

摘要

反思性数学学习是数学学习活动的一个重要环节。由于受课堂模式的限制和高考指挥棒的影响，目前对反思的相关理论的实施是高中数学教学中较薄弱的环节。本文对高中数学学习的反思性理论进行了较详尽的论述，阐述了反思性数学学习的原则、方法及所处的地位和作用。本文运用自然观察、访谈调查、文献法、案例法、实验法等研究方法，结合反思性数学学习理论，提出了引导高中生进行反思性数学学习的教学策略，并进行了初步的探索与实践，旨在培养学生独立进行反思性数学学习的能力和独立解决问题的能力，从而达到高中学生学会主动进行反思性数学学习的目的。

关键词：反思性数学学习 高中生 教学策略

Abstract

Reflection in mathematics learning is a key link in mathematics learning activities. However, due to the limitations of the classroom-teaching model and the impact of the baton of college entrance examination. In this paper, the theory of the reflective learning method in the learning of high school mathematics is given a detailed exposition, The principles and contents of the reflective learning method, the status and role of the reflective learning method are also described. And they are also used to guide the research into teaching practice. the implementation of the reflective learning method is a relatively weak link in the mathematics teaching in high school. In this paper, by using of natural observation, interviews, surveys ,literature method, case method, experiment and other research methods, combined with reflective mathematics learning theory, we put forward some teaching strategies to guide high school students to use reflective learning method in the learning of mathematics, and conducted a preliminary exploration and practice. Our main aim is to help students to develop the abilities both in the independent learning of mathematics by using the reflective learning method and in independent problem-solving skills. The final goal is to make the students to learn mathematics actively by using the reflective mathematics learning method.

Keywords:

Reflective mathematics learning student of senior high school Countermeasures

引言

当今社会,知识更新的速度越来越快,学习不再是一次性的和终结性的,这就要求学习者学会学习,学会利用自我教育来提高自身获得信息的能力。帮助学生学会反思,培养学生的反思意识,有利于帮助学生建立合理的知识结构和体系,有利于提高学生的学习效率,为学生将来终身的学习和发展打下坚实的基础。

数学教育的主要目标是帮助学生学会数学地思维。荷兰著名数学教育家弗赖登塔尔认为,反思是数学思维活动的核心和动力。由于数学对象的抽象性,数学活动的探索性,数学推理的严谨性和数学语言的特殊性,决定了正处于思维发展阶段的中学生不可能一次性地直接把握数学活动的本质,而是要经过多次反复地思考、深入探究、自我调整,即坚持反思性数学学习,才可能洞察数学活动的本质特征。只有学生通过自己的思考来构建起自己的知识体系时,才能真正学好数学。因此反思性数学学习是数学学习活动中的一个重要环节。

英国教育家洛克在《人类理解论》中谈到,“反省”是对获得观念的心灵的反观自照,在此过程中,心灵获得不同于感觉得来的观念。^①而斯宾诺莎把自己的认识论方法称作“反思的知识”,即“观念的观念”,是认识所得的结果。它本身又是理智认识的对象。对于认识结果的观念的再认识和对于这种再认识之观念的再认识,这种理智向着知识的推进,即“反思”。^②

美国教育家杜威将反思称为“反省思维”,他认为反思是“一种得以产生思维活动的怀疑、犹豫、困惑,心灵困难的状态,和一种为了发现解决这种怀疑,消除和清除这种困惑而进行的探索、搜集和探究的行为”。反思能引起主体内心的冲突,动摇主体已有的认知结构的平衡,从而唤起思维,进入问题探索者的角色,实现由学习者到“研究者”的转变。数学教育家波利亚把解题分成四步,对于其中“检验回顾”步骤,就强调整体反思。

20世纪80年代以来,反思型教师的教育思潮在以美国、加拿大、英国、澳大利亚等国为首的西方教育界兴起。美国学者舍恩开展了将反思理论运用于教育实践的研究,提出了“反思性实践者”观念。他把传统的自上而下的“理论—实践”教学模式翻转过来,提出“在做中学”、“在做中反思”。美国巴里斯教授在《培养反思力》一书中介绍了教师和家长如何通过学习档案来培养学生的反思能力。英国的布里顿大学用了近十年的时间研究了如何运用专业上的“相关陈述”来提高学生的反思性学习能力和学习绩效。

二十世纪九十年代随着西方教师教育运动的发展,反思性教学的理念逐步

^①洛克著,关文运译:《人类理解论》,商务印书馆1959年版,第69--71页。

^②黄克剑,《洛克的“反省”和斯宾诺莎的“反思”》,《哲学研究》,1986年3

被介绍进来，国内涌现出一批研究反思性教学的学者。华东师大熊川武教授在《反思性教学》中系统地阐述了反思性教学的文化背景、模型、反思性教学主体合理性、教学目的合理性、教学工具合理性以及反思性教学的完整实践过程。这也成为我国从事反思性教学研究的经典。南师大涂荣豹教授的《论反思性数学学习》中提出了数学反思的具体内容及形式。北师大曹才翰教授及其弟子章建跃也非常重视并倡导培养学生对学习过程的反思习惯，他们认为“培养学生对自己的学习过程进行反思的习惯，提高学生的思维自我评价水平，这是提高学习效率，培养数学能力的行之有效的方法”。南京大学的郑毓信教授从建构主义与数学教育的角度指出：学生在数学学习过程中，只有不断地反思，才能够使自己的建构的知识不断的与数学共同体所拥有的知识靠近，并最终达到一致。

一些一线教师结合自己的教学实践来阐述教学中对学生反思性学习的培养策略。如有的教师指导学生撰写数学反思日记和建立学生成长记录袋；有的教师提出反思不仅要有智力加工，而且要有情感因素的支持；有的教师认为对学生反思能力的培养可从对新知的学习过程和学习习惯、态度两大方面着手。这些研究都表明一线教师已逐渐开始对学生反思性学习的重视。在“以学生为本”、倡导学会学习的今天，笔者觉得这一选题具有很好的实际意义。

本文在对元认知理论、建构主义理论的认识基础上，针对高中学生认为数学难学、当今高中课堂模式的限制以及教育理论界对反思性学习实践研究较少的状况，着眼于探究高中生如何进行反思性数学学习，在教学实践中提炼出反思性数学学习的原则、具体内容以及促进高中生反思性数学学习的有效手段，提出了反思性数学学习的教学策略。为师生理解和运用这种新的学习活动类型提供理论基础。

本课题的研究过程具有很强的操作性。通过本课题的研究，试图达到以下效果：

1. 通过反思性数学学习，提高高中生学习数学的兴趣和学习效率，提高学生的数学成绩；
2. 提高学生学习的主体意识，使学生逐步由学会变成会学，发展学生的自主学习能力，培养学生独立获取知识的能力、交流的能力及解决问题的能力，
3. 总结高中生反思性数学学习的主要途径和策略，提高学生数学综合能力。
4. 提高数学教学质量，为数学课堂教学改革提供新的思路。

第1章 反思性学习的理论与认识

1.1 反思与反思性学习的涵义

1.1.1 反思的涵义

反思,是哲学上的专用词语,它是指对思想本身进行反复思索,是思想的自我运动。简单地说,就是对过去经历的再认识,以不同的时空视点对原有的经历进行重新思考,运用比较、综合、推理、抽象、概括等提炼出许多的规律或经验来,从而使原有的活动不再停留在原有对象的个体水平上,而是使思维上升到更高层次,或拓展延伸到其他对象上。

1.1.2 反思性学习的涵义

反思性学习,就是通过对学习活动过程的反思来进行学习。^①反思性数学学习,就是通过对数学学习活动过程的反思来进行数学学习,这是一种有效的学习方式。^②因此在数学学习中,反思不仅是对数学学习的一般性回顾或重复,而是对数学活动中所涉及的知识、方法、思路、策略等的深究,具备较强的科学研究的性质。反思的目的不仅是为了回顾学过的数学知识和技能,更重要的是一种指向未来的数学学习活动。

1.2 反思及反思性学习的相关理论

1.2.1 元认知理论

元认知概念是二十世纪七十年代初,由美国心理学家弗拉维尔首先提出的。他认为:元认知就是个人在对自身认知过程意识的基础上,对其认知过程进行自我反省、自我控制和自我调节,是个人对认知领域和知识的控制。因此,元认知就是关于认知的认知,关于思维的思维。它包括元认知知识、元认知体验和元认知调控三个相互关联的因素。

用元认知的理论来描述,反思性学习就是学习者对自身学习活动的过程及活动过程中所涉及的有关的事物(材料、信息、思维、结果等)的学习特征的反向思考。元认知思想的核心在于强调认知活动中认知主体对目标的制定和确立,强调认知主体对认知过程与结果的自我控制、自我管理、自我调节以及自我修正,即强调认知主体对自身认知过程和结果进行反馈调节。

元认知策略要求学生在老师传授知识、习得解决问题策略的基础上,通过反思,去理解获得知识的过程,在反思过程中同时修正自己的学习状态、学习策略等,从而对自己习得的知识、方法策略形成深刻的印象,在今后遇到相似的情境时能进行自觉

^①郑菊萍,反思性学习简论[J],上海教研,2002(8)

^②涂荣豹,试论反思性数学学习[J],数学教育学报,2000(11)

运用。

1.2.2 建构主义理论

最早提出建构主义理论的是瑞士心理学家皮亚杰,他认为儿童是在与周围环境的相互作用的过程中,逐步建构起关于外部世界的知识,从而使自身认知结构得到发展。这个相互作用涉及两个基本过程:同化和顺应。同化,就是把同认知结构相一致、相协调的新知识改造、容纳到已有的认知结构中;而顺应是指对那些与已有认知结构不协调的知识,为了吸收它,就要改造、调整已有认知结构。儿童就是通过同化和顺应这两种形式来达到与周围环境的平衡。

建构主义理论的核心是“知识不是被动接受的,而是认知主体积极建构的”。人们对客体的认识是一个主动建构的过程,是在已有知识基础上的“生成”过程,而不是思维对于外部事物或现象的简单的、被动的反应。学习不是死记硬背和机械模仿,而是学习对已有知识经验、对学习内容进行解释,建构数学知识。它的学习过程包含两个方面的建构,一是通过同化对新知识的意义的建构,另一方面通过顺应对原有经验本身进行改造和重组。

在人们的认知框架中,主体的自我反思是构成认知结构更新的一个必要条件。学习不能是被动地接受,也不能是简单地复制,而是需要学生在学习过程中通过同化和顺应主动地去建构知识体系,对所学内容不断地进行概括、归纳和反省。学生在学习中应适时进行自我分析,自我评价和自我监控,从而获得自我体验。只有主动进行自我反思,才能促进学习者知识观念的形成和发展,更好地进行建构活动。

第2章 反思性学习在数学学习中的意义

2.1 反思性学习是数学学习的本质体现和升华

数学学习的本质是学生获取数学知识、形成数学技能和能力的一种思维活动。学生的数学学习是一个从具体到逐步抽象的认识、反思活动。“思考”是数学知识的本质特征。学生在数学学习过程中，只有不断的思考、反思，才能使自己建构的知识不断地与数学共同体所拥有的知识靠近，最终达到一致。

数学教育的主要目标就是帮助学生学会数学地思维。和以往的“以数学学科为本”的教育教学观念相比，新一轮的改革确立了“以学生发展为本”的教育教学观念，其最终目的是为学生的终身可持续发展奠定良好的基础。《普通高中数学课程标准（实验）》强调应特别关注学生在数学学习中不断反思与改进的过程，“通过数学教学和数学学习评价培养学生反思的意识，使他们能够从不同方面多角度地观察事物，思考问题，逐渐养成勤于思考的习惯、善于思考的能力。”“教师可以进一步通过写评语、交谈、参与研讨等方法关注学生的反思情况，指导学生有效地进行反思。”^①

数学对象的抽象性，数学活动的探索性，数学推理的严谨性和数学评议的特殊性，决定了正处于思维发展阶段的中学生不可能一次性地直接把握数学活动的本质，必须要经过多次地反复思考、深入研究、自我调整，即坚持反思性数学学习，才能洞察数学活动的本质特征。

数学的特性，决定了它在发展人的素质方面有独特的功能，数学学习必须帮助学生发展更有力的思考方法和“思考工具”。这其中就包括学生自我反思。反思性数学学习不仅可以训练学生思维的周密性和批判性，培养学生思维的灵活性和创造性，而且能使学生的注意力从指向问题本身转移到自身的认知加工过程，从而更好的监视、评价、调节、修正自己的认知活动。

2.2 反思性学习有利于优化学生的数学思维品质

数学思维是人脑和数学对象交互作用并按照一般思维规律认识数学内容的过程与活动，所以数学思维是具有数学内容和特点的思维，其结构在总体上与一般思维的结构相同，但其思维的数学材料与结果的不同引起的思维操作手段的差异，必然要求数学思维形式与思维方法的使用有不同的侧重和差异。

数学思维问题是数学教育的核心问题，^②数学思维的主要形式为：形象化、运作、反思。反思是数学化过程中的一种重要活动，它是数学活动的核心和动力，数学的不少发现来自于直觉，而分析直觉理解的原因是通向数学化的道路。

数学思维的发展水平决定了整个知识系统的结构和功能。反思就是元认知在数学

^①严士健 普通高中数学课程标准（实验）解读 江苏教育出版社 2004 年 4 月 P331

^②郑毓信，数学教育：从理论到实践，上海教育出版社，2001 第 138 页

思维中发挥作用的基本形式。只有以反思为核心的教育,才能使学生真正深入到数学化过程之中,也才能真正抓住数学思维。

2.3 反思性学习有利于提高学生元认知技能

反思是元认知在数学思维中发挥作用的基本形式。学生通过反思,把问题过程上升到一定的高度,构成一定的认知策略,进而形成元认知能力。反思性学习活动进行地越全面、越及时、越深刻,那么对元认知能力的训练也就进行地越全面越深入,使学生从“学会”向“会学”转变,提高自主学习数学的能力。学生通过自我反思来达到较高的元认知水平。

在整个数学解题活动中,元认知知识、元认知体验和元认知监控三个方面都能体现出来,比如思考这道题主要考查什么数学知识?用到什么思想方法?在解决过程中可能会遇到哪些问题?通过边思考边评价解题进程,评价解题计划的有效性,解题策略和解题思路的有效性,并不断地调整和修正自己的解答,使解题一步一步向前推进直到成功。在一次解题活动暂告结束后,反思一下自己解题过程中所走过的路,想一想自己探索问题的心路历程,有何经验有何教训等等,这些都是反映元认知水平的重要指标。学会反思性数学解题学习的策略,培养反思性数学解题学习的习惯是获得元认知知识、加深元认知体验的重要途径,也是提高元认知水平的重要方式。

在反思过程中,不但元认知能力可以得到实际的锻炼和提高,而且通过反思后的总结、提高可以使学生的元认知知识、元认知体验得到补充、丰富和完善。因此在数学教学中进行反思性数学学习,是提高学生数学元认知能力的重要途径。

第3章 反思性数学学习的理论研究

3.1 反思性学习的特征

数学是一门具有很强反思性的学科，反思性数学学习应具备以下五个基本特征：

3.1.1 探究性

探究性是指在思维活动中为解决自己发现的疑点或总是消除和清除这种困惑而进行探索与研究的思维品质。反思不仅仅是“回忆”或“回顾”已有的心理活动，而且要找到其中的“问题”以及“答案”。也就是在考察自己数学活动的经历中探究其中的问题和答案，重构自己的理解，激活个人的智慧，并在活动所涉及的各个方面的相互作用下，产生超越已有信息以外的信息。反思性数学学习的灵魂是“提出问题—探究问题—解决问题”。因此，探究性是它的基本特征。

【例 3.1】 直线 $y=x-2$ 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A, B ，求证： $OA \perp OB$

证明：联立方程组

$$\begin{cases} y=x-2 \\ y^2=2x \end{cases}$$

解得 $A(3+\sqrt{5}, 1+\sqrt{5})$, $B(3-\sqrt{5}, 1-\sqrt{5})$

$$OA \cdot OB = 0$$

$$\therefore OA \perp OB$$

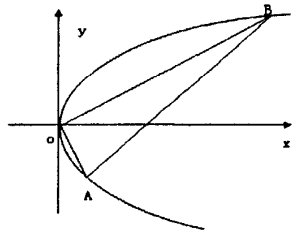


图 3.1

反思解题过程，发现要证 $OA \perp OB$ ，只需要得到 $OA \cdot OB = 0$ ，从而可设 $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ ，只需证 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ 即可。从联立方程组后得到的二次方程入手，利用韦达定理，得 $x_1x_2 = 4$ ， $y_1y_2 = -4$ ，所以 $OA \perp OB$

反思：直线和抛物线方程中的系数对 $OA \perp OB$ 有影响吗？有什么样的影响？引申进入问题一。

问题一：如果改变直线的斜率，把直线换为 $y=k(x-2)$ ($k \neq 0$)，结论还成立吗？

解：设 $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ ，联立方程组

$$\begin{cases} y=k(x-2) \\ y^2=2x \end{cases}$$

$$\text{得 } k^2x^2 - (4k^2+2)x + 4k^2 = 0$$

$$x_1x_2 = 4 \quad y_1y_2 = -4$$

$$\text{得 } x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

$$\text{得 } OA \cdot OB = 0$$

$$\therefore OA \perp OB$$

直线的斜率发生变化，但 x_1x_2, y_1y_2 仍是定值，结论仍成立。面对这一结果，学生又立刻进入反思状态，从方程 $y=k(x-2)$ ($k \neq 0$) 可以进入到问题的本质是

只要直线 AB 过定点 $(2, 0)$, 就必有 $OA \perp OB$ 。此结论易证明。又可以进一步反思定点坐标和直线斜率及抛物线系数的关系, 从而引出问题二。

问题二: 直线 $y=k(x-2p)$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 相交于 A, B , $OA \perp OB$ 成立吗?

解: 设 $A(x_1, y_1) B(x_2, y_2)$, 联立方程组

$$\begin{cases} y=k(x-2p) \\ y^2=2px \end{cases}$$

$$\text{得 } k^2x^2 - (4pk^2 + 2p)x + 4k^2p^2 = 0$$

$$x_1x_2 = 4p^2 \quad y_1y_2 = -4p^2$$

$$\text{得 } x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

$OA \perp OB$ 仍成立, 于是总结整理有

结论: 设 AB 是抛物线 $y^2 = 2px (P>0)$ 的一条弦, O 为坐标原点, 则 $OA \perp OB$ 的充要条件是直线 AB 过定点 $N(2P, 0)$ 。

这道例题的内涵极为丰富, 学生通过对其进行深入探究、反思, 有了较大发现, 从具体问题反思探究得到数学知识的本质抽象的结论。这对培养学生的探究能力、创造能力大有裨益的。所以反思具有很强的探究性, 它使学生在进行反思性学习过程中很快进入探究状态, 在探究中寻找问题的本质, 重构和加深了学生对知识的理解。

3.1.2 自主性

反思是一个冷静、主动的自我反省领悟过程, 通过自悟来获得新的体会与理解, 是一种良好的自我教育。善于反思的人, 善于提出问题, 不盲从, 不迷信, 能发表自己的独到见解。这种自主性是需要经过长期地逐渐培养, 形成稳固不变的思维品质。它能使学习者形成自觉而主动的思维习惯。反思性数学学习的整个过程是学习者自主活动的过程。它以追求自身学习的合理性为动力, 进行主动的、自觉的、积极的探究。它是通过学习者在学习活动过程中的自我认识、自我分析、自我评价来获得自我体验。反思性学习是建立在学习者具有内在学习动机基础上的“想学”, 和建立在意志努力基础上的“坚持学”。因此, 反思性数学学习具有很强的自主性。

【例 3.2】已知函数 $y=f(x)$

问题一: 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 求 $y=f(x^2-x-\frac{1}{2})$ 的定义域。

$$\text{解: } \because y=f(x) \text{ 的定义域为 } [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x^2 - x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{解得 } x \in [-\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0] \cup [1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$$

问题二: 若函数 $y=f(2x-x^2)$ 的定义域为 $[-1, 2]$, 则函数 $y=f(x)$ 的定义域。

$$\text{解: } \because y=f(2x-x^2) \text{ 的定义域为 } [-1, 2], \text{ 即 } x \in [-1, 2]$$

$$\therefore 2x-x^2 \in [-3, 1]$$

从而 $y=f(x)$ 定义域为 $[-3, 1]$

函数是数学中最主要的知识点，也是高中学习的难点之一，它贯穿于整个中学数学的始终。在函数学习中学生对函数抽象符号难以理解，这直接影响到后面的学习。只有对函数抽象符号做到深刻理解，才能正确灵活地加以应用。教学中可以通数学中复杂和抽象的外部刺激来引起学生反思，促使学生自觉进入反思阶段，在解决问题的活动过程中进行自我分析、自我评价来获得自我体验，形成自己的认知体系。

反思能优化已有知识，让学生充分地意识到自己如何从不知到知的过程，在该过程中自己存在的问题是什么，问题的难点在哪能里，在解决上述两个问题中，学生通过反思自悟，来获得对函数符号新的体会与理解。

3.1.3 发展性

反思性数学学习是一种复杂且又理性的数学学习活动，它是以学生“学会学习数学”为目的，它既关注学习者学习的直接结果又关注学习的间接结果，即学生眼前的学习成绩和学生自身未来的发展。这与常规性数学学习是有很区别的。常规性数学学习是学生凭借自己有限的数学经验进行简单的、重复的、直觉的数学操作活动。它是以“学会数学知识”为目的，关注的是学习的直接结果，即眼前的学习成绩。常规性数学学习只要完成了学习任务，就达到了数学学习的要求，而反思性数学学习不仅要完成数学学习的任务，还要使学习者的理性思维得到发展，不同的学生应得到不同的发展，使学生学会学习。

通过反思，学生逐渐根据题设中的已知条件和问题的具体特征及时地提出新的设想和解决方案。反思不仅是简单的回顾或检验，而是引导学生根据问题的结构特点，从解题思路、解题途径进行多角度的观察、联想，从而将问题引申、变形。

【例 3.3】求 $y = \frac{x^2+1}{x^2+2}$ 的值域

法一：常数分离法

$$\text{解：} y = 1 - \frac{1}{x^2+2}$$

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+2 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2+2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{x^2+2} < 0$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{x^2+2} < 1$$

$$\therefore \text{值域为 } \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

法二：反解法

$$\text{解：由 } y = \frac{x^2+1}{x^2+2} \Rightarrow yx^2+2y=x^2+1 \Rightarrow x^2 = \frac{1-2y}{y-1} \geq 0$$

∴函数的值域为 $[\frac{1}{2}, 1)$

法三：判别式法

解：由 $y = \frac{x^2+1}{x^2+2} \Rightarrow yx^2+2y=x^2+1 \Rightarrow (y-1)x^2+2y-1=0$

I 当 $y=1$ 时 $1 \neq 0$ 舍去

II 当 $y \neq 1$ 时

有 $\Delta=0-4(y-1)(2y-1) \geq 0$

解得 $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$

所以函数的值域为 $[\frac{1}{2}, 1)$

有关函数值域的求解方法很多，什么样的题型用什么样的方法？这一点学生往往抓不着头脑。通过对本题的解法反思，学生理解了这三种解法所对应的题型结构特点以及注意事项。同时在教学中可以设置多道求函数值域问题，教师无须多讲哪题用哪种方法，而是学生自己结合题目结构特征反思自己的解题策略，对多题的多种方法的对比来采取自己认为最适合的方法。如遇到困难绕了弯路或出现错误了、别的同学解法比自己的简便了等等。这些反思都能促使学生最终找到适合自己的思维途径。

反思不仅是简单的回顾或检验，而是引导学生根据问题的结构特点，从解题思路、解题途径进行多角度的观察、联想。其中哪种方法最基本、最典型？哪种方法最简便？这几种方法各有什么可取之处？通过反思性学习，学生的解题思路得到了拓展，发散思维得到了训练，学生的数学思维在变换和化归的训练中得到了发展。

3.1.4 创造性

创造性是指从无知到知而沿着“问题”展开的思维的 innovation 品质，是思维批判的结果，是反思思维的更高层次，在反思型思维者身上主要表现是善于提出问题并发表自己的独到见解。反思就是一种积极的思维活动和探究行为。学习者通过反思对问题及解决问题的思维过程进行全面地考察、分析和思考，从而深化对问题的理解、优化思维过程、揭示问题本质、探索一般规律，从而沟通知识间的相互联系，促进知识的同化和迁移，进而产生新的发现。反思是探索，是发现，是再创造。历史上的许多新的发现就是在反思过程中获得的。数学学科的特点决定进行反思性数学学习要有创新思维，体现为思维具有独立性、创新性，在反思过程中求新求异。因此反思性数学学习的过程也就是思维不断激活、不断创新的过程。

【例 3.4】若不等式 $ax^2-ax+\frac{1}{2} > 0$ 恒成立，求 a 的取值范围

解：当 $a=0$ 时， $\frac{1}{2} > 0$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } \Delta = a^2 - 4a \times \frac{1}{2} < 0$$

$$\therefore 0 < a < 2$$

$$\therefore 0 \leq a < 2$$

反思一：能否改变问法，但实质不变？

变式一：已知函数 $g(x) = \sqrt{ax^2 - ax + \frac{1}{2}}$ 的定义域为 R ，求实数 a 的取值范围。

解：由题意得 $ax^2 - ax + \frac{1}{2} \geq 0$ 恒成立，

过程同上

变式二：函数 $g(x) = \sqrt{ax^2 - ax + \frac{1}{2}}$ 的定义域为 R 的充要条件是什么？

解：由题意得 $ax^2 - ax + \frac{1}{2} \geq 0$ 恒成立，过程同上。

反思二：如果 $ax^2 - ax + \frac{1}{2} \geq 0$ 中不等号改成没有等号，题目可以如何改？

变式三：若 $y = \frac{1}{\sqrt{ax^2 - ax + \frac{1}{2}}}$ 的定义域为 R ，求实数 a 的取值范围。

解：由题意得 $ax^2 - ax + \frac{1}{2} > 0$ 恒成立，

$$\text{当 } a = 0 \text{ 时, } \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } \Delta = a^2 - 4a \times \frac{1}{2} < 0 \quad \text{得 } 0 < a < 2$$

$$\therefore 0 \leq a < 2$$

变式四：若函数 $y = \log_2(ax^2 - ax + \frac{1}{2})$ 的定义域为 R ，求 a 的取值范围

解：由题意得 $ax^2 - ax + \frac{1}{2} > 0$ 恒成立，过程同上

变式五：若函数 $y = \frac{1}{ax^2 - ax + \frac{1}{2}}$ 的定义域为 R ，求实数 a 的取值范围。

解：由题意得 $ax^2 - ax + \frac{1}{2} = 0$ 无解

$$\text{即 } \Delta = a^2 - 4a \times \frac{1}{2} < 0 \quad \text{得 } 0 < a < 2$$

$$\text{或 } a = 0$$

$$\therefore 0 \leq a < 2$$

本题从一个含参数不等式出发，在引导学生不断地变式中反思其涉及到数学知

识,如二次函数图象及性质;函数、方程、不等式之间的关系;根式、分式定义域、对数函数的性质及分类讨论的数学思想方法。从例题到变式一、变式二,仅仅是从问题表面入手,停留在使 $ax^2-ax+\frac{1}{2} > 0$ 成立的条件上,而到了变式五,就是在学生对前几个解法的反思的基础上领悟到了例题所蕴藏的内涵,那就是 $ax^2-ax+\frac{1}{2} \neq 0$ ($a \neq 0$) 对一切实数都成立的话,就意味着二次函数图象与 x 轴无交点,即二次方程 $ax^2-ax+\frac{1}{2} = 0$ ($a \neq 0$) 无实数根,转化为数学语言就是 $\Delta = a^2 - 4a \times \frac{1}{2} < 0$ 。在对题目的层层探究改造的反思中,学生理解了二次函数的图像、二次函数的性质、函数、方程与不等式三者之间的联系、函数与方程的思想、分类讨论思想。重构了自己对二次函数图象及性质的理解。

3.1.5 习惯性

反思需要长期、持久地逐渐培养,以便成为稳固不变的行为倾向,形成良好思维习惯。它是一个永不间断的、循环往复的且又不断升华的思维过程。数学活动过程中的每一次反思既是终点,又是新一轮反思的始点。

经过一段时间的训练,学生上完一节课后,会不由自主地想到:这节课我学到了什么?还有什么不懂的地方?对哪个部分感兴趣?试卷讲评过后,学生会这样去反思:这次我错的比较多的是在哪个知识点上?是不是在这部分学习上有什么遗漏?不该错的在哪里?在哪个题目上花的时间过多?在解完一道题后,学生会这样去反思:这道题用到了哪些思想方法?还有没有其它解法?我这种解法和别人相比是不是最好的?下次遇到类似的题目我应该注意什么。通过长期这样的反思训练,学生检查自我数学认知结构,清楚进一步学习任务,自订学习计划,补救薄弱环节,并最终形成自我管理、自我教育的学习习惯,逐步形成反思意识。因此,反思性数学学习具备习惯性。

3.2 反思性学习的原则

根据反思性数学学习的特征,教师在指导学生进行反思性数学学习过程中,需要遵循两个基本原则。

3.2.1 主体性原则

发挥学生的主体作用是教学中的基本原则,它涉及教育的核心问题:教师的“教”与学生的“学”之间的关系。在反思性数学学习中,认知活动是学生自身的高级心理活动,对这个活动进行认知调控,无疑是在主体内进行的。如何认识自己,如何认识自己所进行的活动是主体意识的表现。所以,学生必须学会了解自己,根据自己的特

点进行调控。形成自己的反思途径，有自己的反思方法和方式。教师要告诉学生反思的重要意义，“授人以鱼不如授之以渔”。教师不能代替学生反思，而是要教给他们反思的基本方法并提供必要的反思训练，通过反馈，不断地对学生反思性数学学习方式加以矫正，从而使之强化、内化，把活动主体的能动性充分发挥出来。

3.2.2 渐进性原则

和认知活动的发生发展规律一样，反思活动也是渐进的，它并不能一步到位。从他律到自律，从单维到多维，从浅显到深入，从简单到复杂。教师在指导学习者进行反思性数学学习时，要遵循学习者思维规律，切勿急躁，将过程分阶段逐步去实行操作。既要有序，又要有层，让学生在反思活动的实践中提高自己的元认知能力。

【例 3.5】若函数 $f(x)=\sqrt{mx^2+8x+4}$ 的定义域为 R ，求 m 的取值范围

解：当 $m=0$ 时， $\sqrt{8x+4}$ 定义域不为 R

当 $m \neq 0$ 时，要使 $mx^2+8x+4 \geq 0$ 在 R 上恒成立

$m > 0$ 且 $\Delta \leq 0$ ，解得 $m \geq 4$

变式一： $f(x)=\log_3\sqrt{mx^2+8x+4}$ 的定义域为 R ，求 m 的取值范围

解：由题意 $mx^2+8x+4 > 0$ 在 R 上恒成立

$\therefore m > 0$ 且 $\Delta < 0$ ，得 $m > 4$

变式二： $f(x)=\log_3(mx^2+8x+4)$ 的值域为 R ，求 m 的取值范围

解：令 $t = mx^2+8x+4$ ，则要求 t 能取到所有大于 0 的实数，

当 $m=0$ 时， t 能取到所有大于 0 的实数

当 $m \neq 0$ 时， $m > 0$ 且 $\Delta \geq 0$ 得 $0 < m \leq 4$

$\therefore 0 \leq m \leq 4$

变式三： $f(x)=\log_3 \frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的定义域为 R ，值域为 $[0, 2]$ ，求 m, n 的值

解：由题意，令 $u = \frac{mx^2+8x+n}{x^2+1} \in [1, 9]$

得 $(u-m)x^2-8x+u-n=0$

$u \neq m$ 时，由 $\Delta \geq 0$ 得 $u^2-(m+n)u+mn-16 \leq 0$ ，

$\therefore 1$ 和 9 是 $u^2-(m+n)u+mn-16=0$ 的两个根

从而得 $m=n=5$

$\therefore$ 当 $u=m$ 时， $x = \frac{n-m}{8} = 0$ 符合题意

$\therefore m = n = 5$

此例题是在学生已掌握将“ $f(x)=\sqrt{mx^2+8x+4}$ 的定义域为 R ”转化为不等式的基础上，逐层改变条件，引导学生逐步进入反思。将“ $\sqrt{mx^2+8x+4} \geq 0$ 恒成立”这个条件通过对数函数的定义域而改变为使 $\sqrt{mx^2+8x+4} > 0$ 恒成立。到变式二，就成了由

“ $f(x)=\log_3(mx^2+8x+4)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ ”这个条件转化为 $t=mx^2+8x+4$ 能取到所有大于 0 的实数，当 $m \neq 0$ 时， mx^2+8x+4 必须满足大于或等于 0 这个条件，少了等于 0 就无法保证 t 能取到所有大于 0 的实数，反思到这个变化就是使思维上了一个台阶，将二次函数图象的运用更深入了一步。

由于函数的值域受定义域的约束，到变式三，对数函数的值域缩小在 $[0, 2]$ 这个区间，转变为当 $x \in \mathbf{R}$ 时， u 的值域为 $[1, 9]$ 。解决时从 $u = \frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 出发，将式子变形为以 u 为参数的二次方程 $(u-m)x^2-8x+u-n=0$ (当 $u \neq m$ 时)，如何使 $x \in \mathbf{R}$? 利用判别式 $\Delta \geq 0$ 得到 $u^2-(m+n)u+mn-16 \leq 0$ ，又转化为以 u 为自变量的二次不等式，从而得到 1 和 9 就是方程 $u^2-(m+n)u+mn-16=0$ 的两根，得出结论。在变式三的解决过程中，学生的反思是分阶段逐步去实行操作，从而形成螺旋形上升。教学中教师要安排好知识的铺垫顺序和层次，不能让学生同时消化所有知识，而是按照学生的思维规律，逐步进入到反思的高层境界，从而体会到反思的乐趣。

3.3 引导学生反思性数学学习的可行性

在中学数学课堂教学中培养学生的反思性数学学习是完全可行和必要的。在每节课的过程中，教师可以利用每一个教学环节向学生逐步渗透反思性学习。例如在新课的预习上，可以指导、帮助学生检查自己的预习情况。如哪些问题预习时就已经掌握，哪些问题预习时不明白，经课上老师讲解后弄明白了，当时为什么不明白，问题出在在什么地方；练习反馈完全可以留一定时间给学生思考和做题，尽量让学生暴露出错误后通过自己的反思来改正错误；课堂小结时可让学生自己先总结，同学间讨论，最后教师概括。高中生已具备一定自我学习的能力和自觉意识，指导学生建立课堂反思记录本和错题集。像这样进行反思性数学学习的教学，在我们平时的课堂教学中，是完全切实可行的。

第4章反思性数学学习的内容与教学策略

4.1 反思性数学学习的内容

4.1.1 反思学习活动所涉及的知识

大多数高中学生对某一数学对象的认识,并不是在一次数学活动中就能完全领会和理解的。每次数学活动都可能提供对某一个数学对象提升认识水平的机会,每一次的学习活动背景不同,学生对同一数学对象进行反思后每次就会产生相应的新知识,与情境联系在一起的认识,才是活的认识,才是能够迁移的认识,才是真正有用的认识。

反思学习活动所涉及的知识的过程并不是说眉毛胡子一把抓,没有重点地去反思学习过程。实际上,数学反思应该对活动中所涉及的知识有所侧重,只有这样才能使数学反思更好的进行下去,产生良好的效果。对学习过程中的每个环节都平均用力,这样不仅浪费了时间,而且还有可能使学生产生厌烦情绪,使反思活动进行不下去。此时,如果在全面回顾的基础上,重点抓住自己困难的地方或者是出现错误的地方进行重点反思,或是对于这类问题的共同特点、共同解法和应用等进行反思,这样不仅有意义,对学生的学习有切实的帮助,而且学生也比较愿意进行。这才是我们提倡学生进行反思性数学学习的目的所在。

【案例 4.1】两角和与差的三角函数教学片断实录

一、提出学习课题

教师:由前面我们学的单角的三角函数知识,能求出 75° , 15° 的三角函数值吗?在研究三角函数时我们常遇到这样的问题:“已知任意角 α , β 的三角函数值,求 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, 2α 的三角函数值”

今天我们就来研究这类问题。我们把刚才问题具体化,即已知任意角的三角函数值,来推导以下三组公式:

$$(1) \begin{cases} \sin(\alpha+\beta)=? \\ \cos(\alpha+\beta)=? \\ \tan(\alpha+\beta)=? \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \sin(\alpha-\beta)=? \\ \cos(\alpha-\beta)=? \\ \tan(\alpha-\beta)=? \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \sin 2\alpha=? \\ \cos 2\alpha=? \\ \tan 2\alpha=? \end{cases}$$

二、确定研究方案

教师:我们要研究的共有三级九个公式,从哪个公式开始研究呢?是否需要每一个公式进行单独的研究呢?请同学们思考并提出研究方案。

学生 1:我认为不需要研究 $(\alpha-\beta)$ 的三角函数值,因为如果知道 $(\alpha+\beta)$ 的三角函数公式,用 $-\beta$ 代替 β 就可以得到 $(\alpha-\beta)$ 的三角函数公式。

教师:很好,也就是说,如果和角公式有了,差角公式就很容易求得,那么二倍角公式又如何呢?

学生1: 可以让和角公式中的 β 等于 α

教师: 用 $-\beta$ 代替 β 的过程用到了什么数学方法?

学生2: 换元的方法

教师: 让和角公式中的 β 等于 α 用到了什么数学方法?

学生3: (思考后回答)是特殊化的方法

教师: 现在我们一起来看一下刚才同学们提出的研究方案

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2\alpha=? \\ \cos 2\alpha=? \\ \tan 2\alpha=? \end{array} \right\} \xleftarrow[\text{特殊化}]{\alpha=\beta} \left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha+\beta)=? \\ \cos(\alpha+\beta)=? \\ \tan(\alpha+\beta)=? \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{换元}]{-\beta \text{ 代替 } \beta} \left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha-\beta)=? \\ \cos(\alpha-\beta)=? \\ \tan(\alpha-\beta)=? \end{array} \right\}$$

教师: 从这里我们可以先研究和角公式, 那么在和角公式中先研究谁呢?

学生4: 可先推出正余弦公式, 两者相除就可得到正切公式。

教师: 这用到了什么数学方法?

学生5: 化切的方法

教师: 那正、余弦先研究谁呢?

学生6: 正弦

教师: 先研究余弦不行吗?

学生7: 可以, 通过同角关系中的平方关系

教师: 很好, 但通过同角关系中的平方关系要涉及开方, 有其它方法吗?

学生8: (思考片刻后) 用诱导公式 $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$, 可以有

$$\cos(\alpha+\beta) = \sin[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)]$$

教师: 我们一起来看看这个研究思路

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha+\beta)=? \\ \cos(\alpha+\beta)=? \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{诱导公式}]{\text{化切}} \tan(\alpha+\beta)=?$$

教师: 通过刚才的分析, 我们现在得到了一个完整的研究方案, 对此进行反思, 我们得到一个启示, 就是我们在研究问题的时候, 应该要讲究一些策略, 要抓住问题的主要矛盾, 下面我们集中精力来解决这个矛盾。即研究 $\alpha+\beta$ 的正余弦公式

这节课采用了开门见山, 直接给出课题的方法引入新课, 所给的问题不是某个或某组公式怎样推导, 而是给出三组九个需要研究解决的公式的左端, 让学生制定研究方案。在由九个需要解决的公式逐步推导到只研究一个公式的过程当中, 学生对前面学过的一些思想方法, 三角函数基本知识有了一个新的认识。

《数学课程标准》指出: 学生的数学学习活动不应该只限于接受记忆, 模仿和练

习。高中数学课程还应该倡导自主探究,动手实践,合作交流,阅读自学等学习数学的方式,这些方式有助于发挥学生学习的主动性,使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”的过程。新课程理念也要求我们在日常教学中不应该是“结果”的教学,而应是“过程”的教学,数学活动的教学,即要把知识的形成,发展过程展现给学生。

4.1.2 反思思想方法

在高中数学活动中总要涉及一些具体的数学思想和方法,如化归思想、特殊与一般思想、分类讨论思想、数形结合思想等;消元法、换元法、降次法、降维法、配方法、待定系数法、数学归纳法以及反证法等。在数学学习中对数学思想方法的领会掌握和运用十分重要,可以说是数学学习的精髓。而数学思想方法没有独立的存在形式,在各类教科书上没有也很难有系统的讲述,它往往蕴涵在具体内容,或伴随在具体的某个数学活动片断之中。数学思想方法的传播和学习,除了要靠教师在长期的教学中提示、归纳和点拨外,主要还是靠学生自己在长期的反思性数学学习中领悟、吸收和运用。

因此,反思性数学学习中要特别注意发掘活动中涉及了哪些数学的思想方法,这些思想方法是如何具体运用的,运用的过程中有什么特点、有什么限制条件?运用后达到了什么效果?以前有没有运用过这种思想方法?在什么地方用的?那时是怎么运用的?把两次运用的情况比较一下,现在的运用和过去的运用有何联系、又有何差异?相同点和不同点分别有哪些?能否从中总结出有规律性的东西?有了这样的反思,学生对数学思想方法的认识、把握、运用的水平就会不断提高。如在数列问题的解决中,对于等差数列和等比数列的通项公式和前 n 项和公式应用的问题,还可以运用方程和函数思想来分析和解决让学生体验数学思想方法对解题的重要作用和指导意义,使学生由会解一道题到会解一类题,领会数学的精髓,提高数学素质,由“学会”向“会学”转变。

【例 4.1】已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 a

分析: 解此题可先由 $A \cup B = A$ 得出 $B \subseteq A$, 然后对集合 B 中的元素个数进行分类讨论。

解: 由题意可得 $A = \{1, 2\}$, 再由 $A \cup B = A$ 得 $B \subseteq A$

所以 $B = \emptyset$ 或 $B = \{1\}$ 或 $B = \{2\}$ 或 $B = \{1, 2\}$

当 $B = \emptyset$ 时, 方程 $x^2 - ax + a - 1 = 0$ 无实根, 即 $\Delta = (a-2)^2 < 0$, 此时 a 不存在。

当 $B = \{1\}$ 或 $B = \{2\}$ 时, $\Delta = (a-2)^2 = 0$, 解得 $a=2$, 此时 $B = \{1\}$, 所以 $a=2$ 符合条件。

当 $B = \{1, 2\}$ 时, 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 和 $x^2 - ax + a - 1 = 0$ 的根完全相同, 由这两

个方程对应系数相等得 $a=3$

综上, $a=2$ 或 3

这是集合中最常见的分类讨论问题, 解题时需对已知集合的子集元素的个数进行分类讨论, 尤其要注意空集是任何集合的子集。分类讨论的思想方法在我们高中数学学习中是一个很重要的方法, 所以在高一第一学期就要渗透下去, 让学生尽快掌握。

高中生因其认知结构和知识经验还不够完善, 不可能将教材具体内容所蕴含的数学思想方法一下子就彻底领悟, 很多时候只停留在例题表面, 解决后并没有思想方法的反思, 因而学习也就停留在题目的表层, 所以总是出现讲过的题会做, 没讲过的就不会做。所以在教学中教师要逐步引导学生对数学思想方法进行反思、领会、掌握和运用。

4.1.3 反思题意的理解过程

理解题意是数学解题学习的首要环节。在获取信息时, 要明确已知什么、求解什么, 即从题目本身去获取从何处入手、向何方前进的信息。题目的条件和结论是两个信息源, 从条件发出的信息预示着可知并启发解题思路, 从结论发出的信息预告需知并诱导出解题方向。在解题时, 很多学生常常找不到解题途径, 其主要原因是“理解题意”这一环节出了问题。他们经常被一些信息的表面形式所迷惑, 经常遗漏一些重要的信息, 对条件与结论之间的某些关系不能发现, 同样的地方反复错误或面对题目无从下手。这些现象表明学生不会理解题意, 要真正学会理解题意, 除了直接从“理解题意”的过程中学以外, 一个十分重要的途径是在解题后的“反思”中来学。

反思题意理解就是在解题活动完成以后, 回顾自己从最初理解题意时怎样获取信息及如何加工信息方面进行思考, 尤其是对那些有过反复曲折过程的问题进行反思, 如获得过哪些信息? 遗漏过哪些信息? 为什么会遗漏这些信息? 题目中哪些信息是一目了然的? 哪些信息是隐藏的? 对条件与结论之间的某些关系为什么不能发现? 关系的转化是否有错误? 为什么会发生这样的错误? 以后在理解题意时要注意什么事项? 通过反思, 能使学生会理解题意方面寻找规律, 积累更多的经验, 这也是元认知方面的训练。要思考题意中的哪些信息是自己不很清楚? 为什么会不清楚? 条件与目标之间有哪些关系没有发现? 关系的转化是否有错误? 是什么原因导致的对题意的理解错误等等, 象这样去对其原因追根究底。

【例 4.2】已知 $(x+2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, 求 $x^2 + y^2$ 的取值范围。

错解: 由已知得 $y^2 = -4x^2 - 16x - 12$, 因此 $x^2 + y^2 = -3x^2 - 16x - 12 = -3(x + \frac{8}{3})^2 + \frac{28}{3}$

$\therefore$ 当 $x = -\frac{8}{3}$ 时, $x^2 + y^2$ 有最大值 $\frac{28}{3}$, 即 $x^2 + y^2$ 的取值范围是 $(-\infty, \frac{28}{3}]$ 。

反思: 没有注意 x 的取值范围要受已知条件的限制, 丢掉了最小值。

事实上, 由于 $(x+2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow (x+2)^2 = 1 - \frac{y^2}{4} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x \leq -1$,

从而当 $x = -1$ 时 $x^2 + y^2$ 有最小值 1

$\therefore x^2 + y^2$ 的取值范围是 $[1, \frac{28}{3}]$

学生在错解之后反思得到解此题时遗漏了 x 的取值范围, 因为题目中没有注明 x 的取值范围, 所以再次遇上求二次函数的值域问题时, 一定要考虑自变量 x 的取值范围, 而这个范围往往隐含在题目中, 下次审题时就要注意题目中所隐含的条件, 如函数的有界性: 偶次方 $x^2 \geq 0$, 三角函数 $-1 \leq \sin x \leq 1$, 指数函数 $a^x > 0$, 圆锥曲线的有界性等。

在解完一道题后很有必要引导学生进行审查自己的解题是否混淆了概念, 是否忽视了隐含条件, 是否是特殊代替了一般, 是否忽视了特殊情况, 逻辑上是否有问题, 运算是否正确, 条件是否充分, 题目本身是否有误等。在教学中, 教师可以经常有意识地选用一些题意理解上易错或易遗漏条件的题, 去引导学生对题意理解的合理性进行反思, 让学生在“误”中“悟”, 在“错”中“磋”, 使学生真正意识到反思题意的重要性。

【例 4.3】过点 $P(2, 3)$ 向圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 引切线, 求切线方程。

解: 设切线方程为 $y - 3 = k(x - 2)$, 化为一般式为 $kx - y - 2k + 3 = 0$, 圆心坐标为 $O(0, 0)$,

半径为 2, 圆心到切线距离 d 等于 r , 有 $\frac{|2k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$

解得 $k = \frac{5}{12}$, 所以所求的切线方程为: $y - 3 = \frac{5}{12}(x - 2)$, 即 $5x - 12y + 26 = 0$

这道题学生在理解题意的过程易忽略已知点与圆的位置关系, 若已知点在圆上求切线, 则该点就是切点, 应该只能求出一条切线; 例题中明显有点 P 在圆外, 而解答中只求出了一条切线方程, 这与实际不符, 那么另外一条呢? 如果有, 又为何不能解出? 进一步意识到由于在解答过程中, 利用点斜式设直线方程, 这种形式存在一定的缺陷, 用点斜式时要注意直线斜率的存在性, 斜率不存在不等于直线不存在, 当直线与 x 轴垂直时斜率不存在, 而此题正是还有一条直线符合条件, 即直线: $x = 2$ 。

通过对题意的反思, 学生可以很快得出自己所求的一个结论是错误的, 从而从解题过程中寻找突破口, 发现在第一步设直线方程时, 就有漏洞, 也就理解了直线方程的几种形式在使用时是有限制条件的。如用点斜式和斜截式时应考虑斜率是否存在, 用截距式时要考虑直线必须与两坐标轴有非零交点。今后再遇到类似求切线方程问题时, 不会因为没考虑直线形式所限制的条件或忽视了隐含条件而漏解。

4.1.4 反思相关问题

高中数学的许多知识点都不是孤立无缘的, 而是有紧密联系的。在学习活动中必然要与一些曾经见过或似曾见过的相关知识点发生联系, 通过对与数学学习活动有关的问题进行反思, 不仅可以挖掘知识间的内在联系, 而且可以促进知识的同化和迁

移,有利于学生更好地建立起合理有序的知识结构体系。反思新旧知识间的内在联系,可以由旧知识去理解新知识,也可以用新知识去解决旧问题。

教学中教师可以引导学生回顾整个活动中曾经与哪些问题有过联系,有什么地方联系过,它可以与哪些问题有联系。去思考为什么会或者可以产生联系,具体产生了什么联系,是问题的情境(知识、表述方式、图形等)有联系,是问题的方法(包括策略、数学思想等)有联系,还是问题的结论有联系。是整个问题有联系,还是问题的某个局部有联系。所有这些联系之间能否概括出某种规律或经验。通过这样的联系。对原问题是否有新的认识。如在解题活动中必然要与一些已相识或似曾相识的问题有所联系,因而在活动结束后应对那些有过联系的问题进行反思。通过反思来挖掘知识间的内在联系,促进知识的同化和迁移。帮助学生整合知识结构,建构知识体系。

我国著名数学家华罗庚说:“数与形本是相倚依,焉能分作两边飞,数缺形时少直观,形缺数时难入微,数形结合百般好,隔裂分家万事休。”所谓数形结合,就是根据数与形之间的对应关系,通过数与形的相互转化来解决数学问题的思想,实现数与形的结合。在运用时它常与以下内容有关:①实数与数轴上的点的对应关系;②函数与图像的对应关系;③曲线与方程的对应关系;④以几何元素和几何条件为背景,建立起来的概念,如复数、三角函数等;⑤所给的等式或代数式的结构含有明显的几何意义。以形辅数,可以使一些看似难以入手的数学问题,借助图形的直观性,找出解题捷径,使我们的学习和研究更加深刻。因此,教师应充分认识数形结合思想的重要性,加强数形结合教学的一些规律性知识,让学生在直觉中联想到与其相关的学科知识并利用它解决问题,从而使学生的发散性思维能力得到发展。

【例 4.4】问题一:求函数 $u=\sqrt{2t+4}+\sqrt{6-t}$ 的最值

分析:由于函数右端两根号内同为 t 的一次式,若只做简单换元 $\sqrt{2t+4}=m$,是无法转化出一元二次函数来求最值的;若对式子进行平方处理,将会把问题复杂化,该题用常规解法显得比较困难,考虑到上面函数右边有两个根号,故可采用两步换元。

解:设 $x=\sqrt{t+2}$, $y=\sqrt{6-t}$, 则 $u=\sqrt{2}x+y$, 且 $x^2+y^2=8(0\leq x\leq 2\sqrt{2}, 0\leq y\leq 2\sqrt{2})$ 所给函数化为以 u 为参数的直线方程 $y=-\sqrt{2}x+u$,它与圆 $x^2+y^2=8$ 在第一象限的部分(包括端点)有公共点, $u_{\min}=2\sqrt{2}$,当直线与圆相切于第一象限时, u 取最

大值,利用圆的性质知 $\frac{|u|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}}=2\sqrt{2}$, 得 $u=\pm 2\sqrt{6}$, 取 $u=2\sqrt{6}$ 得

$$u_{\min}=2\sqrt{6}$$

问题二:点 P 是边长分别为 5、7、8 的 $\triangle ABC$ 的内切圆周上一点,求 P 到 $\triangle ABC$ 的三个顶点的距离的平方和 $S=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$ 的最值。(图 4.1)

分析:直接用三角形的知识去解,思路比较复杂。此时可由形思数,而由形思数

学家因反思而发现问题,再经过进一步研究而取得成功的故事。在平时的各个教学环节中,尽量创设问题的情境,提供反思信息,促使学生去潜心思考,深入研究。教师可通过对某一问题的深入探究,有针对性地指导学生有意识地进行反思,提出中肯的改进意见,让学生明确没有反思便难有自我改错纠偏的道理,明确反思不仅能及时改正错误,还能优化已有认识,提高自身的合理性水平。

为了使学生更好更快的学会反思学习,教师应在教学中给学生展示反思过程。如在课堂上、在解决问题的过程中、在学习新知识的过程中等。只有这样学生才能比较清楚的了解什么是反思性数学学习,才能理解和掌握这项技能。也只有这样,学生也才自觉地多进行反思性数学学习练习。教师可以将自己是如何分析问题解决问题的展示给学生看,说给学生听,自己遇到了哪些困难,后来这些困难是如何突破的,给学生展示思维过程,让学生了解自己是如何反思、总结和概括的。学生的很多学习习惯都是从模仿教师的教和学习习惯开始的。

数学公式定理形成过程大致有两种情况:一是经过观察、分析,用不完全归纳法、类比等提出猜想,而后寻求逻辑证明;二是从理论推导得出结论。教学中的每个公式、定理都是数学家辛勤研究的结晶,他们的研究蕴藏着深刻的数学思维过程,而现行的教材中只有公式定理的结论和推导过程,而缺少公式定理的发现过程。因此,引导学生参与公式、定理的发现过程,并对发现过程进行反思,这对激发学生的反思意识有十分重要的意义。

【案例 4.2】抛物线的标准方程推导片断

提问:由抛物线的定义,我们如何得到它的标准方程呢?

学生讨论、探究得到至少三种建系的方法:

方案一:以 l 为 y 轴,过点 F 与直线 l 垂直的直线为 x 轴建立直角坐标系

得到抛物线方程为: $y^2=2px-p^2(p>0)$.

方案二:以定点 F 为原点,平行 l 的直线为 y 轴建立直角坐标系

得到抛物线方程为: $y^2=2px+p^2(p>0)$.

方案三:取过焦点 F 且垂直于准线 l 的直线为 x 轴, x 轴与 l 交于点 K ,

以线段 KF 的垂直平分线为 y 轴,建立直角坐标系

得到抛物线方程为: $y^2=2px(p>0)$.

引导学生反思三种方案,比较所得的各个方程,应该选择哪个方程作为抛物线的标准方程?学生很容易发现方案三中得出的方程应作为抛物线的标准方程。因为这个方程不仅具有较简便的形式,而且方程中的系数有明确的几何意义:一次项系数就是焦点到准线距离(焦准距)的 2 倍。

中学课堂上教师往往注重对学生进行知识传授与解惑,考虑得较多的是如何在课堂上完成教学任务,而让学生参与反思活动较少,认为这样会浪费时间,影响教学进度,这些观念和想法导致了学生不能成为课堂主人,有感而不能解,有发现而得不到

展开,最主要的是不会自己去学习。常常出现屡教屡不会的情形。在课堂上因大胆地留给学生反思的时间,教师能不讲的则不讲,学生在出现错误的时候能引导学生主动去发现。

4.2.2 抓住时机强化反思

反思性数学学习是一个长期的过程。要让学生明确没有反思便难有自我纠错的道理,要使学生的反思行为习惯化,也就是主体遇到特定刺激出现相应的反应。有反思习惯的学生,在学习的过程中会就学习计划、学习过程、学习结果等进行自觉、主动地反思。反思意识得到强化后,学生心理上就有一道“警戒线”,它随时提醒着学生对自己的学习保持应有的警觉,一旦有可疑之处便立即进入反思状态。实践中可指导学生写好反思记录本和整理错题集来强化反思意识。

4.2.2.1 建立反思记录本

学生建立反思记录本,是养成良好反思习惯的途径。学生将所学的知识点和解题方法或学习方法、容易解错的习题、学习失败的教训等记录下来进行研究。有学生认为自己做了很多题,但效果不大或者老师一讲就懂但自己一做就错。这种现象本身就是一种反思,但这种反思是停留在表面现象上。大多数学生是由于学习习惯和方法不当造成上述现象。教师引导他们去反思自己的学习习惯和方法,就像有些学生自控能力不强,需要他人的督促才能做作业,有的学生太过自信,思想上不够重视,他人的好方法不愿接受或一听而过没有思考等,这些经验和教训可以记录在课堂反思记录本上,并总结出自己认为最好的方法或疑问点。

由于学生的认知能力不强,缺乏自我评价意识和能力,他们做完作业往往不检查,不善于寻找和纠正自己的错误,因此,在解题过程中易出错,所以教师应督促学生记录下来,找出错的原因,就会培养学生自我评价意识和能力,从而提高学习效率。像课堂上例题解答,学生在反思解题过程中自己想到,但未与教师交流的问题;作业中对某些不同解法的探讨、情感、体验的感受,学习习惯、合作意识等,都可以通过反思记录本来表达。这样还可以在师生之间搭桥铺路,让教师及时了解学生的学习情况、情感态度及困惑,便于采取针对性的措施加以解决,使师生的情感更加融洽。

在课外学习活动中学生可以用自述的方式来记录数学活动中的体验或用数学的知识来讲述自己一天(一周)的生活情况。这样,不仅可以进一步理解和掌握已学的数学知识,而且还可以倾诉对数学学习的喜悦和烦恼,从而进一步肯定或改进自己的数学学习行为。学生每天上完数学课应及时反思上课中出现的知识点(包括例题类型、解题思路、方法和数学思想等),对它们的理解程度;与学过的知识的联系;本节课的重点、难点、疑点;自己的解决方式。在反思这些问题的基础上,重新理一下知识结构体系,达到认知结构的再组织,促进理解,或以图示的方式对本节知识作好笔录,减少记忆量,利于数学知识的更好掌握和运用。

教师不仅要提倡、鼓励学生写,还要在一个阶段后作好批阅,当作一份作业,了

解学生存在的学习情况，进行个别指导，同时对学生的反思工作起到监督的作用。好的表扬并在班级传阅，不足的给予指导帮助，以便提高记录本的质量。长期以往，持之以恒，直到养成自觉反思的习惯。如图 4.2

11月5日	函数值域求法：[y的取值范围]	
1. 双根求法，双根同表		今天复习了函数值域，觉得求值域方法太多了，真怕到时候做时不会。
$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \quad (x \geq 0)$	值域 $[\sqrt{2}, +\infty)$	
2. 最值法		
$y = 2^x \quad (x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}])$	值域 $[\frac{1}{2}, 2]$	
$y = -2x^2 + 5x + 6$	值域 $(-\infty, \frac{25}{8}]$	二次函数看对称轴
如答 $x \in [-3, 1]$	就不一样，如果有参数，也找关系	
3. 判别式法	$x \in [0, 3]$ 只要考虑对称轴与给定区间的关系就行了。	新发现：求 $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x - 6}$ 值域。
$y = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 + x + 1}$		和例题一样，我用0去解，得 $x^2 + 2x + 3 = 0$ ，但没注意 $x^2 + x - 6 \neq 0$ ，解为 $x = -1$ 或 $x = -3$ ，把相应的 y 代入 y 分子，得 $y = 3$ 。（这道题没做错）
解：(1) $x^2 = (y-2)x + (y+3) = 0$	这是二次方程是 R	
当 $y = 2$ 时，无解， $y \neq 2$		
当 $y \neq 2$ 时， $\Delta \geq 0$		
即：(y-2)^2 - 4(y-2)(y+3) ≥ 0		
解之得：2 < y ≤ 10/3 ∴ 值域 (2, 10/3]		
4. 反函数法 逆向思维	原函数值域 ⇔ 反函数定义域	反函数法在能用
$y = \frac{2x+3}{3x-2}$	解：x = (y+3)/(3-y) 当 y ≠ 3, 由 y ∈ (-∞, 3) ∪ (3, +∞)	
5. 换元法 (换元，化归思想)		像这样有根号外面没有根号的就可以用换元。
$y = x - \sqrt{1-2x}$	换元	
解：设 $t = \sqrt{1-2x} \quad (t \geq 0) \rightarrow x = \frac{1-t^2}{2}$		
$y = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} \quad (t \geq 0)$	∴ $y = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + 1 \leq \frac{1}{2}$	

图 4.2

4.2.2.2 整理数学错题集

每个人在做数学学习题时，都会出现这样那样的错误。把这些错误记录在专门的本子里，建一个属于自己的数学错题库，学生从中获得反思的对象信息，并在反思中弥补知识上的不足和思维上的缺陷，是一条很好的培养学生反思能力的途径。在这个数学错题库中，学生要及时记录错误的题目，仔细分析错误的原因，提出改进的措施，以求吸取教训，杜绝此类情况再次发生。

指导学生做好错题分析,认真订正,记好解决方案,以便日后提醒自己,做好防范措施。教师可以在批改试卷后记录成绩时对学生订正与反思过程打分,将它与原始分数加在一起算本次测验的真正成绩,这样,学生积极参与错题反思并形成习惯,也让学生意识到反思的重要性。(图4.3)

Date		NO.
$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = -\frac{3}{2}$		
反思错误,抓关键。例题中直角三角形,斜边上的中线等于斜边的一半。		
整理数学卷模三		
1. $A = \{x x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x ax - 1 = 0\}$, $B \subset A$, 求a.	在解 $ax - 1 = 0$ 时	
我的错解: $A = \{3, -1\}$, $B = \{\frac{1}{a}\}$	你考虑 $a \neq 0$	
$\therefore a = \frac{1}{3}$ 或 -1 .	才有 $x = \frac{1}{a}$ 就不会错了。	
反思错误, a 有可能为 0, 则 $B = \emptyset$, $\emptyset \subset A$ 符合	这题我也错了,我	
所以漏了 $a = 0$, 看来做集合题时,一定要注意	知道要考虑 $B = \emptyset$, 但	
<u>空集</u> 这个特例。	不知道 $a = 0$ 导致 $B = \emptyset$.	
4. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1, 1)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$	忽略特殊情况	
的夹角为锐角, 则实数 λ 的取值范围	况	
我的错解: $\because$ 夹角为锐角		
$\therefore 0 < \vec{a} \cdot (\vec{a} + \lambda \vec{b}) < 1$		
即 $0 < (1 + \lambda) + (4 + 2\lambda) < 1 \therefore -\frac{5}{3} < \lambda < 1$	在向量中要后	
反思错误, $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 之间可能夹角为 0, 则	去特殊向量方	
$\lambda \neq 0$, 看来做向量题时, 一定要注意这	和特殊关系(共	
个特例	线、垂直)	

Q TL21825

图 4.3

当然学生的反思不应该是自我封闭的,而是开放的。教师应鼓励学生积极主动地

与别人多交流多争辩，同时不断反思，使问题明朗、清晰，这样可使学生理解问题更严密、更深刻。教学中可以尝试学生四人一个小组，把自己的错题集和本组同学互相交换，一方面是看看别人的错误是不是和自己一样，以告诫自己不要犯同类的错误；二是看别人的反思过程对不对，有些学生在改错的时候仍然思路不对，这样，既检查了别人的错误同时又巩固自己的知识，对自己也是一个促进。从另一个角度讲，学生一次次错，教师一次次重复讲，耗掉教师多少精力，但效率却不高。实践证明，多让学生进行反思回顾，既是给学生一个很大的自主空间，相对也给老师释放了一个空间。

错题实际上包含着学生知识上的欠缺和能力上的盲区，如果能用好这个渠道，将是学生走上成功之路的捷径。俗话说“失败乃成功之母”，失败中蕴含着成功的必然，只要注重查漏补缺，惩前毖后，弄清失败的原因，就能找到补救的措施，通向成功的坦途。

第5章 反思性数学学习的实践研究

5.1 概念教学

数学概念一般是以准确而精练的数学语言运用定义的形式给出的,具有高度抽象的特征,是学生进行数学思维的核心。学生理解和掌握概念的过程实际上是掌握同类事物的共同、关键属性的过程。同类事物的关键属性可以由学生从大量同类事物的不同例证中独立发现,这种概念的获得的方式叫做概念形成;也可以用定义的方式向学生直接揭示,学生利用已有认知结构中的有关知识来理解新概念,这种获得概念的方式叫做概念同化。概念形成与概念同化是两种基本的概念获得方式。

由于学生学习是掌握前人已经发现的数学知识,把前人的数学活动经验转变成自己的经验,使其成为自己解决问题的工具的过程,因此概念同化是学生获得数学概念的最基本方式。但是,由于学生的认知结构处于发展过程之中,靠死记硬背是很难牢固掌握概念的,因此教师在教学中要创设问题情境,积极引导学生通过探索,反思概念形成的过程,多问几个为什么。例如,为了使学能深刻理解函数单调性定义,在讲授函数单调性定义后,可提出下列问题引导学生反思:(1)为什么要给定区间?(2)为什么要“任意两个自变量的值”? (3)如何判断函数的增减性?这些问题引起学生对概念的反思。通过反思,使学生对“函数单调性”的定义有一个深刻的理解,深化了学生的知识建构。

在数学学习中,数学概念的学习毫无疑问是重中之重。如果概念不清,那么一切都无从谈起。高中数学中的新概念往往是以两种方式给出:一是在列举学生熟悉的实例后归纳出的。如数列、线性规划等。学生易于理解接受;另一种是利用已有的知识直接给新概念下严格的数学定义,对于后者,并不是靠读几遍就能正确理解的。例如对函数定义的理解,教师可以提出反思式学习提纲:(1)研究对象是什么?(2)研究对象之间有什么关系?(3) x 的值与 y 的值如何对应?(4)有了上述对应关系后, y 和 x 间的这种关系叫做什么关系?经过反思,深化了学生对初中函数定义的理解,并在头脑中对函数的定义形成完整的概念,在此基础上总结出“函数定义的本质是两个非空实数集之间的单值对应关系。”通过反思式概念学习,不仅理解了数学概念,更重要的是学生受到了一次如何理解数学概念的示范,并在今后概念学习中得以应用。

【案例 5.1】双曲线定义教学片断

教学过程:

(1)复习提问:

问题 1: 椭圆的定义是什么?

问题 2: 椭圆的标准方程是怎样的?

问题 3: 如果把上述椭圆定义中的“距离的和”改为“距离的差”,那么点的轨

迹会发生什么变化？它的方程又是怎样的呢？

(2)探究新知：

问题1：定点 F_1 、 F_2 与动点 M 不在平面上，能否得到双曲线？（进入反思）

学生回答：不能。[加强了对“在平面内”这个范围的理解]

问题2： $|MF_1|$ 与 $|MF_2|$ 哪个大？（对椭圆的形成过程进行反思）

学生回答：不一定。观察教师示范作图，得出结论当 M 在双曲线右支上时，

$|MF_1| > |MF_2|$ 当点 M 在双曲线左支上时， $|MF_1| < |MF_2|$ 。

问题3：点 M 与定点 F_1 、 F_2 距离的差是否就是 $|MF_1| - |MF_2|$ ？

学生回答，不一定，也可以是 $|MF_2| - |MF_1|$ 。

反思问题2和3，可以得到什么？

学生回答：对距离差的正确表示为 $||MF_2| - |MF_1||$ 。

问题4：这个常数是否会大于等于 $|F_1F_2|$ ？

（对椭圆中距离和与 $|F_1F_2|$ 大小关系进行反思）

学生回答：常数应小于 $|F_1F_2|$ 且大于零。当常数 $=|F_1F_2|$ 时，轨迹是以 F_1 、 F_2 为端点的两条射线；当常数 $>|F_1F_2|$ 时，无轨迹。

再次反思上述问题，领悟双曲线的定义

引导学生概括出双曲线的定义：

定义：平面内与两个定点 F_1 、 F_2 距离差的绝对值等于常数（小于 $|F_1F_2|$ 的正数）的点轨迹叫做双曲线，这两个定点叫做双曲线的焦点，两焦点的距离叫做双曲线的焦距。

概念中几个关键词：“平面内”、“距离的差的绝对值”、“常数小于 $|F_1F_2|$ ”

这样，学生掌握了双曲线的概念，深刻理解了定义中的几个关键词，为后期双曲线方程推导和性质的学习埋下伏笔。同时通过反思，强化了对椭圆概念的理解。同样类型的还有等比数列概念的学习。

对一个数学概念的学习，并不是仅仅能记住它，说出它的定义、认识代表它的符号，而是要真正能够把握它的本质属性。教师在教学中除了要引导学生积极参与概念、定理、公式的发生和形成过程外，还应引导学生运用已有的经验、知识、方法对所学的内容进行反思，重视引导学生对相似的概念、公式、定理之间的不同结构与本质区别的反思。只有通过反思，才能深刻理解其内涵和外延，揭示其本质，以免思维产生负迁移。

5.2 阶段性复习教学

通过反思沟通新旧知识的联系，挖掘知识之间的内在联系，促进知识的同化和迁

移，有利于帮助学生建立合理的知识结构和体系。因此，培养学生养成阶段性反思习惯是顺利而简捷完成学习任务的保证。因而复习时应设计一些数学情境，给学生提供一个对基础知识、基本概念重新理解的机会，以进一步掌握基本知识，理解基本概念的本质。

在学完某一单元的数学知识后，不仅让学生自行编制知识网络，使知识更加系统化，而且要引导学生对本单元内容进行反思：这一单元主要研究了哪些问题？重点是什么？用了哪些研究方法？与以前的知识有什么联系？通过反思，使知识系统化；可以通过举反例的方式进行反思训练。恰当的反例对学生自行纠正理解上的错误是有益的，对帮助学生构建认知结构也是有利的；在阶段性复习教学中教师要注意收集和总结学生在这单元学习中发生错误的典型材料，在教学中有针对；

【案例 5.2】等差、等比数列复习教学案（第一课时）

一、基础知识

	等差数列	等比数列
定义		
通项公式		
前项求和公式		
等差（比）中项		
基本性质		

二、练习反馈

- 1.等差中项 $\{a_n\}$ ，首项 $a_1=1$ ，如果 $a_1、a_2、a_5$ 成等比中项，则公差 $d=$ _____
- 2.已知数列 $\{a_n\}$ ，当 $n \geq 2$ 时，有 $a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=2$ 且 $a_1=-4, a_2=-8$ ，则 $a_n=$ _____
- 3.在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_2+a_5+a_8=9, a_3a_5a_7=-21$ 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- 4.等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_4=5, a_8=6$ 则 $a_2a_{10}=$ _____ $a_6=$ _____
- 5.已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和，若 $a_1=a>0$ 且 $S_3=S_{11}$ ，当 $n=$ _____ 时， S_n 有最大值，最大值为_____

三、提炼思想方法

- 1. 函数思想：数列可看作是一类特殊的函数（_____是_____的函数）
- 2. 方程思想：通过解方程组掌握在五个量（_____）中知三求二
- 3. 基本量思想：将数列问题转化为关于基本量（_____）问题
- 4. 类比的方法：等比数列的学习与等差数列进行类比

四、典型例题

例 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

- (1)已知 $a_1=20, a_n=54, S_n=999$ ，求 d 和 n
- (2)已知 $d=2, n=15, a_n=-10$ ，求 a_1 和 S_n

例2 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_3=25$, $a_6=\frac{25}{8}$, 设 $b_n=\log_2 a_n$

- (1) 求证: $\{b_n\}$ 是等差数列;
- (2) 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和 S_n ;
- (3) 求 S_n 的最大值。

例3 等差数列 $\{b_n\}$ 的各项为正, 其前 n 项和为 T_n , 且 $T_3=15$,

又 $a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3$ 成等比数列, 求 T_n

五、课堂练习

1. 已知 1 是 a^2 与 b^2 的等比中项, 又是 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的等差中项, 则 $\frac{a+b}{a^2+b^2} = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 在 3 和 9 之间插入 2 个正数, 使前三个数成等比数列, 后三个数成等差数列, 则这两个数的和等于 $\underline{\hspace{2cm}}$
3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=36, a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=0$, 求当 s_n 取得最大值的 n

六、高考回顾

1. (08 宁夏) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_3+a_8=22, a_6=7$, 则 $a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$
2. (08 上海) 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, $a_1=1$, 若 a_1, a_2, a_5 成等比数列, 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$

七、个人反思与收获:

1. 学到的知识及学习过程中体现的数学思想方法
2. 解题思路的寻找及解题的方法
3. 知识学习、知识应用过程中, 值得关注的问题

学习一个单元的内容, 可以看做是由薄到厚的过程, 而对单元的复习则是由厚到薄的过程, 即将凌乱的知识进行提炼、概括、总结, 以便在头脑中形成思想、观点和方法, 这就是“薄”。这些薄的东西才是数学最本质的东西。

本案例基础知识这一部分, 通过一个简单的表格, 将等差数列与等比数列的知识点一一罗列并进行了对比。体现的是课标要求, 突出了本章的重点, 而练习反馈是对基础知识中抽象知识的具体化, 典型例题、课堂练习、高考回顾这三个部分, 是对基础知识, 基本的数学思想方法进一步的理解和深化, 通过知识的应用和通性通法的运用, 来达到巩固知识, 掌握方法的目的。个人反思与收获其实就是从以下这三方面来进行: (1) 本节课需要理解并掌握的知识; (2) 研究数学的方法以及解题的基本方法、学习中所体现的数学思想; (3) 解题的要领和解题中易错的步骤。象这样每节复习课通过学生自己的反思, 让学生真切感受到有收获有提高, 有成就感, 使学生更有趣地学习数学。

在复习时, 可以采用教学案的方式, 在课前发给学生, 让学生完成基础知识和练习反馈, 有利于学生创造性思维的发展, 也促进学生间的交流, 形成合作意识。不同

层次的学生都可以在教学案中找到适合自己的问题予以解决。教学案中有基础知识的梳理,有重要数学思想方法的体现,有典型的例题、习题。这样能突出基础知识、重点知识、重要方法,并能促使学生去领悟数学思想,使学生通过这样一个反思性学习过程来完善自己的认知结构,提升自身的能力。

5.3 习题教学

解决一道数学问题后,应考虑提醒学生全面分析问题,引导他们多方位、多角度联想,获取多种启发,引出多种方法或技巧来解决问题。如该题本身有什么特点、差异和隐含关系,解题中应用了哪些知识和方法等。通过沟通新旧知识联系,从而认知新知识的内在联系,达到对知识的理解和掌握,开阔解题的视野。除了反思所涉及到的思想方法外,还应对以下内容进行反思。

5.3.1 反思解题的过程

所谓“学之道在于悟”,即是指理解要靠学生自己的领悟才能获得,而领悟又要靠对思维过程的反思才能达到。如果在解题后即认为大功告成而不对解题过程进行反思,那么解题活动只能停留在较低的经验水平,解题能力难有真正提高;如果在解题之后能对自己的思路作出自我评价,对整个解题过程的方方面面进行深入的探讨,那么学生的思维就可能在较高的层面上得到概括,并可能提升学生的理性思维水平,使解题能力得到真正提高。

【例 5.1】例:已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点, P 是椭圆上一点,且 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积

解完后引导学生反思:

- (1)在思考问题过程中,自己是否很好地理解了题意?
- (2)弄清了结论和条件之间的内在联系,是什么方法使得较快地找到了解题的突破口?
- (3)每一步有都据可依吗?
- (4)在解题中曾走过哪能弯路?有什么规律性的经验可以吸取;
- (5)自己的思考与老师或同学的有什么不同?
- (6)解决过程中用到了哪些知识点?

如果将题目中的数字改成字母,会怎么样?

- (1)已知 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ 的左、右焦点, P 是椭圆上一点, 且 $\angle F_1PF_2 = \theta$ 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积。

再将条件改变,能不能做?

- (2)已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ 的左、右焦点, P 是椭圆上一点, 且 $\angle F_1PF_2 = \theta$,

求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积。

在反思过程中学生能得到以下知识点：椭圆的第一定义、三角形面积公式、半角公式、特殊角的三角函数值、余弦定理、两个数和的完全平方公式；椭圆中 a, b, c 的关系式。在反思过程中学生对这些已学过的知识又有了新的认识。

5.3.2 反思出现错误的原因

解题的过程不是一帆风顺的，学生总会在某个部分有些挫折，解完题后教师要指导学生对产生错误的原因追根究底。思考自己对题设的条件之间、条件与目标之间有哪些关系没有发现，关系的转化是否有错误，是什么原因导致的或对题意的理解存在什么样的偏差，造成这种偏差的原因是什么等等。把失败过程和从失败到成功的过程暴露出来，从反思中使学生看到转变思维的方法、方式、方向和策略。

有时也可依据学生解题时出现的“常见病”、“多发病”，或教师在解题时有意出错，把错误暴露给学生，引导学生反思，使之处在思维困惑的情境中，最后在反思中弥补知识上的不足和思维上的缺陷。

如在学习“利用基本不等式求最值中”设置练习：

【例 5.2】已知正数 x, y 满足 $x+2y=1$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值

学生中会得到两种错解：

$$\text{甲：} \because x \in \mathbb{R} \quad \therefore x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$$\text{同理：} 2y + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{2}$$

两式相加得

$$x+2y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{2} + 2$$

$$\because x+2y=1 \quad \therefore \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)_{\min} = 2\sqrt{2} + 1$$

$$\text{乙：} \because x+2y=1 \quad \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = (x+2y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{2xy} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{xy}} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)_{\min} = 4\sqrt{2}$$

反思这两种解法，发现都没有考虑到不等式中等号成立的条件，而造成错误，引导学生重新审视基本不等式求最值的条件，重做此题，得出正确解法：

$$\text{丙：} \because x+2y=1 \quad \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+2y) = 3 + \frac{2y}{x} + \frac{x}{y} \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{当且仅当 } \frac{2y}{x} = \frac{x}{y} \text{ 时取等号}$$

故当 $x=\sqrt{2}-1, y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 有 $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})_{\min}=3+2\sqrt{2}$

进而在学生头脑中产生了利用基本不等式求最值的条件“一正二定三相等”缺一不可的强烈感觉, 也培养了学生思维的严谨性。

5.3.3 反思更好的解题方法

一般说来, 一个数学题不止有一种解法, 而由于我们的经验和思维的局限性, 首先想出的未必是最好的解法, 在得到了一种解法后, 对解题的全过程进行的反思, 即可检查逻辑上有没有漏洞, 也可能会得到不同解题途径, 其中必有最佳方法。

【例 5.3】等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 30, 前 $2m$ 项和为 100, 则它的前 $3m$ 项的和为 ()

A. 130 B. 170 C. 210 D. 260

解法一: 将 $S_m=30, S_{2m}=100$ 代入 $S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$

解得 $d=\frac{40}{m^2}, a_1=\frac{10}{m}+\frac{20}{m^2} \therefore S_{3m}=3ma_1+3m(3m-1)d=210$

这种方法是利用方程思想来解的, 解题之后引导学生想一想有没有更好的方法, 由此会想到下面的方法:

解法二: 设而不求, 整体处理. 根据等差数列性质知: $S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}$ 也成等差数列, 从而有 $2(S_{2m}-S_m)=S_m+S_{3m}-S_{2m}$ 所以 $S_{3m}=3(S_{2m}-S_m)=210$ 当然, 在使用此种方法时要防止学生误认为 S_m, S_{2m}, S_{3m} 成等差数列。

解法三: 利用选择题型的逻辑结构, 采用赋值法. 令 $m=1$, 得 $S_1=30, S_2=100$, 从而 $a_1=30, a_2=70, a_3=70+(70-30)=110$,

$\therefore S_3=a_1+a_2+a_3=210$

解完后引导学生反思: 这道题的解法有多种, 哪种方法更快, 更有效, 哪种方法容易产生错误。

解决问题后, 可以对学生进行一题多解, 多题一解的训练, 或是将问题中特殊条件一般化, 从而推广更为普遍的结论。这样可扩大视野, 深化知识, 提高学生的数学思维能力。改变原题的结构或是问法, 往往可使一题变串题, 有利拓展思路, 提高应变能力, 如命题条件不变或变化是否可变换出新的结论, 例题条件再加强能否引出新的结论, 探索命题背景, 能否对结论特殊化、一般化等。

【案例 5.3】直线与抛物线复习课

(1)问题认知情境创设

复习回顾抛物线的定义, 提出如下引例:

引例: 已知 $P(-1, a)(a \neq 0), T(\frac{1}{2}, 0)$, 抛物线 $y^2=2x$, 判断线段 PT 中垂线

与抛物线的位置关系。

(2)问题探究与变式

问题 1: 已知 $P(-1,a)(a \neq 0), T(1,0)$, 抛物线 $y^2=2x$ 是否存在 a 的值, 使线段 PT 中垂线与抛物线相切。

问题 1 是在引例的基础上进行引申, 突显判断直线与抛物线位置关系的方法与思想本质。

问题 2: 设 $P(-1,a)(a \neq 0), T(1,0)$, 所在直线交抛物线 $y^2=2x$ 于 A, B 两点

①当 $a=2$ 时, 求弦 AB 的长;

②判断命题: “若 $a=2$ 时, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1$ ” 的真假。

问题 2 是让学生进一步体会韦达定理的整体思想在相交问题中的作用, 让学生感悟“消元”中简化计算的方法及与其他二次曲线的区别。

问题 3: 弦 AB 的中点为 M , 作直线 MN 垂直于直线 $x=-1$, 交于点 N , 线段 MN 的中点为 H ,

①判断点 H 是否在抛物线上;

②过 H 与 NO 垂直的直线为 m , 当 a 变化时, 直线 m 是否有可能是抛物线切线?

问题 3 让学生进一步感受“解析法”中用代数方法解决几何问题的思想本质, 通过抛物线中的优美结论, 感悟抛物线中的美。

通过对这一系列问题的设计反思和解决问题后的反思, 学生对直线与圆锥曲线的一般性解法和特殊解法都有了一定的认识。

5.4 评价形式多样化

教育评价是指根据特定的教育目标、运用系统方法收集和分析资料, 对教育现象或教育活动及成效进行价值性的评判, 并为教育决策提供依据的过程。评价的依据是特定的教育目标; 评价的作用是为教育决策提供依据, 并为改进教育服务; 评价的目的不是证明, 而在于改进。^①

评价不仅是教师的单一评价, 更是多元主体的评价, 可以把教师评价、学生自我评价和学生相互评价以及其他社会成员评价结合起来。其中自评是学生对自己数学学习情况的再思考, 互评是学生对他人数学学习情况的再思考。

5.4.1 自我评价

自我评价是学生对自己的学习过程、学习结果进行自我评判与分析的一种自我审视的行为。组织有效的自我评价有助于学生随时进行自我反馈、自我调整、自我完善, 有助于提高自我评价能力。

^①林崇德, 中国中学教学百科全书·教育卷, 沈阳出版社 1990 第 52 页

对自己所学的知识进行反思,自我评价哪些知识点已经掌握了,哪里还有欠缺,学习方法如何。刚开始学生自我评价非常肤浅,如做错一道题,分析错误的原因就是“读题粗心”,经过评讲错题时老师和学生的互动,指导学生找出错误原因并写出来,写得要具体,是概念不清还是用错公式;是没弄懂题意还是计算马虎;是解题方法错误,还是解题技巧错误,或是基础知识掌握不牢而导致的错误。即使是马虎也要检查一下,是看错了题还是没觉察出题中的隐含条件,还是未弄清条件和问题之间的关系;是意思理解错了,还是没弄清题意导致思维偏差或不完整。通过学生自评可以让学生感悟到自己是怎样错的,什么情况下错的,为什么错的,越具体越好。这样让学生的思维活跃起来,考虑问题时也更全面。即使学生的题目做正确了,同样也对自己的做法进行反思。经过一段时间的自评训练,学生的自评内容非常丰富,包括一类题的拓展、单元系统的自我认识及一种思想方法的应用。

学生自我评价体现了学生是评价的主体,是以评价者自身的数学学习为评价对象所进行的价值判断,有助于充分发挥评价对象的主观能动性。在评价中,指导学生对照评价要求,进行反思,逐步由现象到本质地对自己的数学学习行为进行分析与判断。

5.4.2 小组互评

反思性学习也是一种依赖群体支持的个体活动,它不仅要求反思者有一个开放的、负责的、执著的心态,同时也有合作、协调、信任的环境要求。它是一种合作互动的社会实践和交流活动。学生在反思过程中,如有他人指点或与他人合作进行,会加深理解,反思的效果会更好。正如格瑞斯认为:孩子们不了解自己都知道什么,当我们发表自己意见的时候,或者别人从我们这里获取信息的时候,对于听者和说者而言,都是非常具有启发意义的。因此,在教学过程中,教师多创造让学生在反思性学习过程中相互交流、讨论的机会。

采用小组合作学习,营造探求反思的交流氛围。通过讨论、交流,学生可以发现自己数学学习上的优点和缺点,正确地看待自己的进步状况,学生在交流中学会反思,让交流得以升值。在学生互评过程中,教师可不作评判,而是引导学生进行讨论,发表自己的看法,评价他人的说法。学生不仅理清了思路,巩固了知识,而且在辩论中培养了口头表达能力,提高了自己的分析水平,发展了思维能力。

在数学学习中开展自评与互评很有必要,一方面,它培养了学生的反思习惯;另一方面可以让学生重新认识自我,树立信心,不断进取。

第6章 反思性数学学习的实验研究

6.1 实验的目的

本实验试图通过对高中学生实施反思性学习的教学策略,激发并强化学生的反思意识,让学生养成适时反思的习惯,培养学生独立获取知识的能力,交流的能力及问题解决的能力,逐步改进传统的数学教育教学观念。具体有以下四点:

1. 通过实验,提高学生数学意识,优化学生思维品质;
2. 通过实验,培养和提高学生的数学反思能力,提高学习效率;
3. 通过实验,提高学生参与数学学习的主动性;
4. 通过实验,提高学生的数学成绩

6.2 实验的基本过程

6.2.1 实验设计

被试全部取自南京第六中学笔者任教的高二(4)、(8)班(两班人数分别为55人,43人)。(4)班为实验班,(8)班为对照班。在相同教学时间的前提下,分别对实验班和对照班采取不同的教学方法,(4)班进行反思性数学学习,(8)班正常教学。主要采取以课堂教学为主渠道的方式进行,比较班级整体水平差异。

6.2.2 变量的控制

相同的教材、相同的课时、相同的练习题、相同的测试方式。

6.2.3 前测

把高二第二学期开学统测考试成绩作为前测。

6.2.4 后测

把高三第一学期期中统测成绩作为后测。

6.2.5 实验结果分析

在实验过程中,前后共进行了8次统考,对测试后的成绩作差异显著性检验,前三次成绩无显著差异,后五次实验班均强于对照班,且呈渐强趋势,高三第一学期期中统考成绩差距最大,现对实验的前测成绩和高三上学期期中统考成绩对比分析。

由表6.1数据信息表明,实验班与对照班比较,前测成绩差异不显著($t=0.73, P>0.05$)而后测成绩有显著差异($t=4.20, P<0.01$),实验班的成绩明显高于对照班,说明了教学实验对提高学生的数学成绩方面是明显的。

表 6.1

项目 成绩	实验班		对照班		显著性检验	
	均值	标准差	均值	标准差	t	P
前测	76.1	10.2	75.8	11.5	0.73	P>0.05
后测	85.7	7.9	81.2	9.8	4.20	P<0.01

在实验中,对实验班进行定期批改反思记录本和查看错题本,强化学生通过对知识点的归纳,典型例题的巩固整理来形成自己的数学知识网络。在实验班还进行特殊的考试分析:每次考试后有一个对知识点对错统计的表格(见附录),表格中详细列出了高中阶段的每一个知识点。一次考试后,知识点的对错统计下来一目了然,学生很清楚自己这一阶段存在的问题和下一阶段要达到的目标。在执行中,学生会有两次得分,一次是原始分,一次是订正并在试卷上写好反思后教师评的分数。两次的均分就算一次考试成绩。一般情况下学生的第二个成绩都高于原始分,所以学生对待试卷的订正和反思都很认真。这也起到一个促使学生积极去反思的作用。

6.3 实验的不足和进一步研究展望

本实验为课堂教学改革的探索性实验,存在许多不足之处,如教学理论不够,实验的设计不够全面,实验的范围较窄,实验的时间也不够长,有待于在今后的工作去弥补和完善,使这项研究继续地深入下去。

6.4 结论和启示

笔者所在的学校是一所三星级学校,学生的学习基础薄弱,学习方式存在不少问题,导致学生学习兴趣不高,尤其是对理科的学习,以前很少有学生问题,在笔者开展了反思性数学学习特别是合作小组讨论、互评后,学生的学习积极性得到了很大的提高。学生课后在班级交流各自的反思记录本和错题集,会就同一道错题指出自己与别人错误不同的地方,他们的学习得到了他人的鼓励和帮助,他们会发现有人会有与自己有同一类想法,也会发现自己想到了别人没想到的东西,他们的记录本和错题本会得到教师和家长的好评,他们品尝到了反思后的成果。学生体会到学习的过程是一个不断对自己的学习目标、学习内容、学习条件和学习方法进行反思,学习中处处中反思。一学期的实验,来办公室问题的人多了,课堂上大声回答问题的多了,敢于提出不同见解的也渐渐多了,小组互评的气氛更浓了。

通过实验得出以下几条结论:第一,通过反思性数学学习,学生数学学习兴趣得到了提高;第二,通过反思性数学学习,学生的数学学习活动的主体意识和探究问题的能力得到了提高;第三,通过反思性数学学习,学生的数学成绩有较明显的提高;第四,加强反思性数学学习的教学研究,是教会学生由“学会”到“会学”的突破口;

第五,反思性数学学习的教学要以发挥学生的主体性为前提,促使学生由不会反思到学会反思,由被动反思到主动反思再到自觉反思。

实践表明:高中数学教学应给学生创造反思的机会,积极引导学生反思自己的学习活动并逐渐使这种反思成为一种习惯,从而提高学习效率,使学生学会学习,验证了反思性数学学习在高中数学教学中的有效性。

结 束 语

本课题对反思性数学学习进行了初步的探索,阐述了数学教育中反思性数学学习的地位和作用,并进行了实践和实验研究。其中还有许多值得深入探讨的问题。如教学策略在课堂教学中如何根据具体的教学内容灵活运用;形成学生反思性学习习惯和培养反思能力的途径与方法如何优化;反思性学习的教学策略如何分层次进行等问题。特别在培养学生对自己学习行为方式的反思,如学习习惯、学习方法、学习理念等方面的反思,找出有利于自己学会学习的优点和不利于学习的缺点,达到会学习的目的,仍是急待解决的问题。

要培养学生的反思能力,教师首先必须养成反思的习惯,应该不断地对自己的教学活动进行反思,不断地解剖自己,不断地责问自己,不断地搜寻隐藏在自身教学活动后面的观念和思想,不断地对教学行为做出自我评价,并在批评的基础上进行解构和重建。

由于本人才疏学浅,无力对反思性数学学习作进一步深入的研究,而反思性数学学习的内容极其广泛,本文未能对其作更为全面的探讨,不足和错漏之处,恳请老师们指正。

附录一

表一：高中生反思性数学学习习惯调查问卷

亲爱的同学：

本问卷旨在了解你的一些基本的学习情况，以便于我们在研究之后能够帮助你更好的改进学习。请仔细阅读每个题目，如实地按照你们的实际情况在横线上打勾，(1 完全符合，2 基本符合，3 基本不符合，4 完全不符合。

1. 解完一道题后，我会问自己是否还有更好的方法。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

2. 每听完一节数学课，都要回顾一下，看是否真得听懂了。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

3. 常与老师或同学交流学习体会和经验，并学习他们成功经验。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

4. 在解题过程中，常自觉去总结解题规律和解题的思想方法。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

5. 常常把容易混淆的数学概念放在一起对比，加深理解。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

6. 交作业、交试卷前，会仔细检查。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

7. 常思考学习中取得的进步，并思考如何做得更好。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

8. 学完一个知识点后，会主动找一些练习来做，检查自己是否真正掌握了。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

9. 对做错的题目会及时查找原因，并从中吸取教训

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

10. 当用某种方法解决不了问题时，我会设法寻找新的方法。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

11. 特别注意自己经常做错的题目，并把它记在笔记本上。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

12. 在学习新知识时，会把它和以前所学的知识联系起来。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

13. 我经常回顾和总结课堂上的重点内容。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

14. 解完一题后回头看看，看思考是否全面，条件用完了没有、还有没有更好的办法。

1_____ 2_____ 3_____ 4_____

附录二

表二：数学考点跟踪记录表(文科)

章节		考试级别	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
内 容		要 求										
		A B C										
1. 集合	集合及其表示	√										
	子集	√										
	交集、并集、补集	√										
2. 函数概念与基本初等函数 I	函数的概念	√										
	函数的基本性质	√										
	指数与对数	√										
	指数函数的图象与性质	√										
	对数函数的图象与性质	√										
	幂函数	√										
	函数与方程	√										
	函数模型及其应用	√										
3. 基本初等函数 II (三角函数)、三角恒等变换	三角函数的概念	√										
	同角三角函数的基本关系式	√										
	正弦函数、余弦函数的诱导公式	√										
	正弦函数、余弦函数、正切函数的图象与性质	√										
	函数 $y=Asin(\omega x+\varphi)$ 的图象与性质	√										
	两角和(差)的正弦、余弦及正切	√										
	二倍角的正弦、余弦及正切	√										
	积化和差、和差化积、半角公式	√										
	正弦定理、余弦定理及其应用	√										
4. 解三角形	平面向量的概念	√										
	平面向量的加法、减法及数乘运算	√										
	平面向量的坐标表示	√										
	平面向量的数量积	√										
	平面向量的平行与垂直	√										
	平面向量的应用	√										
5. 平面向量	数列的概念	√										
	等差数列	√										
	等比数列	√										
6. 数列	基本不等式	√										
	一元二次不等式	√										
	线性规划	√										
7. 不等式	复数的概念	√										
	复数的四则运算	√										
	复数的几何意义	√										
8. 复数	导数的概念	√										
	导数的几何意义	√										
	导数的运算	√										
	利用导数研究函数的单调性与极值	√										
	导数在实际问题中的应用	√										
9. 导数及其应用	算法的概念	√										
	流程图	√										
	基本算法语句	√										
10. 算法初步												

附录三

南京六中 2008/2009 学年度第二学期高二年级数学摸底测试卷

2009.1

本试卷分第 I 卷和第 II 卷两部分, 共 160 分, 考试时间 120 分钟。

第 I 卷(填空题 共 70 分)

一、填空题(本大题共 14 小题, 每小题 5 分, 共 70 分, 请将答案填写在答题卷相应的位置上):

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x \mid \frac{1}{2} < 2^x < 8, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $M \cap N =$ ▲.2. 若 $(a^2 - 1) + (a^2 + 3a + 2) \cdot i$ 是纯虚数, 则实数 a 的值是 ▲.

3. 某高级中学共有学生 3000 名, 各年级男、女生人数如下表: 已知在全校学生中随机抽取 1 名, 抽到高二年级女生的概率是 0.17. 现对各年级用分层抽样的方法在全校抽取 300 名学生, 则应在高三年级抽取 ▲ 名学生.

	高一年级	高二年级	高三年级
女生	523	x	y
男生	487	490	z

4. 曲线 $y = x^3 + x + 1$ 在点 $(1, 3)$ 处的切线方程是 ▲.5. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (2, x)$, 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel (4\vec{b} - 2\vec{a})$, 则实数 $x =$ ▲.

6. 设椭圆 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ ($m > n > 0$) 的右焦点与抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点相同, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 则此椭圆的方程为 ▲.

7. 已知集合 $A = \{x \mid -1 < x < 5\}$, $B = \{x \mid \frac{x-2}{4-x} > 0\}$, 在集合 A 中任取一个元素 x , 则事件“ $x \in A \cap B$ ”的概率是 ▲.

8. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x(x+1)$. 若 $f(a) = -2$, 则实数 $a =$ ▲.9. 已知一圆柱的侧面展开图是一长和宽分别为 3π 和 π 的矩形, 则该圆柱的体积是 ▲.10. 函数 $f(x)$ 由右表定义: 若 $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} = f(a_n), n \in \mathbb{N}^*$,则 a_{2010} 的值为 ▲.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	4	5	2	1

11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是双曲线上一点, 且 $PF_1 \perp PF_2$, $|PF_1| \cdot |PF_2| = 4ab$, 则双曲线的离心率是 ▲.

12. 下列五个命题:

① 函数 $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ 的最小正周期是 π ;② 终边在 y 轴上的角的集合是 $\left\{\alpha \mid \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$;③ 在同一坐标系中, 函数 $y = \sin x$ 的图象和函数 $y = x$ 的图象有三个公共点;④ 把函数 $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到 $y = 3\sin 2x$ 的图象.

⑤函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 在 $[0, \pi]$ 上是减函数.

其中, 真命题的编号是 ▲ (写出所有真命题的编号)

13. 若关于 x, y 的不等式组 $\begin{cases} x - y \leq 1 \\ 2x + y \geq 1 \\ ax + y \leq 2 \end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形, 则 a 的取值 ▲.

14. 考查下列一组不等式:

$$2^3 + 5^3 > 2^2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2, \quad 2^4 + 5^4 > 2^3 \cdot 5 + 2 \cdot 5^3, \quad 2^5 + 5^5 > 2^3 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 5^3, \dots$$

将上述不等式在左右两端仍为两项和的情况下加以推广, 使以上的不等式成为推广不等式的特例, 则推广的不等式可以是 ▲.

第 II 卷 (共 90 分)

二、解答题 (本大题共 6 小题, 共计 90 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

15. (本题满分 14 分)

$\triangle ABC$ 中, 角 A 的对边长等于 2, 向量 $\vec{m} = \left(2, 2\cos^2 \frac{B+C}{2} - 1\right)$, 向量 $\vec{n} = \left(\sin \frac{A}{2}, -1\right)$.

(1) 求 $\vec{m} \cdot \vec{n}$ 取得最大值时的角 A 的大小;

(2) 在 (1) 的条件下, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

16. (本题满分 14 分)

已知直三棱柱 $ADF - BCE$ 中, $AD = DF = DC = a$, $\angle ADF = 90^\circ$, 其中 M, N 分别是 AB, AC 的中点, G 是 DF 上的一动点.

(1) 求证: $GN \perp AC$;

(2) 当 $FG = GD$ 时, 在棱 AD 上确定一点 P , 使得 $GP \parallel$ 平面 FMC , 并给出证明.

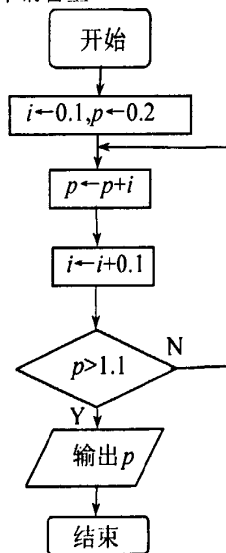
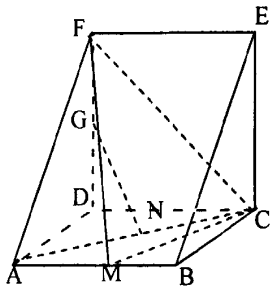
17. (本题满分 14 分)

某旅游商品生产企业, 2008 年某商品生产的投入成本为 1 元/件, 出厂价为流程图的输出结果 p 元/件, 年销售量为 10 000 件. 此企业为适应市场需求, 计划提高产品档次, 适度增加投入成本. 若每件投入成本增加的比例为 x ($0 < x < 1$), 则出厂价相应提高的比例为 $0.75x$, 同时预计销售量增加的比例为 $0.8x$. 已知年利润 = (出厂价 - 投入成本) $\times$ 年销售量.

(1) 写出 2009 年预计的年利润 y 与投入成本增加的比例 x 的关系式;

(2) 为使 2009 年的年利润比 2008 年有所增加,

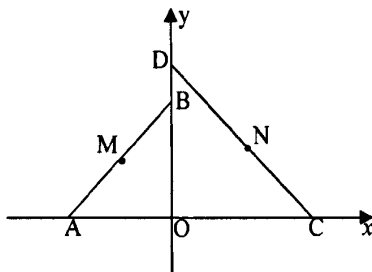
问: 投入成本增加的比例 x 应在什么范围内?



18. (本题满分 16 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 为两等腰直角三角形, $A(-2,0), C(a,0)(a>0)$. 设 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 的外接圆圆心分别为 M, N .

- (1) 若 $\odot M$ 与直线 CD 相切, 求直线 CD 的方程;
- (2) 若直线 AB 截 $\odot N$ 所得弦长为 4, 求 $\odot N$ 的标准方程;
- (3) 是否存在这样的 $\odot N$, 使得 $\odot N$ 上有且只有三个点到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$, 若存在, 求此时 $\odot N$ 的标准方程; 若不存在, 说明理由.



19. (本题满分 16 分)

已知函数 $f(x)=x^2+alnx$

- (1) 当 $a=-2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;
- (2) 若 $g(x)=f(x)+\frac{2}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上是单调增函数, 求实数 a 的取值范围.

20. (本题满分 16 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_2=2$, 且 $a_{n+1}=(1+q)a_n-qa_{n-1} (n\geq 2, q\neq 0)$.

- (I) 设 $b_n=a_{n+1}-a_n (n\in N^*)$, 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列;
- (II) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (III) 若 a_3 是 a_6 与 a_9 的等差中项, 求 q 的值, 并证明: 对任意的 $n\in N^*$, a_n 是 a_{n+3} 与 a_{n+6} 的等差中项.

附录四

南京六中 2009/2010 学年度第一学期高三数学期中测试卷

2009.11

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷两部分，共 160 分，考试时间 120 分钟。

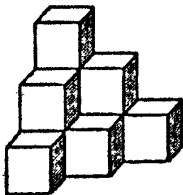
注意事项：

答题前，考生务必将自己的姓名、学校、班级、学号写在答卷纸上对应题目的答案空格内。考试结束后，交回答卷纸。

第 I 卷（填空题 共 70 分）

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分，请将答案填写在答题卷相应的位置上）

1. 设集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$, 则 $(A \cap B) \cup C = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 1$, $a_5 = 2$, 则 $a_9 = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设函数 $f(x) = xe^x$, 则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, 4)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$, 若向量 $\mathbf{b} \perp (m\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 命题 $P: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x > 2$. 则命题 P 的否定为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 设 $a \in \mathbb{R}$, 且复数 $\frac{a}{1+i} + \frac{1+i}{2}$ 是纯虚数, 则 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 9n$, 则其通项 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. 函数 $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x-1} + \log_2 x$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
9. 椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的一个焦点为 F_1 , 点 P 在椭圆上. 如果线段 PF_1 的中点 M 在 y 轴上, 那么点 M 的纵坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
10. 若实数 x, y 满足条件:
$$\begin{cases} 2x + y - 6 \leq 0 \\ x - y + 2 \leq 0 \\ y \leq 4 \end{cases}$$
, 则 $x + y$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
11. 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$, 且 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, 则 $\cos 2\theta$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
12. 将棱长相等的正方体按图所示的形状摆放, 从上往下依次为第 1 层, 第 2 层, 第 3 层, $\dots$, 则第 10 层正方体的个数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



13. 物体在常温下的温度变化可以用牛顿冷却规律来描述: 设物体的初始温度是 T_0 , 经过一定时间 t 后的温度是 T , 则 $T - T_a = (T_0 - T_a) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$, 其中 T_a 称为环境温度, h 称为半衰期. 现有一杯用 88°C 热水冲的速溶咖啡, 放在 24°C 的房间中, 如果咖啡降到 40°C 需要 20min, 那么此杯咖啡从 40°C 降温到 32°C 时, 还需要 $\underline{\hspace{2cm}}$ min.

14. 函数 $f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象为 C ，如下结论中正确的是_____（写出所有正确结论的编号）。

① 图象 C 关于直线 $x = \frac{11}{12}\pi$ 对称；

② 图象 C 关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 对称；

③ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$ 内是增函数；

④ 由 $y = 3\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度可以得到图象 C

二、解答题（满分 90 分）

15. （本题 14 分）在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边，

$\vec{m} = (2b - c, \cos C)$, $\vec{n} = (a, \cos A)$ ，且 $\vec{m} \parallel \vec{n}$ 。（1）求角 A 的大小；（2）求

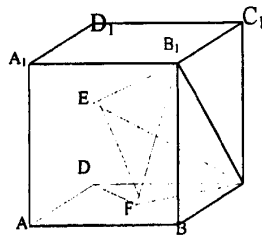
$y = 2\sin^2 B + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2B\right)$ 的值域。

16. （本题 14 分）如图所示，在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为 DD_1, DB 的中点。

（I）求证： $EF \parallel$ 平面 ABC_1D_1 ；

（II）求证： $EF \perp B_1C$ ；

（III）求三棱锥 V_{B_1-EFC} 的体积。



17. （本题 14 分）北京奥运会纪念章某特许专营店销售纪

念章，

每枚进价为 5 元，同时每销售一枚这种纪念章还需向北京奥组委交特许经营管理费 2 元，预计这种纪念章以每枚 20 元的价格销售时该店一年可销售 2000 枚，经过市场调研发现每枚纪念章的销售价格在每枚 20 元的基础上每减少一元则增加销售 400 枚，而每增加一元则减少销售 100 枚，现设每枚纪念章的销售价格为 x 元。

（I）写出该特许专营店一年内销售这种纪念章所获得的利润 y （元）与每枚纪念章的销售价格 x 的函数关系式（并写出这个函数的定义域）；

（II）当每枚纪念销售价格 x 为多少元时，该特许专营店一年内利润 y （元）最大，并求出这个最大值。

18. （本题 16 分）设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $b_n = 2 - 2S_n$ ；数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_5 = 14$ ， $a_7 = 20$ 。

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 若 $c_n = a_n \cdot b_n, n = 1, 2, 3, \dots$, T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

求证: $T_n < \frac{7}{2}$.

19. (本题 16 分) 抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线的方程为 $x = -2$, 该抛物线上的每个点到准线 $x = -2$ 的距离都与到定点 N 的距离相等, 圆 N 是以 N 为圆心, 同时与直线 $l_1: y = x$ 和 $l_2: y = -x$ 相切的圆,

(I) 求定点 N 的坐标;

(II) 是否存在一条直线 l 同时满足下列条件:

① l 分别与直线 l_1 和 l_2 交于 A, B 两点, 且 AB 中点为 $E(4, 1)$;

② l 被圆 N 截得的弦长为 2.

20. (本题 16 分) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

(1) 若函数 $y = f(x)$ 在 $x = 2$ 处有极值 -6, 求 $y = f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 若 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 对 $x \in [-1, 1]$ 都有 $f'(x) \leq 2$, 求 $\frac{b}{a-1}$ 的范围

参考文献

- [1] 洛克著 关文运译 《人类理解论》[M]商务印书馆 1959 年版
- [2] 全日制义务教育数学课程标准(实验)[M]北京师范大学教育出版社 2001
- [3] 教育部 普通高中数学课程标准（实验）[M]人民教育出版社 2003
- [4] 张乃达 数学思维教育学[M] 江苏教育出版社 1990
- [5] 林崇德 中国中学教学百科全书.教育卷[M]沈阳出版社 1990
- [6] 曹才翰 中学数学教学概论[M] 北京师范大学出版社 1990
- [7] 马 复 中学数学思想方法初论[M] 安徽教育出版社 1993
- [8] 郑毓信 问题解决与数学教育[M] 江苏教育出版社 1994
- [9] 张大钧 教育心理学[M] 人民教育出版社 1999
- [10] 郑毓信 数学教育的现代发展[M] 江苏教育出版社 1999
- [11] 陈时见 课堂学习论[M] 广西师范大学出版社 2001
- [12] 郑毓信 数学教育：从理论到实践[M] 上海教育出版社 2001
- [13] 波利亚 怎样解题[M] 上海科技教育出版社 2002
- [14] 涂荣豹 数学教学认识论[M] 南京师范大学出版社 2003
- [15] 熊川武 反思性教学[M] 上海华东师范大学出版社 2004
- [16] 严士健 普通高中数学课程标准（实验）解读[M] 江苏教育出版社 2004
- [17] 喻 平 走进高中新课改：数学教师必读[M]南京师范大学出版社 2005
- [18] 涂荣豹 王光明 宁连华 新编数学教学论[M] 华东师范大学出版社 2006
- [19] 宁连华 数学探究学习论[M] 高等教育出版社 2008
- [20] 陈永明 陈永明评议数学课[M]上海科技教育出版社 2008
- [21] 黄克剑 洛克的“反省”和斯宾诺莎的“反思”[J]哲学研究 1986(3)
- [22] 涂荣豹 试论反思性数学学习[J] 数学教育学报 2000(4)
- [23] 鲁锋武 在数学教学中要引导学生反思[J] 数学通报 2001(5)
- [24] 涂荣豹 数学解题学习中的元认知[J] 数学教育学报 2002（4）
- [25] 郑菊萍 反思性学习简论[J]上海教研 2002(8)
- [26] 赵晓雄 在数学教学中培养学生反思的习惯[J] 中学数学 2002（4）
- [27] 姚存江 浅析解题后反思[J] 中学数学月刊 2002.11
- [28] 周根龙 试论数学教学反思[J]，数学教育学报 2003(2)
- [29] 林 婷 培养学生反思能力的教学实践[J] 数学通报 2003(7)
- [30] 管宏斌 数学教学中反思能力的培养方略[J] 数学教学通讯 2004(5)
- [31] 王家聪 新课程理念的实施需要学生反思能力的培养[J]数学教学通讯 2004（2）
- [32] 徐永忠 运用元认知理论培养学生数学反思能力[J]，中学数学研究 2004.10

- [33]蒋巧君 数学日记：数学学习的新平台[J]教育科学研究 2005.4
- [34]吴 国 数学教学中如何培养学生的反思能力[J]教学月刊小学版 2008(2)
- [35]应利微 新课标下数学教学中培养学生反思能力的策略[J]中学校长 08(3)
- [36]杜 军 数学教学中学生“反思”能力的培养[J]成才之路 2008(22)
- [37]张晓拔 数学教学要重视培养学生的反思习惯[J] 数学教育学报 2008(6)
- [38]邓 勤 运用新课程的理念提高教学复习课的课堂效率[J]数学通报 2008.5
- [39]李怀忠 浅谈高三复习教学中的例题设计[J]中学数学教与学 2009.8
- [40]汪志强、毛光寿 数学试卷分析教学中的“说题”[J]中学数学教与学 2009(10)

致谢

在我论文的准备与写作过程中，十分感谢我的指导老师涂荣豹教授，尽管涂老师工作非常繁忙，但无论是从开题、撰写、修改，他都给予我最大的支持和帮助。涂老师严谨的治学态度、务实的工作作风、精深学术造诣和耐心细致的指导精神是我人生路上的典范。在此还要特别感谢南师大数学系的各位导师，他们给了我许多教诲和帮助。感谢我的家人和同事，在我学习期间给予的理解与支持。同时感谢那些参考文献的作者，是他们的文章给了我启发，才促使我完成此论文。