{k(t)B_1}{\beta(t)} - g(t)y(t)\right\} \leq \\ & \frac{1}{g^L} \exp\left\{\frac{k^M B_1}{\beta^L} - 1\right\} \end{aligned} \quad (5-33)$$

所以存在  $t \in N$ , 有

$$y(t) \leq \frac{1}{g^L} \exp\left\{\frac{k^M B_1}{\beta^L} - 1\right\} \quad (5-34)$$

(3) 当  $\{y(t)\}$  为非单调序列时, 假设存在  $k_0 \in N$ , 使得  $t \geq k_0$  时, 有  $y(k_0+1) \geq y(k_0)$ 。

由系统(5-1)的第二个方程有

$$y(k_0+1) = y(k_0) \exp\left\{-d(k_0) - g(k_0)y(k_0) + \frac{k(k_0)x(k_0)}{\beta(k_0) + x^2(k_0)}\right\} \quad (5-35)$$

由(5-35)式得

$$-d(k_0) - g(k_0)y(k_0) + \frac{k(k_0)x(k_0)}{\beta(k_0) + x^2(k_0)} \geq 0$$

又由(5-22)式得

$$y(k_0) \leq \frac{k(k_0)x(k_0)}{g(k_0)(\beta(k_0) + x^2(k_0))} \leq \frac{k^M B_1}{g^L \beta^L} \quad (5-36)$$

取

$$B_2 = \max\left\{\frac{k^M B_1}{g^L \beta^L}, \frac{1}{g^L} \exp\left\{\frac{k^M B_1}{\beta^L} - 1\right\}\right\}$$

反证, 假设存在  $q_0 > k_0 + 1$ , 有  $y(q_0) > B_2$ 。

由假设当  $q_0 \geq k_0 + 2$  时, 取  $\tilde{q}_0 \geq k_0 + 2$  是最小正整数, 有

$$y(\tilde{q}_0) > B_2 \quad (5-37)$$

又因为  $y(\bar{q}_0 - 1) < y(\bar{q}_0)$ , 由(5-36)式得  $y(\bar{q}_0) \leq B_2$ . 与(5-37)式矛盾. 所以当  $t \geq k_0$  时, 都有  $y(t) \leq B_2$ . 证毕.

定理 5.3 假设系统(5-1)满足  $a^L \beta^L > B_2$ ,  $\frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} > d^M$ , 则系统(5-1)的任一正解  $(x(t), y(t))$  均满足  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq D_1$ ,  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq D_2$ . 其中

$$D_1 = \min \left\{ \frac{a^L \beta^L - B_2}{b^M \beta^L}, \frac{a^L \beta^L - B_2}{b^M \beta^L} \exp \left\{ a^L - b^M B_1 - \frac{B_2}{\beta^L} \right\} \right\}$$

$$D_2 = \min \left\{ \frac{1}{g^M} \left( \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} - d^M \right), \frac{1}{g^M} \left( \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} - d^M \right) \exp \left\{ -d^M - g^M B_2 + \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} \right\} \right\}$$

证明 下面证明

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq D_1 \quad (5-38)$$

(1) 当  $\{x(t)\}$  为递增序列时, 即对任意  $t \in N$ , 使得  $x(t+1) > x(t)$

则有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \underline{x} \geq \frac{a^L \beta^L - B_2}{b^M \beta^L}$$

反证, 若有

$$\underline{x} < \frac{a^L \beta^L - B_2}{b^M \beta^L}$$

对系统(5-1)的第一个方程取极限得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ a(t) - b(t)x(t) - \frac{y(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \right] = 0 \quad (5-39)$$

又因为

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ a(t) - b(t)x(t) - \frac{y(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \right] \geq a^L - b^M \underline{x} - \frac{B_2}{\beta^L} > 0$$

与式(5-39)矛盾. 所以存在  $t \in N$ , 有

$$x(t) \geq \frac{a^L \beta^L - B_2}{b^M \beta^L} \quad (5-40)$$

(2) 当  $\{x(t)\}$  为递减序列时, 即对任意  $t \in N$ , 使得  $x(t+1) < x(t)$

由系统(5-1)的第一个方程有

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= x(t) \exp \left\{ a(t) - b(t)x(t) - \frac{y(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \right\} \geq \\
 &x(t) \exp \left\{ a(t) - b(t)x(t) - \frac{B_2}{\beta(t)} \right\} \geq \quad (5-41) \\
 &x(t) \exp \left\{ a^L - b^M x(t) - \frac{B_2}{\beta^L} \right\}
 \end{aligned}$$

由  $\{x(t)\}$  为递减序列和(5-41)式得

$$a^L - b^M x(t) - \frac{B_2}{\beta^L} \leq 0$$

因此存在  $t \in N$ ，可得

$$x(t) \geq \frac{a^L \beta^L - B_2}{b^M \beta^L} \quad (5-42)$$

(3) 当  $\{x(t)\}$  为非单调序列时，假设存在  $l_0 \in N$ ，使得当  $t \geq l_0$  时，有  $x(l_0+1) \leq x(l_0)$ 。

由系统(5-1)的第一个方程和(5-30)式得

$$\begin{aligned}
 x(l_0+1) &= x(l_0) \exp \left\{ a(l_0) - b(l_0)x(l_0) - \frac{y(l_0)}{\beta(l_0) + x^2(l_0)} \right\} \geq \\
 &\frac{a^L \beta^L - B_2}{b^M \beta^L} \exp \left\{ a^L - b^M B_1 - \frac{B_2}{\beta^L} \right\} \quad (5-43)
 \end{aligned}$$

取

$$D_1 = \min \left\{ \frac{a^L \beta^L - B_2}{b^M \beta^L}, \frac{a^L \beta^L - B_2}{b^M \beta^L} \exp \left\{ a^L - b^M B_1 - \frac{B_2}{\beta^L} \right\} \right\}$$

反证，假设存在  $p_0 \geq l_0 + 1$ ，有  $x(p_0) < D_1$ 。

当  $p_0 \geq l_0 + 2$  时，取  $\tilde{p}_0 \geq l_0 + 2$  是最小正整数，有

$$x(\tilde{p}_0) < D_1 \quad (5-44)$$

又因为  $x(\tilde{p}_0 - 1) > x(\tilde{p}_0)$ ，所以  $x(\tilde{p}_0) \geq D_1$ 。与(5-44)式矛盾。所以当  $t \geq l_0$ ，都有  $x(t) \geq D_1$ 。

同理可证

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq D_2 \quad (5-45)$$

(1) 当  $\{y(t)\}$  为递增序列时，即对任意  $t \in N$ ，使得  $y(t+1) > y(t)$

则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \underline{y} \geq \frac{1}{g^M} \left( \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} - d^M \right)$$

反证, 若有

$$\underline{y} > \frac{1}{g^M} \left( \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} - d^M \right)$$

对系统(5-1)的第二个方程取极限得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -d(t) - g(t)y(t) + \frac{k(t)x(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \right] = 0 \quad (5-46)$$

又因为

$$-d(t) - g(t)y(t) + \frac{k(t)x(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \geq -d^M - g^M \underline{y} + \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} > 0$$

与式(5-46)矛盾。所以存在  $t \in N$ , 有

$$y(t) \geq \frac{1}{g^M} \left( \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} - d^M \right) \quad (5-47)$$

(2) 当  $\{y(t)\}$  为递增序列时, 即对任意  $t \in N$ , 使得  $y(t+1) > y(t)$

由系统(5-1)的第二个方程有

$$y(t+1) = y(t) \exp \left\{ -d(t) - g(t)y(t) + \frac{k(t)x(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \right\} \leq y(t) \quad (5-48)$$

由  $\{y(t)\}$  为递增序列和(5-48)式得

$$-d(t) - g(t)y(t) + \frac{k(t)x(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \leq 0$$

因此存在  $t \in N$ , 都有

$$y(k_0) \geq \frac{1}{g^M} \left( \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} - d^M \right) \quad (5-49)$$

(3) 当  $\{y(t)\}$  为非单调序列时, 假设存在  $k_0 \in N$ , 使得当  $t \geq k_0$  时, 有  $y(k_0+1) \leq y(k_0)$

又由(5-22)式, (5-38)式和系统(5-1)的第二个方程得

$$\begin{aligned} y(k_0+1) &= y(k_0) \exp \left\{ -d(k_0) - g(k_0)y(k_0) + \frac{k(k_0)x(k_0)}{\beta(k_0) + x^2(k_0)} \right\} \geq \\ &y(k_0) \exp \left\{ -d^M - g^M B_2 + \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} \right\} \geq \end{aligned} \quad (5-50)$$

$$\frac{1}{g^M} \left( \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} - d^M \right) \exp \left\{ -d^M - g^M B_2 + \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} \right\}$$

取

$$D_2 = \min \left\{ \frac{1}{g^M} \left( \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} - d^M \right), \frac{1}{g^M} \left( \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} - d^M \right) \exp \left\{ -d^M - g^M B_2 + \frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} \right\} \right\}$$

假设存在  $q_0 \geq k_0 + 1$ , 有  $y(q_0) < D_2$ 。

当  $q_0 \geq k_0 + 2$  时, 取  $\tilde{q}_0 \geq k_0 + 2$  是最小正整数, 有

$$y(\tilde{q}_0) < D_2 \tag{5-51}$$

又因为  $y(\tilde{q}_0 - 1) > y(\tilde{q}_0)$ , 由(5-47)得  $y(\tilde{q}_0) \geq D_2$ 。与(5-50)式矛盾。所以当  $t \geq k_0$ , 都有  $y(t) \geq D_2$ 。证毕。

由定义 2.5 可得下面的定理。

**定理 5.4** 若系统(5-1)满足  $a^L \beta^L > B_2$ ,  $\frac{k^L D_1}{\beta^M + B_1^2} > d^M$ , 则系统(5-1)是持续

生存的。

### 5.5 全局稳定性

**定理 5.5** 若系统(5-1)满足  $r_1^L - b_1^M B_1 > 0$  及下列条件

$$(1) \quad b^M B_1 + \frac{2B_1 B_2}{(\beta^L)^2} \leq 1, \quad g^M B_2 \leq 1, \quad \beta^M \leq D_1^2$$

$$(2) \quad n_1 \left( b^L + \frac{2D_2}{(B_1^2 + \beta^M)^2} \right) - n_2 \frac{k^M B_2}{\beta^L} > \gamma, \quad n_2 g^L - \frac{n_1}{\beta^L} > \gamma, \quad \frac{n_1}{x^*(t)} \delta + \frac{n_2}{y^*(t)} \delta > \gamma,$$

$\gamma, n_i (i=1,2)$  为正常数。

(3) 系统(5-1)是持续生存的。

则系统(5-1)的正解是全局稳定的。

**证明** 取  $(x^*(t), y^*(t))$  是系统(5-1)的一个正周期解。作平移变换

$$u(t) = x(t) - x^*(t), v(t) = y(t) - y^*(t) \tag{5-52}$$

则系统(5-1)可化为

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t+1) = x(t) \exp \left\{ a(t) - b(t)x(t) - \frac{y(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \right\} - \\ \quad x^*(t) \exp \left\{ a(t) - b(t)x^*(t) - \frac{y^*(t)}{\beta(t) + x^{*2}(t)} \right\} \\ v(t+1) = y(t) \exp \left\{ -d(t) - g(t)y(t) + \frac{k(t)x(t)}{\beta(t) + x^2(t)} \right\} - \\ \quad y^*(t) \exp \left\{ -d(t) - g(t)y^*(t) + \frac{k(t)x^*(t)}{\beta(t) + x^{*2}(t)} \right\} \end{array} \right. \tag{5-53}$$

即

$$\begin{cases} u(t+1) = [x(t) \exp\{-b(t)(x(t) - x^*(t)) + \frac{y^*(t)}{x^2(t) + \beta(t)} - \frac{y(t)}{x^2(t) + \beta(t)}\} - x^*(t)] \times \\ \quad \exp\{a(t) - b(t)x^*(t) - \frac{y^*(t)}{\beta(t) + x^2(t)}\} \\ v(t+1) = [y(t) \exp\{-g(t)(y(t) - y^*(t)) + \frac{k(t)x(t)}{\beta(t) + x^2(t)} - \frac{k(t)x^*(t)}{\beta(t) + x^2(t)}\} - y^*(t)] \times \\ \quad \exp\{-d(t) - g(t)y^*(t) + \frac{k(t)x^*(t)}{\beta(t) + x^2(t)}\} \end{cases} \quad (5-54)$$

将式(5-53)在  $(x^*(t), y^*(t))$  处展成泰勒展式可得

$$\begin{cases} u(t+1) = \exp\{a(t) - b(t)x^*(t) - \frac{y^*(t)}{\beta(t) + x^2(t)}\} \times [(1 - b_1(t)x^*(t)) \\ \quad \frac{2y^*(t)x^*(t)}{(x^2(t) + \beta(t))^2} u(t) - \frac{x^*(t)}{x^2(t) + \beta(t)} v(t) + f_1(t, \lambda(t))] + \\ v(t+1) = \exp\{-d(t) - g(t)y^*(t) + \frac{k(t)x^*(t)}{\beta(t) + x^2(t)}\} \times [(1 - gy^*(t))v(t) + \\ \quad \frac{k(t)y^*(t)(\beta(t) - x^2(t))}{(\beta(t) + x^2(t))^2} u(t) + f_2(t, \lambda(t))] \end{cases} \quad (5-55)$$

当  $\|(u, v)\| \rightarrow 0$  时,  $|f_i(t, u(t), v(t))|/\|(u, v)\|$  一致收敛于 0,  $t \in N$ 。

由系统(5-1)可将式(5-55)改写为

$$\begin{cases} u(t+1) = x^*(t+1) \left[ (1 - b(t)x^*(t) - \frac{2y^*(t)x^*(t)}{(x^2(t) + \beta(t))^2}) \frac{u(t)}{x^*(t)} - \right. \\ \quad \left. \frac{1}{x^2(t) + \beta(t)} v(t) + \frac{f_1(t, \lambda(t))}{x^*(t)} \right] \\ v(t+1) = y^*(t+1) \left[ \frac{k(t)y^*(t)(\beta(t) - x^2(t))}{(\beta(t) + x^2(t))^2} u(t) + \right. \\ \quad \left. (1 - gy^*(t)) \frac{v(t)}{y^*(t)} + \frac{f_2(t, \lambda(t))}{y^*(t)} \right] \end{cases} \quad (5-56)$$

定义 Liapunov 函数如下

$$V(u(t), v(t)) = \frac{n_1}{x^*(t)} |u(t)| + \frac{n_2}{y^*(t)} |v(t)|$$

这里  $n_i$  是满足定理 5.5 条件(2)的待定正常数。V 沿着系统(5-56)求差分



$$\begin{aligned}
 \Delta V = V(t+1) - V(t) &= \frac{n_1}{x^*(t+1)} |u(t+1)| + \frac{n_2}{y^*(t+1)} |v(t+1)| - \frac{n_1}{x^*(t)} |u(t)| - \frac{n_2}{y^*(t)} |v(t)| = \\
 & n_1 \left| 1 - b(t)x^*(t) - \frac{2y^*(t)x^*(t)}{(x^{*2}(t) + \beta(t))^2} \right| \frac{|u(t)|}{x^*(t)} - \frac{1}{x^{*2}(t) + \beta(t)} |v(t)| + \frac{|f_1(t, \lambda(t))|}{x^*(t)} \Big| + \\
 & n_2 \left| \frac{k(t)y^*(t)(\beta(t) - x^{*2}(t))}{(\beta(t) + x^{*2}(t))^2} u(t) + (1 - g(t)y^*(t)) \frac{|v(t)|}{y^*(t)} + \frac{|f_2(t, \lambda(t))|}{y^*(t)} \right| - \\
 & \frac{n_1}{x^*(t)} |u(t)| - \frac{n_2}{y^*(t)} |v(t)| \leq \\
 & n_1 \left| 1 - b(t)x^*(t) - \frac{2y^*(t)x^*(t)}{(x^{*2}(t) + \beta(t))^2} \right| \frac{|u(t)|}{x^*(t)} + n_1 \left| \frac{1}{x^{*2}(t) + \beta(t)} \right| |v(t)| + n_1 \left| \frac{|f_1(t, \lambda(t))|}{x^*(t)} \right| + \\
 & n_2 \left| \frac{k(t)y^*(t)(\beta(t) - x^{*2}(t))}{(\beta(t) + x^{*2}(t))^2} \right| |u(t)| + n_2 |1 - g(t)y^*(t)| \frac{|v(t)|}{y^*(t)} + n_2 \left| \frac{|f_2(t, \lambda(t))|}{y^*(t)} \right| - \\
 & \frac{n_1}{x^*(t)} |u(t)| - \frac{n_2}{y^*(t)} |v(t)| = \\
 & \left[ n_1 \left( -b_1(t) - \frac{2y^*(t)}{(x^{*2}(t) + \beta(t))^2} \right) + n_2 \frac{k(t)y^*(t)(\beta(t) - x^{*2}(t))}{(x^{*2}(t) + \beta(t))^2} \right] |u(t)| + \\
 & \left[ \frac{n_1}{x^{*2}(t) + \beta(t)} - n_2 g(t) \right] |v(t)| + \frac{n_1}{x^*(t)} |f_1(t, \lambda(t))| + \frac{n_2}{y^*(t)} |f_2(t, \lambda(t))| \leq - \\
 & \left[ n_1 \left( b^L + \frac{2D_2}{(B_1^2 + \beta^M)^2} \right) - n_2 \frac{k^M B_2}{\beta^L} \right] |u(t)| - \left[ n_2 g^L - \frac{n_1}{\beta^L} \right] |v(t)| + \\
 & \frac{n_1}{x^*(t)} |f_1(t, \lambda(t))| + \frac{n_2}{y^*(t)} |f_2(t, \lambda(t))| \leq \\
 & \left( -\gamma + \frac{n_1}{x^*(t)} \delta + \frac{n_2}{y^*(t)} \delta \right) \|u, v\|
 \end{aligned}$$

因为当  $\|(u, v)\| \rightarrow 0$  时,  $|f_i(t, u(t), v(t))|/\|(u, v)\|$  一致收敛于 0, 由定理条件可知, 存在一个正常数  $\gamma$ , 使得当  $t$  充分大时, 有  $\|(u, v)\| < \gamma$ 。则

$$\Delta V \leq -\frac{\gamma}{2} \|(u, v)\| < 0$$

有定理 2.9 可知, 系统 (5-1) 的正解是全局稳定的。

## 5.6 本章小结

本章研究了具有 Holling IV 型双密度制约变系数的离散捕食系统, 利用重

合度理论的延拓定理证明了系统(5-1)正周期解的存在性；利用比较原理，得到了系统(5-1)持久性的充分条件；利用 Liapunov 函数构造法，得到正解的全局稳定性。

## 结论

本文应用微分方程稳定性和定性理论、重合度理论、几何性质, 考虑了具有 Holling IV型的捕食系统, 证明了系统正平衡点全局稳定性, 极限环的存在唯一性和周期解的存在性。本文分三部分工作:

1. 考虑了食饵种群密度制约为一般函数  $g(x)$  时, 捕食者无密度制约 ( $s=0$ ) 和有密度制约 ( $s \neq 0$ ) 的 Holling IV型的捕食系统。当  $s=0$  时, 通过分析平衡点的奇点类型, 然后运用 Dulac 函数法和构造恰当的 Liapunov 函数法, 分别得到了系统无环的充分条件和正平衡点全局稳定的充分条件。然后构造恰当的环境得到极限环的存在性。但证明极限环的唯一性时, 系统转化为 Lienard 方程时有困难, 需要对系统作两次变换得到, 计算量很大。借助数学分析的理论, 数形结合和分类讨论的思想给予解决。当  $s \neq 0$  时, 首先用根的存在性定理得到系统存在唯一的正平衡点的条件, 然后给出正平衡点全局稳定性, 极限环的存在唯一性的充分条件。解决困难同  $s=0$  时方法相同。最后利用 Matlab 软件对平衡点的全局稳定性和极限环的存在唯一性进行了数值模拟。

2. 考虑了食饵种群密度制约为一般函数  $g(x)$  时, 捕食者有密度制约 ( $s \neq 0$ ) 的 Holling IV型的离散系统。通过利用特征值法, 得到了系统正平衡点的局部稳定性充分条件。然后构造恰当的 Liapunov 函数, 给出了系统正平衡点的全局稳定性的充分条件, 利用 Matlab 软件进行了数值模拟。

3. 考虑了具有 Holling IV型双密度制约变系数的离散捕食系统, 利用重合度理论中的延拓定理证明了周期系统正解的存在性。然后运用比较原理和不等式性质, 得到了非周期系统持久性的充分条件。最后构造 Liapunov 函数, 得到了非周期系统正解的全局稳定的充分条件。

### 展望

对于具有 Holling IV型的捕食系统还有很多的问题值得研究。由于时间的原由, 只能把以下问题作为以后研究的课题:

1. 对于食饵种群密度制约为一般函数  $g(x)$ , 捕食者无密度制约 ( $s=0$ ) 的 Holling IV型的捕食系统, 当奇点类型为高次奇点时, 讨论分支情况。

2. 对于食饵种群密度制约为一般函数  $g(x)$ , 捕食者有密度制约 ( $s \neq 0$ ) 的 Holling IV型的捕食系统, 讨论系统有两个或两个以上正平衡点的存在条件及全局稳定性, 极限环的存在性和唯一性。

## 参考文献

- [1] F ROTHE, D S SHAFER. Multiple Bifurcation in a Predator-Prey System with Nonmonotonic Predator Response[J]. Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1992, 120(A): 313-347.
- [2] K MISCHAIKOW, G S K WOLKOWICZ. A Predator-prey System Involving Group Defence: a Connection Matrix Approach[J]. Nonlinear Anal, 1990, 14: 955-969.
- [3] J S TENER. Muskoxen. Queen's Printer, Ottawa, 1965.
- [4] J F ANDREWS. A Mathematical Model for the Continuous Culture Culture of Microorganisms Utilizing Inhibitory Substrates[J]. Biotechnol Bioeng, 1968, 10: 707-723.
- [5] S W SOKOL, J A HOWELL. Kinetics of Phenol Oxidation by Washed Cells[J]. Biotechnol Bioeng, 1980, 23: 2039-2049.
- [6] H I FREEDMAN, G S K WOLKOWICZ. Predator-Prey System with Group Defence: the Paradox of Enrichment Revisited[J]. Bull. Math. Biol., 1986, 48: 493-508.
- [7] G S K WOLKOWICZ. Bifurcation Analysis of Predator-Prey System Involving Group Defence[J]. Siamj. Appl. Math., 1988, 48(3): 592-606.
- [8] 张发秦. 捕食者厌食的 Predator-Prey 系统极限环存在性与唯一性[J]. 生物数学学报, 1988, 3(1): 62-69.
- [9] 李贤彬, 戴国仁. 一个群体防卫捕食系统的定性分析[J]. 高校应用数学学报, 1998, 13(2): 127-138.
- [10] S RUAN, D XIAO. Global Analysis in a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response[J]. Siamj. Appl. Math., 2001, 61: 1445-1472.
- [11] 陈江珊, 吴承强. 具有 Holling IV 型功能反应函数的捕食者-食饵系统的定性分析[D]. 福建: 福州大学, 2005: 12.
- [12] 孙凤欣, 林怡平. 一类具有比率依赖的 Holling IV 和 Leslie 型捕食模型[J]. 宁波工程学院学报, 2007, 19(4): 37-41.
- [13] 李义龙, 肖冬梅. 具有非单调功能性反应的捕食系统的定性分析[J]. 上海交通大学学报, 2007, 41(5): 947-950.
- [14] 王育全, 具有功能反应的一类食物链模型的动力学行为[J]. 数学物理学报

- 2007, 27(1): 079-089.
- [15] 陈兰荪, 宋新宇, 陆征一. 数学生态学模型与研究方法[M]. 四川: 四川科学技术出版社, 2003: 78-120.
- [16] HUANG Y N. A Note on Stability of Discrete Population Models[J]. *Math. Biosci.*, 1989, 95: 189-198.
- [17] HUANG Y N. A Note On Global Stability for Discrete One-Dimensional Population Models[J]. *Math. Biosci.*, 1990, 102: 121-124.
- [18] 黄永年. 单种群离散模型的全局和局部稳定性[J]. *系统科学与数学*, 2001, 21(4): 455-464.
- [19] 邓小炎. 一类单种群差分模型的周期解和混沌现象[J]. *华中农业大学学报*, 2000, 194: 403-407.
- [20] HOFBAUER J, HUTSIN V, JANSEN W. Coexistence for Systems Governed by Difference Equations of Lotka-Volterra Type[J]. *Math. Biol.*, 1987, 25: 553-570.
- [21] CULL P. Local and Global Stability of Population Models[J]. *Bull. Math. Biol.*, 1988, 54: 67-75.
- [22] CULL P. Stability of Discrete One-Dimensional Population Models[J]. *Bull. Math. Biol.*, 1988, 50: 67-75.
- [23] 廖进昆, 闵心畅, 陆征一. 离散 Lotka-Volterra 捕食系统的全局性态[J]. *四川大学学报(自然科学版)*, 2000, 37(2): 150-152.
- [24] 杨秀香. 离散系统的捕食-食饵两种群同时捕获的最优化问题[J]. *工程数学学报*, 2004, 21(1): 81-85.
- [25] 张悦, 张庆灵, 赵立纯. 离散广义的 Logistic 模型的混沌控制[J]. *生物数学学报*, 2006, 21(3): 359-364.
- [26] GAINES R E, MAWHIN J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1977: 10-35.
- [27] 田宝单, 魏代俊, 刘志军. 具有 Holling IV 功能性的非自治捕食系统的分析[J]. *湖北民族学院学报*, 2004, 22(1): 5-8.
- [28] 田宝单. 一类具有反馈控制和 Holling IV 类功能反应的非自治捕食系统的渐近性质[J]. *四川师范大学学报*, 2006, 29(6): 672-675.
- [29] 田德生, 具有 Holling IV 类功能性反应时滞扩散捕食模型的多个周期解[J]. *数学的实践和认识*, 2007, 37(24): 800-411.
- [30] SHEN C X. Permanence and Global Attractivity of the Food-chain System with Holling IV Type Functional Response[J]. *Applied Mathematics and Computati-*

- on, 2007, 194: 179-185.
- [31] MOSTAFA FAZLY, MAHMOUD HESAARKI. Periodic Solutions for a Discrete Time Predator - Prey System with Monotonefunctional Responses[J]. C. R. Acad. Sci., 2007, 345: 199-202.
- [32] JIAO JJ, MENG XZ, CHEN L. A Stage-Structured Holling Mass Defence Predator-Prey Model with Impulsive Perturbations on Predators[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 189(2): 1448-1458.
- [33] SHEN C X. Premanence and Global Attractivity of the Food-Chain System with Holling IV Type Functional Response[J]. Applied Mathmatics and Computation, 2007, 194(1): 179-185.
- [34] YANG WS, LI XP, BAI ZJ. Permanence of Periodic Holling Type-IV Predator-Prey System with Stage Structure for Prey[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2008, 48(5-6): 677-684.
- [35] 卢春. 一个带有 Holling IV类功能性反应的半比率依赖捕食-食饵系统周期解的存在性[J]. 高师理科学刊, 2008, 28(4): 7-9.
- [36] 王宜洁. 具有 Holling IV类功能性反应的食物链系统的持久性和周期解[J]. 福建师范大学福清分校学报, 2008, 88(5): 10-14.
- [37] LIJIE ZHANG, CHUN LU. Periodic Solutions for a Semi-Ratio-Dependent Predator-Prey System with Holling IV Functional Response[J]. J. Appl. Math. Comput., 2009, 264(3): 1-13.
- [38] WANG Q, DAI B X, CHEN YM. Mulitple Periodic Solutions of an Impulsive Predator-prey Mpdel with Holling IV Functional Response[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49(9-10): 1829-1836.
- [39] TIAN DESHENG, ZHU CHANGQING, ZHU YONGSONG. Multiple Periodic Solutions of a Delayed Predator-Prey System with Holling IV[J]. Pure and Applied Mathematics, 2009, 25(2): 339-345.
- [40] WEI FENGTING. The Persistence of Variable Coefficient Multispecies Predator - Prey Systems with Holling IV Type Functional Response[J]. Journal of Jilin Normal University, 2009, 1: 1-9.
- [41] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 2005: 30-31, 74-75, 126-128.
- [42] 陈兰荪, 宋新宇, 陆征一. 数学生态学模型与研究方法[M]. 四川: 四川科学技术出版社, 2003: 80-89.

- [43] WANG W D, LU Z Y. Global Stability of Discrete Models of Lotka-Volterra Type[J]. *Nonl.Anal.T.M.A.*, 1999, 35: 1019-1030.
- [44] ZHANG R Y, WANG Z C, CHEN Y. Periodic Solutions of A Single Species Discrete Population Model with Periodic Harvest/Stock[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2000, 39(1-2): 77-90.
- [45] GAINES R E, MAWHIN J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equation[M]. Berlin, Springer-Verlag, 1977: 75-104.
- [46] 郭大均, 孙经先, 刘兆理. 非线性常微分方程泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2005: 78.
- [47] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性及稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 176-177.
- [48] 董士杰, 葛渭高. 基于比率的离散型捕食系统的周期解[J]. *北京理工大学学报*, 2003, 23(2): 143-146.
- [49] 郭大均, 孙先经. 抽象空间常微分方程[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2002: 121-167.
- [50] FAN Y H, LI W T. Permanence for a delayed discrete ratio-dependent predator-prey system with holling type functional response[J]. *Mathematical Analysis and Applications*, 2004, 299: 357-374.
- [51] HAINZL. Stability and Hopf Bifurcation in Predator-Prey System with Several Parameters [J]. *Siam. Appl. Math.*, 1988, 48(1): 45-52.
- [52] CHEN LANSUN, LI HUA. The Mathematical Behavior of a Predator-Prey Model with Undercrowding Effect [J]. *Ann. Of. Diff. Eqs*, 1995, 11(1): 14-19.
- [53] 张娟, 马知恩. 一类具有 Holling II 类功能反应且存在两个极限环的捕食系统的定性分析[J]. *生物数学学报*, 1996, 11(4): 37-42.
- [54] 邱卫根, 李传荣, 刘永清. 具有收获项的 II 类功能反应的捕食系统的定性分析[J]. *生物数学学报*, 1998, 18(3): 310-317.
- [55] 沈伯骞, 赵文园. 一类具有 Holling II 类功能反应且两种群均有密度制约项的捕食系统的讨论[J]. *辽宁师范大学学报*, 1998, 21(1): 7-16.
- [56] WANG YUQUAN, JING ZHUJUN, CHAN K.Y. Multiple Limit Cycles and Global Stability in Predator-Prey Model[J]. *Acta. Math. Appl.*, 1999, 15(2): 206-219.
- [57] 肖海滨. 双密度制约的 Holling II 型捕食动力系统的定性分析[J]. *生物数学学报*, 2006, 21(3): 334-340.

- [58] 郑靖波, 余昭旭, 孙继涛. 一类稀疏效应下食饵-捕食系统极限环的存在唯一性[J]. 生物数学学报, 2001, 16(2): 156-161.
- [59] WANG YUQUAN, MA JUNYING. Qualitative Analysis on a Class of Predator-Prey Model with Holling III Functional Response[J]. Math. Biol., 2004, 19(4): 395-402.
- [60] 肖海滨. 密度制约的 Holling III型捕食动力系统极限环的存在唯一性[J]. 高校应用数学学报, 2006, 21(4): 395-404.



## 攻读硕士学位期间发表的学术论文

- [1] 姚婷婷, 李冬梅, 敖岩岩. 食饵种群具有密度制约的第IV类功能性反应捕食-被捕食系统的定性分析[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2009, 14(6):98-101.
- [2] LI Dong-mei, AO Yan-yan, YAO Ting-ting. Qualitative Analysis on the Predator-prey System of Holling II with Investing Rate and Double Density Restrict [J]. 哈尔滨理工大学学报 (已录用).
- [3] 李冬梅, 尹晓, 姚婷婷. 污染环境中 Smith 模型的稳定性[J]. 哈尔滨理工大学学报 (已录用).

## 致谢

光阴飞逝，近三年的硕士研究生生活即将结束，在此期间，我得到了很多人的帮助，临近毕业之际，我向他们致以最诚挚的谢意。

首先，我要感谢我的指导老师李冬梅教授。她严肃的教学态度，严谨的治学精神，平易近人、谦虚求实的工作作风，乐观向上、真诚进取的人生态度深深地感染和激励着我。我的课题从选择到最终完成，老师都始终给予我细心的指导和不懈的支持。在论文的撰写阶段老师更是精益求精，大到论文整体结构，小到一个标点符号、一个文献日期，老师都一一指正。两年多来，李老师不仅在学业上给我以精心指导，同时还在思想、生活上给我以无微不至的关怀；老师不仅教会我如何学习，更教会我如何做事、做人。在此谨向李老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意。

其次，感谢应科院的所有领导、老师在我攻读硕士学位期间在学习和生活上给予我的关心和帮助。

再次，我要感谢在一起愉快的度过研究生生活的周方媛，王晖师姐和同窗好友尹晓，敖岩岩，李春艳，正是由于你们的帮助和支持，我才能克服一个一个的困难和疑惑，正是因为有了你们的帮助，才让我不仅学到了本次课题所涉及的新知识，更让我感受到了知识以外的东西，那就是团结的力量。我还要感谢我的室友们，从遥远的家乡来到这个陌生的城市里，是你们和我共同维系着彼此之间姐妹般的感情，维系着寝室那份家的融洽。希望在以后的日子里大家都平安快乐、前程似锦。同时也向所有帮助过我、关心过我的同学、朋友们致以衷心的感谢。

在今天这个日子里，我特别要感谢的是我的父母和亲人，是你们真挚无私的爱和一如既往的关心、理解、支持和帮助，支撑我顺利完成学业。

最后，要感谢评阅、评议硕士论文和出席硕士论文答辩会的各位专家老师，感谢你们在百忙的工作中能给予我指导。