若干反问题模型的数值求解

摘　要

反问题在医学成像、无损探伤、气象预报、图像处理、计量经济、生命科学等领域都有着广泛的应用. 因此对它的理论分析和数值求解有重大的研究意义和应用价值. 本文的主要工作就是针对若干有实际应用背景的反问题模型, 系统开展相关理论分析与数值求解研究工作.

首先, 讨论了一维情形利用带噪声均值数据进行函数重构的问题. 提出了一种正则化方法. 并证明了该方法解的存在唯一性, 再由Banach 空间中的优化定理给出一系列条件来刻画解的性质, 从而发现解可由样条函数表示. 通过插值算子的引进我们也给出了近似解的误差估计. 最后用数值模拟通过图表说明该方法在实际计算时是可行的和有效的, 同时提出了一些选取正则化参数的方法.

进一步, 将此正则化方法推广到了二维甚至高维情形. 通过辅助空间的引入, 同样证明了此方法解的存在唯一性, 并且说明了此解可由格林函数表示. 利用Poincaré不等式给出了近似解的 L^2 模误差估计. 数值例子验证了该方法的有效性, 其中正则化参数由多种不同的选取策略决定.

接着, 考虑了腐蚀探测问题. 给出了薄管区域基于小参数展开方法的一个误差估计. 假设管壁的厚度为 a, 对于提出的两种方法其误差度量分别为 $O(a)$ 和 $O(a^2)$. 同时, 我们用优化控制的思想构造了一个非薄板区域腐蚀探测问题的数值求解方法. 数值实验证明了该方法的可行及有效性.

最后, 本文讨论了二阶线性椭圆型方程的柯西问题. 给出了一种数值方法来求解未知边界上的信息, 该方法通过最优控制的思想将原来的柯西问题改写为等价的优化问题, 并通过添加正则化项来克服离散后问

题的病态性. 证明了该数值方法的收敛性, 给出了当正则化参数趋于零时数值解的收敛理论. 同时提供了一系列的数值实验支持我们的理论结果. 并且通过有限元形函数表示技巧将算法进一步重写, 从而可以利用Hansen工具包来选取合适的正则化参数. 该方法也被推广用于平面弹性力学柯西问题的数值求解.

关键词: 反问题, Tikhonov正则化方法, 函数重构, 迭代最优化, 噪声, 有限元, 误差估计, 柯西问题, 格林函数

THE NUMERICAL METHOD FOR SOME INVERSE PROBLEMS

ABSTRACT

Inverse problems are often encountered in medical imaging, non-destructive detecting, weather forecast, image processing, parameter identification in econometrics, life science and many other fields. Therefore, it is of great importance to investigate their theoretical properties and numerical solutions. This thesis will focus on the theoretical study and algorithm design for some practical inverse problems.

First, we propose a regularization method for the function reconstruction from approximate average fluxes in one dimension. Unique solvability of the method is proved and a number of conditions are given to characterize the solution by the optimization theory in Banach spaces. The solution can be expressed in terms of some spline functions. Error estimates are established after the introduction of some interpolation operators. A series of numerical examples are provided to illustrate the effectiveness and computational performance of the method. Some ideas for the choice of the regularization parameter are also suggested based on the computational experience.

Then, we extend the previous method for the function reconstruction from noisy local averages to any dimension. After the introduction of an auxiliary domain, the reconstruction function can be described in an explicit form by some Green's functions. Error bounds for the approximate solution in L^2-norm are derived by using a novel Poicaré inequality. Several numerical examples are provided to show computational performance of the method, with the regularization parameters selected by different strategies.

Next, we study an inverse problem in corrosion detection. Error analysis is developed for a parameter expansion method used to determine the corrosion coefficient in a pipe. It is shown that the magnitude of the errors is $O(a)$ and $O(a^2)$ for the two proposed methods respectively, where a stands for the thickness of the pipe. Also, a numerical method based on the optimal control approach is proposed for such problems in non-sheet case. Some numerical examples are given to show the efficiency of the method.

Finally, we study a numerical method for solving the Cauchy problem corresponding to an elliptic partial differential equation. The numerical method is based on a reformulation of the Cauchy problem through an optimal control approach coupled with a regularization term which is included to treat the severe ill-conditioning of the corresponding discretized formulation. We prove convergence of the numerical method and present theoretical results for the limiting behaviors of the numerical solution as the regularization parameter approaches zero. Results from some numerical examples are reported. We also extend the method to solve a Cauchy problem for the plane elasticity.

KEY WORDS: Inverse problems, Tikhonov regularization, Function reconstruction, Iterative optimization, Noisy data, Cauchy problem, Green's function, Finite Element, Error bound

上海交通大学

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定, 同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印和电子版, 允许论文被查阅和借阅. 本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索, 可以采用影印、缩印、或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文.

保密□, 在__年解密后适用本授权书.

本学位论文属于

不保密☑.

(请在以上方框内打"√")

学位论文作者签名: 陈宇　　　　指导教师签名: 黄建国

日期: 08年 6 月 19 日　　　　日期: 2008年 6 月 19 日

上海交通大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明: 所呈交的学位论文, 是本人在导师的指导下, 独立进行研究工作所取得的成果. 除论文中已经注明引用的内容外, 本论文不包含任何其他个人或者集体已经发表或撰写过的作品成果. 对本文的研究作出重要贡献的个人和集体, 均已在文中以明确方式标明. 本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担.

学位论文作者签名: 陈宇

日期: 08 年 6 月 19 日

第一章 绪 言

§1.1 反问题的应用背景及意义

数学物理反问题是一个新兴的研究领域, 有着重大的理论意义和应用价值. 它有别于传统学物理方程的定解问题(通常称为正问题, 它由给定的数理方程和相应的定解条件来求解定解问题的解), 通常是已知解的部分信息来求解定解问题中的某些未知量, 如微分方程中的系数、定解问题的区域或者是某些定解条件. 用系统论的语言来讲, 正问题对应于给定系统在已知输入条件下求输出结果的问题, 这些输出结果当然包含了系统的某些信息. 而反问题则是由输出结果的部分信息来反求系统的某些结构特征[1]. 因此反问题在医学成像、无损探伤、气象预报、图像处理、计量经济、生命科学等领域都有着广泛的应用. 它对应于由介质外部可测量的间接信息来确定介质内部结构的问题. 反问题的典型应用包括医学诊断的 CT 成像, 它根据 X 射线的投影来探测人体的内部结构; 在地球物理勘探中, 通过地震波的测量来判断地球内部的结构或地下矿藏的位置; 在无损探伤中, 用红外线扫描来探测固体材料中的缺陷; 通过测量地面上的牛顿引力势来推断地下金属矿藏的位置、形状、密度. 工程技术中的定向设计及系统识别等问题也都属于反问题的范畴.

一个问题如果其解存在、唯一并且连续依赖于输入数据, 就称该问题是适定的, 否则称为不适定的. 数学物理反问题大都具有不适定的特点, 该特点也是反问题求解的难点所在. 例如地质勘探部门在重力异常探矿中突出的地下波场的解析延拓问题, 无线电工程上由有限频率区域上的频域信号确定时域信号的问题, 雷达成像中由反射波信号确定散射体几何形状的问题, 中长期数值天气预报的问题等, 都是典型的不适定问题. 恰恰这些不易解决的问题在工程部门有着极为广泛的应用[2–4]. 当应用经典的方法去求反问题的解时, 或者给定的输入数据不一定能保证解的存在或唯一性; 或者是输入数据的微小变化会引起相应解的巨大波动. 因此如何恢复问题的适定性尤其是稳定性是值得探索的一个课题.

§1.2 反问题的历史发展与研究现状

与正问题相比,数学物理反问题的发展历史相对较短.国外对于反问题理论和方法的研究起步较早,最早期的工作可以追溯到20世纪20年代Hadamard 对线性椭圆型偏微分方程柯西问题不适定性的陈述和研究. 20世纪40年代前苏联著名数学家Tikhonov 率领他的工作小组开始了反问题的理论研究,终于在60年代推出了至今仍然广泛沿用的Tikhonov 变分正则化方法.关于反问题理论和方法研究的另一个方向是迭代正则化方法,该领域的典型代表是Landweber 和 Fridman.近年来发展起来的方法有梯度型方法和Newton 型方法等等[5].

我国学者在反问题的理论和方法研究发面也进行了大量的探索.最早可追溯到20世纪80年代初由中国科学院院士冯康先生倡导的反问题的研究.反问题理论和方法的基础性研究固然重要,但如何把发展了的反问题的理论和方法应用到数学物理、地质与地球物理和大气科学等实际问题上,仍然是十分值得关注和研究的课题.近年来,有关这方面的应用研究也呈现蓬勃发展、欣欣向荣之势态.下面我们将着重介绍与本论文有关的一些反问题的历史发展与研究现状.

对于函数重构的问题,[6]中列举了多项比较传统的数值微分方法,其中主要方法是利用有限差分法并选择合适的步长来进行数值微分的计算.在90年代,Hanke 和 Scherzer 在文献[7]中基于带误差的函数值数据,用Tikhonov 方法讨论了规则网格上的数值微分问题,其中正则化参数由差异性准则决定.其后,程晋、Yamamoto 和王彦博等人在文献[8–11]中沿用了该方法来求解不规则网格情形的数值微分问题,并使用了程晋和 Yamamoto 在文献[12]中提出的一个先验选取正则化参数的方法,大大减小了计算量取得了一批重要的研究成果.其中,一维问题的正则化解是分片样条函数;二维问题的正则化解则运用了微分方程的格林函数或径向基函数来描述.这些方法也成功用于识别图像边界这个图像处理基本问题.而 Delhez 在文献[13]中提出了一个样条函数方法来进行基于均值数据的函数重构.

对于腐蚀系数的探测问题,Inglese 在文献[14]中讨论了薄板情形中在一定的正则性条件下解的唯一性问题,并且构造了正则化数值方法来求解它.进一步地,程晋,杨昕等人在文献[15]中讨论了圆管内壁的腐蚀识别问题,提出了基于小参数展开的可行数值算法. Fasino 和 Inglese 则在文献[16]中提出了在矩形域中用 Galerikin 方法计算腐蚀系数并证明了其收敛性.

对于柯西问题, 早在 1923 年 Hadamard 就用一个特殊例子说明了椭圆型偏微分方程柯西问题的病态性质, 其中就包括了如何根据部分区域上提供的多余测量数据来恢复整个区域上数据的问题, 有关结果于 1953 发表在文献[17]中. 在区域是正方形的假设条件下, 他还得到了基于 Laplace 算子的一个问题的计算结果, 发现其解并不连续依赖于所给定的边值数据. 此后, Payne 在文献[18–20]中讨论了椭圆型柯西问题解的有界性, 给出了若干条件稳定性的结果. Eldén 和 Berntsson 则在文献[21]中给出了一个特定椭圆微分方程柯西问题例子的条件稳定估计. 在 Hadamard 的研究基础上, Belgacem 等人在文献[22, 23]中将区域的限制去除, 推广到了一般区域的问题, 并证明了柯西问题可以借助 Dirichlet→Neumann 映射(又称 Steklov-Poincaré 算子)等价表示为一个双线性变分问题. 由椭圆型方程正则性理论可以证明该算子的紧性, 最后通过线性算子理论和凸优化理论给出了柯西问题解存在与否两种情形下的收敛性分析. 最近, Belgacem 在文献[24]中进一步完整系统地说明了为什么柯西问题是严重病态的, 不管给定区域是光滑的还是非光滑. 至此, 柯西问题的理论框架已经趋向完善, 我们可以在文献[2, 25–30]中获得更多关于柯西问题解的相关理论分析. 但是如何有效的计算柯西问题仍是一个吸引众多研究者不断探索发展的课题. Kobaysashi 在文献[31]中则讨论了两种平面弹性问题的基于优化控制思想的数值求解方法. Cimetière 在文献[32]中研究了迭代正则化方法. Hon 等人则在文献[33]中讨论了 Backus-Gilbert 算法. 程晋等人在文献[34]中通过将柯西问题改写成为矩量问题, 提出了相应的算法. Engl 等人在文献[35]则给出了Mann迭代法的一个先验停机准则. 最近, Bourgeois 在文献[36]中研究了拟可逆方法. Chakib 和 Nachaoui 在文献[37]中将差异性准则和优化控制技巧相结合并给出了其在有限元逼近情形下的一个收敛性分析. Andrieux 等人在文献[38]中讨论了将柯西问题转化成优化问题, 其泛函形式的给出类似于误差的一个能量估计. 更多的数值逼近收敛性分析和算法设计参见[39–47].

此外, 我们可以在王彦飞的著作[5]和刘继军的著作[1]中详细了解数学物理反问题的发展历史, 以及其数值计算方法和在相关各个学科中的应用.

§1.3 本文的主要研究内容

本文重点研究了若干反问题数值算法的提出及实现.

首先讨论了在一维情形利用带噪声均值数据（与[13]不同的是这里给定的数据是带噪声的）进行函数重构的问题. 利用 Tikhonov 正则化方法, 针对解的光滑性要求构造不同的正则化项, 建立适当的求解泛函模型. 通过 Banach 空间中的最优化定理, 我们证明问题的解是存在唯一的, 并且由一阶优化必要条件计算得到解可由样条函数表示. 通过样条函数的性质以及插值算子的构造, 我们给出了此问题在 L^2 模意义下的误差估计. 为了能够利用 Hansen 开发正则化方法-Matlab工具包[48], 我们将问题改造成 Hansen 模型, 从而能够方便地选取多种策略来决定正则化参数. 数值实验表明了理论结果的正确性以及计算的可行性和有效性.

接着我们考虑了更一般的情形, 在二维甚至高维空间中如何由带噪声均值数据进行函数重构的问题. 和一维情形相同, 仍借助于 Tikhonov 正则化方法的思想来处理数据噪声影响. 关键的不同是, 这里目标泛函的构造必须进行一些带有技巧性的修改, 引入了一个辅助函数空间. 这样, 便可以获得此变分问题精确解的显示表达式, 它是基于格林函数的. 利用文献[7, 8]中类似的技巧, 以及 Poincaré 不等式的一个应用, 可以得到问题在 L^2 模意义下近似解的误差估计. 同样地, 我们使用 Hansen 工具包来实现该算法, 选用了多种策略来决定正则化参数. 数值实验表明了理论结果的正确性以及计算的可行性和有效性.

上述问题我们都获得了可知区域上的全部信息来求解其未知量. 但是更为一般的, 有很多问题只能获取部分边界上的信息, 如何由这部分的信息来反求系统的其它特征则更引起了人们的兴趣. 它的一个应用比如说无损伤探测, 因此求解此类问题显得极为重要. 于是我们接着讨论了腐蚀探测问题. 首先给出了薄管腐蚀系数探测问题的一个误差估计. 它建立在小参数展开方法之上, 该方法已由程晋、杨昕等人在文献[15]中通过数值实验验证了其可行性及有效性. 在此基础上结合文献[14]中提供的一些技巧, 我们给出了薄管腐蚀系数的一个误差估计. 对于文献[14]中提供的薄板腐蚀系数基于小参数展开的一个误差估计, 我们所做工作的最大改进是不再需要运用傅立叶级数技巧, 于是可以降低一些对有关函数正则性所提的假设. 同时也给出了在测量数据带误差情形下的一个误差估计. 接着我们讨论了非薄板情形下的腐蚀系数计算问题, 基于优化控制的思想提出了一种数值算法,

并给出数值实验证明了计算的可行性.

最后由二阶线性椭圆偏微分方程的柯西问题模型着手讨论了柯西问题的数值求解. 先运用优化控制的方法将问题改写, 给出了一种 Dirichlet-Neumann 迭代数值方法来求解未知边界上的信息. 由于椭圆型柯西问题是病态的, 所以同样运用了正则化的思想. 证明了在一定的条件假设下, 带正则化项的优化问题的解是存在唯一的, 并给出了解的稳定性分析. 然后, 当柯西问题的解假设存在时, 我们给出了相对应优化控制问题(不带正则化项) 解的存在唯一性定理以及它们之间等价性定理的证明. 同时给出了当正则化参数趋于零时解的收敛理论. 接着讨论了有限元离散后问题的收敛性分析. 数值实验表明了理论结果的正确性以及计算的可行性. 进一步地, 通过有限元形函数表示技巧将算法重写, 使得可以运用 Hansen 工具包来选择合适的正则化参数. 数值实验证明此方法的可行性及有效性. 最后该方法也被推广用于平面弹性力学柯西问题的数值求解.

§1.4 一些基本概念及基本理论

§1.4.1 Sobolev 空间的基本概念及记号

设区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是 Lebesgue 非空可测集, f 是 Ω 上实值 Lebesgue 可测函数, 记

$$\int_\Omega f(x)dx$$

为 Lebesgue 积分. 定义函数 f 的 $L^p(\Omega)$ 范数为

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{0,p,\Omega} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

定理1.4.1. *对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\Omega)$ 是 Banach 空间[49].*

定理1.4.2. *对于 $1 \leqslant p < \infty$, $C_0^\infty(\Omega)$ 在 L^p 中稠密[49].*

下面给出广义导数的概念. 为此引入几个记号[50, 51]. u 是定义在 Ω 上的函数, u 的支集记作

$$\operatorname{supp} u = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}.$$

若紧集 $\overline{\operatorname{supp} u} \subset \Omega$为开集, 也记为 $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$, 则称 u 在 Ω 中有紧支集.

定义1.4.3. 令区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ 或 $C_0^\infty(\Omega)$ 表示在 Ω 中具有紧支集的无穷次可微函数（C^∞ 函数）的集合:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}\, u \subset\subset \Omega\}.$$

令

$$L^1_{\text{loc}(\Omega)} = \{f : f \in L^1(D), \quad \forall \text{紧集} D \subset \Omega\}.$$

定义1.4.4. 称 $f \in L^1_{\text{loc}(\Omega)}$ 具有广义导数 $D_w^\alpha f$ [52], 如果存在 $g \in L^1_{\text{loc}(\Omega)}$, 使得

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) \cdot \partial^\alpha \varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

并记为

$$D_w^\alpha f = g.$$

定义1.4.5. 令 $m \geqslant 0$ 为一整数, Sobolev 空间定义如下:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^1_{\text{loc}(\Omega)} : \|v\|_{m,p,\Omega} < \infty\}.$$

其中Sobolev 范数为

$$\begin{cases} \|v\|_{m,p,\Omega} = \left\{\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha v\|^p_{0,p,\Omega}\right\}^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \\ \|v\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha v\|^p_{0,\infty,\Omega}, \end{cases} \tag{1.4.1}$$

定理1.4.6. Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间.

当 $p = 2$ 时, $W^{m,2}(\Omega)$ 记作 $H^m(\Omega)$.

由于 $C^\infty(\Omega) \subset H(\Omega)$, 且稠密, 定义

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)},$$

即 $H_0^m(\Omega)$ 是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ 的闭包.

§1.4.2 最优化理论与方法

设 X, Y 为 Hilbert 空间, 记 $L(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 的有界线性算子全体.

定义1.4.7. 令泛函 $J: z \in X \to \mathbb{R}$, $S \in X$, 则泛函 J 在 S 上的极小元*(minimizer)*$z^\dagger$ 记作:

$$z^\dagger = \arg\min_{z \in S} J(z).$$

若 $S = X$, 则上述的极小化问题就是无约束的, 若 S 是 X 的真子集, 则其就是带约束的.

定义1.4.8. 称 $z^\dagger$ 为 J 的局部最优解, 如果存在 $\varepsilon > 0$, 使得当

$$\|z - z^\dagger\|_X < \varepsilon, \quad z \in S$$

时, 有

$$J(z^\dagger) \leq J(z).$$

定义1.4.9. $J: z \in S \subset X \to \mathbb{R}$ 是凸的, 如果对任意的 z_1, $z_2 \in S$ 和 $\lambda \in (0,1)$, 都有

$$J(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) \leq \lambda J(z_1) + (1-\lambda)J(z_2).$$

若上述不等式对 $z_1 \neq z_2$ 严格成立, 则称泛函 J 是严格凸的.

定义1.4.10. 算子 $K: X \to Y$ 关于 $z \in X$ 是 Frèchet 可微的充分且必要条件是存在 z 点的 Frèchet 导数 $K'(z) \in L(X,Y)$ 使得

$$K(z+h) = K(z) + K'(z)h + o(\|h\|_X), \quad 当\|h\|_X \to 0时。$$

高阶 Frèchet 导数可以递归定义. 如二阶导数 $K''(z) \in L(X, L(X,Y))$ 可按公式

$$K'(z+\varsigma) = K'(z) + K''(z)\varsigma + o(\|\varsigma\|_X)$$

定义. 映射 $(h,\varsigma) \to (K''\varsigma)h$ 为由 $X \times X$ 到 Y 的有界双线性形式. 该映射是对称的, 即

$$(K''(z)\varsigma)h = (K''(z)h)\varsigma.$$

定义1.4.11. 设泛函 $M: X \to \mathbb{R}$ 关于 z 是 Frèchet 可微的. 则由 Riesz 表示定理, 存在关于 M 在 z 处的梯度 $\mathrm{grad}M(f) \in X$ 使得

$$M'(z)h = (\mathrm{grad}M(f), h)_X. \tag{1.4.2}$$

性质1.4.12. *若泛函 $M: X \to \mathbb{R}$ 关于 z 是 Frèchet 可微的, 则对任意的 $h \in X$, 映射 $\rho \to M(z+\rho H): R \to R$ 在 ρ 可微, 且*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}M(z+\rho h)|_{\rho=0} = (\mathrm{grad}M(z), h)_X. \tag{1.4.3}$$

定理1.4.13. *(一阶必要条件) 设 $M: X \to \mathbb{R}$ 关于 z 是 Frèchet 可微的. 若 $\hat{z}$ 是 M 的局部极小解, 则 $\mathrm{grad}M(\hat{z}) = 0$.*

定义1.4.14. *设 M 关于 z 的二阶 Frèchet 导数存在, 则其导数可以表示为*

$$(M''(z)h)\varsigma = (\mathrm{Hess}M(z)h, \varsigma),$$

其中 $\mathrm{Hess}M(z)$ 为 M 在 F 上关于 z 的 Hessian 阵, 它是一个有界、自伴的线性算子.

定理1.4.15. *设泛函 M 在凸集 C 上二阶 Frèchet 可微的. 则 M 为凸泛函的充分且必要条件是对任意的 $z \in int(C)$, $\mathrm{Hess}M(z)$ 正半定. 进一步, 若 $\mathrm{Hess}M(z)$ 正定, 则 M 是严格凸的.*

在无约束情形我们有下面的二阶充分条件:

定理1.4.16. *设泛函 M 在 $\hat{z}$ 处二阶 Frèchet 可微, $\mathrm{grad}M(\hat{z}) = 0$ 且 $\mathrm{Hess}M(\hat{z})$ 正定, 则 $\hat{z}$ 为 M 的严格局部极小解.*

§1.4.3 正则化理论与方法

假定 $K: X \to Y$ 是紧线性算子, 对精确的右端数据 y , 方程

$$Kx = y \tag{1.4.4}$$

存在唯一解 x .

设有误差的右端项 y^δ 满足

$$\|y^\delta - y\| \leqslant \delta.$$

如何由 y^δ 求 x 的近似值 x^δ ?

在有限维空间中, 近似求解过定的线性代数方程组 $Kx = y$ 时, 方法是求其最小二乘解, 即在有限维空间 X 上极小化连续泛函 $\|Kx - y\|$. 该问题一定是有解的. 但是如果 K 是紧的而 X 是无限维的, 则该极小化问题是不适定的.

定理1.4.17. *设 X, Y 是 Hilbert 空间, $K: X \to Y$ 是有界线性算子. 对 $y \in Y$, 存在 $\hat{x} \in X$ 使得*

$$\|K\hat{x} - y\| \leqslant \|Kx - y\|$$

对一切 $x \in X$ 成立的充分必要条件是 $\hat{x}$ 满足

$$K^*K\hat{x} = K^*y,$$

其中 $K^*: Y \to X$ 是 K 的伴随算子.

一般来说, 不能保证该必要条件的方程解的存在唯一性, 因此该极小化问题是一个不适定的问题. 但如果对极小元 $\hat{x}$ 加上进一步的限制(例如是最小模解), 则可保证极小元的存在唯一性. 因此必须在目标函数 $\|Kx - y\|$ 上加上惩罚项, 使得新目标函数的极小元问题适定(从优化理论角度), 或者使得极小元满足的方程是一个第二类的方程(从积分方程理论的角度). 这就是 Tikhonov 正则化方法求解不适定问题的基本想法[1]. 具体来说, 该问题提为: 对有界线性算子 $K: X \to Y$ 和 $y \in Y$, 求 $x^\alpha \in X$ 使其在 $x \in X$ 上极小化 Tikhonov 泛函

$$J_\alpha = \|Kx - y\|_Y^2 + \alpha\|x\|_X^2, \tag{1.4.5}$$

其中 $\alpha > 0$ 称为正则化参数.

注记1.4.18. *在目标泛函 (1.4.5) 的定义中, 其惩罚项即正则化项可以根据实际问题的需要做不同的处理. 譬如说, 当我们需要一个函数比较光滑的时候, 就可以用其一阶导数在不同范数定义下的值来作为惩罚以达到我们的目的.*

其中关于正则化参数的选择, 始终是一个重要而具有魅力的研究课题. 通常, 有所谓先验(priori) 的和后验的(posteriori) 两类策略.

1. 先验选取准则

   我们根据实际问题模型, 自行定义正则化参数的选取.

2. L-曲线准则(L – Curve Principle)

   L-曲线准则是指以log – log尺度来描述 $\|x_\alpha^\delta\|$ 与 $\|y^\delta - Kx_\alpha^\delta\|$ 的曲线对比, 进而根据该对比结果来确定正则参数的方法. 其名称由来是基于上述尺度作图时将出现一个明显的L-曲线.

   运用 L-曲线准则的关键是给出 L-曲线隅角的数学定义, 进而应用该准则选取参数 α.

Hanke 等[7]建议定义L-曲线的隅角为L-曲线在 log – log 尺度下的最大曲率. 令 $\rho = \log \|y^\delta - Kx_\alpha^\delta\|$, $\theta = \log \|x_\alpha^\delta\|$, 则该曲率作为参数 α 的函数定义作:

$$c(\alpha) = \frac{\rho'\theta'' - \rho''\theta'}{((\rho')^2 + (\theta')^2)^{\frac{2}{3}}},$$

其中 "$'$" 表示关于 α 的微分.

3. Morozov差异性准则(Morozov Discrepancy Principle)

在实际问题中, 表示误差水平的参数 δ 在不少情况下是可以获取或近似得到的, 在这种情况下, 一种广为采用的后验策略是所谓的偏差原理. 设 $\|y - y^\delta\| \leqslant \delta$, 我们欲求算子方程 $Kx = y$, 则方程的合适的解应当满足

$$x \in X, \|Kx - y^\delta\| \leqslant \delta.$$

如果 Range(K) 非闭, 即使 Null(K) = {0}, 集合

$$S = \{x : x \in X, \|Kx - y^\delta\| \leqslant \delta\}$$

也是无界的, 因此我们应当寻求一最小模最小二乘解:

$$\begin{aligned} &\|x\| \to \min \\ &\text{s.t.} \|Kx - y^\delta\| \leqslant \delta. \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

我们又注意到集合 S 为闭凸集, 因此 (1.4.6) 的解在边界达到, 即

$$\begin{aligned} &\|x\|^2 \to \min \\ &\text{s.t.} \quad \|Kx - y^\delta\| = \delta. \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

引入 Lagrange 乘子 λ, 上述等式约束问题等价于下面的无约束优化问题

$$\|x\|^2 + \lambda\|Kx - y^\delta\|^2 \to \min,$$

并且 λ 满足偏差方程

$$\|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 = \delta^2,$$

其中 $\alpha = \frac{1}{\lambda}$.

4. 广义交叉校验准则(GCV)

这一准则通常是对算子方程 (1.4.4) 的离散形式给出的. 仍将 (1.4.4) 的离散化形式记为

$$Kx = y, \tag{1.4.8}$$

其中 $K = (k_{ij})_{m\times n}$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$.

令

$$V(\alpha) = \frac{\|(I - K(\alpha))y^\delta\|^2/m}{\mathrm{Tr}(I - K(\alpha))^2/m}$$

其中 $K(\alpha) = K(K^*K + \alpha I)^{-1}K^*$, $\mathrm{Tr}(I - K(\alpha)) = \sum_{i=1}^{m}(1 - k_{ii}(\alpha))$, $k_{ii}(\alpha)$ 为 $K(\alpha)$ 的对角元素. 这样可取 α^* 满足

$$V(\alpha^*) = \min V(\alpha).$$

5. 拟最优准则(Quasiopt Principle)

Tikhonov 在[53]中指出当数据误差水平 δ 未知时, 可根据下面的拟最优准则:

$$\alpha_{opt} = \min_{\alpha>0}\{\|\alpha\frac{dx^\alpha}{d\alpha}\|\}$$

来确定正则化参数. 其基本思想是: 让正则化参数 α 以及正则解对该参数的变化率同时稳定在尽可能小的水平上.

记 $\rho_q(\alpha) = \|\alpha\frac{d}{d\alpha}x^\alpha\|^2$, $\alpha > 0$, 则 $\rho_q(\alpha)$ 易由公式

$$\alpha\frac{d}{d\alpha}x^\alpha = -\alpha(K^*K + \alpha I)^{-1}x^\alpha$$

算得. 注意到在有限维情形总有 $\rho_q(0) = 0$, 因此在实际计算时应当将初始值 α_0 取的稍大些.

第二章　一维情形基于带噪声均值数据的函数重构

§2.1　问题的描述

设 Δ 是区间 $[a, b]$ 的一个剖分, 其网格记为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b,$$

网格大小定义如下:

$$h = \max_{1 \le i \le N} h_i,\ h_i = x_i - x_{i-1},\ 1 \le i \le N.$$

给定函数 $y = y(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(1 \le i \le N)$ 上的均值 U_i, 我们感兴趣的是如何根据这些已知的信息来有效地重构函数 $y(x)$. 类似于这样的问题经常出现在环境科学和数理统计(根据一段时间内的均值来重构时间序列的问题)等领域中. 譬如说气象预报问题, 当我们获得每月平均值时, 如何通过计算获知它的连续时间进程下的数据. 我们可以在文献[13, 54, 55]中寻求更为详细的资料.

在文献[13]中, Delhez 提出了用样条插值函数来进行基于均值的函数重构的方法, 文中他用四次样条函数代替了三次样条. 数值实验的结果验证了此方法可以有效地根据原始的数据构造出充分光滑的正确的函数.

但我们这里的讨论有所不同. 注意到在实际情形中, 给定的数据 U_i 通常不是函数 y 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的精确均值, 这样的误差来自于测量误差等客观条件因素. 那么在数学中它就可以表示成

$$|U_i - M_i(y)| \le \delta,\ 1 \le i \le N, \tag{2.1.1}$$

其中 $M_i(y) = \dfrac{1}{h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x)dx$, δ 是一个正常数, 它描述了数据的误差水平.

问题 (P) . 给定均值的近似值 U_i 满足条件 (2.1.1), 如何有效的重构函数 $y = y(x)$?

§2.2 一阶导数惩罚

§2.2.1 理论结果及相关证明

对任意的函数 $f \in L^2(a,b)$, 定义在区间 $[x_{i-1}, x_i]$上的均值为:

$$M_i(f) := \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

我们打算用Tikhonov正则化方法来求解问题 (P) [6, 53, 54]. 此方法曾成功地运用于基于节点函数值来进行数值微分这类函数重构的求解问题中[7, 8].

对任意函数 $f \in V := H^1(a,b)$, 我们定义优化泛函为:

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^{N} h_i |M_i(f) - U_i|^2 + \alpha \|f'\|^2_{L^2(a,b)}, \tag{2.2.1}$$

其中 f' 表示函数 f 对独立变量 x求一阶导数, α 是正则化参数, 它可以由许多已提出的策略决定[12, 48, 56–58].

于是我们可以通过求解以下的最小值问题来得到问题 (P) 的近似解 f_*:

$$f_* = \arg\min_{f \in V} \Phi(f). \tag{2.2.2}$$

对于非线性泛函 $J(v)$, 我们定义它在 $v = u$ 处沿方向 w 的方向导数[59]为

$$J'(u; w) = \frac{d}{dt} J(u + tw)\big|_{t=0},$$

沿方向 w_1 和 w_2 的二阶方向导数为

$$J''(u; w_1, w_2) = \frac{d}{dt} J'(u + tw_2, w_1)\big|_{t=0}.$$

引理2.2.1. *由 (2.2.1) 定义的非线性泛函 $\Phi(f)$ 在空间 V 上是严格凸的.*

证明. 任取 V 中的函数 g_1 和 g_2 . 通过计算我们可以证明泛函 $\Phi(f)$ 沿方向 g_1 和 g_2 的二阶导数是

$$\Phi''(f; g_1, g_2) = 2 \sum_{i=1}^{N} M_i(g_1) M_i(g_2) + 2\alpha \int_a^b g_1'(x) g_2'(x) dx.$$

因此, 对任意的 $g \in V$, 我们有

$$\Phi''(f; g, g) \geq 0$$

等号成立当且仅当

$$M_i(g)=0,\ 1\le i\le N;\ g'(x)\equiv 0,\ \forall x\in(a,b),$$

这就等价于 g 在区间 $[a,b]$ 上一致为零. 结合[59, p.13]中的定理 3.2 就得到了我们所要的结果. □

由于 $\phi(f)$ 在空间 V 上是二阶严格凸的, 由[59, p.22] 中的定理 1.2 (也参见[60])很容易得到问题 (2.2.2) 的唯一可解性. 我们接下来将给出一些条件来刻画问题 (2.2.2) 解 f_* 的特征. 利用Banach空间中的最优化理论[59], 我们可知此解必须满足一阶条件:

$$\Phi'(f_*;g)=0. \tag{2.2.3}$$

通过计算我们得到对任意 $g\in V$ 成立

$$\Phi'(f_*;g)=2\sum_{i=1}^{N}h_iM_i(g)(M_i(f_*)-U_i)+2\alpha\int_a^b f_*'(x)g'(x)dx.$$

因此, 结合 (2.2.3) 有

$$\sum_{i=1}^{N}h_iM_i(g)(M_i(f_*)-U_i)+\alpha\int_a^b f_*'(x)g'(x)dx=0,\ \forall g\in V. \tag{2.2.4}$$

在上述方程中特别选取 $g\in C_0^\infty(x_{i-1},x_i)$. 那么通过分部积分便可得到,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\{M_i(f_*)-U_i-\alpha f_*''\}gdx=0.$$

由 g 的任意性知

$$\alpha f_*''(x)=M_i(f_*)-U_i,\ \forall x\in(x_{i-1},x_i), \tag{2.2.5}$$

由于 $\alpha>0$ 并且 (2.2.5) 的右端是常数, 我们知对任意的 $x\in(x_{i-1},x_i)$, $f_*^{(3)}(x)\equiv 0$, 也就是说 $f_*(x)\big|_{(x_{i-1},x_i)}\in P_2(x_{i-1},x_i)$, 其中 $P_k(x_{i-1},x_i)$ 代表指数不超过 k 的多项式集合.

再次运用分部积分, 就得到对任意的 $g\in C^\infty[a,b]$ 有,

$$\begin{aligned}\int_a^b f_*'(x)g'(x)dx&=\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f_*'(x)g'(x)dx\\&=-\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f_*''(x)g(x)dx+\sum_{i=1}^{N}f_*'(x)g(x)\big|_{x=x_{i-1}}^{x_i}.\end{aligned}$$

将它代入 (2.2.4) 并且注意到等式 (2.2.5) 我们得到

$$\sum_{i=1}^{N} f_*'(x)g(x)\Big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} = 0,$$

也就是说,

$$\sum_{i=1}^{N-1}\{f_*'(x_i+0) - f_*'(x_i-0)\}g(x_i) + f_*'(x_N)g(x_N) - f_*'(x_0)g(x_0) = 0.$$

因此,

$$f_*'(x_i+0) = f_*'(x_i-0),\ 1 \le i \le N-1;\ f_*'(x_0) = f_*'(x_N) = 0. \tag{2.2.6}$$

进一步地, 观察到 $f_* \in V$, 以及 $H^1(a,b)$ 紧嵌入到 $C[a,b]$ 的事实[49], 我们知

$$f_*(x_i+0) = f_*(x_i-0),\ 1 \le i \le N-1. \tag{2.2.7}$$

综上所述, 结合 (2.2.5)-(2.2.7) 有 $f_* \in S_2(\Delta)$, 其中

$$S_2(\Delta) := \{f \in C^1[a,b];\ f(x)\big|_{(x_{i-1},x_i)} \in P_2(x_{i-1},x_i),\ 1 \le i \le N,\ f'(x_0) = f'(x_N) = 0\}, \tag{2.2.8}$$

这刚好就是通常意义下的二次样条函数空间[61, 62].

定理2.2.2. *问题 (2.2.2) 存在唯一解 f_*. 更进一步地, f_* 是在 $S_2(\Delta)$ 中唯一满足方程 (2.2.5) 的函数.*

证明. 用反证法证明定理的后半部分. 设 $g \neq f_*$ 是集合 $S_2(\Delta)$ 中满足方程 (2.2.5) 的另一个函数. 利用引理 2.2.1 和 Banach 空间中的 Taylor 公式[59, p.8], 我们有

$$\begin{aligned}\Phi(f_*) &= \Phi(g) + \Phi'(g; f_* - g) + \frac{1}{2}\Phi''(g; f_* - g, f_* - g)\\ &= \Phi(g) + \frac{1}{2}\Phi''(g; f_* - g, f_* - g) > \Phi(g),\end{aligned}$$

这与 f_* 是 $\Phi(f)$ 在 V 中的最小值矛盾. 命题得证. □

接下来, 我们将给出此问题在 L^2 模意义下的误差估计. 为此我们首先引进一个插值算子 Q_h, 它将空间 $L^2(a,b)$ 映射到与剖分 Δ 相一致的阶梯函数空间. 对函数 $f \in L^2(a,b)$, $Q_h f$ 定义如下:

$$Q_h f(x) = M_i(f),\ \forall x \in (x_{i-1}, x_i). \tag{2.2.9}$$

利用[63, 64], 我们可以得到以下的引理.

引理2.2.3. 任取 $f \in H^1(a,b)$,

$$\|f - Q_h f\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \le h_i \|f'\|_{L^2(x_{i-1},x_i)},\ 1 \le i \le N;$$

$$\|f - Q_h f\|_{L^2(a,b)} \le h \|f'\|_{L^2(a,b)}.$$

类似于文献[65, p.558]中 G_h 的构造, 接着我们引进一个新的插值算子 π_h , 它将 $L^2(a,b)$ 映射到 $S_2(\Delta)$, 对任意的 $f \in L^2(a,b)$, $\pi_h f \in S_2(\Delta)$ 定义如下:

$$M_i(\pi_h f) = M_i(f),\ 1 \le i \le N;\ (\pi_h f)'(x_0) = (\pi_h f)'(x_N) = 0. \tag{2.2.10}$$

引理2.2.4. 如上定义的 π_h 是适定的, 并且成立以下等式

$$\|(\pi_h f)'\|^2_{L^2(a,b)} + \|(f - \pi_h f)'\|^2_{L^2(a,b)} = \|f'\|^2_{L^2(a,b)},\ \forall f \in H^1(a,b). \tag{2.2.11}$$

证明. 为了说明算子 π_h 是适定的, 我们首先来证明由约束条件

$$M_i(f) = 0,\ 1 \le i \le N;\ f'(x_0) = f'(x_N) = 0, \tag{2.2.12}$$

可知对任意函数 $f \in S_2(\Delta)$, f 一致为零. 事实上, 注意到 $f''(x)$ 在区间 (x_{i-1}, x_i) 上是常数, 通过分部积分, 利用条件 (2.2.12), 我们知

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f')^2 dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f')^2 dx \\
&= \sum_{i=1}^N \{-\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) f(x) dx + f'(x) f(x)|_{x=x_{i-1}}^{x_i}\} \\
&= -\sum_{i=1}^N f''(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}) h_i M_i(f) + \sum_{i=1}^{N-1} (f'(x_i - 0) - f'(x_i + 0)) f(x_i) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

因此在区间 $[a,b]$ 上 $f' \equiv 0$, 也就是说 f 是常数. 再加上条件 $M_i(f) = 0$ 可以推得 f 必须一致为零. 所以此插值算子是适定的.

接下来我们证明等式 (2.2.11). 由稠密性定理[49]知, 我们只需证明对任意函数 $f \in C^\infty[a,b]$ 成立此结果. 通过直接计算得

$$\|f'\|^2_{L^2(a,b)} = \|(f - \pi_h f)'\|^2_{L^2(a,b)} + \|(\pi_h f)'\|^2_{L^2(a,b)} + 2\int_a^b (f - \pi_h f)(x)(\pi_h f)'(x) dx. \tag{2.2.13}$$

此外, 通过分部积分, 由条件 (2.2.10) 知

$$\begin{aligned}\int_a^b (f-\pi_h f)'(x)(\pi_h f)'(x)dx &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f-\pi_h f)'(x)(\pi_h f)'(x)dx \\ &= -\sum_{i=1}^N (\pi_h f)''(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})h_i M_i(f-\pi_h f) \\ &+ \sum_{i=1}^N (f-\pi_h f)(x)(\pi_h f)'(x)\Big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} \\ &= -\sum_{i=1}^N (\pi_h f)''(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})h_i M_i(f-\pi_h f) \\ &+ (f-\pi_h f)(x_N)(\pi_h f)'(x_N) - (f-\pi_h f)(x_0)(\pi_h f)'(x_0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

结合 (2.2.13) 就得到了所要的结果. □

引理2.2.5. *对于 (2.2.10) 中的插值算子 π_h 成立*

$$\|f-\pi_h f\|_{L^2(a,b)} \le 2h\|f'\|_{L^2(a,b)},\ \forall f\in H^1(a,b).$$

证明. 我们由 π_h 的定义 (2.2.10) 知 $Q_h f = Q_h(\pi_h f)$. 因此, 由引理 2.2.3 和引理 2.2.4 知对任意的 $f\in H^1(a,b)$ 有

$$\begin{aligned}\|f-\pi_h f\|_{L^2(a,b)} &= \|(f-Q_h f)+(Q_h(\pi_h f)-\pi_h f)\|_{L^2(a,b)} \\ &\le \|f-Q_h f\|_{L^2(a,b)} + \|\pi_h f - Q_h(\pi_h f)\|_{L^2(a,b)} \\ &\le h\{\|f'\|_{L^2(a,b)} + \|(\pi_h f)'\|_{L^2(a,b)}\} \le 2h\|f'\|_{L^2(a,b)}.\end{aligned}$$

□

现在我们将给出方法 (2.2.2) 的误差估计.

定理2.2.6. *设 y 是 $H^1(a,b)$ 中的函数, 记 f_* 是方法 (2.2.2) 的解. 假设 (2.2.2) 中的数据 U_i 满足条件 (2.1.1). 那么我们就有估计*

$$\|y-f_*\|_{L^2(a,b)} \le (2\|y'\|_{L^2(a,b)} + \sqrt{b-a}\delta/\sqrt{\alpha})h + 2\delta\sqrt{b-a} + (2h+\sqrt{2\alpha})\|y'\|_{L^2(a,b)}. \tag{2.2.14}$$

特别地, 当我们取 $\alpha=\delta^2$ ([8, 12])时,

$$\|y-f_*\|_{L^2(a,b)} \le (4\|y'\|_{L^2(a,b)} + \sqrt{b-a})h + (2\sqrt{b-a}+\sqrt{2}\|y'\|_{L^2(a,b)})\delta. \tag{2.2.15}$$

证明. 利用三角不等式和引理 2.2.5, 我们有

$$\begin{aligned}\|y-f_*\|_{L^2(a,b)} &\le \|y-\pi_h y\|_{L^2(a,b)}+\|\pi_h y-f_*\|_{L^2(a,b)}\\ &\le 2h\|y'\|_{L^2(a,b)}+\|\pi_h y-f_*\|_{L^2(a,b)}.\end{aligned}\tag{2.2.16}$$

记 $e=\pi_h y-f_*$. 注意到 Q_h 是一个投影算子, 我们得到

$$\begin{aligned}\|e\|^2_{L^2(a,b)} &= \int_a^b e^2dx=\int_a^b e(e-Q_he)dx+\int_a^b (Q_he)^2dx\\ &= I_1+I_2.\end{aligned}\tag{2.2.17}$$

利用 Cauchy-Schwartz 不等式和引理 2.2.3 可得

$$|I_1|\le \|e\|_{L^2(a,b)}\|e-Q_he\|_{L^2(a,b)}\le h\|e\|_{L^2(a,b)}\|e'\|_{L^2(a,)}.\tag{2.2.18}$$

再由引理 2.2.4 知

$$\|e'\|_{L^2(a,b)}\le \|(\pi_h y)'\|_{L^2(a,b)}+\|f_*'\|_{L^2(a,b)}\le \|y'\|_{L^2(a,b)}+\|f_*'\|_{L^2(a,b)}.\tag{2.2.19}$$

由于 f_* 是问题 (2.2.2) 的解, 并且有 $\pi_h y\in V$, 于是很容易知

$$\sum_{i=1}^N h_i|M_i(f_*)-U_i|^2+\alpha\|f_*'\|^2_{L^2(a,b)}\le \Phi(\pi_h y).\tag{2.2.20}$$

再利用引理 2.2.4 和条件 (2.1.1) 计算可得

$$\begin{aligned}\Phi(\pi_h y) &= \sum_{i=1}^N h_i|M_i(\pi_h y)-U_i|^2+\alpha\|(\pi_h y)'\|^2_{L^2(a,b)}\\ &= \sum_{i=1}^N h_i|M_i(y)-U_i|^2+\alpha\|(\pi_h y)'\|^2_{L^2(a,b)}\\ &\le (b-a)\delta^2+\alpha\|y'\|^2_{L^2(a,b)}.\end{aligned}\tag{2.2.21}$$

结合 (2.2.20) 成立

$$\alpha\|f_*'\|^2_{L^2(a,b)}\le \Phi(\pi_h y)\le (b-a)\delta^2+\alpha\|y'\|^2_{L^2(a,b)},$$

也就是说

$$\|f_*'\|_{L^2(a,b)}\le \{(b-a)\delta^2/\alpha+\|y'\|^2_{L^2(a,b)}\}^{1/2}.\tag{2.2.22}$$

因此, 由 (2.2.19) 和 (2.2.22) 知

$$\begin{aligned}\|e'\|_{L^2(a,b)} &\le \|y'\|_{L^2(a,b)} + \|f'_*\|_{L^2(a,b)} \le \|y'\|_{L^2(a,b)} + \{(b-a)\delta^2/\alpha + \|y'\|^2_{L^2(a,b)}\}^{1/2} \\ &\le 2\|y'\|_{L^2(a,b)} + \sqrt{b-a}\delta/\sqrt{\alpha}. \end{aligned}\tag{2.2.23}$$

另一方面, 利用 (2.1.1), (2.2.20) 和 (2.2.21) 可推得

$$\begin{aligned}|I_2| &= \int_a^b (Q_h e)^2 dx = \sum_{i=1}^N h_i M_i^2(e) = \sum_{i=1}^N h_i\{M_i(y) - M_i(f_*)\}^2 \\ &\le 2\{\sum_{i=1}^N h_i(M_i(y) - U_i)^2 + \sum_{i=1}^N h_i(M_i(f_*) - U_i)^2\} \\ &\le 4(b-a)\delta^2 + 2\alpha\|y'\|^2_{L^2(a,b)}.\end{aligned}$$

结合 (2.2.17), (2.2.18) 和 (2.2.23) 意味着

$$\begin{aligned}\|e\|^2_{L^2(a,b)} \le \|e\|_{L^2(a,b)}&(2\|y'\|_{L^2(a,b)} + \sqrt{b-a}\delta/\sqrt{\alpha})h \\ &+ 4(b-a)\delta^2 + 2\alpha\|y'\|^2_{L^2(a,b)},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|e\|_{L^2(a,b)} &\le (2\|y'\|_{L^2(a,b)} + \sqrt{b-a}\delta/\sqrt{\alpha})h + \sqrt{4(b-a)\delta^2 + 2\alpha\|y'\|^2_{L^2(a,b)}} \\ &\le (2\|y'\|_{L^2(a,b)} + \sqrt{b-a}\delta/\sqrt{\alpha})h + 2\delta\sqrt{b-a} + \sqrt{2\alpha}\|y'\|_{L^2(a,b)},\end{aligned}$$

再结合 (2.2.16) 就可以得到 (2.2.14). 估计 (2.2.15) 由 (2.2.14) 直接推得. □

§2.2.2 算法实现及数值结果

我们试图运用由 Hansen 开发的正则化方法-Matlab 工具包[48]来实现方法 (2.2.2) 的算法. 这使得我们能够采用已有的 Matlab 工具包来选择方法 (2.2.2) 中的正则化参数 α, 这其中包括了多种策略譬如说L-曲线, GCV, Morozov 差异性准则[57, 58]. 这样就解决了正则化参数如何恰当选取这一困扰我们的问题. 为了达到这个目的, 第一步我们将 (2.2.2) 改写成标准形式[48, p.9].

$$\boldsymbol{f}_* = \arg\min_{\boldsymbol{f}\in R^n}\{\|\boldsymbol{Af} - \boldsymbol{b}\|_2^2 + \lambda^2\|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})\|_2^2\},\tag{2.2.24}$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示向量的欧几里得范数, $\boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{L} \in R^{p\times n}$ 的秩为 $(\boldsymbol{L}) = p$ 并且 $m \ge n \ge p$. 由于这两个数学模型 (2.2.2) 和 (2.2.24) 第一眼看上去很不同, 所

以这个改写并不容易. 为了说明的方便, 我们只考虑 Δ 为均分剖分的情形, 在实际情况下亦如此. 普通的情形可以用相同的方式处理.

首先, 由于泛函 $\Phi(f)$ 是严格凸的, 由定理 2.2.2 知问题 (2.2.2) 等价于以下的有限维问题:

$$f_* = \arg\min_{f\in S_2(\Delta)} \Phi(f). \tag{2.2.25}$$

接下来我们引进辅助函数空间

$$\tilde{S}_2(\Delta) := \{f \in C[a,b];\ f(x)\big|_{(x_{i-1},x_i)} \in P_2(x_{i-1},x_i),\ 1\le i\le N\}. \tag{2.2.26}$$

由 (2.2.8) 和 (2.2.26) 的定义很容易知 $S_2(\Delta)\subset \tilde{S}_2(\Delta)$, 并成立 $f\in S_2(\Delta)$ 当且仅当 $f\in \tilde{S}_2(\Delta)$ 同时满足条件 (2.2.6).

于是对函数 $f\in \tilde{S}_2(\Delta)$, 我们记 $\boldsymbol{f} = (f_0, f_1, \cdots, f_{2N})^T \in R^{2N+1}$,

$$f_{2i} = f(x_i),\ 0\le i\le N;\ f_{2i-1} = f(x_{i-\frac{1}{2}}),\ 1\le i\le N, \tag{2.2.27}$$

其中 $x_{i-\frac{1}{2}} = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$. 相反, 对任一向量 $\boldsymbol{f}\in R^{2N+1}$, 我们可以找到有且只有一个函数 $f\in \tilde{S}_2(\Delta)$ 使得 (2.2.27) 成立. 在此意义下 $\boldsymbol{f}$ 便是是函数 f 的向量表示.

另一方面, 对函数 $f\in \tilde{S}_2(\Delta)$, 由数值微分和数值积分的基本定理[62]知:

$$M_i(f) = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{1}{6}(f_{2i-2}+4f_{2i-1}+f_{2i}),\ f'(x_{i-1/2}) = \frac{f_{2i}-f_{2i-2}}{h}, \tag{2.2.28}$$

$$f'(x_i+0) = \frac{1}{h}(-3f_{2i}+4f_{2i+1}-f_{2i+2}),\ f'(x_i-0) = \frac{1}{h}(f_{2i-2}-4f_{2i-1}+3f_{2i}). \tag{2.2.29}$$

因此,

$$G_i(\boldsymbol{f}) := \sqrt{h}(M_i(f)-U_i) = \frac{\sqrt{h}}{6}(f_{2i-2}+4f_{2i-1}+f_{2i}-6U_i),\ 1\le i\le N, \tag{2.2.30}$$

同时可知条件 (2.2.6) 等价于

$$\begin{aligned} H_i(\boldsymbol{f}) &:= h^{3/2}(f'(x_i+0)-f'(x_i-0)) \\ &= \sqrt{h}(-f_{2i-2}+4f_{2i-1}-6f_{2i}+4f_{2i+1}-f_{2i+2}) = 0,\ 1\le i\le N-1, \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

和

$$
\begin{aligned}
H_N(\boldsymbol{f}) &:= h^{3/2}f'(x_0) = \sqrt{h}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) = 0, \\
H_{N+1}(\boldsymbol{f}) &:= h^{3/2}f'(x_N) = \sqrt{h}(f_{2N-2} - 4f_{2N-1} + 3f_{2N}) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.2.32}
$$

利用数值积分的 Simpson's 准则, 再加上 (2.2.28) 和 (2.2.29) , 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
\|f'\|^2_{L^2(a,b)} &= \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f'(x))^2dx \\
&= \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{N}\{(f')^2(x_{i-1}+0) + 4(f')^2(x_{i-\frac{1}{2}}) + (f')^2(x_i-0)\} \\
&= \sum_{i=1}^{N}(f_{2i-2}, f_{2i-1}, f_{2i})\begin{pmatrix} \frac{7}{3h} & -\frac{8}{3h} & \frac{1}{3h} \\ -\frac{8}{3h} & \frac{16}{3h} & -\frac{8}{3h} \\ \frac{1}{3h} & -\frac{8}{3h} & \frac{7}{3h} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{2i-2} \\ f_{2i-1} \\ f_{2i} \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{f}^T\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{f} = \|\boldsymbol{L}\boldsymbol{f}\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{2.2.33}
$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}$ 表示 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 的满秩主成分, 有 $\boldsymbol{L} \in R^{2N\times(2N+1)}$.

下面的结果十分关键, 它将 (2.2.24) 和 (2.2.2) 联系在了一起.

定理2.2.7. *设 $\boldsymbol{f}_*$ 是问题 (2.2.2) 的解 f_* 的向量表示. 那么 $\boldsymbol{f}_*$ 是以下问题的唯一解*

$$
\boldsymbol{f}_* = \arg\min_{\boldsymbol{f}\in R^{2N+1}}\tilde{\Phi}(\boldsymbol{f}) = \sum_{i=1}^{N}G_i^2(\boldsymbol{f}) + \sum_{i=1}^{N+1}H_i^2(\boldsymbol{f}) + \lambda^2\|\boldsymbol{L}\boldsymbol{f}\|_2^2,
\tag{2.2.34}
$$

其中 $\alpha = \lambda^2$, $G_i(\boldsymbol{f})$, $H_i(\boldsymbol{f})$ 和 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{f}$ 分别由 (2.2.30)-(2.2.33) 给定.

证明. 设 $\boldsymbol{f}$ 是函数 f 在 $\tilde{S}_2(\Delta)$ 中的向量表示. 由于 $\tilde{S}_2(\Delta) \subset H^1(a,b)$, f_* 是 $\Phi(f)$ 的最小值, 再加上 (2.2.30) 和 (2.2.33) 便知

$$
\Phi(f_*) \le \Phi(f),
$$

也就是说,

$$
\sum_{i=1}^{N}G_i^2(\boldsymbol{f}_*) + \lambda^2\|\boldsymbol{L}\boldsymbol{f}_*\|_2^2 \le \sum_{i=1}^{N}G_i^2(\boldsymbol{f}) + \lambda^2\|\boldsymbol{L}\boldsymbol{f}\|_2^2.
\tag{2.2.35}
$$

进一步地, 我们由定理 2.2.2, (2.2.31) 和 (2.2.32) 知 $\sum_{i=1}^{N+1}H_i^2(\boldsymbol{f}_*) = 0$. 接着结合 (2.2.35) 意味着

$$
\tilde{\Phi}(\boldsymbol{f}_*) \le \tilde{\Phi}(\boldsymbol{f}),\ \forall \boldsymbol{f} \in R^{2N+1}.
$$

所以 $\boldsymbol{f}_*$ 是问题 (2.2.34) 的解. 另一方面, 设 $\tilde{\boldsymbol{f}}_* \in R^{2N+1}$ 是问题 (2.2.34) 的另一个解. 我们首先证明 $\sum_{i=1}^{N+1} H_i^2(\tilde{\boldsymbol{f}}_*) = 0$. 否则, 由上面的推导我们知 $\tilde{\Phi}(\boldsymbol{f}_*) < \tilde{\Phi}(\tilde{\boldsymbol{f}}_*)$, 这样就导致了矛盾. 设 $\tilde{f}_*$ 是 $\tilde{S}_2(\Delta)$ 中的函数, 它的向量表示为 $\tilde{\boldsymbol{f}}_*$. 由于 $\sum_{i=1}^{N+1} H_i^2(\tilde{\boldsymbol{f}}_*) = 0$, 再加上 (2.2.31) 和 (2.2.32) 我们知 $\tilde{f}_*$ 属于 $S_2(\Delta)$. 这意味着 $\tilde{f}_*$ 是问题 (2.2.25) 的解. 因此由定理 2.2.2 知 $\tilde{f}_* \equiv f_*$, i.e., $\tilde{\boldsymbol{f}}_* \equiv \boldsymbol{f}_*$. 这就证明了 $\boldsymbol{f}_*$ 是问题 (2.2.34) 的解. □

通过直接计算, (2.2.34) 便可以写成 (2.2.24) 的形式, 其中 $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \sqrt{h}(U_1, U_2, \cdots, U_N, 0, 0, \cdots, 0)^T. \tag{2.2.36}$$

这里,

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\sqrt{h}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & & & & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{N\times(2N+1)},$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \sqrt{h} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & & & & & \\ & & -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & & & \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & & & & -1 & 4 & -6 & 4 & -1 \end{pmatrix}_{(N-1)\times(2N+1)},$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \sqrt{h} \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}_{2\times(2N+1)}.$$

接下来将给出一些数值例子来说明方法 (2.2.2) 的计算效果. 我们采用了多种正则化参数的选取策略包括一个先验选取准则[12](也可以参见本章定理 2.2.6), 一些后验选取准则包括了 L-曲线、Morozov 差异性准则和 GCV 方法[48, 57, 58]. 下面将这些方法分别简记为 CY, LC, MD 和 GCV. 方法 (2.2.2) 改写成 (2.2.24) 后, 使用由 Hansen [48]开发的正则化工具包中的部分 Matlab 函数来实现我们的算法, 其中 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 分别由 (2.2.36) 和 (2.2.33) 给定.

我们选择区间 $(0,1)$ 并将它 100 等分. 给定区间 $(0,1)$ 上的函数 $y=y(x)$, 那么在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的近似均值 U_i 由下面的随机序列产生:

$$U_i = M_i(y)(1+REL*\text{rand}),$$

其中 rand 表示在区间 $[-1,1]$ 上满足均匀分布的随机数, 而 $REL>0$ 则是描述数据相对误差水平的一个常数. 对于近似解 $f_*(x)$, 我们计算其 L^2 误差 $\|y(x)-f_*(x)\|_{L^2(0,1)}$, 并从数值积分的角度对其进行考察(cf. [62, p.129]).

我们首先比较上述正则化方法 (2.2.2) 和样条函数方法[13] (此方法强求问题的解必须满足自然边界条件, i.e., $f_*''(a)=f_*''(b)=0$, $f_*'''(a)=f_*'''(b)$, 该方法这里就简记为SP) 的数值效果. 我们通过 L-曲线准则来选取问题 (2.2.2) 中的正则化参数 α, 并且选取精确函数为 $y_1(x)=1+30x^2(1-x)^2$. 我们的数值实验证明了当相对误差水平非常小的时候(比如说, 不超过1%), 这两种方法都非常好的还原了光滑函数 y_1. 但是, 当相对误差水平接近 5% 甚至超过 5%, SP 方法的解就出现了剧烈的震荡, 而此时的 LC 方法的解就解的精确度以及形状上仍然非常好地重构了此函数. 相关的结果显示在图 2.1中, 其中$REL=0.05$.

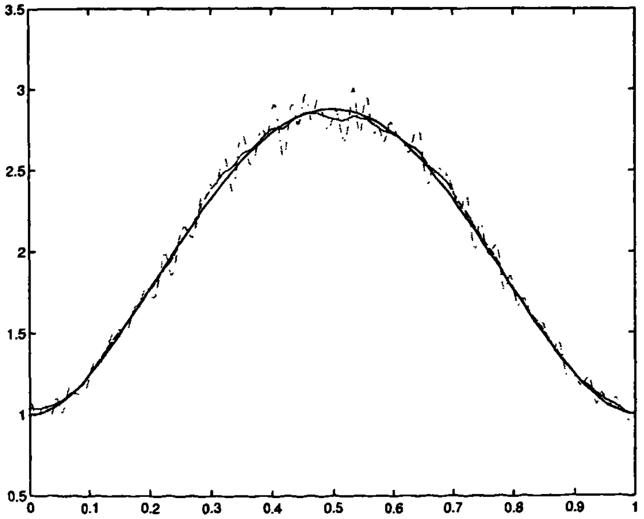


图 2.1: 真解(实线), LC 解(虚线), SP 解(点划线).

Fig.2.1 Graphs of the exact function (the solid curve), the LC solution (the dashed curve) and the SP solution (the dashdot curve).

表 2.1: 对于函数 $y_2(x) = 1 + kx$ 在不同选取准则下的正则化参数.

	α			
k	LC	MD	GCV	CY
0.00	$8.35 \cdot 10^{-6}$	0	$1.2 \cdot 10^3$	10^{-4}
0.01	0.0281	0	$1.2 \cdot 10^3$	10^{-4}
0.05	0.0066	0.1274	0.0031	10^{-4}
0.10	0.0035	0.0358	0.0014	10^{-4}

在其它的数值实验中, 对于不同的光滑函数其拟合效果也出现了类似的现象. 所以我们推测对于函数重构的问题, 当其测量误差相对较大时, 采用正则化技巧来求解问题是必要的.

接下来, 我们将说明当使用不同的正则化参数选取准则(LC, MD, GCV和CY) 时方法 (2.2.2) 的计算效果. 在我们的方法中, 正则化参数起了非常重要的作用, 使得该正则解在函数光滑性要求的满足以及对给定数据拟合精确程度的满足之间取得一个平衡. 我们首先来考虑一个简单的情形 $y_2(x) = 1 + kx$, 其中 k 是一个常数. 在此情形中, 精确解 y_2 的正则化项是 $\|y_2'\|^2_{L^2(0,1)} = k^2$. 我们选取 $REL = 0.01$, 在表 2.1 中列举了 k 分别等于 0.0, 0.01, 0.05 和 0.1 时的正则化参数值, 同时在图 2.2 和图 2.3 显示了对应于 $k = 0.0$ 和 0.05 的正则化解. 从这里开始, 接下来所有的图中, 我们都用实线表示真解, 红色的虚线、绿色的虚线、黄色的点划线和蓝色的点线分别表示方法 LC, GCV, MD 和 CY 对应的解(仅在电子版中显示颜色).

我们观察到当精确函数 y_2 的正则化项 $\|y_2'\|^2_{L^2(0,1)}$ 十分小的时候, LC, MD 和 CY 方法决定的正则化参数比期望的要小很多, 这就导致了严重的函数不够光滑现象. 然而, 在这个特殊的情形中 GCV 取得了让人满意的效果. 如果正则化项变得足够大, 除了 CY 以外的方法都可以非常好地重构原函数.

为了更深一步地认识所有这些正则化参数选取方法的计算效果, 我们进行更多的数值实验, 这里选取函数 $y_3(x) = 5 + \sin(4\pi x)$ 和

$$y_4(x) = \begin{cases} 1 + 2x, & 0 \le x < 0.5, \\ 4 - 2x, & 0.5 \le x \le 1. \end{cases}$$

这里, $y = y_3(x)$ 是一个充分光滑的震荡函数, $y = y_4(x)$ 是一个不连续的分片

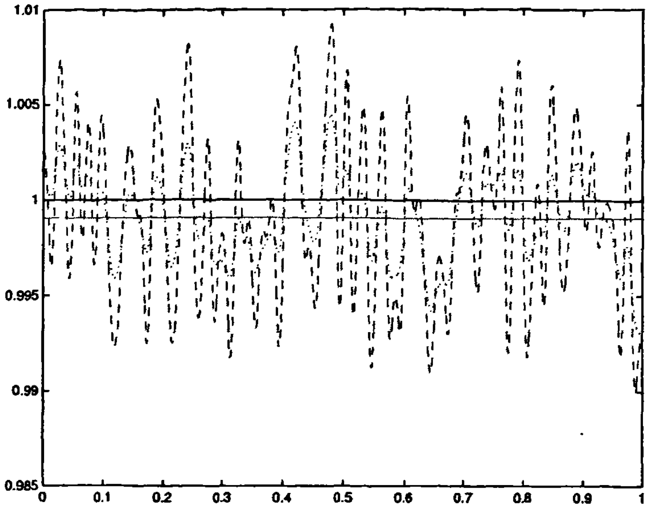


图 2.2: 函数 $y = y_2(x)$ 在 $k = 0.0$ 时的真解和近似解图示.

Fig. 2.2 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_2(x)$ with $k = 0.0$.

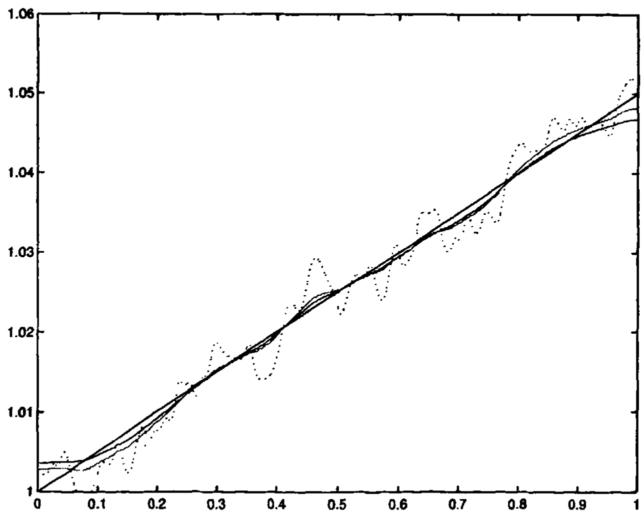


图 2.3: 函数 $y = y_2(x)$ 在 $k = 0.05$ 时的真解和近似解图示.

Fig. 2.3 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_2(x)$ with $k = 0.05$.

表 2.2: 对应于函数 $y = y_3(x)$，不同准则下的L^2-估计和正则化参数.

	α				L^2-error			
REL	LC	MD	GCV	CY	LC	MD	GCV	CY
1%	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	0.02	0.02	0.02	0.02
5%	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$1.34 \cdot 10^{-4}$	0.0025	0.08	0.11	0.07	0.22
10%	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$3.0 \cdot 10^{-4}$	0.01	0.12	0.25	0.13	0.38

光滑函数. 我们给定了不同误差水平下的近似均值数据. 在表 2.2 中给出了函数 $y = y_3(x)$对应的 L^2 -误差和正则化参数, 其相应的数值解显示在图 2.4-2.6 中. 对应于函数 $y = y_4(x)$ 的结果则显示在表 2.3 和图 2.7-2.9 中.

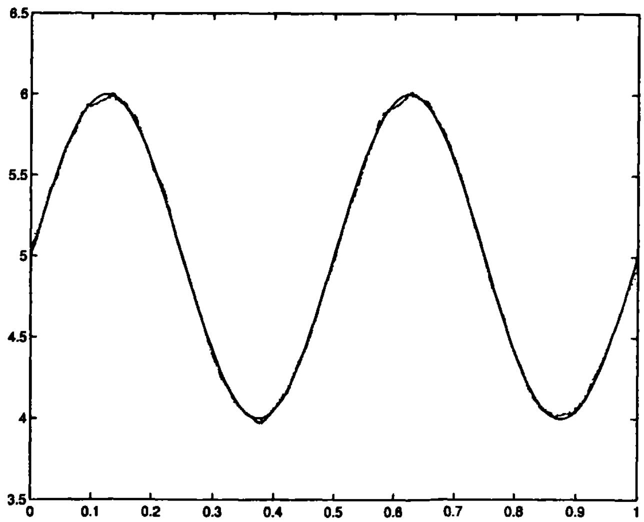


图 2.4: 函数 $y = y_3(x)$ 在 $REL = 0.01$ 时的真解和近似解图示.

Fig. 2.4 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_3(x)$ with $REL = 0.01$.

总结上面这些数值实验, 我们可以得到以下的结论：当 $y = y(x)$ 充分光滑且正则化项 $\|y'\|^2_{L^2(0,1)}$ 足够大时, LC 和 GCV 方法都可以在不同水平的噪声数据下很好地重构函数(相对误差水平 REL 可以选取 1% 到 10%), 此时的正则化参数在同一数量级水平上. 当真解是不连续的分片光滑函数的时候, MD 和 GCV 得到几

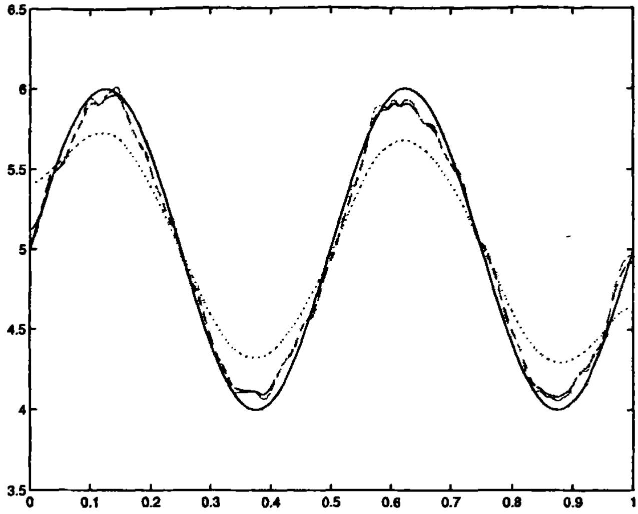


图 2.5: 函数 $y = y_3(x)$ 在 $REL = 0.05$ 时的真解和近似解图示.

Fig. 2.5 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_3(x)$ with $REL = 0.05$.

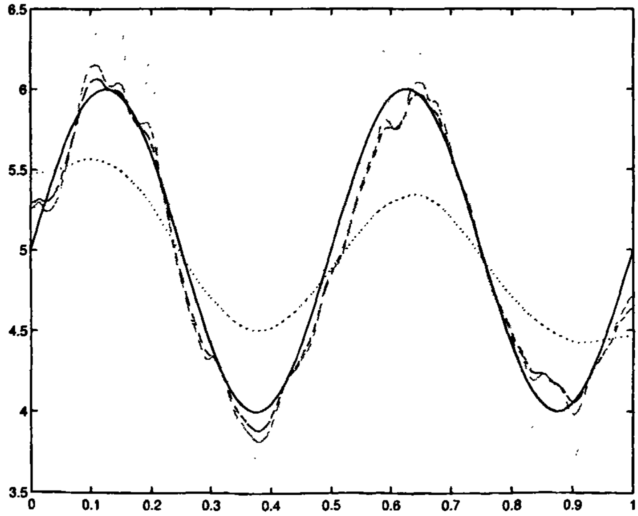


图 2.6: 函数 $y = y_3(x)$ 在 $REL = 0.1$ 时的真解和近似解图示.

Fig. 2.6 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_3(x)$ with $REL = 0.1$.

表 2.3: 对应于函数 $y = y_4(x)$, 不同准则下的L^2-估计和正则化参数.

	α				L^2-error			
REL	LC	MD	GCV	CY	LC	MD	GCV	CY
1%	0.001	$4.37 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^{-4}$	0.09	0.03	0.03	0.05
5%	0.0012	$6.23 \cdot 10^{-5}$	$3.58 \cdot 10^{-5}$	0.0025	0.10	0.05	0.05	0.12
10%	0.0013	$1.34 \cdot 10^{-4}$	$3.17 \cdot 10^{-4}$	0.01	0.11	0.08	0.09	0.19

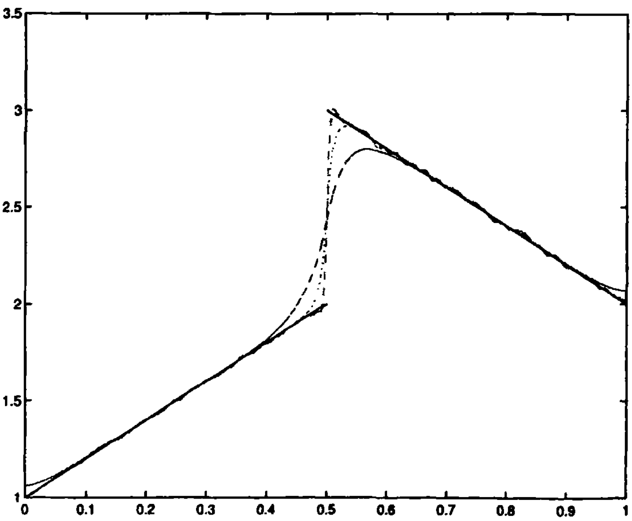


图 2.7: 函数 $y = y_4(x)$ 在 $REL = 0.01$ 时的真解和近似解图示.

Fig. 2.7 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_4(x)$ with $REL = 0.01$.

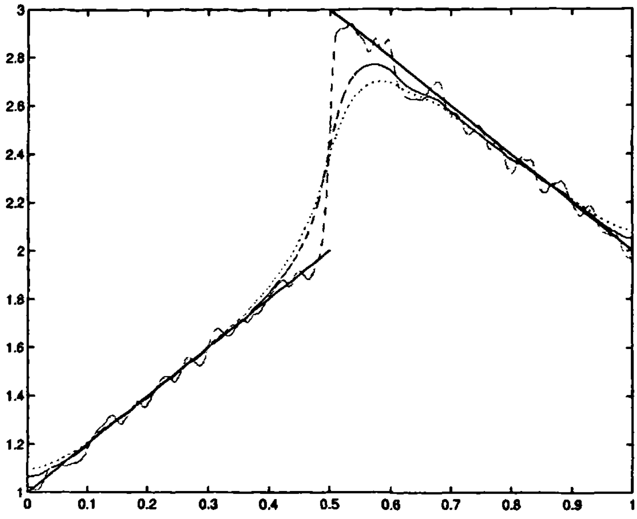


图 2.8: 函数 $y = y_4(x)$ 在 $REL = 0.05$ 时的真解和近似解图示.

Fig. 2.8 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_4(x)$ with $REL = 0.05$.

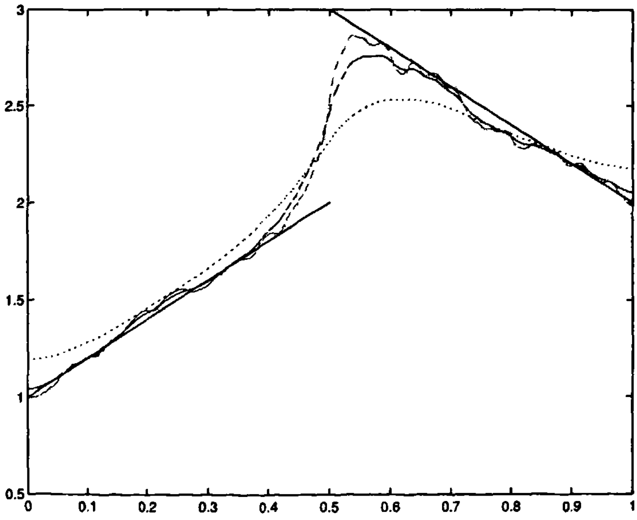


图 2.9: 函数 $y = y_4(x)$ 在 $REL = 0.10$ 时的真解和近似解图示.

Fig. 2.9 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_4(x)$ with $REL = 0.10$.

乎相同的结果, 而 LC 方法所得到的正则化参数则会比期望的大很多, 这就产生了过分光滑的现象, 此类现象在文献[48, 56]中也有提及.

§2.3 二阶导数惩罚

§2.3.1 理论结果及相关证明

在上一小节中我们讨论了用一阶导数作为惩罚的方法, 这一节不妨考虑用二阶导数作为其惩罚, 这适用于我们希望重构的函数充分光滑, 要求其导数也不能太大的波动.

对于函数 $f \in V := H^2(a,b)$, 我们定义优化泛函

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^{N} h_i |M_i(f) - U_i|^2 + \alpha \|f''\|^2_{L^2(a,b)}, \tag{2.3.1}$$

其中 f'' 表示函数 f 对独立变量 x求二阶导数, α 是正则化参数, 它可以由许多已存在的策略决定[12, 48, 56–58].

类似于上一小节中的问题处理, 我们同样可以通过求解以下的最小值问题来得到问题 (P) 的近似解 f_*:

$$f_* = \arg\min_{f \in V} \Phi(f). \tag{2.3.2}$$

引理2.3.1. *由 (2.3.1) 定义的非线性泛函 $\Phi(f)$ 在空间 V 上是严格凸的.*

证明. 任取空间 V 中函数 g_1 和 g_2 . 通过计算我们可以证明 $\Phi(f)$ 沿方向 g_1 和 g_2 的二阶导数是

$$\Phi''(f; g_1, g_2) = 2\sum_{i=1}^{N} M_i(g_1) M_i(g_2) + 2\alpha \int_a^b g_1''(x) g_2''(x) dx.$$

因此, 对任意的 $g \in V$, 我们有

$$\Phi''(f; g, g) \geq 0$$

等号成立当且仅当

$$M_i(g) = 0\,(1 \leq i \leq N),\ g''(x) \equiv 0,\ \forall x \in (a,b),$$

这个就等价于 g 在区间 $[a, b]$ 上一致为零. 结合[59, p.13]中的定理 3.2 就得到了我们所要的结果. □

同样地, 上述问题的解必须满足一阶条件:

$$\Phi'(f_*; g) = 0. \tag{2.3.3}$$

i.e.,

$$\sum_{i=1}^{N} h_i M_i(g)(M_i(f_*) - U_i) + \alpha \int_a^b f_*''(x) g''(x) dx = 0, \ \forall g \in V. \tag{2.3.4}$$

在上述方程中我们选取 $g \in C_0^\infty(x_{i-1}, x_i)$, 那么通过分部积分可以得到:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \{M_i(f_*) - U_i - \alpha f_*^{(4)}\} g dx = 0.$$

由 g 的任意性知

$$\alpha f_*^{(4)}(x) = M_i(f_*) - U_i, \ \forall x \in (x_{i-1}, x_i). \tag{2.3.5}$$

由于 $\alpha > 0$ 并且 (2.3.5) 的右端是常数, 我们知对任意的 $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $f_*^{(5)}(x) \equiv 0$, 也就是说 $f_*(x)\big|_{(x_{i-1}, x_i)} \in P_4(x_{i-1}, x_i)$.

再次分部积分, 就得到对任意的 $g \in C^\infty[a, b]$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_*''(x) g''(x) dx &= \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_*''(x) g''(x) dx \\
&= -\sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_*^{(3)}(x) g'(x) dx + \sum_{i=1}^{N} f_*''(x) g'(x)\big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_*^{(4)}(x) g(x) dx - \sum_{i=1}^{N} f_*^{(3)}(x) g(x)\big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} f_*''(x) g'(x)\big|_{x=x_{i-1}}^{x_i}.
\end{aligned}$$

将它代入 (2.3.4) 并且注意到方程 (2.3.5) 便可得

$$\sum_{i=1}^{N} f_*^{(3)}(x) g(x)\big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} - \sum_{i=1}^{N} f_*''(x) g'(x)\big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} = 0,$$

i.e.,

$$-\sum_{i=1}^{N-1}\{f_*''(x_i+0)-f_*''(x_i-0)\}g'(x_i)+\sum_{i=1}^{N-1}\{f_*^{(3)}(x_i+0)-f_*^{(3)}(x_i-0)\}g(x_i)$$
$$+f_*''(x_N)g'(x_N)-f_*''(x_0)g'(x_0)-f_*^{(3)}(x_N)g(x_N)+f_*^{(3)}(x_0)g(x_0)=0.$$

这就意味着

$$f_*''(x_i+0)=f_*''(x_i-0),\quad f_*^{(3)}(x_i+0)=f_*^{(3)}(x_i-0),\ 1\le i\le N-1; \tag{2.3.6}$$

$$f_*''(x_0)=f_*''(x_N)=f_*^{(3)}(x_0)=f_*^{(3)}(x_N)=0. \tag{2.3.7}$$

进一步地, 观察到 $f_*\in V$, 以及 $H^2(a,b)$ 连续嵌入到 $C^1[a,b]$ 的事实[49], 我们知

$$\begin{cases} f_*(x_i+0)=f_*(x_i-0),\ 1\le i\le N-1,\\ f_*'(x_i+0)=f_*'(x_i-0),\ 1\le i\le N-1, \end{cases} \tag{2.3.8}$$

综上所述, 结合 (2.3.5)-(2.3.8) 有 $f_*\in S_4(\Delta)$, 其中

$$S_4(\Delta):=\{f\in C^3[a,b];\ f(x)\big|_{(x_{i-1},x_i)}\in P_4(x_{i-1},x_i),\ 1\le i\le N,$$
$$f''(x_0)=f''(x_N)=f^{(3)}(x_0)=f^{(3)}(x_N)=0\} \tag{2.3.9}$$

这刚好就是通常意义下的四次样条函数空间[61, 62].

定理2.3.2. *问题 (2.3.2) 存在唯一解 f_*. 更进一步地, f_* 是在 $S_4(\Delta)$ 中唯一满足方程 (2.3.5) 的函数.*

证明. 类似定理 2.2.2 的证明. □

为了得到该方法在 L^2 模意义下的估计, 我们仍取插值算子 Q_h 定义同 (2.2.9).

通过 scaling argument 我们可以得到算子 Q_h 的估计[63, 64], 于是得到以下的引理.

引理2.3.3. *任取 $f\in H^2(a,b)$,*

$$\|f-Q_hf\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}\le h_i^2\|f''\|_{L^2(x_{i-1},x_i)},\ 1\le i\le N;$$

$$\|f-Q_hf\|_{L^2(a,b)}\le h^2\|f''\|_{L^2(a,b)}.$$

使用同样的技巧, 我们引进一个新的插值算子 π_h，它将 $L^2(a,b)$ 映射到 $S_4(\Delta)$, 对任意的 $f \in L^2(a,b)$, $\pi_h f \in S_4(\Delta)$ 定义如下:

$$\begin{cases} M_i(\pi_h f) = M_i(f),\ 1 \le i \le N; \\ (\pi_h f)''(x_0) = (\pi_h f)''(x_N) = (\pi_h f)^{(3)}(x_0) = (\pi_h f)^{(3)}(x_N) = 0. \end{cases} \tag{2.3.10}$$

引理2.3.4. *如上定义的 π_h 是适定的, 并且成立以下等式*

$$\|(\pi_h f)''\|^2_{L^2(a,b)} + \|(f - \pi_h f)''\|^2_{L^2(a,b)} = \|f''\|^2_{L^2(a,b)},\ \forall f \in H^2(a,b). \tag{2.3.11}$$

证明. 为了说明算子 π_h 是适定的, 我们首先证明由约束条件

$$\begin{cases} M_i(f) = 0,\ 1 \le i \le N; \\ f''(x_0) = f''(x_N) = f^{(3)}(x_0) = f^{(3)}(x_N) = 0,. \end{cases} \tag{2.3.12}$$

可知对任意函数 $f \in S_4(\Delta)$, f 一致为零. 事实上, 注意到 $f^4(x)$ 在区间 (x_{i-1}, x_i) 上是常数, 通过分部积分, 利用条件 (2.3.12), 我们知

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f'')^2 dx =& \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f'')^2 dx \\
=& \sum_{i=1}^{N} \{-\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^{(3)}(x) f'(x) dx + f''(x) f'(x)\big|_{x=x_{i-1}}^{x_i}\} \\
=& \sum_{i=1}^{N} \{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^{(4)}(x) f(x) dx - f^{(3)}(x) f(x)\big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} + f''(x) f'(x)\big|_{x=x_{i-1}}^{x_i}\} \\
=& \sum_{i=1}^{N} f^{(4)}(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}) h_i M_i(f) - \sum_{i=1}^{N-1} (f^{(3)}(x_i - 0) - f^{(3)}(x_i + 0)) f(x_i) \\
&+ \sum_{i=1}^{N-1} (f''(x_i - 0) - f''(x_i + 0)) f'(x_i) \\
=& 0,
\end{aligned}$$

因此 $f'' \equiv 0$ 在区间 $[a,b]$ 上, 也就是说 f' 为常数. 再加上条件 $M_i(f) = 0$ 可以推得 f 必须一致为零. 所以此插值算子是适定的.

接下来我们证明等式 (2.3.11). 由稠密性定理[49]知, 我们只需证明对任意函数 $f \in C^\infty[a,b]$ 成立此结果. 通过直接计算得

$$\|f''\|^2_{L^2(a,b)} = \|(f - \pi_h f)''\|^2_{L^2(a,b)} + \|(\pi_h f)''\|^2_{L^2(a,b)} + 2\int_a^b (f - \pi_h f)(x)''(\pi_h f)''(x) dx. \tag{2.3.13}$$

此外, 通过分部积分, 由条件 (2.3.10) 知

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b (f-\pi_h f)''(x)(\pi_h f)''(x)dx \\
=&\sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f-\pi_h f)''(x)(\pi_h f)''(x)dx \\
=&-\sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f-\pi_h f)'(x)(\pi_h f)^{(3)}(x)dx \\
&+\sum_{i=1}^N (f-\pi_h f)'(x)(\pi_h f)''(x)\Big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} \\
=&\sum_{i=1}^N (f-\pi_h f)'(x)(\pi_h f)''(x)\Big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} \\
&-\sum_{i=1}^N (f-\pi_h f)(x)(\pi_h f)^{(3)}(x)\Big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} \\
&+\sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f-\pi_h f)(x)(\pi_h f)^{(4)}(x)dx \\
=&\sum_{i=1}^N (\pi_h f)^{(4)}(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})h_i M_i(f-\pi_h f)) \\
=&0.
\end{aligned}
$$

结合 (2.3.13) 便得到了所要的结果. □

引理2.3.5. *对于 (2.3.10) 中的插值算子 π_h 成立*

$$\|f-\pi_h f\|_{L^2(a,b)} \le 2h^2\|f''\|_{L^2(a,b)},\ \forall f \in H^2(a,b).$$

证明. 我们由 π_h 的定义 (2.3.10) 知 $Q_h f = Q_h(\pi_h f)$. 因此, 由引理 2.3.3 和引理 2.3.4 知对任意的 $f \in H^2(a,b)$ 有,

$$
\begin{aligned}
\|f-\pi_h f\|_{L^2(a,b)} &= \|(f-Q_h f)+(Q_h(\pi_h f)-\pi_h f)\|_{L^2(a,b)} \\
&\le \|f-Q_h f\|_{L^2(a,b)} + \|\pi_h f - Q_h(\pi_h f)\|_{L^2(a,b)} \\
&\le h^2\{\|f''\|_{L^2(a,b)} + \|(\pi_h f)''\|_{L^2(a,b)}\} \le 2h^2\|f''\|_{L^2(a,b)}.
\end{aligned}
$$

□

现在我们将给出方法 (2.3.2) 的误差估计.

定理2.3.6. *设 y 是 $H^2(a,b)$ 中的函数, 记 f_* 是方法 (2.3.2) 的解. 假设 (2.3.2) 中的数据 U_i 满足条件 (2.1.1). 那么我们就有估计*

$$\|y-f_*\|_{L^2(a,b)} \le (2\|y''\|_{L^2(a,b)}+\sqrt{b-a}\delta/\sqrt{\alpha})h^2+2\delta\sqrt{b-a}+(2h^2+\sqrt{2\alpha})\|y''\|_{L^2(a,b)}. \tag{2.3.14}$$

特别地, 当我们取 $\alpha=\delta^2$ ([8, 12])时,

$$\|y-f_*\|_{L^2(a,b)} \le (4\|y''\|_{L^2(a,b)}+\sqrt{b-a})h^2+(2\sqrt{b-a}+\sqrt{2}\|y''\|_{L^2(a,b)})\delta. \tag{2.3.15}$$

证明. 由定理 2.2.6 的证明方法立得. □

§2.3.2 算法实现及数值结果

同上一节的说明, 我们需将问题改写.

首先, 由于泛函 $\Phi(f)$ 是严格凸的, 由定理 2.3.2 知问题 (2.3.2) 等价于以下的有限维问题:

$$f_* = \arg\min_{f\in S_4(\Delta)} \Phi(f). \tag{2.3.16}$$

接下来我们引进辅助函数空间

$$\tilde{S}_4(\Delta) := \{f\in C^1[a,b];\ f(x)\big|_{(x_{i-1},x_i)} \in P_4(x_{i-1},x_i),\ 1\le i\le N\}. \tag{2.3.17}$$

很容易知 $S_4(\Delta)\subset \tilde{S}_4(\Delta)$, 同时成立 $f\in S_4(\Delta)$ 当且仅当 $f\in\tilde{S}_4(\Delta)$ 且满足条件 (2.3.6) 和 (2.3.7).

对任一函数 $f\in\tilde{S}_4(\Delta)$, 我们记 $\boldsymbol{f}=(f_0,f_1,\cdots,f_{3N+1})^T\in R^{3N+2}$,

$$\begin{aligned} f_{3i-3}=f(x_{i-1}),\quad & f_{3i-2}=f'(x_{i-1}),\\ f_{3i-1}=f(x_{i-\frac12}),\quad f_{3i}=f'(x_i),\quad & f_{3i+1}=f(x_i),\\ & 1\le i\le N; \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

其中 $x_{i-\frac12}=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. 相反地, 对任一向量 $\boldsymbol{f}\in R^{3N+2}$, 我们可以找到有且只有一个函数 $f\in\tilde{S}_4(\Delta)$ 使得 (2.3.18) 成立. 在此意义下, 我们就称 $\boldsymbol{f}$ 为函数 f 的向量表示.

另一方面, 对于函数 $f\in\tilde{S}_4(\Delta)$, 一般地我们取其形式为 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 在$[x_{i-1},x_i]$上. 用基本的数值积分和数值微分公式, 我们有[62]

$$
\begin{aligned}
a &= -\frac{2}{h^4}\{4f(x_{i-1}) + hf'(x_{i-1}) - 8f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 4f(x_i) - hf'(x_i)\},\\
b &= \frac{1}{h^4}\{(32x_i + 18h)f(x_{i-1}) + (8x_ih + 5h^2)f'(x_{i-1}) - (64x_i - 32h)f(x_{i-\frac{1}{2}})\\
&\quad +(32x_i + 14h)f(x_i) - (8x_ih + 3h^2)f'(x_i)\},\\
c &= -\frac{1}{h^4}\{(48x_i^2 + 11h^2 + 54x_ih)f(x_{i-1}) + (4h^3 + 12x_i^2h + 15x_ih^2)f'(x_{i-1})\\
&\quad -(96x_i^2 + 16h^2 + 96x_ih)f(x_{i-\frac{1}{2}}) + (48x_i^2 + 5h^2 + 42x_ih)f(x_i)\\
&\quad -(h^3 + 12x_i^2h + 9x_ih^2)f'(x_i)\},
\end{aligned}
\tag{2.3.19}
$$

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{1}{h^4}\{(32x_i^3 + 54x_i^2h + 22x_ih^2)f(x_{i-1}) + (8x_i^3h + h^4 + 15x_i^2h^2 + 8x_ih^3)f'(x_{i-1})\\
&\quad -(32x_ih^2 + 64x_i^3 + 96x_i^2h)f(x_{i-\frac{1}{2}}) + (10x_ih^2 + 32x_i^3 + 42x_i^2h)f(x_i)\\
&\quad -(2x_ih^3 + 8x_i^3h + 9x_i^2h^2)f'(x_i)\},\\
e &= -\frac{1}{h^4}\{(-h^4 + 18x_i^3h + 11x_i^2h^2 + 8x_i^4)f(x_{i-1}) + (2x_i^4h + 4x_i^2h^3 + x_ih^4 + 5x_i^3h^2)f'(x_{i-1})\\
&\quad -(32x_i^3h + 16x_i^2h^2 + 16x_i^4)(x_{i-\frac{1}{2}}) + (5x_i^2h^2 + 14x_i^3h + 8x_i^4)f(x_i)\\
&\quad -(2x_i^4h + 3x_i^3h^2 + x_i^2h^3)f'(x_i)\};\\
&\quad h = x_{i+1} - x_i;\ 0 \le i \le N-1,
\end{aligned}
$$

$$
M_i(f) = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{1}{h}(a\frac{x^5}{5} + b\frac{x^4}{4} + c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^2}{2} + ex)\Big|_{x=x_{i-1}}^{x_i};\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i]
\tag{2.3.20}
$$

$$
f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c, \quad f^{(3)}(x) = 24ax + 6b;\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i].
\tag{2.3.21}
$$

于是,

$$
G_i(\boldsymbol{f}) := \sqrt{h}(M_i(f) - U_i) = \frac{1}{\sqrt{h}}\{(a\frac{x^5}{5} + b\frac{x^4}{4} + c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^2}{2} + ex)\Big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} - 6U_i\},\ 1 \le i \le N,
\tag{2.3.22}
$$

同时条件 (2.3.6) 和 (2.3.7) 就等价于

$$
\begin{aligned}
H_i(\boldsymbol{f}) &:= f''(x_i+0) - f''(x_i-0) = (12ax^2 + 6bx + 2c)\Big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} = 0,\ 1 \le i \le N-1,\\
H_{i+N-1}(\boldsymbol{f}) &:= f^{(3)}(x_i+0) - f^{(3)}(x_i-0) = (24ax + 6b)\Big|_{x=x_{i-1}}^{x_i} = 0,\ 1 \le i \le N-1,
\end{aligned}
\tag{2.3.23}
$$

并且

$$
\begin{aligned}
H_{2N-1}(\boldsymbol{f}) &:= f''(x_0) = (12ax^2+6bx+2c)\big|_{x_0} = 0,\\
H_{2N}(\boldsymbol{f}) &:= f''(x_N) = (12ax^2+6bx+2c)\big|_{x_N} = 0,\\
H_{2N+1}(\boldsymbol{f}) &:= f^{(3)}(x_0) = (24ax+6b)\big|_{x_0} = 0,\\
H_{2N+2}(\boldsymbol{f}) &:= f^{(3)}(x_N) = (24ax+6b)\big|_{x_N} = 0.
\end{aligned} \tag{2.3.24}
$$

利用 (2.3.20) 和 (2.3.21) 我们也可以得到

$$
\begin{aligned}
\|f''\|^2_{L^2(a,b)} &= \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f''(x))^2dx\\
&= 4\{\frac{36}{5}a^2x^5+9abx^4+(4ac+3bb)x^3+3bcx^2+c^2x\}\big|_{x=x_{i-1}}^{x_i}\\
&= \sum_{i=1}^{N}(f(x_{i-1}),f'(x_{i-1}),f(x_{i-\frac{1}{2}}),f(x_i),f'(x_i))\tilde{\boldsymbol{L}}\begin{pmatrix} f(x_{i-1})\\ f'(x_{i-1})\\ f(x_{i-\frac{1}{2}})\\ f(x_i)\\ f'(x_i)\end{pmatrix}\\
&= \boldsymbol{f}^T\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{f} = \|\boldsymbol{L}\boldsymbol{f}\|_2^2,
\end{aligned} \tag{2.3.25}
$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}$ 表示 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 的满秩主成分, 并有 $\boldsymbol{L} \in R^{3N\times(3N+2)}$.

同样地,我们有以下定理将模型 (2.2.24) 和问题 (2.3.2) 联系到了一起.

定理2.3.7. *设 $\boldsymbol{f}_*$ 是问题 (2.3.2) 的解 f_* 的向量表示. 那么 $\boldsymbol{f}_*$ 是以下问题的唯一解*

$$
\boldsymbol{f}_* = \arg\min_{\boldsymbol{f}\in R^{3N+2}}\tilde{\Phi}(\boldsymbol{f}) = \sum_{i=1}^{N}G_i^2(\boldsymbol{f}) + \sum_{i=1}^{2N+2}H_i^2(\boldsymbol{f}) + \lambda^2\|\boldsymbol{L}\boldsymbol{f}\|_2^2, \tag{2.3.26}
$$

其中 $\alpha = \lambda^2$, $G_i(\boldsymbol{f})$, $H_i(\boldsymbol{f})$ 和 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{f}$ 分别由 (2.2.30)-(2.2.33) 给定.

证明. 类似定理 2.2.7 的证明方法即可得到. □

通过直接计算, (2.3.26) 可以写成 (2.2.24) 的形式, 其中 $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$,

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \sqrt{h}(U_1,U_2,\cdots,U_N,0,0,\cdots,0)^T. \tag{2.3.27}
$$

这里

$$A_1 \in R^{N\times(3N+2)},\ A_2 \in R^{(2N-2)\times(3N+2)},\ A_3 \in R^{4\times(3N+2)}, \tag{2.3.28}$$

接下来, 我们仍将通过一些数值例子来说明方法 (2.3.2) 的实验效果, 其中正则化参数的选取策略我们采用了一个先验选取准则[12](也可以参见本章定理 2.3.6), 一些后验选取准则包括了 L-曲线、Morozov 差异性准则、拟最优准则和 GCV 方法[48, 57, 58]. 下面我们将这些方法分别简记为 CY, LC, MD, QO 和 GCV.

同样地, 我们首先考虑本节所介绍的正则化方法 (2.3.2) 和样条函数方法参考文献[13]之间的差别. 我们通过L-curve 准则来选取问题 (2.3.2) 中的正则化参数 α, 并且选取精确函数为 $y_1(x) = 1 + 30x^2(1-x)^2$. 我们的数值实验证明了此方法也是有效的. 并且当相对误差水平接近 5% 甚至超过 5%, 出现了类似一阶导数情形下的结果. 相关的结果显示在图 2.10 中, 其中 $REL = 0.05$.

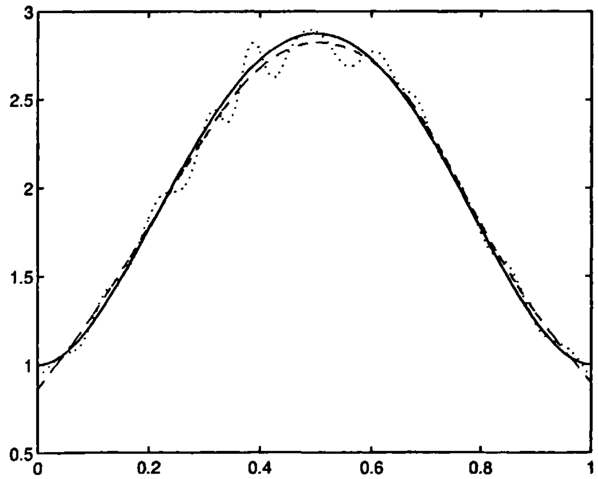


图 2.10: 真解(实线), LC 解(虚线), SP 解(点划线).

Fig.2.10 Graphs of the exact function (the solid curve), the LC solution (the dashed curve) and the SP solution (the dashdot curve).

再次验证了我们的推测, 对于函数重构的问题, 当其逼近误差相对较大时, 采用正则化技巧来求解问题是必要的.

我们首先来考虑一个简单的情形 $y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}kx^2$, 其中 k 是一个常数. 在此情形中, 精确解 y_2 的正则化项是 $\|y_2''\|^2_{L^2(0,1)} = k^2$. 选取 $REL = 0.01$, 在表 2.4 中我们列举了 k 分别等于 0.0, 0.01, 0.05 和 0.1 时正则化参数的选取值, 并在图 2.11 和图 2.12 中显示了对应于 $k = 0.0$ 和 0.5 的解. 从这里开始, 接下来所有的图中, 我们都用实线表示真解、红色的虚线、绿色的虚线、黄色的点划线、蓝色的点线和青色的点划线分别表示方法 LC, GCV, MD, CY 和 QO 对应的解(仅在电子版显示颜色).

表 2.4: 对于函数 $y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}kx^2$ 在不同选取准则下的正则化参数.

	α				
k	LC	MD	GCV	CY	QO
0.0	1.0691e-021	0	1.5204e-022	0.0001	2.6968e-019
0.01	9.2349e-007	0	1.5204e-022	0.0001	2.6968e-019
0.05	0.000477	0	1.5204e-022	0.0001	2.6968e-019
0.1	0.00021711	0	1.5204e-022	0.0001	3.3644e-019

我们观察到当精确函数 y_2 的正则化项 $\|y_2'\|^2_{L^2(0,1)}$ 十分小的时候, LC, MD, QO 和 CY 方法决定的正则化参数比期望的要小很多, 这就导致了函数严重不够光滑的现象. 如果正则化项变得足够大, 除了CY 以外的方法都可以非常好地重构原函数.

继续选取函数 $y_3(x) = 5 + \sin(4\pi x)$ 和

$$y_4(x) = \begin{cases} 1 + 2x, & 0 \leq x < 0.5, \\ 4 - 2x, & 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

我们给定了不同误差情况下的近似均值数据. 在表 2.5 中给出了函数 $y = y_3(x)$对应的 L^2 -误差和正则化参数, 其相应的数值解显示在图 2.13-2.15 中. 对应于函数 $y = y_4(x)$ 的结果显示在表 2.6 和图 2.16-2.18 中.

总结上面这些数值实验, 我们可以得到以下的结论: 当我们运用二阶导数作为惩罚项的时候, 会增加函数过分磨光的程度, 这就告诉我们此方法适用于当真解是非常光滑的情形(参考图 2.19).

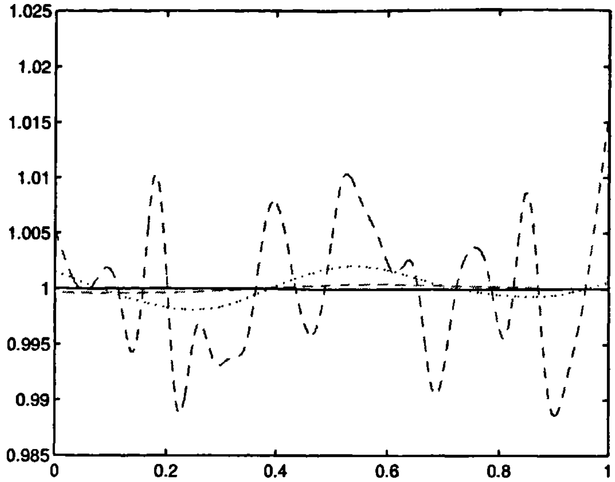


图 2.11: 函数 $y = y_2(x)$ 在 $k = 0.0$ 时的真解和近似解图示.

Fig.2.11 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_2(x)$ with $k = 0.0$.

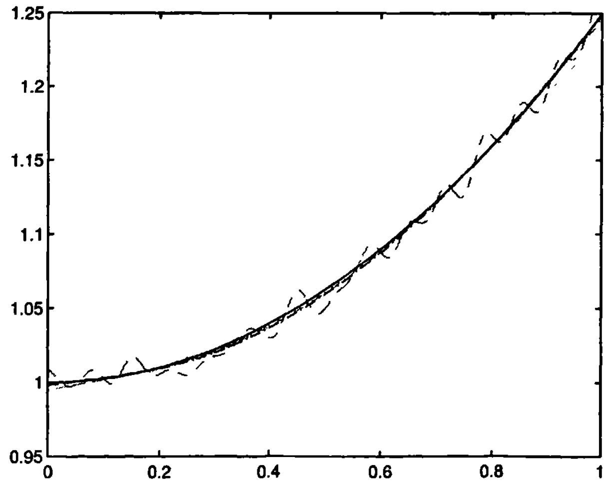


图 2.12: 函数 $y = y_2(x)$ 在 $k = 0.5$ 时的真解和近似解图示.

Fig.2.12 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_2(x)$ with $k = 0.5$.

表 2.5: 对应于函数 $y = y_3(x)$，不同准则下的L^2-估计和正则化参数.

		α				
		LC	MD	GCV	CY	QO
REl	1%	5.853e-008	2.1472e-010	1.5204e-022	0.0001	4.1975e-019
	5%	1.1521e-006	1.8736e-010	1.5204e-022	0.0025	1.7326e-019
	10%	2.1387e-006	1.9883e-010	1.5204e-022	0.01	1.1131e-019
		L^2-error				
		LC	MD	GCV	CY	QO
	1%	0.011144	0.024254	0.031418	0.43854	0.031418
	5%	0.046229	0.13198	0.16913	0.62708	0.16913
	10%	0.095918	0.25579	0.3247	0.64682	0.3247

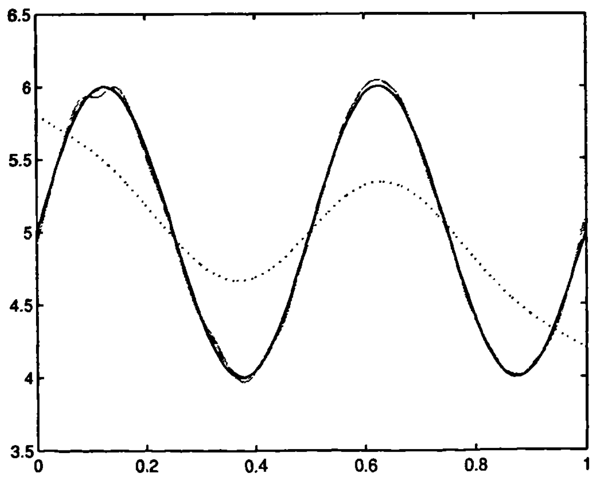


图 2.13: 函数 $y = y_3(x)$ 在 $REL = 0.01$ 时的真解和近似解图示.

Fig.2.13 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_3(x)$ with $REL = 0.01$.

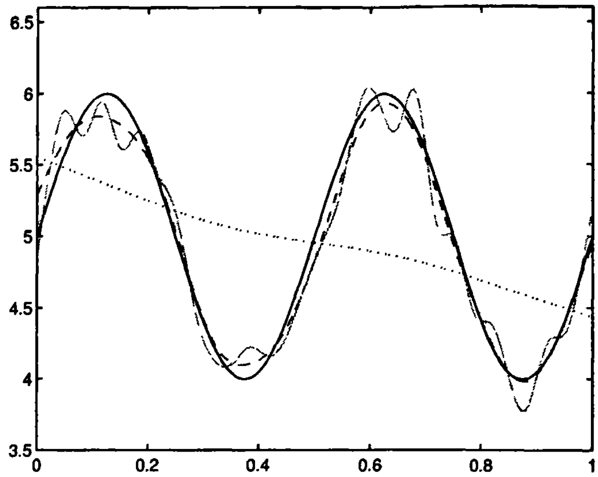


图 2.14: 函数 $y = y_3(x)$ 在 $REL = 0.05$ 时的真解和近似解图示.

Fig.2.14 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_3(x)$ with $REL = 0.05$.

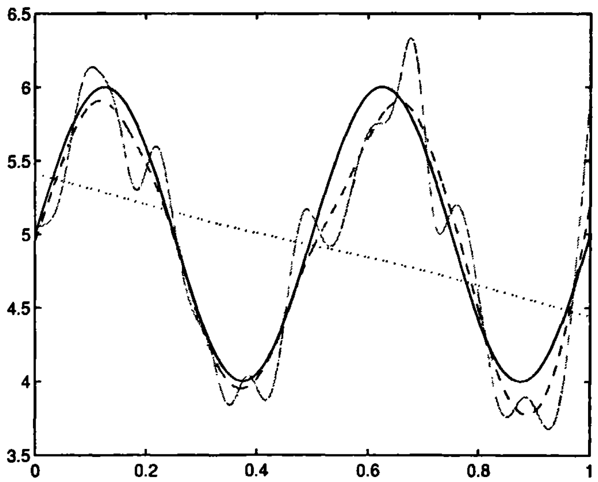


图 2.15: 函数 $y = y_3(x)$ 在 $REL = 0.1$ 时的真解和近似解图示.

Fig.2.15 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_3(x)$ with $REL = 0.1$.

表 2.6: 对应于函数 $y = y_4(x)$，不同准则下的L^2-估计和正则化参数.

		α				
		LC	MD	GCV	CY	QO
REL	1%	7.1032e-005	5.7224e-011	1.5204e-022	0.0001	3.3644e-019
	5%	6.5483e-005	2.1089e-009	1.5204e-022	0.0025	2.6968e-019
	10%	7.5191e-005	2.9203e-008	1.5204e-022	0.01	1.3888e-019
		L^2-error				
		LC	MD	GCV	CY	QO
	1%	0.15988	0.032175	0.035018	0.16773	0.035018
	5%	0.15959	0.054798	0.069845	0.28982	0.069845
	10%	0.16364	0.076541	0.1238	0.34628	0.1238

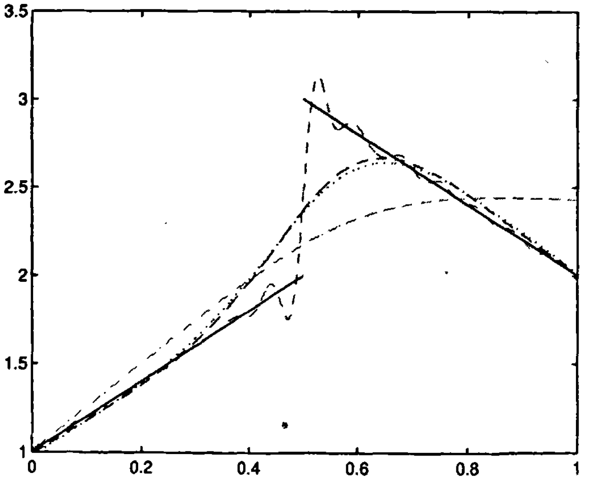


图 2.16: 函数 $y = y_4(x)$ 在 $REL = 0.01$ 时的真解和近似解图示.

Fig.2.16 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_4(x)$ with $REL = 0.01$.

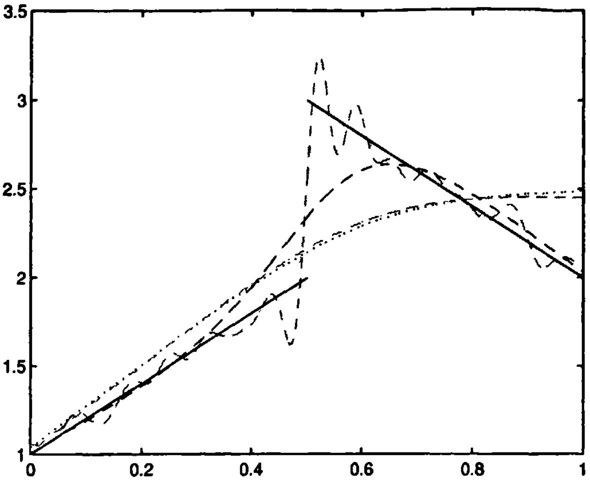


图 2.17: 函数 $y = y_4(x)$ 在 $REL = 0.05$ 时的真解和近似解图示.

Fig.2.17 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_4(x)$ with $REL = 0.05$.

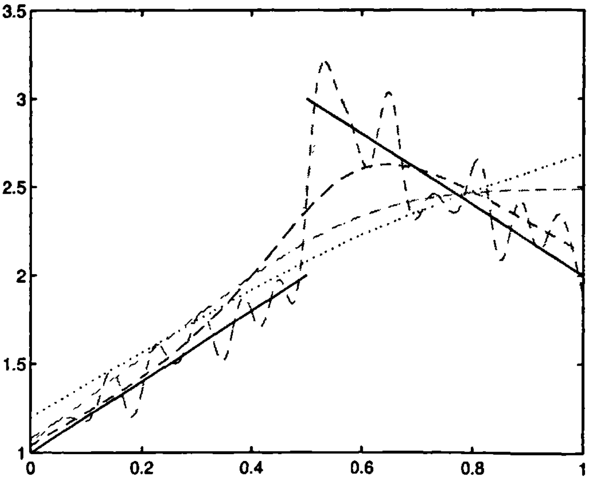


图 2.18: 函数 $y = y_4(x)$ 在 $REL = 0.10$ 时的真解和近似解图示.

Fig.2.18 Graphs of the exact function and the approximate solutions for $y = y_4(x)$ with $REL = 0.10$.

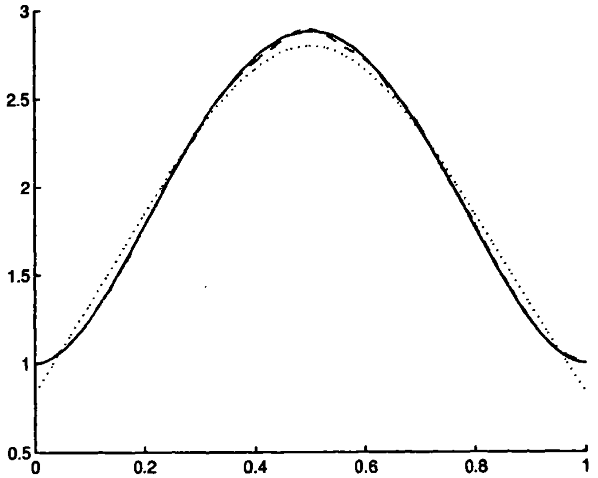
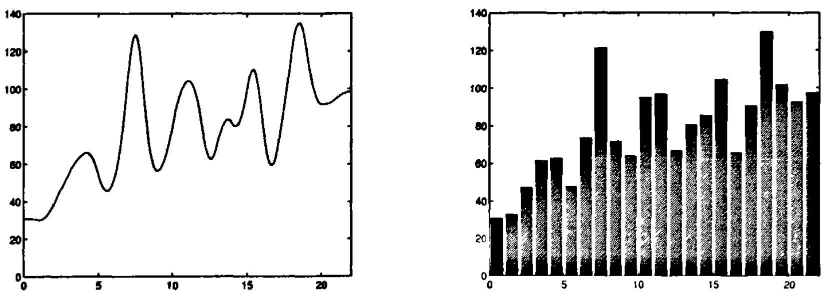


图 2.19: 两种方法的比较:红色虚线表示一阶方法, 蓝色点线表示二阶方法.

Fig.2.19 Comparison between the two methods: the first method in red dashed curve and the second in blue dotted one.

§2.4 应用

在股票市场的操作中, 我们所关心的往往不仅限于股票的历史价格, 其成交量的多少也能看出一些端倪. 我们现在尝试着用本章介绍的一阶惩罚的方法来对股票成交量做一个数据的拟合, 其中正则化参数的选取采用了L-曲线准则. 我们选取招商银行(60036)2006 年 11 月 1 日到 2006 年 13 月 30 号的数据,共 22 个交易日. 在图 2.20 中列举了数值结果, 其中横轴表示交易日, 纵轴表示成交量其单位为百万股. 我们可以通过图 2.20 中的曲线形态来推测未来的一个趋势.



(a) 成交量模拟图　　　　(b) 成交量直方图

图 2.20: 真解和逼近解图示.

Fig.2.20 Graphs of the exact and the approximate solution.

第三章　高维情形基于带噪声均值数据的函数重构

§3.1　问题的描述

在上一章中我们讨论了一维空间中的基于带噪声均值数据下的函数重构问题，提出了利用Tikhonov正则化方法的样条函数拟合方法. 但我们知道更多的实际问题并不能简单地化成一维形式，譬如说数字图像处理，它便是一个二维空间中的问题. 那么我们要寻求在二维甚至是高维空间中的基于带噪声均值条件函数拟合的方法. 我们将在这一章中予以展开.

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ 是一个 Lipschitz 区域，也就是说，Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有界连通开集，并且其边界是 Lipschitz 连续的. 维数 d 可以选取为任一正整数. $\mathcal{T}_h := \{\Omega_i\}_{i=1}^N$ 是 Ω 的一个剖分，其组成单元 Ω_i 也是 Lipschitz 子区域，

$$\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^N \overline{\Omega_i}, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad 对任意的 \quad i \neq j.$$

在某些应用中，子区域的选择通常为单纯性或四边形（二维情形下）. 在本章中，指标 i 的变化范围由 1 到 N . 记 $h := \mathrm{diam}(\Omega_i)$ ，$h := \max_{1\le i\le N} h_i$. 对于定义在 Ω 上的函数 $y = y(\boldsymbol{x})$ 我们引进其局部均值定义如下：

$$M_i(y) := \frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i} y(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad |\Omega_i| := \mathrm{meas}(\Omega_i).$$

给定带噪声的局部均值数据 U_i 满足，

$$|U_i - M_i(y)| \le \delta, \;\; 1 \le i \le N, \tag{3.1.1}$$

其中 δ 是一个正常数它描述了数据的误差水平. 我们感兴趣的是如何根据已知数据 $\{U_i\}_{i=1}^N$ 如何有效的重构函数 y. 这样的问题经常发生在环境科学，数字图像处理[66, pp. 64-65]，数理统计，还有一些应用可以在[13, 54, 55]中找到.

§3.2　理论结果及相关证明

由于几何区域的复杂性，高维问题比一维问题难处理. 尽管这个方法仍基于 Tikhonov 正则化方法(类似于第二章中的提法). 但是这里选取的优化泛函将由于

技术性的原因调整为定义在 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega_*)$上, 其中 Ω_* 是与 Ω 相关的一个辅助空间. 在此方法中, 我们得到精确解可以由格林函数来表达, 其中格林函数是一个线性椭圆边值问题的解.

设 $\Omega_* \subset \mathbb{R}^d$ 是一个包含 Ω 的 $C^{1,1}$ 区域. 在二维情形中, 我们可以选取 Ω_* 为一个圆形域. 记 $V = H_0^1(\Omega_*)$, 并定义 V 上的优化泛函如下:

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^{N} |\Omega_i||M_i(f) - U_i|^2 + \alpha \| \nabla f\|^2_{L^2(\Omega_*)}, \quad \forall f \in V, \tag{3.2.1}$$

其中 ∇f 表示函数 f 的梯度, $\alpha > 0$ 是正则化参数定义如前. 并且正则化参数可以由多种选取策略决定[12, 48, 56–58]. 在这个泛函中第一项用来度量数值解和已知数据的匹配程度, 第二项中的 $\| \nabla f\|^2_{L^2(\Omega_*)}$ 用来度量解的光滑程度, 常数 α 则起到了平衡这两项之间关系的作用. 这样根据满足条件 (3.1.1) 的数据 $\{U_i\}_{i=1}^N$ 重构的函数 f_* 可以根据求解以下最优问题得到:

$$f_* = \arg\min_{f\in V} \Phi(f). \tag{3.2.2}$$

引理3.2.1. *由 (3.2.1) 定义的非线性泛函 $\Phi(f)$ 在容许空间 V 上是严格凸的.*

证明. 任取两个在 V 上的函数 g_1 和 g_2, 通过计算可得

$$\Phi''(f; g_1, g_2) = 2\sum_{i=1}^{N} |\Omega_i| M_i(g_1) M_i(g_2) + 2\alpha \int_{\Omega_*} \nabla g_1 \cdot \nabla g_2 d\boldsymbol{x}.$$

因此

$$\Phi''(f; g, g) \geq 0, \quad \forall g \in V,$$

等式成立当且仅当

$$M_i(g) = 0\,(1 \leq i \leq N), \ \nabla g = 0 \text{ 在 } \Omega_* \text{ 中},$$

这就意味着 g 在 Ω_* 上一致为零. 结合此结果和[59, p. 13]中的定理 3.2, 就得到了我们所要的事实. □

由于 $\Phi(f)$ 在 V 上是二次严格凸泛函, 由[59, 定理1.2]或者[67, 定理3.3.12] 立即可知问题 (3.2.2) 的唯一可解性. 进一步地, 此唯一解 f_* 可以用以下关系刻化[59, p.227]

$$\Phi'(f_*; g) = 0, \quad \forall g \in V$$

i.e.,

$$\sum_{i=1}^{N} |\Omega_i|(M_i(f_*) - U_i)M_i(g) + \alpha \int_{\Omega_*} \nabla f_* \cdot \nabla g dx = 0 \quad \forall g \in V. \tag{3.2.3}$$

由 Lax-Milgram 引理[67, 68]的一个应用, 我们知道问题 (3.2.3) 存在一个解 $f_* \in V$. 设 χ_{Ω_i} 是 Ω_i 上的特征函数, 也就是说, 它在 Ω_i 内取值 1, 而在 Ω_i 外取值 0. 那么 (3.2.3) 就可以重新写作:

$$\int_{\Omega_*} \left[\alpha \nabla f_* \cdot \nabla g + \sum_{i=1}^{N} (M_i(f_*) - U_i)\chi_{\Omega_i} g\right] dx = 0 \quad \forall g \in V. \tag{3.2.4}$$

由于 $\sum_{i=1}^{N}(M_i(f_*) - U_i)\chi_{\Omega_i} \in L^2(\Omega_*)$, 根据线性椭圆边值问题的正则性理论[69] 可知解 $f_* \in H^2(\Omega_*)$. 对 (3.2.4) 使用一次分部积分, 我们可以得到

$$\int_{\Omega_*} \left[-\alpha \Delta f_* + \sum_{i=1}^{N} (M_i(f_*) - U_i)\chi_{\Omega_i}\right] g\, dx = 0 \quad \forall g \in V.$$

于是,

$$\alpha \Delta f_* = \sum_{i=1}^{N} (M_i(f_*) - U_i)\chi_{\Omega_i} \quad a.e. \text{ 在 } \Omega \text{ 中}. \tag{3.2.5}$$

相反地, 由 (3.2.5) 和条件 $f_* \in V$, 我们很容易得到 (3.2.3). 因此, 对 $f_* \in V$, (3.2.3) 和 (3.2.5) 是等价的. 综合上面的讨论, 我们就可以得到以下的结论.

定理3.2.2. *问题 (3.2.2) 存在唯一解 f_*. 进一步地, $f_* \in H^2(\Omega_*) \cap V$ 由 (3.2.5) 一致决定.*

我们继续给出 f_* 的精确表达式, 它是基于区域 Ω_* 上 Laplace 算子作用下的格林函数. 让我们回忆一下, 对任一点 $y \in \Omega_*$, 格林函数 $G(\cdot, y)$ 是这样定义的:

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, y) = \delta(x - y), \ \forall x \in \Omega_*, \\ G(x, y) = 0, \ \forall x \in \partial\Omega_*, \end{cases} \tag{3.2.6}$$

其中 $\delta(x - y)$ 是通常意义下的 Dirac 函数. 这里, 为了方便起见我们假设 G 是依赖于 Ω_* 的. 对 $1 \le i \le N$, 定义

$$\phi_i(x) = \int_{\Omega_i} G(x, y) dy. \tag{3.2.7}$$

根据 (3.2.6)-(3.2.7) 的定义, 知 $\phi_i \in H_0^1(\Omega_*)$ 并且

$$\Delta \phi_i = \begin{cases} 1 & \text{在 } \Omega_i \text{ 中}, \\ 0 & \text{在 } \Omega_* \backslash \overline{\Omega_i} \text{ 中}. \end{cases} \tag{3.2.8}$$

再一次用线性椭圆边值问题的正则性理论我们知 $\phi_i \in H^2(\Omega_*)$.

定理3.2.3. *问题 (3.2.2) 的解 f_* 可以表示成:*

$$f_* = \sum_{i=1}^{N} f_{*,i}\phi_i \tag{3.2.9}$$

其系数向量 $\boldsymbol{f}_* = (f_{*,1}, \cdots, f_{*,N})^T \in \mathbb{R}^N$ 由以下的线性系统一致决定:

$$(\alpha \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{f}_* = -\boldsymbol{U}, \tag{3.2.10}$$

其中

$$\boldsymbol{U} := (|\Omega_1|U_1, |\Omega_2|U_2, \cdots, |\Omega_N|U_N)^T,$$

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} |\Omega_1|M_1(\phi_1) & |\Omega_1|M_1(\phi_2) & \cdots & |\Omega_1|M_1(\phi_N) \\ |\Omega_2|M_2(\phi_1) & |\Omega_2|M_2(\phi_2) & \cdots & |\Omega_2|M_2(\phi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |\Omega_N|M_N(\phi_1) & |\Omega_N|M_N(\phi_2) & \cdots & |\Omega_N|M_N(\phi_N) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} := \begin{pmatrix} |\Omega_1| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\Omega_2| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\Omega_N| \end{pmatrix}.$$

证明. 我们首先证明 $\boldsymbol{A}$ 是对称负定矩阵, 由此可直接推得线性系统 (3.2.10) 存在唯一解 $\boldsymbol{f}_*$. 事实上, 由 (3.2.7) 的定义, 我们可以写出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第(i,j)分量为

$$a_{ij} = |\Omega_i|M_i(\phi_j) = \int_{\Omega_i} d\boldsymbol{x} \int_{\Omega_j} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}.$$

因此, 由格林函数的对称性: $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, 知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称的. 对任意 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_N)^T$, 记 $f = \sum_{i=1}^{N} f_i\phi_i \in H_0^1(\Omega_*) \cap H^2(\Omega_*)$. 那么, 由 $\boldsymbol{A}$ 的定义, 性质 (3.2.8), 以及使用一次分部积分, 我们就可推得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{f} &= \sum_{i=1}^{N} f_i|\Omega_i|M_i(f) = \sum_{i=1}^{N} f_i \int_{\Omega_i} f\, \Delta\phi_i d\boldsymbol{x} \\ &= \sum_{i=1}^{N} f_i \int_{\Omega_*} f\, \Delta\phi_i d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega_*} f\, \Delta f\, d\boldsymbol{x} \\ &= -\|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega_*)} \leq 0. \end{aligned}$$

进一步地, 等式成立当且仅当在 Ω_* 中 $\nabla f = 0$, 结合 $f \in H_0^1(\Omega_*)$ 可证得在 Ω_* 中 $f = 0$, i.e., $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$. 我们就得到了所要的结果.

现在, 设 $\boldsymbol{f}_*$ 是线性系统 (3.2.10) 的一个解, 并且 f_* 是由 (3.2.9) 给定的函数. 由于 $\phi_i \in H_0^1(\Omega_*) \cap H^2(\Omega_*)$ 满足条件 (3.2.8), 很容易便知 $f_* \in H_0^1(\Omega_*) \cap H^2(\Omega_*)$ 且满足条件 (3.2.5). 于是由定理 3.2.2 便知 f_* 是问题 (3.2.2) 的解. □

注记3.2.4. *对于我们这里所考虑的问题, 通常的方法是选取 $V = H^1(\Omega)$ 或者 $H^1(\mathbb{R}^d)$, 相应的 (3.2.1) 中的正则化项 $\|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega_*)}$ 就会被替代成 $\|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)}$ 或者是 $\|\nabla f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. 不过, 这样的选取就使得问题 (3.2.2) 很难得到其解的表达式. 另一方面, 此想法却有效的解决了类似的问题[9, 70].*

注记3.2.5. *由于我们的函数重构问题包含了不止一个自然变量, 如果选用多重正则化策略是自然而合理的. 举例来说, 我们可以选择 $\sum_{i=1}^d \alpha_i \|\partial_{x_i} f\|^2_{L^2(\Omega_*)}$ 来代替 (3.2.1) 中的 $\alpha \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega_*)}$, 其正则化参数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ 可以选取不同的值. 这个方法尤其适用于各向异性的病态问题, 但是难题也随之出现, 即如何恰当地选取合适的可行的参数. 我们打算在将来对此做进一步的思考讨论.*

接下来, 我们将讨论该方法的误差估计. 于是我们进一步假设了区域 $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$ 是凸的. 让我们回忆一下 Poincaré 不等式([71, 72]).

引理3.2.6. *设 $D \subset \mathbb{R}^d$ 是 Lipschitz 凸区域. 那么*

$$\|f - M(f)\|_{L^2(D)} \le \frac{L}{\pi} \|\nabla f\|_{L^2(D)} \quad \forall f \in H^1(D),$$

其中 $M(f)$ 表示 f 在区域 D 上的均值, L 是区域 D 的直径.

这个结论在我们证明问题 (3.2.2) 的误差界时会用到.

定理3.2.7. *设 y 是 $H^1(\Omega)$ 中的函数, 且它可以延拓成为 $H_0^1(\Omega_*)$ 中的函数, 仍记作 y. 设 f_* 是方法 (3.2.2) 的一个解, 其中给定的数据 $\{U_i\}_{i=1}^N$ 满足条件 (3.1.1). 那么*

$$\|y - f_*\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{h}{\pi}(\sqrt{A/\alpha}\delta + 2\|\nabla y\|_{L^2(\Omega_*)}) + 2\delta\sqrt{A} + \sqrt{2\alpha}\|\nabla y\|_{L^2(\Omega_*)}. \quad (3.2.11)$$

特别地, 当 $\alpha = C\delta^2$ ([8, 12])时,

$$\|y - f_*\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{h}{\pi}(\sqrt{A/C} + 2\|\nabla y\|_{L^2(\Omega_*)}) + 2\delta\sqrt{A} + \sqrt{2C}\delta\|\nabla y\|_{L^2(\Omega_*)}. \quad (3.2.12)$$

这里, A 表示 Ω 的一个 d -维测度, C 是正常数.

证明. 令 $e = f_* - y$. 我们记

$$
\begin{aligned}
\|e\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} e^2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} e(\boldsymbol{x})(e(\boldsymbol{x}) - M_i(e)) d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N} |\Omega_i| M_i^2(e) \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}
\tag{3.2.13}
$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 3.2.6, 可知

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} e(\boldsymbol{x})(e(\boldsymbol{x}) - M_i(e)) d\boldsymbol{x} \\
&\le \sum_{i=1}^{N} \|e\|_{L^2(\Omega_i)} \|e - M_i(e)\|_{L^2(\Omega_i)} \\
&\le \frac{h}{\pi} \left(\sum_{i=1}^{N} \|e\|^2_{L^2(\Omega_i)} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{N} \|\nabla e\|^2_{L^2(\Omega_i)} \right)^{1/2} \\
&\le \frac{h}{\pi} \|e\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla e\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
\tag{3.2.14}
$$

注意到 f_* 是问题 (3.2.2) 的解,于是

$$
\alpha \|\nabla f_*\|^2_{L^2(\Omega_*)} \le \Phi(f_*) \le \Phi(y) \le A\delta^2 + \alpha \|\nabla y\|^2_{L^2(\Omega_*)}.
$$

那么,

$$
\|\nabla f_*\|_{L^2(\Omega_*)} \le \sqrt{A/\alpha}\delta + \|\nabla y\|_{L^2(\Omega_*)}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\|\nabla e\|_{L^2(\Omega)} \le \|\nabla e\|_{L^2(\Omega_*)} & \\
&\le \|\nabla f_*\|_{L^2(\Omega_*)} + \|\nabla y\|_{L^2(\Omega_*)} \\
&\le \sqrt{A/\alpha}\delta + 2\|\nabla y\|_{L^2(\Omega_*)}.
\end{aligned}
\tag{3.2.15}
$$

结合 (3.2.14) 和 (3.2.15) 就可以推导出

$$
I_1 \le \frac{h}{\pi} (\sqrt{A/\alpha}\delta + 2\|\nabla y\|_{L^2(\Omega_*)}) \|e\|_{L^2(\Omega)}.
\tag{3.2.16}
$$

另一方面, 由 (3.1.1) 和 (3.2.1)-(3.2.2) 知

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}|\Omega_i|M_i^2(e) &\le \sum_{i=1}^{N}|\Omega_i|(M_i(f_*)-U_i+U_i-M_i(y))^2\\ &\le 2\sum_{i=1}^{N}|\Omega_i|((M_i(f_*)-U_i)^2+(U_i-M_i(y))^2)\\ &\le 2\Phi(y)+2A\delta^2\\ &\le 4A\delta^2+2\alpha\|\nabla y\|^2_{L^2(\Omega_*)}.\end{aligned}$$

因此,

$$I_2 \le 4A\delta^2+2\alpha\|\nabla y\|^2_{L^2(\Omega_*)}.$$

将它和 (3.2.16) 代入 (3.2.13), 再通过一些计算, 我们就可以得到估计 (3.2.11). 估计 (3.2.12) 是 (3.2.11) 的一个直接结果. □

注记3.2.8. *假设 Ω_* 严格包含 Ω. 用Sobolev 空间的延拓定理([69, p. 25])和截断函数技巧, 我们可以构造一个延拓算子 E, 它将 $H^1(\Omega)$ 映射到 $H_0^1(\Omega_*)$ 使得*

$$\|Ef\|_{H^1(\Omega_*)} \le C\|f\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall f\in H^1(\Omega),$$

其中几何参数 $C>0$ 仅依赖于 Ω 和 Ω_* 的几何性质.

§3.3 算法实现及数值结果

根据定理 3.2.3, 对于一个给定的常数 $\alpha>0$, 只要格林函数 $G(\cdot,\cdot)$ 是已知的, 我们就可以通过求解线性系统 (3.2.10) 来重构函数 f_*. 这里, 我们打算用文献[48, 57]中详细讨论的 Hansen 模型来求解, 这样就可以使用已有的正则化-Matlab工具包[48].

回忆定理 3.2.3的证明后, 发现 (3.2.10) 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称负定的. 所以我们可以找到一个非奇异阵 $\boldsymbol{P}$ (e.g., 用Cholesky 分解[56, p. 143]) 使得

$$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}. \tag{3.3.1}$$

定理3.3.1. *设 $\boldsymbol{f}_*$ 是问题 (3.2.2) 解 f_* 的向量表示. 那么 $\boldsymbol{f}_*$ 是下面问题的唯一解:*

$$\boldsymbol{f}_* = \arg\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^N} \tilde{\Phi}(\boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{b}\|_2^2 + \alpha\|\boldsymbol{L}\boldsymbol{\beta}\|_2^2, \tag{3.3.2}$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 是向量的欧几里得范数, $\boldsymbol{P}$ 由 (3.3.1) 给定, 并且

$$\boldsymbol{b} := -(\boldsymbol{P}^T)^{-1}\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{L} := \boldsymbol{D}^{1/2}. \tag{3.3.3}$$

证明. 由于矩阵 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}+\alpha\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}$ 是对称正定的, 问题 (3.3.2) 有唯一解. 通过计算, 注意到关系 (3.3.1) 和 (3.3.3), 我们有

$$\tilde{\Phi}'(\boldsymbol{\beta}) = 2(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{b} + \alpha\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}\boldsymbol{\beta}) = 2(-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} + \alpha\boldsymbol{D}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{U}).$$

因此, $\boldsymbol{f}_*$ 是问题 (3.3.2) 的解当且仅当它满足线性系统 (3.2.10). 定理证毕. □

为了实现上述方法, 我们选择区域 Ω_* 使其上的格林函数 $G(\cdot,\cdot)$ 可显示表示. 比如说, Ω_* 可以选取为 $\mathbb{R}^d$ 中的圆域或球域等. 在任意维中单位球内的格林函数, 其封闭形式表达式是已知的[68]; 同时通过坐标变换和延展的技巧我们可以将圆心在原点的单位圆域上的格林函数变换到任意圆域上. 方法 (3.2.2) 重构函数的一个最费时的工作量就是矩阵 A 的计算, 即它需要计算

$$a_{ij} = |\Omega_i| M_i(\phi_j) = \int_{\Omega_i} d\boldsymbol{x} \int_{\Omega_j} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}, \quad 1 \le i,j \le N.$$

一般来说, 我们用数值积分([62]) 来计算矩阵元素. 但是对于特殊选取的 Ω_* 和子区域 $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$, 这些积分是有可能精确计算的. 我们选取 $\Omega_* = \Omega_R \subset \mathbb{R}^2$ 作为一个例子来说明算法是如何实现的, 它是一个半径为 R 的圆域, 圆心就在原点, 并且 Ω_i 是矩形. 对 $\Omega_* = \Omega_R$, 格林函数可以表示成[73, p. 638]

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}\sqrt{(x_1-\frac{R^2}{r^2}y_1)^2+(x_2-\frac{R^2}{r^2}y_2)^2}},$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2)^T$, $r := \sqrt{y_1^2+y_2^2}$. 设 $\Omega_i = (m,n)\times(\alpha,\beta)$. 那么通过简单的计算可知

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_i} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x} =& \int_\alpha^\beta dx_2 \int_m^n \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}\sqrt{(x_1-\frac{R^2}{r^2}y_1)^2+(x_2-\frac{R^2}{r^2}y_2)^2}}dx_1 \\ =& \frac{1}{2\pi}\left(\ln R - \ln\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)(\beta-\alpha)(n-m) + II_1 + II_2,\end{aligned}$$

其中

$$II_1 := \frac{1}{4\pi}\int_\alpha^\beta dx_2 \int_m^n \ln\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right]dx_1,$$
$$II_2 := -\frac{1}{4\pi}\int_\alpha^\beta dx_2 \int_m^n \ln\left[\left(x_1-\frac{R^2}{r^2}y_1\right)^2+\left(x_2-\frac{R^2}{r^2}y_2\right)^2\right]dx_1.$$

所以如下形式的积分是可计算的

$$\int_\alpha^\beta dx_2 \int_m^n \ln\left[(x_1-a)^2+(x_2-b)^2\right]dx_1.$$

这里, a 和 b 是两个实数. 通过仔细的计算, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta dx_2 \int_m^n \ln\left[(x_1-a)^2+(x_2-b)^2\right]dx_1\\
&\quad=(n-a)\Big\{(\beta-b)\ln[(n-a)^2+(\beta-b)^2]+(b-\alpha)\ln[(n-a)^2+(\alpha-b)^2]\\
&\quad-2(\beta-\alpha)+2|n-a|\arctan\frac{\beta-b}{|n-a|}-2|n-a|\arctan\frac{\alpha-b}{|n-a|}\Big\}\\
&\quad+(a-m)\Big\{(\beta-b)\ln[(m-a)^2+(\beta-b)^2]+(b-\alpha)\ln[(m-a)^2+(\alpha-b)^2]\\
&\quad-2(\beta-\alpha)+2|m-a|\arctan\frac{\beta-b}{|m-a|}-2|m-a|\arctan\frac{\alpha-b}{|m-a|}\Big\}\\
&\quad-2(n-m)(\beta-\alpha)\\
&\quad+\Big\{(\beta-b)^2\arctan\frac{n-a}{\beta-b}-(\alpha-b)^2\arctan\frac{n-a}{\alpha-b}\\
&\quad-(a-n)(\beta-\alpha)-(n-a)^2(\arctan\frac{\beta-b}{n-a}-\arctan\frac{\alpha-b}{n-a})\Big\}\\
&\quad-\Big\{(\beta-b)^2\arctan\frac{m-a}{\beta-b}-(\alpha-b)^2\arctan\frac{m-a}{\alpha-b}\\
&\quad-(a-m)(\beta-\alpha)-(m-a)^2(\arctan\frac{\beta-b}{m-a}-\arctan\frac{\alpha-b}{m-a})\Big\}.
\end{aligned}$$

注记3.3.2. *就像上面所提到的, 我们的方法其主要计算工作量在于系数矩阵* $\boldsymbol{A}$ *的生成, 包括了格林函数在两子域上的双重积分. 在一些应用中, 多重方法[74-76]是计算矩阵的一个有效的方法, 但是对于我们的问题要详细地构造计算步骤并不是一件容易的事. 这将是我们进一步要研究的课题. 注意到我们的函数重构问题刚好是一个数值微分的问题, 因此它是严重病态的[6], 于之对应的矩阵* $\boldsymbol{A}$ *也是严重病态的(在下一节中的数值例子中说明了此现象). 所以另一个计算代价来自于病态最小二次问题* (3.3.2) *的数值计算. 在文献[56, 57, 77]中提到了一些比较好的方法.*

接下来我们就通过一些具体的数值实验来说明方法 (3.2.2) 的计算效果. 在这些例子里, Ω 是一个二维区域, $\Omega_* = \Omega_R$ 是一个以原点为圆心、R 为半径的圆域, 其中 R 可以根据实际问题适当选取, 子区域 $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ 是长方形. 根据数值实验的效果我们可以推测所要重构的函数其结果相对于半径 R 的大小变化是相当稳定的. 并使用上一节出现的公式. 基于模型 (3.3.2), 我们使用由 Hansen 开发的正则化 Matlab 工具包[48]来重构函数. 正则化参数则由先验准则[12] $\alpha = \epsilon^2$ (同时见定理3.2.7), Morozov's 差异性准则, GCV 和 L-曲线准则决定[48, 56–58]. 这些准则分别简记为 CY, MD, GCV 和 LC. 对于 Ω 上的给定函数 $y = y(\boldsymbol{x})$, 带噪声的区域 Ω_i 上均值数据 U_i 产生如下:

$$U_i = M_i(y)(1 + \epsilon * rand), \quad 1 \le i \le N,$$

其中 $rand$ 在 $[-1, 1]$ 上满足一致分布的随机数, $\epsilon \ge 0$ 是描述数据相对误差水平的常数. 进一步地, 为了能够从数量的观点比较这些方法的数值效果, 我们记在 Ω 内部重构函数 f_* 和真解 y 之间的相对误差为

$$\text{相对误差} = \max_{\boldsymbol{x}_i \in \Omega_h} \frac{|y(\boldsymbol{x}_i) - f_*(\boldsymbol{x}_i)|}{|y(\boldsymbol{x}_i)|},$$

其中 Ω_h 是严格位于 Ω 内部点的集合.

举例3.3.3. 在这个例子里, 我们将通过图表数据来说明对函数重构方法 (3.2.2) 中优化泛函 $\Phi(f)$ 增加正则化这一项的必要性. 为了达到这个目的, 我们从数值角度比较了该方法在没有正则化项(即 $\alpha = 0$)和有正则化项当 $\alpha = \epsilon^2$ 时的差异. 取 $\Omega = (1,3) \times (5,7)$ 并将它分成 $M \times M$ 个相等的长方形. 选取 $y(x_1, x_2) = \frac{1}{100}\left[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 6)^2 + 6\right]^3$, $M = 15$, 和 $R = \sqrt{58} + 5$. 系数矩阵的条件值在 $M = 15$ 的情形下依然很大 $\mathrm{Cond}_2(\boldsymbol{A}) = 2.3558 \times 10^3$. 在图 3.1 中显示了一些函数重构的结果. 左面的三张图显示了在没有正则化的情况下函数重构的结果, 而右边则显示了使用正则化项且正则化参数选为 $\alpha = \epsilon^2$ 下与之对应的结果. 我们选用了当噪声水平分别为 $\epsilon = 1\%$, 5%, 和 10% 时的结果画了图. 可以观察到带有正则化的方法相对于带噪声数据是比较稳定的. 实际上, 当噪声水平为 $\epsilon = 1\%$, 5%, 和 10% 时对应的相对误差分别为 1.67%, 3.48% 和 4.67% . 相比之下, 不带正则化的方法, 其相对误差分别为 1.78%, 5.99% 和 14.69%. 只有当噪声水平为 $\epsilon = 1\%$ 时其结果才是相对来说可接受的. 当噪声水平增加至 $\epsilon = 5\%$ 和 10% 时, 对应的重构

函数振荡的现象就越严重. 所以, 我们需要运用带有正则化项方法 (3.2.2) 来进行我们的函数重构. □

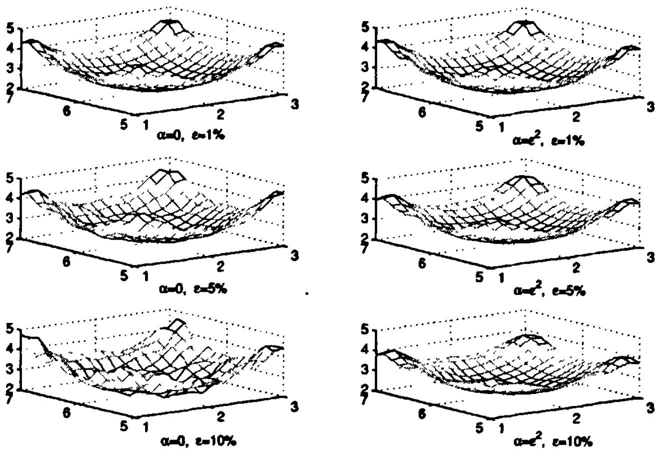


图 3.1: 例3.3.3中对于用方法3.2.2重构函数在三种误差水平下有无正则化项所得结果的比较

Fig.3.1 Example 3.3.3: Comparison of reconstructed functions from the method (3.2.2) without and with regularization, for three levels of noise.

举例3.3.4. 在第二个例子中, 我们将来研究方法 (3.2.2) 在四种不同的正则化参数 α 选取策略下的数值效果. 区域 Ω, 函数 y, 剖分个数 M, 和半径 R 沿用了例子 3.3.3中的数据. 当噪声水平 $\epsilon = 5\%$ 时, 我们在图 3.2 中列举了四种正则化参数选取策略对应的结果以及真解图示. 我们发现这四种策略都可以得到合理的结果. 在表 3.1 中我们也列举了在这四种策略选取下正则化参数 α 的值以及相对应的重构函数与真解之间的相对误差, 其数据也支持了所发现的现象. 同时, 我们观察到对于不同的策略, 所得到的重构函数在 Ω 的内部总要比在边界 $\partial\Omega$ 上的效果好, 之所以会产生这样的现象也许是因为目标泛函 (3.2.1) 在区域 $\Omega_R\backslash\overline{\Omega}$ 上只强制要求了重构函数的光滑性, 于是在上面提到的子区域中出现了不精确的逼近现象.

接下来我们研究半径 R 的选取对于重构函数精确程度的影响. 选择 $\epsilon = 1\%$ 和 $M = 15$, 对应于不同 R 的数值结果列在表 3.2 中. 从这些数据中, 我们可以得出结论, 数值解关于 R 的选取是稳定的, 尽管有 R 取得越大解就越精确的趋势. □

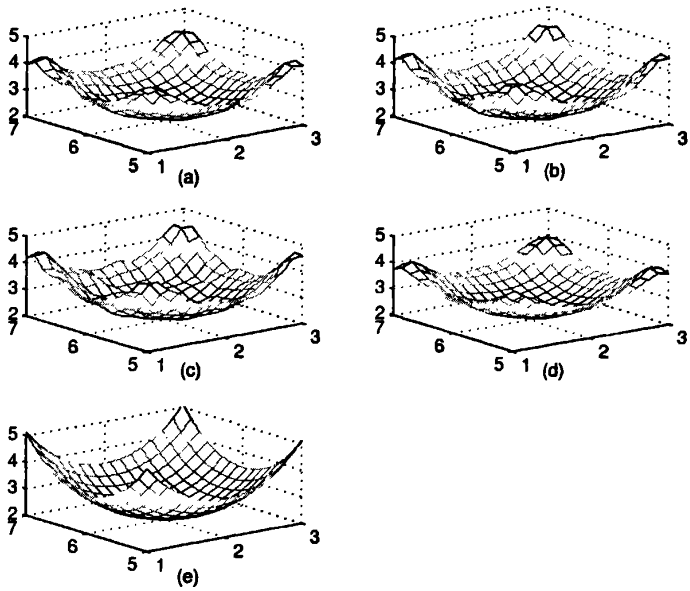


图 3.2: 例子3.3.4:当噪声水平 $\epsilon = 5\%$时四种策略的比较结果: (a) CY, (b) LC, (c) MD, (d) GCV, (e) 真解.

Fig3.2 Example 3.3.4: Comparison of reconstructed functions with the four different choices of the regularization parameter: (a) CY, (b) LC, (c) MD, (d) GCV, (e) exact function. Noise level $\epsilon = 5\%$.

表 3.1: 四种正则化参数选取策略对应的数值结果: $M = 15$, $R = \sqrt{58} + 5$ 时的正则化参数以及相对误差.

	α				相对误差(%)			
ϵ	LC	MD	GCV	CY	LC	MD	GCV	CY
1%	$6.4e-4$	$1.2e-8$	$6.4e-4$	$1e-4$	1.13	1.78	1.13	1.67
5%	$6.4e-4$	$1.6e-8$	$7.2e-3$	$2.5e-3$	4.68	5.99	3.68	3.48
10%	$6.4e-4$	$1.6e-8$	$3.5e-2$	$1e-2$	11.22	14.69	7.38	4.67

表 3.2: 半径 R 的影响: $\epsilon = 1\%$, $M = 15$ 时的正则化参数和相对误差.

	α				相对误差(%)			
R	LC	MD	GCV	CY	LC	MD	GCV	CY
$\sqrt{58}+5$	$6.4e-4$	$1.2e-8$	$6.4e-4$	$1e-4$	1.13	1.78	1.13	1.67
$\sqrt{58}+10$	$6.4e-4$	$1.2e-8$	$6.4e-4$	$1e-4$	1.11	1.75	1.11	1.64
$\sqrt{58}+15$	$6.4e-4$	$1.2e-8$	$6.4e-4$	$1e-4$	1.10	1.74	1.10	1.63

表 3.3: 四种正则化参数选取策略对应的数值结果: $M = 15$, $R = \sqrt{2}+5$ 时的正则化参数和相对误差.

	α				相对误差(%)			
ϵ	LC	MD	GCV	CY	LC	MD	GCV	CY
1%	0.13	$5.8e-8$	$1.6e-4$	$1e-4$	34.75	1.29	1.47	1.39
5%	0.13	$6.3e-8$	$2.7e-3$	$2.5e-3$	35.24	6.03	9.39	9.01
10%	0.15	$6.4e-8$	0.03	0.01	38.10	14.01	18.76	13.47

举例3.3.5. 我们进一步测试在不同的正则化参数选取策略下方法 (3.2.2) 对于震荡函数 y 的重构数值效果. 设函数 $y(x_1, x_2) = [2-(2x_1-1)^2]\sin(4\pi x_2)+10$ 在区域 $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ 中, 并选取 $M = 15$ 或者 31. 当 $M = 15$ 时, $\mathrm{Cond}_2(A) = 2.6134\times 10^3$, 当 $M = 31$ 时, $\mathrm{Cond}_2(A) = 1.1351\times 10^4$. 我们首先选取 $\epsilon = 1\%$. 在图 3.3 中列举了数值结果, 其中除了LC方法其他策略都很好的重构了函数. 在第二章讨论的一维情形中我们也观察到LC方法会失效. 其原因是LC方法试图寻找匹配项和光滑项之间的一个最佳契合点, 但是震荡函数并不充分光滑, 所以直接导致了像文献[48, 56]提到的过渡磨光现象. 表 3.3 列出了重构函数过程中的正则化参数和相对误差在不同的误差水平和不同的正则化参数选取策略下的具体数值, 而表 3.4 则列举了不同 R 所对应的数据.

然而, 当相对误差水平增加时, 比如说 $\epsilon = 5\%$, 数值实验效果并不好, 此时 $N = 31$ (见图 3.4). 在这个例子中, 只有CY 和GCV 方法得到了让人满意的结果, 相比较下, GCV 的解比CY 的要好一些. CY方法的优势在于它无需耗费额外的计算量

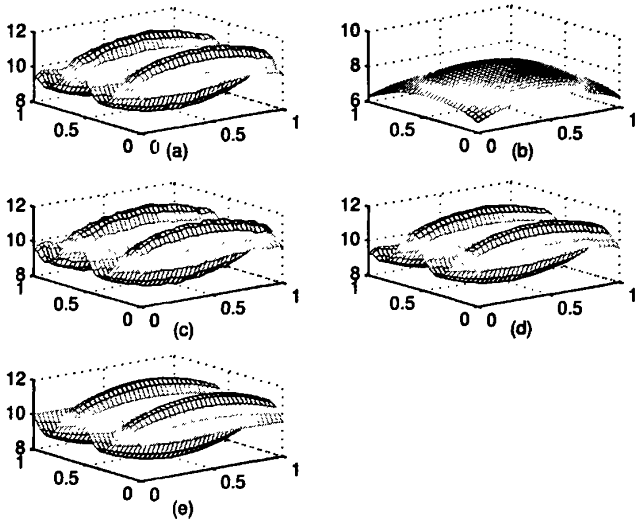


图 3.3: 四种正则化参数选取策略对应的数值结果: $\epsilon = 1\%$, $M = 31$, (a) CY, (b) LC, (c) MD, (d) GCV, (e) 真解.

Fig.3.3 Example 3.3.5: Numerical results for the four choices of the regularization parameter: (a) CY, (b) LC, (c) MD, (d) GCV, (e) exact function, for $M = 31$ and $\epsilon = 1\%$.

表 3.4: 四种正则化参数选取策略对应的数值结果: $\epsilon = 1\%$, $M = 15$ 时的正则化参数和相对误差.

	α				相对误差(%)			
R	LC	MD	GCV	CY	LC	MD	GCV	CY
$\sqrt{2}+5$	0.13	$5.8e-8$	$1.6e-4$	$1e-4$	34.75	1.29	1.47	1.39
$\sqrt{2}+10$	0.16	$5.8e-8$	$1.6e-4$	$1e-4$	34.73	1.29	1.47	1.39
$\sqrt{2}+15$	0.18	$5.8e-8$	$1.6e-4$	$1e-4$	34.75	1.29	1.47	1.39

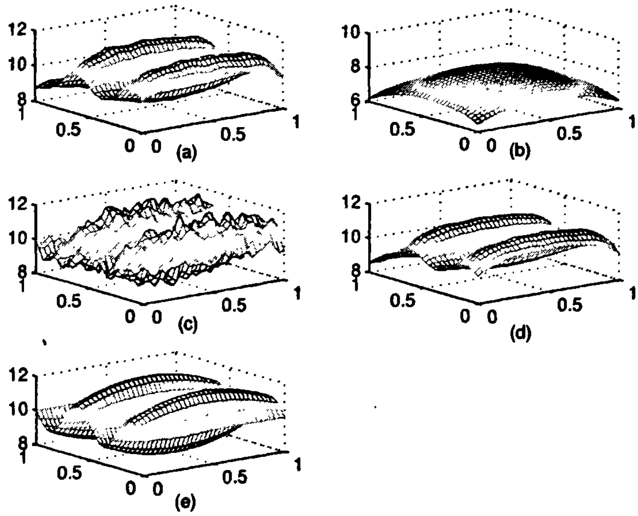


图 3.4: 四种正则化参数选取策略对应的数值结果: $\epsilon = 5\%, M = 31$, (a) CY, (b) LC, (c) MD, (d) GCV, (e) 真解.

Fig.3.4 Example 3.3.5: Numerical results for the four choices of the regularization parameter: (a) CY, (b) LC, (c) MD, (d) GCV, (e) exact function, for $M = 31$ and $\epsilon = 5\%$.

来决定正则化参数. 最后, 我们相信此方法也可用来处理其他类似的高维函数重构问题. □

第四章 腐蚀系数的数值计算

§4.1 薄管腐蚀系数问题的误差估计

§4.1.1 问题的描述

考虑以下的腐蚀探测问题:

$$\Delta u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{4.1.1a}$$

$$u(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma_1, \tag{4.1.1b}$$

$$u_n(x,y) = \phi(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma_1, \tag{4.1.1c}$$

$$u_n(x,y) + \gamma(x,y)u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma_2, \tag{4.1.1d}$$

其中 $a > 0$ 表示环形区域

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < x^2 + y^2 < (1+a)^2\}$$

的厚度，同时外边界和内边界分别记为

$$\Gamma_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = (1+a)^2\}, \quad \Gamma_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\},$$

u 是电位势, u_n 表示单位外法向量, $\phi(x,y) > 0$ 是在 Γ_1 强加的流量密度, $f(x,y)$ 是边界 Γ_1 上 u 的精确测量值, 而 $\gamma(x,y) > 0$ 是需要计算的腐蚀系数(见图 4.1). 这样的问题是严重病态的[78, 79], 经常发生在实际应用中[14].

当 Ω 是长方形时, 不少数值方法, 包括薄板逼近法 (TPA), Galerkin 方法和准可逆法, 都被提出来求解腐蚀系数 γ [14, 16, 80]. 这里提到 TPA 是一个参数展开的方法[81], 当矩形的宽十分小的时候它有很好的拟合效果[14]. 也做出了相关的误差估计. 当 Ω 是一个圆环域正如我们这里所考虑的, 类似[14]的讨论在文献[15]中提出了基于小参数展开的数值计算方法, 而文献[82]中也介绍了一个迭代法.

§4.1.2 误差估计

本章的目的就是给出文献[15]中所提参数展开方法的一个误差估计, 在圆环厚

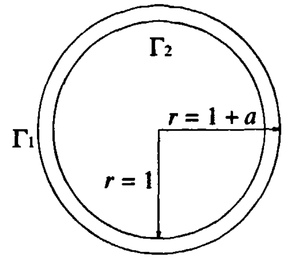


图 4.1: 薄管的横切面.

Fig.4.1 The cross section of the pipe.

度 a 充分小的前提假设下. 首先我们回忆一下这个方法. 通过如下坐标变换:

$$\begin{cases} x=(ar+1)\cos\theta, \\ y=(ar+1)\sin\theta, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

问题(4.1.1) 可以写成:

$$(ar+1)^2u_{rr}+a^2u_{\theta\theta}+a(ar+1)u_r=0, \qquad (r,\theta)\in(0,1)\times(0,2\pi), \tag{4.1.3a}$$

$$-u_r(0,\theta)+a\gamma(\theta)u(0,\theta)=0, \qquad \theta\in[0,2\pi), \tag{4.1.3b}$$

$$u(1,\theta)=f(\theta), \qquad \theta\in[0,2\pi), \tag{4.1.3c}$$

$$u_r(1,\theta)=a\phi(\theta), \qquad \theta\in[0,2\pi), \tag{4.1.3d}$$

$$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi), \tag{4.1.3e}$$

$$u_\theta(r,\theta)=u_\theta(r,\theta+2\pi), \tag{4.1.3f}$$

其中我们将 $f((1+a)\cos\theta,(1+a)\sin\theta)$ 和 $\phi((1+a)\cos\theta,(1+a)\sin\theta)$ 分别简单地记为 $f(\theta)$ 和 $\phi(\theta)$. 由于对某些固定的常数 $a=a_0$, $\phi(\theta)$ 是强加的数据, $f(\theta)$ 是可测数据, 所以函数独立于变参数 a. 有了这些数据, 我们可以找到参数依赖问题 (4.1.3) 的解 $u=u(r,\theta,a)$ 和 $\gamma=\gamma(\theta,a)$. 很容易发现腐蚀系数 $\gamma(\theta)$ 恰恰就是 $\gamma(\theta,a_0)$. 现在, 我们将求解函数关于 a 按指数进行展开,

$$u(r,\theta,a)=u_0(r,\theta)+au_1(r,\theta)+a^2u_2(r,\theta)+\cdots,$$

$$\gamma(\theta,a)=\gamma_0(\theta)+a\gamma_1(\theta)+a^2\gamma_2(\theta)+\cdots.$$

需要指出的是所有的函数 $\{u_k, \gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ 都是依赖于 a_0 的, 但为了记号的方便我们去除了此项. 将上面的展开代入 (4.1.3), 合并 a 的同类项, 我们得到以下的等式:

1) a^0 的关系式为

$$\begin{aligned} u_{0,rr}(r,\theta) &= 0, \\ -u_{0,r}(0,\theta) &= 0, \\ u_0(1,\theta) &= f(\theta), \\ u_{0,r}(1,\theta) &= 0. \end{aligned}$$

2) a^1 的关系式为

$$u_{1,rr}(r,\theta) + 2ru_{0,rr}(r,\theta) + u_{0,r}(r,\theta) = 0, \tag{4.1.4a}$$

$$-u_{1,r}(0,\theta) + \gamma_0(\theta)u_0(0,\theta) = 0, \tag{4.1.4b}$$

$$u_{1,r}(1,\theta) = \phi(\theta), \tag{4.1.4c}$$

$$u_1(1,\theta) = 0. \tag{4.1.4d}$$

3) a^2 的关系式为

$$\begin{aligned} r^2u_{0,rr}(r,\theta) + 2ru_{1,rr}(r,\theta) + u_{2,rr}(r,\theta) + u_{0,\theta\theta}(r,\theta) + ru_{0,r}(r,\theta) + u_{1,r}(r,\theta) &= 0, \\ -u_{2,r}(0,\theta) + \gamma_0(\theta)u_1(0,\theta) + \gamma_1(\theta)u_0(0,\theta) &= 0, \\ u_{2,r}(1,\theta) &= 0. \end{aligned}$$

由 a^0 的关系我们可以推得 $u_0(r,\theta) \equiv f(\theta)$, 结合 (4.1.4a), (4.1.4c), 和 (4.1.4d) 便隐含了 $u_1(r,\theta) = \phi(\theta)(r-1)$. 因此由 (4.1.4b) 和 (4.1.3c) 我们发现

$$\gamma_0(\theta) = \frac{\phi(\theta)}{f(\theta)} = \frac{\phi(\theta)}{u(1,\theta)}. \tag{4.1.5}$$

通过刚得到的 $u_0(r,\theta)$ 和 $u_1(r,\theta)$ 的表达式, a^2 的关系就变为

$$u_{2,rr}(r,\theta) + f''(\theta) + \phi(\theta) = 0, \tag{4.1.6a}$$

$$-u_{2,r}(0,\theta) - \gamma_0(\theta)\phi(\theta) + \gamma_1(\theta)f(\theta) = 0, \tag{4.1.6b}$$

$$u_{2,r}(1,\theta) = 0. \tag{4.1.6c}$$

由 (4.1.6a) 和 (4.1.6c) 知 $u_{2,r}(r,\theta)=[f''(\theta)+\phi(\theta)](1-r)$, 结合 (4.1.6b) 便得到

$$\gamma_1(\theta)=\frac{\gamma_0(\theta)\phi(\theta)+f''(\theta)+\phi(\theta)}{f(\theta)}=\frac{\phi^2(\theta)+[u_{\theta\theta}(1,\theta)+\phi(\theta)]u(1,\theta)}{u^2(1,\theta)}. \qquad (4.1.7)$$

利用 (4.1.5), 上面的公式可重新写作

$$\gamma_1(\theta)=\frac{f''(\theta)}{f(\theta)}+\gamma_0(\theta)(\gamma_0(\theta)+1)=\frac{u_{\theta\theta}(1,\theta)}{u(1,\theta)}+\gamma_0(\theta)(\gamma_0(\theta)+1), \qquad (4.1.8)$$

从中我们可以发现当 $\gamma_0(\theta)$ 的数据是可获得的话, 那么只需付出较少的计算代价就可以获得 $\gamma_1(\theta)$.

由于

$$\gamma(\theta)=\gamma(\theta,a_0)=\gamma_0(\theta)+a_0\gamma_1(\theta)+a_0^2\gamma_2(\theta)+\cdots,$$

只要 a_0 充分小, γ_0 和 $\gamma_0+a_0\gamma_1$ 就可以分别被看作是 $\gamma(\theta)$ 的零阶和一阶逼近. 接下来, 在前面的逼近中我们简记 a_0 为 a, 这并不会引起混淆.

注记4.1.1. *这里必须强调, 和[14]中的逼近类似, 逼近解(4.1.5) 和 (4.1.7)也局部依赖于 Γ_1 上的测量数据 u, 就是说, 为了重构 Γ_2 的部分边界 $\{(x,y)=(cos\theta,sin\theta);\theta_1\le\theta\le\theta_2\}$ 上的腐蚀系数, , 我们只需要获得 Γ_1 的部分边界 $\{(x,y)=((1+a)cos\theta,(1+a)sin\theta);\theta_1\le\theta\le\theta_2\}$ 上的数据 u, 而不是整个边界上的值. 这个在实际应用中也许是非常有用的.*

注记4.1.2. *这里讨论的参数展开方法也可以被推广到处理类似于薄椭圆环的薄形区域问题中. 由于这样的推广很容易直接得到, 所以这里不作详述.*

接下来, 我们总假设 (4.1.1b)-(4.1.1c) 中的 γ 和 ϕ 至少是正连续的. 为了进行逼近方法的误差分析, 我们需要一些椭圆方程的基本结果, 此结果很容易由 PDE 中的最大值原理得到[14, 83, 84].

引理4.1.3. *设 Ω 是二维有界开区域, 它的边界为 $\partial\Omega$ 且分成 Γ_d 和 Γ_f, 其单位外法向量为 n. 设 u 是以下问题的经典解:*

$$\begin{aligned} Lu&=0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中;}\\ u_n+\alpha u&=g_1 \quad \text{在 } \Gamma_d \text{ 上;}\\ u&=g_2 \quad \text{在 } \Gamma_f \text{ 上,}\end{aligned}$$

其中 L 是 Ω 上的二阶一致椭圆算子, α 是 Γ_2 上的非负连续函数, g_1 和 g_2 分别是 Γ_d 和 Γ_f 上的两个连续函数. 进一步地, 假设 Γ_d 上的任一点都在属于 Ω 内的

一个圆的边界上. 那么对于满足以下条件的任意两函数 $w^{(1)}$ 和 $w^{(2)}$:

$$
\begin{aligned}
&Lw^{(1)} \leqslant 0\ (Lw^{(2)} \geqslant 0), \qquad (x,y)\in\Omega,\\
&w_n^{(1)} + \alpha w^{(1)} \geqslant g_1\ (w_n^{(2)} + \alpha w^{(2)} \leqslant g_1), \quad (x,y)\in\Gamma_d,\\
&w^{(1)} \geqslant g_2\ (w^{(2)} \leqslant g_2), \qquad (x,y)\in\Gamma_f,
\end{aligned}
$$

成立不等式

$$w^{(2)} \leqslant u \leqslant w^{(1)}.$$

引理4.1.4. 设 u 是以下问题的经典解:

$$
\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= 0, & (x,y)&\in\Omega,\\
u_n(x,y) &= g_1(x,y), & (x,y)&\in\Gamma_1,\\
u_n(x,y)+\gamma(x,y)u(x,y) &= g_2(x,y), & (x,y)&\in\Gamma_2,
\end{aligned}
$$

其中 Ω, Γ_1 和 Γ_2在上一节中给出了定义, γ 是 Γ_2 上的正连续函数, g_1 和 g_2 分别是 Γ_1 和 Γ_2 上的连续函数. 那么我们有

$$|u(x,y)| \leqslant \frac{\max|g_2|}{\min\gamma} + (1+a)\left(\frac{1}{\min\gamma} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)\max|g_1|. \tag{4.1.9}$$

从现在起, Γ_1 上的函数最值刚好取在 Γ_1 上, Γ_2 上的函数类同.

证明. 我们引进两个函数

$$w^{(1)} := \frac{\max|g_2|}{\min\gamma} + (1+a)\left(\frac{1}{\min\gamma} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)\max|g_1|$$

和

$$w^{(2)} := -\frac{\max|g_2|}{\min\gamma} - (1+a)\left(\frac{1}{\min\gamma} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)\max|g_1|.$$

通过计算很容易证明它们满足条件:

$$
\begin{aligned}
&\Delta w^{(1)} = 0\ (\Delta w^{(2)} = 0), \qquad (x,y)\in\Omega,\\
&w_n^{(1)} \geqslant g_1\ (w_n^{(2)} \leqslant g_1), \qquad (x,y)\in\Gamma_1,\\
&w_n^{(1)} + \gamma w^{(1)} \geqslant g_2\ (w_n^{(2)} + \gamma w^{(2)} \leqslant g_2), \quad (x,y)\in\Gamma_2.
\end{aligned}
$$

这样, 可由引理 4.1.3 直接得到估计(4.1.9). □

引理4.1.5. 设 u 是问题(4.1.1)的经典解. 那么我们有

$$(1+a)\left(\frac{1}{\max\gamma}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)\min\phi \leqslant u(x,y) \leqslant (1+a)\left(\frac{1}{\min\gamma}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)\max\phi. \tag{4.1.10}$$

证明. 由引理 4.1.4 可以直接得到 (4.1.10) 右边的不等式, 因此只需证明左边的不等式即可. 通过一个直接的计算, 我们发现方程

$$w = (1+a)\left(\frac{1}{\max\gamma} + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)\min\phi$$

满足条件:

$$\begin{aligned} &\Delta w = 0 && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ &w_n \leqslant \phi && \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}, \\ &w_n + \gamma w \leqslant 0 && \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}, \end{aligned}$$

结合引理 4.1.3 就得到了我们所要的结果. □

引理4.1.6. 设 u 是问题(4.1.1)的经典解. 假设(4.1.11)中 $\gamma \in C^0(\Gamma_2)$ 和 $\phi \in C^0(\Gamma_1)$; (4.1.12)中 $\gamma \in C^1(\Gamma_2)$ 和 $\phi \in C^1(\Gamma_1)$, (4.1.13)- (4.1.14) 中$\gamma \in C^2(\Gamma_2)$ 和 $\phi \in C^2(\Gamma_1)$. 那么我们有以下估计:

$$|u_r(r,\theta)| \leqslant C_1 a(1+a), \tag{4.1.11}$$

$$|u_\theta(r,\theta)| \leqslant (1+a)\left(\frac{\max|\gamma'|\max\phi + \min\gamma\max|\phi'|}{(\min\gamma)^2} + \max|\phi'|\ln(ar+1)\right), \tag{4.1.12}$$

$$|u_{\theta\theta}(r,\theta)| \leqslant (1+a)\left(C_2 + C_3\ln(ar+1)\right), \tag{4.1.13}$$

$$|u_{rr}(r,\theta)| \leqslant C_4 a^2(1+a), \tag{4.1.14}$$

其中

$$C_1 := \frac{\max\gamma}{\min\gamma}\max\phi,$$

$$C_2 := \frac{1}{(\min\gamma)^3}\left(\min\gamma\max|\gamma''|\max\phi + 2(\max|\gamma'|)^2\max\phi + 2\min\gamma\max|\gamma'|\max|\phi'|\right.$$
$$\left. +(\min\gamma)^2\max|\phi''|\right),$$

$$C_3 := \max|\phi''|, \quad C_4 := C_1 + C_2 + C_3.$$

进一步地, ϕ' 表示 ϕ 在 Γ_1 上的一阶切向导数, 其它项的记号相同.

证明. 记 $v(x,y)=u_r(r,\theta)$. 由于 (4.1.1), 它满足边值问题:

$$\begin{aligned} \Delta v(x,y) &= 0, && (x,y)\in\Omega, \\ v(x,y) &= a\phi(x,y), && (x,y)\in\Gamma_1, \\ v(x,y) &= a\gamma(x,y)u(x,y), && (x,y)\in\Gamma_2. \end{aligned}$$

所以根据 (4.1.10) 和 Laplace's 方程的最大值准则有

$$|u_r(r,\theta)|\leqslant \max\{a\max\phi(x,y), a\max(\gamma(x,y)u(x,y))\}\leqslant C_1a(1+a).$$

记 $v(x,y)=u_\theta(r,\theta)$. 根据 (4.1.1), 它满足边值问题:

$$\begin{aligned} \Delta v(x,y) &= 0, && (x,y)\in\Omega, \\ v_n(x,y) &= \phi'(x,y), && (x,y)\in\Gamma_1, \\ v_n(x,y)+\gamma(x,y)v(x,y) &= -\gamma'(x,y)u(x,y), && (x,y)\in\Gamma_2. \end{aligned}$$

由引理 4.1.4 知

$$\begin{aligned} |u_\theta(r,\theta)| &\leqslant \frac{\max|\gamma' u|}{\min\gamma}+(1+a)\left(\frac{1}{\min\gamma}+\ln(ar+1)\right)\max|\phi'| \\ &\leqslant \frac{\max|\gamma'|}{\min\gamma}\max_{\Gamma_2}|u|+(1+a)\left(\frac{1}{\min\gamma}+\ln(ar+1)\right)\max|\phi'|, \end{aligned}$$

由此和引理 4.1.5 我们就可得到结果(4.1.12).

现在记 $v(x,y)=u_{\theta\theta}(r,\theta)$. 通过一个直接的计算我们发现 $v(x,y)$ 满足边值问题:

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 && \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ v_n &= \phi'' && \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}, \\ v_n+\gamma v &= -\gamma'' u-2\gamma' u_\theta && \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}. \end{aligned}$$

因此, 由引理 4.1.4 知

$$|u_{\theta\theta}(r,\theta)|\leqslant \frac{\max|\gamma'' u+2\gamma' u_\theta|}{\min\gamma}+(1+a)\left(\frac{1}{\min\gamma}+\ln(ar+1)\right)\max|\phi''|,$$

结合引理 4.1.5 和 (4.1.12)进一步有

$$|u_{\theta\theta}(r,\theta)| \leqslant (1+a)\left[\frac{\max|\gamma''|\max\phi}{(\min\gamma)^2} + 2\max|\gamma'|\left(\frac{\max|\gamma'|\max\phi}{(\min\gamma)^3} + \frac{\max|\phi'|}{(\min\gamma)^2}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\min\gamma} + \ln(ar+1)\right)\max|\phi''|\right].$$

不等式(4.1.14)可由(4.1.3a), (4.1.11) 和(4.1.13) 直接得到. □

有了以上的准备, 我们将给出本章最重要的结果. 为此, 我们先引进一些记号如下. 给定一个有界开(闭) 集 A, 函数 $\psi \in C^k(\bar{A})$, $|\psi|_{C^k}$ 表示 ψ 在 A 上从 0 到 k 的各阶导数的最大值范数之和[83].

定理4.1.7. *设 γ 是问题(4.1.1)的腐蚀系数, γ_0 由(4.1.5)给定. 假设 $\gamma \in C^2(\Gamma_2)$ 和 $\phi \in C^2(\Gamma_1)$. 那么对 $a>0$ 成立*

$$|\gamma(\theta)-\gamma_0(\theta)| \leqslant Ca, \quad \forall\theta\in[0,2\pi) \tag{4.1.15}$$

其中

$$C := \frac{\max\gamma}{\min\phi}\left(C_4 + C_1\frac{\max\phi\max\gamma}{\min\phi}\right),$$

其常数 C_1 和 C_4 由上面的引理给定.

证明. 根据 (4.1.3b), 我们有

$$\gamma(\theta) = \frac{u_r(0,\theta)}{au(0,\theta)}, \tag{4.1.16}$$

结合 (4.1.3d) 和 (4.1.5) 可得

$$\begin{aligned}
\gamma(\theta)-\gamma_0(\theta) &= \frac{u_r(0,\theta)}{au(0,\theta)} - \frac{\phi(\theta)}{u(1,\theta)} \\
&= \frac{u_r(0,\theta)u(1,\theta) - au(0,\theta)\phi(\theta)}{au(0,\theta)u(1,\theta)} \\
&= \frac{(u_r(0,\theta)-u_r(1,\theta))u(1,\theta) + u_r(1,\theta)u(1,\theta) - au(0,\theta)\phi(\theta)}{au(0,\theta)u(1,\theta)} \\
&= \frac{-u(1,\theta)\int_0^1 u_{rr}(r,\theta)dr + a\phi(\theta)\int_0^1 u_r(r,\theta)dr}{au(0,\theta)u(1,\theta)}.
\end{aligned}$$

由(4.1.11) 和(4.1.14) 知

$$\begin{aligned}
|\gamma(\theta)-\gamma_0(\theta)| &\leqslant \frac{u(1,\theta)\int_0^1 |u_{rr}(r,\theta)|dr + a\phi(\theta)\int_0^1 |u_r(r,\theta)|dr}{au(0,\theta)u(1,\theta)} \\
&\leqslant a\frac{1+a}{u(0,\theta)}\left(C_4 + C_1\frac{\phi(\theta)}{u(1,\theta)}\right).
\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

由(4.1.10) 得

$$u(0,\theta) \geqslant (1+a)\frac{\min\phi}{\max\gamma}, \tag{4.1.18}$$

和

$$\begin{aligned} u(1,\theta) &\geqslant (1+a)\left(\frac{1}{\max\gamma}+\ln(1+a)\right)\min\phi \\ &\geqslant (1+a)\frac{\min\phi}{\max\gamma}. \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

因此, 结合 (4.1.17)-(4.1.19) 意味着

$$\begin{aligned} |\gamma(\theta)-\gamma_0(\theta)| &\leqslant a\frac{\max\gamma}{\min\phi}\left(C_4+C_1\frac{\phi(\theta)\max\gamma}{(1+a)\min\phi}\right) \\ &\leqslant a\frac{\max\gamma}{\min\phi}\left(C_4+C_1\frac{\max\phi\max\gamma}{\min\phi}\right), \end{aligned}$$

这就证明了估计 (4.1.15). □

在实际应用中, 由于已知数据 $u(1,\theta)$ 由测量得到, 所以通常会带噪声, 也就是说 $\tilde{u}(1,\theta)$ 满足

$$\left|\frac{\tilde{u}(1,\theta)-u(1,\theta)}{u(1,\theta)}\right| \leq \delta, \tag{4.1.20}$$

其中 $0\leqslant\delta<1$ 表示噪声水平. 注意到由引理 4.1.5 保证了 $u(1,\theta)$ 是正的. 我们接着构造 γ

$$\tilde{\gamma}_0(\theta) = \frac{\phi(\theta)}{\tilde{u}(1,\theta)}. \tag{4.1.21}$$

由定理 4.1.7 可以得到相关的误差估计, 描述如下:

推论4.1.8. *设 γ 是问题 (4.1.1) 的腐蚀系数, $\tilde{\gamma}_0$ 由 (4.1.21) 给定. 假设 $\gamma\in C^2(\Gamma_2)$, $\phi\in C^2(\Gamma_1)$, 条件 (4.1.20) 成立. 那么有*

$$|\gamma(\theta)-\tilde{\gamma}_0(\theta)| \leqslant Ca + \frac{\max\phi\max\gamma}{\min\phi}\frac{\delta}{1-\delta} \tag{4.1.22}$$

对 $0<a\leq\bar{a}$, 其中常数 C 和定理 4.1.7 中的相同.

证明. 利用 (4.1.21), 定理 4.1.7和三角不等式, 我们有

$$\begin{aligned} |\gamma(\theta)-\tilde{\gamma}_0(\theta)| &\leqslant |\gamma(\theta)-\gamma_0(\theta)|+|\gamma_0(\theta)-\tilde{\gamma}_0(\theta)| \\ &\leqslant Ca+\left|\frac{\phi(\theta)}{u(1,\theta)}-\frac{\phi(\theta)}{\tilde{u}(1,\theta)}\right| \\ &\leqslant Ca+\left|\frac{\phi(\theta)}{u(1,\theta)}\right|\frac{\left|\frac{\tilde{u}(1,\theta)}{u(1,\theta)}-1\right|}{\left|\frac{\tilde{u}(1,\theta)}{u(1,\theta)}\right|}. \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

所以由(4.1.20)和(4.1.23) 立刻知(4.1.22) . □

注记4.1.9. 在两个先验误差估计(4.1.15) 和(4.1.22)中常数 C 有着非常重要的一个影响. 如果 C 非常大, 那么这两个误差的估计会变的非常的糟糕. 由 C 的定义, 我们知道它和函数 ϕ, γ 有着非常复杂的关系. 然而, 当 $\phi=\phi_0$ 是一个正常数时, 这是一个非常有用和实际的情形, 通过一个直接的计算我们有

$$C=\frac{|\gamma|_{C^0}^2+|\gamma|_{C^0}^3}{\varepsilon}+\frac{|\gamma|_{C^0}|\gamma''|_{C^0}}{\varepsilon^2}+\frac{2|\gamma|_{C^0}|\gamma'|_{C^0}^2}{\varepsilon^3},$$

其中 ε 表示正连续函数 γ 的最小值. 我们考虑这样一个情形, $\min\{|\gamma|_{C^0}, |\gamma'|_{C^0}, |\gamma''|_{C^0}\}\geq c$, 这里 c 是独立于 ε 的一个常数. 因此, 如果 ε 趋于零, C 会快速地变大, 估计(4.1.15) 和(4.1.22) 便无法提供到合理的结果. 在下一节的数值实验中, 我们发现在类似的情形中这里讨论的参数展开方法也有可能会失效. 进一步, 通过我们的数值经验发现如果 ϕ 取作一个常数时, 其计算效果会更好.

为了得到 $\gamma(\theta)$ 一阶逼近的误差估计, 我们假设参数 a 的取值范围为 $(0,\bar{a}]$, 这里 $\bar{a}$ 是 a 的一个合理最大值(例如, $\bar{a}=1$). 那么我们有

引理4.1.10. 设 u 是问题(4.1.1)的经典解. 假设 $\gamma\in C^2(\Gamma_2)$ 并且 $\phi\in C^2(\Gamma_1)$. 那么对 $0<a\leq\bar{a}$ 成立

$$|u_{\theta\theta r}(r,\theta)|\leqslant C_5(\min\gamma, |\gamma|_{C^2}, |\phi|_{C^2}, \bar{a})a, \tag{4.1.24}$$

$$|u_{rrr}(r,\theta)|\leqslant C_6(\min\gamma, |\gamma|_{C^2}, |\phi|_{C^2}, \bar{a})a^3. \tag{4.1.25}$$

证明. 通过类似引理 4.1.6 估计的论证方法可以得到结果(4.1.24) 和 (4.1.25). 事实上, 令 $v(x,y)=u_{\theta\theta r}(r,\theta)$. 那么它满足边值问题:

$$\begin{aligned}
\Delta v &= 0 && \text{在 } \Omega \text{ 中},\\
v &= a\phi'' && \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上},\\
v &= a(\gamma u_{\theta\theta}+\gamma'' u+2\gamma' u_\theta) && \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上}.
\end{aligned}$$

因此, 由椭圆方程的最大值原理和引理 4.1.6 直接可以得到 (4.1.24). (4.1.25)是 (4.1.24) 和 (4.1.3a) 的一个直接结果. □

定理4.1.11. 设 γ 问题(4.1.1) 的腐蚀系数, 设 γ_0 和 γ_1 是分别由公式 (4.1.5) 和 (4.1.7) 定义的两个函数. 假设 $\gamma\in C^2(\Gamma_2)$ 和 $\phi\in C^2(\Gamma_1)$. 那么对 $0<a\leq\bar{a}$ 成立

$$|\gamma(\theta)-\gamma_0(\theta)-a\gamma_1(\theta)|\leqslant C'a^2, \quad \forall\theta\in[0,2\pi) \tag{4.1.26}$$

其中 $C' = C'(\min\gamma, |\gamma|_{C^2}, \min\phi, |\phi|_{C^2}, \bar{a})$.

证明. 由于 $u \in C^3(\bar{\Omega})$, 我们由(4.1.3a)知

$$u_{rr}(0,\theta) = -a^2 u_{\theta\theta}(0,\theta) - a u_r(0,\theta). \tag{4.1.27}$$

因此, 由(4.1.16), (4.1.5), (4.1.7) 和 (4.1.3d), 可以得到

$$\begin{aligned}
&\gamma(\theta) - \gamma_0(\theta) - a\gamma_1(\theta)\\
&= \frac{u_r(0,\theta)}{au(0,\theta)} - \frac{\phi(\theta)}{u(1,\theta)} - a\frac{\phi^2(\theta) + [u_{\theta\theta}(1,\theta) + \phi(\theta)]u(1,\theta)}{u^2(1,\theta)}\\
&= \frac{1}{au(0,\theta)u^2(1,\theta)}[u_r(0,\theta)u^2(1,\theta) - a\phi(\theta)u(0,\theta)u(1,\theta)\\
&\qquad - a^2u(0,\theta)[\phi^2(\theta) + (u_{\theta\theta}(1,\theta) + \phi(\theta))u(1,\theta)]]\\
&= \frac{1}{au(0,\theta)u^2(1,\theta)}\Big[- u^2(1,\theta)\int_0^1 u_{rr}(r,\theta)dr + a\phi(\theta)u(1,\theta)\int_0^1 u_r(r,\theta)dr\\
&\qquad - a^2[\phi^2(\theta)u(0,\theta) + u(0,\theta)u(1,\theta)(\phi(\theta) + u_{\theta\theta}(1,\theta))]\Big]\\
&= \frac{1}{au(0,\theta)u^2(1,\theta)}\Big[- u^2(1,\theta)\int_0^1 u_{rr}(r,\theta)dr\\
&\qquad + a\phi(\theta)u(1,\theta)\int_0^1 dr\int_1^r u_{rr}(r,\theta)dr\\
&\qquad + a^2\phi^2(\theta)u(1,\theta) - a^2\phi^2(\theta)u(0,\theta)\\
&\qquad - a^2u(0,\theta)u(1,\theta)(\phi(\theta) + u_{\theta\theta}(1,\theta))\Big]\\
&= -\frac{u(1,\theta)\int_0^1 u_{rr}(r,\theta)dr + a^2u(0,\theta)(\phi(\theta) + u_{\theta\theta}(1,\theta))}{au(0,\theta)u(1,\theta)}\\
&\quad + \frac{a\phi(\theta)u(1,\theta)\int_0^1 dr\int_1^r u_{rr}(r,\theta)dr + a^2\phi^2(\theta)\int_0^1 u_r(r,\theta)dr}{au(0,\theta)u^2(1,\theta)}.
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

我们由(4.1.27) 和 (4.1.3d) 可以推得

$$\begin{aligned}
&u(1,\theta)\int_0^1 u_{rr}(r,\theta)dr + a^2u(0,\theta)(\phi(\theta) + u_{\theta\theta}(1,\theta))\\
&= u(1,\theta)\int_0^1 dr\int_0^r u_{rrr}(r,\theta)dr + u_{rr}(0,\theta)u(1,\theta) + a^2\phi(\theta)u(0,\theta) + a^2u(0,\theta)u_{\theta\theta}(1,\theta)\\
&= u(1,\theta)\int_0^1 dr\int_0^r u_{rrr}(r,\theta)dr - a^2u_{\theta\theta}(0,\theta)u(1,\theta) - au_r(0,\theta)u(1,\theta)\\
&\quad + a^2\phi(\theta)u(0,\theta) + a^2u(0,\theta)u_{\theta\theta}(1,\theta)
\end{aligned}$$

$$= u(1,\theta)\int_0^1 dr\int_0^r u_{rrr}(r,\theta)dr - a^2u_{\theta\theta}(1,\theta)\int_0^1 u_r(r,\theta)dr + a^2u(1,\theta)\int_0^1 u_{\theta\theta r}(r,\theta)dr$$

$$+ au(1,\theta)\int_0^1 u_{rr}(r,\theta)dr - au_r(1,\theta)u(1,\theta) + a^2\phi(\theta)u(0,\theta)$$

$$= u(1,\theta)\int_0^1 dr\int_0^r u_{rrr}(r,\theta)dr - a^2u_{\theta\theta}(1,\theta)\int_0^1 u_r(r,\theta)dr + a^2u(1,\theta)\int_0^1 u_{\theta\theta r}(r,\theta)dr$$

$$+ au(1,\theta)\int_0^1 u_{rr}(r,\theta)dr - a^2\phi(\theta)u(1,\theta) + a^2\phi(\theta)u(0,\theta)$$

$$= u(1,\theta)\int_0^1 dr\int_0^r u_{rrr}(r,\theta)dr - a^2u_{\theta\theta}(1,\theta)\int_0^1 u_r(r,\theta)dr + a^2u(1,\theta)\int_0^1 u_{\theta\theta r}(r,\theta)dr$$

$$+ au(1,\theta)\int_0^1 u_{rr}(r,\theta)dr - a^2\phi(\theta)\int_0^1 u_r(r,\theta)dr. \tag{4.1.29}$$

因此, 由 (4.1.28)-(4.1.29) 和引理 4.1.6 和引理 4.1.10 直接可以得到 (4.1.26) . 命题得证. □

注记4.1.12. *如果只有数据 $u(1,\theta)$ 是可测得, 那么我首先需要用一些有效的数值微分方法来求得 $u_{\theta\theta}(1,\theta)$ [10, 11], 那么通过关系 $\gamma \approx \gamma_0 + a\gamma_1$ 可以重构腐蚀系数 γ, 这里 γ_0 和 γ_1 分别由 (4.1.5) 和 (4.1.7) 定义. 详见 [8].*

§4.1.3 数值实验

这一节中我们将提供一些数值例子来说明上述提及的两种重构 γ 方法的计算效果. 接下来, 我们沿用上一节中的记号, 对函数 $v \in C[0,2\pi]$, 记 $\|v\|$ 为 $[0,2\pi]$ 上的最大范数. 因此,

$$E_0(\gamma) = \left\|\frac{\gamma-\gamma_0}{\gamma}\right\|, \quad \tilde{E}_0(\gamma) = \left\|\frac{\gamma-\tilde{\gamma}_0}{\gamma}\right\|, \quad E_1(\gamma) = \left\|\frac{\gamma-\gamma_0-a\gamma_1}{\gamma}\right\|$$

分别表示相关逼近的最大相对误差. 在我们的数值例子中, 我们将考虑形如 (4.1.3) 的腐蚀探测问题, 它由 (4.1.1) 通过坐标变化 (4.1.2) 得到.

举例4.1.13. 我们取 $\phi(\theta) = 2 + \cos\theta$ 和 $\gamma(\theta) = 1$. 通过变量分离的方法, 我们发现问题 (4.1.3)(除了(4.1.3c)) 的解为

$$u(r,\theta) = 2(a+1)\ln(ar+1) + (ar+1)\cos\theta + 2(a+1),$$

或等价地在 $x-y$ 坐标系统中表示为,

$$u(x,y)=(a+1)\ln(x^2+y^2)+x+2(a+1)$$

因此,

$$\begin{aligned}u(1,\theta)&=2(a+1)\ln(a+1)+(a+1)\cos\theta+2(a+1),\\ u_{\theta\theta}(1,\theta)&=-(a+1)\cos\theta.\end{aligned}$$

将它们代入 (4.1.5) 和 (4.1.7) 我们得到

$$\begin{aligned}\gamma_0(\theta)=&\frac{2+\cos\theta}{(a+1)[2\ln(a+1)+2+\cos\theta]},\\ \gamma_1(\theta)=&\frac{(2+\cos\theta)^2}{(a+1)^2[2\ln(a+1)+2+\cos\theta]^2}\\ &+\frac{2-a\cos\theta}{(a+1)[2\ln(a+1)+2+\cos\theta]}.\end{aligned}$$

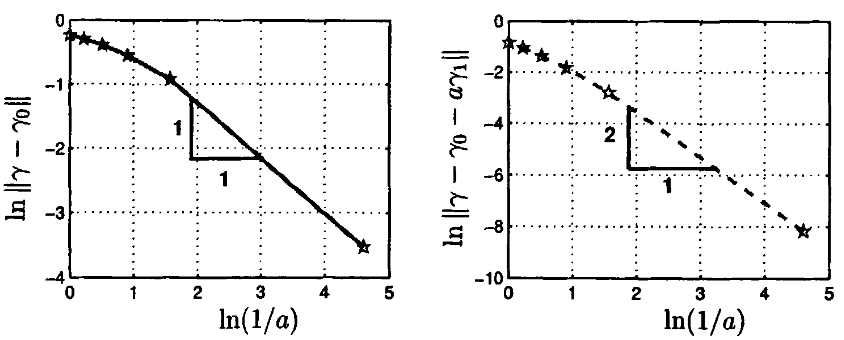


图 4.2: 例4.1.13: 实线表示 $\ln\|\gamma-\gamma_0\|$ 在 ln 度量下的收敛率. 虚线表示 $\ln\|\gamma-\gamma_0-a\gamma_1\|$ 在 ln 度量下的收敛率.

Fig.4.2 Example 4.1.13: The solid line represents the convergence rate of $\ln\|\gamma-\gamma_0\|$ in ln scale. The dashed line represents the convergence rate of $\ln\|\gamma-\gamma_0-a\gamma_1\|$ in ln scale.

对不同的 a 我们用上面的公式来重构 γ. 在图 4.2 中, 实线表示了 $\ln\|\gamma-\gamma_0\|$ 和 $\ln(1/a)$ 之间的关系, 而虚线则表示了 $\ln\|\gamma-\gamma_0-a\gamma_1\|$ 和 $\ln(1/a)$ 之间的关系, 从中我们可以推得数值结果和定理 4.1.7 及定理 4.1.11 中的理论估计是相吻合的. 进一步地, 在表 4.1 中列举了两个逼近方法的误差, 这证明了当 a 充分大($a=0.1$ 左右)零阶逼近效果比较差, 而当 a 很小($a=0.01$ 左右)时则比较好, 一阶逼近则

表 4.1: 例4.1.13: 对应于不同 a, $E_0(\gamma)$ 和 $E_1(\gamma)$ 的值.

a	0.5	0.1	0.05	0.01
$E_0(\gamma)$	0.63187	0.23646	0.13229	0.02922
$E_1(\gamma)$	0.20628	0.01814	0.00570	0.00028

表 4.2: 例4.1.13: 对应于不同 a 和 δ, $\tilde{E}_0(\gamma)$的值.

a \ δ	0	0.01	0.05	0.1
0.1	0.23646	0.24387	0.27255	0.30584
0.05	0.13229	0.14074	0.17331	0.21074
0.01	0.02922	0.03874	0.07542	0.11684

比零阶逼近的精确度要好. 接下来我们考虑测量数据 $u(1,\theta)$ 在零阶逼近时的噪声影响(详见(4.1.20)-(4.1.21)). 对应于不同 a 和 δ 的 $\tilde{E}_0(\gamma)$ 值则在表 4.2 中, 从中我们可以发现当 a 充分小($a = 0.01$ 左右), 即使误差水平 δ 有点大($\delta = 5\%$ 左右), 我们也可以很好地重构腐蚀系数.

举例4.1.14. 这个例子讨论了当 ϕ 是一个常数时此重构方法的计算效果. 我们取 $\phi(\theta) = 2$ 和 $\gamma(\theta) = 1$. 通过变量分离的方法, 我们发现问题 (4.1.3)(除了(4.1.3c)) 的解为

$$u(r,\theta) = 2(a+1)\ln(ar+1) + 2(a+1),$$

或等价地在 $x-y$ 坐标系统中表示为,

$$u(x,y) = (a+1)(\ln(x^2+y^2)+2).$$

很清楚地, 它是一个径向函数. 在这个情形中, 我们有 $u_{\theta\theta}(1,\theta) = 0$, 由它和 (4.1.8) 我们得到

$$\gamma_1(\theta) = \gamma_0(\theta)(\gamma_0(\theta)+1). \tag{4.1.30}$$

也有

$$u(1,\theta) = 2(a+1)\ln(a+1) + 2(a+1),$$

结合 (4.1.5) 和 (4.1.30) 可以推得

$$
\begin{aligned}
\gamma_0(\theta) =& \frac{1}{(a+1)[\ln(a+1)+1]}, \\
\gamma_1(\theta) =& \frac{1}{(a+1)^2[\ln(a+1)+1]^2} + \frac{1}{(a+1)[\ln(a+1)+1]}.
\end{aligned}
$$

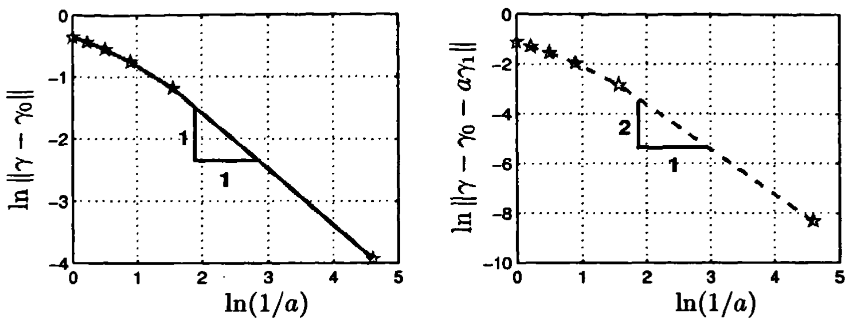


图 4.3: 例4.1.14: 实线表示 $\ln\|\gamma - \gamma_0\|$ 在 ln 度量下的收敛率. 虚线表示 $\ln\|\gamma - \gamma_0 - a\gamma_1\|$ 在 ln 度量下的收敛率.

Fig.4.3 Example 4.1.14: The solid line represents the convergence rate of $\ln\|\gamma - \gamma_0\|$ in ln scale. The dashed line represents the convergence rate of $\ln\|\gamma - \gamma_0 - a\gamma_1\|$ in ln scale.

表 4.3: 例4.1.14: 对应于不同 a, $E_0(\gamma)$ 和 $E_1(\gamma)$ 的值.

a	0.5	0.1	0.05	0.01
$E_0(\gamma)$	0.52566	0.17002	0.09192	0.01966
$E_1(\gamma)$	0.17599	0.01813	0.00529	0.00024

表 4.4: 例4.1.14: 对应于不同 a 和 δ, $\tilde{E}_0(\gamma)$的值.

δ / a	0	0.01	0.05	0.1
0.1	0.17002	0.17823	0.20953	0.24545
0.05	0.09192	0.10091	0.13514	0.17447
0.01	0.01966	0.02936	0.06634	0.10877

对不同的 a 和 δ 我们用上面的公式和 (4.1.21) 来重构 γ. 从图 4.3 和表 4.3-4.4 中的数值结果来看, 我们可以得到例4.1.13 中相同的结论. 进一步地, 比较表 4.1 和表 4.3 以及表 4.2 和表 4.4后, 我们发现在 ϕ 为常数的情形中这里提到的逼近方法计算效果较好.

表 4.5: 例4.1.14: 对应于不同 ε, $E_0(\gamma)$ 和 $E_1(\gamma)$ 的值.

ε	1×10^{0}	1×10^{-1}	1×10^{-2}	1×10^{-3}	1×10^{-4}	1×10^{-5}	1×10^{-6}
$E_0(\gamma)$	0.04174	0.07196	0.47277	4.8401	48.512	485.23	4852.5
$E_1(\gamma)$	0.00134	0.00131	0.00285	0.02542	0.25368	2.5363	25.362

举例4.1.15. 这个例子讨论了当腐蚀系数 $\gamma(\theta)$ 很接近零时重构方法的计算效果. 我们取 $a = 0.01$,

$$\phi(\theta) = \frac{200b_1}{101} + \frac{(100^2+101^2)(100^4+101^4)}{10100^3}\cos 2\theta, \quad \gamma(\theta) = \sin\theta + 1 + \varepsilon,$$

这里 $b_1 = \frac{40402\varepsilon^2+81206\varepsilon+20603}{10000}$. 再次通过变量分离的方法, 我们发现问题 (4.1.3)(除了(4.1.3c)) 的解为

$$u(r,\theta) = 2b_1 \ln\left(\frac{r}{100}+1\right) - \frac{101^2+(r+100)^2}{25(r+100)}\sin\theta + \frac{20201[(0.01r+1)^4-1]}{2(r+100)^2}\cos 2\theta + b_2,$$

或等价地在 $x-y$ 坐标系统中表示为,

$$u(x,y) = b_1\ln(x^2+y^2) - 4y - \frac{10201y}{2005(x^2+y^2)} + \frac{20201}{20000}(x^2-y^2) - \frac{20201(x^2-y^2)}{20000(x^2+y^2)^2} + b_2.$$

这里 $b_2 = \frac{20201\varepsilon+20402}{2500}$, $0<\varepsilon\le 1$. 因此,

$$\begin{aligned} u(1,\theta) &= 2b_1\ln\frac{101}{100} - \frac{202}{25}\sin\theta + \frac{20201(1.01^4-1)}{20402}\cos 2\theta + b_2, \\ u_{\theta\theta}(1,\theta) &= \frac{202}{25}\sin\theta - \frac{40402(1.01^4-1)}{10201}\cos 2\theta. \end{aligned}$$

利用这些关系再结合 (4.1.5) 和 (4.1.8), 我们可以直接推出 $\gamma_0(\theta)$ 和 $\gamma_1(\theta)$. 表 4.5 显示了$E_0(\gamma)$ 和 $E_1(\gamma)$ 对 ε 的依赖关系. 由数值结果, 我们可以总结这两个方法当 ε 充分大时都能取得很好的效果, 就像前两个例子中观察到的. 然而, 当 ε 趋于零时, $E_0(\gamma)$ 和 $E_1(\gamma)$ 会快速发散.

§4.2 非薄板区域的腐蚀探测问题

§4.2.1 问题的描述

我们考虑以下腐蚀探测问题:

$$\Delta u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{4.2.1a}$$

$$u(x,y) = g_C(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_C, \tag{4.2.1b}$$

$$\partial_n u(x,y) = \phi_C(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_C, \tag{4.2.1c}$$

$$u(x,y) = g_D(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_D, \tag{4.2.1d}$$

$$\partial_n u(x,y) + \gamma(x,y)u(x,y) = \phi_I(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_I, \tag{4.2.1e}$$

其中, Ω 是 $\mathbb{R}^d(d=2,3)$ 中的正则有界(Lipschitz) 区域, n 是指向边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 的单位外法向量. 我们假设 Γ 分成三部分 Γ_D, Γ_C 和 Γ_I, 每个部分都是非零测度. 这里我们假设 Γ_C 和 Γ_I 没有公共端点(2维) 公共边(3维), 也就是说它们被 Γ_D 分开(见图 4.6).

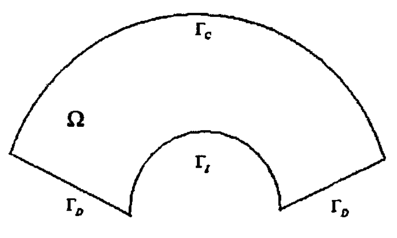


图 4.4: 几何区域的一个举例.

Fig.4.4 An example of the geometry.

§4.2.2 基本理论

首先, 我们引进空间 $V = H^1(\Omega)$ 和它的子空间

$$V_{\Gamma_C} = \{v \in V \mid v = 0 \; a.e.\text{在 } \Gamma_C \text{ 上}\},$$

$$V_{\Gamma_D} = \{v \in V \mid v = 0\ a.e.\text{在}\ \Gamma_D\ \text{上}\},$$

对任意的 γ, 我们定义 $u_D(\gamma)$ 为对应 Γ_C 上 Dirichlet 条件的解, 即为以下问题的解

$$\Delta u_D(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{4.2.2a}$$

$$u_D(x,y) = g_C(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_C, \tag{4.2.2b}$$

$$u_D(x,y) = g_D(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_D, \tag{4.2.2c}$$

$$\partial_n u_D(x,y) + \gamma(x,y)u_D(x,y) = \phi_I(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_I, \tag{4.2.2d}$$

其变分形式为

$$\begin{aligned}&\text{找 } u \in (g_D + V_{\Gamma_D}) \cap (g_C + V_{\Gamma_C}), \quad \text{满足}\\ &\int_\Omega \nabla u \nabla v dxdy + \int_{\Gamma_I} \gamma uvds = \int_{\Gamma_I} \phi_I vds - \int_\Omega fvdxdy, \quad \forall v \in V_{\Gamma_D} \cap V_{\Gamma_C}.\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

同时 $u_N(\gamma)$ 为对应 Γ_C 上 Neumann 条件的解, 即为以下问题的解

$$\Delta u_N(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{4.2.4a}$$

$$\partial_n u_N(x,y) = \phi_C(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_C, \tag{4.2.4b}$$

$$u_N(x,y) = g_D(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_D, \tag{4.2.4c}$$

$$\partial_n u_N(x,y) + \gamma(x,y)u_N(x,y) = \phi_I(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_I, \tag{4.2.4d}$$

其变分形式为

$$\begin{aligned}&\text{找 } u \in g_D + V_{\Gamma_D}, \quad \text{满足}\\ &\int_\Omega \nabla u \nabla v dxdy + \int_{\Gamma_I} \gamma uvds = \int_{\Gamma_C} \phi_c vds + \int_{\Gamma_I} \phi_I vds - \int_\Omega fvdxdy, \quad \forall v \in V_{\Gamma_D}.\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

我们考虑求解最优问题

$$J(\gamma) = \min_{\gamma \in V_{ad}} |u_D(\gamma) - u_N(\gamma)|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{4.2.6}$$

其中 $V_{ad} := L^\infty(\Gamma_I)$ 为 γ 的一个容许空间.

让我们研究腐蚀问题 (4.2.1) 和最优问题 (4.2.6) 之间的关系. 我们有以下定理.

定理4.2.1. *假设存在腐蚀系数 $\gamma \in V_{ad}$ 使问题 (4.2.1) 有唯一解 u. 那么柯西问题 (4.2.1) 等价于优化问题 (4.2.6).*

证明. 首先, 设 u 是腐蚀问题 (4.2.1) 的解, 记 $\gamma^* = \dfrac{\phi_I(x) - \partial_n u}{u}$. 那么 $u_D = u_N = u$ 显然是问题 (4.2.2) 和 (4.2.4) 对应于此 γ^* 的解. 在这样的选择下, 我们就有 $J(\gamma^*) = 0$, i.e. γ^* 是问题 (4.2.6) 的解.

接下来, 如果 γ 是问题 (4.2.6) 的解, 那么我们有

$$0 \leq J(\gamma) \leq J(\gamma^*) = 0.$$

所以, 如果令 $v = u_D - u_N$, 便可知

$$\begin{aligned} \Delta v(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in \Omega, \\ v(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in \Gamma_D, \\ \partial_n v(x,y) + \gamma(x,y) v(x,y) &= 0, \quad (x,y) \in \Gamma_I, \end{aligned}$$

再结合 $J(\gamma) = |v|_{H^1(\Omega)} = 0$, 我们可以得到 v 在 Ω 中恒为 0. 于是 $u = u_D = u_N$ 就是问题4.2.1的解. 所以命题得证. □

§4.2.3 数值实验

我们考虑用拟牛顿法来求解优化问题 (4.2.6), 那么首先必须要计算其方向梯度. 由定理 (1.4.2) 和性质 (1.4.3), 知泛函 J 在 λ 处沿方向 μ 的梯度为

$$< \nabla J(\lambda), \mu >= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J(\lambda + t\mu)\,|_{t=0}\,. \tag{4.2.8}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J(\lambda + t\mu)|_{t=0} = 2\int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \nabla\left(u_D(\lambda + t\mu) - u_N(\lambda + t\mu)\right)|_{t=0} \cdot \nabla\left(u_D(\lambda) - u_N(\lambda)\right).$$

记 $u_D'(\lambda)\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_D(\lambda + t\mu)\,|_{t=0}$, 那么我们有 $u_D'(\lambda)\mu$ 满足以下问题:

$$\begin{aligned} \Delta\left(u_D'(\lambda)\mu\right) &= 0, \qquad (x,y) \in \Omega, \\ u_D'(\lambda)\mu &= 0, \qquad (x,y) \in \Gamma_C, \\ u_D'(\lambda)\mu &= 0, \qquad (x,y) \in \Gamma_D, \\ \partial_n\left(u_D'(\lambda)\mu\right) + \lambda(x,y)\left(u_D'(\lambda)\mu\right) + \mu u_D(\lambda) &= 0, \qquad (x,y) \in \Gamma_I. \end{aligned}$$

同样地，记 $u'_N(\lambda)\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_N(\lambda + t\mu)\,|_{t=0}$，则 $u'_N(\lambda)\mu$ 满足以下问题：

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(u'_N(\lambda)\mu\right) &= 0, \qquad && (x,y) \in \Omega,\\
\partial_n\left(u'_N(\lambda)\mu\right) &= 0, \qquad && (x,y) \in \Gamma_C,\\
u'_N(\lambda)\mu &= 0, \qquad && (x,y) \in \Gamma_D,\\
\partial_n\left(u'_N(\lambda)\mu\right) + \lambda(x,y)\left(u'_N(\lambda)\mu\right) + \mu u_N(\lambda) &= 0, \qquad && (x,y) \in \Gamma_I,
\end{aligned}
$$

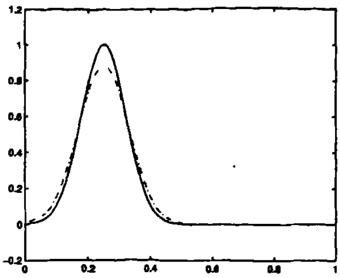
于是

$$
< \nabla J(\lambda), \mu >= 2\int_\Omega \nabla\left(u'_D(\lambda)\mu - u'_N(\lambda)\mu\right) \cdot \nabla\left(u_D(\lambda) - u_N(\lambda)\right).
$$

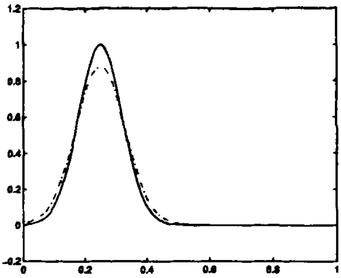
这样我们可以通过求解四个椭圆问题得到泛函 J 的方向梯度，这样便可以利用matlab 自带的拟牛顿法工具包来实现问题的求解. 我们使用有限元方法来求解椭圆方程并进行数值的模拟. 设 T^h 是 $\overline{\Omega}$ 的一族正规有限元剖分，它使得 $\partial\Omega = \overline{\Gamma_I} \cup \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_C}$ 相容. 记 V^h 是对应的分片线性元空间，并且记 $\gamma^h \in V^h_{ad}$ 是与之对应的分片常数空间. 那么问题 (4.2.6),(4.2.2) 和 (4.2.4) 都可以转化成相应有限元空间中的离散问题.

现我们给出具体的数值例子来说明算法的有效性. 为了寻求算法的简便操作，特别地我们取 $\Omega = (0,1) \times (0,a)$ ，$\Gamma_C = [0,1] \times \{a\}$，$\Gamma_I = [0,1] \times \{0\}$，$\Gamma_D = \{0,1\} \times [0,1]$. 在此特殊情形下，腐蚀系数 $\gamma(x,y)$ 就可以简化为 $\gamma(x)$. 函数则取为 $u(x,y) = (x-1)^2 + y^2$，及真解 $\gamma(x) = e^{-100\times(x-0.25)^2}$，通过计算很容易知 f，g_C，g_D，ϕ_C，ϕ_I 的值. 这里，a 的选取并不要求它充分小，我们发现该方法的确有效地求解了此腐蚀系数问题，但随着 a 的变大，其数值拟合效果也会变差. 结果显示在图 4.7 中.

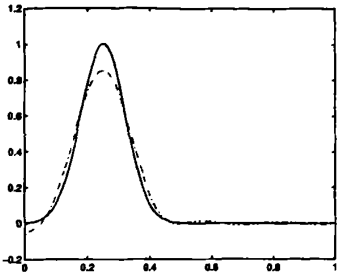
注记4.2.2. *为了加快优化算法的速度，所以对腐蚀系数 γ 的拟合我们采用分片常数而不是一般的线性元. 在寻优结束后，我们可以将所得结果看成是在给定区间上带有噪声的均值条件. 于是利用第二章中的样条函数方法便得到了最终结果.*



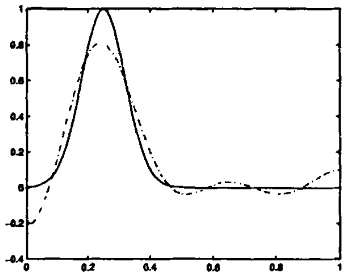
(a) a=0.01时的结果.



(b) a=0.1时的结果.



(c) a=0.3时的结果.



(d) a=0.5时的结果.

图 4.5: 不同 a 对应的拟合图示:拟合解(虚线), 真解(实线).

Fig.4.5 Graphs of the exact function (the solid curve) and the approximate solutions (the dashed curve) with different values of a.

第五章　柯西问题的数值计算

§5.1　椭圆方程柯西问题

§5.1.1　问题的描述

首先介绍一个二阶线性椭圆偏微分方程的柯西问题模型. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (d: 正整数) 是 Lipschitz 区域, 其边界 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 满足 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ 并且 Γ_1 和 Γ_2 是 Γ 上的可测子集相对内部非空. 我们用 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \cdots, \nu_d)^T$ 表示 Γ 的单位外法向量. 向量 $\boldsymbol{\nu}$ 定义在 Γ 上. 设 a_{ij} $(1 \le i, j \le d)$, a_i $(1 \le i \le d)$, 和 a_0 满足: 存在常数 $\bar{c}_0 > 0$ 使得,

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \bar{c}_0\xi_i\xi_i \quad \forall \boldsymbol{\xi} = (\xi_i) \in \mathbb{R}^d, \tag{5.1.1}$$

和

$$a_i \in L^2(\Omega), \quad a_0 \in L^2(\Omega). \tag{5.1.2}$$

从现在开始, 指标 i 和 j 从 1 选到 d, 我们采用 Einstein 求和记号, 对重复指标进行求和, 也就是说,

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \equiv \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\xi_i\xi_j.$$

同时给定以下函数

$$f \in L^2(\Omega), \quad g_D \in H^1(\Omega), \quad g_N \in L^2(\Gamma_1). \tag{5.1.3}$$

考虑柯西问题

$$-\partial_j\left(a_{ij}\partial_i u\right) + a_i\partial_i u + a_0 u = f \quad 在\ \Omega\ 中, \tag{5.1.4}$$

$$u = g_D \quad 在\ \Gamma_1\ 上, \tag{5.1.5}$$

$$a_{ij}\partial_i u\, \nu_j = g_N \quad 在\ \Gamma_1\ 上. \tag{5.1.6}$$

在本章中, 都假设 (5.1.1), (5.1.2) 和 (5.1.3) 成立.

柯西问题和其变分形式的研究是许多文献的课题, e.g., [2, 20, 22, 39, 85–88] 研究存在性、唯一性, 和稳定性; [23, 32, 34, 37, 40, 89–94] 研究数值逼近和算法. 很容易构造例子说明一般情况下柯西问题不存在解. 另一方面, Holmgren's 定理和 Carleman's 估计可以得到解的唯一性. 特别地, [2, Section 3.3] 证明了至少在假设条件$\partial\Omega \in C^2$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ $a_i \in L^\infty(\Omega)$ 和 $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ 下, 柯西问题如果存在解, 那么它就是唯一的. 进一步提到了这些光滑性假设减弱后柯西问题的解仍唯一.

§5.1.2 相关理论及证明

本文用优化控制方法重写柯西问题.

一个自然的构造是用 Γ_2 上的未知解信息作为一个控制变量 z , 定义 $u = u(z)$ 是以下边值问题的解

$$
\begin{aligned}
-\partial_j\left(a_{ij}\partial_i u\right) + a_i\partial_i u + a_0 u = f \qquad & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\
u = g_D \quad & \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上},\\
u = z \qquad & \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上},
\end{aligned}
$$

然后对变量 z 求解如下目标泛函的最小值

$$
\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\left(a_{ij}\partial_i u\,\nu_j - g_N\right)^2 ds.
$$

文献[95]中讨论了这个方法. 注意到要计算 $z - g_D \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)$ 这一项比较困难, 特别是如何构造有效的数值算法成为一个难题.

仍然以 Γ_2 上的未知解信息作为一个控制变量 z, 另一种构造是定义 $u = u(z)$ 是以下边值问题的解

$$
\begin{aligned}
-\partial_j\left(a_{ij}\partial_i u\right) + a_i\partial_i u + a_0 u = f \quad & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\
a_{ij}\partial_i u\,\nu_j = g_N \quad & \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上},\\
u = z \quad & \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上},
\end{aligned}
$$

然后对变量 z 求解如下目标泛函的最小值

$$
\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\left[u(z) - g_D\right]^2 ds.
$$

这里仍需要 z 是 $H^1(\Omega)$ 上函数在 Γ_2 上的限制, 这样就会增加数值逼近的限制.

根据[37], 用 Γ_2 上的未知流量 $(a_{ij}\partial_i u)\,\nu_j$ 作为控制变量 z. 设 $U_{ad}\subset L^2(\Gamma_2)$ 是控制变量的容许集. 本章中, 所有的边值问题都在弱意义下理解. 为了这个目的, 引进空间 $V=H^1(\Omega)$ 和它的子空间

$$V_{\Gamma_1}=\{v\in V\mid v|_{\Gamma_1}=0\},$$
$$V_{\Gamma_2}=\{v\in V\mid v|_{\Gamma_2}=0\},$$

以及 V 上的双线性型:

$$a(u,v)=\int_\Omega (a_{ij}\partial_i u\partial_j v+a_i\partial_i uv+a_0uv)\,dx.$$

假设数据都满足以下的椭圆条件: 对常数 $c_0>0$,

$$a(v,v)\ge c_0\|v\|_V^2\quad \forall v\in V_{\Gamma_1}\cup V_{\Gamma_2}. \tag{5.1.7}$$

见[67, 练习8.4.3].

对任意的 $z\in U_{ad}$, 先定义 $w=w(z)$ 是以下边值问题的解:

$$-\partial_j\left(a_{ij}\partial_i w\right)+a_i\partial_i w+a_0w=f\quad 在\ \Omega\ 中, \tag{5.1.8}$$
$$w=g_D\quad 在\ \Gamma_1\ 上, \tag{5.1.9}$$
$$a_{ij}\partial_i w\,\nu_j=z\quad 在\ \Gamma_2\ 上. \tag{5.1.10}$$

它的变分形式是

$$w\in g_D+V_{\Gamma_1},\quad a(w,v)=\int_\Omega f\,v\,dx+\int_{\Gamma_2} z\,v\,ds\quad \forall v\in V_{\Gamma_1}. \tag{5.1.11}$$

由 Lax-Milgram 引理([67, 68]), 这个问题有唯一解.

接着定义 $u=u(z)$ 是以下边值问题的解:

$$-\partial_j\left(a_{ij}\partial_i u\right)+a_i\partial_i u+a_0u=f\quad 在\ \Omega\ 中, \tag{5.1.12}$$
$$a_{ij}\partial_i u\,\nu_j=g_N\quad 在\ \Gamma_1\ 上, \tag{5.1.13}$$
$$u=w\quad 在\ \Gamma_2\ 上. \tag{5.1.14}$$

其变分形式

$$u\in w+V_{\Gamma_2},\quad a(u,v)=\int_\Omega f\,v\,dx+\int_{\Gamma_1} g_N v\,ds\quad \forall v\in V_{\Gamma_2}. \tag{5.1.15}$$

再次利用 Lax-Milgram 引理, 这个问题也有唯一解.

定义

$$J(z) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} [u(z) - g_D]^2 \, ds, \tag{5.1.16}$$

$$J_\varepsilon(z) = J(z) + \frac{\varepsilon}{2}\|z\|^2_{L^2(\Gamma_2)}, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.1.17}$$

那么改写柯西问题, 考虑以下的优化问题

$$\inf_{z\in U_{ad}} J_\varepsilon(z). \tag{5.1.18}$$

对问题 (5.1.18) 的解的存在性和唯一性有以下结果.

定理5.1.1. *如果 $U_{ad} \subset L^2(\Gamma_2)$ 是弱闭的, 那么问题 (5.1.18) 有唯一解 z_ε. 如果 U_{ad} 闭凸集, 那么这个解 z_ε 由以下不等式刻划*

$$\int_{\Gamma_1} [u(z_\varepsilon) - g_D]\,[u(z) - u(z_\varepsilon)]\, ds + \varepsilon\,(z_\varepsilon, z - z_\varepsilon)_{L^2(\Gamma_2)} \geq 0 \quad \forall z \in U_{ad}. \tag{5.1.19}$$

证明. 由极小值的定义, 存在一个序列 $\{z_n\} \subset U_{ad}$ 满足

$$J_\varepsilon(z_n) \to \alpha \equiv \inf_{z\in U_{ad}} J_\varepsilon(z).$$

由于 $\varepsilon > 0$, 序列 $\{\|z_n\|_{L^2(\Gamma_2)}\}$ 是有界的. 因为 U_{ad} 在自反 Banach 空间 $L^2(\Gamma_2)$ 中是弱闭的, 那么存在一个子序列仍记为 $\{z_n\}$, 和 $z_\infty \in U_{ad}$ 使得

$$z_n \rightharpoonup z_\infty \quad 在\ L^2(\Gamma_2)\ 中.$$

在 (5.1.11) 中取 $w = w_n \equiv w(z_n)$ 和 $v = w_n - g_D$, 可以证明 $\{w_n\}$ 在 V 上是有界的. 于是存在 $w_\infty \in g_D + V_{\Gamma_1}$ 使得

$$w_n \rightharpoonup w_\infty \quad 在\ V\ 中.$$

很容易证明 $w_\infty = w(z_\infty)$.

在 (5.1.15) 中取 $u = u_n \equiv u(z_n)$ 和 $v = u_n - w_n$, 同样可以证明 $\{u_n\}$ 在 V 上是有界的. 所以对某一子列和某个 $u_\infty \in V$, 成立在 Γ_2 上 $u_\infty = w_\infty$, 并且在 V 中 $u_n \rightharpoonup u_\infty$. 很容易证明 $u_\infty = u(z_\infty)$.

那么, $J_\varepsilon(z_\infty) \leq \liminf_{n\to\infty} J_\varepsilon(z_n) = \alpha$, 所以 z_∞ 是问题 (5.1.18) 的解. 由 J_ε 的严格凸性, 解是唯一的.

在附加假设 U_{ad} 是凸的前提条件下, 通过标准的论证便可得到解 z_ε 满足性质 (5.1.19). □

我们也可以证明 z_ε 连续依赖于数据 f, g_D 和 g_N.

定理5.1.2. 假设 $U_{ad} \subset L^2(\Gamma_2)$ 是闭凸集, 并假设

$$f_n \rightharpoonup f_\infty \text{ 在 } L^2(\Omega) \text{ 中}, \quad g_{D,n} \to g_{D,\infty} \text{ 在 } V \text{ 中}, \quad g_{N,n} \rightharpoonup g_{N,\infty} \text{ 在 } L^2(\Gamma_1) \text{ 中}.$$

定义 z_n 和 z_∞ 分别为问题 (5.1.18) 对应数据 f_n, $g_{D,n}$, $g_{N,n}$ 和 f_∞, $g_{D,\infty}$, $g_{N,\infty}$ 的唯一解. 记 $w_n = w(z_n)$, $u_n = u(z_n)$, $w_\infty = w(z_\infty)$, 和 $u_\infty = u(z_\infty)$. 那么

$$w_n \to w_\infty \text{ 在 } V \text{ 中}, \quad u_n \to u_\infty \text{ 在 } V \text{ 中}, \quad z_n \rightharpoonup z_\infty \text{ 在 } L^2(\Gamma_2) \text{ 中}. \tag{5.1.20}$$

证明. 存在序列 $\{z_n\}$的子列, 仍记为 $\{z_n\}$, 和 $z_\infty \in U_{ad}$ 使得

$$z_n \rightharpoonup z_\infty \text{ 在 } L^2(\Gamma_2) \text{ 中}.$$

先证明 z_∞ 是问题 (5.1.18) 对应于数据 f_∞, $g_{D,\infty}$, $g_{N,\infty}$ 的解. 由 (5.1.11) 知

$$w_n \in g_{D,n} + V_{\Gamma_1}, \quad a(w_n, v) = \int_\Omega f_n v\, dx + \int_{\Gamma_2} z_n v\, ds \quad \forall v \in V_{\Gamma_1}. \tag{5.1.21}$$

同定理 5.1.1 的证明, $\{w_n\}$ 在 V 上有界. 那么, 对某一子列和 $w_\infty \in V$ 我们有

$$w_n \rightharpoonup w_\infty \text{ 在 } V \text{ 中}. \tag{5.1.22}$$

使 (5.1.21) 中的 $n \to \infty$, 可得

$$w_\infty \in g_{D,\infty} + V_{\Gamma_1}, \quad a(w_\infty, v) = \int_\Omega f_\infty v\, dx + \int_{\Gamma_2} z_\infty v\, ds \quad \forall v \in V_{\Gamma_1}.$$

所以, $w_\infty = w(z_\infty)$. 我们可以说明

$$w_n \to w_\infty \text{ 在 } V \text{ 中}.$$

为了证此, 注意到由 (5.1.22), 对于某一子列有

$$w_n \to w_\infty \text{ 在 } L^2(\Omega) \text{ 中 和在 } L^2(\Gamma_2) \text{ 中}.$$

因此,

$$
\begin{aligned}
c_0\|(w_n - w_\infty) - (g_{D,n} - g_{D,\infty})\|_V^2 \\
&\le a((w_n - g_{D,n}) - (w_\infty - g_{D,\infty}), (w_n - g_{D,n}) - (w_\infty - g_{D,\infty})) \\
&= a(w_n - w_\infty, (w_n - g_{D,n}) - (w_\infty - g_{D,\infty})) \\
&\quad - a(g_{D,n} - g_{D,\infty}, (w_n - g_{D,n}) - (w_\infty - g_{D,\infty})) \\
&= \int_\Omega (f_n - f_\infty)\,[(w_n - w_\infty) - (g_{D,n} - g_{D,\infty})]\,dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_2} (z_n - z_\infty)\,[(w_n - w_\infty) - (g_{D,n} - g_{D,\infty})]\,ds \\
&\quad - a(g_{D,n} - g_{D,\infty}, (w_n - g_{D,n}) - (w_\infty - g_{D,\infty})) \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

由 (5.1.15) 知

$$
u_n \in w_n + V_{\Gamma_2}, \quad a(u_n, v) = \int_\Omega f_n v\,dx + \int_{\Gamma_1} g_{N,n} v\,ds \quad \forall v \in V_{\Gamma_2}. \tag{5.1.23}
$$

类似于上面的论证, 由 (5.1.23) 得到存在一个子序列 $\{u_n\}$ 和 $u_\infty \in V$ 使得

$$
u_\infty \in w_\infty + V_{\Gamma_2}, \quad a(u_\infty, v) = \int_\Omega f_\infty v\,dx + \int_{\Gamma_1} g_{N,\infty} v\,ds \quad \forall v \in V_{\Gamma_2},
$$

i.e. $u_\infty = u(z_\infty)$, 和

$$
u_n \to u_\infty \text{ 在 } V \text{ 中}.
$$

最后, 对任意的 $z \in U_{ad}$, 由性质 (5.1.27),

$$
\int_{\Gamma_1} [u(z_n) - g_{D,n}]\,[u(z) - u(z_n)]\,ds + \varepsilon\,(z_n, z - z_n)_{L^2(\Gamma_2)} \ge 0.
$$

取极限 $n \to \infty$, 得到

$$
\int_{\Gamma_1} [u(z_\infty) - g_{D,\infty}]\,[u(z) - u(z_\infty)]\,ds + \varepsilon\,(z_\infty, z - z_\infty)_{L^2(\Gamma_2)} \ge 0.
$$

所以, z_∞ 是问题 (5.1.18) 对应 f_∞, $g_{D,\infty}$ 和 $g_{N,\infty}$ 的解. 由于极限 z_∞ 作为问题 (5.1.18) 对应 $f_\infty, g_{D,\infty}$ 和 $g_{N,\infty}$ 的解是唯一的, 整个序列收敛, 即 (5.1.20) 成立. □

让我们探讨一下当 $\varepsilon \to 0$ 时问题解的性质. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 有问题

$$
\inf_{z \in U_{ad}} J(z). \tag{5.1.24}
$$

定义 S_0 为问题 (5.1.24) 的解集. 如果 $S_0 \neq \emptyset$, 很容易证明 S_0 在 U_{ad} 上是凸的闭集. 我们有下面的收敛结果.

定理5.1.3. *假设 $S_0 \neq \emptyset$. 对问题 (5.1.18) 的解 z_ε , 成立*

$$z_\varepsilon \to z_0 \text{ 在 } L^2(\Gamma_2) \text{ 中, 当 } \varepsilon \to 0, \tag{5.1.25}$$

其中 $z_0 \in S_0$ 是集合 S_0 中 $L^2(\Gamma_2)$ 范数最小的唯一元:

$$\|z_0\|_{L^2(\Gamma_2)} = \inf_{z \in S_0} \|z\|_{L^2(\Gamma_2)}. \tag{5.1.26}$$

证明. 在 (5.1.27) 中取 $z = z_\varepsilon$, (5.1.19) 中取 $z = z_0$, 再把两个不等式相加得到

$$\varepsilon \left(z_\varepsilon, z_0 - z_\varepsilon\right)_{L^2(\Gamma_2)} \geq 0.$$

所以, $\|z_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq \|z_0\|_{L^2(\Gamma_2)}$ 并且有 $\{z_\varepsilon\}_\varepsilon$ 在 $L^2(\Gamma_2)$ 上一致有界. 记 $\{z_{\varepsilon'}\}_{\varepsilon'}$ 是 $\{z_\varepsilon\}_\varepsilon$ 的一个子列, 弱收敛到 $\overline{z} \in S_0$. 于是,

$$\|\overline{z}\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq \liminf_{\varepsilon' \to 0} \|z_{\varepsilon'}\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq \|z_0\|_{L^2(\Gamma_2)}.$$

由 (5.1.26) 定义 z_0 的唯一性知 $\overline{z} = z_0$. 所以, 极限 z_0 不依赖于所选的子序列, 于是当 $\varepsilon \to 0$ 时整个序列 $\{z_\varepsilon\}_\varepsilon$ 弱收敛到 $L^2(\Gamma_2)$ 中的 z_0 . 观察到当 $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}
\|z_\varepsilon - z_0\|^2_{L^2(\Gamma_2)} &= \|z_\varepsilon\|^2_{L^2(\Gamma_2)} - 2\left(z_\varepsilon, z_0\right)_{L^2(\Gamma_2)} + \|z_0\|^2_{L^2(\Gamma_2)} \\
&\leq 2\|z_0\|^2_{L^2(\Gamma_2)} - 2\left(z_\varepsilon, z_0\right)_{L^2(\Gamma_2)} \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

便知强收敛成立. 命题得证. □

注意到定理中, 我们假设 $S_0 \neq \emptyset$. 当 U_{ad} 是有界时这个假设便是合理的. 事实上, 类似于定理 5.1.1, 可以证明以下结论.

定理5.1.4. *假设 $U_{ad} \subset L^2(\Gamma_2)$ 是有界弱闭的, 那么问题 (5.1.24) 存在解. 如果假设 $U_{ad} \subset L^2(\Gamma_2)$ 是凸的, 那么 (5.1.24) 的任一解 $z_0 \in U_{ad}$ 满足*

$$\int_{\Gamma_1} [u(z_0) - g_D]\,[u(z) - u(z_0)]\, ds \geq 0 \quad \forall\, z \in U_{ad}. \tag{5.1.27}$$

于是, 在 $U_{ad} \subset L^2(\Gamma_2)$ 是凸的假设下, 如果问题 (5.1.24) 有两个解 z_0 和 z_1 , 那么在 Γ_1 上有 $u(z_0) = u(z_1)$. 这个结果有助于证明问题 (5.1.24) 解的唯一性.

定理5.1.5. *假设 $U_{ad} \subset L^2(\Gamma_2)$ 是有界闭凸集. 假设柯西问题的解是唯一的, 那么 $z_0 \in U_{ad}$ 是问题 (5.1.24) 的解当且仅当它满足 (5.1.27). 进一步地, 问题 (5.1.24) 有唯一解.*

证明. 我们首先证明 (5.1.24) 有唯一解. 由定理5.1.4 知问题 (5.1.24) 有一个解 $z_0 \in U_{ad}$. 假设 $z_1 \in U_{ad}$ 是问题 (5.1.24) 的另一个解, 那么在 Γ_1 上 $u(z_0) = u(z_1)$. 记 $u(z_0)$ 和 $u(z_1)$ 在 Γ_1 上的共同值为 $\tilde{g}$. 由 (5.1.12)-(5.1.13) 便发现 $u(z_0)$ 和 $u(z_1)$ 是以下柯西问题的解

$$\begin{aligned} -\partial_j\left(a_{ij}\partial_i u\right) + a_i\partial_i u + a_0 u = f \quad & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = \tilde{g} \quad & \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}, \\ a_{ij}\partial_i u\, \nu_j = g_N \quad & \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}. \end{aligned}$$

由假设柯西问题的解是唯一的, 所以在 Ω 中 $u(z_0) = u(z_1)$. 由于在 Γ_2 上 $w = u$, 通过 (5.1.8)-(5.1.9), 发现在 Ω 上 $w(z_0) = w(z_1)$. 利用 (5.1.10), 便知在 Γ_2 上 $z_0 = z_1$.

我们接着证明 (5.1.27) 是问题 (5.1.24) 解的性质. 为了这个目的, 只需证明假如 (5.1.27) 成立, 那么 z_0 便是 (5.1.24) 的解. 设 $z_1 \in U_{ad}$ 是 (5.1.24) 的解. 那么, 在 Γ_1 上 $u(z_0) = u(z_1)$. 上一小段的证明就隐含了在 Γ_2 上 $z_0 = z_1$. □

对于问题 (5.1.24), 也可以证明一个类似于定理 5.1.2 的连续依赖结论.

作为定理 5.1.3 的一个直接结果和定理 5.1.5, 我们有以下的结论.

推论5.1.6. *在定理 5.1.5 的假设条件下, 我们有*

$$z_\varepsilon \to z_0 \ \text{在} L^2(\Gamma_2)\text{中, 当 } \varepsilon \to 0,$$

其中 $z_0 \in U_{ad}$ 是问题 (5.1.24) 的唯一解.

观察柯西问题和问题 (5.1.24) 之间的关系, 我们有以下结果.

命题5.1.7. *假设柯西问题有一个解 u_p , 其中 $a_{ij}\partial_i u_p \nu_j \in U_{ad}$. 那么柯西问题等价于问题 (5.1.24).*

证明. ($\Longrightarrow$) 定义 $z_p = a_{ij}\partial_i u_p \nu_j$. 对于这个 z_p, 问题 (5.1.11) 的唯一解是 $w = u_p$, 那么问题 (5.1.15) 的唯一解是 u_p. 选择此 z_p, 成立 $J(z_p) = 0$, i.e.,于是问题 (5.1.4)-(5.1.6) 的解直接可推得问题 (5.1.24) 的解.

($\Longleftarrow$) 如果 $z \in U_{ad}$是问题 (5.1.24) 的一个解, 那么

$$0 \leq J(z) \leq J(z_p) = 0.$$

所以在 Γ_1 上 $u(z) = g_D$, 于是 $u(z)$ 便是问题 (5.1.4)-(5.1.6) 的解. □

注记5.1.8. *假设 $\Omega \in C^{1,1}$. 如果柯西问题有一个解 $u_p \in H^s(\Omega)$ 对某些 $s > 3/2$, 那么 $a_{ij}\partial_i u_p \nu_j \in L^2(\Gamma_2)$ 是适定的; 见[69, 定理1.5.1.2]. 所以定理 5.1.7 中的假设 $a_{ij}\partial_i u_p \nu_j \in U_{ad}$ 并非不自然.*

§5.1.3 数值逼近理论及结果

为了数值逼近讨论的方便, 我们假设 Ω 是一个多边形区域($d = 2$) 或多面体($d = 3$). 设 $\{\mathcal{T}^h\}$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的一族正规有限元剖分, 与 $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$ 相容, 即在 $\partial\Omega$ 上单元的边都属于 $\overline{\Gamma_1}$ 或 $\overline{\Gamma_2}$. 定义 V^h 为连续分片线性函数的有限元空间对应于 $\mathcal{T}^h$, 并定义

$$V^h_{\Gamma_1} = V^h \cap V_{\Gamma_1}, \quad V^h_{\Gamma_2} = V^h \cap V_{\Gamma_2}.$$

记 $g^h_D \in V^h$ 是 g_D 的某种逼近使得

$$\|g^h_D - g_D\|_V \to 0 \quad 当\ h \to 0.$$

作为一个例子, 特取 g^h_D 为 g_D 在 V^h 上的椭圆投影算子, i.e.,

$$g^h_D \in V^h, \quad (g^h_D, v^h)_V = (g_D, v^h)_V \quad \forall v^h \in V^h.$$

记 U^h_{ad} 为 U_{ad} 和 $\mathcal{T}^h$ 上的分片常数空间的交集. 我们假设 $U^h_{ad} \neq \emptyset$, $U_{ad} \subset L^2(\Gamma_2)$. 定义

$$J^h(z^h) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \left[u^h(z^h) - g^h_D\right]^2 ds, \tag{5.1.28}$$

$$J^h_\varepsilon(z^h) = J^h(z^h) + \frac{\varepsilon}{2}\|z^h\|^2_{L^2(\Gamma_2)}, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.1.29}$$

从而引进问题 (5.1.18) 的一个离散逼近:

$$\inf_{z^h \in U^h_{ad}} J^h_\varepsilon(z^h), \tag{5.1.30}$$

(5.1.24) 的离散逼近为:

$$\inf_{z^h\in U^h_{ad}} J^h(z^h), \tag{5.1.31}$$

其中我们先由以下关系定义 $w^h = w^h(z^h)$

$$w^h \in g^h_D + V^h_{\Gamma_1}, \quad a(w^h, v^h) = \int_\Omega f\, v^h dx + \int_{\Gamma_2} z^h v^h ds \quad \forall v^h \in V^h_{\Gamma_1}, \tag{5.1.32}$$

接着定义 $u^h = u^h(z^h)$

$$u^h \in w^h + V^h_{\Gamma_2}, \quad a(u^h, v^h) = \int_\Omega f\, v^h dx + \int_{\Gamma_1} g_N v^h ds \quad \forall v^h \in V^h_{\Gamma_2}. \tag{5.1.33}$$

注意到 (5.1.30) 和 (5.1.31) 的离散逼近可以用有限维空间约束优化问题来描述. 所以可以用约束优化问题的标准技巧来求解上述问题(见, e.g., [96]).

我们总结问题 (5.1.30) 的主要结果如下.

定理5.1.9. *假设 $U_{ad} \subset L^2(\Gamma_2)$ 是闭凸集. 那么问题 (5.1.30) 有唯一解 z^h_ε, 可以用以下不等式来描述*

$$\int_{\Gamma_1} \left[u^h(z^h_\varepsilon) - g^h_D\right]\left[u^h(z^h) - u^h(z^h_\varepsilon)\right] ds + \varepsilon\left(z^h_\varepsilon, z^h - z^h_\varepsilon\right)_{L^2(\Gamma_2)} \geq 0 \quad \forall z^h \in U^h_{ad}. \tag{5.1.34}$$

进一步地, 我们有下面的数值收敛结果:

$$z^h_\varepsilon \to z_\varepsilon \text{ 在 } L^2(\Gamma_2) \text{ 中}, \quad w^h_\varepsilon \to w_\varepsilon \text{ 在 } V \text{ 中}, \quad u^h_\varepsilon \to u_\varepsilon \text{ 在 } V \text{ 中}, \quad \text{当 } h \to 0, \tag{5.1.35}$$

其中 z_ε 是问题 (5.1.18) 的解, $w^h_\varepsilon = w^h(z^h_\varepsilon)$, $u^h_\varepsilon = u^h(z^h_\varepsilon)$, $w_\varepsilon = w(z_\varepsilon)$, 和 $u_\varepsilon = u(z_\varepsilon)$ 分别由 (5.1.32), (5.1.33), (5.1.11), 和 (5.1.15) 定义.

对任意固定的 h, 如果问题 (5.1.31) 的解集 S^h_0 非空, 那么

$$z^h_\varepsilon \to z^h_0 \text{ 在 } L^2(\Gamma_2) \text{ 中}, \quad \text{当 } \varepsilon \to 0,$$

其中 $z^h_0 \in S^h_0$ 是 S^h_0 中 $L^2(\Gamma_2)$ 范数最小的唯一元:

$$\|z^h_0\|_{L^2(\Gamma_2)} = \inf_{z^h\in S^h_0} \|z^h\|_{L^2(\Gamma_2)}.$$

$S^h_0 \neq \emptyset$ 的一个充分条件是 U_{ad} 在 $L^2(\Gamma_2)$ 中有界.

证明. 这里, 我们只证明 (5.1.35) 的收敛结果. 定理的另一部分可以由连续问题情形下的定理类似得证.

由于 $\{z_\varepsilon^h\}_h \subset U_{ad}$ 有界, 存在弱收敛子列, 仍记为 $\{z_\varepsilon^h\}_h$, $z_\varepsilon^h \rightharpoonup z_\varepsilon$ 对 $z_\varepsilon \in U_{ad}$. 在 (5.1.32) 中我们取 $v^h = w_\varepsilon^h$ 便知 $\{w_\varepsilon^h\}_h$ 在 V 中有界. 所以对一个子列和某些 $w_\varepsilon \in V_{\Gamma_1}$, 我们有在 V 中 $w_\varepsilon^h \rightharpoonup w_\varepsilon$ 并且在 $L^2(\Gamma_1)$ 中 $w_\varepsilon^h \to w_\varepsilon$. 固定任意的 $v \in V_{\Gamma_1}$, 选择序列 $\{v^h\}_h$ 有 $v^h \in V^h$ 和在 V 中 $v^h \to v$. 那么 (5.1.32) 中取极限 $h \to 0$ 和选择的子序列得到

$$w_\varepsilon \in g_D + V_{\Gamma_1}, \quad a(w_\varepsilon, v) = \int_\Omega f\, v\, dx + \int_{\Gamma_2} z_\varepsilon v\, ds \quad \forall v \in V_{\Gamma_1},$$

i.e., $w_\varepsilon = w(z_\varepsilon)$. 可以进一步证明在 V 中成立强收敛 $w_\varepsilon^h \to w_\varepsilon$, 因为

$$\begin{aligned} c_0 \left\|(w_\varepsilon^h - g_D^h) - (w_\varepsilon - g_D)\right\|_V^2 &\le a\big((w_\varepsilon^h - g_D^h) - (w_\varepsilon - g_D), (w_\varepsilon^h - g_D^h) - (w_\varepsilon - g_D)\big) \\ &= a(w_\varepsilon^h, w_\varepsilon^h - g_D^h) - a(w_\varepsilon, (w_\varepsilon^h - g_D^h) - (w_\varepsilon - g_D)) \\ &\quad - a(w_\varepsilon^h, w_\varepsilon - g_D) + a\big(g_D - g_D^h, (w_\varepsilon^h - g_D^h) - (w_\varepsilon - g_D)\big). \end{aligned}$$

利用定义的关系 (5.1.32) 和 (5.1.11) 处理右边的第一、二项, 得到

$$\begin{aligned} c_0 \left\|(w_\varepsilon^h - g_D^h) - (w_\varepsilon - g_D)\right\|_V^2 \le &\int_\Omega f\,(w_\varepsilon - g_D)\, dx + \int_{\Gamma_2} z_\varepsilon (w_\varepsilon - g_D)\, ds \\ &- a(w_\varepsilon^h, w_\varepsilon - g_D) + \int_{\Gamma_2} (z_\varepsilon^h - z_\varepsilon)\,(w_\varepsilon^h - g_D^h)\, ds \\ &+ a\big(g_D - g_D^h, (w_\varepsilon^h - g_D^h) - (w_\varepsilon - g_D)\big). \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \limsup_{h\to 0} c_0 \left\|(w_\varepsilon^h - g_D^h) - (w_\varepsilon - g_D)\right\|_V^2 &\le \int_\Omega f\,(w_\varepsilon - g_D)\, dx + \int_{\Gamma_2} z_\varepsilon (w_\varepsilon - g_D)\, ds \\ &\quad - a(w_\varepsilon, w_\varepsilon - g_D) \\ &= 0, \end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{h\to 0} \|w_\varepsilon^h - w_\varepsilon\|_V = 0.$$

在 (5.1.33) 中, 取 $v^h = u_\varepsilon^h - w_\varepsilon^h$ 知 $\{u_\varepsilon^h\}_h$ 在 V 上有界. 那么对于某一子列 $\{u_\varepsilon^h\}_h$ 和 $u_\varepsilon \in V$, 我们有在 V 中 $u_\varepsilon^h \rightharpoonup u_\varepsilon$, 和在 $L^2(\Gamma_2)$ 中 $u_\varepsilon^h \to u_\varepsilon$. 那么,

$u_\varepsilon = w_\varepsilon$ 在 Γ_2 上. 同理可证

$$a(u_\varepsilon, v) = \int_\Omega f\, v\, dx + \int_{\Gamma_1} g_N v\, ds \quad \forall v \in V_{\Gamma_2}.$$

所以, $u_\varepsilon = u(z_\varepsilon)$. 于是便可证得当 $h \to 0$ 时在 V 上 $u_\varepsilon^h \to u_\varepsilon$.

接下来我们证明 z_ε 是问题 (5.1.18) 的解. 对任意 $z \in U_{ad}$, 考虑它的分片均值 $P^h z$ 定义如下

$$P^h z|_S = \frac{1}{|S|} \int_S z\, ds \quad \text{对于任意在 } \Gamma_2 \text{ 上的单元边界 } S.$$

那么, 由于 U_{ad} 是闭凸集则 $P^h z \in U_{ad}^h$. 进一步地,

$$\|z - P^h z\|_{L^2(\Gamma_2)} \to 0 \quad \text{当 } h \to 0.$$

用 $P^h z$ 代替 (5.1.32) 和 (5.1.33) 中的 z^h , 定义 $w^h(P^h z)$ 和 $u^h(P^h z)$. 可以证明当 $h \to 0$ 时在 V 中成立 $w^h(P^h z) \to w(z)$ 和 $u^h(P^h z) \to u(z)$. 由 (5.1.11) 和 (5.1.32),

$$a(w(z) - w^h(P^h z), v^h) = \int_{\Gamma_2} \left(z - P^h z\right) v^h ds \quad \forall v^h \in V_{\Gamma_1}^h.$$

所以对任意的 $v^h \in g_D^h + V_{\Gamma_1}^h$,

$$\begin{aligned}
&c_0 \|w(z) - w^h(P^h z)\|_V^2 \le a(w(z) - w^h(P^h z), w(z) - w^h(P^h z)) \\
&= a(w(z) - w^h(P^h z), w(z) - v^h) + \int_{\Gamma_2} \left(z - P^h z\right)\left(v^h - w^h(P^h z)\right) ds \\
&\le \frac{c_0}{2} \|w(z) - w^h(P^h z)\|_V^2 + c\,\|w(z) - v^h\|_V^2 \\
&\quad + c\,\|z - P^h z\|_{L^2(\Gamma_2)} \left(\|w(z) - w^h(P^h z)\|_{L^2(\Gamma_2)} + \|w(z) - v^h\|_{L^2(\Gamma_2)}\right).
\end{aligned}$$

因此,

$$\|w(z) - w^h(P^h z)\|_V \le c \inf_{v^h \in g_D^h + V_{\Gamma_1}^h} \|w(z) - v^h\|_V + c\,\|z - P^h z\|_{L^2(\Gamma_2)}. \tag{5.1.36}$$

这就意味着

$$w^h(P^h z) \to w(z) \quad \text{在 } V \text{ 中}.$$

由 (5.1.15) 和 (5.1.33) 知,

$$a(u(z) - u^h(P^h z), v^h) = 0 \quad \forall v^h \in V_{\Gamma_2}^h.$$

那么, 对任意的 $v^h \in V^h$, 在 Γ_2 上 $v^h = w^h(P^h z)$, 成立

$$c_0\|u(z) - u^h(P^h z)\|_V^2 \le a(u(z) - u^h(P^h z), u(z) - u^h(P^h z))$$
$$= a(u(z) - u^h(P^h z), u(z) - v^h).$$

因此,

$$\|u(z) - u^h(P^h z)\|_V \le c \inf \left\{ \|u(z) - v^h\|_V \mid v^h \in V^h,\ v^h = w^h(P^h z) \text{ 在 } \Gamma_2 \text{ 上} \right\}. \tag{5.1.37}$$

记

$$u(z) = w(z) + \overline{u}(z), \quad \overline{u}(z) \in V_{\Gamma_2},$$
$$v^h = w^h(P^h z) + \overline{v}^h, \quad \overline{v}^h \in V_{\Gamma_2}^h.$$

那么由 (5.1.37),

$$\|u(z) - u^h(P^h z)\|_V \le c\,\|w(z) - w^h(P^h z)\|_V + c \inf_{\overline{v}^h \in V_{\Gamma_2}^h} \|\overline{u}(z) - \overline{v}^h\|_V. \tag{5.1.38}$$

特别地, 这意味着

$$u^h(P^h z) \to u(z) \quad \text{在 } V \text{ 中}.$$

现在

$$J_\varepsilon^h(z_\varepsilon^h) \le J_\varepsilon^h(P^h z). \tag{5.1.39}$$

因为 $J_\varepsilon^h(P^h z) \to J_\varepsilon(z)$, 在 (5.1.39) 中取 $h \to 0$ 我们得到

$$J_\varepsilon(z_\varepsilon) \le J_\varepsilon(z) \quad \forall z \in U_{ad}.$$

所以 z_ε 是问题 (5.1.18) 的解. 由于问题 (5.1.18) 的解 z_ε 是唯一的, 那么对整个集合 $\{h\}$,

$$z_\varepsilon^h \rightharpoonup z_\varepsilon \text{ 在 } L^2(\Gamma_2) \text{ 中}, \quad w_\varepsilon^h \to w_\varepsilon \text{ 在 } V \text{ 中}, \quad u_\varepsilon^h \to u_\varepsilon \text{ 在 } V \text{ 中}, \quad \text{当 } h \to 0.$$

还需证明强收敛

$$z_\varepsilon^h \to z_\varepsilon \text{ 在 } L^2(\Gamma_2) \text{ 中}, \quad \text{当 } h \to 0.$$

为了这个目的, 记

$$\varepsilon\,\|z_\varepsilon - z_\varepsilon^h\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 = \varepsilon\,(z_\varepsilon, z_\varepsilon - z_\varepsilon^h)_{L^2(\Gamma_2)} - \varepsilon\,(z_\varepsilon^h, P^h z_\varepsilon - z_\varepsilon^h)_{L^2(\Gamma_2)}$$
$$- \varepsilon\,(z_\varepsilon^h, z_\varepsilon - P^h z_\varepsilon)_{L^2(\Gamma_2)}.$$

用不等式 (5.1.19) 和 (5.1.34) 便知

$$\varepsilon\,\|z_\varepsilon - z_\varepsilon^h\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \le \int_{\Gamma_1} [u(z_\varepsilon) - g_D]\,[u(z_\varepsilon^h) - u(z_\varepsilon)]\,ds$$
$$+ \int_{\Gamma_1} \left[u^h(z_\varepsilon^h) - g_D^h\right]\left[u^h(P^h z_\varepsilon) - u^h(z_\varepsilon^h)\right] ds - \varepsilon\,(z_\varepsilon^h, z_\varepsilon - P^h z_\varepsilon)_{L^2(\Gamma_2)}.$$

那么当 $h \to 0$ 时由 $u^h(z_\varepsilon^h)$, $u^h(P^h z_\varepsilon)$, $u(z_\varepsilon^h) \to u(z_\varepsilon)$ 在 $L^2(\Gamma_1)$ 上, $g_D^h \to g_D$ 在 $L^2(\Gamma_1)$ 上, 和 $P^h z_\varepsilon \to z_\varepsilon$ 在 $L^2(\Gamma_2)$ 上的事实便知 $z_\varepsilon^h \to z_\varepsilon$. □

我们得到结论当 $S_0 \neq \emptyset$, 当 $h, \varepsilon \to 0$ 时 z_ε^h 收敛到 z_0 可以由

$$\|z_\varepsilon^h - z_0\|_{L^2(\Gamma_2)} \le \|z_\varepsilon^h - z_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_2)} + \|z_\varepsilon - z_0\|_{L^2(\Gamma_2)}$$

和 (5.1.25), (5.1.35) 推得.

接下来, 我们用一些数值实验来证明该方法的有效性.

设 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ 且边界 $\partial\Omega$ 分成两个不连续的部分 $\Gamma_2 = \{0\} \times [0,1]$ 和 $\Gamma_1 = \partial\Omega \backslash \Gamma_2$. 考虑以下的模型问题来进行数值模拟:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u &= 0 \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}. \end{aligned}$$

选择 $f(x_1, x_2) = -2(x_1 - 1)^2(6x_2^2 - 6x_2 + 1) - 2x_2^2(x_2 - 1)^2$, 这个模型有唯一解 $u(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 x_2^2 (x_2 - 1)^2$.

在区域 Ω 的一致三角剖分上使用线性元. 沿 x_1 和 x_2 方向我们将区间 $[0,1]$ 分成 $1/h$ 个相等的区间从而得到了一致的网格. 我们首先得到一个初始的网格剖分其 $h = 1/4$ 然后将 h 细分得到网格的优化. 我们计算模型的数值解当网格大小分别为 $h = 1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$, $1/64$ 并且用容许集 $U_{ad} = \{z \in L^2(\Gamma_2) \mid z \ge 0\}$. 离散问题作为约束优化问题来求解. 在表 5.1 中列出了不同的 h 和 ε 对应下的真解和数值解间的 $H^1(\Omega)$ 范数误差. 我们观察到在这个例子中, 对于给定的网格大

表 5.1: 对应于不同 h 和正则化参数下的 $H^1(\Omega)$ 误差估计

	$h=1/4$	$h=1/8$	$h=1/16$	$h=1/32$	$h=1/64$
$\varepsilon=10^{-3}$	3.224652e-02	1.797204e-02	9.642993e-03	5.631045e-03	4.026558e-03
$\varepsilon=10^{-6}$	3.227016e-02	1.908117e-02	9.851012e-03	4.716186e-03	2.350917e-03
$\varepsilon=10^{-7}$	3.227162e-02	1.970385e-02	1.114275e-02	4.815514e-03	2.382236e-03
$\varepsilon=10^{-8}$	3.227177e-02	1.970351e-02	1.501195e-02	6.245147e-03	2.771982e-03
$\varepsilon=10^{-9}$	3.227178e-02	1.970348e-02	2.180194e-02	1.317419e-02	4.394384e-03

小h, 作为正则化参数的 ε 变小后, 数值解的误差也会逐渐变小, 但一旦 ε 小于某个数的时候它反而会增加这依赖于 h 的取值. 所以正则化参数的选取值得我们进一步的探讨.

§5.1.4 算法的进一步讨论

在上面的讨论中我们发现正则化参数的选择是一个问题, 这就使我们想到了是否可以像第二三章中所讨论的方法, 将此问题改造成 Hanson 模型, 这样就又可以使用已有的工具包来选择合适的正则化参数. 考虑离散问题 (5.1.30) 的算子表达形式. 沿用上一节中的有限元离散描述, 我们假设 Γ_1 上的基函数为 $\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m\}$, Γ_2 上的基函数为 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$. 那么我们可以记

$$
\begin{aligned}
z^h &= \sum_{i=1}^{n} z_i^h\varphi_i = \boldsymbol{z^h}\boldsymbol{\varphi},\\
u^h|_{\Gamma_1} &= \sum_{i=1}^{m} u_i^h\psi_i = \boldsymbol{u^h}\boldsymbol{\psi},
\end{aligned}
$$

特别的,

$$
g_D^h = \sum_{i=1}^{m} g_{D,i}^h\psi_i = \boldsymbol{g_D^h}\boldsymbol{\psi},
$$

其中

$$\boldsymbol{z^h} = (z_1^h, z_2^h, \cdots, z_n^h)^T,$$

$$\boldsymbol{g_D^h} = (g_{D,1}^h, g_{D,2}^h, \cdots, g_{D,m}^h)^T,$$

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)^T,$$

$$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m)^T.$$

于是问题 (5.1.30) 就转化为求系数列 $\{\boldsymbol{z^h}\}$ 使得 $J_\varepsilon^h(z^h)$ 最小. 很容易得知 $u(z)$ 关于 z 是线性的. 那么我们不妨假设

$$u^h(z^h)|_{\Gamma_1} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{z^h} + \boldsymbol{b})^T\boldsymbol{\psi},$$

其中, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$ 则需要待定. 特别地取 $\boldsymbol{z^h}$ 为单位向量和零向量, 就可得到 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$.

于是,

$$\int_{\Gamma_1}[u^h(z^h) - g_D^h]^2 ds = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{z^h} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{g_D^h})^T\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{z^h} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{g_D^h}),$$

$$\|z^h\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 = \int_{\Gamma_2}(z^h)^2 ds = \boldsymbol{z^h}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{z^h}$$

其中,

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_1}\psi_1^2 ds & \int_{\Gamma_1}\psi_1\psi_2 ds & \int_{\Gamma_1}\psi_1\psi_m ds \\ \int_{\Gamma_1}\psi_2\psi_1 ds & \int_{\Gamma_1}\psi_2^2 ds & \int_{\Gamma_1}\psi_2\psi_m ds \\ & \vdots & \vdots \\ \int_{\Gamma_1}\psi_m\psi_1 ds & \int_{\Gamma_1}\psi_m\psi_2 ds & \int_{\Gamma_1}\psi_m^2 ds \end{pmatrix}_{m\times m},$$

而 $\boldsymbol{\Phi}$ 类似定义.

这样, 我们就有

$$J_\varepsilon^h = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{z^h} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{g_D^h})^T\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{z^h} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{g_D^h}) + \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{z^h}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{z^h}. \tag{5.1.40}$$

由于 $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{\Phi}$ 是对称正定的, 存在非奇异阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{L}$ 使得

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}.$$

这样, (5.1.40) 就可以写成

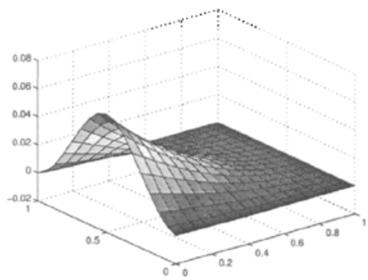
$$J_\varepsilon^h = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{z^h} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{g_D^h})^T\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{z^h} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{g_D^h}) + \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{z^h}^T\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}\boldsymbol{z^h} \tag{5.1.41}$$

$$= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z^h} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{g_D^h}\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\boldsymbol{L}\boldsymbol{z^h}\|_2^2 \tag{5.1.42}$$

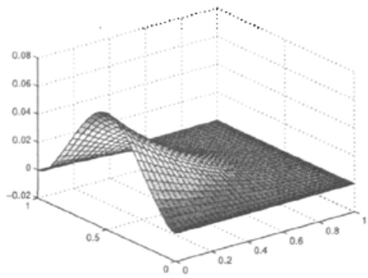
表 5.2: L-曲线准则下的对应于不同 h 的 $H^1(\Omega)$ 估计及正则化参数

	$h=1/4$	$h=1/8$	$h=1/16$	$h=1/32$	$h=1/64$
正则化参数ε	3.676e-21	1.672e-16	8.2e-5	2.05e-5	4.325e-6
$H^1(\Omega)$误差	0.0646	0.8815	0.0075	0.0039	0.0018

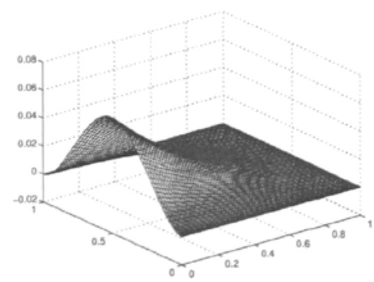
与 Hansen 模型 (2.2.24) 相比较, 我们就可以用 Hansen 开发的 matlab 工具包来选择合适的正则化参数. 我们不妨选 L-曲线准则来确定正则化参数 ε , 并沿用上一节中的例子.



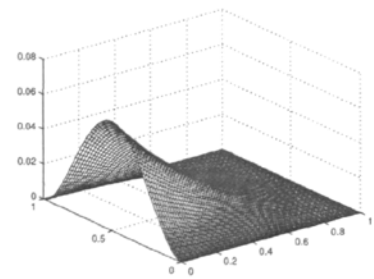
(a) h=1/16 时的结果.



(b) h=1/32 时的结果.



(c) h=1/64 时的结果.



(d) 真解.

图 5.1: 不同 h 对应的拟合解和真解图示.

Fig 5.1 Graphs of the exact function and the approximate solutions with different values of h.

在表 5.2 中, 我们发现L-曲线准则的确选到了很好的正则化参数. 除了 $h=1/8$ 的情形, 相关结果显示在图 5.1 中, 函数拟合的相当好.

§5.2 平面弹性力学柯西问题

§5.2.1 问题的描述

以上的讨论都仅限于一个方程, 但通常实际生活中有很多问题是以系统存在的. 所以接下来我们考虑平面弹性力学中的柯西问题[31]: 找 $\boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega))^2$ 使得对 $i = 1, 2$ 成立,

$$\partial_j \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = f_i \quad 在\, \Omega\, 中, \tag{5.2.1}$$

$$u_i = g_i \quad 在\, \Gamma_1\, 上, \tag{5.2.2}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j = \varphi_i \quad 在\, \Gamma_1\, 上, \tag{5.2.3}$$

其中边界 $\partial\Omega$ 分成两个不相交的部分 Γ_1 和 Γ_2 , $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)^T$, $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)^T$, 和 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ 是给定的数据, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^T$ 表示 Ω 内弹性体的位移场.

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = 2\mu\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(\boldsymbol{u}), \quad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i),$$

其中 δ_{ij} 是通常意义下的Kronecker 记号, λ 和 μ 是物质的Lamé 系数, 可以由杨氏模量 E 和泊松比 γ 得到, 关系如下

$$\lambda = \frac{E\gamma}{1-\gamma^2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\gamma)}.$$

记 Γ_2 上的应力场 $\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j$ $(i = 1, 2)$ 作为控制变量并选择容许空间 $\boldsymbol{U}_{ad}$ 为 $(L^2(\Gamma_2))^2$. 同样地, 我们引进空间 $V = (H^1(\Omega))^2$ 和它的子空间

$$V_{\Gamma_1} = \left\{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} = 0 \quad 在\, \Gamma_1\, 上\right\},$$

$$V_{\Gamma_2} = \left\{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} = 0 \quad 在\, \Gamma_2\, 上\right\},$$

那么使用如构造优化问题 (5.1.18) 相同的技巧, 考虑以下问题

$$\inf_{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{U}_{ad}} J_\varepsilon(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{g}|^2 ds + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_2} |\boldsymbol{z}|^2 ds, \tag{5.2.4}$$

其中对任意的 $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)^T \in \boldsymbol{U}_{ad}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{z}) \in (H^1(\Omega))^2$ 是这样定义的

$$\partial_j \sigma_{ij}(\boldsymbol{v}) = f_i \quad 在\, \Omega\, 中, \tag{5.2.5}$$

$$v_i = g_i \quad 在\, \Gamma_1\, 上, \tag{5.2.6}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{v})\nu_j = z_i \quad 在\, \Gamma_2\, 上. \tag{5.2.7}$$

对 $i=1,2$, 其变分形式为找 $\boldsymbol{v} \in V_{\Gamma_1}+\boldsymbol{g}$

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(\boldsymbol{v})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\psi}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\psi} + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{\psi} ds, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in V_{\Gamma_1}.$$

并且$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}) \in (H^1(\Omega))^2$ 定义如下

$$\partial_j \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = f_i \quad 在\ \Omega\ 中, \tag{5.2.8}$$

$$u_i = v_i \quad 在\ \Gamma_2\ 上, \tag{5.2.9}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j = \varphi_i \quad 在\ \Gamma_1\ 上. \tag{5.2.10}$$

对 $i=1,2$, 其变分形式为找 $\boldsymbol{u} \in V_{\Gamma_2}+\boldsymbol{v}$

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\psi}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\psi} + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\psi} ds, \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in V_{\Gamma_2}.$$

(5.2.4) 的有限元逼近可以由(5.2.4)-(5.2.10) 参照问题 (5.1.30) 的方法得到.

§5.2.2 数值结果

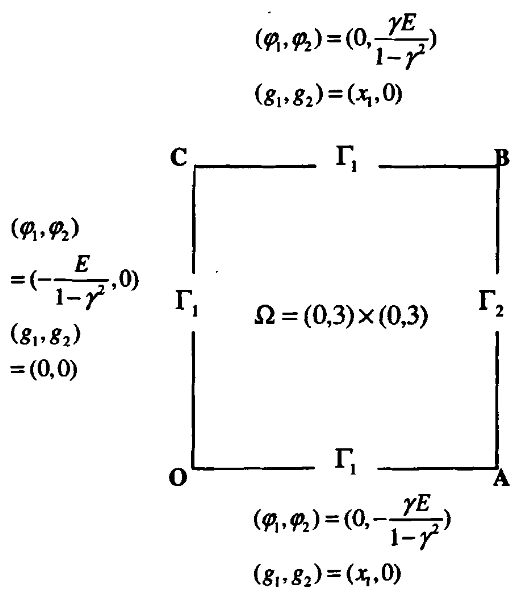


图 5.2: 几何区域和已知数据.

Fig.5.2 The geometric domain and prescribed data.

参考[31, pp. 551-552], 我们取 $\Omega=(0,3)\times(0,3)$, $\Gamma_2=\{3\}\times[0,3]$, $\Gamma_1=\partial\Omega\backslash\Gamma_2$, $E=1\text{GPa}$, $\gamma=0.3$, $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$, 并且 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 显示在图 5.2 中. 在这个情形下, 真解

表 5.3: 对应于不同 h 和正则化参数下的 $H^1(\Omega)$ 误差估计

	$h=3/4$	$h=3/8$	$h=3/16$	$h=3/32$
$\varepsilon=10^{-1}$	0.3804	0.4733	0.4254	0.4616
$\varepsilon=10^{-3}$	0.1726	0.1702	0.1303	0.1242
$\varepsilon=10^{-4}$	0.0950	0.1155	0.1040	0.0855
$\varepsilon=10^{-5}$	0.0282	0.0907	0.0711	0.1341
$\varepsilon=10^{-6}$	0.0231	0.0465	0.0531	0.1344
$\varepsilon=10^{-7}$	0.0227	0.0487	0.0547	0.1361

表 5.4: 我们的方法和[31]的比较

	$\delta=0$			$\delta=10\%$		
	$\epsilon=0.0$	$\epsilon=0.05$	$\epsilon=0.1$	$\epsilon=0.0$	$\epsilon=0.05$	$\epsilon=0.1$
我们的方法	3.0025	3.1137	3.0983	3.1296	3.0715	3.0630
[31]中的方法	2.78031	2.80822	2.76582	2.73138	2.78547	2.81426
精确值	3	3	3	3	3	3

为 $\boldsymbol{u}=(x_1,0)^T$. 我们构造与上一节相同的三角形有限元和相对应的有限元函数空间. 并用拟牛顿法来求解最优问题(cf. [96, p. 194]).

在表 5.3 中给出不同的 h 和 ε 对应下的真解与数值解之间的 H^1 范数误差, 从表中我们可以观察到, 在这个例子中, $H^1(\Omega)$ 误差对于网格细分并不敏感, 而对于正则化参数的变化相当敏感. 这种现象也出现在[31, p. 552].

为了进一步比较我们的方法和[31]中的方法, 我们考虑噪声的影响. 我们用以下方式根据 $\boldsymbol{g}$ 和 φ 来得到带噪声数据 $\boldsymbol{g}^\delta$ 和 φ^δ :

$$\boldsymbol{g}^\delta(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\,(1+\delta*\underline{rand}(-1,1))\,,\quad \varphi^\delta(\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x})\,(1+\delta*\underline{rand}(-1,1))\,,\quad \forall\boldsymbol{x}\in\Gamma_1,$$

其中 $\delta\geq 0$ 代表了噪声水平, $\underline{rand}(-1,1)$ 满足区间 $[-1,1]$ 上的一致分布. 在不同的噪声水平和正则化参数对应下表5.4列举了我们方法和[31]中方法的 $u_1(3,1.5)$ 值, 此时 $h=1/2$. 观察到我们方法的效果要好于[31]中的方法. 当$\delta=5\%$ 和 $h=1/4$ 时, 不同 ϵ 对应下的 $u_1(3,x_2)$ 的数值结果显示在图 5.3 中, 从中我们可以发现 $\epsilon=10^{-2}$ 是最佳的选择. 这就告诉我们实际问题中正则化参数的合适选取在数

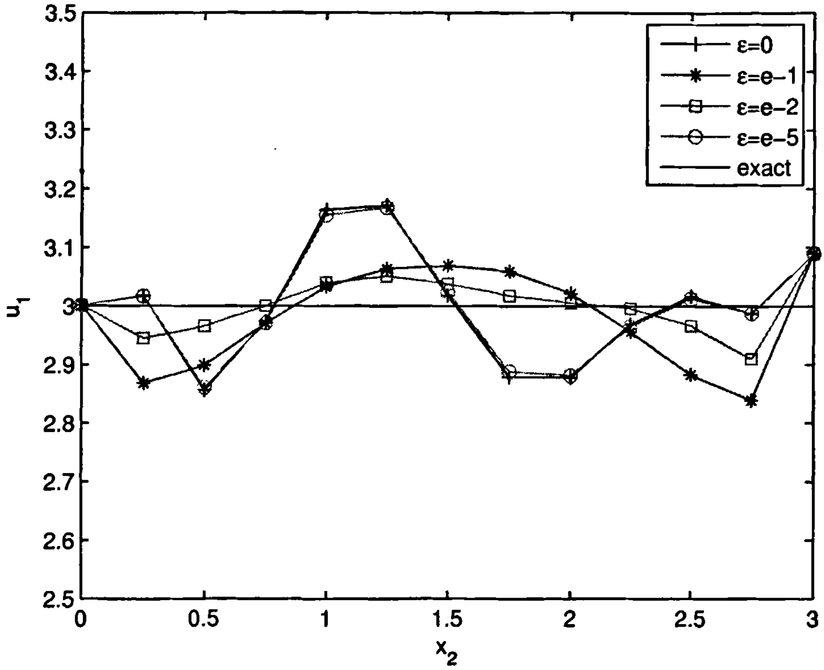


图 5.3: 正则化参数 ϵ 的影响.

Fig.5.3 The influence of the regularization parameter. ϵ

表 5.5: L曲线准则下当 $\delta=0$ 时, 对应于不同 h 下的 $H^1(\Omega)$ 误差估计

	$h=3/4$	$h=3/8$	$h=3/16$	$h=3/32$
正则化参数ε	1.1988e-20	2.9137e-25	2.3132e-26	1.8019e-26
$H^1(\Omega)$误差	3.0159e-29	5.2490e-12	1.9586e-8	0.0060

表 5.6: L曲线准则下当 $\delta=0.01$ 时, 对应于不同 h 下的 $H^1(\Omega)$ 误差估计

	$h=3/4$	$h=3/8$	$h=3/16$	$h=3/32$
正则化参数ε	6.2726e-7	6.1603e-5	0.0020	0.0141
$H^1(\Omega)$误差	0.2218	0.9508	0.2237	0.2673

值方法的有效性上起着十分重要的作用.

那么我们采用上一节中的讨论, 继续套用Hansen模型, 来选取合适的正则化参数. 我们仍然选择L-曲线策略. 表 5.5 和表 5.6 分别列举了给定数据为精确和带噪声两种情形下对应于不同 h 的误差结果和正则化参数值. 在图 5.4 和图 5.5 中分别列举了 $h=3/4$, $h=3/8$, $h=3/16$, $h=3/32$ 对应的$\boldsymbol{u}=(x_1,0)$的结果. 从这些图上我们可以发现其数值拟合效果是相当好的. 从而说明我们的确取到了合适的正则化参数.

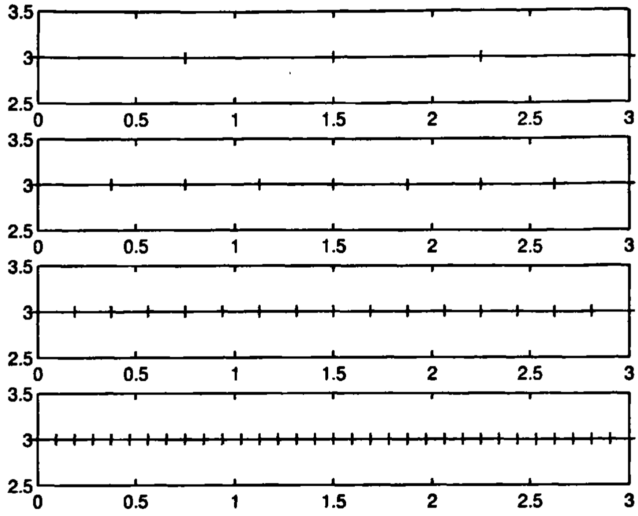


图 5.4: 噪声 $\delta = 0$.

Fig.5.4 The noise level $\delta = 0$.

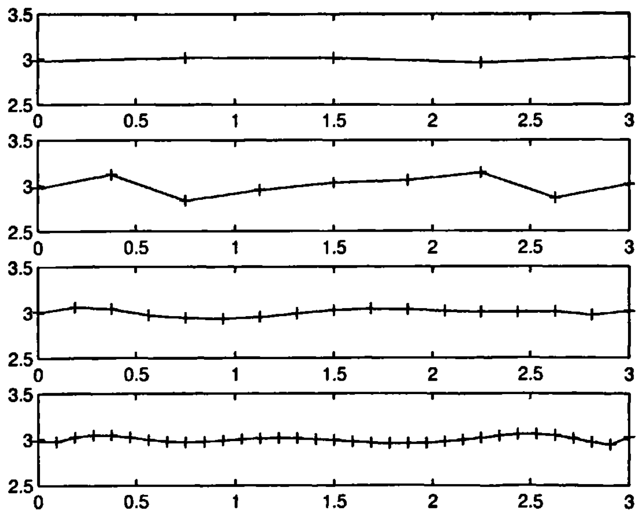


图 5.5: 噪声 $\delta = 0.01$.

Fig.5.5 The noise level $\delta = 0.01$.

参考文献

[1] 刘继军, 不适定问题的正则化方法及应用, 北京, 科学出版社, 2005.

[2] V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, second edition, Springer, New York, 2006.

[3] J. Kaipio and E. Somersalo, *Statistical and Computational Inverse Problems*, Springer, New York, 2005.

[4] F. Natterer and F. Wübbeling, *Mathematical Methods in Image Rconstruction*, Philadelphia, 2001.

[5] 王彦飞, 反问题的计算方法及其应用, 北京, 高等教育出版社, 2007.

[6] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[7] M. Hanke and O. Scherzer, Inverse problems light: numerical differentiation, Am. Math. Mon., 1991, 98, 847-850.

[8] Y. Wang, X. Jia and J. Cheng, A numerical differentiation method and its application to reconstruction of discontinuity, *Inverse Problems*, 2002, 18, 1461-1476.

[9] Y. Wang and T. Wei, Numerical differentiation for two-dimensional scattered data, *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, 312, 121–137.

[10] Y. B. Wang, Numerical differentiation and Applications, Ph. D. Thesis, Institute of Mathematics, Fudan University, 2005.

[11] Y. B. Wang, Y. C. Hon and J. Cheng, Reconstruction of high order derivatives from input data, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2006, 14, 205-218.

[12] J. Cheng and M. Yamamoto, One new strategy for a priori choice of regularizing parameters in Tikhonov's regularization, *Inverse Problems*, 2001, 16, 31-38.

[13] E. Delhez, A spline interpolation technique that preserves mass budgets, *Applied Mathematics Letters*, 2003, 16, 16-26.

[14] G. Inglese, An inverse problem in corrosin detection, *Inverse Problems*, 1997, 13, 977–994.

[15] X. Yang and J. Cheng, An inverse problem in detecting corrosion in a pipe, *Journal of Ningxia University (Natural Science Edition)*, 2003, 24, 215–217.

[16] D. Fasino and G. Inglese, Discrete methods in the study of an inverse problem for Laplace's equation, *IMA J. Numerical Analysis*, 1999, 19, 105-118.

[17] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equation*, New York, 1953.

[18] L. Payne, Bounds in the Cauchy problem for the Laplace equation, *Arch.Ration.Mech.Anal.*, 1960, 5, 35–45.

[19] L. Payne, On a Priori Bounds in the Cauchy Problems for Elliptic Equations, *SIAM J.Math.Anal.*, 1970, 1 , 82–89.

[20] L. Payne, *Improperly Posed Problems in Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 1975.

[21] L. Eldén and F. Berntsson, A stability estimate for a Cauchy problem for an elliptic partial differential equation, *Inverse Problems*, 2006, 22, 1191-1206.

[22] F. B. Belgacem and H. E. Fekih, On Cauchy's problem: I. A variational Steklov-Poincaré theory, *Inverse Problems* , 2005, 21, 1915–1936.

[23] M. Azaïez, F. B. Belgacem and H. E. Fekih, On Cauchy's problem: II. Completion, regularization and approximation, *Inverse Problems*, 2006, 22, 1307–1336.

[24] F. B. Belgacem, Why is the Cauchy problem severly ill-posed?, *Inverse Problems*, 2007, 23, 823–836.

[25] D. N. Hào , T. D. Van and Gorenflo, Towards the Cauchy problem for the Laplace equation, *Banach Center Publ.*, 1992, 27, 111–128.

[26] D. N. Hào , P. M. Hien and H.Sahli, Stability results for a Cauchy problem for an elliptic equation, *Inverse Problems*, 2007, 23, 421–461.

[27] A. L. Bukhgeim, J. Cheng and M. Yamamoto, Stability for an inverse boundary problem of determining a part of a boundary, *Inverse Problems*, 1999, 15, 1021–1032.

[28] D. N. Hào and P. M. Hien, Stability results for the Cauchy problem for the Laplace equation in a strip, *Inverse Problems*, 2003, 19, 833–844.

[29] H. Cao and S. V. Pereverzev, The balancing pribciple for the regularization of elliptic Cauchy Problems, *Inverse Problems*, 2007, 23, 1943–1961.

[30] M. Kubo, L^2-conditional stability estimate for the Cauchy problem for the Laplace equation, *J.Inverse Ill-posed Provbl.*, 1994, 2, 253–261.

[31] K. Kobayashi, Numerical solution of the Cauchy-problem in plane elastostatics, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 2000, 8, 541–560.

[32] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, and F. Pons, Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization, *Inverse Problems*, 2001, 17, 553–570.

[33] Y. Hon and T. Wei, Backus-Gillbert algorithm for the Cauchy problem of the Laplace equation, *Inverse Problems*, 2001, 17, 261–271.

[34] J. Cheng, Y. C. Hon, T. Wei, and M. Yamamoto, Numerical computation of a Cauchy problem for Laplace's equation, *Z. Angew. Math. Mech.*, 2001, 81, 665–674.

[35] H. Engl and A. Leitão, A Mann iterative regularization method for elliptic Cauchy problems, *Numer.Funct.Anal.Optim.*, 2001, 22, 861–864.

[36] L. Bourgeois, Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's euation, *Inverse Problems*, 2006, 22, 413–430.

[37] A. Chakib and A. Nachaoui, Convergence analysis for finite element approximation to an inverse Cauchy problem, *Inverse Problems*, 2006, 22, 1191–1206.

[38] S. Andrieux, T. N. Baranger and A. Abda, Solbing Cauchy problems by minimizing an energy-like functional, *Inverse Problems*, 2006, 22, 115-133.

[39] H. Han and H. J. Reinhardt, Some stability estimates for Cauchy problems for elliptic equations, *J. Inverse Ill-Posed Problems*, 1997, 5, 437–454.

[40] H. J. Reinhardt, H. Han, and D. N. Hào, Stability and regularization of a discrete approximation to the Cauchy problem for Laplace's equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1999, 36, 890–905.

[41] P. Kügler and A. Leitão, Mean value iterations for nonlinear elliptic Cauchy problems, *Numer.Math.*, 2003, 96, 269–293.

[42] D. N. Hào , A mollification method for ill-posed problems, *Numer.Math*, 1994,

68, 469–506.

[43] D. N. Hào , A mollification method for a noncharacteristic Cauchy problem for a parabolic equation, *J.Math.Anal.Appl*, 1996, 199, 873–909.

[44] F. Berntsson and Eldén, Numerical solution of a Cauchy problem for the Laplace equation, *Inverse Problems*, 2001, 17, 839–853.

[45] L. Bourgeois, A mixed formulation of quasi-reversibilty to solve the Cauchy problem for Laplace's equation,*Inverse Problems*, 2005, 21, 1087–1104.

[46] P. Dhanumjaya, Optimal control theory to solve an ill-posed Cauchy problem for an elliptic equation, *Preprint*, no 5 Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, India, 2005.

[47] A. leitão, An iterative method for solving elliptic Cauchy problems, *Numer.Funct.Anal.Optim.*, 2000, 21, 715–742.

[48] P. Hansen, Regularization Tools: A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems, Technical Report, IMM-REP-98-6, Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark.

[49] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[50] R. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[51] 王烈衡, 许学军, 有限元方法的数学基础, 北京, 科学出版社, 2004.

[52] W. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[53] A. Tikhonov and V. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston, Washington, 1977.

[54] E. Epstein, On obtaining daily climatological values from monthly means, *Journal of Climate*, 1991, 4, 365-368.

[55] P. Killworth, Time interpolation of forcing filds in ocean models, *Journal of Physical Oceanograph*, 1996, 26, 136-143.

[56] G. H. Golub and U. V. Matt, Tiknonov regularization for large scale problems, *Scientific Computing*, 1997, 3-26.

[57] P. Hansen, Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems, SIAM, Philadelphia, 1998.

[58] P. Hansen and D. O'Leary, The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems, *SIAM J. Sci. Comput.*, 1993, 14, 1487-1503.

[59] J. Céa, *Lectures on Optimization-Theory and Algorithms, Springer-Verlag*, Berlin, 1978.

[60] H. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, *Regularizations of Inverse Problems*, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[61] J. Ahlberg, E. Nilson and J. Walsh, *The Theory of Splines and Their Applications*, Academic Press, New York, 1967.

[62] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis (Second Edition)*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[63] P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[64] J. Huang and S. Xi, On the finite volume element method for general self-adjoint elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1998, 35, 1762-1774.

[65] J. Huang and J. Zou, A mortar element method for elliptic problems with discontinuous coefficients, *IMAJ.Numer.Anal.*, 2002, 22, 549-576.

[66] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, *Digital Image Processing*, 2nd ed., Prentice Hall, New Jersey, 2002.

[67] K. Atkinson, W. Han, *Theoretical Numerical Analysis-A Functional Analysis Framework (Second Edition)*, Springer, New York, 2005.

[68] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society,Probidence, 1998.

[69] P. G. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, London, 1985.

[70] T. Wei, Y. Hon, and Y. Wang, Reconstruction of numerical derivatives from scattered noisy data, *Inverse Problems*, 2005, 21, 657–672.

[71] M. Bebendorf, A note on the Poincaré inequality for convex domains, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 2003, 22, 751–756.

[72] L. E. Payne and H. F. Weinberger, An optimal Poincaré inequality for convex domains, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1960, 5, 286-292.

[73] N. H. Asmar, *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2nd ed., Prentice Hall, New Jersey, 2004.

[74] O. Bokanowski and H. Lemou, Fast multipole method for multivariable integrals, *SIAM J. Numer. Anal.*, 2005, 42, 2095–2117.

[75] L. Greengard and V. Rokhlin, A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.*, 1987, 73, 325–348.

[76] I. Saavedra and H. Power, Multipole fast algorithm for the least-squares approach of the method of fundamental solutions for three-dimensional harmonic problems, *Numer. Methods for Partial Differential Equations*, 2003, 19, 828–845.

[77] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computation*, 3rd ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[78] G. Alessandrini, L. Del Piero, and L. Rondi, Stable deternination of corrosion by a single electrostatic boundary measurement, *Inverse Problems*, 2003, 19, 973-984.

[79] M. Choulli, An inverse problem in corrosion detection: stability estimates, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 2004, 12, 349-367.

[80] D. Fasino and G. Inglese, An inverse Robin problem for Laplace's equation: theoretical results and numerical methods, *Inverse Problems*, 1999, 15, 41-48.

[81] J. Lions, *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*, Springer Verlag, Berlin, Lecture Notes in Mathematics 323, 1973.

[82] X. Yang, M. Choulli, and J. Cheng, An iterative BEM for the inverse problem of detecting corrosion in a pipe, *Numer. Math. J. Chinese Univ. (English Ser.)*, 2005, 14, 252-266.

[83] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin, 2001.

[84] M. Protter and H. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1984.

[85] R. Dautray and J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods*

for Science and Technology, Volume II, *Functional and Variational Methods*, Springer, Berlin, 1988.

[86] A. V. Fursikov, The Cauchy problem for a second-order elliptic equation in a conditionally well-posed formulation, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1990, 136–176.

[87] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Springer, New York, 1983–1985.

[88] N. N. Tarkhanov, *The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations*, Academie, Berlin, 1995.

[89] R. S. Falk and P. B. Monk, Logarithmic convexity for discrete harmonic functions and the approximation of the Cauchy problem for the Poisson's equation, *Math. Comp.*, 1986, 47, 137–149.

[90] D. N. Hào and D. Lesnic, The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2000, 65, 199–217.

[91] K. Hayashi, Y. Ohura, and K. Onishi, Direct numerical identification of boundary values in the Laplace equation, *J. Comput. Appl. Math.*, 2003, 152, 161–174.

[92] M. Jourhmane and A. Nachaoui, Convergence of an alternating method to solve the Cauchy problem for Poisson's equation, *Appl. Anal.*, 2002, 81, 1065–1083.

[93] M. V. Klibanov and F. Santosa, A computational quasi-reservibility method for Cauchy problems for Laplace's equation, *SIAM J. Appl. Math.*, 1991, 51, 1653–1675.

[94] T. Takeuchi and H. Imai, Direct numerical simulations of Cauchy problems for the Laplace operator, *Adv. Math. Sci. Appl.*, 2003, 13, 587–609.

[95] S. I. Kabanikhin and A. L. Karchevsky, Optimization method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation, *J. Inverse Ill-Posed Problems*, 1995, 3, 21–46.

[96] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, New York,

1999.

附录一　致 谢

光阴荏苒, 转瞬五年, 面对这篇刚完成的博士学位论文, 心中无限感触. 这里凝聚着导师的精心指导、同学们的无私帮助及自己的辛勤汗水. 在此, 我要对他们表示最诚挚的谢意!

感谢我的导师黄建国教授. 黄老师渊博的知识, 严谨求实的治学态度、对前沿问题的敏锐触觉以及对数学的由衷热爱深深地影响了我. 正是黄老师的精心培育和谆谆教诲使我系统地学习了反问题及有限元方法的基本理论和重要文献, 并逐步将我带入学科的前沿. 在学业上尤其是在论文的撰写过程中, 黄老师倾注了大量的心血, 给予了我许多指导和帮助, 使我终生受益. 在生活中, 黄老师平易近人, 为人坦率, 关心学生, 在为我们创造了浓厚的学术氛围的同时也给我们带来了轻松愉悦的学习环境, 帮助我顺利地完成了学业. 他的恩情我将永远铭记于心!

感谢上海复旦大学程晋教授, 本文的主要研究内容是在程晋教授所做的反问题研究工作的基础上发展起来的. 在研读程老师的一系列论文时, 他高屋建瓴的学术视野和对应用领域的探索发展使我受益匪浅!

感谢美国爱荷华大学的韩渭敏(Weimin Han)教授在科研上给予我的热情帮助. 韩老师以自己独特的视角审查了我的研究工作, 提出了众多宝贵的意见, 使问题的解决得以完善升华. 在此对韩老师表示衷心的感谢!

在这五年的学习生活中, 我的师兄弟师姐、同学们、朋友们给了我莫大的帮助, 使我紧张的博士生生活充满了浓浓的友情, 令我难忘. 曾与郭玲、赖军将、陈承泽、黄学海、陈韵骋等进行了多次深入的讨论, 他们给我解答了许多迷惑不解的问题, 开拓了我的思路, 提供了许多专业文献, 对本文提出了许多建议, 在此表示衷心的感谢!

衷心感谢我的父母和亲人, 是他们无私的亲情和奉献精神温暖着我, 激励着我不断前进!

衷心感谢所有爱护我支持我帮助过我的老师、同学和朋友们!

最后, 对评阅本文和参加答辩的各位专家和老师表示诚挚的谢意!

附录二　作者攻读博士学位期间发表和录用论文情况

1) J. Huang and **Y. Chen**, A regularization method for the function reconstruction from approximate average fluxes, *Inverse Problems*, 2005, 21, 1667–1684. (SCI, 本文第二章第二节)
2) W. Han, J. Huang, K. Kazmi and **Y. Chen**, A numerical method for a Cauchy problem for elliptic partial differential equations, *Inverse Problems*, 2007, 23, 2401-2415. (SCI, 本文第五章)
3) **Y. Chen**, J. Huang and W. Han, Function reconstruction from noisy local averages, *Inverse Problems*, 2008, 24, 025003. (SCI, 本文第三章)
4) X. Huang, J. Huang and **Y. Chen**, Error analysis of a parameter expansion method for corrosion detection in a pipe, *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, 已录用. (SCI, 本文第四章第一节)
5) **陈宇**, 黄建国, 非薄板腐蚀探测问题的数值解法, 《南京师大学报》, 2008, 已录用. (核心, 本文第四章第二节)

* *Inverse Problems* 是反问题研究领域中的高影响因子刊物. 2006年的影响因子为1.319，排名应用数学类SCI科学刊物第18名.