

论文题目：磁场下旋量凝聚体的自旋演化和一维玻色凝聚体的结构相变

专 业：理论物理

博 士 生：陈志锋

指导老师：李志兵（教授）

摘 要

1995 年玻色—爱因斯坦凝聚 (BEC) 首次在实验上获得成功, 自此 BEC 成为实验和理论物理学界一个异彩纷呈的舞台, 至今方兴未艾。BEC 是一种由宏观数目原子构成的量子系统, 所有原子都占据着能量最低的单粒子态 (有时也包括低激发态), 并在宏观尺度上展现量子行为。

本文研究了外磁场作用下 $F=1$ 旋量 BEC 的自旋演化动力学。通过对角化哈密顿量, 得到系统状态的含时解析表达式, 在单模近似下具有简单的形式。为了阐明磁场对演化过程产生的影响, 文中对 $B=0$ 和 $B \neq 0$ 两种情况的演化特点进行了细致的比较。结果表明, 磁场将引起各自旋分量原子占有数随时间的强烈振荡。当磁场足够强时, 我们发现了一种由高低两个频率表征的新振荡模式。

本文还研究了一维环上吸引相互作用 BEC 的结构相变。同样通过对角化哈密顿量, 求得系统的低激发谱。我们发现, 系统的结构相变表现为基态中基本对激发的权重随相互作用增强发生显著变化。随着相变发生, 粒子的关联变得非常强, 系统的 yrast 态出现准简并现象。我们还发现, 在强相互作用域, 环的微小形变将导致各 yrast 态强烈混合, 形成破坏空间对称性的集群结构, 并且引起平均角动量的大幅涨落。

在对角化哈密顿量时, 我们使用了小体理论中的方法, 其中应用到母配分系数。通过这种有效的方法, 我们获得了精确度很高的结果。

关键词：玻色—爱因斯坦凝聚, 自旋演化, 母配分系数, 结构相变, 准简并

Title: Evolution of spinor condensates in magnetic fields and structural transition of one dimensional Bose condensates

Major: Theoretical physics

Name: Zhifeng Chen

Supervisor: Prof. Zhibing Li

Abstract

Bose-Einstein condensation (BEC) was first realized in 1995. Since then BEC has been an active field of both experimental and theoretical studies. The BEC consists of a macroscopic number of atoms in the same single-particle state of the lowest energy (sometimes also including the lower excited states). The atomic quantum matter exhibits quantum behaviour in a macroscopic scale.

The spin mixing dynamics of spin-1 BEC under an external magnetic field is investigated in the present paper. The time-dependent solutions are obtained via diagonalization of the Hamiltonian, which has a simple form under the single mode approximation. The features of the evolution are compared in detail with those with the field removed so as to emphasize the effect of the field. Our results show that the field can induce strong oscillations in populations of atoms in different spin components. A new mode of oscillation characterized by a high frequency and a low frequency, is found when the field is sufficiently strong.

The structural transition in the BECs with attractive interaction on a ring is also studied. The low-lying spectrum is obtained also via diagonalization of the Hamiltonian. We find that the transition is described by the remarkable change of the weight of pair exciting in the ground state as the interaction strength increases. Particle correlation becomes much stronger and the yrast states become quasi-degenerate in the strong-interaction phase. We also find that in the strong-interaction phase, a small deformation of the ring will mix the quasi-degenerate yrast states to form cluster states which break the spatial symmetry explicitly and introduce large fluctuation of the average angular momentum.

A few-body method, characterized by the fractional parentage coefficients, has been used in the diagonalization. With this powerful method, high precision solutions have been obtained.

Key words: Bose-Einstein condensation, spin evolution, fractional parentage coefficients, structural transition, quasi-degenerate

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：陈志锋

日期：2008年6月4日

学位论文使用授权声明

本人完全了解中山大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文并向国家主管部门或其指定机构送交论文的电子版和纸质版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆、院系资料室被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，可以采用复印、缩印或其他方法保存学位论文。

学位论文作者签名：陈志锋

日期：2008年6月4日

导师签名：李红

日期：2008年6月4日

知识产权保护声明

本人郑重声明：我所提交答辩的学位论文，是本人在导师指导下完成的成果，该成果属于中山大学物理科学与工程技术学院，受国家知识产权法保护。在学期间与毕业后以任何形式公开发表论文或申请专利，均须由导师作为通讯联系人，未经导师的书面许可，本人不得以任何方式，以任何其它单位做全部和局部署名公布学位论文成果。本人完全意识到本声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：陈老锋

日期：2008.6.4

第1章 绪论

1925年,爱因斯坦历史性的预言:低温下玻色气体中的粒子将凝聚到相同的量子态。这一低温下奇特的物理现象被命名为玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)。时隔70年,随着激光冷却和捕陷等技术的发展,人们终于在冷原子气体中实现了BEC。BEC是在宏观尺度上展现的量子效应,对它的研究已成为当今物理学界异常活跃的一个领域。

1.1 历史回顾

BEC的研究历史可以回溯到1924年,印度物理教师玻色(S. Bose)利用统计方法推导出黑体辐射的光谱,由于未能把工作发表^[1],玻色把手稿寄给爱因斯坦(A. Einstein)请他审阅。爱因斯坦于是把玻色的文章翻译成德文并发表,并在此基础上接连发表了两篇文章^[2],把玻色的理论推广到无相互作用的理想气体,这就是著名的玻色-爱因斯坦统计理论。爱因斯坦敏锐的察觉到,由这种统计理论可以推论出低温下原子在各量子能级之间分布的奇异特性:在极低温度下,将有大份额的原子布居在能量最低的量子态上面!这种现象就是今天我们所熟知的玻色-爱因斯坦凝聚。实现凝聚的条件是原子的热德布罗意波长(λ_{dB})要大于原子间的平均间距,使得原子波包出现重叠。

起初对于发生凝聚的预言,并没有引起包括爱因斯坦本人在内的物理学界的广泛关注。直到1938年,伦敦(F. London)提出超流和超导现象可能是BEC的表现^[3, 4]。但这两类现象都是出现在强相互作用体系中,原子间的强关联掩盖了BEC的本质。后来通过中子散射测量,发现超流液氦中只有约10%的原子凝聚。于是人们转向在弱相互作用玻色气体中寻求实现BEC。但面临的一个严峻困难是,多数气体在极低温度下将液化,或者原子先组合成分子继而凝成固体,使得原子的相互作用大大增强,破坏实现BEC的条件。1959年Hecht提出可以选择自旋极化氢原子气体实现BEC^[5]。理由是两个自旋朝向相同的氢原子之间的吸引

作用非常弱，不足以形成束缚态，因而囚禁在磁场里的氢原子气体可以有效避免在低温下形成分子或液化，从而为实现 BEC 创造了有利条件。然而 Hecht 的想法远远超出了当时的技术水平，因而没有受到重视。事实上，由于在冷却氢原子气体过程中遇到的困难，使得在较晚的 1998 年，MIT 的 Kleppner 小组才最终实现了自旋极化氢原子气体的 BEC^[6]。

当人们把希望的眼光投放在自旋极化氢原子气体时候，对另一种 BEC 候选者的研究也在世界范围内进行着，它就是碱金属原子气体。直到 20 世纪 80 年代中期，激光冷却和蒸发冷却等实验技术有了长足的发展，这些技术特别适用于冷却碱金属原子气体。经过几代人的不懈努力，1995 年 JILA、MIT 和 Rice 大学等小组率先在 ^{87}Rb 、 ^{23}Na 和 ^7Li 等碱金属原子气体中实现了 BEC^[7-10]。C. E. Wieman, E. A. Cornell 和 W. Ketterle 三位科学家因此而获得 2001 年诺贝尔物理奖。图 1-1 是 JILA 小组在 ^{87}Rb 实验中不同温度下观察到的原子密度分布。

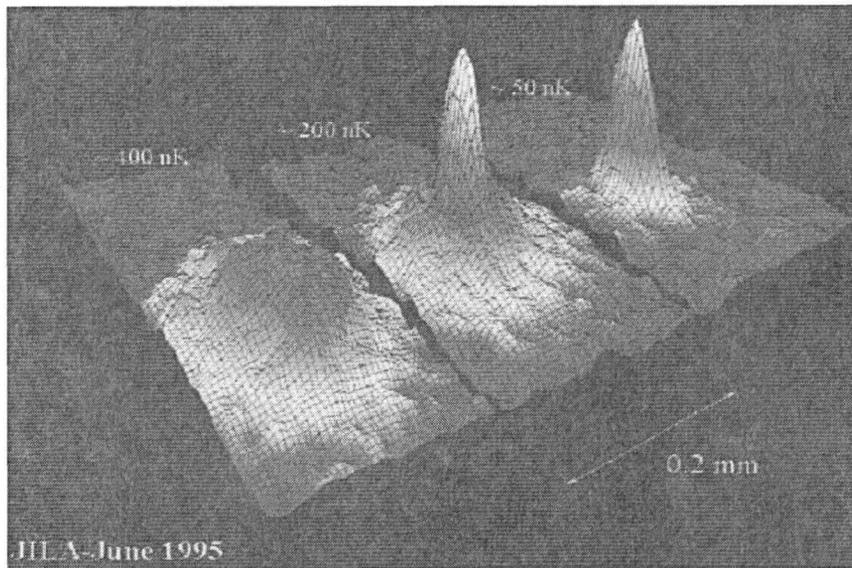


图 1-1 1995 年 JILA 小组在铷原子 BEC 实验中观察到的原子密度分布图^[11]。

1.2 BEC 的基本特性

BEC 是在宏观尺度上展现的量子效应。当玻色气体被冷却到临界温度 T_c 以下，将有大量比例的原子凝聚到最低量子态。温度 T 下质量为 m 的原子可以被看作一个量子波包，其空间范围与相同温度下的热德布罗意波长

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (1-1)$$

同量级。 λ_{dB} 的大小反映了由于热运动而造成位置不确定度，它随温度降低而增大。当原子被冷却到 λ_{dB} 可以与原子间距相比拟时，原子波包即发生重叠，使得原子变得不可分辨。此时玻色气体开始进入 BEC 状态，所有原子共同形成一个宏观的“原子云”，如图 1-2 所示。在 BEC 里，所有原子占据着相同的量子态，正如 1995 年 12 月 22 日 Science 杂志封面（图 1-3）所描述那样，原子就像整齐列队的卫兵，步调一致的行动。

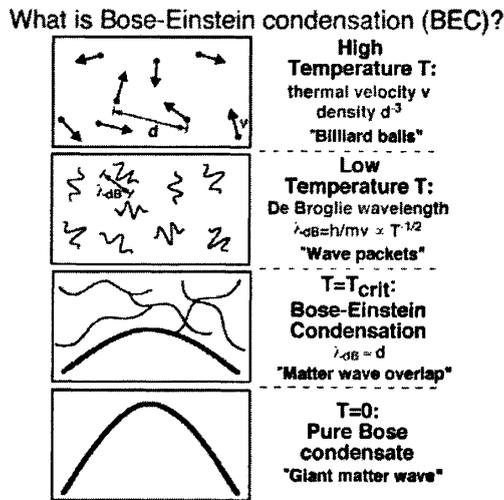


图 1-2 不同温度下玻色气体的量子特性^[12]。

1.3 BEC 实验技术简介

从 20 世纪中页开始发展起来的利用磁场和激光对原子气体进行囚禁和冷却，还有对原子云成像等技术，为 BEC 的实现及进一步研究奠定了基础。本节将对一系列相关实验技术作简单介绍。

1.3.1 原子囚禁技术

对中性原子进行磁约束的理论基础是塞曼效应：原子的塞曼能级依赖于磁

场，因而处在非均匀磁场中的原子将感受到空间变化的势场。假设塞曼能级线性依赖于磁场强弱，对于磁偶极矩为正（负）的原子，将感受到把它推向磁场较强（弱）方向的力。磁势阱的深度决定于塞曼能 μB ，原子磁偶极矩的量级为玻尔磁子 ($\mu_B = e\hbar/2m_e$)，以温度为单位大约是 $0.67K/T$ ，而实验中的磁场一般认为小于 $1 T$ ，故磁阱的深度将远小于 $1 K$ 。这就要求原子必须事先冷却到足够低温才能被磁阱捕获。

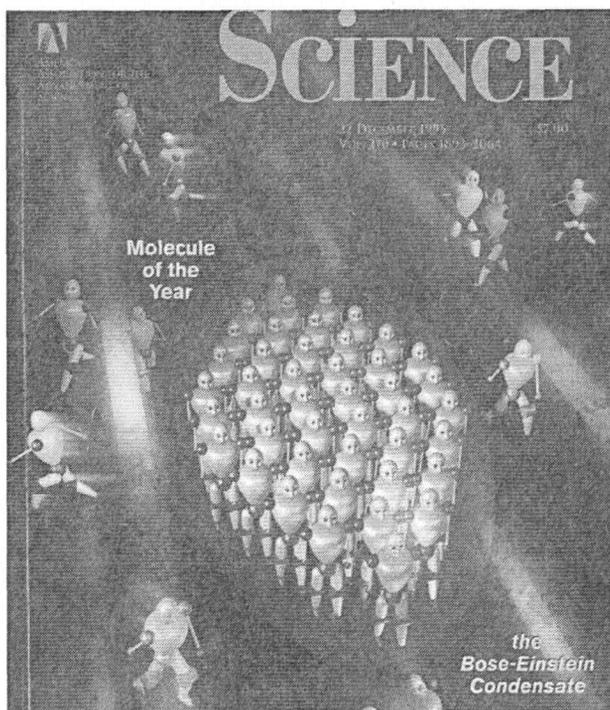


图 1-3 BEC 中原子的行为（1995 年 12 月 22 日 Science 杂志封面）。

最简单的磁阱是反向亥姆霍兹线圈形成的四极阱，其中心处场强为零。四极阱存在一个严重的缺点，原子在磁阱里运动时感受到的是一个随时间变化的磁场，这将引起原子在不同塞曼能级间跃迁，不利的情形是这种跃迁会改变磁偶极矩的符号，从而导致原子从磁阱中泄漏出去。这种情况在磁场零点附近尤为严重，因而四极阱中心处相当于是一个“漏洞”。这一“漏洞”有多种补救的方法^[13]，在第一个实现 BEC 的实验中，是外加一个振荡的偏置磁场来堵住漏洞。另一方法是在磁场节点区域加上一激光场，利用辐射排斥力阻碍原子进入这一区域，该方法被 MIT 小组应用在早期实验中。还可以用没有节点的磁场代替四极阱，从而避免了“漏洞”的出现。

利用激光束聚焦可以产生一个辐射场，其强度空间分布存在一个极大值，如

果激光频率调到红外失谐, 则原子在光场中的基态能量存在一个空间最小值。人们利用这一原理, 制造出在旋量 BEC 研究中广泛使用的光学阱。光学阱的优点是, 碱金属原子在光场中的基态跟磁性无关, 这是由于最外层电子的基态为 s 态。这跟磁阱的情形完全不一样, 磁场中原子能量由塞曼项主导, 原子实际上只能处于单一的自旋态, 自旋自由度因而被禁锢。如果利用光学阱囚禁原子, 则可把自旋自由度释放出来, 跟自旋有关的一系列丰富多彩的物理现象, 如自旋能带结构, 自旋动力学演化等课题的研究成为可能。

1.3.2 原子冷却技术

实现 BEC 的首要条件是把原子冷却到足够低温 ($\sim \mu\text{K}$), 这要求科学家们发展出既能有效降低温度, 又能避免原子液化或结合成分子的技术。对于碱金属原子特别有效的降温技术有激光冷却, 蒸发冷却等。

根据共振光偏转原子束的原理, 当光子被原子吸收后, 便获得动量 $\hbar k$, 然后以自发辐射或受激辐射形式释放光子, 回到基态。如果以自发辐射形式辐射出去, 其辐射方向在 4π 立体角内均匀分布, 给予原子的平均动量为零, 故原子获得所吸收光子的动量 $\hbar k$, 只要激光频率相对于原子跃迁的频率为红移, 在激光作用下的原子, 会由于 Doppler 效应被减速, 被致冷, 即 v , v^2 随作用时间 t 的增加而下降。但这只是受到迎面而来的激光辐射压力作用的结果。如果是受到正反方向传播的激光作用, 这时原子将在传播方向例如 x 轴方向被减速。如果是采用 6 个光束沿 x , y , z 正反方向作用于原子, 则原子将被禁锢在 6 束光作用的小区域内, 又考虑到原子的速度扩散, 原子很像是在一帶有粘性的液体即光学粘胶 (Optical molasses) 中运动。另外, 当激光的偏振随空间坐标变化, 亦即存在偏振梯度时, 对与之相互作用的原子呈现出阻力, 而且这时的阻尼系数当原子的速度 v 趋于 0 时, 几乎与光强无关。通过这种激光冷却和囚禁技术可获得大量的高密度的超冷原子, 数目为 $\sim 10^{10}$, 密度为 $10^{11} \sim 10^{12}\text{cm}^{-3}$, 温度为几十 μK ^[14]。

蒸发冷却是有选择地把磁阱中能量较高的原子释放出来, 然后剩下的原子通过弹性碰撞重新达到温度更低的热平衡, 如此反复不断降低原子气体的温度。在实现 BEC 的过程中, 蒸发冷却是由一个射频磁场来完成的。在磁阱中, 能量较

大的原子可达到磁场较强的地方，产生的塞曼分裂也较大。可选择适当的射频场频率，使这些原子跃迁到非囚禁的自旋态而逸出磁阱，通过把射频场频率慢慢变低，迫使更多能量较高的原子逸出磁阱。于是，阱中原子密度和弹性碰撞几率增加，温度变低，最终的温度和相空间密度取决于最后的射频场频率。实现蒸发冷却的关键在于：(1) 极高的背景真空度，以保证势阱有较长的囚禁时间来完成蒸发冷却过程；(2) 较大的弹性碰撞截面和较高的原子密度，以缩短重新热平衡化的时间^[15]。

1.3.3 BEC 成像技术

目前观测 BEC 的形成多采用共振吸收成像技术，用这种技术可以确定原子的数目、密度、温度以及原子的空间分布。其具体过程为：突然关闭势阱，让发生凝聚的原子云自由扩散，然后在不同的延迟时刻用共振脉冲光来探测。由于原子对共振光的吸收，在探测光中会产生阴影区，由 CCD 装置对透射光成像，对图像进行数字化处理，可以得到原子云在每一点的光学厚度。对由此获得的一系列飞行时间 (time-of-flight, TOF) 图像进行逐点校正，以修正由探测光的偏振度和饱和效应引起的偏差，可以得到扩散原子云的二维速度分布。飞行时间测量方法是测量冷原子温度的常用方法，它用共振荧光方法测量距冷原子团中心一定距离处的荧光强度的时间演化，可以得到冷原子的速度分布，由此推出温度。它们包含着原子的许多热力学信息，如分布曲线下所包围面积的积分，正比于总的原子数目；在零速度附近出现的窄特征峰，其峰值曲线下所包围面积的积分正比于处于体系基态的原子数目；从扩散原子云的平均半径和扩散时间可以得到原子的平均扩散速度和平均能量等特征参量。由于利用共振光探测，原子会强烈地散射共振光子，从而引起对原子的加热效应，因此这种共振吸收成像技术对形成的 BEC 有一定破坏性^[15]。

1.3.4 Feshbach 共振^[16]

低温下碱金属原子气体的相互作用能量正比于原子云密度和原子的散射长

度 a ，理论预言散射长度的大小可通过外加磁场等方式改变，即 Feshbach 共振 [17-21]。在 Feshbach 共振点附近，散射长度连续的从正值过渡到负值，实现了大范围取值变化。若设定 $a \approx 0$ ，则可产生近似理想气体；若设定 $a < 0$ ，则可观察系统的不稳定和坍塌。外加磁场的迅速改变会引起散射长度的突变，这为研究新的动力学效应开辟了道路，如在准一维系统中产生亮孤子物质波等现象 [22]。

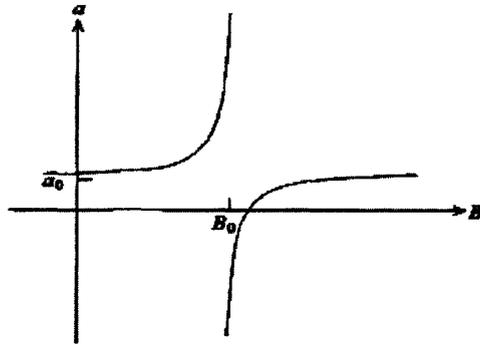


图 1-4 在 Feshbach 共振附近散射长度随磁场的变化关系 [16]。

Feshbach 共振的出现是由碱金属原子的特殊结构造成的。在碱金属原子中，最外层电子只有一个电子。当两个碱金属原子碰撞时，它们总的电子自旋可以处在单重态或三重态。由于原子核的磁矩远小于电子磁矩，原子总的磁矩主要是由电子磁矩决定的，所以在双原子系统中三重态的磁矩远大于单重态的磁矩。当有磁场时，三重态里最大的塞曼能绝对值远大于单重态的塞曼能绝对值，因此通过调节外加磁场可以改变三重态和单重态的能量差别。一般来说，在气体里的大多数原子中任两个原子都处在自旋是三重态的散射态上，有少量原子结合成自旋单重态的双原子分子，所以通过改变磁场大小可以使双原子分子态能量接近散射态。当散射态和分子态能量相同时，系统里发生 Feshbach 共振，此时原子的散射长度发散。在原子气体中，散射长度与原子之间的相互作用强度成正比。所以在有 Feshbach 共振的系统里，可以改变磁场来调节原子的散射长度和原子之间的相互作用强度。在 Feshbach 共振系统中，散射长度 a 随磁场 B 的变化关系如图 1-4 所示。

1998 年，Ketterle 实验组首先在钠系统中通过测量原子非弹性散射速率发现了 Feshbach 共振 [23]。实验中的原子气体都是被势阱束缚的亚稳系统，非弹性散射导致原子从系统中丢失，而丢失速率随散射长度的增加而增加，所以非弹性散

射速率的峰标志着 Feshbach 共振的位置。Ketterle 等在实验中发现原子丢失速率比理论估算要大许多，这也对实验上研究强相互作用区域造成了很大困难，因为在强相互作用区域很难有足够的时间来进行观测。2002 年，Wieman 实验组利用 Feshbach 共振使 ^{85}Rb 原子气体中的散射长度有一个方波似的变化，当散射长度稳定后他们发现原子数目在周期性的振荡，而振荡频率正是双原子分子的能量^[24]。由于粒子不能无中生有，惟一合理的解释是系统中粒子除了处在原子态外还可以处在双原子分子态，所以如果忽略粒子的丢失，总的粒子数是守恒的。当时还没有直接观测双原子分子的实验手段，这个实验成为证明系统中存在分子态的间接证据。

1.4 理想玻色气体中的 BEC

1.4.1 玻色分布和能态密度

对于处在热平衡的无相互作用理想玻色气体，温度 T 时处于量子态 ν 的平均粒子数由玻色分布函数给定，

$$f^0(\varepsilon_\nu) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_\nu - \mu) / kT] - 1} \quad (1-2)$$

其中 ε_ν 为量子态 ν 的能量， μ 为相应温度下气体的化学势。化学势 μ 作为总粒子数 N 和温度 T 的函数，由粒子数守恒确定，即

$$N = \sum_{\nu} f^0(\varepsilon_\nu) \quad (1-3)$$

实际计算中一般把对量子态求和换成对能量积分，相应引入能态密度概念，即单位能量区间内量子态的数目。例如粒子质量为 m ，体积为 V 的均匀气体的能态密度为

$$g(\varepsilon) = \frac{Vm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \varepsilon^{1/2} \quad (1-4)$$

而囚禁在三维谐振子势中气体的能态密度为

$$g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3} \quad (1-5)$$

其中 $\omega_i (i=1,2,3)$ 是在 x, y, z 三个方向的谐振频率。通常情况下能态密度可以表示成能量的幂函数形式

$$g(\varepsilon) = C_\alpha \varepsilon^{\alpha-1} \quad (1-6)$$

其中 C_α 是一个常量。上面两个例子分别对应于 $\alpha = 3/2$ 和 $\alpha = 3$ 。

利用能态密度，把(1-3)中的求和用积分代替，可得

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{\exp[(\varepsilon - \mu) / kT] - 1} \quad (1-7)$$

1.4.2 凝聚温度和凝聚比例

假设粒子最低能级的能量为 0，由(1-2)可知任何温度下必有 $\mu < 0$ ，以保证任何量子态的粒子数不为负。同时化学势随温度降低而升高，保持总粒子数守恒。当温度降到某一临界温度 T_c 时， μ 将趋于 0。临界温度可由下式定出

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{\exp(\varepsilon / kT_c) - 1} \quad (1-8)$$

温度低于 T_c 时，由(1-7)不可能得到负的化学势。产生这个矛盾的原因是，把(1-3)改写成(1-7)时，由于 $g(0) = 0$ ，故 $\varepsilon = 0$ 的项被弃去，即处于最低能级的粒子数在总粒子数中的贡献被忽略掉。在温度足够高时，处于最低能级的粒子数与总粒子数相比是个小量，将其忽略不会引起明显误差。然而当温度低于 T_c 时，粒子将尽可能占据最低能级，其占有数变得非常可观而不能忽略。因而当 $T < T_c$ 时，应该把最低能级和其它能级的粒子数分开计算，即

$$N = N_0(T) + \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{\exp(\varepsilon / kT) - 1} \quad (1-9)$$

$N_0(T)$ 为凝聚在最低能级的粒子数，在 $T < T_c$ 时与总粒子数 N 具有相同的量级，这种现象称为玻色—爱因斯坦凝聚， T_c 称为凝聚温度。

把(1-6)代入(1-8)，同时另 $x = \varepsilon / kT_c$ ，得到^[25]

$$N = C_\alpha (kT_c)^\alpha \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx \quad (1-10)$$

上式中的积分可用 Γ 函数和黎曼 (Riemann) ζ 函数表示，即

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha) \quad (1-11)$$

把(1-11)代入(1-10)得到 T_c 的表达式为

$$kT_c = \frac{N^{1/\alpha}}{[C_\alpha \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)]^{1/\alpha}} \quad (1-12)$$

对于密度为 $n = N/V$ 的三维均匀玻色气体， $\alpha = 3/2$ ， $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2 \approx 0.886$ ， $\zeta(3/2) \approx 2.612$ ，由(1-4)和(1-12)可得

$$kT_c = \frac{2\pi}{[\zeta(3/2)]^{3/2}} \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} \approx 3.31 \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m} \quad (1-13)$$

对于三维谐振子势中的玻色气体， $\alpha = 3$ ， $\Gamma(3) = 2$ ， $\zeta(3) \approx 1.202$ ，由(1-5)和(1-12)可得

$$kT_c = \frac{\hbar \bar{\omega} N^{1/3}}{[\zeta(3)]^{1/3}} \approx 0.94 \hbar \bar{\omega} N^{1/3} \quad (1-14)$$

其中 $\bar{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/3}$ 是三个谐振频率的几何平均。代入 k 和 \hbar 的具体数据，把 T_c 以 nK 为单位表示出来

$$T_c \approx 4.5 \left(\frac{\bar{f}}{100 \text{ Hz}} \right) N^{1/3} nK \quad (1-15)$$

其中 $\bar{f} = \bar{\omega} / 2\pi$ 。

利用(1-12)可以讨论低维玻色气体的凝聚性质。例如二维均匀气体， $\alpha = 1$ ， $\zeta(1) = \infty$ ，故在有限温度下不可能出现凝聚现象。然而如果把气体囚禁在二维谐振子势中，则 $\alpha = 2$ ， $\zeta(2)$ 为有限，气体将会在有限温度下出现凝聚。

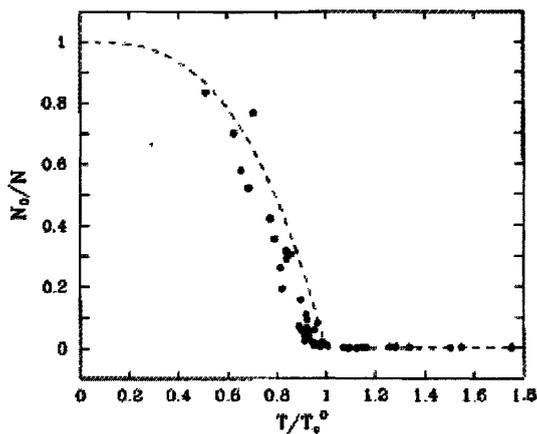


图 1-5 三维谐振子势中凝聚比例随温度变化的关系。虚线为理论曲线，圆点为文献[26]的实验结果。^[27]

由(1-9)，并利用 T_c 的表达式(1-12)，可求出 $T < T_c$ 时的凝聚比例为

$$\frac{N_0(T)}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^\alpha \quad (1-16)$$

图 1-5 显示了实验观察到的三维谐振子势中玻色气体的凝聚现象，可见理论结果跟实验数据大致吻合。

1.5 非理想玻色气体的基本理论

1.5.1 平均场理论：Gross-Pitaevskii (GP) 方程

这一节我们讨论粒子间存在相互作用的非理想玻色气体的平均场理论^[25]。BEC 实验的环境一般是温度极低 ($\sim \mu K$)，同时粒子密度非常小 ($\sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$)。在这样的条件下，粒子间的相互作用可近似看作低能极限下的 s 波散射。在动量表象中，这相当于两个粒子间的作用为常量 $U_0 = 4\pi\hbar^2 a / m$ ，其中 a 是散射长度， m 是粒子质量。而在坐标表象中，则相当于两个粒子间的相互作用势能为 $U_0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ ， \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 表示两个粒子的位置。在此近似下， N 粒子系统的多体哈密顿量写成

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right] + U_0 \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (1-17)$$

其中 $V(\mathbf{r})$ 描述系统所处外场的势能。当考察系统的基态时，可采用平均场近似，即假设零温下所有粒子都凝聚在同一单粒子态 $\phi(\mathbf{r})$ 上，整个系统的波函数相应地写成

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i) \quad (1-18)$$

$\phi(\mathbf{r})$ 归一化为 1

$$\int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^2 = 1 \quad (1-19)$$

$\phi(\mathbf{r})$ 所满足的方程可通过对能量泛函作变分得到。态(1-18)的能量为

$$E(\phi) = N \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{N-1}{2} U_0 |\phi(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (1-20)$$

当系统处于基态时， $\phi(\mathbf{r})$ 使(1-20)取极小值，即变分 $\delta(E - \mu N) = 0$ ，化学势 μ 是考虑到 $\phi(\mathbf{r})$ 所满足的归一化条件而引入的拉格朗日乘子。通过上述变分条件得到 $\phi(\mathbf{r})$ 所满足的方程为

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + N U_0 |\phi(\mathbf{r})|^2 \right) \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}) \quad (1-21)$$

该方程称为 Gross-Pitaevskii (GP) 方程^[28-30]。通过对它求解即可得到平均场近似下玻色凝聚体的波函数。

GP 方程的适用条件是：s 波散射长度远小于粒子平均距离，即气体足够“稀薄”，同时凝聚体中的粒子数远大于 1。可用无量纲量 $\bar{n}|a|^3$ 描述气体的稀薄程度，它表示体积 $|a|^3$ 内的粒子数，其中 \bar{n} 是气体的平均密度。实验中各种原子散射长度的通常取值为： $a = 2.75 \text{ nm}$ (^{23}Na)， $a = 5.77 \text{ nm}$ (^{87}Rb) 和 $a = -1.45 \text{ nm}$ (^7Li)^[31-33]。典型的粒子数密度为 $10^{13} \sim 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ，从而 $\bar{n}|a|^3$ 的值总是小于 10^{-3} 。当 $\bar{n}|a|^3 \ll 1$ 时，气体可称为稀薄的，或弱相互作用的。值得强调的是，“弱相互

作用”并不意味着相互作用的效应非常小。相互作用对系统的影响可通过跟动能的比较来说明。对谐振子势中的气体作一简单估算，用 ω_0 和 a_0 表示谐振子势的谐振频率和特征长度，则相互作用能 $E_{\text{int}} = NU_0\bar{n} \propto N^2|a|a_0^{-3}$ ，动能的数量级为 $N\hbar\omega_0$ ，故 $E_{\text{kin}} \propto Na_0^{-2}$ 。相互作用能和动能的比值为

$$\frac{E_{\text{int}}}{E_{\text{kin}}} \propto \frac{N|a|}{a_0} \quad (1-22)$$

可以看出，当粒子数足够大时，即使满足 $\bar{n}|a|^3 \ll 1$ ，相互作用能和动能的比值也可轻易地大于 1。这说明即使在稀薄气体中相互作用也能引起可观的非理想效应。

1.5.2 谐振子势中玻色气体的基态

BEC 实验中用来囚禁原子的外场可近似看作三维谐振子势，根据三个方向谐振频率的相对大小，原子云可形成球形、雪茄形和碟形等形状。这一小节我们讨论谐振子势中 GP 方程的求解^[34,35]。我们不妨先对原子云的空间尺度作一定性分析。为简单起见，我们考虑各向同性的谐振子势 $V = m\omega_0^2 r^2 / 2$ 。设原子云的空间尺度 $\sim R$ ，则单个粒子在外场中的势能 $\sim m\omega_0^2 R^2 / 2$ 。粒子数密度 $n \sim N / R^3$ ，单个粒子的相互作用能的量级为 $nU_0 \sim Na / R^3$ 。对于排斥相互作用 ($U_0 > 0$)，其效果是按 R^{-3} 提高了平衡时 R 的取值。当 Na 足够大时，动能对总能量的贡献可被忽略，让势能和相互作用能的量级相等，即可得出平衡时原子云的空间尺度

$$R \sim a_0 \left(\frac{Na}{a_0} \right)^{1/5} \quad (1-23)$$

以及单个粒子能量的量级

$$\frac{E}{N} \sim \hbar\omega_0 \left(\frac{Na}{a_0} \right)^{2/5} \quad (1-24)$$

可见 Na/a_0 是一个反映相互作用强度的无量纲量，在绝大多数 BEC 实验中，其

取值都远大于 1，故原子云的尺度都大于谐振子的特征长度 a_0 。

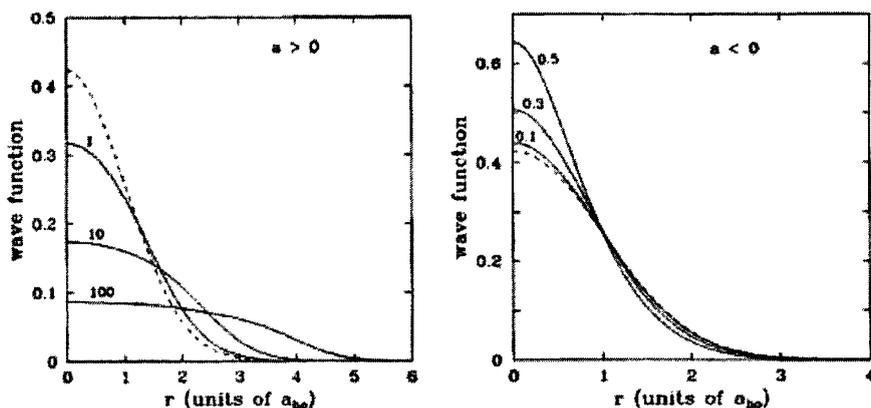


图 1-6 球形谐振子势中 GP 方程的数值解。图中实线代表相应 $N|a|/a_0$ 取值的解，虚线代表理想气体的解^[27]。

当原子云的尺度足够大，求解 GP 方程(1-21)时可把动能项略去，得到

$$\left(V(\mathbf{r}) + NU_0 |\phi(\mathbf{r})|^2 \right) \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}) \quad (1-25)$$

这一近似称为 Thomas-Fermi 近似。(1-25)的解可表示为

$$n(\mathbf{r}) = N |\phi(\mathbf{r})|^2 = [\mu - V(\mathbf{r})] / U_0 \quad (1-26)$$

原子云的边界由 $V(\mathbf{r}) = \mu$ 给出，边界以外 $\phi = 0$ 。而 μ 则由 $\phi(\mathbf{r})$ 的归一化条件定出。Thomas-Fermi 近似的物理意义是，在原子云的任何地方加入一个粒子所需的能量都相等。

如果动能项的贡献不能忽略，例如原子间为吸引相互作用，则需要对 GP 方程(1-21)进行数值求解，得出凝聚体的波函数 $\phi(\mathbf{r})$ ^[36-38]。图 1-6 画出了球形谐振子势中 GP 方程的数值解。左图是原子间为排斥相互作用的波函数，可以看到，相互作用使原子云向外扩展，从而降低了中心处的原子密度。对于原子间的吸引相互作用，情况则刚好相反。

1.5.3 非平均场理论

由平均场理论推导出来的 GP 方程，能很好的描写零温下 BEC 的静态和动力

学性质。然而该方程的出发点，即对多体波函数的假设(1-18)存在一个明显的缺点，它忽略了粒子间的关联效应。这在某些情况下，例如在临界点附近粒子涨落很大时，会引起比较大的误差。还有，GP 方程的解描述的是系统基态或者集体激发态，但有时候我们希望研究跟系统基态靠得很近的一些低激发态的性质，这时 GP 方程就显得无能为力了。

针对平均场理论的一些不足，人们又引入了各种方法研究特定情形下 BEC 的性质，例如局域密度近似等方法^[39]。本文后续部分将详细讨论另一种求解多体哈密顿量的方法，其特点是在 Fock 空间里对多体哈密顿量直接对角化。跟平均场理论相比，由于没有事先对解的形式作出假设，该方法的结果在一定程度上是精确的，它包含了粒子间相互作用的各种信息，可以利用它来研究粒子间的关联效应，也可以解析的给出长时间范围内系统的动力学演化性质。通过对角化，我们得到的不单是系统的基态，还有整套低激发谱，这对于研究系统在外界扰动下的行为是非常有帮助的。两种不同方法求出的基态还可以方便地进行比较，从而有助我们深入理解 GP 方程的物理内涵和适用范围。

1.6 BEC 的应用前景

BEC 最显著的应用，是促进了“原子激光器”(atom laser)的出现^[40, 41]。原子激光器实际上是“相干原子束发生器”，它发射的原子束具有高度相干的特性，束中所有原子处于同一量子态上；同时，束中原子的能量处于单模，从能量分布角度讲具有极好的“单色性”；另外，发射出的原子可以准直行进相当长的距离而无明显发散，即“指向性”好。从这三点看，与激光很相似，因此称为原子激光器。它的出现具有十分重大的意义，正像激光大大改进了光学实验一样，原子激光器可以大大改进原子物理学的实验。比如，它将提高原子钟的精确度，提高基本物理常数的测量精度等等。原子激光器还将应用在纳米技术上，以极高的精确度将原子沉积在固体表面，实现原子制版技术。原子激光器的出现是开拓性的，它是第一种物质波的激射器，成为 21 世纪科技发展的新亮点。

第2章 旋量玻色—爱因斯坦凝聚

2.1 引言

玻色—爱因斯坦凝聚是低温下物质聚集的一种独特形式，其中宏观比例的玻色子占据着量子力学基态。实验中凝聚体通常被囚禁在磁阱（magnetic trap）里面，这种做法的一个缺点是，自旋翻转将导致原子逸出。因而囚禁在磁阱里的凝聚体失去了自旋自由度，其状态由标量函数描写。光学阱（optical trap）的出现为研究凝聚体的自旋性质开辟了道路。光学阱中原子自旋方向可以自由翻转，自旋自由度被释放，对“旋量(spinor)”凝聚体的研究成为可能，相应地凝聚体的状态由矢量函数描写。凝聚体中自由度的释放带来了丰富的物理现象，如自旋量子纠缠（quantum entanglement）^[42, 43]，凝聚体相干破碎（coherent fragmentation）^[44]，自旋波传播^[45]等等。当前国际学术界上受到广泛关注的一个领域是旋量凝聚体的自旋演化特性。自旋的动力学演化是旋量 BEC 的基本现象之一，它所展现的量子相干效应是 BEC 特性的最直接反映，对它的研究有助于我们更深入理解 BEC 的本质，同时也为相关领域，如量子信息等的研究提供灵感。以下三章我们将把目光主要放在旋量凝聚体的自旋演化特性上。本章简要介绍旋量 BEC 的实验进展，主要理论基础和自旋演化相关理论研究概况。

2.2 旋量 BEC 实验进展

利用磁阱囚禁原子限制了 BEC 的研究，因为只有“weak-field seeking”的原子被囚禁，“strong-field seeking”的原子由于非弹性散射而逸出。而且如果同时囚禁不同自旋态的原子，则自旋弛豫也会造成原子严重的流失。如果使用基于光偶极力的光学阱作为囚禁原子的工具，则可克服上述缺点，使得同时囚禁不同自旋态的原子成为可能。光学阱的一般原理是，利用红外失谐的激光束聚焦产生一

个辐射场，原子在辐射场中受到指向中心的偶极力作用而被捕获。1998 年，Ketterle 领导的 MIT 研究组成功利用光学阱实现了纳原子和铷原子的旋量 BEC，开创了该研究领域的先河^[46, 47]。文献[47]描述了铷原子实验中观察到的自旋驰豫现象，如图 2-1 所示。实验中 $F=1$ 的三态铷原子被冷却到凝聚温度以下，然后置于光学阱中驰豫到自旋基态。在两次独立的实验中，铷原子分别从两种初态（上图：全部原子处于 $m_F=0$ ；下图：各 50% 的原子处于 $m_F=\pm 1$ ）经过 5 s 左右的驰豫时间，到达相同的平衡态（基态）。

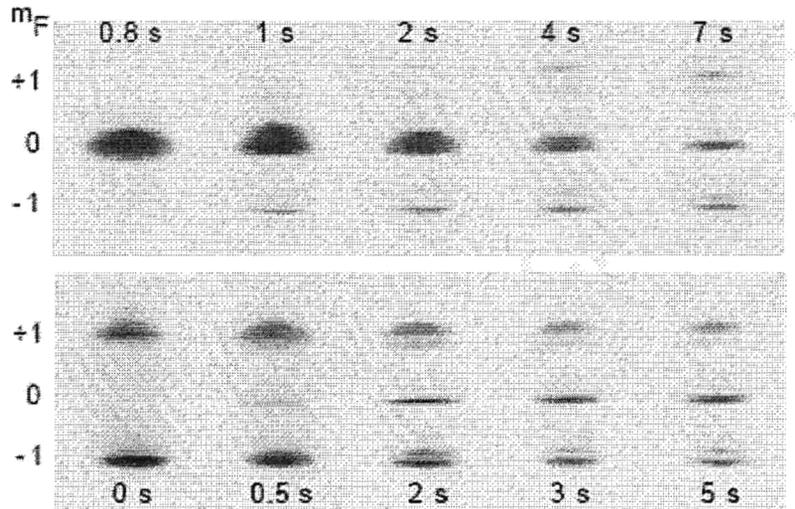


图 2-1 三态铷原子旋量 BEC 实验中观察到的自旋驰豫现象^[47]。

随着旋量凝聚体在实验上获得成功，马上受到国际上各实验室和研究组的重视，旋量凝聚体的自旋演化特性被广泛研究^[48-56]。实验上，各自旋分量原子数为任意比例的初态都可制备，随后在光学阱中通过散射演化到平衡态，例如自旋为 1 和 -1 的两个原子散射后自旋均变为 0，于是各自旋分量上的原子数随时间强烈振荡，展现出丰富多样的演化模式。通过外加偏置磁场，还可实现对演化过程的调制，实验中可观察到更多独特的现象。

文献[48]测量了三态铷原子在不同条件下各自旋分量占有比例随时间的演化。不加偏置磁场的实验结果如图 2-2 所示，初始各分量占有比例为 $\rho_{(1,0,-1)} \approx (0, 3/4, 1/4)$ ，随后约 0.5 s 的演化中，观察到各分量占有比例呈类似正弦模式振荡。随着时间推移振荡逐渐衰减，系统演化到平衡态。当外加偏置磁场后，演化模式发生明显变化，如图 2-3 所示。初始状态为 $\rho_{(1,0,-1)} \approx (0, 1/2, 1/2)$ ，

在不同强度的偏置磁场下，振荡的周期发生明显改变，磁场越强，周期越小。

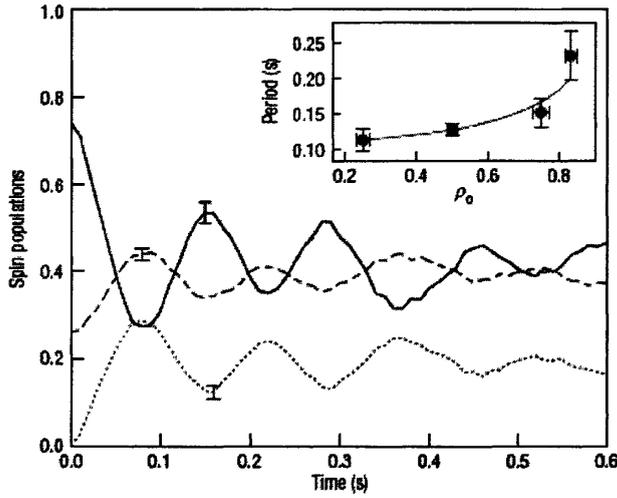


图 2-2 没有偏置磁场时三态铷原子各自旋分量占有比例随时间的演化^[48]。实线，虚线和点线分别代表自旋 0, -1 和 +1 分量。

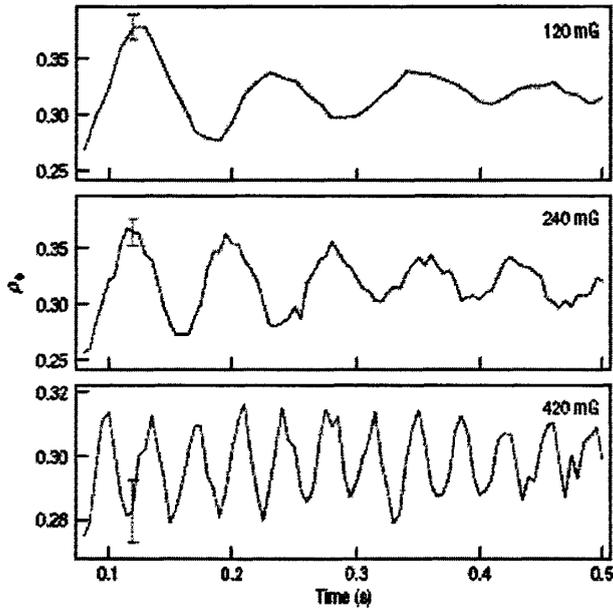


图 2-3 不同偏置磁场下三态铷原子自旋 0 分量占有比例随时间的演化^[48]。

文献[49]测量了三态铷原子从初态 $\rho_{(1,0,-1)} = (0,1,0)$ 开始，在不同偏置磁场下演化 3 s 后的自旋 0 分量占有比例，如图 2-4 所示。可以看到，当偏置磁场为强场 ($B > 700$ mG) 时，自旋演化将受到严重抑制，原子基本都停留在初始状态，发

生自旋翻转的几率非常小。这跟本文后面的理论结果是一致的。

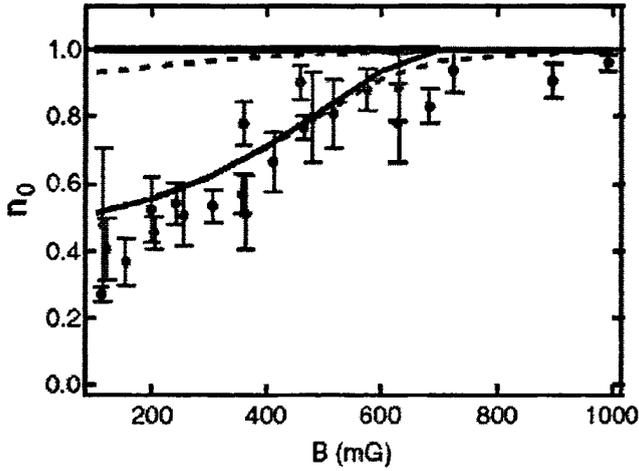


图 2-4 三态铷原子从初态 $\rho_{(1,0,-1)} = (0,1,0)$ 开始, 在不同偏置磁场下演化 3 s 后的自旋 0 分量占有比例^[49]。

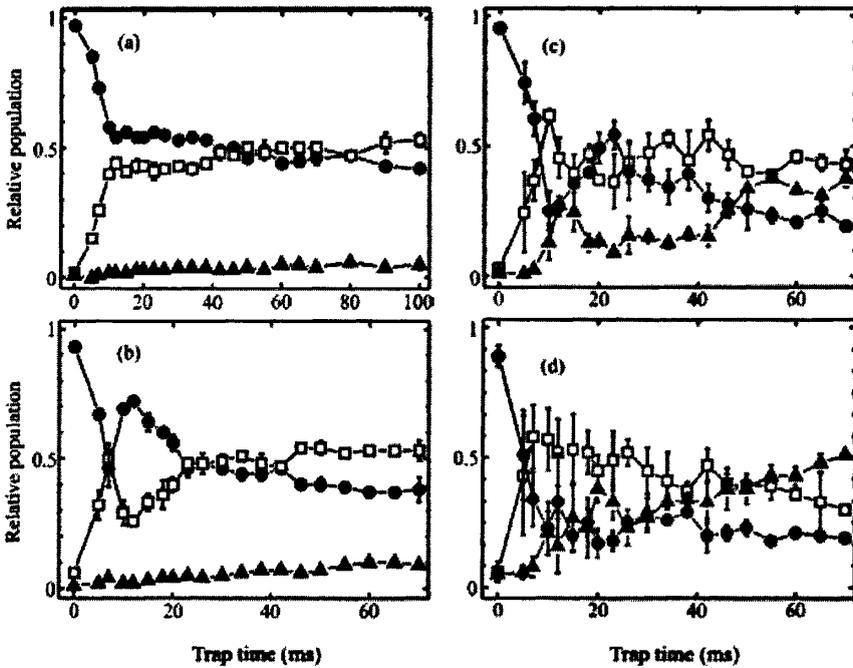


图 2-5 五态铷原子在不同外磁场下各自旋分量占有比例随时间的演化^[50]。实心圆, 空心方形和实心三角形分别代表 $m_F = 0, \pm 1, \pm 2$ 。磁场分别为 1.5, 0.75, 0.3 和 0.1G。

对于 $F = 2$ 的五态铷原子, 文献[50]中的实验同样观察到自旋分量随时间的振荡, 如图 2-5 所示。偏置磁场较强时 (a, b), 振荡相对较弱, 凝聚体很快到达

平衡态, $m_F = 0$ 和 $m_F = \pm 1$ 各约占总原子数的一半, $m_F = \pm 2$ 的占有比例几乎为零, 说明强磁场制约了原子通过散射向高自旋分量的跃迁。偏置磁场调弱后 (c, d), 振荡显著加强, 同时 $m_F = \pm 2$ 的占有比例也有所提升。

文献[51]测量了自旋振荡的周期和振幅与偏置磁场强度的关系, 如图 2-6 所示。理论预言 (实线) 当磁场约为 $28 \mu\text{T}$ 时, 振荡周期将趋于无穷。实验数据表明在该位置振荡周期和振幅确实存在峰值, 从而验证了单模近似 (SMA) 理论的适用性。

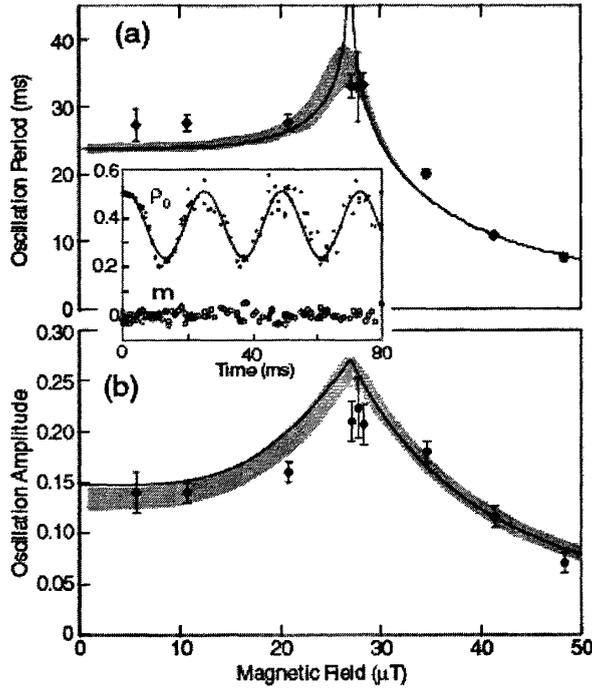


图 2-6 自旋振荡的周期和振幅随外加磁场的变化关系^[51]。

2.3 旋量 BEC 基本理论

2.3.1 自旋相关的原子相互作用^[57, 58]

我们知道, 处于基态的碱金属原子的电子结构是: 一个最外层电子位于 s 轨道, 其它内层电子占据满壳层。原子的核自旋与电子自旋通过超精细相互作用

(hyperfine interaction) 耦合起来。电子的自旋量子数为 $S = 1/2$ ，核自旋量子数为 I ，则耦合成的总自旋量子数 F 有两种可能， $F = I \pm 1/2$ 。以 ^{23}Na 和 ^{87}Rb 为例， I 均为 $3/2$ ，故 $F = 1$ 或 2 。 $F = I + 1/2$ 的能级比 $F = I - 1/2$ 的能级高，两者间的能量差别比通常的势阱频率大好几个数量级。因而在 BEC 环境下，两个 $F = I - 1/2$ 的原子散射后不改变各自的 F ， $F = I + 1/2$ 的原子散射后则有可能变成 $F = I - 1/2$ 。这样，光学阱中达到平衡的 BEC 原子将处于 $F = I - 1/2$ 的总自旋态。对于 ^{23}Na 和 ^{87}Rb ，基态时 $F = 1$ 。

考虑 $F = 1$ 的原子散射过程，一个 $m_F = 1$ 的原子和另一个 $m_F = -1$ 的原子散射后可能变成两个 $m_F = 0$ 的原子，反之亦然。转动对称性限制了表征原子相互作用所需的参数数目，两个基态 $F = 1$ 的全同玻色原子耦合成的总自旋只能为 0 或 2 ，故可用 $U_0 = 4\pi\hbar^2 a_0 / m$ 和 $U_2 = 4\pi\hbar^2 a_2 / m$ 两个参数表征低能极限下原子间的散射，其中 a_0 和 a_2 为相应的散射长度。两个 $F = 1$ 原子的有效相互作用可写成

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(U_0 P_0 + U_2 P_2) \quad (2-1)$$

其中 P_0 和 P_2 是把两体自旋波函数投影到两个总自旋 (0 和 2) 本征态的算符。为了便于计算，可把投影算符表示成原子自旋算符 (\mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2) 的函数。由算符关系 $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2$ 可得

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \frac{S(S+1)}{2} - 2 \quad (2-2)$$

上式应用了 $S_1 = S_2 = 1$ 。标量积 $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ 的本征值为 1 ($S = 2$) 或 -2 ($S = 0$)，因而投影算符可表示成

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1 - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{3} \\ P_2 &= \frac{2 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{3} \end{aligned} \quad (2-3)$$

原子间的相互作用可相应写成

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(U_0 P_0 + U_2 P_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(c_0 + c_2 \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) \quad (2-4)$$

其中 $c_0 = (U_0 + 2U_2)/3$ ， $c_2 = (U_2 - U_0)/3$ 。原子间的相互作用分成与自旋无关 (c_0

项)和与自旋有关(c_2 项)的两部分之和。根据实验测量, ^{23}Na 的散射长度为 $a_2 = (52 \pm 5)a_B$ 和 $a_0 = (46 \pm 5)a_B$, a_B 为玻尔半径,相应 $c_2 > 0$,其旋量凝聚体表现反铁磁性。 ^{87}Rb 的散射长度为 $a_2 = (107 \pm 4)a_B$ 和 $a_0 = (110 \pm 4)a_B$,相应 $c_2 < 0$,其旋量凝聚体表现铁磁性。

2.3.2 单模近似 (single-mode approximation, SMA) ^[59]

考虑囚禁在光学阱中的 $F = 1$ 旋量凝聚体,原子间的相互作用由(2-4)描述,则其哈密顿量的二次量子化形式可分成对称和非对称两部分, $H = H_S + H_A$,其中

$$H_S = \sum_{\alpha} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger} (\hat{T} + V_T) \hat{\Psi}_{\alpha} + \frac{c_0}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger} \hat{\Psi}_{\beta}^{\dagger} \hat{\Psi}_{\alpha} \hat{\Psi}_{\beta} \quad (2-5)$$

$$\begin{aligned} H_A = \frac{c_2}{2} \int d\mathbf{r} & (\hat{\Psi}_1^{\dagger} \hat{\Psi}_1^{\dagger} \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_1 + \hat{\Psi}_{-1}^{\dagger} \hat{\Psi}_{-1}^{\dagger} \hat{\Psi}_{-1} \hat{\Psi}_{-1} \\ & + 2\hat{\Psi}_1^{\dagger} \hat{\Psi}_0^{\dagger} \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_0 + 2\hat{\Psi}_{-1}^{\dagger} \hat{\Psi}_0^{\dagger} \hat{\Psi}_{-1} \hat{\Psi}_0 \\ & - 2\hat{\Psi}_1^{\dagger} \hat{\Psi}_{-1}^{\dagger} \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_{-1} + 2\hat{\Psi}_0^{\dagger} \hat{\Psi}_0^{\dagger} \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_{-1} \\ & + 2\hat{\Psi}_1^{\dagger} \hat{\Psi}_{-1}^{\dagger} \hat{\Psi}_0 \hat{\Psi}_0) \end{aligned} \quad (2-6)$$

$\hat{\Psi}_{\kappa}$ ($\kappa = -1, 0, 1$) 是自旋态 $|F = 1, m_F = \kappa\rangle$ 的湮灭算符, \hat{T} 是动能算符, V_T 是光学阱的等效势能。 H_S 对于调换任意两个自旋下标保持不变。

平均场近似下,凝聚体的基态可表示成 $(\psi_{-1}, \psi_0, \psi_1)^T$, ψ_i 表示自旋 i 分量的波函数。由(2-5)、(2-6)可求得 ψ_i 所满足的非线性薛定谔方程组

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\psi}_{-1} &= \hat{L} \psi_{-1} + c_2 N (\psi_0^2 \psi_1^* + |\psi_{-1}|^2 \psi_{-1} + |\psi_0|^2 \psi_{-1} - |\psi_1|^2 \psi_{-1}) \\ i\hbar \dot{\psi}_0 &= \hat{L} \psi_0 + c_2 N (2\psi_1 \psi_{-1} \psi_0^* + |\psi_{-1}|^2 \psi_0 + |\psi_1|^2 \psi_0) \\ i\hbar \dot{\psi}_1 &= \hat{L} \psi_1 + c_2 N (\psi_0^2 \psi_{-1}^* + |\psi_1|^2 \psi_1 + |\psi_0|^2 \psi_1 - |\psi_{-1}|^2 \psi_1) \end{aligned} \quad (2-7)$$

其中

$$\hat{L} = \hat{T} + V_T + c_0 N (|\psi_{-1}|^2 + |\psi_0|^2 + |\psi_1|^2) \quad (2-8)$$

ψ_i 的归一化关系为

$$\int (|\psi_{-1}|^2 + |\psi_0|^2 + |\psi_1|^2) d\mathbf{r} = 1 \quad (2-9)$$

如果 $|c_0| \gg |c_2|$, 则 H_S 在 H 中占主导地位, 而 H_S 对于自旋分量的交换是不变的, 故可把各自旋分量的空间波函数近似取成相同的 $\phi(\mathbf{r})$, 即所谓的单模近似 (SMA)。 $\phi(\mathbf{r})$ 可通过求解 H_S 的 GP 方程的基态得到

$$(\hat{T} + V_T + c_0 N |\phi|^2) \phi = \mu \phi \quad (2-10)$$

其中 N 为凝聚体中的总粒子数, μ 为化学势。

在单模近似下, 零温时的湮灭算符可写成

$$\hat{\Psi}_\kappa \approx \hat{a}_\kappa \phi(\mathbf{r}) \quad \kappa = 0, \pm 1 \quad (2-11)$$

其中 \hat{a}_κ 是自旋空间中的湮灭算符。利用(2-10)和(2-11), 可求得自旋空间中的等效哈密顿量为

$$H_s = \mu \hat{N} - c'_0 \hat{N}(\hat{N} - 1) \quad (2-12)$$

$$\begin{aligned} H_a = c'_2 (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_{-1} \hat{a}_{-1} + 2\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_0 \\ + 2\hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-1} \hat{a}_0 - 2\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_{-1} + 2\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_{-1} \\ + 2\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0) \end{aligned} \quad (2-13)$$

其中 $c'_i \equiv (c_i / 2) \int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^4$ ($i = 0, 2$)。

单模近似的好处是显而易见的, 我们可以避开求解方程组(2-7), 把坐标空间和自旋空间分开考虑, 这样物理意义非常明确。利用(2-13)可以方便的研究跟自旋有关的各种现象, 例如各自旋分量原子数随时间的演化等。实验数据表明, 钠和铷都满足单模近似的适用条件, 即 $|c_0| \gg |c_2|$, 因而单模近似在碱金属原子旋量 BEC 理论研究中得到广泛应用。

2.3.3 母配分系数 (fractional-parentage coefficients, FPC) ^[60]

被囚禁的旋量凝聚体哈密顿量中跟自旋有关的部分可以写成

$$\begin{aligned}
 H_{spin} &= c_2 \sum_{i < j} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j = \frac{c_2}{2} \left[\left(\sum_i \mathbf{F}_i \right)^2 - \sum_i \mathbf{F}_i^2 \right] \\
 &= \frac{c_2}{2} \left(\mathbf{S}^2 - \sum_i \mathbf{F}_i^2 \right)
 \end{aligned} \tag{2-14}$$

其中 \mathbf{S} 表示系统的总自旋算符，求和对原子进行。可以看到，凝聚体的总自旋及其 Z 分量都是守恒的。目前流行的理论都只是考虑了 S_z 的守恒，而没有考虑 S 的守恒，因而只是近似的理论。精确的理论要求同时考虑 S 和 S_z 守恒，需要引进相关的数学技巧。我校鲍诚光教授通过引入母配分系数（fractional-parentage coefficients, FPC）系统的解决了该问题。

凝聚体的 S 守恒本征波函数可以一般地表示成

$$\Psi_S = \sum_{\lambda, i} f_{S\lambda i} \chi_{S, \lambda i} \tag{2-15}$$

其中 $\chi_{S, \lambda i}$ 是 S 守恒的总自旋波函数，同时也是置换群 λ 表示的第 i 个基函数， $f_{S\lambda i}$ 是具有相应对称性的空间波函数，对 i 求和保证了 Ψ_S 对于粒子置换是全对称的。当凝聚体处于基态时，所有原子都凝聚到同一空间状态 $\phi_S(\mathbf{r})$ ，因而只需考虑置换群的 $\lambda = \{N\}$ 表示（其杨图只有一行）。为了求出 $\lambda = \{N\}$ 的 S 守恒总自旋态的数目 $M(S)$ ，我们先求相应的 S_z 守恒态的数目 $K(S_z)$ 。为简单见，假设每个原子的自旋为 1。在每个 S_z 本征态中， $F_z = 1, -1, 0$ 三个分量的原子数为 $S_z + i, i, N - S_z - 2i$ 。由 i 的可能取值定出 $K(S_z)$ 为

$$K(S_z) = 1 + \frac{1}{2} \left(N - S_z - \frac{1 - (-1)^{N - S_z}}{2} \right) \tag{2-16}$$

由上式可得

$$M(S) = K(S) - K(S+1) = \frac{1 + (-1)^{N-S}}{2} \tag{2-17}$$

上式说明只有 $N - S$ 为偶数时，才能存在唯一的全对称 S 总自旋态。相应地把 $\chi_{S, \{N\}}$ 表示成 $\mathcal{G}_S^{[N]}$, $S = N, N - 2, N - 4, \dots$ 。

计算时常常需要从 $\mathcal{G}_S^{[N]}$ 中把一个粒子的状态抽出来。假设 $\mathcal{G}_S^{[N-1]}$ 已经知道，则

$g_s^{[N]}$ 可以展开成

$$g_s^{[N]} = a_s^{[N]} \{g_{s+1}^{[N-1]} \chi(N)\}_s + b_s^{[N]} \{g_{s-1}^{[N-1]} \chi(N)\}_s \quad (2-18)$$

其中 $\chi(N)$ 表示第 N 个粒子的单粒子态, $a_s^{[N]}$ 和 $b_s^{[N]}$ 为待定系数。在(2-18)基础上再把第 $N-1$ 个粒子的状态抽出来, 考虑到交换第 N 和第 $N-1$ 个粒子不改变系统的状态, 可得 $a_s^{[N]}$ 和 $b_s^{[N]}$ 满足以下迭代关系

$$\begin{aligned} a_s^{[N]} &= \gamma_s^N \frac{\sqrt{2S-1}}{S\sqrt{2S+1}} / b_{s+1}^{[N-1]} \\ b_s^{[N]} &= \gamma_s^N \frac{\sqrt{2S+3}}{(S+1)\sqrt{2S+1}} / a_{s-1}^{[N-1]} \end{aligned} \quad (2-19)$$

其中 γ_s^N 为待定系数。连同归一化关系

$$(a_s^{[N]})^2 + (b_s^{[N]})^2 = 1 \quad (2-20)$$

(2-19)、(2-20)的解有以下简单形式

$$\begin{aligned} a_s^{[N]} &= \left[\frac{(1+(-1)^{N-s})(N-S)(S+1)}{2N(2S+1)} \right]^{1/2} \\ b_s^{[N]} &= \left[\frac{(1+(-1)^{N-s})S(N+S+1)}{2N(2S+1)} \right]^{1/2} \\ \gamma_s^N &= S(S+1) \left[\frac{(N-S)(N+S+1)}{N(N-1)(2S+3)(2S-1)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2-21)$$

$a_s^{[N]}$ 和 $b_s^{[N]}$ 称为母配分系数 (fractional-parentage coefficients, FPC)。利用母配分系数可以方便的求出总自旋态之间矩阵元的解析形式, 因而成为研究旋量系统的有力工具。文献[61, 62]中, 作者即是利用 FPC 求解了旋量 BEC 的基带和第一激发带结构。

2.4 自旋演化的平均场理论

在旋量凝聚体中, 原子通过相互作用在各自旋分量之间跃迁, 形成丰富多样的演化过程, 受到实验和理论科学家们的强烈关注。理论方面, 目前被广泛使用的研究方法是基于单模近似的平均场理论^[63-76]。

考虑 $F=1$ 的旋量凝聚体，并有外磁场存在。在单模近似下，自旋三个分量具有共同的空间波函数 $\phi(\mathbf{r})$ ，可由方程(2-10)或作 Thomas-Fermi 近似定出。平均场理论进一步假设所有原子都凝聚到同一自旋状态，由三分量的自旋波函数 ($\xi_{0,\pm}$) 描写，它们满足以下非线性薛定谔方程组^[63]

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\xi}_{\pm} &= E_{\pm}\xi_{\pm} + c[(\rho_{\pm} + \rho_0 - \rho_{\mp})\xi_{\pm} + \xi_0^2\xi_{\mp}^*] \\ i\hbar\dot{\xi}_0 &= E_0\xi_0 + c[(\rho_+ + \rho_-)\xi_0 + 2\xi_+\xi_-\xi_0^*] \end{aligned} \quad (2-22)$$

其中 $c = c_2 N \int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^4$ ， $\rho_i = |\xi_i|^2$ ， $E_{0,\pm}$ 为磁场中各分量的塞曼能级。考虑到粒子数和磁化率 ($m = (N_+ - N_-)/N$) 守恒，即 $\sum_i \rho_i = 1$ 和 $\rho_+ - \rho_- = m$ ，令 $\xi_j = \sqrt{\rho_j} \exp(-i\theta_j)$ ，(2-22)可改写为

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_0 &= \frac{2c}{\hbar} \rho_0 \sqrt{(1-\rho_0)^2 - m^2} \sin\theta \\ \dot{\theta} &= -\frac{2\delta}{\hbar} + \frac{2c}{\hbar} (1-2\rho_0) + \left(\frac{2c}{\hbar}\right) \frac{(1-\rho_0)(1-2\rho_0) - m^2}{\sqrt{(1-\rho_0)^2 - m^2}} \cos\theta \end{aligned} \quad (2-23)$$

其中 $\theta = \theta_+ + \theta_- - 2\theta_0$ 为相对位相， $\delta = (E_+ + E_- - 2E_0)/2 \propto B^2$ 。(2-23)即为平均场理论框架下旋量 BEC 自旋演化的动力学方程。只要给定初态，原则上可通过求解(2-23)得到任意时刻各自旋分量的占有比例及位相，从而得出凝聚体自旋相干演化的信息。

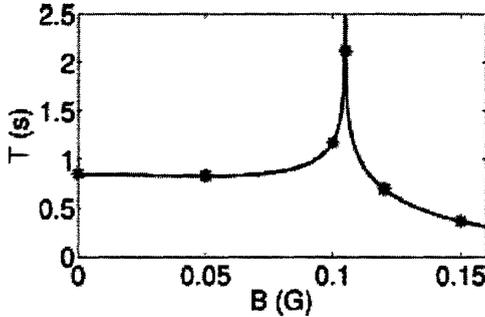


图 2-7 ^{87}Rb 凝聚体自旋演化周期 T 与外磁场 B 的关系^[63]。

(2-23)同时也是经典非刚性摆的动力学方程，因而 ρ_0 随时间的振荡可与非刚性摆作一类比。文献[63]通过求解(2-23)得到 ρ_0 振荡周期与磁场 B 的关系，如图 2-7 所示。图中实线表示平均场理论的预言， B 较小时，振荡周期 T 几乎不随 B

而变, 当 B 达到某一临界值时, T 趋于无穷, 随后 T 随 B 增大而减小。这种现象相当于摆的周期与能量的关系。能量较小时, 摆作近似简谐的小幅振动, 此时周期与能量无关。随着能量逐步增大, 摆幅越来越大, 振动的非线性加强, 周期也增大。当能量增大到刚好使摆到达最高点, 摆将停下来, 处于非稳平衡, 即周期趋于无穷。随着能量进一步增大, 摆的转速越来越大, 相应地周期越来越小。

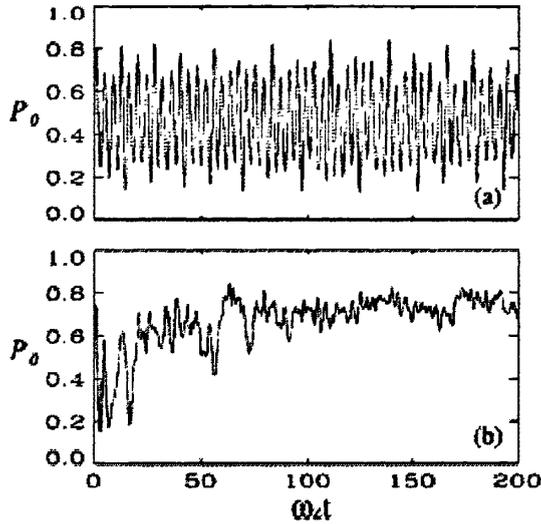


图 2-8 存在纵向均匀磁场时自旋 0 分量占有比例的演化^[64]。(a) $B_l = 0.1G$, (b) $B_l = 0.2G$ 。 $N = 20000$, 初始时 $\rho_1 = \rho_0 = \rho_{-1} = 1/3$, $\theta = \pi/2$ 。

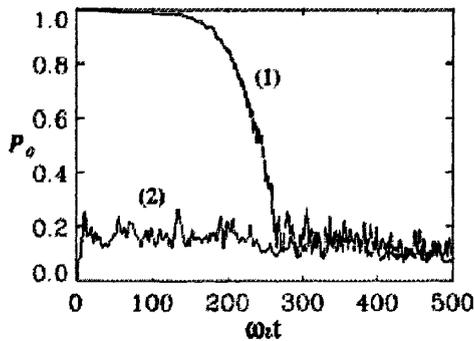


图 2-9 存在纵向磁场梯度时自旋 0 分量占有比例的演化^[64]。
 $B_0 = 0.2G$, $B_l = 0.2G/cm$, 初态为 (1) $\rho_0 = 0.998, \rho_1 = \rho_{-1} = 0.001$,
 (2) $\rho_0 = 0.001, \rho_1 = \rho_{-1} = 0.4995$ 。

利用平均场理论,文献[64]讨论了雪茄形 BEC 在各种磁场模式下的自旋演化特点。图 2-8 显示了存在纵向均匀磁场时自旋 0 分量占有比例的演化,初始时各分量被均匀占有。弱磁场对演化的影响很小,如 (a) 所示,占有比例作规则振荡,频率取决于位相差。强磁场下,如 (b) 所示,振荡随时间衰减,频率也不依赖于位相,0 分量占有比例提高,这是由于在磁场里一对自旋为 0 的原子的塞曼能低于一正一负两个原子的塞曼能,磁场足够强时这种差别非常显著。图 2-9 显示了存在纵向磁场梯度时的自旋演化,可以看到,两个差别巨大的初态最后都演化到相同的平衡态。然而从全部占据 0 分量的初态开始,将先保持这个状态一段时间,然后才突然下降到平衡位置,这显示了亚稳态的存在。

平均场理论能很好的解释自旋演化过程中的相干效应,对于振荡周期与外磁场的关系也能作出定性相符的预言。然而作为一个近似的理论,不可避免的存在一些缺点,例如不能给出描述演化过程的一般性的解析表达式,不能描述长时间的演化特征等等。这些缺陷将由新的理论形式来弥补,将在下一章详细讨论。

2.5 小结

本章简要介绍了旋量 BEC 的实验和理论研究进展,重点放在对自旋演化的研究。实验表明自旋自由度的释放带来丰富多彩的物理现象,原子间的相互作用使得原子在各自旋分量之间跃迁,形成低温下独特的演化过程。与标量 BEC 相比,旋量 BEC 需要用三分量 ($F=1$) 的波函数描述凝聚体的状态,这将导致复杂的理论形式。考虑到 BEC 的特点,引入单模近似理论,使得坐标和自旋空间可以分开讨论,便于研究我们关心的跟自旋有关的问题。对于描述自旋演化,平均场理论给出了类似经典非刚性摆的动力学方程,该方程能很好的描述演化过程中的相干效应。通过引入总自旋守恒和总自旋态的概念,并利用母配分系数,则可建立起一套描述旋量系统的更为合理且精确的理论。

第3章 磁场中无极化旋量凝聚体的自旋演化

3.1 引言

平均场理论对自旋演化的描述取得一定的成功，特别在描述演化的相干特性以及振荡周期如何随外磁场变化等方面，理论预言与实验结果符合得相当好。然而，平均场理论对凝聚体的自旋波函数作了近似假设，其后果是一些更为丰富和复杂的演化模式和动力学行为无法体现出来。平均场理论的另一个严重弱点是，不能给出系统地指导演化过程的解析表达式。为了克服上述不足，本文提出一种基于严格对角化哈密顿量的方法来研究自旋演化问题。可以看到，对于我们关心的跟自旋有关的性质，这种方法得出的结果是精确和解析的，包含了所有可能的演化模式。本章首先介绍该方法的理论形式，然后详细讨论无极化凝聚体在各种磁场条件下的自旋演化特性，最后对两种方法各自特点作一对比。

3.2 磁场中旋量凝聚体的哈密顿量及其解

我们考虑自旋为 1 ($F=1$) 的 N 粒子玻色冷原子气体，原子间的相互作用为

$$U_{ij} = (c_0 + c_2 \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j) \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (3-1)$$

\mathbf{F}_i 为原子 i 的自旋算符。原子被囚禁在势阱里，同时施加偏置磁场，并以磁场方向为 Z 轴方向，则系统的多体哈密顿量可表示成

$$H = \sum_i (\hat{T}_i + V_T) + \sum_{i<j} U_{ij} + q \sum_i F_{zi}^2 \quad (3-2)$$

第一项是跟自旋无关的动能和囚禁势能，第二项是原子的相互作用能，第三项是磁场引起的二次塞曼效应，其中 F_{zi} 表示原子 i 的自旋 Z 分量。由于(3-1)保证总磁化守恒，所以线性塞曼项 ($p \sum_i F_{zi}$) 不影响系统的动力学行为，在哈密顿量

中作为常数而不被考虑。第三项中， $q = (E_+ + E_- - 2E_0)/2$ ，是三个塞曼能级的能量差，它跟磁场 B 的关系为

$$q = \frac{\mu_B^2 B^2}{\hbar^2 E_{HFS}} \quad (3-3)$$

其中 μ_B 为玻尔磁子， E_{HFS} 为超精细能级分裂 (hyperfine splitting)。针对目前实验上多以钠和铷等碱金属原子为研究对象，我们考虑(3-1)中 $|c_0\rangle \gg |c_2\rangle$ 的情形，此时单模近似 (SMA) 的适用条件被满足。在 SMA 下，所有原子都凝聚到相同的归一化空间波函数 $\phi(\mathbf{r})$ ，相应地可以从(3-2)提取出我们关心的只与自旋有关的有效哈密顿量

$$H_{spin} = 2g \sum_{i<j} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j + q \sum_i F_{zi}^2 \quad (3-4)$$

其中

$$g = \frac{c_2}{2} \int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^4 \quad (3-5)$$

考虑到

$$\hat{S}^2 \equiv \left(\sum_i \mathbf{F}_i \right)^2 = \sum_i F_i^2 + 2 \sum_{i<j} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j = 2N + 2 \sum_{i<j} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j \quad (3-6)$$

\hat{S} 表示系统的总自旋算符。(3-4)可改写成 (忽略常数 N)

$$H_{spin} = g\hat{S}^2 + q \sum_i F_{zi}^2 \quad (3-7)$$

通过 SMA，我们把坐标空间和自旋空间分开考虑，对坐标空间作平均场近似，得出单粒子波函数 $\phi(\mathbf{r})$ ，而对于我们希望仔细研究的自旋空间，则采用精确对角化的方法。

在自旋 Fock 空间中， F_z 占有数表象的归一化全对称基矢表示成 $|N_1, N_0, N_{-1}\rangle$ ， N_μ ($\mu = 0, \pm 1$) 为自旋 μ 分量的占有数。考虑到粒子数 N 和总磁化 M 守恒，并且

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_0 + N_{-1} \\ M &= N_1 - N_{-1} \end{aligned} \quad (3-8)$$

可得 $N_{\pm 1} = (N - N_0 \pm M)/2$ 。因而对于给定的 N 和 M ，基矢可简化成 $|N_0\rangle$ ， N_0 的

取值范围从 $N-M$ ， $N-M-2$ 到 0 或 1。 $\{|N_0\rangle\}$ 构成了自旋 Fock 空间一组完备的基。

为了求出哈密顿量(3-7)的矩阵元，可用母配分系数从基矢 $|N_0\rangle$ 中抽出一个和两个粒子的状态，即

$$|N_0\rangle = \sum_{\mu} \sqrt{\frac{N_{\mu}}{N}} \chi_{\mu}(1) |N_0; \mu\rangle \quad (3-9)$$

和

$$\begin{aligned} |N_0\rangle &= \sum_{\mu} \sqrt{\frac{N_{\mu}(N_{\mu}-1)}{N(N-1)}} \chi_{\mu}(1) \chi_{\mu}(2) |N_0; \mu, \mu\rangle \\ &+ \sum_{\mu \neq \nu} \sqrt{\frac{N_{\mu} N_{\nu}}{N(N-1)}} \chi_{\mu}(1) \chi_{\nu}(2) |N_0; \mu, \nu\rangle \end{aligned} \quad (3-10)$$

其中 $\chi_{\mu}(i)$ 表示原子 i 的状态， $|N_0; \mu\rangle$ 和 $|N_0; \mu, \nu\rangle$ 分别表示从 $|N_0\rangle$ 中去掉一个和两个相应状态的原子后得到的 $N-1$ 和 $N-2$ 粒子空间的基矢。同时把单粒子自旋算符 F_x 、 F_y 用上升、下降算符表示，利用上升、下降算符对 F_z 本征态的作用关系，即可求出哈密顿量(3-7)的矩阵元为

$$\begin{aligned} \langle N'_0 | H_{spin} | N_0 \rangle &= [gA_0(M, N_0) + q(N - N_0)] \delta_{N'_0, N_0} \\ &+ gA_+(M, N_0) \delta_{N'_0, N_0+2} \\ &+ gA_-(M, N_0) \delta_{N'_0, N_0-2} \end{aligned} \quad (3-11)$$

其中

$$\begin{aligned} A_0(M, N_0) &= M^2 + N + N_0 + 2NN_0 - 2N_0^2 \\ A_+(M, N_0) &= [N_0(N_0-1)(N+M-N_0+2)(N-M-N_0+2)]^{1/2} \\ A_-(M, N_0) &= [(N_0+1)(N_0+2)(N+M-N_0)(N-M-N_0)]^{1/2} \end{aligned} \quad (3-12)$$

(3-11)说明 H_{spin} 是一个三对角矩阵，通过对角化可求出所有的本征能量 E_j 和本征态 $|\phi_j\rangle$

$$\begin{aligned} H_{spin} |\phi_j\rangle &= E_j |\phi_j\rangle \\ |\phi_j\rangle &= \sum_{N'_0} c'_{N'_0} |N'_0\rangle \end{aligned} \quad (3-13)$$

由于矩阵元均为实数，故系数 $c'_{N'_0}$ 也为实数。由 $\{|N_0\rangle\}$ 展开的空间是完备的，因

而 E_j 和 ϕ_j 对于哈密顿量(3-7)是精确的。

对于给定的 N 和 M , 假设 $t=0$ 时系统的初态为 $|N_0 = I\rangle$ (简记成 $|I\rangle$), 则以后任意时刻 t 的总自旋态可表示成

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= e^{-iH_{\text{spin}}t/\hbar} |I\rangle = \sum_j e^{-iE_j t/\hbar} |\phi_j\rangle \langle \phi_j | I\rangle \\ &= \sum_j c_j^I e^{-iE_j t/\hbar} |\phi_j\rangle\end{aligned}\quad (3-14)$$

(3-14)即为哈密顿量(3-7)在给定 N 、 M 和初态 $|I\rangle$ 下的精确含时波函数, 系统演化过程中的任何细节均可从中提取。

我们感兴趣的是磁场方向 (Z 方向) 自旋 0 分量的占有比例如何随时间演化, 即

$$P_I^M(t) \equiv \frac{\langle \Psi(t) | \hat{N}_0 | \Psi(t) \rangle}{N} \quad (3-15)$$

其它分量的占有比例可由 N 和 M 的守恒求得。把(3-13)和(3-14)代入(3-15), 我们得到

$$P_I^M(t) = B_I^M + O_I^M(t) \quad (3-16)$$

其中

$$B_I^M = \sum_j (c_j^I)^2 \sum_{N_0} (c_{N_0}^j)^2 N_0 / N \quad (3-17)$$

$$O_I^M(t) = 2 \sum_{j < j'} \cos[(E_{j'} - E_j)t/\hbar] c_j^I c_{j'}^I \sum_{N_0} c_{N_0}^j c_{N_0}^{j'} N_0 / N \quad (3-18)$$

(3-16)~(3-18)说明 $P_I^M(t)$ 的基本演化特点是围绕背景 B_I^M 作振荡 $O_I^M(t)$ 。

我们考虑囚禁在各向同性谐振子势

$$V_T = \frac{1}{2} m \omega r^2 \quad (3-19)$$

中的 ^{87}Rb 原子气体, ω 为谐振频率。规定以 $\hbar\omega$ 、 mG 和 sec 为能量、磁感应强度和时间的单位。对于 SMA 下的空间波函数 $\phi(\mathbf{r})$, 我们进一步作 Thomas-Fermi 近似, 得到

$$\int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^4 \approx \frac{0.3067}{(Nc_0)^{3/5}} \quad (3-20)$$

这样做引起的误差只改变 g 和 q 的相对大小, 对后面的讨论不构成影响。对于

^{87}Rb , 可求得

$$\begin{aligned} g &\approx -6.57 \times 10^{-5} (\omega / N^3)^{1/5} \\ q &\approx 144\pi \times 10^{-6} B^2 / \omega \end{aligned} \quad (3-21)$$

下面各节将详细讨论无极化 ($M=0$) 的 ^{87}Rb 原子气体在不同磁场强度和初态下的自旋演化特点。

3.3 零磁场下的自旋演化

为了阐明磁场 B 对自旋演化的影响, 我们先讨论 $B=0$ 时的演化特点。文献 [77] 已经给出了零磁场下描述自旋演化的完整理论形式, 本节在其基础上作一系统总结。为了得出数值结果, 这里先假定 $N=400$ 和 $\omega=3000/\text{sec}$, 后面将会讨论 N 和 ω 改变对结果的影响。

3.3.1 周期性

当 $B=0$ 时, 哈密顿量(3-7)的本征态可由好量子数 S (总自旋量子数) 表征, 振动项 $O_I^M(t)$ 可表示成^[77]

$$O_I^M(t) = \sum_S O_I^{M,S} \cos[4(S+3/2)g\omega t] \quad (3-22)$$

其中 $O_I^{M,S}$ 为常数, $S=N, N-2, \dots, M$ (或 $M+1$)。由(3-22)分析可得, P_I^M 具有严格周期性, 其周期为

$$t_p = \frac{\pi}{|g|\omega} \quad (3-23)$$

同时 P_I^M 关于 $t_p/2$ 对称, $O_I^M(t)$ 关于 $t_p/4$ 反对称。因而只需考虑 $(0, t_p/4)$ 范围内的演化即可, 其它时段的演化可根据对称性延拓得到。由(3-21)可得 Thomas-Fermi 近似下 ^{87}Rb 的周期为

$$t_p \approx 1.521\pi(N/\omega^2)^{3/5} \times 10^4 \text{ sec} \quad (3-24)$$

对于我们取定的 N 和 ω , 该周期约为 117sec。图 3-1 给出了零磁场下 $M=0, I=N$ 和 $I=N/2$ 时一个周期内的自旋演化图像。

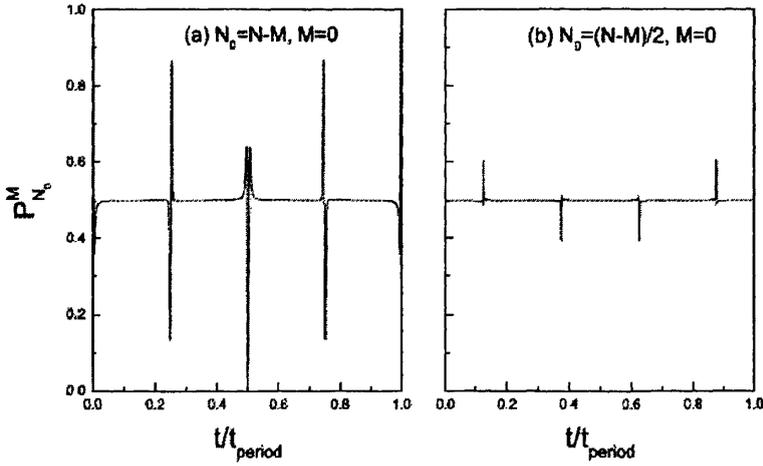


图 3-1 $B = 0$ 时一个周期内的自旋演化图像^[77]。

3.3.2 背景

当 $B = 0$ 时，背景 B_I^M 可近似表达成^[77]

$$B_I^M \approx \frac{1}{2} \left[1 - \sum_S \left(\frac{M}{S} \right)^2 \left| \langle I | \mathcal{G}_{S,M}^N \rangle \right|^2 \right] \leq \frac{1}{2} \quad (3-25)$$

其中 $|\mathcal{G}_{S,M}^N\rangle$ 是以好量子数 S 标记的哈密顿量的本征态。由(3-25)可知，当 $M \rightarrow 0$ 时， $B_I^M \approx 1/2$ 。因而对于无极化凝聚体 ($M = 0$)，所有 P_I^0 都具有几乎相等的背景 $B_I^0 \approx 1/2$ ，该性质在图 3-2 (a) (以下各图均置于本章末) 中得到了体现。

3.3.3 不同初态的演化特点

为了使 M 能取 0， N 和 I 必须奇偶性相同。对于初态 $I = 0$ ，有一半原子自旋朝上，另一半原子自旋朝下。图 3-2(a)中相应的曲线显示 P_0^0 直接上升到 $B_I^0 \approx 1/2$ 而没有发生振荡。从该曲线我们知道，在 $0.01t_p$ 时间内，半数 $\mu \neq 0$ 的原子变成了 $\mu = 0$ ，暗示着系统里发生了强烈的自旋翻转 $\uparrow + \downarrow \leftrightarrow 0 + 0$ 。随后 P_0^0 保持很

长一段时间非常稳定的状态，直到 t 接近 $t_p/4$ 时突然出现一周期强烈的振荡。

观察图 3-2 (a) 各曲线可发现， $I=2$ 时，演化的开始阶段出现一周期的振荡， $I=2k$ 时，出现 k 周期的振荡。一般来说， P_I^0 在开始阶段会振荡一段时间，然后突然变得非常稳定，接着又突然恢复振荡。因此，演化过程可分为振荡区 (zones of oscillation, ZOO) 和稳定区 (zones of steady, ZOS)，它们交替出现，形成 ZOO-ZOS-ZOO 互相交替的演化模式。通常当 $I < N/2$ 时， I 越大则 ZOO 越宽，同时 ZOS 越窄。如果 N 和 I 为奇数，则当 $I=2k+1 < N/2$ 时，ZOO 中包含 $k+1/2$ 周期振荡。

当 $I=N/4$ ，ZOO 中包含 $N/8$ 个振荡周期。有意思的是，此时 ZOO 和 ZOS 的长度均为 $t_p/12$ 。ZOO 中的振荡频率等于 $3N/(2t_p) \approx 3.14(N\omega^3)^{2/5} \times 10^{-5}$ ，在我们所取的参数下 $\approx 5.13/\text{sec}$ 。可以想像，当 N 非常大时，振荡频率将变得非常高，使得 ZOO 看起来像具有一定宽度的带。

当 I 接近 $N/2$ 时，ZOO 持续时间变得非常长（接近 $t_p/8$ ），同时振荡幅度变得非常小（接近 $t_p/8$ 的小区域除外），如图 3-2 (a) 中 $I=194$ 的曲线所示。相应地，ZOS 变得非常窄而且不稳定。当 $I=N/2$ 时，先前的两个 ZOO 转变成 ZOS，而先前的 ZOS 则变成一个位于 $t_p/8$ 的非常狭小的 ZOO，只包含一个振荡周期，如图 3-2 (a) 中 $I=200$ 的曲线所示。

图 3-2 (a) 给出了 $I \leq N/2$ 的演化图像， $I \geq N/2$ 的情形显示于图 3-4 (a)。可以看出 P_I^0 和 P_{N-I}^0 是一对大致相似的，然而当 t 接近 0 和 $t_p/4$ 时则差别很大。早期阶段的演化如图 3-3 (a) 和图 3-5 (a) 所示。

3.4 弱磁场下的自旋演化

当磁场 $B \neq 0$ 时， P_I^0 的演化显示于图 3-2 至图 3-5 的 (b) 和 (c)。可以看到，磁场引起的一个显著效应是，演化的严格周期性和内部对称性受到一定程度的破坏。这是由于 $q \neq 0$ 时，总自旋 S 不再是一个好量子数，不能用它来标记哈

密顿量(3-7)的本征态, 各本征能量不成简单的整数比例, 从而(3-18)中各余弦函数的频率也不成简单比例, 使得 P_i^0 失去了严格的周期性, 同时也导致了更丰富的演化特性。然而当所加为弱磁场时, 还是显示出 ZOO-ZOS-ZOO 交替的演化模式, 只是此时的 ZOS 不再是严格的稳定区, 而是带有小幅的波动。同时, ZOO 也显示出低频的调制性波动。

当 I 接近 0 或 N 时, 磁场 B 的效应非常显著, 其它 I 值的 P_i^0 所受影响相对较小。可以看到, 图 3-2 (a) (图 3-4 (a)) 中最低 3 条曲线的 B_i^0 均大大高于 (低于) 各自的 I/N 。磁场 B 的效应是把它们拉低 (抬高), 使得 B_i^0 靠近 I/N 。 P_0^0 和 P_N^0 对 B 极端的敏感, 如图 3-2 (b) 和图 3-4 (b) 所示。当 $B=10$, 图 3-2 (a) 中 P_0^0 的曲线被大大拉低; 当 $B=30$, P_0^0 已几乎成为一条靠近于 0 的水平线。这说明, 对于 P_0^0 , 演化开始阶段强烈的自旋翻转受到磁场的严重抑制。

对于 P_N^0 , 初始时所有原子均处于 $\mu=0$ 。图 3-4 显示, 当 $B=0$ (或 $B=30$), $t=0.008t_p$ ($0.005t_p$) 时, 将有 64% (74%) 的原子变成 $\mu \neq 0$ 。这说明, B 不但没有抑制, 反而加速了开始阶段的自旋翻转, 从而引入了强烈的振荡。当 $B=10$, 区间 $(t_p/8, t_p/4)$ 里的振荡比较强烈; 而当 $B=30$, 图中显示的整个时段里几乎都是强烈的振荡, 这是一个值得注意的地方, 后面还会回到这个问题上。

如果 $I < N/2$ 且不接近 0, 则 B 的作用是缩短 ZOO 并延长 ZOS。例如在图 3-2 (a) 中 $I=100$ 的曲线的 ZOO 长度为 $t_p/12$, 而图 3-2 (c) 中相应的长度变为 $t_p/13.2$ 。如果 $I > N/2$ 且不接近 N , 则 B 的作用相反。

图 3-2 (c) 中 $I=6$ 的曲线和图 3-4 (b, c) 中 $I=240$ 的曲线都暗示着由 B 引起的一种新的振荡模式, 将在下一节讨论。

3.5 强磁场下的自旋演化

图 3-6 显示了强磁场下 P_i^0 的早期演化, 时间区域为 $(0, t_p/40)$ 。对比图 3-6

(a)和图 3-3(c)可发现, I 接近于 0 的曲线振荡受到进一步抑制, 使得 $P_i^0 \approx I/N$, 振荡幅度小得可以忽略。对比图 3-6 (a) 和图 3-5 (c) 可发现, I 接近于 N 的曲线仍然保持着强烈的振荡。 I 值适中的曲线受到影响相对较小, 同时它们变得彼此非常相似, 如图 3-6 (a) 中 $I=100 \sim 300$ 的曲线所示, 对于这些曲线, ZOO 和 ZOS 的区分已不再适用。图 3-6 (a) 中各曲线的 B_i^0 均接近于 I/N , 这是由于二次塞曼项在哈密顿量中已占主导地位, 能量本征态接近于 Fock 空间的基矢 $|N_0\rangle$ 。

当磁场进一步增强, 如图 3-6 (b) 所示, 一种新的振荡模式将会出现。此时振荡由一连串的脉冲构成, 脉冲的形状为橄榄形, 里面包含确定的高频振荡周期数, 周期数随 I 增大而减少。当 $I \approx N/2$ 时, 振荡的幅度较大; 当 $I \approx 0$ 或 N 时, 振荡的幅度将小得难于辨认。随着 B 进一步增大, 脉冲的形状将变得更为细长, 并包含更多的高频振荡周期。可以预见在强场极限下, 振荡将完全被抑制, 所有 P_i^0 都将变成水平直线。

当 B 足够大, 哈密顿量(3-7)的第一项 $g\hat{S}^2$ 可视为微扰。一阶微扰下, 哈密顿量的本征态为

$$|\Phi_i\rangle = |I\rangle + \frac{g}{2q} A_-(M, I) |I+2\rangle - \frac{g}{2q} A_+(M, I) |I-2\rangle \quad (3-26)$$

用(3-26)中的 $|\Phi_i\rangle$ 代替(3-14)中的 $|\phi_j\rangle$, 得出一阶微扰下 $\Psi(t)$ 的解析表达式, 继而可求得

$$P_i^M(t) \approx \frac{I}{N} + \frac{g^2}{Nq^2} [A_-^2(M, I)(1 - \cos \alpha t) - A_+^2(M, I)(1 - \cos \alpha' t)] \quad (3-27)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha &= [2q - g(4N - 8I - 6)]\omega \\ \alpha' &= \alpha - 16g\omega \end{aligned} \quad (3-28)$$

(3-26)和(3-27)成立的条件是

$$\left| \frac{g}{2q} A_{\pm}(M, I) \right| \ll 1 \quad (3-29)$$

当 $M = 0$ 和 $I = 0$ 时, $A_+(0,0) = 0$ 和 $A_-(0,0) = \sqrt{2}N$, 于是

$$P_0^0(t) \approx 2 \frac{Ng^2}{q^2} (1 - \cos \alpha t) \quad (3-30)$$

当 $M = 0$ 和 $I = N$ 时, $A_-(0,N) = 0$ 和 $A_+(0,N) = 2N$, 于是

$$P_N^0(t) \approx 1 - 4 \frac{Ng^2}{q^2} (1 - \cos \alpha' t) \quad (3-31)$$

(3-30)和(3-31)均表示围绕水平线的一个小振动, 如图 3-6 (b) 所示, 其中 $I = 0$ 和 400 的曲线的振幅小得无法看出来。

当 I 不靠近 0 或 $N - M$ 时, $A_-^2(M, I)$ 和 $A_+^2(M, I)$ 之和远大于它们之差, 于是可得

$$P_I^0(t) \approx \frac{I}{N} + \frac{g^2}{Nq^2} [A_-^2(0, I) - A_+^2(0, I) - (A_-^2(0, I) + A_+^2(0, I)) \sin(\frac{\alpha + \alpha'}{2} t) \sin(\frac{\alpha - \alpha'}{2} t)] \quad (3-32)$$

由于 $\alpha + \alpha'$ 远大于 $\alpha - \alpha'$, (3-32)描述的是一个受低频调制的高频振荡, 如图 3-6 (b) 所示, 这解释了橄榄形脉冲产生的原因。因子 $\sin[(\alpha - \alpha')t / 2]$ 的周期为 $\pi / (4|g|\omega)$, 因而橄榄形脉冲的长度约为 $\pi / (8|g|\omega) = t_p / 8$ 。另外, $P_I^0(t)$ 围绕着 $I / N + [A_-^2(0, I) - A_+^2(0, I)]g^2 / (Nq^2)$ 作振荡, 第二项非常小, 因而 $B_I^0 \approx I / N$ 。

3.6 囚禁势阱频率 ω 与粒子数 N 的影响

上述数值结果是基于 $\omega = 3000$ 和 $N = 400$ 而得到, 这一节我们讨论 ω 和 N 改变带来的影响。当 $B = 0$ 时, ω 的只会引起时间尺度的改变, 所有 $P_I^M(t)$ 曲线的形状均不会改变, 只是 t_p 按 $\propto \omega^{-6/5}$ 的规律随 ω 变化。当 $B \neq 0$ 时, $q / g \propto \omega^{-6/5}$, 因而 ω 的减小会轻微增大 q / g 的比值, 相应地轻微增大 B 引起的效应。

当 N 改变时, 周期也会按 $t_p \propto N^{3/5}$ 而改变。当时间重新标度后, N 改变对 $B = 0$

时的演化影响是轻微的。图 3-7 (a) 显示了 $N = 4000$ 时的演化，对比发现，它跟图 3-2 (a) 是非常相似的，尽管 N 相差了 10 倍（注意两图中的时间标度是不一样的）。特别地，图 3-7 (a) 中同样存在着 ZOO 和 ZOS，且 ZOO 中包含的振荡周期数也是 $I/2$ ，如 $I=1000$ 的曲线，其 ZOO 的长度同样为 $t_p/12$ ，但包含 500 个振荡周期。由于 $g \propto N^{-3/5}$ ， N 的增大将增大 q/g 的比值，从而也会增大 B 引起的效应。对比图 3-7 (b) 和图 3-2 (c)， $I=0$ 的曲线被进一步抑制， $I=2$ 和 6 的曲线也被拉得更低。

3.7 平均场和对角化方法的比较

如上一章所述，平均场理论 (MFT) 的出发点是假设凝聚体中所有原子都处于单粒子波函数 $\chi = (\sqrt{\rho_1}e^{-i\theta_1}, \sqrt{\rho_0}e^{-i\theta_0}, \sqrt{\rho_{-1}}e^{-i\theta_{-1}})$ 所描写的自旋态，相应的全对称 N 粒子波函数可简单表示成 $\Psi = \prod_i \chi(i)$ 。既然 Ψ 是全对称的，总可以展开成 $|N_0\rangle$ 的线性叠加。因此，从 MFT 推导出的自旋演化模式，原则上都可以用本章介绍的对角化方法重复得到。当然，MFT 在波函数中已明确考虑相位因子，使得它在讨论演化的相干效应时具有明显的优势。然而我们知道，全对称的波函数不一定都能写成类似 Ψ 的形式。因而使用 MFT 将无可避免导致很多演化模式无法涉及，而对角化方法则可弥补这一缺陷。

对角化方法的不足之处是，当 N 很大时，计算量将会非常惊人。例如当 $N = 10^4$ 和 $M = 0$ 时，Fock 空间基矢的数目已达到 5000，相应地哈密顿矩阵元的数目为 5000×5000 ，对角化如此巨大的矩阵对计算机的运算能力和内存量都提出很高的要求。而如今 BEC 实验所囚禁的原子数通常都达到 10^6 的量级。因此对角化方法适用于精确研究粒子数较小 ($\sim 10^3$) 的旋量系统的自旋演化特性，它所推导出的结果具有一定的普遍意义，能帮助我们系统的认识旋量凝聚体演化过程中的众多细节。

3.8 小结

本章利用严格对角化哈密顿量的方法,系统讨论了磁场对无极化 ^{87}Rb 凝聚体自旋演化的影响。我们发现,零磁场时 P_I^M 具有严格周期性和内部对称性,外加磁场将破坏这种周期性和对称性。同时,外加磁场把 B_I^0 从 $\approx 1/2$ 推向 I/N ,使得 ZOS 不再是高度的稳定,随着 B 越来越大,ZOO 和 ZOS 的区分不再有意义。

当 I 接近 0 或 N 时, P_I^0 受 B 的影响非常敏感,其它 I 值相对没那么敏感。这种敏感性在图 3-8 中得到进一步体现,该图说明,磁场总体的作用是加剧振荡,振荡频率随 B 增大而提高。振荡的幅度先随 B 增大而增大,当 B 超过一定值时,磁场又将抑制振幅。当 B 充分大以后,振幅将变得非常小以致于 P_I^0 看起来像一条位于 I/N 的水平线。对于 $I=0, N$ 和 $N/2$, 这种情况将分别出现于 $B > 60, 320$ 和 2000 mG。这说明对于 $I \approx 0$ 或 N , 对振荡的抑制很容易实现。相反,如图 3-8 (c) 所示,当 $I = N/2$ 时, $B = 50$ mG 只能使 $P_{N/2}^0$ 受到微弱的影响,即使 B 增大到 450 mG, 还保持着不算太小的振幅。当 I 接近于 N , 同时 B 取值适中(大约 $30 \leq B \leq 180$ mG), 磁场将引起 P_I^0 在全时段的强烈振荡,如图 3-8 (b) 中 $B = 100$ mG 的曲线所示,这是一个值得注意的现象。图 3-8 (c) 清楚显示了 B 增大导致橄榄形脉冲振荡模式的出现,这种现象类似于量子拍 (quantum beat)。

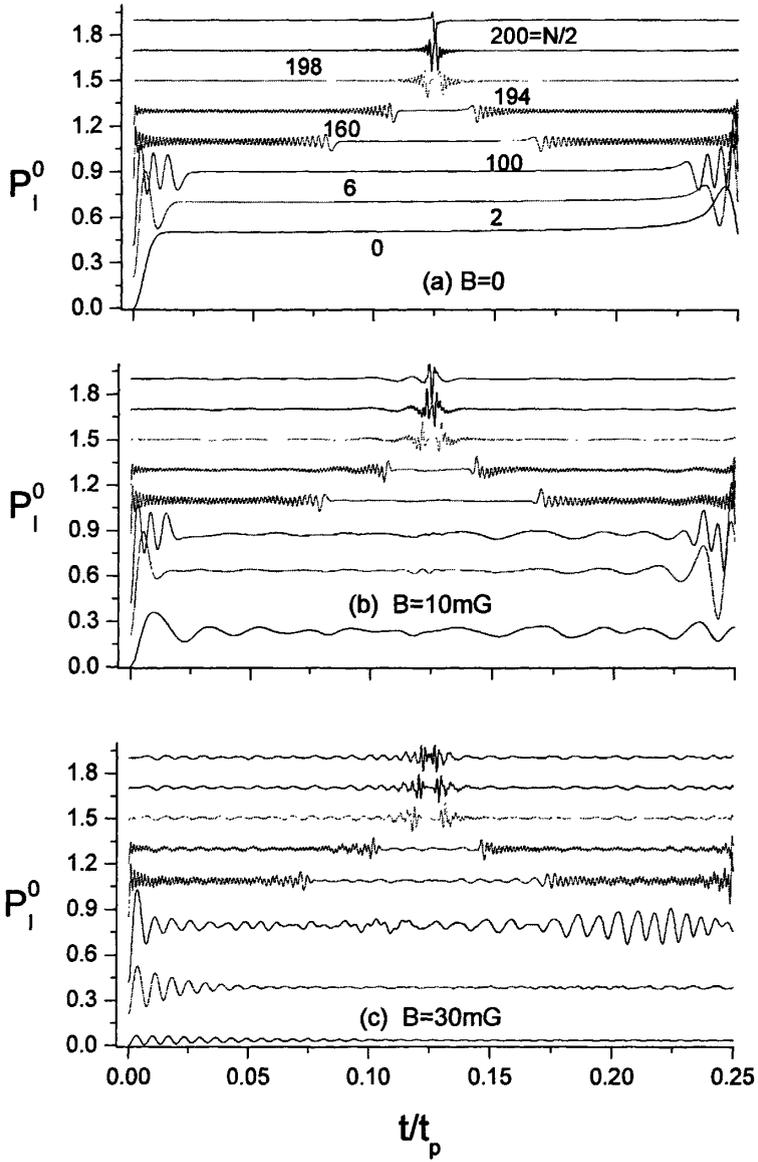


图 3-2 不同 l 和 B 取值下的 $P_l^0(t)$ 。 l 取值范围从 0 到 $N/2$ ，标记在 (a) 各条曲线上。为把各条曲线分开，每条曲线均比其下方曲线提升 0.2。

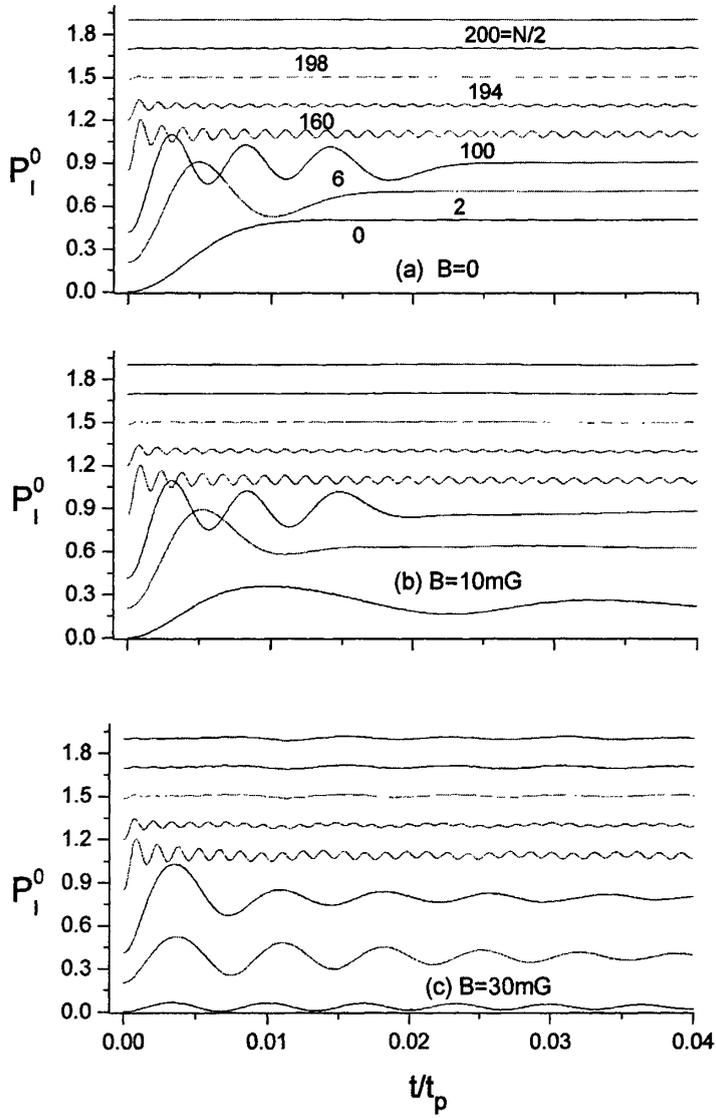


图 3-3 图 3-2 的早期演化阶段。

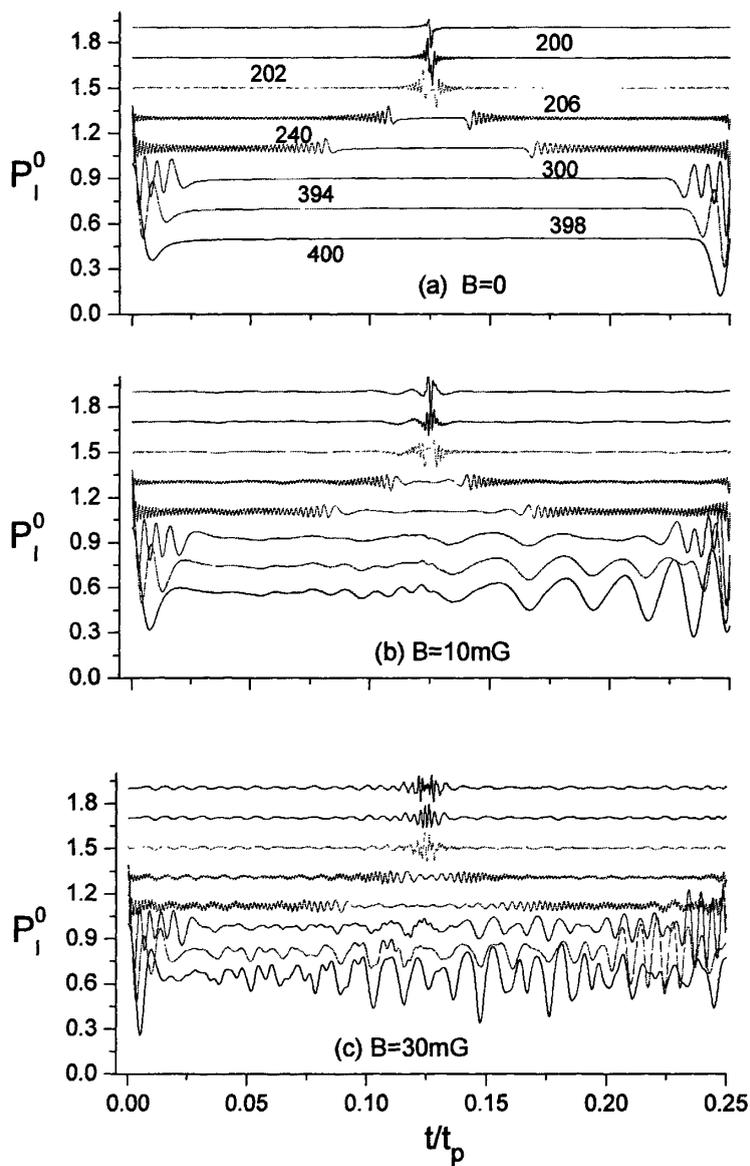


图 3-4 l 取值从 $N/2$ 到 N , 其它与图 3-2 相同。

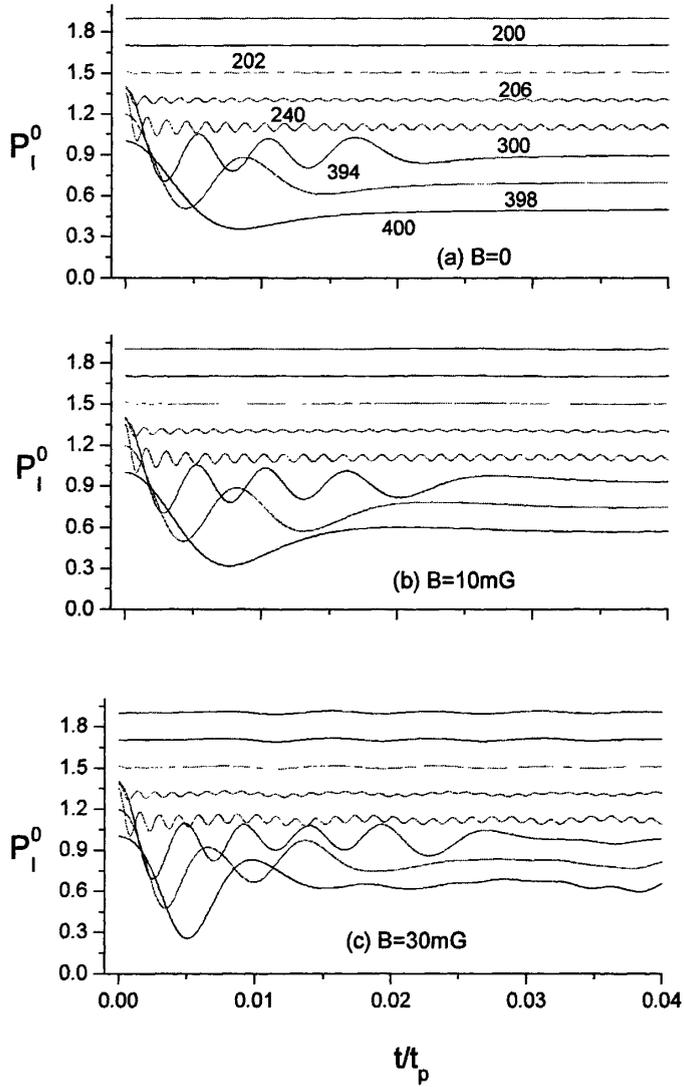


图 3-5 图 3-4 的早期演化阶段。

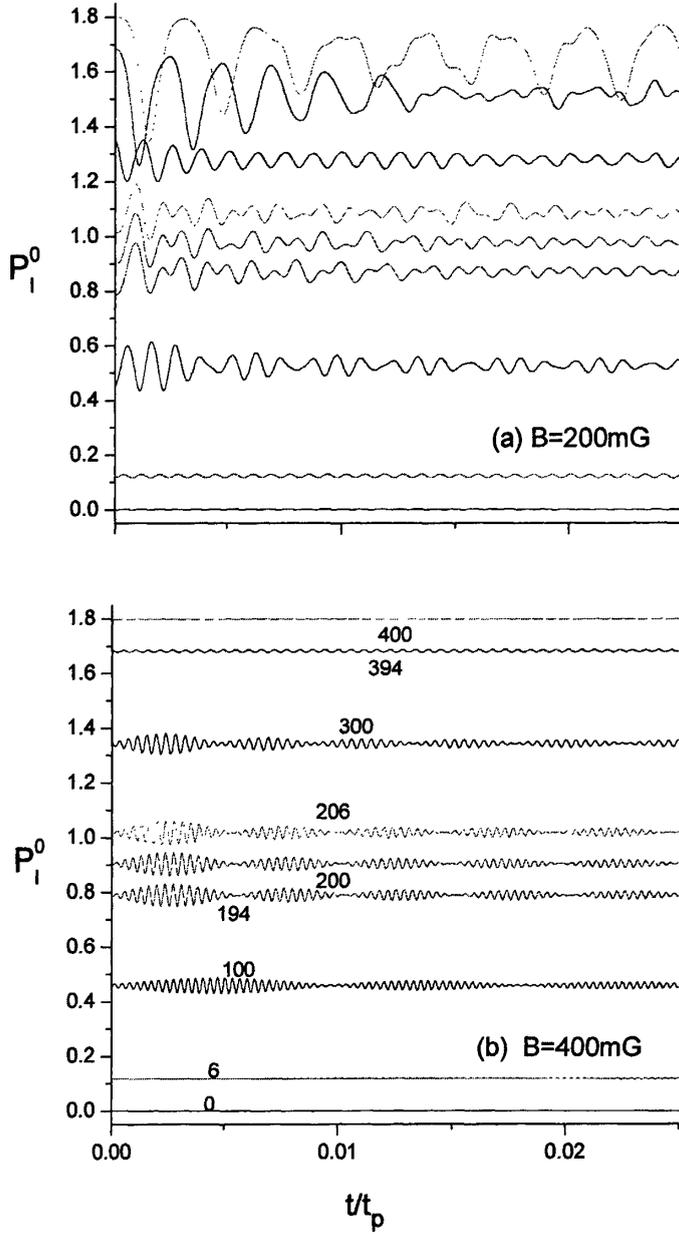


图 3-6 强磁场下 $P_l^0(t)$ 的早期演化阶段。 l 取值从 0 到 N ，标记在 (b) 中各条曲线上，每条曲线均比其下方曲线提升 0.1。 t 从 0 到 $t_p/40$ 。

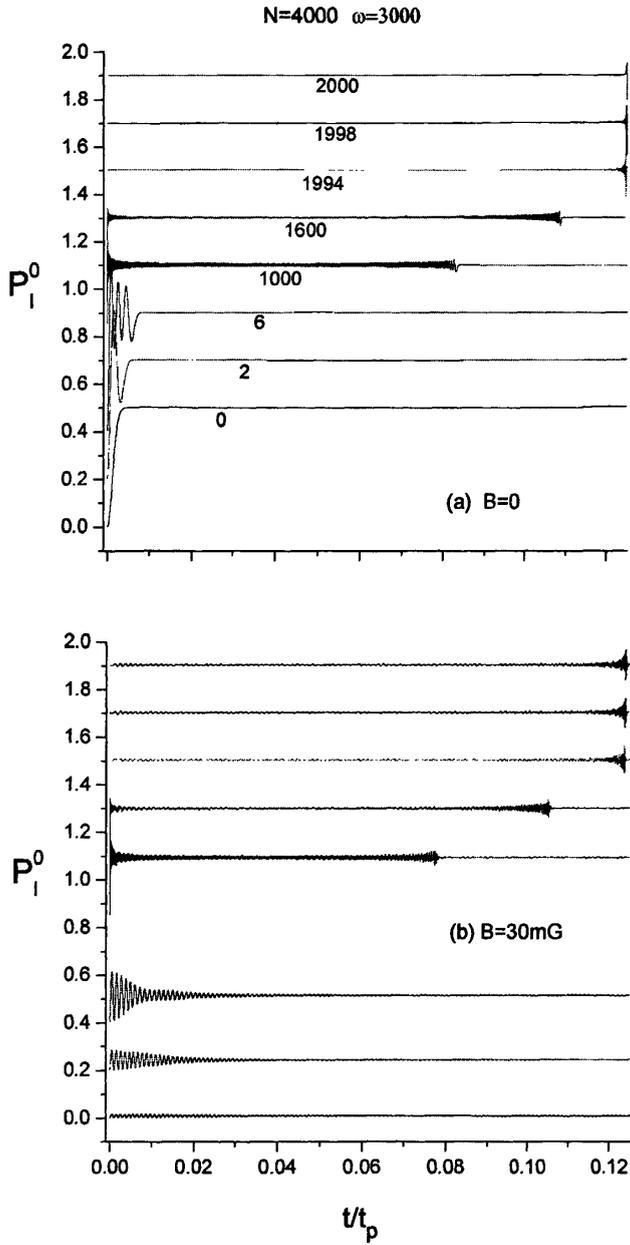


图 3-7 与图 3-2 相对, 当 $N = 4000$ 时, 不同 B 取值下的 $P_l^0(t)$ 。 t 从 0 到 $t_p/8$, l 值标记在 (a) 中各条曲线上。

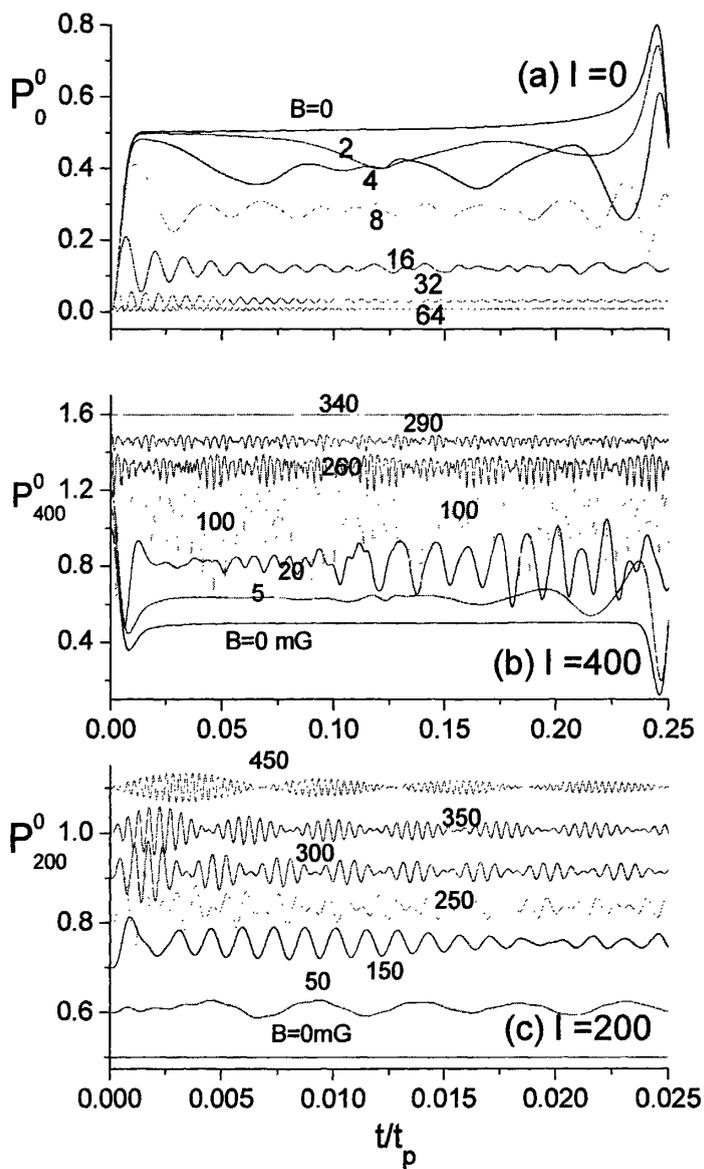


图 3-8 不同 l 和 B 取值下的 $P_l^0(t)$ 。 B 值标记在各条曲线上, (b) 和 (c) 中每条曲线均比其下方曲线提升 0.1, t 从 0 到 $t_p/4$ (a 和 b) 或 $t_p/40$ (c)。

第4章 磁化对自旋演化的影响

4.1 引言

上一章我们详细讨论了磁化为零时旋量凝聚体的自旋演化性质。目前的实验技术允许制备原子在各自旋分量上任意布居的凝聚体，因而实验上可以观察到不同极化条件下的自旋演化。实验研究表明，磁化作为一个守恒量，在演化过程中以很高精度保持不变，演化同样采取围绕背景振荡的模式，但无论背景的大小，还是振荡的幅度与频率，都将受到磁化大小的调制。作为一套完整的理论体系，我们有必要讨论磁化不为零将引起何种效应，为自旋演化带来什么影响。本章的任务是对此问题作一探讨，出发点依然是上一章的理论框架。

4.2 磁化对背景的影响

回顾上一章的讨论，解决自旋演化问题，归根到底是要求解系统哈密顿量的所有本征态。对于磁化 M 不为零的情况，求解过程是完全类似的。相比之下， $M \neq 0$ 时基矢的数目减少，因为 N_0 最大只能取到 $N - M$ 。对角化哈密顿量后，可得自旋 0 分量的占有率与时间的依赖关系为

$$P_I^M(t) = B_I^M + O_I^M(t) \quad (4-1)$$

即该占有率在一定背景上随时间振荡。本节讨论背景 B_I^M 与 M 的关系，为便于与上一章的结果作比较，本章仍沿用 $N = 400$ ， $\omega = 3000$ 的参数选择。由上一章的结果， B_I^M 可表示成

$$B_I^M = \sum_j (c_j^I)^2 \sum_{N_0} (c_{N_0}^j)^2 N_0 / N \quad (4-2)$$

$c_{N_0}^j$ 是哈密顿量第 j 个本征态中基矢 $|N_0\rangle$ 的系数。图 4-1 显示了不同磁场和 M 取

值下 B_I^M 与初态 I 的变化关系。(a) 中最上面的水平线是我们预料的结果, 即 B 、 M 都为 0 时, $B_I^M \rightarrow 1/2$ 。 M 不为 0 以后, B_I^M 将有所下降, 其中 $I \approx 0$ 的 B_I^M 受影响最为明显, 下降得很厉害, (a) 图显示, B_0^{100} 已几乎为 0。加上弱磁场后 (b 图所示), 小 I 的背景进一步受压制, 所有 B_0^M 都趋于 0, 从这点看, M 和 B 有类似的效应, 后文将对此问题作一分析。弱磁场下, 大 I 的背景受影响相对较小。加上强磁场后 (c 图所示), 情况与上一章相同, B_I^M 被拉低或抬升到接近 I/N , 不管 M 值如何, B_I^M 都随 I 线性上升。

图 4-2 显示了 B_I^M 随 M 的变化关系。零或弱磁场时 (a, b 所示), 不论 I 为何值, B_I^M 均随 M 增大而下降, 再次说明 M 对背景有抑制作用。 B_0^M 所受抑制最为显著, 相反, B_{300}^M 对 M 的增大很不敏感, 当 M 达到 100 时也只是下降了约 $1/10$ 。强磁场下 (c 所示), B_I^M 基本不随 M 而变, 成为水平线, 说明此时磁化的影响可被忽略。

4.3 磁化对演化过程的影响

$P_I^M(t)$ 的含时部分 $O_I^M(t)$ 可表示成

$$O_I^M(t) = 2 \sum_{j < j'} \cos[(E_{j'} - E_j)t / \hbar] c_I^j c_I^{j'} \sum_{N_0} c_{N_0}^j c_{N_0}^{j'} N_0 / N \quad (4-3)$$

E_j 是哈密顿量的第 j 个本征能量。正如上一章给出的结果, 各种不同频率的余弦函数相互叠加, 使得 $O_I^M(t)$ 呈现丰富多样的振荡模式。 M 对 $O_I^M(t)$ 的影响与磁场 B 有关, 在弱和强磁场下有不同的表现。作为对比, 图 4-4 画出了 $B = 30\text{mG}$ (弱磁场), $I = 6$, M 取不同值时 $P_I^M(t)$ 在 $t_p/4$ 内的演化。可以看到, M 的一个基本效应是显著增加了振荡的频率。为了解析这一效应, 同时更好的理解 M 对演化的其它影响, 我们回顾哈密顿量矩阵元的表达式

$$\begin{aligned}
 \langle N'_0 | H_{spin} | N_0 \rangle = & [gA_0(M, N_0) + q(N - N_0)]\delta_{N_0, N'_0} \\
 & + gA_+(M, N_0)\delta_{N_0, N'_0+2} \\
 & + gA_-(M, N_0)\delta_{N_0, N'_0-2}
 \end{aligned} \tag{4-4}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_0(M, N_0) &= M^2 + N + N_0 + 2NN_0 - 2N_0^2 \\
 A_+(M, N_0) &= [N_0(N_0 - 1)(N + M - N_0 + 2)(N - M - N_0 + 2)]^{1/2} \\
 A_-(M, N_0) &= [(N_0 + 1)(N_0 + 2)(N + M - N_0)(N - M - N_0)]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

M 的作用集中反映在 $A_{0,\pm}(M, N_0)$ 3个参数上面。图 4-3 画出了 $M = 0, 40$ 和 100 时 $A_{0,\pm}(M, N_0)$ 随 N_0 的变化关系。如(a)所示, $N_0/(N - M) < 0.5$ 时, M 对 A_0 的影响很微弱,而当 $N_0/(N - M) > 0.5$ 时, M 增大导致 A_0 也显著增大。在弱磁场条件下(q 很小), M 增大相当于增大了哈密顿矩阵的对角元,从而使得本征能量也相应增大。由(4-3)可知,各余弦函数的频率也跟着提高,这在一定程度上解释了 M 增加振荡频率的效应。从(b)、(c)可以看到, M 增大使得 A_{\pm} 先减小后增大,总体效果是(4-4)中非对角元对 M 变化不太敏感。综合起来, M 增大的效果是提高了哈密顿矩阵中对角元的地位,这跟增大 B 的作用类似,预示着 M 和 B 对自旋演化的影响有一定相似性。

图 4-5 和图 4-6 显示了 $B = 30\text{mG}$, $M = 100$, I 分别为 0 到 $(N - M)/2$ 和 $(N - M)/2$ 到 $N - M$ 时 $P_I^M(t)$ 在 $t_p/4$ 内的演化。可以看到,除了 $I = 0$ 和 6 ,其它 I 值的演化曲线都可以分辨出 ZOO 和 ZOS 区域。对比两图可以发现一个有趣的现象,当 $I < (N - M)/2$ 时, M 的作用跟 B 相同,是在 ZOS 中引起振荡,破坏 ZOS 的稳定性,两者的效果相叠加,使得 ZOO 和 ZOS 的区分很模糊,如图 4-5 中 $I = 100$ 的曲线,已很难分辨出 ZOS 区域。相反,当 $I > (N - M)/2$ 时, M 抵消了 B 的影响,使得在两个 ZOO 之间出现一个非常稳定的 ZOS 区域,如图 4-6 所示,其中 $I = 300$ 的曲线尤其引人注目, P_I^M 在宽约 $t_p/40$ 的 ZOO 里从幅度很大的振荡很快衰减下来,进入非常稳定的 ZOS。

在强磁场区域,由于哈密顿量中 q 项已占主导地位,改变 M 只能影响矩阵元的数目,对矩阵元大小的影响很微弱,可以想见, $M = 0$ 时的振荡模式还将类似

出现在 $M \neq 0$ 的演化当中。图 4-7 显示了 $B = 400 \text{ mG}$, M 分别为 0 和 100 时 P_1^M 在 $t_p/40$ 时间内的演化。可以看到, (a)、(b) 中对应 I 值的演化是相似的, 橄榄形脉冲振荡模式同样出现在 $M = 100$ 的演化中, 而且橄榄的长度比 $M = 0$ 时增大了。 $I = N - M$ 的振幅并没有受到严重的抑制, 还保持着相当幅度的振荡。

4.4 小结

本章讨论了磁化 M 对自旋演化的影响, 所用方法同样是直接对角化哈密顿矩阵。通过分析 M 对矩阵元的影响, 定性解释了 M 能提高振荡频率的效应。 M 增大导致背景下降, $I \approx 0$ 时影响非常明显, 增大磁场将削弱这种影响。在弱磁场区, 当 $I < (N - M)/2$ 时, M 破坏 ZOS 的稳定性, 而当 $I > (N - M)/2$ 时, 则提高 ZOS 的稳定性。在强磁场区, M 对演化模式的影响微弱, 数值模拟中同样看到了橄榄形脉冲振荡。

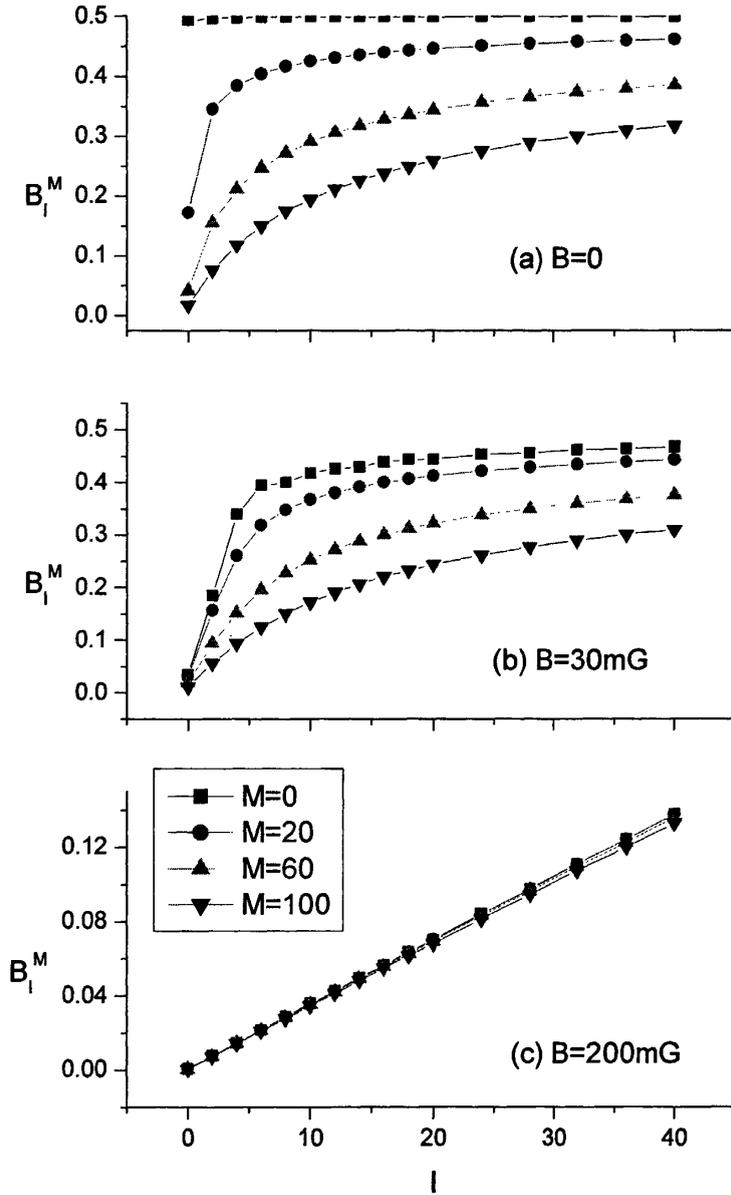


图 4-1 B_l^M 随 l 的变化关系。 l 的取值为 0 到 40, 不同曲线对应的 M 和 B 值标记在图上。

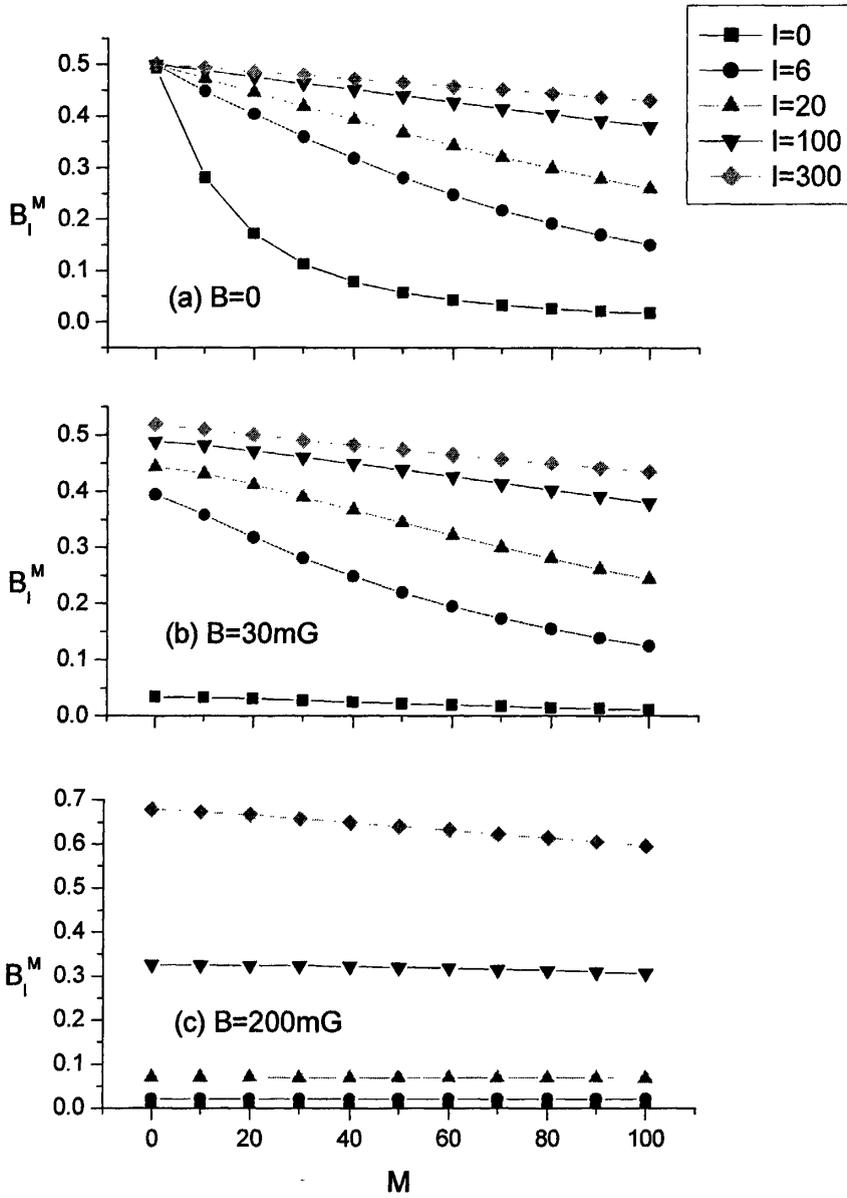


图 4-2 与图 4-1 相同磁场条件下 B_l^M 随 M 的变化关系。 M 的取值为 0 到 100，不同曲线对应的 l 值标记在图上。

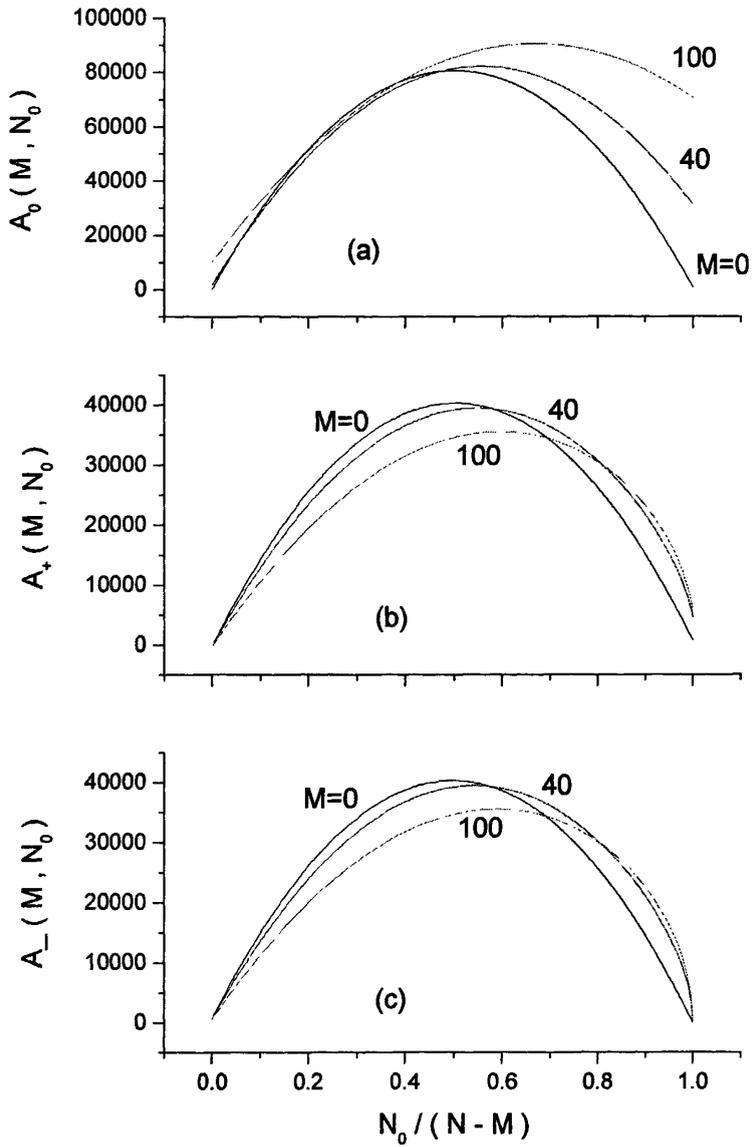


图 4-3 (a) $A_0(M, N_0)$, (b) $A_+(M, N_0)$ 和 (c) $A_-(M, N_0)$ 随 N_0 的变化关系, 不同曲线对应的 M 值标记在图上。

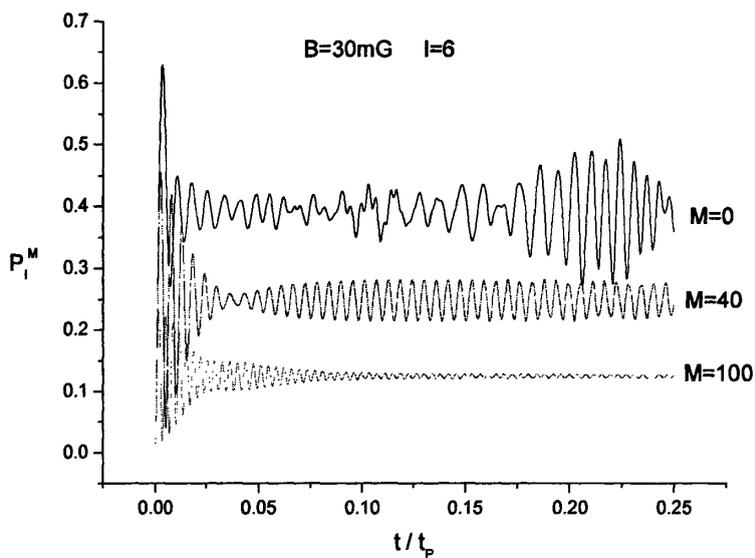


图 4-4 $B = 30 \text{ mG}$, M 取不同值时 P_i^M 的演化。

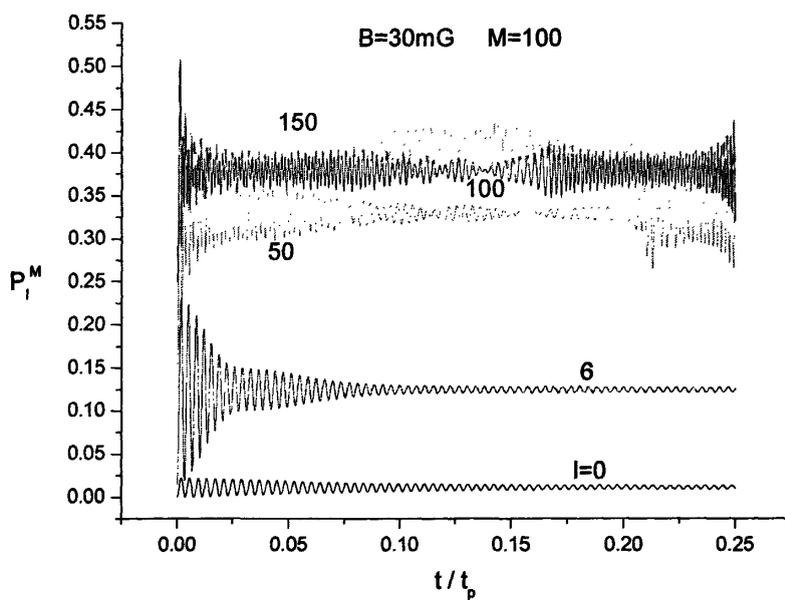


图 4-5 $B = 30 \text{ mG}$, $M = 100$, l 取不同值时 P_i^M 的演化。 l 取值从 0 到 $(N - M) / 2$, 标记在各条曲线上。

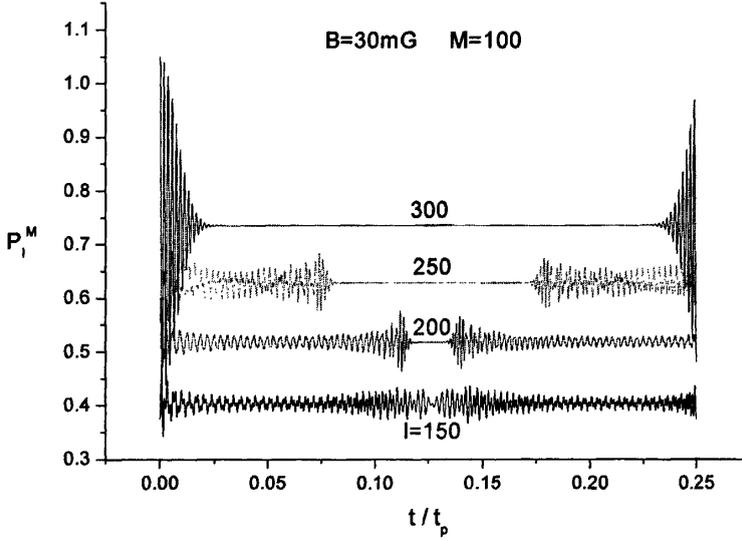


图 4-6 与图 4-5 相同, l 取值从 $(N-M)/2$ 到 $N-M$, 每条曲线都比其下方曲线提高 0.1。

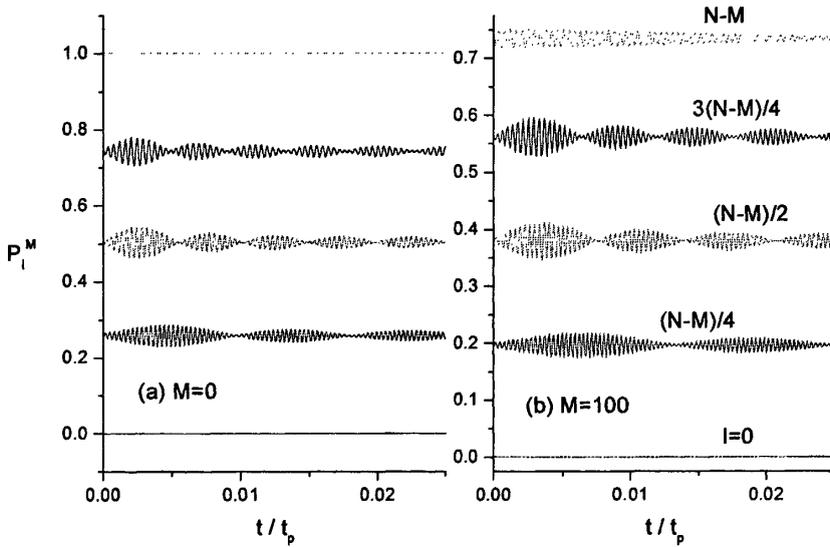


图 4-7 $B = 400 \text{ mG}$ 时 P_l^M 的演化, l 值标记在曲线上。

第5章 一维环上吸引作用 BEC 的结构相变

5.1 引言

BEC 首先在三维冷原子气体中获得实现, 随后人们不断改进实验技术, 制造出各种各向异性的囚禁势阱, 并成功实现了低维系统的 BEC^[78, 79]。同时, 应用 Feshbach 共振技术^[23, 80, 81], 实验上还观察到一维吸引相互作用 BEC 中亮孤子 (bright soliton) 物质波的形成和传播现象^[82-84]。实验中展现的低维 BEC 的奇特性质, 吸引了理论科学家的强烈兴趣。而对于一维 BEC 中孤子形成的机理, 尤其受到人们的重视, 因为这涉及到 BEC 中发生的量子相变。平均场理论 (MFT) 应用到解释亮孤子的形成, 获得一定的成功。正如前面所提及, 由于理论本身的一些不足, MFT 在讨论如粒子间的关联等问题时失效。本章承继前面介绍的对角化哈密顿量方法, 将其应用到一维环上吸引相互作用 BEC 的结构相变, 讨论亮孤子的形成机制。

5.2 低维 BEC 实验研究进展

一维和二维系统历来是凝聚态物理重要的研究领域。理论上已经证明了均匀气体中不可能发生一维或二维 BEC, 然而囚禁在势阱中的非均匀气体则可以发生一维或二维 BEC。这促使实验科学家们研究出各种各向异性的囚禁势阱, 例如碟形 (二维) 和雪茄形 (一维) 谐振子势阱等, 用来实现低维 BEC。2001 年, A. Gorlitz 等人首先报道了实验中观察到二维和一维 BEC 形成^[78]。实验中首先在磁阱中产生三维的 BEC 气体, 然后把系统转移到由激光聚焦形成的二维碟形和一维雪茄形光学阱中, 过程中将会有原子流失, 例如原来 BEC 中原子数为 $\sim 10^7$, 则最后在光学阱里保留下来的原子数为 $\sim 10^6$ 。达到平衡后, BEC 将具有与光学

阱相似的外形,从而实现了一维和二维的 BEC。达到平衡时 BEC 的纵横比(aspect ratio)由保留在光学阱中的原子数决定,它们的关系如图 5-1 和图 5-2 所示。

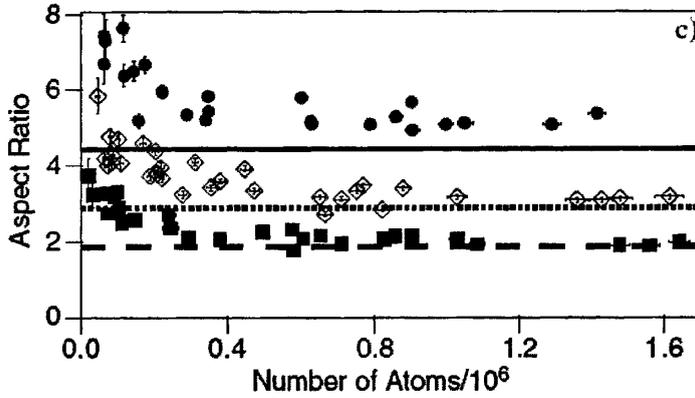


图 5-1 二维 BEC 中原子数与纵横比的关系^[78]。

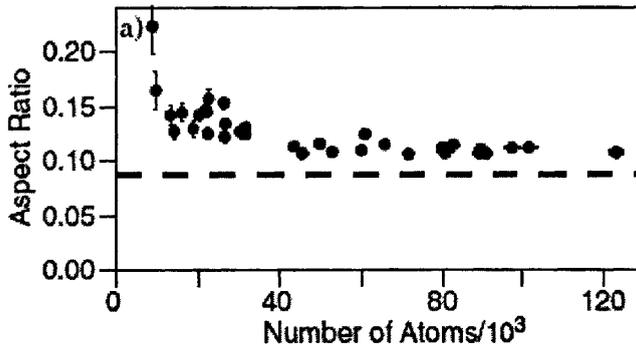


图 5-2 一维 BEC 中原子数与纵横比的关系^[78]。

低维 BEC 成功实现以后,科学家们陆续在这些系统中发现一些有趣的现象。2002 年, K. E. Strecker 等人在一维 ^7Li 原子 BEC 中观察到亮孤子物质波的出现^[82]。实验中把 ^7Li 原子气体囚禁在雪茄形一维势阱里,利用 Feshbach 共振技术,把原子间相互作用从排斥调到吸引,同时让势阱沿轴线作简谐振动。这过程中观察到亮孤子的形成和传播,如图 5-3 所示。可以看到,当原子间尚为排斥相互作用(散射长度 $a > 0$) 时, BEC 随着势阱振动很快扩散开去。当调到吸引相互作用 ($a < 0$) 以后, BEC 将保持局域的空间分布,并随势阱一起来回振动,此即

亮孤子物质波的形成。

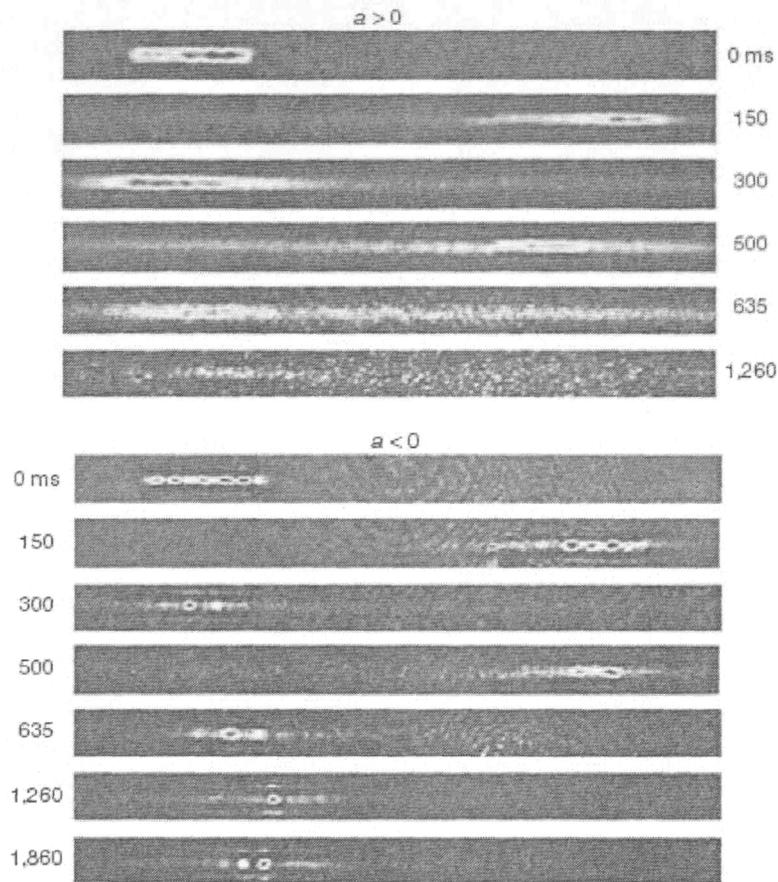


图 5-3 实验中亮孤子物质波的形成^[82]。

5.3 一维 BEC 理论研究进展

对孤子的研究一向是数学和物理科学家热门的话题，理论上孤子是非线性系统本质的反映，应用上也有很广阔的前景，如量子通信等领域。因而一维 BEC 中产生亮孤子物质波^[86-104]的报道一出，马上引起理论界的广泛兴趣。文献[98]考虑了在 Feshbach 调控下，散射长度随时间作指数变化，求解雪茄形一维 GP 方程得到孤子传播解。文献[86]详细讨论了基于平均场理论对亮孤子性质的描述。文中求解了一维圆环上吸引相互作用玻色系统的 GP 方程

$$i \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + UN |\psi_0|^2 \right] \psi_0 \quad (5-1)$$

解的形式由参数 $\gamma \equiv UN/2\pi$ 决定，可以表示为

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} & |\gamma| < \frac{1}{2} \\ \psi_0 &= \sqrt{\frac{K(m)}{2\pi E(m)}} \operatorname{dn}\left(\frac{K(m)}{\pi}(\theta - \theta_0) | m\right) & |\gamma| > \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5-2)$$

其中 $K(m)$ 和 $E(m)$ 为第一和第二类椭圆积分， $\operatorname{dn}(u|m)$ 为雅可比 (Jacobian) 椭圆函数， θ_0 为任意常数 (表示孤子的位置)， m 由以下关系定出

$$K(m)E(m) = -\frac{\pi^2 \gamma}{2} \quad (0 \leq m \leq 1) \quad (5-3)$$

(5-2)第二式表示一个孤子解，说明 $|\gamma|$ 大于临界值 1/2 后，囚禁在环上的 BEC 将从均匀分布转变到孤子形式的分布，对称性发生破缺。图 5-4 显示了 γ 不同取值下 ψ_0 的形状，可以看到当超出临界值后， $|\gamma|$ 越大 BEC 中原子分布越集中。(5-2)描述的实际上是一维 BEC 结构的一种相变，这可从图 5-5 清楚看出来，化学势 μ 的导数在 $|\gamma|=1/2$ 处不连续，说明系统发生了一阶相变。

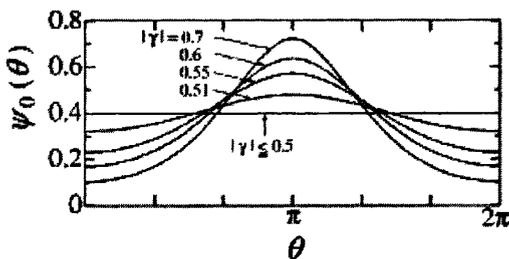


图 5-4 γ 不同取值下 GP 方程解的形状^[86]。

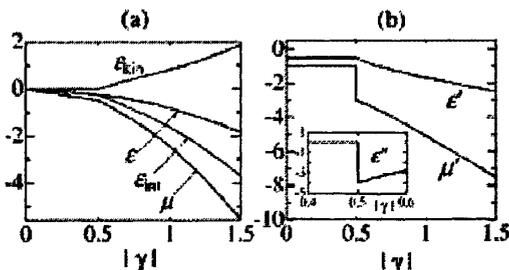


图 5-5 能量 ε 和化学势 μ 及其导数与 γ 的关系^[86]。

文献[87]使用了非平均场方法讨论上述问题，文中假设原子只能激发到角动量为 ± 1 的单粒子态，然后对角化系统的哈密顿量，得到在不同相互作用强度（ $\gamma = -gN/2$ ）下的能谱结构，如图 5-6 所示。可以看到相变发生在 $gN=1$ 处，相变前的能级由动量子数 j 表征，能谱结构非常简单，相变后能级按总角动量分组，能谱呈现复杂的网状结构。

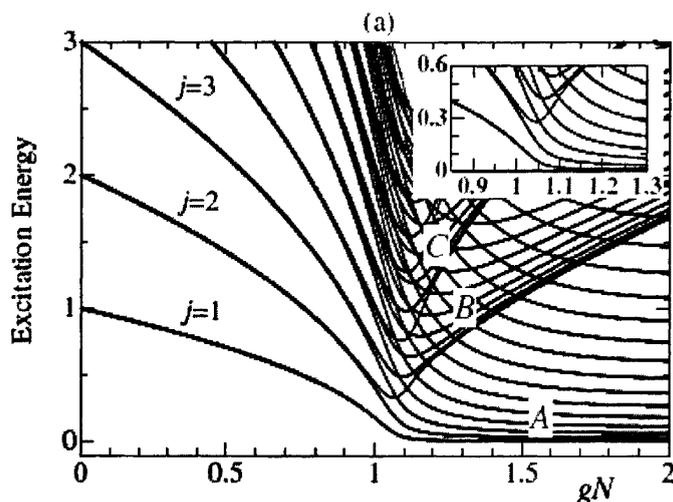


图 5-6 对角化方法得出的哈密顿量能谱与原子吸引相互作用强度的关系^[87]。

实际上，当系统发生相变时，粒子的涨落非常大，假定原子只能激发到 p 态将引起计算结果定量上较大的误差。合理的做法是允许原子激发到更高的单粒子态，但却会大大增加系统 Fock 空间基矢的数目，使得对角化的运算量剧增。文献[85]同样使用对角化方法研究一维圆环上排斥相互作用 BEC 的能带结构和粒子关联效应。文中采取一些有效的手段，把基矢数目控制在一定范围内并允许粒子的高激发。计算结果表明，排斥相互作用的系统中不会发生类似的相变，其能谱呈现有规律的带状结构。

5.4 结构相变

下面沿用文献[85]所介绍的筛选基矢的方法，对一维环上 BEC 本征态的结构

进行系统分析，讨论强相互作用下孤子解与 yrast 本征态的组合关系，以及环形变引起的角动量混合效应。

5.4.1 哈密顿量及基矢的选择

考虑囚禁在圆环上的 N 粒子玻色系统，环的半径为 R ，如图 5-7 所示意。设原子质量为 m ，原子间相互作用为

$$V_{ij} = \frac{U}{2} \delta(\theta_i - \theta_j) \quad (5-4)$$

这里我们考虑原子间为吸引相互作用的情形，即 $U < 0$ ，并且不考虑原子的自旋。

以 R 和 $\hbar^2 / (2mR^2)$ 为长度和能量的单位，则系统的多体哈密顿量可写成

$$H = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} + \frac{U}{2} \sum_{i < j} \delta(\theta_i - \theta_j) \quad (5-5)$$

其中 θ_i 是粒子 i 在环上的角坐标。正如文献[86]所述，该系统的性质依赖于一个无量纲的参数

$$\gamma \equiv -\frac{UN}{2\pi} \quad (5-6)$$

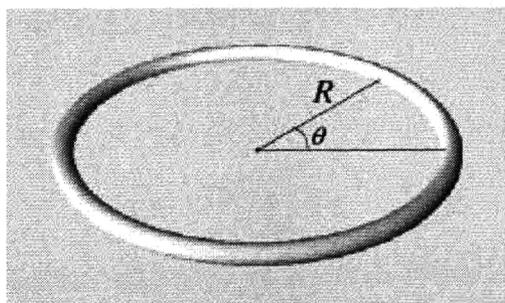


图 5-7 一维圆环示意图

考虑到原子处于圆环上，故以角动量本征波函数 $\phi_k = e^{ik\theta} / \sqrt{2\pi}$ 描述单粒子态。理论上 k 可取一切整数，即原子可被激发到任意角动量。但我们只研究系统的基态和低激发态，所以原子被激发到高角动量的概率很小，同时从实际计算考虑，需要对 k 取值设置一上限，以保证用于对角化的基矢数目为有限值。这里我们规定 $|k| \leq k_{\max}$ ，则 Fock 空间中的基矢可表示成

$$|\alpha\rangle \equiv |n_{k_{\max}}, \dots, n_{k_{\max}}\rangle \quad (5-7)$$

$\{n_k\}$ 满足条件

$$\begin{aligned} \sum_k n_k &= N \\ \sum_k n_k k &= L \end{aligned} \quad (5-8)$$

其中 L 是系统的总角动量，它对于哈密顿量(5-5)是一个守恒量。

应用母配分系数可以方便地求出 H 的矩阵元。把 H 写成 $H = H_1 + H_2$ ， H_1 表示动能项， H_2 表示相互作用能项。 H_1 是自动对角化的，问题归结为求 H_2 的矩阵元。利用母配分系数把粒子 1、2 的状态从 $|\alpha\rangle$ 中抽出来，则求矩阵元 $\langle \alpha' | H_2 | \alpha \rangle$ 归结为求 $\langle k'_1, k'_2 | V_{12} | k_1, k_2 \rangle$ ， $|k_1, k_2\rangle$ 表示粒子 1 处于 ϕ_{k_1} ，粒子 2 处于 ϕ_{k_2} 。代入(5-4)，容易求得

$$\langle k'_1, k'_2 | V_{12} | k_1, k_2 \rangle = \frac{U}{4\pi} \delta_{k_1+k_2, k'_1+k'_2} \quad (5-9)$$

同时，要使 $\langle \alpha' | H_2 | \alpha \rangle$ 不为 0， $|\alpha\rangle$ 和 $|\alpha'\rangle$ 各自抽出两个粒子后的状态必须相同。因此，把 $|\alpha\rangle$ 和 $|\alpha'\rangle$ 作比较，如果有某个 n_k 的值相差大于等于 3，或者不相等的 n_k 的数目不为 3 或 4，即可判断它们的矩阵元为 0。

表 5-1 不同 (k_{\max}, K_{\max}) 下的本征能量 E_n

n	(3, 60)	(4, 60)	(4, 70)	(5, 70)
1	-41.007	-41.067	-41.101	-41.113
9	-35.793	-35.843	-35.880	-35.891
10	-35.650	-35.698	-35.750	-35.762

为了更有效控制基矢的数目，我们进一步限制 $|\alpha\rangle$ 的动能， $K_\alpha = \sum_k n_k k^2$ 。显然，动能很大的基矢在低能谱中出现的概率非常小，可被忽略，因此我们规定 $K_\alpha \leq K_{\max}$ 。一旦 N 、 L 、 k_{\max} 和 K_{\max} 被确定后，Fock 空间中的基矢也相应被确定下来，即可对 H 实施对角化。显然，我们构造的 Fock 空间只是包括了认为对低

能谱贡献较大的基矢，并不是完备的，因而计算的结果会有一定的误差，而且越高的能级误差越大。这样做的好处是大大减少了基矢的数量，使得对角化的效率更高，而且对于低能谱，只要选择合适的 k_{\max} 和 K_{\max} ，精度是有保证的。表 5-1 列出了 $N=100$ 、 $L=0$ 、 $\gamma=0.7$ 时，不同 (k_{\max}, K_{\max}) 取值下的本征能量 E_1 (基态)、 E_9 和 E_{10} 。从表 5-1 可以看到， $(4, 70)$ 是对 (k_{\max}, K_{\max}) 的一个合理选择，此时基矢的数目为 5000 左右，适合于数值计算，下面的计算都将采用这一选择。

5.4.2 基态结构

对于同时激发到 $\phi_{\pm 1}$ 的一对粒子，我们称为一个基本对 (basic pair)，它表示两个 p 波的粒子朝相反方向在转动。文献[85]发现，在圆环上排斥相互作用的玻色系统中，这是一种基本的激发模式。这一节我们将讨论这些基本对在吸引相互作用系统里所扮演的角色。我们先讨论总角动量 $L=0$ 时系统的基态。如果基矢 $|\alpha\rangle$ 包含 j 个基本对，其它 $N-2j$ 个粒子保留在 ϕ_0 (未被激发)，则 $|\alpha\rangle$ 被记作 $|P^{(j)}\rangle$ 。特别地， $|P^{(0)}\rangle$ 表示没有任何激发的态，所有粒子都处于 ϕ_0 。计算结果表明，吸引相互作用下系统的基态同样以基本对占主导，其波函数是 $|P^{(j)}\rangle$ 的叠加

$$|G\rangle = \sum_j a_j |P^{(j)}\rangle + \Delta \quad (5-10)$$

其中 Δ 表示比重很小的其它类型基矢的参杂。表 5-2 列出了 $N=100$ ， γ 取不同值的时候，基态中权重最大的 3 个分量， $W^{(j)} \equiv |a_j|^2$ 。可以看到，无论 γ 取什么值，基态里重要的分量毫无例外的都是 $|P^{(j)}\rangle$ 类型的基矢。这意味着粒子激发到更高分波的机会很小。必须强调的是，这并不意味着我们计算时可以直接把 k_{\max} 定为 1，原因是为了使计算结果达到收敛，必须让 Fock 空间包含足够的基矢，正如表 5-1 所示。

从表 5-2 还可以看出，随着 γ 增大， $W^{(j)}$ 的分布发生显著的改变。 γ 较小时，

$|P^{(0)}\rangle$ 占主导，相应地，粒子在圆环上倾向于均匀分布。随着 γ 增大， $W^{(0)}$ 不断减小，如表 5-2 第二列所示。当 γ 位于 0.5 于 0.6 之间， $W^{(0)}$ 下降得非常迅速，相应地，系统基态的结构发生了深刻变化。在 MFT 框架下，该变化被描述成一个量子相变，单粒子波函数从常数转变为孤子解。然而，对有限粒子数哈密顿量直接对角化，该变化是陡峭但连续的。 $W^{(0)}$ 随 γ 的变化如图 5-8 所示，可以看到， γ 取值在 0.5 到 0.6 之间时， $W^{(0)}$ 迅速而陡峭地下降到几乎为 0。下降的陡峭程度依赖于 N ， N 越大下降越陡峭，同时位置越靠近 $\gamma = 1/2$ 。可以想像，当 $N \rightarrow \infty$ ， $W^{(0)}$ 将在 $\gamma = 1/2$ 处突变为 0，相应的系统结构变化将成为真正的相变，即 MFT 所预言的量子相变。

表 5-2 基态中权重最大的 3 个分量及其 $W^{(j)}$

γ	First	Second	Third
0.40	$ P^{(0)}\rangle, 0.859$	$ P^{(1)}\rangle, 0.119$	$ P^{(2)}\rangle, 0.016$
0.45	$ P^{(0)}\rangle, 0.754$	$ P^{(1)}\rangle, 0.186$	$ P^{(2)}\rangle, 0.043$
0.50	$ P^{(0)}\rangle, 0.511$	$ P^{(1)}\rangle, 0.267$	$ P^{(2)}\rangle, 0.125$
0.55	$ P^{(3)}\rangle, 0.167$	$ P^{(4)}\rangle, 0.155$	$ P^{(2)}\rangle, 0.147$
0.60	$ P^{(7)}\rangle, 0.115$	$ P^{(8)}\rangle, 0.106$	$ P^{(6)}\rangle, 0.104$

当 γ 比较小，粒子间的相互作用比较弱，动能在总能量中占主导。这种情况下基态将尽其所能降低动能，从而导致 $|P^{(0)}\rangle$ 在基态里占主导，相应地粒子在圆环上均匀分布。随着 γ 增大，相互作用能的重要性也随之提高。一旦相互作用能取代动能成为主导，基态将作另一选择，即让粒子聚集以降低相互作用能。这将导致轴对称性被破坏，并形成亮孤子。此时权重十分平缓地分布于各 $|P^{(j)}\rangle$ 上，如表 5-2 最低两行所示，最大的 3 个权重彼此非常靠近，这暗示着基本对的剧烈涨落。

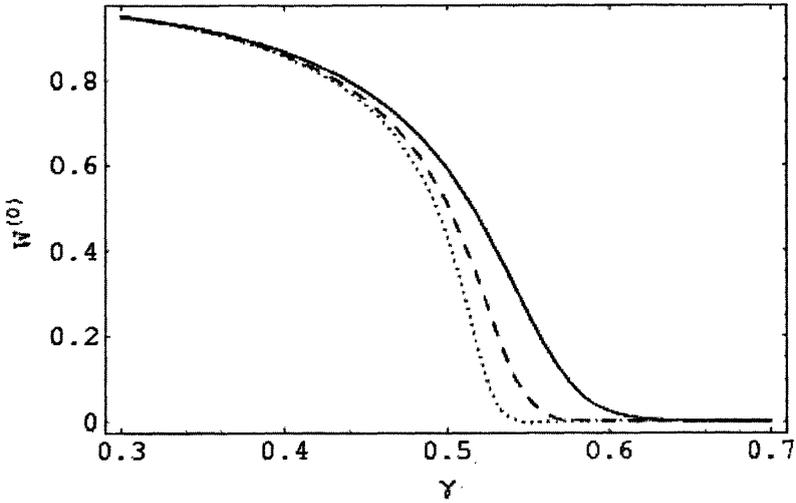


图 5-8 基态中 $W^{(0)}$ 与 γ 的关系，实线、虚线和点线分别对应 $N = 50, 100$ 和 200 。

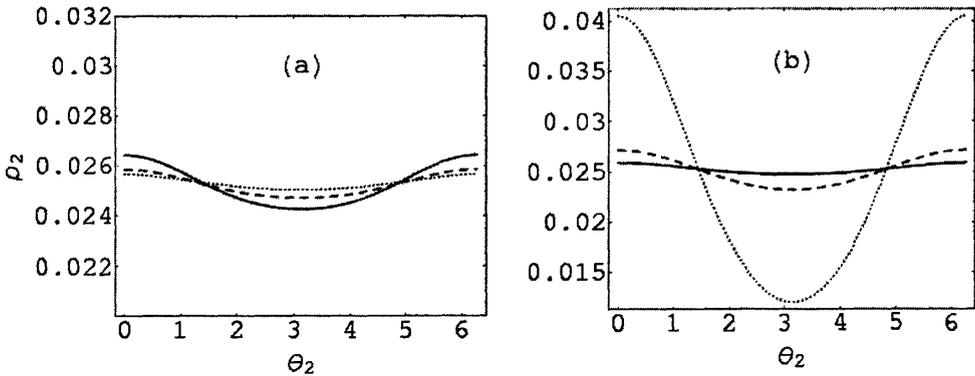


图 5-9 $\theta_1 = 0$ 时 ρ_2 与 θ_2 的函数关系。(a) $\gamma = 0.4$ ，实线、虚线和点线对应 $N = 50, 100$ 和 200 。(b) $N = 100$ ，实线、虚线和点线对应 $\gamma = 0.4, 0.5$ 和 0.6 。

5.4.3 粒子间的关联

参数 γ 同样影响着系统里粒子间的关联。为了分析这一效应，我们引入两体密度函数^[85]

$$\rho_2(\theta_1, \theta_2) = \int d\theta_3 \cdots d\theta_N \Psi^*(\vec{\theta}) \Psi(\vec{\theta}) \quad (5-11)$$

其中 $\Psi(\vec{\theta})$ 是系统的多体波函数, $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ 。 $\rho_2(\theta_1, \theta_2)$ 的物理意义是粒子 1、2 分别位于 θ_1 、 θ_2 的联合概率。利用母配分系数可以容易求得 ρ_2 。图 5-9 显示了 $\theta_1 = 0$ 时 ρ_2 与 θ_2 的函数关系。如 (a) 所示, γ 小于临界值时, ρ_2 的变化范围很小, 说明此时粒子间的关联并不显著, 粒子数增加将进一步削弱关联效应。 γ 一旦超过临界值, 粒子间的关联将显著增强, 如 (b) 所示, 这是系统发生结构相变的直接反映。 ρ_2 在 $\theta_2 = 0$ 或 2π 处取得最大值, 说明粒子倾向于彼此靠近, 这是亮孤子形成的一个信号。

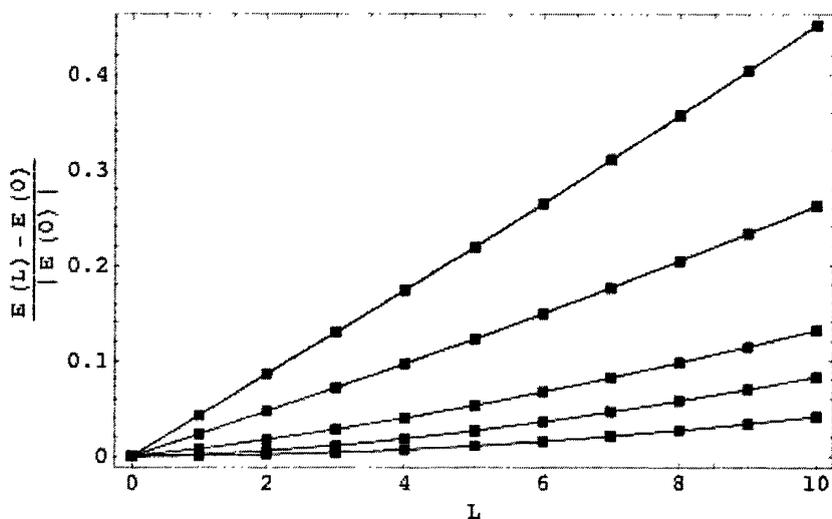


图 5-10 $(E(L) - E(0)) / |E(0)|$ 作为 L 的函数。 $L = 0$ 到 10, $N = 100$, 从上到下各曲线分别对应 $\gamma = 0.3$ 、 0.4 、 0.5 、 0.55 和 0.6 。

5.5 Yrast 态与亮孤子解

这一节我们讨论总角动量 $L \neq 0$ 时系统的最低能态, 即所谓 yrast 态, 以及它们与 MFT 下亮孤子解的关系。以 $E(L)$ 表示 L yrast 态的本征能量, 为了与系统的基态作比较, 图 5-10 画出了 γ 不同取值下 $(E(L) - E(0)) / |E(0)|$ 随 L 的变化。

可以看到, $L=0$ 的 y_{rast} 态总是系统的基态。 γ 较小时, $E(L)$ 随 L 近似线性递增 (最上面两条曲线)。随着 γ 增大, $E(L)$ 上升得越来越慢。当 γ 超过临界值, 前几个 y_{rast} 态的本征能量几乎相同 (最下面两条曲线), 这正是文献[87]中提到的基态的准简并 (quasi-degenerate) 现象, 随着粒子相互作用越来越强, 基态和第一激发态的能隙趋于消失。

在 MFT 框架里, 描写凝聚体基态的波函数 $\psi_0(\theta)$ 服从一维 GP 方程

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2\pi\gamma |\psi_0|^2 \right) \psi_0 = \mu \psi_0 \quad (5-12)$$

其中 μ 为化学势。对于 $\gamma < 1/2$, ψ_0 为常数 $1/\sqrt{2\pi}$; 而对于 $\gamma > 1/2$, 将出现(5-2)第二式的孤子解。 ψ_0 在 $\gamma_c = 1/2$ 处由常数到孤子的转变, 提示了系统所发生的量子相变。下面我们讨论 MFT 的孤子解与哈密顿量对角化所得基态之间的关系。

表 5-3 $N=100$, γ 取不同值时, 对角化和 MFT 两种方法得到的基态能量对比。

γ	0.3	0.4	0.5	0.6
对角化	-14.936	-19.985	-25.169	-31.790
MFT	-15.000	-20.000	-25.000	-31.753

表 5-3 列出了 γ 取不同值时用两种不同方法得到的基态能量。可以看到, 对于表中列出的 γ 值, 两种方法算出的基态能量几乎相等。然而, 两种基态的结构却存在巨大差异。对角化得到的基态, 其单粒子密度总为常数, 即处于该态时粒子在环上均匀分布 (事实上, 多体哈密顿量的任何本征态都具有这一属性)。而 MFT 得到的基态当 $\gamma > 1/2$ 时将出现粒子聚集现象, 即形成亮孤子。坐标表象里亮孤子解的多体波函数写成

$$\Psi(\vec{\theta}) = \prod_i \psi_0(\theta_i) \quad (5-13)$$

Ψ 在 Fock 空间里可用哈密顿量的本征态展开

$$\Psi = \sum_{n,L} C_n^L \Psi_n^L \quad (5-14)$$

其中 Ψ_n^L 表示总角动量 L 的第 n 个本征态, C_n^L 是相应的组合系数。 C_n^L 可通过把

基矢 $|\alpha\rangle$ 变换到坐标表象与 $\Psi(\bar{\theta})$ 作内积求得。既然亮孤子的能量与准确基态的能量非常接近，它应该主要由各 yrast 态 (Ψ_1^L) 组成。图 5-11 显示了 γ 不同取值下 $|C_1^L|^2$ 随 L 的变化 (显然 $|C_{-L}^L|^2 = |C_1^L|^2$)。可以看到，权重分布于相当宽的 L 范围内。随着 γ 增大，分布越来越宽，说明越来越多 yrast 态在亮孤子里占重要地位。随着越来越多 yrast 态进入亮孤子，粒子在环上的聚集越来越明显，表现为波函数 ψ_0 变得越来越窄而突出，如插图所示。综上所述，亮孤子的出现可归结为， γ 大于临界值后，yrast 态出现准简并，它们的混合不会引起能量的显著提高，却能形成空间分布不均匀的状态，亮孤子即是其中一种可能的状态。

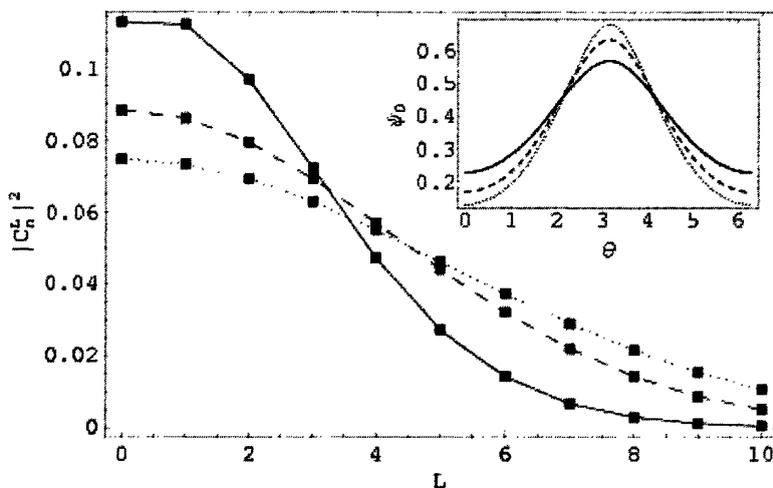


图 5-11 亮孤子中各 yrast 态的权重。实线、虚线和点线分别对应 $\gamma = 0.55$ 、 0.6 和 0.65 。插图是相应 γ 值的亮孤子波函数。

5.6 环形变引起的角动量混合效应

考虑圆环发生一个微小的几何形变，导致空间平移对称性被破坏。例如圆环受轻微挤压形变成椭圆环，相应的曲率为

$$\kappa(\theta) = \frac{\sqrt{1+\eta}}{(1+\eta \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (5-15)$$

其中 θ 为椭圆上的角坐标, $\eta > 0$ 为一小量。形变对凝聚体产生的影响可用简并微扰论作近似估算。由形变引起的微扰哈密顿量为^[94]

$$H' = -\frac{1}{4} \sum_i (\kappa^2(\theta_i) - 1) \quad (5-16)$$

如上节所述, 当 $\gamma > \gamma_{cr}$ 时, y_{rast} 态发生准简并。这里假定 $\gamma = 0.65$, $\eta = 0.21$, 并选取 $L = 0, \pm 1, \dots, \pm 4$ 的 y_{rast} 态构成简并空间, 通过 H' 的作用使简并能级分裂, 并求出近似零级波函数。由图 5-10 最低一条曲线可知, 能被选入构成简并空间的 y_{rast} 态不止上述 9 个。然而为简单计, 只选择了该 9 个, 所得结果已能充分说明形变带来的物理效应。当包括更多 y_{rast} 态, 上述物理效应依然成立, 只是数值关系要作相应变化。

以 f_L 表示简并空间中的 L y_{rast} 态 (即上一节中的 Ψ_L^1), 能级分裂后的近似零级波函数可表示成

$$\chi_n = \sum_L \beta_n^L f_L \quad (5-17)$$

其中 n 是序数, β_n^L 为组合系数。空间反演将引起 f_L 的波函数乘上因子 $(-1)^L$, 因此偶 (奇) 数 L 的 f_L 具有偶 (奇) 宇称, 简并空间相应地分解为一奇一偶两个子空间的直和。同时由于椭圆环的 C_2 对称性, $\{\chi_n\}$ 也分成 $\{\chi_n^{(+)}\}$ 和 $\{\chi_n^{(-)}\}$ 两组, 分别存在于两个子空间。下面列出计算所得的 $\chi_n^{(\pm)}$ 及相应本征能量 $\varepsilon_n^{(\pm)}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(+)} &= -35.42 & \chi_1^{(+)} &= 0.58f_0 - 0.50(f_2 + f_{-2}) - 0.29(f_4 + f_{-4}) \\ \varepsilon_2^{(+)} &= -34.86 & \chi_2^{(+)} &= -0.50(f_2 - f_{-2}) - 0.50(f_4 - f_{-4}) \\ \varepsilon_3^{(+)} &= -34.10 & \chi_3^{(+)} &= 0.58f_0 - 0.0013(f_2 + f_{-2}) + 0.58(f_4 + f_{-4}) \\ \varepsilon_4^{(+)} &= -33.34 & \chi_4^{(+)} &= -0.50(f_2 - f_{-2}) + 0.50(f_4 - f_{-4}) \\ \varepsilon_5^{(+)} &= -32.80 & \chi_5^{(+)} &= 0.58f_0 + 0.50(f_2 + f_{-2}) - 0.29(f_4 + f_{-4}) \end{aligned} \quad (5-18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(-)} &= -35.33 & \chi_1^{(-)} &= 0.60(f_1 + f_{-1}) + 0.37(f_3 + f_{-3}) \\ \varepsilon_2^{(-)} &= -34.57 & \chi_2^{(-)} &= 0.37(f_1 - f_{-1}) + 0.60(f_3 - f_{-3}) \\ \varepsilon_3^{(-)} &= -33.63 & \chi_3^{(-)} &= -0.37(f_1 + f_{-1}) + 0.60(f_3 + f_{-3}) \\ \varepsilon_4^{(-)} &= -32.89 & \chi_4^{(-)} &= 0.60(f_1 - f_{-1}) - 0.37(f_3 - f_{-3}) \end{aligned} \quad (5-19)$$

不难看出, $\chi_{2,4}^{(\pm)}$ 具有奇时间反演对称性, 其它具有偶时间反演对称性。图 5-12

画出了所有 $\chi_n^{(\pm)}$ 的约化单粒子密度函数。可以看到，环上粒子的分布呈现多峰状的集群结构 (cluster structure)，这跟亮孤子相似，同样是 yrast 态混合引起的空间不均匀分布的一种可能结构。图 5-12 显示粒子倾向于聚集在长轴或短轴两端 ($\chi_3^{(+)}$ 除外)，同一组里面，聚集在长轴两端的态能量较低，这是因为 H' 在 $\theta_i = 0$ 或 π 处取得极小值。 $\chi_1^{(+)}$ 的双峰结构可认为是微扰下最稳定的状态。

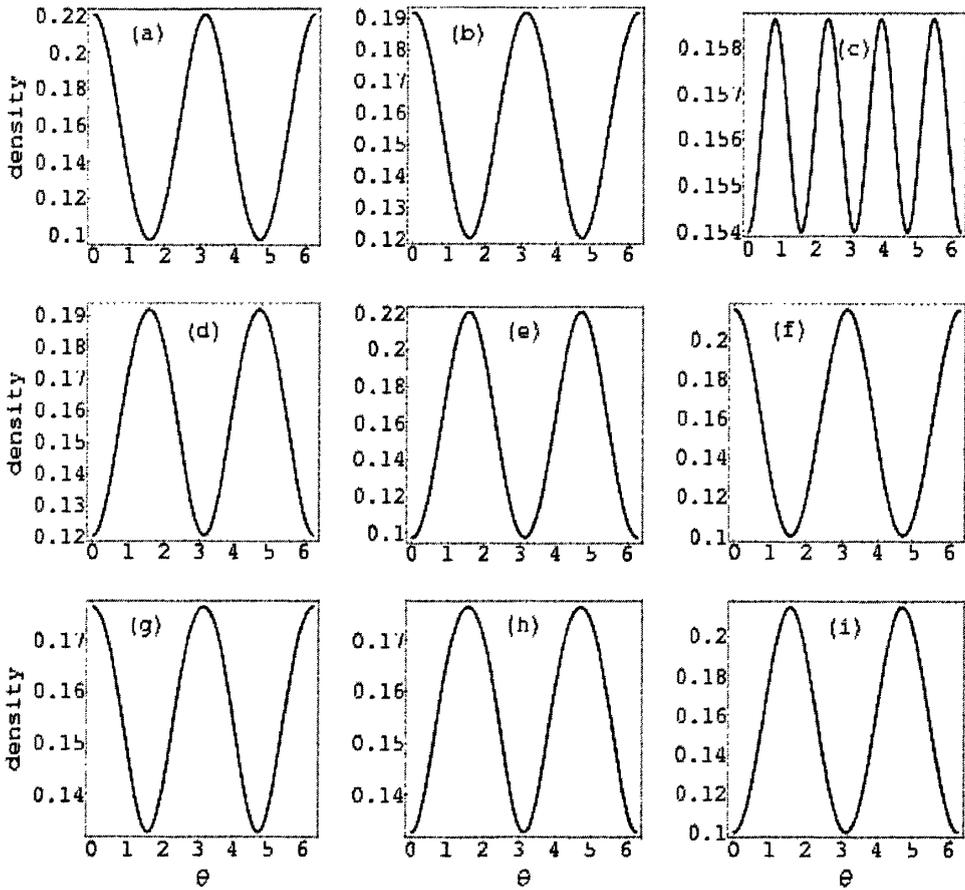


图 5-12 环形变微扰下近似零级波函数的单粒子密度。(a) 到 (e) 为 $\chi_1^{(+)}$ 到 $\chi_5^{(+)}$ ，(f) 到 (i) 为 $\chi_1^{(-)}$ 到 $\chi_4^{(-)}$ 。

利用求得的近似零级波函数，可以进一步计算形变微扰加上后系统在各 yrast 态之间跃迁的概率。假设 $t=0$ 时系统处于 f_{l_0} 的状态，此时形变微扰突然加上 (圆

环突变为椭圆环)。那么 $t (> 0)$ 时刻系统处于 f_l 的概率为

$$P_{L,l_0}(t) = \left| \sum_n \beta_n^{L_0*} \beta_n^L \exp(-i\varepsilon_n t) \right|^2 \quad (5-20)$$

这里 t 的单位是 $2mR^2 / \hbar$ 。由于椭圆环的 C_2 对称性, 奇偶 f_l 间的跃迁是禁戒的。

图 5-13 (a ~ c) 显示了 $P_{0,0}(t)$ 、 $P_{2,0}(t)$ 和 $P_{4,0}(t)$ 随时间的演化, 可以看到, 各跃迁概率均以非常大的幅度 (与 1 同量级) 随时间振荡, 这是量子相变引起的一个显著的物理效应。由于 γ rast 态的准简并, 使得它们之间的量子跃迁变得非常容易发生, 只要有微小的扰动, 就能引起可观的跃迁概率。作为对比, 图 5-13 (d) 显示了 $\gamma = 0.45$ 时 $P_{2,0}(t)$ 的演化。很明显, 由于各 γ rast 态的能量差异较大, 相邻 γ rast 态之间的跃迁概率已经很微小, 不相邻之间的跃迁更是可以忽略不计。这说明, 在弱相互作用下, 形变微扰不会给系统带来可观的效应。

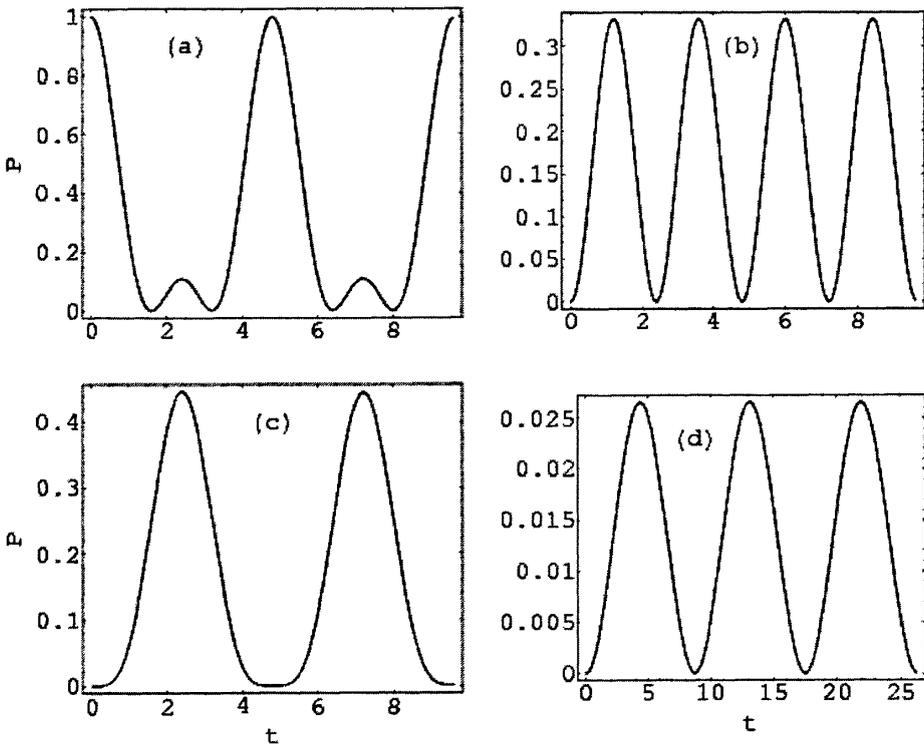


图 5-13 形变微扰下各 γ rast 态之间的跃迁概率。(a)、(b) 和 (c) 是 $P_{0,0}(t)$ 、 $P_{2,0}(t)$ 和 $P_{4,0}(t)$, $\gamma = 0.65$; (d) $\gamma = 0.45$ 时的 $P_{2,0}(t)$ 。 t 的单位是 $2mR^2 / \hbar$ 。

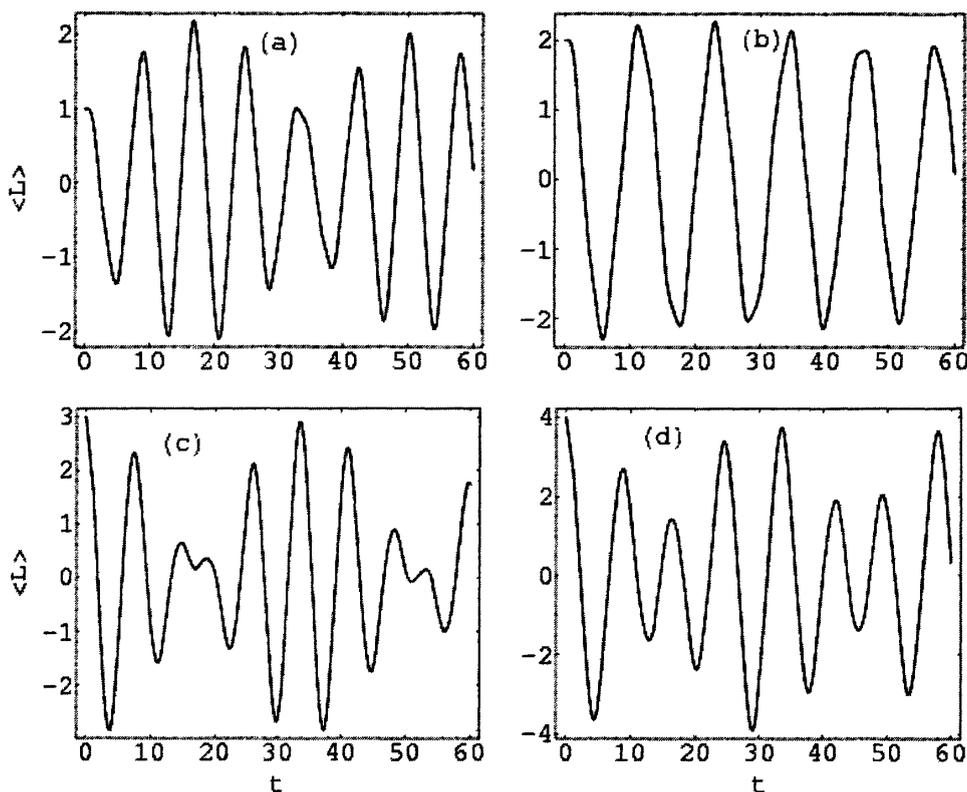


图 5-14 形变微扰下系统平均角动量随时间的演化。(a) 到 (d) 对应初态 f_1 到 f_4 , t 的单位是 $2mR^2 / \hbar$ 。

t 时刻系统的平均角动量可表示成

$$\langle \mathcal{L}(t; L_0) \rangle = \sum_L L P_{L, L_0}(t) = \sum_L L \left| \sum_n \beta_n^{L_0*} \beta_n^L \exp(-i\varepsilon_n t) \right|^2 \quad (5-21)$$

显然 $\langle \mathcal{L}(t; -L_0) \rangle = -\langle \mathcal{L}(t; L_0) \rangle$, $\langle \mathcal{L}(t; 0) \rangle = 0$ 。对于 $L_0 \neq 0$, 图 5-14 显示了 L_0 从 1 到 4 时 $\langle \mathcal{L}(t; L_0) \rangle$ 随时间的演化。与跃迁概率不同, $\langle \mathcal{L}(t; L_0) \rangle$ 随时间作无规则的振荡; 相同的是, 振荡的幅度非常大。这是一个非常有趣的物理图像, 系统原来处于角动量的某一本征态, 当环的形状稍稍改变后, 系统的状态开始剧烈的演化, 无论初态如何, 各简并的 yrast 态都在演化过程中强烈混合, 使得系统的平均角动量强烈的涨落。这种由量子相变引起的显著物理效应, 可望在将来的实验中观察到。

5.7 小结

本章主要讨论了囚禁在圆环上的吸引相互作用玻色系统的结构相变。通过对角化哈密顿量,研究了基态和 yrast 态的性质,这些性质由单一参数 γ 调控。当 γ 超出临界值时,粒子保持在 ϕ_0 的概率显著下降,表明系统发生了结构上的量子相变,此时两体关联函数显示粒子有在空间中聚集的倾向。亮孤子的出现可归结为 yrast 态的混合,由于 yrast 态的准简并,这种混合不会引起能量显著提升。环的几何形变同样引起 yrast 态的强烈混合,相应的单粒子密度呈现集群结构,空间对称性被破坏。形变引起系统状态的剧烈演化,平均角动量大幅涨落。

第6章 结论和展望

旋量 BEC 是当前 BEC 研究领域的一个热点, 因为自旋自由度的释放带来丰富多彩的物理现象, 而且在量子信息学等当代新兴交叉学科中具有广阔应用前景。近年来在一维 BEC 系统中观察到的孤子物质波等现象, 也促使人们广泛关注低维 BEC 的特性。本文在充分调研相关实验和理论研究进展的基础上, 研究了磁场中旋量 BEC 的自旋演化动力学过程, 以及一维环上吸引相互作用 BEC 的结构相变。有别于平均场理论, 本文采用直接对角化哈密顿量的方法讨论上述问题。该方法物理图像清晰, 能给出相对精确的结果, 同时避免了平均场理论的不足。

对于旋量 BEC 的自旋演化, 得到以下主要结论:

(1) 零磁场

演化具有严格周期性, 周期 $t_p = \pi / (|g|\omega)$ 。磁化 $M = 0$ 时, 背景 $B_i^0 \approx 1/2$ 。演化过程可分为振荡区域 (ZOO) 和稳定区域 (ZOS), 演化模式表现为 ZOO—ZOS—ZOO 交替出现。演化的具体特点与初态有关, 当初态 $I = 2k$ 时, ZOO 中包含 k 个完整周期的振荡。特别地, $I = N/4$ 时 ZOO 与 ZOS 等时长, 均为 $t_p/12$ 。当 $I = N/2$ 时, ZOO 与 ZOS 刚好互相转换。

(2) 弱磁场

当 I 靠近 0 或 N 时, P_i^0 对磁场非常敏感, 磁场能轻易地把它们的背景从 $\approx 1/2$ 拉低或抬高到接近各自的 I/N 值。对于 P_0^0 , 演化初始阶段所发生的激烈自旋翻转受磁场作用而被严重抑制; 而对于 P_N^0 , 自旋翻转相反被磁场加速。当 I 不靠近 0 或 N 时, ZOO 和 ZOS 近似保留存在。对于 $I < N/2$, 磁场的作用是缩短 ZOO 并延长 ZOS; 对于 $I > N/2$ 则相反。磁场在 ZOO 和 ZOS 都引起不规则的振荡,

因而演化过程的严格周期性不复存在。

(3) 强磁场

当 $I \approx 0$ 时, 演化被进一步抑制成 $P_i^0 \approx I/N$, 演化图像近似一条水平线。对于 I 靠近 N 则仍保持一定幅度的振荡。所有 B_i^0 都被拉低或抬高到接近 I/N 。演化过程不能再区分为 ZOO 和 ZOS。磁场进一步增强将导致一种新的振荡模式出现, 表现为橄榄形状的脉冲振荡串, 这种模式可通过一阶微扰推导出来。

(4) 非零磁化

磁化 M 增大导致 B_i^M 下降, B_0^M 所受影响最显著, I 越大则影响越轻微。 M 普遍引起演化的振荡频率升高。弱磁场下, 对于 $I < (N-M)/2$, M 破坏 ZOS 的稳定性; 对于 $I > (N-M)/2$ 则相反增强其稳定性。强磁场下 M 对演化模式没有明显影响。

对角化哈密顿量所使用的 Fock 空间具有完备性, 因而得到的结果是精确的, 演化过程的任何信息都可从系统的含时态中提取出来。然而, 因受计算复杂度的限制, 该方法只适用于研究粒子数较小 ($\sim 10^3$) 的系统, 但所得结果对大系统的演化特性仍有指导意义。文中所讨论的初态只限于 Fock 空间的单个基矢, 若初态为若干基矢的相干组合, 则演化过程为相应单个基矢演化的相干叠加, 预期将会发现一些新的有意思的演化模式。若考虑磁场亦随时间变化, 例如作周期振动, 则演化模式必将更丰富多彩, 值得今后进一步细致研究。

对于一维环上吸引相互作用 BEC 的研究, 得到以下主要结论:

(1) 对角化哈密顿量求得 Fock 空间里的基态, 基态中 $|P^{(0)}\rangle$ 的权重 $W^{(0)}$ 可作为判断系统是否发生量子相变的指标。当参数 γ 增大到临界值时, $W^{(0)}$ 将迅速下降到 0, 标志着系统发生结构量子相变。临界点的位置随粒子数增加向平均场预言

的理论值 $1/2$ 靠近。

(2) 被平均场理论忽略的粒子间关联效应, 可利用母配分系数对哈密顿量的本征态进行计算分析。结果表明, 发生相变时基态中粒子间的关联突然显著增强, 粒子表现出强烈的聚集倾向, 系统中出现基本对 (basic pair) 的剧烈涨落。

(3) 发生相变时, 系统各 yrast 态发生准简并 (quasi-degenerate) 现象。Yrast 态的单粒子密度虽为常数, 但它们能组合出粒子在环上不均匀分布的状态, 而且组合后的能量与基态能量很接近, 有机会在 BEC 状态下被观察到。平均场理论推导出的亮孤子态就是由 yrast 态组合而成的一种特殊状态。

(4) γ 大于临界值时, 环的形变将引起显著的物理效应。奇偶性相同的 yrast 态之间可以轻易发生跃迁, 导致系统的总角动量出现很大涨落。这种效应有望在实验中观察得到。

在本例中, 用于对角化哈密顿量的 Fock 空间并非完备 (基矢是经过挑选得到), 因而得到的只是近似结果。然而通过控制基矢的选择, 对于关心的低激发谱, 可以得到准确度很高的结果。同样受制于计算复杂度, 本方法只能处理粒子数较小 ($\sim 10^2$) 的情况。文中对量子相变的物理效应, 尚未系统地讨论清楚, 作为进一步工作, 可研究系统的临界行为, 如计算各种临界指数等。环上的动力学过程也是一个有趣的问题, 例如给定一个初始的粒子分布, 讨论随后分布如何演化, 对角化方法正好可用于解决此类问题。

参考文献

- [1] Bose S. N. The Planck law and the hypothesis. *Z. Phys.*, 1924, 26(2): 178
- [2] Einstein A. *Sitzungsber. Klg. Preuss Akad.* 1924: 261; 1925: 3
- [3] F. London. Phenomenon of Liquid Helium and the Bose-Einstein Degeneracy. *Nature*, 1938, 141: 643
- [4] F. London. On the Bose-Einstein Condensation. *Phys. Rev.*, 1938, 54: 947
- [5] C. E. Hecht. The possible superfluid behaviour of hydrogen atom gases and liquids. *Physica*, 1959, 25: 1159
- [6] D. G. Fried et al. Bose-Einstein Condensation of Atomic Hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, 81: 3811
- [7] M. H. Anderson et al. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science*, 1995, 269: 198
- [8] K. B. Davis et al. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, 75: 3969
- [9] C. C. Bradley et al. Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Gas with Attractive Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, 75: 1687
- [10] C. C. Bradley et al. Bose-Einstein Condensation of Lithium: Observation of Limited Condensate Number. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, 78: 985
- [11] E. A. Cornell and C. E. Wieman. Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Rev. Mod. Phys.*, 2002, 74: 875
- [12] Wolfgang Ketterle. Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser. *Rev. Mod. Phys.*, 2002, 74: 1131
- [13] Petrich K. W. et al. Stable tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atom. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, 74(22): 3352
- [14] 谭维翰. 非线性 and 量子光学. 北京: 科学出版社, 1996
- [15] 王晓辉, 李义民, 王义道. 玻色-爱因斯坦凝聚的物理实现及其应用展望. *物理*, 1998, 27(1): 3
- [16] 尹澜. 玻色-爱因斯坦凝聚领域 Feshbach 共振现象研究进展. *物理*, 2004, 33(8): 558
- [17] Tiesinga, E., Moerdijk, A. J., Verhaar, B. J. & Stoof, H. T. C. Conditions for Bose-Einstein condensation in magnetically trapped atomic cesium. *Phys. Rev. A*, 1992, 46: R1167-R1170
- [18] Tiesinga, E., Verhaar, B. J. & Stoof, H. T. C. Threshold and resonance phenomena in ultracold groundstate collisions. *Phys. Rev. A*, 1993, 47: 4114-4122
- [19] Moerdijk, A. J., Verhaar, B. J. & Axelsson, A. Resonances in ultracold collisions of ${}^6\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$ and ${}^{23}\text{Na}$. *Phys. Rev. A*, 1995, 51: 4852-4861
- [20] Vogels, J. M. et al. Prediction of Feshbach resonances in collisions of ultracold rubidium atoms. *Phys. Rev. A*, 1997, 56: R1067-R1070

- [21] Boesten, H. M. J. M., Vogels, J. M., Tempelaars, J. G. C. & Verhaar, B. J. Properties of cold collisions of ^{39}K atoms and of ^{41}K atoms in relation to Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. A*, 1996, 54: R3726–R3729
- [22] Kevin E. Strecker, Guthrie B. Partridge, Andrew G. Truscott, Randall G. Hulet. Formation and propagation of matter-wave soliton trains. *Nature*, 2002, 417: 150
- [23] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn & W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate. *Nature*, 1998, 392: 151
- [24] Elizabeth A. Donley, Neil R. Claussen, Sarah T. Thompson, Carl E. Wieman. Atom–molecule coherence in a Bose–Einstein condensate. *Nature*, 2002, 417: 529
- [25] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose–Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002
- [26] J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Bose-Einstein Condensation in a Dilute Gas: Measurement of Energy and Ground-State Occupation. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, 77: 4984 – 4987
- [27] Franco Dalfovo, Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii and Sandro Stringari. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 1999, 71: 463 – 512
- [28] Gross, E. P. *Nuovo Cimento*, 1961, 20: 454
- [29] Gross, E. P. *J. Math. Phys.*, 1963, 4: 195
- [30] Pitaevskii, L. P. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1961, 40: 646
- [31] Tiesinga, E., C. J. Williams, P. S. Julienne, K. M. Jones, P. D. Lett, and W. D. Phillips, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, 1996, 101: 505
- [32] H. M. J. M. Boesten¹, C. C. Tsai, J. R. Gardner, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar. Observation of a shape resonance in the collision of two cold ^{87}Rb atoms. *Phys. Rev. A*, 1997, 55: 636 – 640
- [33] E. R. I. Abraham, W. I. McAlexander, C. A. Sackett, and Randall G. Hulet. Spectroscopic Determination of the s-Wave Scattering Length of Lithium. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, 74: 1315 – 1318
- [34] Gordon Baym and C. J. Pethick. Ground-State Properties of Magnetically Trapped Bose-Condensed Rubidium Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, 76: 6 – 9
- [35] R. V. E. Lovelace and T. J. Tommila. Theory of Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen in a dynamic trap. *Phys. Rev. A*, 1987, 35: 3597 – 3606
- [36] Mark Edwards and K. Burnett. Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation for small samples of trapped neutral atoms. *Phys. Rev. A*, 1995, 51: 1382 – 1386
- [37] Edwards, M., R. J. Dodd, C. W. Clark, P. A. Ruprecht, and K. Burnett. Properties of a Bose-Einstein condensate in an anisotropic harmonic potential. *Phys. Rev. A*, 1996, 53: R1950
- [38] F. Dalfovo and S. Stringari. Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices. *Phys. Rev. A*, 1996, 53: 2477 – 2485
- [39] Eddy Timmermans, Paolo Tommasini and Kerson Huang. Variational Thomas-Fermi theory of a nonuniform Bose condensate at zero temperature.

- Phys. Rev. A, 1997, 55: 3645 – 3657
- [40] 茅奕. 玻色—爱因斯坦凝聚的实现及应用. 现代物理知识, 2000, 12(2): 17
- [41] Mewes M. O. et al. Output coupler for Bose-Einstein condensed atoms. Phys. Rev. Lett, 1997, 78(4): 582
- [42] J. I. Cirac, M. Lewenstein, K. Mølmer, and P. Zoller. Quantum superposition states of Bose-Einstein condensates. Phys. Rev. A, 1998, 57: 1208 – 1218
- [43] L.-M. Duan, J. I. Cirac, and P. Zoller. Quantum entanglement in spinor Bose-Einstein condensates. Phys. Rev. A, 2002, 65: 033619
- [44] Tin-Lun Ho and Sung Kit Yip. Fragmented and Single Condensate Ground States of Spin-1 Bose Gas. Phys. Rev. Lett., 2000, 84: 4031 – 4034
- [45] Elena V. Goldstein and Pierre Meystre. Quantum theory of atomic four-wave mixing in Bose-Einstein condensates. Phys. Rev. A, 1999, 59: 3896 – 3901
- [46] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle. Optical Confinement of a Bose-Einstein Condensate. Phys. Rev. Lett., 1998, 80: 2027
- [47] J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur & W. Ketterle. Spin domains in ground-state Bose-Einstein condensates. Nature, 1998, 396: 345
- [48] M.-S. Chang et al. Coherent spinor dynamics in a spin-1 Bose condensate. Nature Physics, 2005, 1: 111
- [49] M.-S. Chang, C. D. Hamley, M. D. Barrett, J. A. Sauer, K.M. Fortier, W. Zhang, L. You, and M. S. Chapman. Observation of Spinor Dynamics in Optically Trapped ^{87}Rb Bose-Einstein Condensates. Phys. Rev. Lett., 2004, 92: 140403
- [50] T. Kuwamoto, K. Araki, T. Eno, and T. Hirano. Magnetic field dependence of the dynamics of ^{87}Rb spin-2 Bose-Einstein condensates. Phys. Rev. A, 2004, 69: 063604
- [51] A. T. Black, E. Gomez, L. D. Turner, S. Jung, and P. D. Lett. Spinor Dynamics in an Antiferromagnetic Spin-1 Condensate. Phys. Rev. Lett., 2007, 99: 070403
- [52] J. Kronjäger, C. Becker, M. Brinkmann, R. Walser, P. Navez, K. Bongs, and K. Sengstock. Evolution of a spinor condensate: Coherent dynamics, dephasing, and revivals. Phys. Rev. A, 2005, 72: 063619
- [53] J. Kronjäger, C. Becker, P. Navez, K. Bongs, and K. Sengstock. Magnetically Tuned Spin Dynamics Resonance. Phys. Rev. Lett., 2006, 97: 110404
- [54] H. Schmaljohann, M. Erhard, J. Kronjager, M. Kottke, S. van Staa, L. Cacciapuoti, J. J. Arlt, K. Bongs, and K. Sengstock. Dynamics of $F = 2$ Spinor Bose-Einstein Condensates. Phys. Rev. Lett., 2004, 92: 040402
- [55] Axel Griesmaier, Jorg Werner, Sven Hensler, Jurgen Stuhler, and Tilman Pfau. Bose-Einstein Condensation of Chromium. Phys. Rev. Lett., 2005, 94: 160401
- [56] A. Gorlitz et al. Sodium Bose-Einstein Condensates in the $F = 2$ State in a Large-Volume Optical Trap. Phys. Rev. Lett., 2003, 90: 090401
- [57] Tin-Lun Ho. Spinor Bose Condensates in Optical Traps. Phys. Rev. Lett., 1998, 81: 742
- [58] T. Ohmi and K. Machida. Bose-Einstein Condensation with internal degrees of freedom in alkali atom gases. J. Phys. Soc. Jpn, 1998, 67: 1822

- [59] C. K. Law, H. Pu, and N. P. Bigelow. Quantum Spins Mixing in Spinor Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, 81: 5257 – 5261
- [60] Bao C G. One-body and Two-body Fractional Parentage Coefficients for Spinor Bose-Einstein Condensation. *Front. Phys. China*, 2006, 1: 92
- [61] C. G. Bao and Z. B. Li. Ground band and a generalized Gross-Pitaevskii equation for spinor Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 2004, 70: 043620
- [62] C. G. Bao and Z. B. Li. First excited band of a spinor Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 2005, 72: 043614
- [63] Wenxian Zhang, D. L. Zhou, M.-S. Chang, M. S. Chapman, and L. You. Coherent spin mixing dynamics in a spin-1 atomic condensate. *Phys. Rev. A*, 2005, 72: 013602
- [64] H. Pu, S. Raghavan, and N.P. Bigelow. Manipulating spinor condensates with magnetic fields: Stochastization, metastability, and dynamical spin localization. *Phys. Rev. A*, 2000, 61: 023602
- [65] S. Yi, O . E. Mustecaplıoglu, C. P. Sun, and L. You. Single-mode approximation in a spinor-1 atomic condensate. *Phys. Rev. A*, 2002, 66: 011601
- [66] H. Pu, C. K. Law, S. Raghavan, J. H. Eberly, and N. P. Bigelow. Spin-mixing dynamics of a spinor Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 1999, 60: 1463
- [67] Roberto B. Diener and Tin-Lun Ho. Quantum Spin Dynamics of Spin-1 Bose Gas. *Arxiv:cond-mat/0608732*, 2006
- [68] Krzysztof Gawryluk,¹ Mirosław Brewczyk, Mariusz Gajda, and Kazimierz Rzążewski. Coherence properties of spinor condensates at finite temperatures. *Phys. Rev. A*, 2007, 76: 013616
- [69] J. Mur-Petit, M. Guilleumas, A. Polls, A. Sanpera, and M. Lewenstein. Dynamics of $F=1$ ^{87}Rb condensates at finite temperatures. *Phys. Rev. A*, 2006, 73: 013629
- [70] Beata J. Dąbrowska-Wüster, Elena A. Ostrovskaya, Tristram J. Alexander, and Yuri S. Kivshar. Multicomponent gap solitons in spinor Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 2007, 75: 023617
- [71] Lee Chang, Q. Zhai, Rong Lu, and L. You. Number Fluctuation Dynamics of Atomic Spin Mixing inside a Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, 99: 080402
- [72] S. Yi and H. Pu. Magnetization, squeezing, and entanglement in dipolar spin-1 condensates. *Phys. Rev. A*, 2006, 73: 023602
- [73] D. R. Romano and E. J. V. de Passos. Population and phase dynamics of $F=1$ spinor condensates in an external magnetic field. *Phys. Rev. A*, 2004, 70: 043614
- [74] M. Moreno-Cardoner, J. Mur-Petit, M. Guilleumas, A. Polls, A. Sanpera, and M. Lewenstein. Predicting Spinor Condensate Dynamics from Simple Principles. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, 99: 020404
- [75] Krzysztof Gawryluk, Mirosław Brewczyk, Kai Bongs, and Mariusz Gajda. Resonant Einstein–de Haas Effect in a Rubidium Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, 99: 130401
- [76] Guan-Fang Wang, Li-Bin Fu and Jie Liu. Spin tunnelling dynamics for spin-1 Bose–Einstein condensates in a swept magnetic field. *J. Phys.: Condens. Matter*, 2008, 20: 045223

- [77] Ma Luo, Zhibing Li, and Chengguang Bao. Evolution of the average populations of spin components of spin-1 Bose-Einstein condensates beyond mean-field theory. *Phys. Rev. A*, 2008, 77: 043625
- [78] A. Görlitz et al. Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, 87: 130402
- [79] Yves Colombe, Demascoth Kadio, Maxim Olshanii, Brigitte Mercier, Vincent Lorent, H I ne Perrin. Schemes for loading a Bose Einstein condensate into a two-dimensional dipole trap. *Journal of Optics B*, 2003, 5: S155
- [80] Ph. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen, F. A. van Abeelen and B. J. Verhaar. Observation of a Feshbach Resonance in Cold Atom Scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, 81: 69 – 72
- [81] J. L. Roberts, N. R. Claussen, James P. Burke, Jr., Chris H. Greene, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. Resonant Magnetic Field Control of Elastic Scattering in Cold ^{85}Rb . *Phys. Rev. Lett.*, 1998, 81: 5109 – 5112
- [82] Kevin E. Strecker, Guthrie B. Partridge, Andrew G. Truscott & Randall G. Hulet. Formation and propagation of matter-wave soliton trains. *Nature*, 2002, 417: 150
- [83] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon. Formation of a Matter-Wave Bright Soliton. *Science*, 2002, 296: 1290
- [84] Al Khawaja U, Stoof HTC, Hulet RG, et al. Bright soliton trains of trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, 89: 200404
- [85] C. G. Bao. Oscillation bands of Bose-Einstein condensates on a ring: Beyond the mean-field theory. *Phys. Rev. A*, 2007, 75: 063626
- [86] Rina Kanamoto, Hiroki Saito, and Masahito Ueda. Quantum phase transition in one-dimensional Bose-Einstein condensates with attractive interactions. *Phys. Rev. A*, 2003, 67: 013608
- [87] Rina Kanamoto, Hiroki Saito, and Masahito Ueda. Symmetry Breaking and Enhanced Condensate Fraction in a Matter-Wave Bright Soliton. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 94: 090404
- [88] G. M. Kavoulakis. Bose-Einstein condensates with attractive interactions on a ring. *Phys. Rev. A*, 2003, 67: 011601
- [89] Rina Kanamoto, Hiroki Saito, and Masahito Ueda. Critical fluctuations in a soliton formation of attractive Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 2006, 73: 033611
- [90] L. D. Carr, Charles W. Clark, and W. P. Reinhardt. Stationary solutions of the one-dimensional nonlinear Schrodinger equation. I. Case of repulsive nonlinearity. *Phys. Rev. A*, 2000, 62: 063610
- [91] L. D. Carr, Charles W. Clark, and W. P. Reinhardt. Stationary solutions of the one-dimensional nonlinear Schrodinger equation. II. Case of attractive nonlinearity. *Phys. Rev. A*, 2000, 62: 063611
- [92] A. Parola, L. Salasnich, R. Rota, and L. Reatto. Quantum phases of attractive matter waves in a toroidal trap. *Phys. Rev. A*, 2005, 72: 063612
- [93] Luca Salasnich. Beyond mean-field theory for attractive bosons under transverse harmonic confinement. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 2006 39: 1743–1750

- [94] P. Leboeuf and N. Pavloff. Bose-Einstein beams: Coherent propagation through a guide. *Phys. Rev. A*, 2001, 64: 033602
- [95] Z. D. Li, P. B. He, L. Li, J. Q. Liang, and W. M. Liu. Magnetic soliton and soliton collisions of spinor Bose-Einstein condensates in an optical lattice. *Phys. Rev. A*, 2005, 71: 053611
- [96] Lu Li, Zaidong Li, Boris A. Malomed, Dumitru Mihalache, and W. M. Liu. Exact soliton solutions and nonlinear modulation instability in spinor Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 2005, 72: 033611
- [97] Lu Li, Boris A. Malomed, Dumitru Mihalache, and W. M. Liu. Exact soliton-on-plane-wave solutions for two-component Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. E*, 2006, 73: 066610
- [98] Z. X. Liang, Z. D. Zhang, and W. M. Liu. Dynamics of a Bright Soliton in Bose-Einstein Condensates with Time-Dependent Atomic Scattering Length in an Expulsive Parabolic Potential. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, 94: 050402
- [99] Zheng-Wei Xie, Weiping Zhang, S. T. Chui, and W. M. Liu. Magnetic solitons of spinor Bose-Einstein condensates in an optical lattice. *Phys. Rev. A*, 2004, 69: 053609
- [100] Zai-Dong Li, Lu Li, W. M. Liu, Jiu-Qing Liang, and T. Ziman. Exact soliton solution and inelastic two-soliton collision in a spin chain driven by a time-dependent magnetic field. *Phys. Rev. E*, 2003, 68: 036102
- [101] L. Salasnich, A. Parola, and L. Reatto. Effective wave equations for the dynamics of cigar-shaped and disk-shaped Bose condensates. *Phys. Rev. A*, 2002, 65: 043614
- [102] Rina Kanamoto, Hiroki Saito, and Masahito Ueda. Stability of the quantized circulation of an attractive Bose-Einstein condensate in a rotating torus. *Phys. Rev. A*, 2003, 68: 043619
- [103] G. M. Kavoulakis. Effectively attractive Bose-Einstein condensates in a rotating toroidal trap. *Phys. Rev. A*, 2004, 69: 023613
- [104] L. Salasnich, A. Parola, and L. Reatto. Transition from three dimensions to one dimension in Bose gases at zero temperature. *Phys. Rev. A*, 2004, 70: 013606

在学期间科研成果

1、**Zhifeng Chen**, Chengguang Bao, and Zhibing Li. Effect of magnetic fields on the spin evolution of non-polarized ^{87}Rb Bose-Einstein condensates. (投稿到 Phys. Rev. A, 相当于本文第 3 章)

2、**Zhifeng Chen** and Zhibing Li. Angular momentum mixing dynamics of attractive Bose-Einstein condensates on a deformed ring. (投稿到 J. Phys. A, 相当于本文第 5 章)

致 谢

本文是在李志兵教授悉心指导和严格要求下完成的。李老师学识渊博，而且平易近人，对我的学习和生活都非常关心。在他指导下度过的六年研究生生涯，是我人生中一笔宝贵的财富。

感谢鲍诚光教授在科研道路上给我的指引。本文自旋演化部分的工作是在他提出和指导下完成的，其它部分的工作也得到他热情的帮助。在此向鲍老师表示衷心的感谢。

感谢何春山师兄的指导，让我熟识并行机群上的操作。感谢吴良凯、庞玮、彭洁、陈桂华、平惊雷、王伟良、苏达贤、罗玛、程晓波和郑炜等同窗好友的帮助，和他们的讨论让我获益良多。

本文的计算工作是在我校理论物理组并行计算机群上完成的。感谢有关领导和老师提供的优越条件，使我能够进行规模较大的数值计算。

还要感谢多年来对我循循善诱的老师，从他们身上学到的不仅是丰富的理论知识，还有作为学者所应具备的风范。