摘 要

本文主要研究拓扑度方法在时滞微分方程周期解问题中的应用. 全文共分三章.

第一章首先利用 $L-k-$ 集压缩算子的重合度方法研究了非线性算子方程的可解性, 然后利用获得的算子方程解的存在性定理研究了一类中立型共振泛函微分方程周期解的存在性问题.

第二章应用 Mawhin 重合度延拓定理给出了一种可将先验估计与构造同伦变换结合实施的方法, 并利用该方法研究了具投放的时滞 Lotka-Volterra 型竞争扩散系统与捕食者 - 食饵扩散系统正周期解的存在性与全局吸引性.

第三章首先利用 $k-$ 集压缩映射的 Nussbaum 度方法研究了具有一般形式的中立型时滞微分方程周期解的存在性问题, 然后利用所得结果研究了具投放的中立型时滞竞争扩散系统正周期解的存在性问题.

关键词: $L-k-$ 集压缩映射, $k-$ 集压缩映射, Nussbaum 度, Leray-Schauder 度, Mawhin 重合度, 算子方程, 可解性, 共振, 时滞, 种群模型, 周期解.

Abstract

This research report is mainly concerned with topological degree methods in periodic solution problems of delay differential equations. The whole paper contains three chapters.

Chapter 1 discusses the solvability of nonlinear operator equations. Existence results are obtained and then applied to periodic solution problems of a class of neutral delay differential equations at resonance.

Chapter 2 introduces a unified method of evaluating the priori-bounds on solutions and constructing homotopy transformations and investigates the existence and global attractivity of positive periodic solutions for delay Lotka-Volterra competition patch systems and delay predator-prey patch systems with stocking .

Chapter 3 devotes to investigate the existence of periodic solutions of neutral delay equations by means of Nussbaum degree theory. A set of criteria are obtained for the existence of positive periodic solutions of a neutral delay competition model with diffusion and stock.

Key Words: $L-k-$ set contraction mapping; $k-$set contraction mapping; Nussbaum degree; Leray-Schauder degree; Mawhin coincidence degree; operator equation; solvability; resonance; delay; population model; periodic solution.

序 言

对在共振情形下具有小参数的一阶非线性常微分方程组边值问题的研究已有许多结果,参见文献 [31,58] 及所附参考文献. 对于不含小参数,非线性项满足 Landesman-Lazer 型条件的方程也有许多结果 (见文献 [24]). 对于方程中线性部分的核维数大于 1 的情形, 文献 [6,41,52-55,59] 获得了一系列结果, 但他们研究的方程均为常微分方程或非中立型泛函微分方程. 最近, 文 [51] 利用 Mawhin 重合度理论研究了一类共振 $n-$ 维中立型微分系统周期解的存在性问题, 但该文仅考虑了中立项是线性的情形, 且其方法也不适用于中立项是非线性的情形. 据我们所知, 对中立项是非线性的共振泛函微分方程周期解的存在性这一重要而又困难的问题尚未见有结果发表.

本文第一章首先利用 $L-k-$ 集压缩算子的重合度理论讨论了一类非线性算子方程的可解性, 然后利用获得的算子方程解的存在性定理研究了一类中立型共振泛函微分方程周期解的存在性问题.

利用拓扑度方法研究种群模型的周期解问题, 最早的工作见于文 [1], 但该文仅考虑了无时滞情形. 1996 年, 文 [43] 将 Mawhin 重合度理论中的如下结果应用于时滞种群模型周期解问题的研究:

Mawhin **延拓定理** A[25] 假定 L 是指标为 0 的 Fredholm 算子, N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 $L-$ 紧的. 如果下列条件成立:

1) $Lx \neq \lambda Nx, \forall\lambda \in (0,1), x \in \partial\Omega$;

2) $QNx \neq 0, \forall x \in KerL \cap \partial\Omega$;

3) Brouwer 度 $\deg_B(JQN, \Omega \cap KerL, 0) \neq 0$.

则算子方程 $Lx = Nx$ 在 $domL \cap \bar{\Omega}$ 中至少存在一个解.

迄今为止, 已有许多论文利用这种方法研究时滞种群模型的周期解问题 (例如: [12-19,43-48,64,70,74,75,77]). 利用该方法的关键在于对解进行先验估计及计算出相关映射的 Brouwer 度. 在以往的有关研究中, 二者是分别实施的, 即先进行先验估计, 然后通过构造同伦变换或直接计算出 Brouwer 度. 这些论文大都未考虑到进行先验估计与构造同伦变换之间存在的可能联系, 有些论文为了计算出相关映射的 Brouwer 度而不得不增加相关的代数方程组有唯一解或有限个解的假设条件 (如文 [16,18,44,47,70]). 文 [74,75] 虽然注意到了二者间存在某种联系, 但二者仍是分别实施的.

本文第二章应用 Mawhin 重合度理论中的如下结果给出了一种可将先验估计与构造同伦变换结合实施的方法, 并利用该方法研究了具投放的时滞 Lotka-Volterra 型竞争扩散系统与时滞捕食者 - 食饵扩散系统正周期解的存在性与全局吸引性.

Mawhin **延拓定理** B[25] 假定 L 是指标为 0 的 Fredholm 算子, N 在 $\bar{\Omega} \times [0,1]$ 上是 $L-$ 紧的. 如果下列条件成立:

1) $Lx \neq \lambda N(x,\lambda), \forall\lambda \in (0,1), x \in \partial\Omega$;

2) $QN(x,0) \neq 0, \forall x \in KerL \cap \partial\Omega$;

3) Brouwer 度 $\deg_B(JQN(\cdot,0), \Omega \cap KerL, 0) \neq 0$.

则算子方程 $Lx = N(x,1)$ 在 $domL \cap \bar{\Omega}$ 中至少存在一个解.

在研究时滞种群模型的周期解问题时，定义 $N(x,\lambda)$ 时合适地确定 λ 的位置将使 Mawhin 延拓定理 B 中条件 2), 3) 的验证显而易见. 基本方法是除模型中的种内竞争项外，其余项均可考虑在前面加上 λ. 应用这种处理方法，文 [16,18,44,47,70] 中代数方程组有唯一解或有限个解的假设条件均可去掉. 此方法对研究离散形式的时滞种群模型及具有脉冲效应的时滞种群模型的周期解问题也同样适用.

对于中立型时滞种群模型的周期解问题，由于 N 的定义空间是 $C^1(R,R)$ 空间的子空间，因而要验证 $L-$ 紧的定义中 " $K_P(I-Q)N : \bar{\Omega} \times [0,1] \to X$ 是紧的" 的条件是极其困难的，因此，在此情形下，很难直接将 Mawhin 延拓定理应用于中立型时滞模型周期解问题的研究. 对于中立型单种群时滞模型，可利用文 [60] 给出的一个 $k-$ 集压缩延拓定理进行研究，参看文 [20], 但该方法不适用于中立型多种群时滞模型.

本文第三章首先利用 $k-$ 集压缩映射的 Nussbaum 度方法研究了具有一般形式的中立型时滞微分方程周期解的存在性问题，然后利用所得结果研究了一类中立型时滞竞争扩散系统正周期解的存在性问题.

第一章　$L-k-$ 集压缩算子的重合度理论与时滞微分方程的周期解问题

§1.1　引言

对在共振情形下具有小参数的一阶非线性常微分方程组边值问题的研究已有许多结果,参见文献 [31,58] 及所附参考文献. 对于不含小参数,非线性项满足 Landesman-Lazer 型条件的方程也有许多结果 (见文献 [24]). 对于方程中线性部分的核维数大于 1 的情形，文献 [6,41,52-55,59] 获得了一系列结果，但他们研究的方程均为常微分方程或非中立型泛函微分方程. 最近，文 [51] 利用 Mawhin 重合度理论研究了一类共振 $n-$ 维中立型微分系统周期解的存在性问题，但该文仅考虑了中立项是线性的情形, 且其方法也不适用于中立项是非线性的情形. 据我们所知, 对中立项是非线性的共振泛函微分方程周期解的存在性这一重要而又困难的问题尚未见有结果发表.

本章首先将利用 $L-k-$ 集压缩算子的重合度理论讨论一类非线性算子方程的可解性，然后利用获得的算子方程解的存在性定理研究中立型共振泛函微分方程周期解的存在性问题.

§1.2　非线性算子方程解的存在性

先简单介绍一下 $L-k-$ 集压缩算子的重合度理论的基本知识. 进一步的讨论可参看文献 [25].

设 Z 是一个赋范线性空间. 对 Z 中的有界子集 A, 其 Kuratowski 非紧性测度 $\Gamma_Z(A)$ 定义如下：

$\Gamma_Z(A)=\inf\{\delta>0:$ 存在有限个子集 $A_i\subset A, A=\bigcup_i A_i, diam(A_i)\le\delta\}$,
这里 diam (A_i) 表示集合 A_i 的直径.

设 X,Z 分别为赋予范数 $\|\cdot\|_X$ 与 $\|\cdot\|_Z$ 的赋范线性空间，Ω 是 X 中的有界开子集. 一个连续有界算子 $N:\bar\Omega\to Z$ 称为一个 $k-$ 集压缩，若对 $\bar\Omega$ 中的任一有界子集 A，均有

$$\Gamma_Z(N(A))\le k\Gamma_X(A).$$

设 $L: domL\subset X\to Z$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子，即 ImL 为闭集且有 $dimKerL=codimImL<+\infty$. 由此可知,存在连续投影算子 $P:X\to X$ 和 $Q:Z\to Z$ 使得 $ImP=KerL, ImL=KerQ=Im(I-Q)$. 定义 $L_P: domL\cap KerP\to ImL$ 为 L 关于 $domL\cap KerP$ 的限制 $L|_{domL\cap KerP}$, 则 L_P 可逆, 记其逆为 $K_P: ImL\to domL\cap KerP$. 设 $J: ImQ\to KerL$ 是同构映射.

假设 Ω 是 X 中的有界开集，$N:\bar\Omega\to Z$ 是一个连续算子. 如果 $QN:\bar\Omega\to Z$ 连续且 $QN(\bar\Omega)$ 有界，$K_P(I-Q)N:\bar\Omega\to X$ 是一个 $k-$ 集压缩，则称 N 是一个 $L-k-$

集压缩.

关于算子方程

$$Lx = Nx \tag{1.2.1}$$

的可解性有如下重要结果 (参看文献 [25]):

引理 1.2.1 假定 L 是指标为 0 的 Fredholm 算子, N 在 $\bar{\Omega}$ 上是一个 $L-k-$ 集压缩, $k<1$. 如果下列条件成立:

1) $Lx \neq \lambda Nx, \forall \lambda \in (0,1), x \in \partial\Omega$;

2) $QNx \neq 0, \forall x \in KerL \cap \partial\Omega$;

3) Brouwer 度 $\deg_B(JQN, \Omega \cap KerL, 0) \neq 0$.

则算子方程 $Lx = Nx$ 在 $domL \cap \bar{\Omega}$ 中至少存在一个解.

考虑算子方程

$$Lx = N_1x + N_2x. \tag{1.2.2}$$

先作如下假设:

(H_1) $N_i: X \to Z$ $(i=1,2)$ 连续, 且 N_1+N_2 在 X 中任意有界闭集上是 $L-k-$ 集压缩, $k<1$;

(H_2) 存在常数 $\alpha_i \in [0,1)$, $\alpha_1+\alpha_2<1$, $\beta_i>0$ $(i=1,2)$ 使得

$$\|K_P(I-Q)N_ix\|_X \le \alpha_i\|x\|_X + \beta_i \ (i=1,2); \forall x \in X;$$

(H_3) 存在常数 $\eta \ge 0, \xi > 0$, 使得

$$\|JQN_2x\|_X \le \eta\|x\|_X + \xi, \forall x \in X.$$

用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $KerL$ 上的内积.

定理 1.2.1 假定 (H_1) 和 (H_2) 成立, 且存在常数 $M_0>0$, 使得下列条件成立:

(H_4) 对任意 $x \in \{x \in X : \|Px\|_X = M_0, \|(I-P)x\|_X < M\}$, 均有

$$\|JQN_1x\|_X > \|JQN_2x\|_X,\ \langle JQN_1Px, Px\rangle \ge 0,$$

或

$$\|JQN_1x\|_X > \|JQN_2x\|_X,\ \langle JQN_1Px, Px\rangle \le 0,$$

其中 $M = \frac{M_0(\alpha_1+\alpha_2)}{1-\alpha_1-\alpha_2} + \frac{\beta_1+\beta_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}$, 则方程 (1.2.2) 至少有一个解 x 满足

$$\|Px\|_X \le M_0,\ \|(I-P)x\|_X \le M.$$

证明. 定义算子 $N: X \to Z$ 如下:

$$Nx = N_1x + N_2x, \forall x \in X.$$

由 (H_1) 知 N 在 X 中任意有界闭集上是 $L-k-$ 集压缩.

对 $\forall\lambda\in(0,1)$, 考虑辅助方程

$$Lx=\lambda Nx. \tag{1.2.3}$$

该方程等价于方程组

$$JQNx=0, \tag{1.2.4}$$

$$(I-P)x=\lambda K_P(I-Q)Nx. \tag{1.2.5}$$

取 $\Omega=\{x\in X:\|Px\|_X<M_0,\ \|(I-P)x\|_X<M\}$, 则 Ω 为 X 中有界开子集，且 $\partial\Omega=\{x\in X:\|Px\|_X\le M_0,\ \|(I-P)x\|_X=M\}\cup\{x\in X:\|Px\|_X=M_0,\ \|(I-P)x\|_X<M\}$.

由 (H_2) 和 (1.2.5) 可得

$$\begin{aligned}\|(I-P)x\|_X &\le \lambda[\|K_P(I-Q)N_1x\|_X+\|K_P(I-Q)N_2x\|_X]\\ &< (\alpha_1+\alpha_2)\|x\|_X+\beta_1+\beta_2,\forall x\in X.\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

故

$$\|x\|_X\le\|Px\|_X+\|(I-P)x\|_X<\|Px\|_X+(\alpha_1+\alpha_2)\|x\|_X+\beta_1+\beta_2,\forall x\in X.$$

从而有

$$\|x\|_X<\frac{\|Px\|_X}{1-\alpha_1-\alpha_2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{1-\alpha_1-\alpha_2},\forall x\in X.$$

由此式与 (1.2.6) 便知

$$\|(I-P)x\|_X<\frac{(\alpha_1+\alpha_2)\|Px\|_X}{1-\alpha_1-\alpha_2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{1-\alpha_1-\alpha_2},\forall x\in X. \tag{1.2.7}$$

下证

$$Lx\ne\lambda Nx,\forall(x,\lambda)\in\partial\Omega\times(0,1). \tag{1.2.8}$$

分两种情况讨论:

情形 1. $x\in\partial\Omega$, 且 $\|(I-P)x\|_X=M$. 此时，由 (1.2.7) 可知

$$(I-P)x\ne\lambda K_P(I-Q)Nx,\forall\lambda\in(0,1).$$

故有

$$Lx\ne\lambda Nx,\forall\lambda\in(0,1).$$

情形 2. $x\in\partial\Omega$, 且 $\|Px\|_X=M_0,\|(I-P)x\|_X<M$.

先证

$$JQNx\ne0.$$

因为

$$JQNx = JQN_1x + JQN_2x,$$

故由 (H_4) 便知

$$\|JQNx\|_X \geq \|JQN_1x\|_X - \|JQN_2x\|_X > 0.$$

因此， $Lx \neq \lambda Nx, \forall\lambda \in (0,1)$. 于是引理 1.2.1 的条件 (i), (ii) 成立.

不妨设 (H_4) 中 $\langle JQN_1Px, Px\rangle \geq 0$.

定义 $G_i : KerL \cap \bar{\Omega} \times [0,1] \to KerL\ (i = 1,2)$ 如下：

$$G_1(x,\mu) = \mu JQN_1x + (1-\mu)x, \forall(x,\mu) \in KerL \cap \bar{\Omega} \times [0,1],$$

$$G_2(x,\mu) = JQN_1x + \mu JQN_2x, \forall(x,\mu) \in KerL \cap \bar{\Omega} \times [0,1].$$

显然 $G_i(i=1,2)$ 是连续的.

由 (H_4) 可知，对 $\forall x \in KerL \cap \partial\Omega$, 有

$$G_1(x,1) = JQN_1x \neq 0,$$

$$\langle G_1(x,\mu), x\rangle = \mu\langle JQN_1x, x\rangle + (1-\mu)\langle x,x\rangle > 0, \forall\mu \in [0,1),$$

$$\|G_2(x,\mu)\|_X \geq \|JQN_1x\|_X - \|JQN_2x\|_X > 0, \forall\mu \in [0,1].$$

从而由 Brouwer 度的同伦不变性可得

$$deg_B(JQN_1, \Omega \cap KerL, 0) = deg_B(I, \Omega \cap KerL, 0) = 1,$$

$$deg_B(JQN, \Omega \cap KerL, 0) = deg_B(JQN_1, \Omega \cap KerL, 0),$$

故 $deg_B(JQN, \Omega \cap KerL, 0) = 1$. 因此引理 1.2.1 的条件 (iii) 也成立.

于是由引理 1.2.1 便知方程 (1.2.2) 至少有一个解 x 满足

$$\|Px\|_X \leq M_0,\ \|(I-P)x\|_X \leq M.$$

证毕.

推论 1.2.1. 假定 $(H_1),(H_2),(H_3)$ 成立，且存在常数 $\gamma > 0, M_0 > 0$, 使得下列条件成立：

(H_5) $\|N_1x - N_1y\|_Z \leq \gamma\|x-y\|_X, \forall x,y \in X$;

(H_6) 对任意 $x \in \{x \in X : \|Px\|_X = M_0, \|(I-P)x\|_X < M\}$, 均有

$$\|JQN_1Px\|_X \geq \gamma\|JQ\|M + \eta(M_0+M) + \xi,\ \langle JQN_1Px, Px\rangle \geq 0,$$

或

$$\|JQN_1Px\|_X \geq \gamma\|JQ\|M + \eta(M_0+M) + \xi,\ \langle JQN_1Px, Px\rangle \leq 0,$$

其中 $M=\frac{M_0(\alpha_1+\alpha_2)}{1-\alpha_1-\alpha_2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}$, 则方程 (1.2.2) 至少有一个解 x 满足

$$\|Px\|_X \le M_0,\ \|(I-P)x\|_X \le M.$$

证明. 只需验证定理 1.2.1 的条件 (H_4) 成立. 对任意 $x \in \{x \in X : \|Px\|_X = M_0, \|(I-P)x\|_X < M\}$, 有

$$\begin{aligned}\|JQN_1x\|_X &= \|JQN_1Px\|_X - \|JQ(N_1x - N_1Px)\|_X\\ &\ge \|JQN_1Px\|_X - \|JQ\|\gamma\cdot\|x-Px\|_X\\ &> \|JQN_1Px\|_X - \|JQ\|\gamma M,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|JQN_2x\|_X &\le \eta\|x\|_X + \xi\\ &\le \eta\|Px\|_X + \eta\|(I-P)x\|_X + \xi\\ &\le \eta(M_0+M)+\xi.\end{aligned}$$

故由 (H_6) 知, $\|JQN_1x\|_X > \|JQN_2x\|_X$. 证毕.

推论 1.2.2. 假定 $(H_1),(H_2),(H_3)$ 成立, (H_2) 中 $\alpha_i = 0\ (i=1,2)$, (H_3) 中 $\eta = 0$. 设 $\Omega_M = \{x \in X : \|x - Px\|_X < M\}$, 其中 $M = \beta_1+\beta_2$. 如果下列条件成立:

(H_7) $\lim_{x\in\Omega_M, \|Px\|_X\to\infty} \|JQN_1x\|_X$ 存在, 且满足

$$\lim_{x\in\Omega_M, \|Px\|_X\to\infty} \|JQN_1x\|_X > \xi,$$

(H_8)

$$\langle JQN_1Px, Px\rangle \ge 0,\ \forall x \in \{x \in X : \|Px\|_X = M_0, \|(I-P)x\|_X < M\}$$

或

$$\langle JQN_1Px, Px\rangle \le 0,\ \forall x \in \{x \in X : \|Px\|_X = M_0, \|(I-P)x\|_X < M\}$$

则方程 (1.2.2) 至少有一个解.

证明. 只需验证定理 1.2.1 的条件 (H_4) 成立. 由 (H_7) 知, 必存在常数 $M_0 > 0$, 使得, 对任意 $x \in \{x \in X : \|Px\|_X = M_0, \|(I-P)x\|_X < M\}$, 有

$$\|JQN_1x\|_X > \xi \ge \|JQN_2x\|_X.$$

证毕.

§1.3 中立型共振泛函微分方程周期解的存在性

考虑下列中立型泛函微分方程

$$x''(t) + m^2x(t) + g(x(t-\tau)) + h(t, x(t), x'(t-\tau), x''(t-\tau)) = E(t), \tag{1.3.1}$$

其中 m 是正整数， $\tau \in R$, $g, E \in C(R,R)$, $h \in C(R^4,R)$, h, E 关于 t 是 $2\pi-$ 周期函数.

先作如下假设:

(g) 存在常数 $l>0, \alpha \geq 0, \beta>0$, 使得

$$|g(x)-g(y)| \leq l|x-y|,\ \forall x,y \in R,$$

$$|g(x)| \leq \alpha|x|+\beta,\ \forall x \in R.$$

(h) 存在常数 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d>0, k_0>0$, 使得

$$|h(t,x,y,z)| \leq a|x|+b|y|+c|z|+d,\ \forall t,x,y,z \in R,$$

$$|h(t,x,y,z_1)-h(t,x,y,z_2)| \leq k_0|z_1-z_2|,\ \forall t,x,y,z_1,z_2 \in R.$$

设 $|\cdot|_2$ 表示 R^2 中 Euclidean 范数. 令

$$X=\{x \in C^1(R,R^2): x(t+2\pi)=x(t), \forall t \in R\},$$

$$\|x\|_X=\max\{\sup_{t \in R}|x(t)|_2, \sup_{t \in R}|x'(t)|_2\};$$

$$Z=\{x \in C(R,R^2): x(t+2\pi)=x(t), \forall t \in R\},$$

$$\|x\|_Z=\sup_{t \in R}|x(t)|_2.$$

则 $(X,\|\cdot\|_X),(Z,\|\cdot\|_Z)$ 是 Banach 空间.

定义 $L: domL=X \to Z$ 为

$$Lx(t)=x'-Bx(t),\ B=\begin{pmatrix} 0 & m \\ -m & 0 \end{pmatrix}.$$

易知,

$$e^{Bt}=\begin{pmatrix} \cos mt & \sin mt \\ -\sin mt & \cos mt \end{pmatrix},$$

$$KerL=\{x \in X: x(t)=e^{Bt}a, a \in R^2\},$$

$$ImL=\{x \in Z: \int_0^{2\pi} e^{B^T t}x(t)dt=0\}.$$

其中 B^T 表示 B 的转置.

显然, ImL 是 Z 的闭子空间且有直和分解: $X=KerL \oplus ImL$, 故有 $dimKerL=codimImL=2$. 因此， L 是指标为 0 的 Fredholm 算子.

定义投影算子 $P: X \to X$ 和 $Q: Z \to Z$ 如下：

$$Px(t) = \frac{1}{2\pi} e^{Bt} \int_0^{2\pi} e^{B^T s} x(s) ds,\ x \in X,$$

$$Qx(t) = \frac{1}{2\pi} e^{Bt} \int_0^{2\pi} e^{B^T s} x(s) ds,\ x \in Z.$$

则有

$$ImP = KerL, KerQ = ImL.$$

令 $J: ImQ \to KerL$ 为单位算子.

引理 1.3.1. $K_p: ImL \to domL \cap KerP$ 为线性算子且 $\|K_P\| \le 1 + 2m\pi$.

证明. 易知，对 $z \in ImL$,

$$K_P z(t) = e^{Bt} \int_0^t e^{B^T s} z(s) ds + \frac{1}{2\pi} e^{Bt} \int_0^{2\pi} \int_0^t e^{B^T s} z(s) ds dt,$$

$$[K_P z(t)]' = BK_P z(t) + z(t).$$

因为 $\int_0^t e^{B^T s} z(s) ds$ 是 $2\pi-$ 周期的，故有

$$|K_P z(t)|_2 \le 2\pi \|z\|_Z,\ |[K_P z(t)]'|_2 \le (1 + 2m\pi)\|z\|_Z,\ \forall t \in R.$$

从而有

$$\|K_P z\|_X \le (1 + 2m\pi)\|z\|_Z.$$

于是，$\|K_P\| \le 1 + 2m\pi$. 证毕.

定理 1.3.1. 假设条件 (g),(h) 成立，$\frac{2(1+2m\pi)}{m}(\alpha + a + mb + mc) < 1$, 且存在常数 $M_0 > 0$ 使得

(G)

$$\left| \int_0^\pi g(M_0 \cos s) \cos s ds \right| \ge \pi \left[lM + (a + mb + mc)(M_0 + M) + d + |\bar{E}| \right],$$

则方程 (1.3.1) 至少存在一个 $2\pi-$ 周期解 $x(t)$ 满足

$$|x(t)| \le \frac{M_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 - \alpha_1 - \alpha_2},\ t \in R,$$

其中

$$\bar{E} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi E(t) \begin{pmatrix} sinmt \\ \cos mt \end{pmatrix} dt,$$

$$\alpha_1 = \frac{2\alpha(1 + 2m\pi)}{m},\ \alpha_2 = \frac{2(1 + 2m\pi)(a + mb + mc)}{m},$$

$$\beta_1=\frac{2\beta(1+2m\pi)}{m},\ \beta_2=\frac{2(1+2m\pi)(d+\sup\limits_{T\in R}|E(t)|)}{m},$$
$$M=\frac{M_0(\alpha_1+\alpha_2)}{1-\alpha_1-\alpha_2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}.$$

证明. 方程 (1.3.1) 等价于

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= mx_2(t), \\ x_2'(t) &= -mx_1(t)-\tfrac{1}{m}g(x_1(t-\tau))-\tfrac{1}{m}h(t,x_1(t),mx_2(t-\tau),mx_2'(t-\tau))+\tfrac{1}{m}E(t). \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

令

$$G(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{m}g(x_1)\end{pmatrix},x_1,x_2\in R;$$

$$H(t,x,y,z)=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{m}h(t,x,my,mz)\end{pmatrix},\forall(t,x,y,z)\in R;$$

$$p(t)=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{m}E(t)\end{pmatrix},t\in R.$$

由假设 $(g),(h)$ 易知

$$|G(x_1,x_2)|_2\le\frac{\alpha}{m}|x|_2+\frac{\beta}{m},\forall x=(x_1,x_2)^T\in R; \tag{1.3.3}$$

$$|G(x_1,x_2)-G(y_1,y_2)|_2\le\frac{l}{m}|x-y|_2,\forall x=(x_1,x_2)^T,y=(y_1,y_2)^T\in R; \tag{1.3.4}$$

$$|H(t,x,y,z)|_2\le\frac{1}{m}[a|x|+bm|y|+cm|z|+d],\forall(t,x,y,z)\in R; \tag{1.3.5}$$

$$|H(t,x,y,z_1)-H(t,x,y,z_2)|_2\le k_0|z_1-z_2|,\forall t,x,y,z_1,z_2\in R. \tag{1.3.6}$$

定义算子 $N_i:X\to Z(i=1,2)$ 如下:

$$N_1x(t)=G(x_1(t-\tau),x_2(t-\tau)),$$
$$N_2x(t)=H(t,x_1(t),x_2(t-\tau),x_2'(t-\tau))+p(t),$$
$$x(t)=(x_1(t),x_2(t))^T,x\in X.$$

显然 $N_i(i=1,2)$ 连续.
由 (1.3.3) 可知

$$\|N_1x\|_Z\le\frac{\alpha}{m}\|x\|_X+\frac{\beta}{m},\forall x\in X. \tag{1.3.7}$$

由 (1.3.4) 可知

$$\|N_1x-N_1y\|_Z\le\frac{l}{m}\|x-y\|_X,\forall x,y\in X,$$

即推论 1.2.1 的条件 (H_5) 成立.

由 (1.3.5) 可知

$$\|N_2x\|_Z \le \frac{1}{m}(a+bm+cm)\|x\|_X + \frac{d}{m} + \frac{1}{m}\sup_{t\in R}|E(t)|, \forall x \in X. \tag{1.3.8}$$

易知, $\|JQ\| = \|Q\| \le 1, \|I-Q\| \le 2$. 故由 (1.3.7),(1.3.8) 及引理 1.3.1 知

$$\begin{aligned}
\|K_P(I-Q)N_1x\|_X &\le \|K_P\|\cdot\|I-Q\|\cdot\|N_1x\|_Z \\
&\le \tfrac{2\alpha(1+2m\pi)}{m}\|x\|_X + \tfrac{2\beta(1+2m\pi)}{m}, x \in X; \\
\|K_P(I-Q)N_2x\|_X &\le \|K_P\|\cdot\|I-Q\|\cdot\|N_2x\|_Z \\
&\le \tfrac{2(1+2m\pi)(a+mb+mc)}{m}\|x\|_X + \tfrac{2d(1+2m\pi)}{m} + \tfrac{2(1+2m\pi)}{m}\sup_{t\in R}|E(t)|, x \in X; \\
\|JQN_2x\|_X &\le \tfrac{a+mb+mc}{m}\|x\|_X + \tfrac{d}{m} + \tfrac{|\bar{E}|}{m}, x \in X.
\end{aligned}$$

从而推论 1.2.1 的条件 $(H_2),(H_3)$ 成立.

定义 $N:\bar{\Omega}\to Z$ 如下:

$$Nx = N_1x + N_2x, \forall x \in X.$$

设 Ω 为 X 中有界开集. 下证 $N:\bar{\Omega}\to Z$ 是 k_0- 集压缩映射.

令 $A\subset\bar{\Omega}$ 为一有界子集, 记 $\eta = \Gamma_X(A)$. 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在一个有限子集族 $\{A_i\}$ 满足 $A=\bigcup_i A_i$ 和 $diam_X(A_i)\le\eta+\varepsilon$, 其中 $diam_X(\cdot)$ 关于 $\|\cdot\|_X$ 定义.

由于 $F(t,x_1,x_2,y_1,y_2) =: G(x_1,x_2)+H(t,y_1,x_2,y_2)+p(t)$ 在 R^5 的任何紧子集上均一致连续, 且 A, A_i 在 Z 中关于模 $\|\cdot\|_Z$ 是预紧的, 故存在 A_i 的一个有限子集族 $\{A_{ij}\}$ 满足 $A_i=\bigcup_j A_{ij}$ 且

$$|F(t,x_1(t-\tau),x_2(t-\tau),x_1(t),u_2'(t-\tau)) - F(t,u_1(t-\tau),u_2(t-\tau),u_1(t),u_2'(t-\tau))|_2 < \varepsilon$$

对任意 $x,u\in A_{ij}$ 成立.

从而, 对任意 $x,u\in A_{ij}$, 有

$$\begin{aligned}
&\|Nx-Nu\|_Z \\
=\ & \sup_{0\le t\le 2\pi}|F(t,x_1(t-\tau),x_2(t-\tau),x_1(t),x_2'(t-\tau)) - F(t,u_1(t-\tau),u_2(t-\tau),u_1(t),u_2'(t-\tau))|_2 \\
\le\ & \sup_{0\le t\le 2\pi}|F(t,x_1(t-\tau),x_2(t-\tau),x_1(t),x_2'(t-\tau)) - F(t,x_1(t-\tau),x_2(t-\tau),x_1(t),u_2'(t-\tau))|_2 \\
+\ & \sup_{0\le t\le 2\pi}|F(t,x_1(t-\tau),x_2(t-\tau),x_1(t),u_2'(t-\tau)) - F(t,u_1(t-\tau),u_2(t-\tau),u_1(t),u_2'(t-\tau))|_2 \\
\le\ & k_0\sup_{0\le t\le 2\pi}|x_2'(t-\tau)-u_2'(t-\tau)|+\varepsilon \\
\le\ & k_0\sup_{0\le t\le 2\pi}|x'(t)-u'(t)|_2+\varepsilon \le k_0\eta+(k_0+1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

即 $\Gamma_Z(N(A)) \le k_0\Gamma_X(A)$. 故 $N:\bar{\Omega}\to Z$ 是 k_0- 集压缩映射. 从而 $K_P(I-Q)N:\bar{\Omega}\to X$ 是一个 $2(1+2m\pi)k_0-$ 集压缩. 显然, $QN:\bar{\Omega}\to Z$ 连续且 $QN(\bar{\Omega})$ 有界. 因此 N 是一个 $L-2(1+2m\pi)k_0-$ 集压缩. 故推论 1.2.1 的条件 (H_1) 成立.

在 $KerL$ 上定义内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 如下：设 $x=e^{Bt}u, y=e^{Bt}v$, 则

$$\langle x,y\rangle = u_1v_1+u_2v_2,$$

其中

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{B^Ts}x(s)ds=(u_1,u_2)^T, v=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{B^Ts}y(s)ds=(v_1,v_2)^T\in R^2.$$

$\forall x\in\{x\in X:\|Px\|_X=M_0, \|(I-P)x\|_X<M\}$, 有

$$Px(t)=e^{Bt}v, v=(v_1,v_2)^T=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{B^Ts}x(s)ds, |v|_2=M_0.$$

易知

$$\begin{aligned} JQN_1Px(t) &= \tfrac{1}{2\pi}e^{Bt}\int_0^{2\pi} e^{B^Ts}N_1Px(s)ds \\ &= \tfrac{1}{2\pi}e^{Bt}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} \frac{1}{m}g(v_1\cos mt+v_2\sin mt)\sin m(t+\tau) \\ -\frac{1}{m}g(v_1\cos mt+v_2\sin mt)\cos m(t+\tau)\end{pmatrix}dt. \end{aligned}$$

设

$$v_1\cos mt+v_2\sin mt=M_0\cos(mt-\alpha(v)),$$

其中 $\alpha(v)$ 由 $\cos\alpha(v)=\frac{v_1}{M_0}, \sin\alpha(v)=\frac{v_2}{M_0}$ 确定，则

$$\begin{aligned} JQN_1Px(t) &= \tfrac{1}{2\pi}e^{Bt}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} \frac{1}{m}g(M_0\cos(mt-\alpha(v)))\sin m(t+\tau) \\ -\frac{1}{m}g(M_0\cos(mt-\alpha(v)))\cos m(t+\tau)\end{pmatrix}dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi}e^{Bt}\begin{pmatrix} \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} g(M_0\cos s)\cos sds\sin(\alpha(v)+m\tau) \\ -\frac{1}{m}\int_0^{2\pi} g(M_0\cos s)\cos sds\cos(\alpha(v)+m\tau)\end{pmatrix} \\ &= e^{Bt}\begin{pmatrix} \frac{1}{m\pi}\int_0^{\pi} g(M_0\cos s)\cos sds\sin(\alpha(v)+m\tau) \\ -\frac{1}{m\pi}\int_0^{\pi} g(M_0\cos s)\cos sds\cos(\alpha(v)+m\tau)\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \langle JQN_1Px, Px\rangle &= \tfrac{1}{m\pi}\int_0^{\pi} g(M_0\cos s)\cos sds\sin(\alpha(v)+m\tau)v_1 \\ &- \tfrac{1}{m\pi}\int_0^{\pi} g(M_0\cos s)\cos sds\cos(\alpha(v)+m\tau)v_2 \\ &= \tfrac{M_0\sin m\tau}{\pi m}\int_0^{\pi} g(M_0\cos s)\cos sds, \end{aligned}$$

$$\|JQN_1Px\|_X=\frac{1}{\pi m}\left|\int_0^{\pi} g(M_0\cos s)\cos sds\right|.$$

故由假设 (G) 便知推论 1.2.1 的条件 (H_6) 成立. 于是, 由推论 1.2.1 可知方程 (1.3.2) 至少有一个解 x 满足

$$\|x\|_X \le M_0 + M.$$

从而方程 (1.3.1) 至少有一个 $2\pi-$ 周期解 x 满足

$$|x(t)| \le \frac{M_0}{1-\alpha_1-\alpha_2} + \frac{\beta_1+\beta_2}{1-\alpha_1-\alpha_2},\ t \in R.$$

证毕.

第二章 Mawhin 重合度与时滞种群模型的周期解问题

§2.1 引言

Lotka-Volterra 型竞争系统与捕食者 - 食饵系统，由于其在理论及应用方面均具有重要意义，已得到广泛深入的研究，参见文献 [1-5,7,8,13-19,21,22,26,29,30,32-36,38-40,42,44-48,62,64-77] 及所附参考文献. 以往的大多数论文均着重于不具投放的情形. Brauer and Soudack [4,5] 研究了几类具常投放率的捕食者 - 食饵系统. 据我们所知，对具投放的时滞 Lotka-Volterra 型竞争扩散系统与捕食者 - 食饵扩散系统正周期解的存在性与全局吸引性问题的研究则较少.

本章将给出一种利用 Mawhin 重合度理论研究时滞种群模型周期解问题的新方法，并将之应用于具投放的时滞 Lotka-Volterra 型竞争扩散系统与捕食者 - 食饵扩散系统正周期解的存在性问题的研究.

§2.2 预备知识

设 X, Z 分别为赋予范数 $\|\cdot\|_X$ 与 $\|\cdot\|_Z$ 的赋范线性空间.

设 $L: domL \subset X \to Z$ 是指标为 0 的 Fredholm 算子，即 ImL 为闭集且有 $dimKerL = codimImL < +\infty$. 由此可知，存在连续投影算子 $P: X \to X$ 和 $Q: Z \to Z$ 使得 $ImP = KerL, ImL = KerQ = Im(I-Q)$. 定义 $L_P: domL \cap KerP \to ImL$ 为 L 关于 $domL \cap KerP$ 的限制 $L|_{domL\cap KerP}$，则 L_P 可逆，记其逆为 $K_P: ImL \to domL \cap KerP$. 设 $J: ImQ \to KerL$ 是同构映射.

假设 Ω 是 X 中的有界开集，算子 N 称为在 $\bar{\Omega} \times [0,1]$ 上是 $L-$ 紧的，如果 $QN: \bar{\Omega} \times [0,1] \to Z$ 连续且 $QN(\bar{\Omega} \times [0,1])$ 有界， $K_P(I-Q)N: \bar{\Omega} \times [0,1] \to X$ 是紧的，即连续且 $K_P(I-Q)N(\bar{\Omega} \times [0,1])$ 是相对紧的.

为方便起见，引入下列结果：

引理 2.2.1. (Mawhin **延拓定理**) [25] 假定 L 是指标为 0 的 Fredholm 算子， N 在 $\bar{\Omega} \times [0,1]$ 上是 $L-$ 紧的. 如果下列条件成立：

1) $Lx \neq \lambda N(x,\lambda), \forall \lambda \in (0,1), x \in \partial\Omega$;

2) $QN(x,0) \neq 0, \forall x \in KerL \cap \partial\Omega$;

3) Brouwer 度 $\deg_B(JQN(\cdot,0), \Omega \cap KerL, 0) \neq 0$.

则算子方程 $Lx = N(x,1)$ 在 $domL \cap \bar{\Omega}$ 中至少存在一个解.

对于固定的 $\sigma \geq 0$ ，设 $C := C([-\sigma, 0]; R^n)$. 如果 $x \in C([\gamma-\sigma, \gamma+\delta]; R^n)$ 对某个 $\delta > 0$ 和 $\gamma \in R$ 成立，则对 $t \in [\gamma, \gamma+\delta]$ 有 $x_t \in C$. 其中 x_t 定义如下：

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \forall \theta \in [-\sigma, 0].$$

C 中的上确界模 $\|\cdot\|_c$ 定义为:

$$\|\phi\|_c = \max_{\theta\in[-\sigma,0]} \|\phi(\theta)\|, \forall \phi \in C;$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 R^n 中的模, 且对任意 $u = (u_1, \cdots, u_n) \in R^n$, $\|u\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i|$.

考虑下列泛函微分方程:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t, \lambda)$$

其中 $f : R\times C\times[0,1] \to R^n$ 全连续, 且存在 $T > 0$ 使得对任意 $(t, \varphi, \lambda) \in R\times C\times[0,1]$, 有 $f(t+T, \varphi, \lambda) = f(t, \varphi, \lambda)$.

引理 2.2.2. 假定存在 $M > 0$ 使得下列条件成立:

(i) 对任意 $\lambda \in (0,1)$ 及下列方程的任意 T- 周期解 x

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda f(t, x_t, \lambda),$$

均有 $\|x(t)\| < M$, $\forall t \in R$;

(ii) $g(u) := \frac{1}{T}\int_0^T f(s, \hat{u}, 0)ds \neq 0$, $u \in \partial B_M(R^n)$, 其中 $B_M(R^n) = \{u \in R^n : \|u\| < M\}$, $\hat{u}$ 表示由 $[-\sigma, 0]$ 到 R^n 的常值映射, 值为 $u \in R^n$;

(iii) Brouwer 度 $deg_B(g, B_M(R^n), 0) \neq 0$,

则方程

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t, 1)$$

至少存在一个 T- 周期解 x 满足 $\sup\limits_{t\in R}\|x(t)\| \leq M$.

证明. 设

$$X = \{x \in C(R, R^n) : x(t+T) = x(t),\ t \in R\},$$

$$Z = \{y \in C(R, R^n) : y(0) = 0,\ y(t) = \alpha t + x(t),\ \alpha \in R^n,\ x \in X\}.$$

对任意 $x \in X$, 设 $\|x\|_0 = \sup\limits_{0\leq t\leq T} \|x(t)\|$, 且对任意 $y \in Z$, $y(t) = \alpha t + x(t)$, $\alpha \in R^n$, $x \in X$, 设 $\|y\|_0 = \|\alpha\| + \|x\|_0$. 易知, X 和 Z 是 Banach 空间.

定义映射 $L : X \to Z$, $N : X\times[0,1] \to Z$, $P : X \to X$ 和 $Q : Z \to Z$ 如下:

$$Lx(t) = x(t) - x(0),\ x \in X,\ t \in R,$$

$$N(x,\lambda)(t) = \int_0^t f(s, x_s, \lambda)ds,\ x \in X,\ \lambda \in [0,1],\ t \in R,$$

$$Px(t) = x(0),\ x \in X,\ t \in R,$$

$$Qy(t) = \alpha t,\ y \in Z,\ y(t) = \alpha t + x(t),\ \alpha \in R^n,\ x \in X,\ t \in R,$$

其中 $ImN \subseteq Z$, 因为 $\int_0^t f(s,x_s,\lambda)ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s,x_s,\lambda)ds$ 对任意 $x \in X$ 是关于 t 的 T-周期函数.

易知, $KerL = \{x \in X : x(t) = x(0),\ t \in R\}$, $ImL = X \cap Z = \{x \in X : x(0) = 0\}$ 在 Z 中闭的, 且 $dimKerL = codimImL = R^n$. 故 L 是一个指标为 0 的 Fredholm 映射.

显然, P 和 Q 是连续投影且满足

$$ImP = KerL,\ KerQ = ImL.$$

另一方面, $K_P : ImL \to domL \cap KerP$ 具有形式 $K_P(y) = y$.

注意到

$$QN : X \times [0,1] \to Z,\ QN(x,\lambda) = \frac{t}{T}\int_0^T f(s,x_s,\lambda)ds.$$

于是,

$$K_P(I-Q)N : X \times [0,1] \to X,$$

$$K_P(I-Q)N(x,\lambda)(t) = \int_0^t f(s,x_s,\lambda)ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s,x_s,\lambda)ds.$$

注意到 QN 与 $K_P(I-Q)N$ 连续且 $QN(\bar{\Omega}\times[0,1])$, $K_P(I-Q)N(\bar{\Omega}\times[0,1])$ 对任意有界集 $\Omega \subset X$ 是相对紧的. 因此, 对任意有界开集 $\Omega \subset X$, N 在 $\bar{\Omega}\times[0,1]$ 上是 L- 紧的.

设 $\Omega = \{x \in X : \|x\|_0 < M\}$. 由假设 (i) 知, $Lx \neq \lambda N(x,\lambda)$, $\forall (x,\lambda) \in \partial\Omega \times (0,1)$.

因为 $QN(x,0)(t) = \frac{t}{T}\int_0^T f(s,x_s,0)ds$, $x \in \bar{\Omega}$, $t \in R$, 故假设 (ii) 蕴涵 $QN(x,0) \neq 0$, $\forall x \in \partial\Omega \cap KerL$.

同构 $J : ImQ \to KerL$ 定义为 $J(\alpha t) = \alpha$, $\alpha \in R^n$.

所以, 由假设 (iii) 可知

$$deg_B(JQN(\cdot,0)|_{KerL}, \Omega \cap KerL, 0) \neq 0.$$

由引理 2.2.1 便知结论真. 证毕.

定义 2.2.1. ([49]) 矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 称为 M- 矩阵, 如果下列条件成立:

(i)

$$a_{ii} > 0\ (i = 1,2,\cdots,n),\ a_{ij} \le 0\ (i \neq j,\ i,j = 1,2,\cdots,n);$$

(ii)

$$\det\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0\ (i = 1,2,\cdots,n).$$

引理 2.2.3. ([49]) 下列结论等价:

(I) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 M- 矩阵;

(II) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ii}>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, $a_{ij}\le 0\ (i\ne j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$, 且存在常数 $\delta_j>0\ (j=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_j a_{ij}>0\ (i=1,2,\cdots,n);$$

(III) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ii}>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, $a_{ij}\le 0\ (i\ne j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$, 且存在常数 $d_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}d_i a_{ij}>0\ (j=1,2,\cdots,n).$$

引理 2.2.4. (Barbalat's 引理) ([26], P4, 引理 1.2.2) 设 f 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的非负函数，使得 f 在 $[0,+\infty)$ 上可积且在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，则 $\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$.

§2.3 时滞 Lotka-Volterra 型竞争扩散系统正周期解的存在性与全局吸引性

考虑下列具投放的时滞 Lotka-Volterra 型竞争扩散系统:

$$\begin{aligned}
x_1'(t)&=h_1(t,x_1(t))[a_1(t)-b_1(t)x_1(t)-c_1(t)y(t)]+D_1(t)[x_2(t-\tau_1)-x_1(t)]+S_1(t),\\
x_2'(t)&=h_2(t,x_2(t))[a_2(t)-b_2(t)x_2(t)]+D_2(t)[x_1(t-\tau_2)-x_2(t)]+S_2(t),\\
y'(t)&=h_3(t,y(t))\left[a_3(t)-b_3(t)y(t)-\beta(t)\textstyle\int_{-\tau}^{0}k(s)y(t+s)ds-c_3(t)x_1(t)\right]+S_3(t),
\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

满足初始条件

$$\begin{aligned}
&x_1(s)=\varphi_1(s)\ge 0,\ s\in[-\sigma,0],\ \varphi_1(0)>0,\\
&x_2(s)=\varphi_2(s)\ge 0,\ s\in[-\sigma,0],\ \varphi_2(0)>0,\\
&y(s)=\psi(s)\ge 0,\ s\in[-\sigma,0],\ \psi(0)>0,
\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

其中 x_1, y 是种群 x, y 在路径 1 的种群密度， x_2 是种群 x 在路径 2 的种群密度. 种群 y 限制在路径 1, 而种群 x 可以在两个路径扩散. $D_i(t)(i=1,2)$ 是种群 x 的扩散系数. $S_i(t)(i=1,2,3)$ 表示投放率. $\varphi_1(s),\varphi_2(s),\psi(s)$ 在 $[-\sigma,0]$ 上连续, $\sigma=\max\{\tau,\tau_1,\tau_2\}$. 时滞 $\tau_1(\tau_2)$ 表示种群 x 从路径 2 到路径 1 的迁移时间 (路径 1 到路径 2).

当 $h_i(t,u)\equiv u, S_i(t)\equiv 0\ (i=1,2,3), \tau_i\equiv 0\ (i=1,2)$, 系统 (2.3.1) 曾被文献 [73,75],[71] (关于 $\beta(t)\equiv 0$) 研究. 然而，文献 [75] 仅仅给出了模型存在周期解的充分条件，而未研究其吸引性，其条件也难于验证且难于给出生态学解释. 当 $h_i(t,u)=\dfrac{u}{K(t)+c(t)u}$ $(i=1,2,3)$, 系统 (2.3.1) 是据有毒素侵蚀的种群模型. 关于据有毒素侵蚀的种群模型，可参考文献 [21,32-34,61].

其中 $m_0^* = \min\left\{\frac{c_1^u}{b_1^u}\left[\frac{a_1^l}{c_1^u} - (\frac{a_3}{b_3})^u\right], (\frac{a_2}{b_2})^l\right\}$.
(2.3.1) 有一个 T- 周期正解吸引所有的正解.

注 2.3.5. 推论 2.3.5 推广并改进了文献 [71] 的定理 4.

§2.4 时滞捕食者 - 食饵扩散系统正周期解的存在性与全局吸引性

考虑下列具投放的时滞捕食者 - 食饵扩散系统:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)(a_1(t) - b_1(t)x_1(t) - c(t)y(t)) + D_1(t)(x_2(t-\tau_1(t)) - x_1(t)) + S_1(t), \\ x_2'(t) = x_2(t)(a_2(t) - b_2(t)x_2(t)) + D_2(t)(x_1(t-\tau_2(t)) - x_2(t)) + S_2(t), \\ y'(t) = y(t)\left(-d(t) + p(t)x_1(t) - q(t)y(t) - \beta(t)\int_{-\tau}^0 k(s)y(t+s)ds\right) + S_3(t), \end{cases} \tag{2.4.1}$$

满足初始条件

$$\begin{aligned} &x_1(s) = \varphi_1(s) \geq 0,\ s \in [-\sigma, 0],\ \varphi_1(0) > 0, \\ &x_2(s) = \varphi_2(s) \geq 0,\ s \in [-\sigma, 0],\ \varphi_2(0) > 0, \\ &y(s) = \psi(s) \geq 0,\ s \in [-\sigma, 0],\ \psi(0) > 0, \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

其中 x_1, y 是种群 x, y 在路径 1 的种群密度, x_2 是种群 x 在路径 2 的种群密度. 种群 y 限制在路径 1, 而种群 x 可以在两个路径扩散. $D_i(t)(i=1,2)$ 是种群 x 的扩散系数. $S_i(t)(i=1,2,3)$ 表示投放率. $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \psi(s)$ 在 $[-\sigma, 0]$ 上连续, $\sigma = \max\{\tau, \sup_{t\in R}\tau_1(t), \sup_{t\in R}\tau_2(t)\}$. 时滞 $\tau_1(\tau_2)$ 表示种群 x 从路径 2 到路径 1 的迁移时间 (路径 1 到路径 2).

当 $S_i(t) \equiv 0\ (i=1,2,3), \tau_i \equiv 0\ (i=1,2)$, 系统 (2.4.1) 曾被文献 [65],[74] 研究. 然而, 文献 [74] 仅仅给出了模型存在周期解的充分条件, 而未研究其吸引性.

本节旨在研究系统 (2.4.1) 正周期解的存在性与全局吸引性.

记

$$\bar{g} = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt,\ g^l = \min_{t\in[0,T]}|g(t)|,\ g^u = \max_{t\in[0,T]}|g(t)|,$$

其中 g 是连续 T- 周期函数.

在系统 (2.4.1) 中, 总假定:

(H_1) $a_i(t), b_i(t), D_i(t)(i=1,2), c(t), d(t), p(t), q(t)$ 与 $\beta(t)$ 是正的连续 T- 周期函数. $S_i(t)(i=1,2,3), \tau_i(t)(i=1,2)$ 是非负连续 T- 周期函数. $\tau_i'(t) < 1 (i=1,2), t \in R$.

(H_2) 在 $[-\tau, 0]$ $(0 \leq \tau < \infty)$ 上, $k(s) \geq 0$; $k(s)$ 是分段连续且规范化的函数使得 $\int_{-\tau}^0 k(s)ds = 1$.

令

$$
\begin{aligned}
K &= (\frac{q}{p})^u + (\frac{\beta}{p})^u,\\
K^* &= (\frac{a_1M_0 - D_1M_0 + S_1}{b_1M_0})^l,\ K_i^* = (\frac{a_iM_0 + S_i}{b_iM_0})^l,\ i = 1, 2.\\
M_0 &= \max\left\{(\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4b_1S_1}}{2b_1})^u, (\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4b_2S_2}}{2b_2})^u\right\},\\
m_0 &= \min\left\{\frac{(\frac{a_1}{c})^l - \sqrt{(\frac{S_3}{q})^u}}{\frac{b_1^u}{c^l} + (\frac{p}{q})^u}\exp[-2T(\bar{D}_1 + \bar{b}_1M_0 + \bar{c}\widetilde{M}_0)], (\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4b_2S_2}}{2b_2})^l\right\},\\
\widetilde{M}_0 &= (\frac{pM_0 + \sqrt{p^2M_0^2 + 4qS_3}}{2q})^u,\\
\widetilde{m}_0 &= \min\left\{\frac{K_1^* - (\frac{d}{p})^u}{K + (\frac{c}{b_1})^u}, \frac{K_2^* - (\frac{d}{p})^u}{K}, \frac{K^* - (\frac{d}{p})^u}{K + (\frac{c}{b_1})^u}\right\}\exp[-2T(\bar{d} + \bar{q}\widetilde{M}_0 + \bar{\beta}\widetilde{M}_0)].
\end{aligned}
$$

定理 2.4.1. 除条件 $(H_1), (H_2)$ 外，进一步假定系统 (2.4.1) 满足下列假设之一：

(H_3) $(\frac{a_1}{c})^l > \sqrt{(\frac{S_3}{q})^u}$, $K_i^* > (\frac{d}{p})^u$ $(i = 1, 2)$;

(H_4) $(\frac{a_1}{c})^l > \sqrt{(\frac{S_3}{q})^u}$, $K^* > (\frac{d}{p})^u$.

则系统 (2.4.1) 至少有一个 T- 周期正解，比如说 $(x_1^*(t), x_2^*(t), y^*(t))^T$ 使得

$$m_0 \le x_i^*(t) \le M_0\ (i = 1, 2),\ \widetilde{m}_0 \le y^*(t) \le \widetilde{M}_0,\ t \ge 0.$$

证明. 考虑下列系统

$$
\begin{aligned}
u_1'(t) &= a_1(t) - D_1(t) - b_1(t)e^{u_1(t)} - c(t)e^{u_3(t)} + D_1(t)e^{u_2(t-\tau_1(t)) - u_1(t)} + \frac{S_1(t)}{e^{u_1(t)}},\\
u_2'(t) &= a_2(t) - D_2(t) - b_2(t)e^{u_2(t)} + D_2(t)e^{u_1(t-\tau_2(t)) - u_2(t)} + \frac{S_2(t)}{e^{u_2(t)}},\\
u_3'(t) &= -d(t) + p(t)e^{u_1(t)} - q(t)e^{u_3(t)} - \beta(t)\int_{-\tau}^0 k(s)e^{u_3(t+s)}ds + \frac{S_3(t)}{e^{u_3(t)}},
\end{aligned}
\tag{2.4.3}
$$

其中 $a_i(t), b_i(t), D_i(t) (i = 1, 2), S_i(t) (i = 1, 2, 3), c(t), d(t), p(t), q(t)$ 与 $\beta(t)$ 如 (H_1) 所设，$\tau, \tau_i (i = 1, 2)$ 与 $k(s)$ 如 (H_2) 所设.

我们先证系统 (2.4.3) 有一个 T- 周期解.

令 $C := C([-\sigma, 0]; R^3)$. 定义映射 $f: R \times C \times [0, 1] \to R^3$ 如下：

$$f(t, \varphi, \lambda) = (f_1(t, \varphi, \lambda), f_2(t, \varphi, \lambda), f_3(t, \varphi, \lambda)), \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C, \lambda \in [0, 1],$$

$$f_1(t,\varphi,\lambda) = a_1(t) - \lambda D_1(t) - b_1(t)e^{\varphi_1(0)} - \lambda c(t)e^{\varphi_3(0)} + \lambda D_1(t)e^{\varphi_2(-\tau_1(t))-\varphi_1(0)} + \frac{S_1(t)}{e^{\varphi_1(0)}},$$
$$f_2(t,\varphi,\lambda) = a_2(t) - \lambda D_2(t) - b_2(t)e^{\varphi_2(0)} + \lambda D_2(t)e^{\varphi_1(-\tau_2(t))-\varphi_2(0)} + \frac{S_2(t)}{e^{\varphi_2(0)}},$$
$$f_3(t,\varphi,\lambda) = -\lambda d(t) + p(t)e^{\varphi_1(0)} - q(t)e^{\varphi_3(0)} - \beta(t)\int_{-\tau}^{0} k(s)e^{\varphi_3(s)}ds + \frac{S_3(t)}{e^{\varphi_3(0)}}.$$

显然， $f: R\times C\times[0,1]\to R^3$ 是全连续的. 现在，系统 (2.4.3) 变为

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t,u_t,1).$$

相应于

$$\frac{du(t)}{dt} = \lambda f(t,u_t,\lambda), \lambda\in(0,1),$$

我们有

$$u_1'(t) = \lambda[a_1(t) - \lambda D_1(t) - b_1(t)e^{u_1(t)} - \lambda c(t)e^{u_3(t)} + \lambda D_1(t)e^{u_2(t-\tau_1(t))-u_1(t)} + \frac{S_1(t)}{e^{u_1(t)}}],$$
$$u_2'(t) = \lambda[a_2(t) - \lambda D_2(t) - b_2(t)e^{u_2(t)} + \lambda D_2(t)e^{u_1(t-\tau_2(t))-u_2(t)} + \frac{S_2(t)}{e^{u_2(t)}}],$$
$$u_3'(t) = \lambda[-\lambda d(t) + p(t)e^{u_1(t)} - q(t)e^{u_3(t)} - \beta(t)\int_{-\tau}^{0} k(s)e^{u_3(t+s)}ds + \frac{S_3(t)}{e^{u_3(t)}}]. \tag{2.4.4}$$

设 $(u_1(t),u_2(t),u_3(t))^T$ 是系统 (2.4.4) 关于某个 $\lambda\in(0,1)$ 的一个 T- 周期解.

取 $t_i^M, t_i^m\in[0,T], i=1,2,3,$ 使得

$$u_i(t_i^M) = \max_{t\in[0,T]} u_i(t),\ u_i(t_i^m) = \min_{t\in[0,T]} u_i(t), i=1,2,3.$$

则有

$$u_i'(t_i^M) = 0,\ u_i'(t_i^m) = 0, i=1,2,3.$$

由此及系统 (2.4.4) 可得

$$a_1(t_1^M) - \lambda D_1(t_1^M) - b_1(t_1^M)e^{u_1(t_1^M)} - \lambda c(t_1^M)e^{u_3(t_1^M)} + \lambda D_1(t_1^M)e^{u_2(t_1^M-\tau_1(t_1^M))-u_1(t_1^M)} + \frac{S_1(t_1^M)}{e^{u_1(t_1^M)}} = 0, \tag{2.4.5}$$

$$a_2(t_2^M) - \lambda D_2(t_2^M) - b_2(t_2^M)e^{u_2(t_2^M)} + \lambda D_2(t_2^M)e^{u_1(t_2^M-\tau_2(t_2^M))-u_2(t_2^M)} + \frac{S_2(t_2^M)}{e^{u_2(t_2^M)}} = 0, \tag{2.4.6}$$

$$-\lambda d(t_3^M) + p(t_3^M)e^{u_1(t_3^M)} - q(t_3^M)e^{u_3(t_3^M)} - \beta(t_3^M)\int_{-\tau}^{0} k(s)e^{u_3(t_3^M+s)}ds + \frac{S_3(t_3^M)}{e^{u_3(t_3^M)}} = 0, \tag{2.4.7}$$

及

$$a_1(t_1^m) - \lambda D_1(t_1^m) - b_1(t_1^m)e^{u_1(t_1^m)} - \lambda c(t_1^m)e^{u_3(t_1^m)} + \lambda D_1(t_1^m)e^{u_2(t_1^m-\tau_1(t_1^m))-u_1(t_1^m)} + \frac{S_1(t_1^m)}{e^{u_1(t_1^m)}} = 0, \tag{2.4.8}$$

$$a_2(t_2^m) - \lambda D_2(t_2^m) - b_2(t_2^m)e^{u_2(t_2^m)} + \lambda D_2(t_2^m)e^{u_1(t_2^m-\tau_2(t_2^m))-u_2(t_2^m)} + \frac{S_2(t_2^m)}{e^{u_2(t_2^m)}} = 0. \tag{2.4.9}$$

下面我们先证明下列结果:

结论 A. 对 $u_i(t_i^M)$ $(i=1,2)$, 下列情形之一成立:

$$u_2(t_2^M) \le u_1(t_1^M) \le M_1^* \le M_1, \tag{2.4.10}$$

$$u_1(t_1^M) < u_2(t_2^M) \le M_2^* \le M_1, \tag{2.4.11}$$

其中 $M_1 := \max\{M_1^*, M_2^*\}, M_j^* := \ln(\dfrac{a_j + \sqrt{a_j^2 + 4b_jS_j}}{2b_j})^u, j = 1,2.$

分两种情形讨论:

情形 1. 假设 $u_1(t_1^M) \ge u_2(t_2^M)$; 则 $u_1(t_1^M) \ge u_2(t_1^M - \tau_1(t_1^M))$.

由此及 (2.4.5) 可知

$$b_1(t_1^M)e^{u_1(t_1^M)} \le a_1(t_1^M) + \frac{S_1(t_1^M)}{e^{u_1(t_1^M)}}.$$

即

$$b_1(t_1^M)e^{2u_1(t_1^M)} - a_1(t_1^M)e^{u_1(t_1^M)} - S_1(t_1^M) \le 0.$$

所以,

$$e^{u_1(t_1^M)} \le \frac{a_1(t_1^M) + \sqrt{a_1^2(t_1^M) + 4b_1(t_1^M)S_1(t_1^M)}}{2b_1(t_1^M)} \le (\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4b_1S_1}}{2b_1})^u.$$

因此,

$$u_2(t_2^M) \le u_1(t_1^M) \le \ln(\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4b_1S_1}}{2b_1})^u. \tag{2.4.12}$$

情形 1. 假设 $u_1(t_1^M) < u_2(t_2^M)$; 则 $u_1(t_2^M - \tau_2(t_2^M)) < u_2(t_2^M)$.

由此及 (2.4.6) 可知

$$b_2(t_2^M)e^{u_2(t_2^M)} \le a_2(t_2^M) + \frac{S_2(t_2^M)}{e^{u_2(t_2^M)}}.$$

类似情形 1, 可证

$$u_1(t_1^M) < u_2(t_2^M) \le \ln(\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4b_2S_2}}{2b_2})^u. \tag{2.4.13}$$

由 (2.4.12) 和 (2.4.13) 便知结论 A 成立.

结论 B.

$$u_3(t_3^M) \le \ln(\frac{pM_0 + \sqrt{p^2M_0^2 + 4qS_3}}{2q})^u := M_2. \tag{2.4.14}$$

由 (2.4.7), 我们有

$$q(t_3^M)e^{u_3(t_3^M)} \le p(t_3^M)e^{u_1(t_3^M)} + \frac{S_3(t_3^M)}{e^{u_3(t_3^M)}} \le p(t_3^M)e^{u_1(t_1^M)} + \frac{S_3(t_3^M)}{e^{u_3(t_3^M)}}.$$

即

$$q(t_3^M)e^{2u_3(t_3^M)} - p(t_3^M)e^{u_1(t_1^M)}e^{u_3(t_3^M)} - S_3(t_3^M) \le 0.$$

所以,

$$e^{u_3(t_3^M)} \le \frac{p(t_3^M)e^{u_1(t_1^M)} + \sqrt{p^2(t_3^M)e^{2u_1(t_1^M)} + 4q(t_3^M)S_3(t_3^M)}}{2q(t_3^M)}, \tag{2.4.15}$$

其蕴涵结论 B 成立.

结论 C. 对 $u_i(t_i^m)$ $(i=1,2)$, 下列情形之一成立:

$$m_1 \le m_1^* - 2T(\bar{D}_1 + \bar{b}_1 M_0 + \bar{c}\widetilde{M_0}) \le u_1(t_1^m) \le u_2(t_2^m), \tag{2.4.16}$$

$$m_1 \le m_2^* \le u_2(t_2^m) < u_1(t_1^m), \tag{2.4.17}$$

其中

$$\begin{aligned} m_1 &:= \min\{m_1^* - 2T(\bar{D}_1 + \bar{b}_1 M_0 + \bar{c}\widetilde{M_0}), m_2^*\}, \\ m_1^* &:= \ln \frac{(\frac{a_1}{c})^l - \sqrt{(\frac{S_3}{q})^u}}{\frac{b_1^u}{c^l} + (\frac{p}{q})^u}, \\ m_2^* &:= \ln(\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4b_2S_2}}{2b_2})^l. \end{aligned}$$

分两种情形讨论:

情形 (1). 假设 $u_1(t_1^m) \le u_2(t_2^m)$; 则 $u_1(t_1^m) \le u_2(t_1^m - \tau_1(t_1^m))$.

由此及 (2.4.8) 可知

$$\begin{aligned} a_1(t_1^m) &\le b_1(t_1^m)e^{u_1(t_1^m)} + c(t_1^m)e^{u_3(t_1^m)} \\ &\le b_1(t_1^m)e^{u_1(t_1^M)} + c(t_1^m)e^{u_3(t_3^M)}. \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

由 (2.4.15) 及不等式

$$(a+b)^{1/2} < a^{1/2} + b^{1/2}, a > 0, b > 0,$$

我们有

$$e^{u_3(t_3^M)} \le \frac{p(t_3^M)e^{u_1(t_1^M)} + \sqrt{q(t_3^M)S_3(t_3^M)}}{q(t_3^M)}.$$

由此及 (2.4.18), 我们有

$$a_1(t_1^m) \le \left[b_1(t_1^m) + \frac{c(t_1^m)p(t_3^M)}{q(t_3^M)}\right] e^{u_1(t_1^M)} + c(t_1^m)\sqrt{\frac{S_3(t_3^M)}{q(t_3^M)}},$$

其蕴涵

$$(\frac{a_1}{c})^l \le \left[\frac{b_1^u}{c^l} + (\frac{p}{q})^u\right] e^{u_1(t_1^M)} + \sqrt{(\frac{S_3}{q})^u}.$$

即

$$u_1(t_1^M) \ge \ln \frac{(\frac{a_1}{c})^l - \sqrt{(\frac{S_3}{q})^u}}{\frac{b_1^u}{c^l} + (\frac{p}{q})^u} := m_1^*. \tag{2.4.19}$$

由 (2.4.4) 的第 1 个方程可得

$$\begin{aligned} &\int_0^T a_1(t)dt + \lambda \int_0^T D_1(t)e^{u_2(t-\tau_1(t))-u_1(t)}dt + \int_0^T \frac{S_1(t)}{e^{u_1(t)}}dt \\ = \;& \lambda \int_0^T D_1(t)dt + \int_0^T b_1(t)e^{u_1(t)}dt + \lambda \int_0^T c(t)e^{u_3(t)}dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T |u_1'(t)|dt \;\le\; & \int_0^T a_1(t)dt + \lambda \int_0^T D_1(t)e^{u_2(t-\tau_1(t))-u_1(t)}dt + \int_0^T \frac{S_1(t)}{e^{u_1(t)}}dt \\ & + \lambda \int_0^T D_1(t)dt + \int_0^T b_1(t)e^{u_1(t)}dt + \lambda \int_0^T c(t)e^{u_3(t)}dt. \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^T |u_1'(t)|dt \;&\le\; 2\left[\lambda \textstyle\int_0^T D_1(t)dt + \int_0^T b_1(t)e^{u_1(t)}dt + \lambda \int_0^T c(t)e^{u_3(t)}dt\right] \\ &\le\; 2\left[\textstyle\int_0^T D_1(t)dt + e^{M_1}\int_0^T b_1(t)dt + e^{M_2}\int_0^T c(t)dt\right] \\ &\le\; 2T(\bar{D}_1 + \bar{b}_1 M_0 + \bar{c}\widetilde{M}_0). \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

由 (2.4.19) 与 (2.4.20) 可知

$$u_1(t_1^m) \ge u_1(t_1^M) - \textstyle\int_0^T |u_1'(t)|dt \ge m_1^* - 2T(\bar{D}_1 + \bar{b}_1 M_0 + \bar{c}\widetilde{M}_0). \tag{2.4.21}$$

情形 (2). 假设 $u_1(t_1^m) > u_2(t_2^m)$; 则 $u_1(t_2^m - \tau_2(t_2^m)) > u_2(t_2^m)$.
由此及 (2.4.9) 可知

$$b_2(t_2^m)e^{u_2(t_2^m)} \ge a_2(t_2^m) + \frac{S_2(t_2^m)}{e^{u_2(t_2^m)}}, \tag{2.4.22}$$

其蕴涵

$$e^{u_2(t_2^m)} \ge \frac{a_2(t_2^m) + \sqrt{a_2^2(t_2^m) + 4b_2(t_2^m)S_2(t_2^m)}}{2b_2(t_2^m)}.$$

即

$$u_2(t_2^m) \geq \ln(\frac{a_2+\sqrt{a_2^2+4b_2S_2}}{2b_2})^l := m_2^*. \tag{2.4.23}$$

由 (2.4.21) 与 (2.4.23) 便知结论 C 成立.

结论 D.

$$u_3(t_3^m) \geq \min\{m_3^*, m_4^*, m_5^*\} - 2T(\bar{d}+\bar{q}\widetilde{M}_0+\bar{\beta}\widetilde{M}_0) := m_2, \tag{2.4.24}$$

其中

$$m_3^* = \ln\frac{K_1^*-(\frac{d}{p})^u}{K+(\frac{c}{b_1})^u};\ m_4^* = \ln\frac{K_2^*-(\frac{d}{p})^u}{K};\ m_5^* = \ln\frac{K^*-(\frac{d}{p})^u}{K+(\frac{c}{b_1})^u}.$$

由 (2.4.4) 的第 3 个方程可得

$$\begin{aligned}\int_0^T p(t)e^{u_1(t)}dt+\int_0^T\frac{S_3(t)}{e^{u_3(t)}}dt &= \lambda\int_0^T d(t)dt+\int_0^T q(t)e^{u_3(t)}dt\\ &+\int_0^T\beta(t)\int_{-\tau}^0 k(s)e^{u_3(t+s)}dsdt,\\ \int_0^T|u_3'(t)|dt &\leq \int_0^T p(t)e^{u_1(t)}dt+\int_0^T\frac{S_3(t)}{e^{u_3(t)}}dt+\lambda\int_0^T d(t)dt\\ &+\int_0^T q(t)e^{u_3(t)}dt+\int_0^T\beta(t)\int_{-\tau}^0 k(s)e^{u_3(t+s)}dsdt.\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^T|u_3'(t)|dt &\leq 2\left[\lambda\textstyle\int_0^T d(t)dt+\int_0^T q(t)e^{u_3(t)}dt+\int_0^T\beta(t)\int_{-\tau}^0 k(s)e^{u_3(t+s)}dsdt\right]\\ &\leq 2\left[\textstyle\int_0^T d(t)dt+e^{M_2}\int_0^T q(t)dt+e^{M_2}\int_0^T\beta(t)dt\right]\\ &\leq 2T(\bar{d}+\bar{q}\widetilde{M}_0+\bar{\beta}\widetilde{M}_0).\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

由 (2.4.7) 得

$$\begin{aligned}\left[q(t_3^M)+\beta(t_3^M)\right]e^{u_3(t_3^M)} &\geq p(t_3^M)e^{u_1(t_3^M)}-d(t_3^M)\\ &\geq p(t_3^M)e^{u_1(t_1^m)}-d(t_3^M).\end{aligned} \tag{2.4.26}$$

分两种情形讨论:

情形 (I). 假设 (H_3) 成立.

若 $u_1(t_1^m) \leq u_2(t_2^m)$, 则由 (2.4.8) 知

$$\begin{aligned}e^{u_1(t_1^m)} &\geq \frac{a_1(t_1^m)-c(t_1^m)e^{u_3(t_1^m)}}{b_1(t_1^m)}+\frac{S_1(t_1^m)}{b_1(t_1^m)e^{u_1(t_1^m)}}\\ &\geq \frac{a_1(t_1^m)-c(t_1^m)e^{u_3(t_3^M)}}{b_1(t_1^m)}+\frac{S_1(t_1^m)}{b_1(t_1^m)e^{M_1}}.\end{aligned}$$

将此式代入 (2.4.26) 得

$$\begin{aligned}\left[q(t_3^M)+\beta(t_3^M)\right]e^{u_3(t_3^M)} &\geq \frac{p(t_3^M)a_1(t_1^m)}{b_1(t_1^m)}-\frac{p(t_3^M)c(t_1^m)e^{u_3(t_3^M)}}{b_1(t_1^m)}\\&+\frac{p(t_3^M)S_1(t_1^m)}{b_1(t_1^m)e^{M_1}}-d(t_3^M),\end{aligned}$$

其蕴涵

$$\left[\frac{q(t_3^M)}{p(t_3^M)}+\frac{\beta(t_3^M)}{p(t_3^M)}+\frac{c(t_1^m)}{b_1(t_1^m)}\right]e^{u_3(t_3^M)}\geq\frac{a_1(t_1^m)}{b_1(t_1^m)}+\frac{S_1(t_1^m)}{b_1(t_1^m)e^{M_1}}-\frac{d(t_3^M)}{p(t_3^M)}.$$

所以,

$$\left[K+(\frac{c}{b_1})^u\right]e^{u_3(t_3^M)}\geq K_1^*-(\frac{d}{p})^u.$$

即

$$u_3(t_3^M)\geq\ln\frac{K_1^*-(\frac{d}{p})^u}{K+(\frac{c}{b_1})^u}:=m_3^*. \tag{2.4.27}$$

由 (2.4.25) 与 (2.4.27) 便知

$$u_3(t_3^m)\geq u_3(t_3^M)-\int_0^T|u_3'(t)|dt\geq m_3^*-2T(\bar d+\bar q\widetilde{M}_0+\bar\beta\widetilde{M}_0). \tag{2.4.28}$$

若 $u_1(t_1^m)>u_2(t_2^m)$, 则由 (2.4.22) 与 (2.4.26) 可知

$$\begin{aligned}\left[q(t_3^M)+\beta(t_3^M)\right]e^{u_3(t_3^M)} &\geq p(t_3^M)e^{u_2(t_2^m)}-d(t_3^M)\\&\geq\frac{p(t_3^M)[a_2(t_2^m)+S_2(t_2^m)e^{-M_1}]}{b_2(t_2^m)}-d(t_3^M),\end{aligned}$$

其蕴涵

$$\left[\frac{q(t_3^M)}{p(t_3^M)}+\frac{\beta(t_3^M)}{p(t_3^M)}\right]e^{u_3(t_3^M)}\geq\frac{a_2(t_2^m)+S_2(t_2^m)e^{-M_1}}{b_2(t_2^m)}-\frac{d(t_3^M)}{p(t_3^M)}.$$

所以,

$$Ke^{u_3(t_3^M)}\geq K_2^*-(\frac{d}{p})^u.$$

即

$$u_3(t_3^M)\ \geq\ \ln\frac{K_2^*-(\frac{d}{p})^u}{K}:=m_4^*. \tag{2.4.29}$$

由 (2.4.25) 及 (2.4.29), 我们有

$$u_3(t_3^m)\geq u_3(t_3^M)-\int_0^T|u_3'(t)|dt\geq m_4^*-2T(\bar d+\bar q\widetilde{M}_0+\bar\beta\widetilde{M}_0). \tag{2.4.30}$$

情形 (II). 假设 (H_4) 成立.
由 (2.4.8) 知

$$\begin{aligned} b_1(t_1^m)e^{u_1(t_1^m)} &\geq a_1(t_1^m) - \lambda D_1(t_1^m) - \lambda c(t_1^m)e^{u_3(t_1^m)} + \frac{S_1(t_1^m)}{e^{u_1(t_1^m)}} \\ &\geq a_1(t_1^m) - D_1(t_1^m) - c(t_1^m)e^{u_3(t_3^M)} + \frac{S_1(t_1^m)}{e^{M_1}}. \end{aligned}$$

所以,

$$e^{u_1(t_1^m)} \geq \frac{a_1(t_1^m) - D_1(t_1^m) - c(t_1^m)e^{u_3(t_3^M)} + S_1(t_1^m)e^{-M_1}}{b_1(t_1^m)}.$$

将此式代入 (2.4.26) 得

$$\begin{aligned} \left[q(t_3^M) + \beta(t_3^M)\right] e^{u_3(t_3^M)} &\geq \frac{p(t_3^M)[a_1(t_1^m) - D_1(t_1^m)]}{b_1(t_1^m)} - \frac{p(t_3^M)c(t_1^m)e^{u_3(t_3^M)}}{b_1(t_1^m)} \\ &+ \frac{p(t_3^M)S_1(t_1^m)}{b_1(t_1^m)e^{M_1}} - d(t_3^M), \end{aligned}$$

其蕴涵

$$\left[\frac{q(t_3^M)}{p(t_3^M)} + \frac{\beta(t_3^M)}{p(t_3^M)} + \frac{c(t_1^m)}{b_1(t_1^m)}\right] e^{u_3(t_3^M)} \geq \frac{a_1(t_1^m) - D_1(t_1^m) + S_1(t_1^m)e^{-M_1}}{b_1(t_1^m)} - \frac{d(t_3^M)}{p(t_3^M)}.$$

所以,

$$\left[K + (\frac{c}{b_1})^u\right] e^{u_3(t_3^M)} \geq K^* - (\frac{d}{p})^u.$$

即

$$u_3(t_3^M) \geq \ln \frac{K^* - (\frac{d}{p})^u}{K + (\frac{c}{b_1})^u} := m_5^*. \tag{2.4.31}$$

由 (2.4.25) 与 (2.4.31) 可知

$$u_3(t_3^m) \geq u_3(t_3^M) - \int_0^T |u_3'(t)|dt \geq m_5^* - 2T(\bar{d} + \bar{q}\widetilde{M_0} + \bar{\beta}\widetilde{M_0}). \tag{2.4.32}$$

由 (2.4.28), (2.4.30) 及 (2.4.32) 便知结论 D 成立.

显然, 下列不等式之一成立:

$$(i)\ \ M_1^* > m_2^*,\ (ii)\ \ M_1^* \leq m_2^*.$$

因为 $m_1^* < M_1^*$ 且 $m_2^* \leq M_2^*$, (ii) 蕴涵 $M_2^* > m_1^*$. 于是, 根据结论 A 与结论 B, 下列四种情形之一必成立:

(P_1) $m_1 \leq m_1^* - 2T(\bar{D}_1 + \bar{b}_1 M_0 + \bar{c}\widetilde{M_0}) \leq u_1(t_1^m) \leq u_2(t_2^m),\ u_2(t_2^M) \leq u_1(t_1^M) \leq M_1^* \leq M_1;$

(P_2) $m_1 \le m_2^* \le u_2(t_2^m) < u_1(t_1^m)$, $u_2(t_2^M) \le u_1(t_1^M) \le M_1^* \le M_1$;

(P_3) $m_1 \le m_1^* - 2T(\bar{D}_1 + \bar{b}_1 M_0 + \bar{c}\widetilde{M}_0) \le u_1(t_1^m) \le u_2(t_2^m)$, $u_1(t_1^M) < u_2(t_2^M) \le M_2^* \le M_1$;

(P_4) $m_1 \le m_2^* \le u_2(t_2^m) < u_1(t_1^m)$, $u_1(t_1^M) < u_2(t_2^M) \le M_2^* \le M_1$.

由此及结论 C, 结论 D, 我们有

$$\max_{t\in[0,T]} |u_i(t)| \le \max\{|M_1|, |M_2|, |m_1|, |m_2|\} := M^*, i = 1, 2, 3.$$

显然, M^* 与 λ 无关.

令

$$B_i^* := \bar{a}_i + \sqrt{(\bar{a}_i)^2 + 4\bar{b}_i\bar{S}_i},\ i = 1, 2.$$

取充分大的 M 使得

$$\begin{aligned} M &> 3\max\{M^*, |m_1^*|, |m_2^*|, |m_3^*|, |m_4^*|, |m_5^*|\}, \\ M &> |v_1^*| + |v_2^*| + |v_3^*|, \end{aligned}$$

其中

$$v_1^* = \ln\frac{B_1^*}{2\bar{b}_1},\ v_2^* = \ln\frac{B_2^*}{2\bar{b}_2}, \tag{2.4.33}$$

$$v_3^* = \ln\frac{\bar{p}B_1^* + \sqrt{[\bar{p}B_1^*]^2 + 16(\bar{b}_1)^2\,[\bar{q}+\bar{\beta}]\,\bar{S}_3}}{4\bar{b}_1[\bar{q}+\bar{\beta}]}. \tag{2.4.34}$$

显然, 引理 2.2.2 的条件 (i) 满足.

易见,

$$g(u) = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 - \bar{b}_1 e^{u_1} + \dfrac{\bar{S}_1}{e^{u_1}} \\ \bar{a}_2 - \bar{b}_2 e^{u_2} + \dfrac{\bar{S}_2}{e^{u_2}} \\ \bar{p}e^{u_1} - [\bar{q}+\bar{\beta}]e^{u_3} + \dfrac{\bar{S}_3}{e^{u_3}} \end{pmatrix} \ne 0,\ \forall (u_1, u_2, u_3) \in \partial B_M(R^3),$$

及 $\deg(g, B_M(R^3), 0) = -1$. 于是, 引理 2.2.2 的条件 (ii),(iii) 满足.

根据引理 2.2.2, 系统 (2.4.3) 有一个 T- 周期解 $(u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t))^T$. 易知

$$(x_1^*(t), x_2^*(t), y^*(t))^T = (\exp[u_1^*(t)], \exp[u_2^*(t)], \exp[u_3^*(t)])^T$$

是系统 (2.4.1) 的一个 T- 周期正解. 类似结论 A-D, 可证

$$m_1 \le u_i^*(t) \le M_1\ (i = 1, 2),\ m_2 \le u_3^*(t) \le M_2,\ t \ge 0,$$

其蕴涵

$$m_0 \le x_i^*(t) \le M_0\ (i = 1, 2),\ \widetilde{m}_0 \le y^*(t) \le \widetilde{M}_0,\ t \ge 0.$$

证毕.

考虑系统 (2.4.1) 当 $S_i(t)\equiv 0\ (i=1,2,3)$ 时的特殊情形. 此时, 由定理 2.4.1 有

推论 2.4.1. 除条件 (H_1), (H_2) 外, 进一步假设系统 (2.4.1) 满足下列条件之一:

$(H_3)'$ $(\frac{a_i}{b_i})^l > (\frac{d}{p})^u$, $i=1,2$;

$(H_4)'$ $(\frac{a_1-D_1}{b_1})^l > (\frac{d}{p})^u$.

则系统 (2.4.1) 至少有一个 T- 周期正解.

注 2.4.1. 推论 2.4.1 推广并改进了文献 [74] 的定理 2.1.

下面研究系统 (2.4.1) 正周期解的全局吸引性.

定理 2.4.2. 在定理 2.4.1 的假设下, 进一步假设系统 (2.4.1) 满足:

(H_5) 矩阵 $Q=\begin{pmatrix} b_1^l & -\frac{D_2^u}{m_0(1-\tau_2')^l} & -p^u \\ -\frac{D_1^u}{m_0(1-\tau_1')^l} & b_2^l & 0 \\ -c^u & 0 & q^l-\beta^u \end{pmatrix}$ 是 M- 矩阵.

则系统 (2.4.1) 有一个 T- 周期正解吸引所有的正解.

证明. 由定理 2.4.1, 系统 (2.4.1) 至少一个 T- 周期正解, 比如说 $(x_1^*(t),x_2^*(t),y^*(t))^T$ 使得

$$m_0\le x_i^*(t)\le M_0\ (i=1,2),\ \widetilde{m}_0\le y^*(t)\le \widetilde{M}_0,\ t\ge 0.$$

假设 $(x_1(t),x_2(t),y(t))^T$ 是系统 (2.4.1) 满足初始条件 (2.4.2) 的一个正解.

由 (H_5) 及引理 2.2.3 知, 存在常数 $\delta_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\delta_1 b_1^l > \frac{\delta_2 D_2^u}{m_0(1-\tau_2')^l}+\delta_3 p^u,\quad \delta_2 b_2^l > \frac{\delta_1 D_1^u}{m_0(1-\tau_1')^l},\quad \delta_3(q^l-\beta^u)>\delta_1 c^u. \tag{2.4.35}$$

考虑下列 Lyapunov 泛函:

$$\begin{aligned} V(t) &= \textstyle\sum_{i=1}^2 \delta_i \left|\ln x_i(t)-\ln x_i^*(t)\right| + \delta_3\left|\ln y(t)-\ln y^*(t)\right| \\ &+ \delta_3\beta^u \textstyle\int_{-\tau}^0 k(s)\int_{t+s}^t |y(\theta)-y^*(\theta)|\,d\theta ds,\ t\ge 0. \end{aligned}$$

沿系统 (2.4.1) 的解计算 $V(t)$ 的上右导数 $D^+V(t)$, 可得

$$\begin{aligned} D^+V(t) &\le -\delta_1 b_1^l\,|\,x_1(t)-x_1^*(t)|+\delta_1 c^u\,|y(t)-y^*(t)|+\delta_1\widetilde{D}_1(t) \\ &- \delta_2 b_2^l\,|\,x_2(t)-x_2^*(t)|+\delta_2\widetilde{D}_2(t)-\delta_3 q^l\,|y(t)-y^*(t)| \\ &+ \delta_3\beta^u\textstyle\int_{-\tau}^0 k(s)\,|y(t+s)-y^*(t+s)|\,d\theta ds+\delta_3 p^u\,|\,x_1(t)-x_1^*(t)|+\delta_3\widetilde{S}(t) \\ &+ \delta_3\beta^u\textstyle\int_{-\tau}^0 k(s)\,|y(t)-y^*(t)|\,ds-\delta_3\beta^u\int_{-\tau}^0 k(s)\,|y(t+s)-y^*(t+s)|\,ds, \end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{D}_1(t)=\begin{cases} D_1(t)(\dfrac{x_2(t-\tau_1(t))}{x_1(t)}-\dfrac{x_2^*(t-\tau_1(t))}{x_1^*(t)})+S_1(t)(\dfrac{1}{x_1(t)}-\dfrac{1}{x_1^*(t)}), & x_1(t)>x_1^*(t), \\ D_1(t)(\dfrac{x_2^*(t-\tau_1(t))}{x_1^*(t)}-\dfrac{x_2(t-\tau_1(t))}{x_1(t)})+S_1(t)(\dfrac{1}{x_1^*(t)}-\dfrac{1}{x_1(t)}), & x_1(t)<x_1^*(t), \\ D_1(t)|\dfrac{x_2(t-\tau_1(t))}{x_1(t)}-\dfrac{x_2^*(t-\tau_1(t))}{x_1^*(t)}|, & x_1(t)=x_1^*(t), \end{cases}$$

$$\widetilde{D}_2(t)=\begin{cases} D_2(t)(\dfrac{x_1(t-\tau_2(t))}{x_2(t)}-\dfrac{x_1^*(t-\tau_2(t))}{x_2^*(t)})+S_2(t)(\dfrac{1}{x_2(t)}-\dfrac{1}{x_2^*(t)}), & x_2(t)>x_2^*(t), \\ D_2(t)(\dfrac{x_1^*(t-\tau_2(t))}{x_2^*(t)}-\dfrac{x_1(t-\tau_2(t))}{x_2(t)})+S_2(t)(\dfrac{1}{x_2^*(t)}-\dfrac{1}{x_2(t)}), & x_2(t)<x_2^*(t), \\ D_2(t)|\dfrac{x_1(t-\tau_2(t))}{x_2(t)}-\dfrac{x_1^*(t-\tau_2(t))}{x_2^*(t)}|, & x_2(t)=x_2^*(t), \end{cases}$$

$$\widetilde{S}(t)=\begin{cases} S_3(t)(\dfrac{1}{y(t)}-\dfrac{1}{y^*(t)}), & y(t)>y^*(t), \\ S_3(t)(\dfrac{1}{y^*(t)}-\dfrac{1}{y(t)}), & y(t)<y^*(t), \\ 0, & y(t)=y^*(t). \end{cases}$$

对于 $\widetilde{D}_1(t)$, 有下列三种情形要考虑:

(i) 若 $x_1(t)>x_1^*(t)$, 则

$$\widetilde{D}_1(t)\le\frac{D_1(t)}{x_1^*(t)}\left[x_2(t-\tau_1(t))-x_2^*(t-\tau_1(t))\right]\le\frac{D_1^u}{m_0}\left|x_2(t-\tau_1(t))-x_2^*(t-\tau_1(t))\right|.$$

(ii) 若 $x_1(t)<x_1^*(t)$, 则

$$\widetilde{D}_1(t)\le\frac{D_1(t)}{x_1^*(t)}\left[x_2^*(t-\tau_1(t))-x_2(t-\tau_1(t))\right]\le\frac{D_1^u}{m_0}\left|x_2(t-\tau_1(t))-x_2^*(t-\tau_1(t))\right|.$$

(iii) 若 $x_1(t)=x_1^*(t)$, 则

$$\widetilde{D}_1(t)=\frac{D_1(t)}{x_1^*(t)}\left|x_2(t-\tau_1(t))-x_2^*(t-\tau_1(t))\right|\le\frac{D_1^u}{m_0}\left|x_2(t-\tau_1(t))-x_2^*(t-\tau_1(t))\right|.$$

由 (i)-(iii), 我们有

$$\widetilde{D}_1(t)\le\frac{D_1^u}{m_0}\left|x_2(t-\tau_1(t))-x_2^*(t-\tau_1(t))\right|,\ t\ge 0.$$

用类似方法考虑 $\widetilde{D}_2(t)$, 可得

$$\widetilde{D}_2(t)\le\frac{D_2^u}{m_0}\left|x_1(t-\tau_2(t))-x_1^*(t-\tau_2(t))\right|,\ t\ge 0.$$

易见 $\widetilde{S}(t) \le 0,\ t \ge 0$.
因此，我们有

$$\begin{aligned} D^+V(t) \le & -(\delta_1 b_1^l - \delta_3 p^u)\,|\,x_1(t) - x_1^*(t)| - \delta_2 b_2^l\,|x_2(t) - x_2^*(t)| \\ & - (\delta_3 q^l - \delta_3 \beta^u - \delta_1 c^u)\,|y(t) - y^*(t)| \\ & + \frac{\delta_2 D_2^u}{m_0}\,|x_1(t - \tau_2(t)) - x_1^*(t - \tau_2(t))| \\ & + \frac{\delta_1 D_1^u}{m_0}\,|x_2(t - \tau_1(t)) - x_2^*(t - \tau_1(t))|,\ t \ge 0. \end{aligned} \tag{2.4.36}$$

(2.4.36) 式两边积分，得

$$\begin{aligned} V(t) & + (\delta_1 b_1^l - \delta_3 p^u) \textstyle\int_0^t |\,x_1(\theta) - x_1^*(\theta)|\,d\theta + \delta_2 b_2^l \int_0^t |x_2(\theta) - x_2^*(\theta)|\,d\theta \\ & + (\delta_3 q^l - \delta_3 \beta^u - \delta_1 c^u) \textstyle\int_0^t |y(\theta) - y^*(\theta)|\,d\theta \\ & - \frac{\delta_2 D_2^u}{m_0} \int_0^t |x_1(s - \tau_2(s)) - x_1^*(s - \tau_2(s))|\,ds \\ & - \frac{\delta_1 D_1^u}{m_0} \int_0^t |x_2(s - \tau_1(s)) - x_2^*(s - \tau_1(s))|\,ds \\ \le & \ V(0) < +\infty,\ t \ge 0. \end{aligned} \tag{2.4.37}$$

设 $s = g_i(\theta)$ 是 $\theta = s - \tau_i(s)(i = 1, 2)$ 的反函数，
则

$$\begin{aligned} & \textstyle\int_0^t |x_1(s - \tau_2(s)) - x_1^*(s - \tau_2(s))|\,ds \\ = & \textstyle\int_{-\tau_2(0)}^{t-\tau_2(t)} \frac{|x_1(\theta) - x_1^*(\theta)|}{1 - \tau_2'(g_2(\theta))} d\theta \le \int_{-\tau_2(0)}^{t-\tau_2(t)} \frac{|x_1(\theta) - x_1^*(\theta)|}{(1 - \tau_2')^l} d\theta \\ \le & \textstyle\frac{1}{(1-\tau_2')^l} \int_0^t |x_1(\theta) - x_1^*(\theta)|\,d\theta + \frac{1}{(1-\tau_2')^l} \int_{-\tau_2(0)}^0 |x_1(\theta) - x_1^*(\theta)|\,d\theta,\ t \ge 0. \end{aligned} \tag{2.4.38}$$

类似有，

$$\begin{aligned} & \textstyle\int_0^t |x_2(s - \tau_1(s)) - x_2^*(s - \tau_1(s))|\,ds \\ \le & \textstyle\frac{1}{(1-\tau_1')^l} \int_0^t |x_2(\theta) - x_2^*(\theta)|\,d\theta + \frac{1}{(1-\tau_1')^l} \int_{-\tau_1(0)}^0 |x_2(\theta) - x_2^*(\theta)|\,d\theta,\ t \ge 0. \end{aligned} \tag{2.4.39}$$

将 (2.4.38), (2.4.39) 代入 (2.4.37) 得

$$\begin{aligned} V(t) & + (\delta_1 b_1^l - \frac{\delta_2 D_2^u}{m_0(1 - \tau_2')^l} - \delta_3 p^u) \int_0^t |\,x_1(\theta) - x_1^*(\theta)|\,d\theta \\ & + (\delta_2 b_2^l - \frac{\delta_1 D_1^u}{m_0(1 - \tau_1')^l}) \int_0^t |x_2(\theta) - x_2^*(\theta)|\,d\theta + (\delta_3 q^l - \delta_3 \beta^u - \delta_1 c^u) \int_0^t |y(\theta) - y^*(\theta)|\,d\theta \\ \le & \ V(0) + \frac{\delta_2 D_2^u}{m_0(1 - \tau_2')^l} \int_{-\tau_2(0)}^0 |x_1(\theta) - x_1^*(\theta)|\,d\theta + \frac{\delta_1 D_1^u}{m_0(1 - \tau_1')^l} \int_{-\tau_1(0)}^0 |x_2(\theta) - x_2^*(\theta)|\,d\theta \\ = & \ V^*(0) < +\infty,\ t \ge 0. \end{aligned}$$

由 (2.4.35) 知存在 $\alpha>0$ 使得

$$V(t)+\alpha\int_0^t\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i(\theta)-x_i^*(\theta)|+|y(\theta)-y^*(\theta)|\right)ds\le V^*(0)<+\infty,\ t\ge 0,$$

其蕴涵

$$\sum_{i=1}^{2}|x_i(t)-x_i^*(t)|+|y(t)-y^*(t)|\in L^1[0,+\infty),$$

$$\sum_{i=1}^{2}\delta_i\,|\ln x_i(t)-\ln x_i^*(t)|+\delta_3\,|\ln y(t)-\ln y^*(t)|\le V(t)\le V^*(0)<+\infty,\ t\ge 0.$$

所以,

$$|\ln x_i(t)-\ln x_i^*(t)|\le\frac{V^*(0)}{\delta_i}\ (i=1,2),\ |\ln y(t)-\ln y^*(t)|\le\frac{V^*(0)}{\delta_3},\ t\ge 0,$$

其蕴涵

$$\begin{aligned}\exp[-\frac{V^*(0)}{\delta_i}]\min_{t\in[0,T]}x_i^*(t)\ &\le\ x_i(t)\le\exp[\frac{V^*(0)}{\delta_i}]\max_{t\in[0,T]}x_i^*(t)<+\infty\ (i=1,2),\ t\ge 0,\\ \exp[-\frac{V^*(0)}{\delta_3}]\min_{t\in[0,T]}y^*(t)\ &\le\ y(t)\le\exp[\frac{V^*(0)}{\delta_3}]\max_{t\in[0,T]}y^*(t)<+\infty\ (i=1,2),\ t\ge 0.\end{aligned}\tag{2.4.40}$$

由 $x_i^*(t)(i=1,2)$, $y^*(t)$ 的有界性及 (2.4.40) 可得 $x_i(t)(i=1,2)$, $y(t)$ 关于 $t\ge 0$ 上下有界. 所以, $x_i(t)-x_i^*(t)(i=1,2)$, $y(t)-y^*(t)$ 及其导数在 $[0,+\infty)$ 上有界. 因此, $\sum\limits_{i=1}^{2}|x_i(t)-x_i^*(t)|+|y(t)-y^*(t)|$ 一致连续. 由引理 2.2.4 可知

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{2}|x_i(t)-x_i^*(t)|+|y(t)-y^*(t)|\right)=0.$$

因此

$$\lim_{t\to+\infty}|x_i(t)-x_i^*(t)|=0\ (i=1,2),\ \lim_{t\to+\infty}|y(t)-y^*(t)|=0.$$

此结果蕴涵系统 (2.4.1) 有一个 T- 周期正解吸引所有的正解. 证毕.

考虑系统 (2.4.1) 当 $S_i(t)\equiv 0\ (i=1,2,3)$ 的特殊情形. 由定理 2.4.1 和引理 2.2.3, 我们有

推论 2.4.2. 在推论 2.4.1 的假设下, 进一步假设系统 (2.4.1) 满足下列条件之一:

$(H_5)'$ $b_1^l>\dfrac{D_2^u}{m_0^*(1-\tau_2')^l}+p^u$, $b_2^l>\dfrac{D_1^u}{m_0^*(1-\tau_1')^l}$, $q^l-\beta^u>c^u$;

$(H_5)''$ $b_1^l>\dfrac{D_1^u}{m_0^*(1-\tau_1')^l}+c^u$, $b_2^l>\dfrac{D_2^u}{m_0^*(1-\tau_2')^l}$, $q^l-\beta^u>p^u$;

其中 $m_0^* = \min\left\{ \dfrac{(\dfrac{a_1}{c})^l \exp[-2T(\bar{D}_1 + (\bar{b}_1 + \bar{c}(\dfrac{p}{q})^u) \max\{(\dfrac{a_1}{b_1})^u, (\dfrac{a_2}{b_2})^u\}]}{\dfrac{b_1^u}{c^l} + (\dfrac{p}{q})^u}, (\dfrac{a_2}{b_2})^l \right\}$.

则 (2.4.1) 有一个 T- 周期正解吸引所有的正解.

第三章 Nussbaum 度与中立型时滞种群模型的周期解问题

§3.1 引言

对于中立型时滞种群模型的周期解问题, 由于 Mawhin 重合度理论中算子 N 的定义空间是 $C^1(R,R)$ 空间的子空间, 因而要验证 $L-$ 紧的定义中 " $K_P(I-Q)N:\bar{\Omega}\times[0,1]\to X$ 是紧的" 的条件是极其困难的, 因此, 在此情形下, 很难直接将 Mawhin 延拓定理应用于中立型时滞模型周期解问题的研究. 对于中立型单种群时滞模型, 可利用文 [60] 给出的一个 $k-$ 集压缩延拓定理进行研究, 参看文 [20], 但该方法不适用于中立型多种群时滞模型. 本章利用 $k-$ 集压缩映射的 Nussbaum 度方法研究中立型多种群时滞模型的周期解问题.

考虑下列具投放的中立型时滞竞争扩散系统

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_1(t)\left[a_1(t)-b_1(t)x_1(t)-c_1(t)y(t)\right]+D_1(t)[x_2(t)-x_1(t)]+S_1(t),\\
x_2'(t) &= x_2(t)\left[a_2(t)-b_2(t)x_2(t)\right]+D_2(t)[x_1(t)-x_2(t)]+S_2(t),\\
y'(t) &= y(t)[a_3(t)-b_3(t)y(t)-\alpha(t)y(t-\tau_1(t))-\beta(t)\textstyle\int_{-\tau}^0 k(s)y(t+s)ds\\
&- \gamma(t)y'(t-\tau_2(t))-c_3(t)x_1(t)],
\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

满足初始条件

$$\begin{aligned}
&x_1(s)=\varphi_1(s)\ge 0,\ s\in[-\sigma,0],\ \varphi_1(0)>0,\\
&x_2(s)=\varphi_2(s)\ge 0,\ s\in[-\sigma,0],\ \varphi_2(0)>0,\\
&y(s)=\psi(s)\ge 0,\ y'(s)=\psi'(s),\ s\in[-\sigma,0],\ \psi(0)>0,
\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

其中 x_1 与 y 是种群 x,y 在路径 1 的种群密度, x_2 是种群 x 在路径 2 的种群密度. 种群 y 限制在路径 1, 而种群 x 可在两个路径扩散. $D_i(t)(i=1,2)$ 是种群 x 的扩散系数. $S_i(t)(i=1,2)$ 表示投放率. $\varphi_1(s),\varphi_2(s)$ 连续且 $\psi(s)$ 在 $[-\sigma,0]$ 上连续可微, $\sigma=\max\{\tau,\sup\limits_{t\in R}\tau_1(t),\sup\limits_{t\in R}\tau_2(t)\}$.

当 $S_i(t)\equiv 0\ (i=1,2),\alpha(t)\equiv 0,\gamma(t)\equiv 0$, 系统 (3.1.1) 曾被文献 [71] (对 $\beta(t)\equiv 0$ 的情形), [73],[75] 所研究.

取 $S_i(t)\equiv 0\ (i=1,2),x_1(t)\equiv 0,x_2(t)\equiv 0,\beta(t)\equiv 0$, 系统 (3.1.1) 可化为下列中立型时滞种群模型:

$$y'(t)=y(t)[a_3(t)-b_3(t)y(t)-\alpha(t)y(t-\tau_1(t))-\gamma(t)y'(t-\tau_2(t))],\tag{3.1.3}$$

此模型是由文献 [38] 首次引入的. 当 $\gamma(t)\equiv 0$, 系统 (3.1.3) 曾被文献 [22], [68] 所研究. 当 $\tau_1(t)=\tau_2(t)$, 系统 (3.1.3) 曾被文献 [20],[43] 所研究.

本章旨在利用与文献 [20,22,26,38,43,66,71] 不同的方法研究系统 (3.1.1) 正周期解的存在性.

§3.2 预备引理

对于固定的 $\sigma \geq 0$，设 $C := C([-\sigma, 0]; R^n)$. 如果 $x \in C([\gamma-\sigma, \gamma+\delta]; R^n)$ 对某个 $\delta > 0$ 和 $\gamma \in R$ 成立，则对 $t \in [\gamma, \gamma+\delta]$ 有 $x_t \in C$. 其中 x_t 定义如下:

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \forall \theta \in [-\sigma, 0].$$

C 中的上确界模 $\|\cdot\|_c$ 定义为:

$$\|\phi\|_c = \max_{\theta \in [-\sigma, 0]} \|\phi(\theta)\|, \forall \phi \in C;$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 R^n 中的模，且对任意 $u = (u_1, \cdots, u_n) \in R^n$, $\|u\| = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.

考虑下列泛函微分方程:

$$\frac{d}{dt}[x(t) - \lambda b(t, x_t)] = \lambda f(t, x_t, \lambda) \tag{3.2.1}$$

其中 $f: R \times C \times [0,1] \to R^n$ 全连续， $b: R \times C \to R^n$ 连续. 此外，假定存在 $T > 0$ 使得对任意 $(t, \varphi, \lambda) \in R \times C \times [0,1]$, 有 $f(t+T, \varphi, \lambda) = f(t, \varphi, \lambda), b(t+T, \varphi) = b(t, \varphi)$.

引理 3.2.1. 假设存在常数 $M > 0, k \in (0,1)$ 使得:

(i) $\|b(t,\varphi) - b(t,\psi)\| \leq k\|\varphi - \psi\|_c$, $t \in R$, $\varphi, \psi \in C_M = \{\phi \in C : \|\phi\|_c \leq M\}$;

(ii) $f: R \times C_M \times [0,1] \to R^n$ 关于 λ 的连续性关于 $(t, \varphi) \in R \times C_M$ 是一致的;

(iii) 对任意 $\lambda \in (0,1)$ 及方程 (3.2.1) 的任意 T- 周期解 x, 均有 $\|x(t)\| < M$, $t \in R$;

(iv) $g(u) := \frac{1}{T}\int_0^T f(s, \hat{u}, 0)ds \neq 0$, $u \in \partial B_M(R^n)$, 其中 $B_M(R^n) = \{u \in R^n : \|u\| < M\}$, $\hat{u}$ 表示从 $[-\sigma, 0]$ 到 R^n 的常值映射，值为 $u \in R^n$;

(v) Brouwer 度 $deg_B(g, B_M(R^n), 0) \neq 0$.

则系统

$$\frac{d}{dt}[x(t) - b(t, x_t)] = f(t, x_t, 1) \tag{3.2.2}$$

至少有一个 T- 周期解满足 $\sup_{t \in R} \|x(t)\| \leq M$.

证明. 设 $C_T = \{x \in C(R, R^n) : x(t+T) = x(t), t \in R\}$. 易知 C_T 关于范数 $\|x\|_0 = \sup_{t \in R} \|x(t)\|$ 是 Banach 空间.

考虑下列辅助方程:

$$x(t) = x(0) - \lambda b(0, x_0) + \lambda b(t, x_t) + \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_s, \lambda)ds + \lambda\left[\int_0^t f(s, x_s, \lambda)ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_s, \lambda)ds\right]. \tag{3.2.3}$$

假设 $x(t)$ 是方程 (3.2.1) 关于某个 $\lambda \in (0,1]$ 的一个 T- 周期解. 由 (3.2.1) 可知

$$\int_0^T f(s, x_s, \lambda)ds = 0,\ x(t) - \lambda b(t, x_t) = x(0) - \lambda b(0, x_0) + \lambda \int_0^t f(s, x_s, \lambda)ds.$$

由此可知 $x(t)$ 也是方程 (3.2.3) 关于某个 $\lambda\in(0,1]$ 的一个 T- 周期解.

另一方面，假设 $x(t)$ 是方程 (3.2.3) 关于某个 $\lambda\in(0,1]$ 的一个 T- 周期解. 在 (3.2.3) 中取 $t=0$, 有 $\int_0^T f(s,x_s,\lambda)ds=0$. 所以 (3.2.3) 可化为

$$x(t)-\lambda b(t,x_t)=x(0)-\lambda b(0,x_0)+\lambda\int_0^t f(s,x_s,\lambda)ds,$$

其蕴涵 $x(t)$ 是方程 (3.2.1) 的一个 T- 周期解.

所以，对于 $\lambda\in(0,1]$, 求方程 (3.2.1) 的 T- 周期解等价于求方程 (3.2.3) 的 T- 周期解.

令 $\Omega=\{x\in C_T:\|x\|_0<M\}$. 定义映射 $H(\cdot,\cdot),H_i(\cdot,\cdot)(i=1,2):\bar\Omega\times[0,1]\to C_T$ 如下:

$$\begin{aligned}H(x,\lambda)(t) &= x(0)-\lambda b(0,x_0)+\lambda b(t,x_t)+\tfrac{1}{T}\textstyle\int_0^T f(s,x_s,\lambda)ds\\ &+ \lambda[\textstyle\int_0^t f(s,x_s,\lambda)ds-\tfrac{t}{T}\int_0^T f(s,x_s,\lambda)ds],\\ H_1(x,\lambda)(t) &= \lambda b(t,x_t),\\ H_2(x,\lambda)(t) &= x(0)-\lambda b(0,x_0)+\tfrac{1}{T}\textstyle\int_0^T f(s,x_s,\lambda)ds\\ &+ \lambda[\textstyle\int_0^t f(s,x_s,\lambda)ds-\tfrac{t}{T}\int_0^T f(s,x_s,\lambda)ds],\ \forall(x,\lambda)\in\bar\Omega\times[0,1].\end{aligned}$$

容易看出， $H(\cdot,\cdot):\bar\Omega\times[0,1]\to C_T$ 连续， $H(x,\lambda)$ 关于 λ 的连续性关于 $x\in\bar\Omega$ 是一致的.

对固定的 $\lambda\in[0,1]$, 由假设 (i) 可知 $H_1(\cdot,\lambda)$ 是一个 k- 集压缩. 由 Arzela-Ascóli 定理，易知 $H_2(\cdot,\lambda):\bar\Omega\times[0,1]\to C_T$ 全连续. 所以，对固定的 $\lambda\in[0,1]$, $H(\cdot,\lambda):\bar\Omega\to C_T$ 是一个 k- 集压缩.

下证 $x\neq H(x,\lambda),\forall x\in\partial\Omega,\forall\lambda\in[0,1)$.

由假设 (iii), 我们有 $x\neq H(x,\lambda),\forall x\in\partial\Omega,\lambda\in(0,1)$. 若对某个 $x\in\partial\Omega$, 有 $x=H(x,0)$, 则

$$x(t)\equiv x(0)+\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_s,0)ds,t\in R,$$

其蕴涵 $\frac{1}{T}\int_0^T f(s,\hat x,0)ds=0$. 这与假设 (iv) 矛盾.

若对某个 $x\in\partial\Omega$, 有 $x=H(x,1)$, 则定理已成立. 否则， $x\neq H(x,\lambda)$ 对所有 $x\in\partial\Omega$ 及 $\lambda\in[0,1]$ 均成立.

所以，由 Nussbaum 度的同伦不变性， Leray-Schauder 度的定义及假设 (v), 我们有

$$\begin{aligned}&deg_N(I-H(\cdot,1),\Omega,\theta)=deg_N(I-H(\cdot,0),\Omega,\theta)\\ =\ &deg_{LS}(I-H(\cdot,0),\Omega,\theta)=deg_B((I-H(\cdot,0))|_{\bar\Omega\bigcap R^n},\Omega\bigcap R^n,0)\\ =\ &deg_B((I-H(\cdot,0))|_{\bar B_M(R^n)},\bar B_M(R^n),0)=deg_B(-g,\bar B_M(R^n),0)\\ =\ &(-1)^n deg_B(g,\bar B_M(R^n),0)\neq 0,\end{aligned}$$

其中 deg_N, deg_{LS}, deg_B 分别表示 Nussbaum 度、 Leray-Schauder 度和 Brouwer 度. 从而由 Nussbaum 度的可解性可知，存在 $x \in \Omega$ 使得 $x = H(x,1)$, 其蕴涵 (3.2.2) 至少有一个 T- 周期解满足 $\sup\limits_{t\in R}\|x(t)\| < M$. 证毕.

§3.3 具投放的中立型时滞竞争扩散系统正周期解的存在性

记

$$\bar{h} = \frac{1}{T}\int_0^T h(t)dt,\ h^l = \min_{t\in[0,T]}|h(t)|,\ h^u = \max_{t\in[0,T]}|h(t)|,$$

其中 h 是连续 T- 周期函数.

在系统 (3.1.1) 中，总假定:

(H_1) $a_i(t), b_i(t)(i=1,2,3), c_i(t)(i=1,3)$ 是正的连续 T- 周期函数, $S_i(t), D_i(t), \tau_i(t)(i=1,2)$, 及 $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ 是非负连续 T- 周期函数. $\gamma, \tau_1 \in C^1(R,[0,+\infty))$, $\tau_2 \in C^2(R,[0,+\infty))$, $\tau_i' < 1 (i=1,2)$.

(H_2) 在 $[-\tau,0](0 \le \tau < +\infty)$ 上， $k(s) \ge 0$; $k(s)$ 是分段连续且规范化的函数使得 $\int_{-\tau}^0 k(s)ds = 1$.

令

$$\begin{aligned}
M_1 &= \max_{i\in\{1,2\}}\left\{\ln\left[\tfrac{1}{2}(\tfrac{a_i}{b_i})^u + \tfrac{1}{2}\sqrt{[(\tfrac{a_i}{b_i})^u]^2 + 4(\tfrac{S_i}{b_i})^u}\right]\right\},\\
M_2 &= \ln\tfrac{\bar{a}_3}{b_3^l} + \tfrac{\gamma_0^u\bar{a}_3}{(\alpha_0-\gamma_0')^l} + 2T\bar{a}_3\left[1+\tfrac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right],\\
m_1 &= \min\left\{\ln\left[\tfrac{c_1^u}{b_1^u}\left(\tfrac{a_1^l}{c_1^u} - \tfrac{\bar{a}_3}{b_3^l}\exp\left[\tfrac{\gamma_0^u\bar{a}_3}{(\alpha_0-\gamma_0')^l} + 2T\bar{a}_3\left(1+\tfrac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right)\right]\right)\right], \ln(\tfrac{a_2}{b_2})^l\right\},\\
m_2 &= \ln\tfrac{a_3^l - c_3^u e^{M_1}}{\bar{b}_3+\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\frac{1}{T}\int_0^T|\gamma_0'(t)|dt} - 2T\bar{a}_3\left[1+\tfrac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right] - \gamma_0^u e^{M_2},
\end{aligned}$$

其中

$$\gamma_0(t) = \frac{\gamma(t)}{1-\tau_2'(t)}, \alpha_0(t) = (\frac{\alpha}{1-\tau_1'})^l(1-\tau_2'(t)).$$

定理 3.3.1. 除假设 $(H_1), (H_2)$ 外，进一步假设系统 (3.1.1) 满足

(H_3) $\alpha_0(t) > \gamma_0'(t), \gamma_0^u e^{M_0} < 1$,

其中

$$M_0 = \max\{|M_1|, |m_1|, |\ln\frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_1}|, |\ln\frac{\bar{a}_2}{\bar{b}_2}|, |M_2|, |m_2|, |\ln\frac{\bar{a}_3}{\bar{b}_3+\bar{\alpha}}|\};$$

(H_4)

$$\begin{aligned}
\tfrac{a_1^l}{c_1^u} &> \tfrac{\bar{a}_3}{b_3^l}\exp\left[\tfrac{\gamma_0^u\bar{a}_3}{(\alpha_0-\gamma_0')^l} + 2T\bar{a}_3\left[1+\tfrac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right]\right],\\
\tfrac{a_3^l}{c_3^u} &> \max_{i\in\{1,2\}}\left\{\tfrac{1}{2}(\tfrac{a_i}{b_i})^u + \tfrac{1}{2}\sqrt{[(\tfrac{a_i}{b_i})^u]^2 + 4(\tfrac{S_i}{b_i})^u}\right\}.
\end{aligned}$$

则系统 (3.1.1) 至少有一个 T- 周期正解.

证明. 考虑下列系统

$$
\begin{array}{rcl}
u_1'(t) &=& a_1(t)-b_1(t)e^{u_1(t)}-c_1(t)e^{u_3(t)}+D_1(t)e^{u_2(t)-u_1(t)}-D_1(t)+\frac{S_1(t)}{e^{u_1(t)}},\\
u_2'(t) &=& a_2(t)-b_2(t)e^{u_2(t)}+D_2(t)e^{u_1(t)-u_2(t)}-D_2(t)+\frac{S_2(t)}{e^{u_2(t)}},\\
u_3'(t) &=& a_3(t)-b_3(t)e^{u_3(t)}-\alpha(t)e^{u_3(t-\tau_1(t))}-\beta(t)\int_{-\tau}^{0}k(s)e^{u_3(t+s)}ds\\
&-& \gamma(t)u_3'(t-\tau_2(t))e^{u_3(t-\tau_2(t))}-c_3(t)e^{u_1(t)},
\end{array}
\tag{3.3.1}
$$

其中 $a_i(t),b_i(t)(i=1,2,3),D_i(t),S_i(t),\tau_i(t)(i=1,2),c_i(t)(i=1,3)$, $\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)$ 如同 (H_1) 所设，且 $\tau,k(s)$ 如同 (H_2) 所设. 我们首先证明系统 (3.3.1) 有一个 T- 周期解.

令 $C:=C([-\sigma,0];R^3)$. 定义下列映射:

$$b:R\times C\to R^3, b(t,\varphi)=(b_1(t,\varphi),b_2(t,\varphi),b_3(t,\varphi)),$$

$$b_i(t,\varphi)\equiv 0\ (i=1,2), b_3(t,\varphi)=-\gamma_0(t)e^{\varphi_3(-\tau_2(t))};$$

$$f:R\times C\times[0,1]\to R^3,$$

$$f(t,\varphi,\lambda)=(f_1(t,\varphi,\lambda),f_2(t,\varphi,\lambda),f_3(t,\varphi,\lambda)),\forall\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\in C,\lambda\in[0,1].$$

$$
\begin{array}{rcl}
f_1(t,\varphi,\lambda) &=& a_1(t)-b_1(t)e^{\varphi_1(0)}-\lambda c_1(t)e^{\varphi_3(0)}+\lambda D_1(t)e^{\varphi_2(0)-\varphi_1(0)}-\lambda D_1(t)+\frac{\lambda S_1(t)}{e^{\varphi_1(0)}},\\
f_2(t,\varphi,\lambda) &=& a_2(t)-b_2(t)e^{\varphi_2(0)}+\lambda D_2(t)e^{\varphi_1(0)-\varphi_2(0)}-\lambda D_2(t)+\frac{\lambda S_2(t)}{e^{\varphi_2(0)}},\\
f_3(t,\varphi,\lambda) &=& a_3(t)-b_3(t)e^{\varphi_3(0)}-\alpha(t)e^{\varphi_3(-\tau_1(t))}-\lambda\beta(t)\int_{-\tau}^{0}k(s)e^{\varphi_3(s)}ds\\
&+& \gamma_0'(t)e^{\varphi_3(-\tau_2(t))}-\lambda c_3(t)e^{\varphi_1(0)}.
\end{array}
$$

显然，$f:R\times C\times[0,1]\to R^3$ 全连续，$b:R\times C\to R^3$ 连续. 此时，系统 (3.3.1) 变为

$$\frac{d}{dt}[u(t)-b(t,u_t)]=f(t,u_t,1).$$

相应于

$$\frac{d}{dt}[u(t)-\lambda b(t,u_t)]=\lambda f(t,u_t,\lambda),\lambda\in(0,1),$$

我们有

$$
\begin{array}{l}
u_1'(t)=\lambda\left\{a_1(t)-b_1(t)e^{u_1(t)}-\lambda c_1(t)e^{u_3(t)}+\lambda D_1(t)e^{u_2(t)-u_1(t)}-\lambda D_1(t)+\frac{\lambda S_1(t)}{e^{u_1(t)}}\right\},\\
u_2'(t)=\lambda\left\{a_2(t)-b_2(t)e^{u_2(t)}+\lambda D_2(t)e^{u_1(t)-u_2(t)}-\lambda D_2(t)+\frac{\lambda S_2(t)}{e^{u_2(t)}}\right\},\\
\left[u_3(t)+\lambda\gamma_0(t)e^{u_3(t-\tau_2(t))}\right]'=\lambda\left[a_3(t)-b_3(t)e^{u_3(t)}-\alpha(t)e^{u_3(t-\tau_1(t))}\right]\\
-\lambda^2\beta(t)\int_{-\tau}^{0}k(s)e^{u_3(t+s)}ds+\lambda\gamma_0'(t)e^{u_3(t-\tau_2(t))}-\lambda^2c_3(t)e^{u_1(t)}.
\end{array}
\tag{3.3.2}
$$

假设 $(u_1(t),u_2(t),u_3(t))^T$ 是系统 (3.3.2) 关于某个 $\lambda\in(0,1)$ 的一个 T- 周期解. 选取 $t_i^M,t_i^m\in[0,T],i=1,2$, 使得

$$u_i(t_i^M)=\max_{t\in[0,T]}u_i(t),\ u_i(t_i^m)=\min_{t\in[0,T]}u_i(t),i=1,2.$$

则有

$$u_i'(t_i^M) = 0,\ u_i'(t_i^m) = 0, i = 1, 2.$$

由此及系统 (3.3.2), 可得

$$a_1(t_1^M) - b_1(t_1^M)e^{u_1(t_1^M)} - \lambda c_1(t_1^M)e^{u_3(t_1^M)} + \lambda D_1(t_1^M)[\frac{e^{u_2(t_1^M)}}{e^{u_1(t_1^M)}} - 1] + \frac{\lambda S_1(t_1^M)}{e^{u_1(t_1^M)}} = 0, \tag{3.3.3}$$

$$a_2(t_2^M) - b_2(t_2^M)e^{u_2(t_2^M)} + \lambda D_2(t_2^M)[\frac{e^{u_1(t_2^M)}}{e^{u_2(t_2^M)}} - 1] + \frac{\lambda S_2(t_2^M)}{e^{u_2(t_2^M)}} = 0, \tag{3.3.4}$$

及

$$a_1(t_1^m) - b_1(t_1^m)e^{u_1(t_1^m)} - \lambda c_1(t_1^m)e^{u_3(t_1^m)} + \lambda D_1(t_1^m)[\frac{e^{u_2(t_1^m)}}{e^{u_1(t_1^m)}} - 1] + \frac{\lambda S_1(t_1^m)}{e^{u_1(t_1^m)}} = 0, \tag{3.3.5}$$

$$a_2(t_2^m) - b_2(t_2^m)e^{u_2(t_2^m)} + \lambda D_2(t_2^m)[\frac{e^{u_1(t_2^m)}}{e^{u_2(t_2^m)}} - 1] + \frac{\lambda S_2(t_2^m)}{e^{u_2(t_2^m)}} = 0. \tag{3.3.6}$$

下面证明下列结论:

结论 A. 对 $u_i(t_i^M)$ $(i = 1, 2)$, 下列情形之一成立:

$$u_2(t_2^M) \le u_1(t_1^M) \le M_1^* \le M_1, \tag{3.3.7}$$

$$u_1(t_1^M) < u_2(t_2^M) \le M_2^* \le M_1, \tag{3.3.8}$$

其中 $M_1 := \max\{M_1^*, M_2^*\}, M_i^* := \ln\left[\frac{1}{2}(\frac{a_i}{b_i})^u + \frac{1}{2}\sqrt{[(\frac{a_i}{b_i})^u]^2 + 4(\frac{S_i}{b_i})^u}\right], i = 1, 2.$

分两种情形讨论:

情形 1. 假设 $u_1(t_1^M) \ge u_2(t_2^M)$; 则 $u_1(t_1^M) \ge u_2(t_1^M)$.

由此及 (3.3.3) 可知

$$b_1(t_1^M)e^{2u_1(t_1^M)} - a_1(t_1^M)e^{u_1(t_1^M)} - S_1(t_1^M) \le 0.$$

所以,

$$e^{2u_1(t_1^M)} - (\frac{a_1}{b_1})^u e^{u_1(t_1^M)} - (\frac{S_1}{b_1})^u \le 0,$$

其蕴涵

$$e^{u_1(t_1^M)} \le \frac{1}{2}(\frac{a_1}{b_1})^u + \frac{1}{2}\sqrt{[(\frac{a_1}{b_1})^u]^2 + 4(\frac{S_1}{b_1})^u}.$$

因此,

$$u_2(t_2^M) \le u_1(t_1^M) \le \ln\left[\frac{1}{2}(\frac{a_1}{b_1})^u + \frac{1}{2}\sqrt{[(\frac{a_1}{b_1})^u]^2 + 4(\frac{S_1}{b_1})^u}\right]. \tag{3.3.9}$$

情形 2. 假设 $u_1(t_1^M) < u_2(t_2^M)$; 则 $u_1(t_2^M) < u_2(t_2^M)$.

由此及 (3.3.4) 可知

$$b_2(t_2^M)e^{2u_2(t_2^M)} - a_2(t_2^M)e^{u_2(t_2^M)} - S_2(t_2^M) \le 0.$$

类似情形 1, 可证

$$u_1(t_1^M) < u_2(t_2^M) \le \ln\left[\frac{1}{2}(\frac{a_2}{b_2})^u + \frac{1}{2}\sqrt{[(\frac{a_2}{b_2})^u]^2 + 4(\frac{S_2}{b_2})^u}\right]. \tag{3.3.10}$$

由 (3.3.9) 及 (3.3.10) 便知结论 A 成立.

结论 B.

$$u_3(t) \le M_2,\ t \in R, \tag{3.3.11}$$

其中

$$M_2 := \ln\frac{\bar{a}_3}{b_3^l} + \frac{\gamma_0^u \bar{a}_3}{(\alpha_0 - \gamma_0')^l} + 2T\bar{a}_3\left[1 + \frac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right].$$

由 (3.3.2) 的第 3 个方程可得

$$\begin{aligned}\int_0^T a_3(t)dt &= \int_0^T b_3(t)e^{u_3(t)}dt + \int_0^T \alpha(t)e^{u_3(t-\tau_1(t))}dt + \lambda\int_0^T \beta(t)\int_{-\tau}^0 k(s)e^{u_3(t+s)}dsdt \\ &- \int_0^T \gamma_0'(t)e^{u_3(t-\tau_2(t))}dt + \lambda\int_0^T c_3(t)e^{u_1(t)}dt.\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

设 $t = h_i(s)$ 是 $s = t - \tau_i(t)$ $(i = 1, 2)$ 的反函数.

显然,

$$T + s = T + t - \tau_i(t) = T + t - \tau_i(T + t).$$

因此, $T + t = h_i(T + s)$, 其蕴涵 $h_i(T + s) = T + h_i(s)$. 所以，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^T \alpha(t)e^{u_3(t-\tau_1(t))}dt &= \int_{-\tau_1(0)}^{T-\tau_1(T)} \frac{\alpha(h_1(s))e^{u_3(s)}}{1-\tau_1'(h_1(s))}ds \ge (\frac{\alpha}{1-\tau_1'})^l\int_0^T e^{u_3(s)}ds, \\ \int_0^T e^{u_3(s)}ds &= \int_{h_2(0)}^{h_2(T)} e^{u_3(t-\tau_2(t))}(1-\tau_2'(t))dt \\ &= \int_{h_2(0)}^{h_2(0)+T} e^{u_3(t-\tau_2(t))}(1-\tau_2'(t))dt \\ &= \int_0^T e^{u_3(t-\tau_2(t))}(1-\tau_2'(t))dt.\end{aligned}$$

因此,

$$\int_0^T \alpha(t)e^{u_3(t-\tau_1(t))}dt - \int_0^T \gamma_0'(t)e^{u_3(t-\tau_2(t))}dt \ge \int_0^T[\alpha_0(t) - \gamma_0'(t)]e^{u_3(t-\tau_2(t))}dt > 0, \tag{3.3.13}$$

其中 $\alpha_0(t) = (\frac{\alpha}{1-\tau_1'})^l(1-\tau_2'(t))$.

由 (3.3.12),(3.3.13) 可知

$$b_3^l\int_0^T e^{u_3(t)}dt \le \int_0^T b_3(t)e^{u_3(t)}dt \le \int_0^T a_3(t)dt,$$

其蕴涵 $\int_0^T e^{u_3(t)}dt \le \frac{T\bar{a}_3}{b_3^l}$.

所以,

$$\int_0^T e^{u_3(t-\tau_2(t))}dt = \int_0^T \frac{e^{u_3(t-\tau_2(t))}(1-\tau_2'(t))}{1-\tau_2'(t)}dt \le \frac{\int_0^T e^{u_3(t)}dt}{(1-\tau_2')^l} \le \frac{T\bar{a}_3}{(1-\tau_2')^l b_3^l}. \tag{3.3.14}$$

由 (3.3.2) 的第 3 个方程，(3.3.12) 及 (3.3.14) 知

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left| \left[u_3(t) + \lambda\gamma_0(t)e^{u_3(t-\tau_2(t))}\right]' \right| dt \\
\le\ & \int_0^T a_3(t)dt + \int_0^T b_3(t)e^{u_3(t)}dt + \int_0^T \alpha(t)e^{u_3(t-\tau_1(t))}dt + \lambda\int_0^T \beta(t)\int_{-\tau}^0 k(s)e^{u_3(t+s)}dsdt \\
+\ & \int_0^T |\gamma_0'(t)|e^{u_3(t-\tau_2(t))}dt + \lambda\int_0^T c_3(t)e^{u_1(t)}dt \\
\le\ & 2\int_0^T a_3(t)dt + \int_0^T [|\gamma_0'(t)| + \gamma_0'(t)]e^{u_3(t-\tau_2(t))}dt \\
\le\ & 2\int_0^T a_3(t)dt + 2|\gamma_0'|^u \int_0^T e^{u_3(t-\tau_2(t))}dt \\
\le\ & 2T\bar{a}_3\left[1 + \frac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right].
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

由 (3.3.12),(3.3.13) 可得

$$\begin{aligned}
\int_0^T a_3(t)dt &\ge \int_0^T \left[b_3(t)e^{u_3(t)} + [\alpha_0(t) - \gamma_0'(t)]e^{u_3(t-\tau_2(t))}\right] dt \\
&\ge \int_0^T \left[b_3^l e^{u_3(t)} + (\alpha_0 - \gamma_0')^l e^{u_3(t-\tau_2(t))}\right] dt \\
&= Tb_3^l e^{u_3(\xi)} + T(\alpha_0 - \gamma_0')^l e^{u_3(\xi-\tau_2(\xi))}
\end{aligned}$$

对某个 $\xi \in [0,T]$.

所以，我们有

$$u_3(\xi) \le \ln\frac{\bar{a}_3}{b_3^l},\ e^{u_3(\xi-\tau_2(\xi))} \le \frac{\bar{a}_3}{(\alpha_0-\gamma_0')^l}. \tag{3.3.16}$$

由 (3.3.15) 与 (3.3.16) 知

$$\begin{aligned}
& u_3(t) + \lambda\gamma_0(t)e^{u_3(t-\tau_2(t))} \\
\le\ & u_3(\xi) + \lambda\gamma_0(\xi)e^{u_3(\xi-\tau_2(\xi))} + \int_0^T \left| \left[u_3(t) + \lambda\gamma_0(t)e^{u_3(t-\tau_2(t))}\right]' \right| dt \\
\le\ & \ln\frac{\bar{a}_3}{b_3^l} + \frac{\gamma_0^u \bar{a}_3}{(\alpha_0-\gamma_0')^l} + 2T\bar{a}_3\left[1 + \frac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right] = M_2.
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

因此有

$$u_3(t) \le M_2,\ t \in R.$$

结论 C. 对 $u_i(t_i^m)$ $(i=1,2)$, 下列情形之一成立:

$$m_1 \le m_1^* \le u_1(t_1^m) \le u_2(t_2^m), \tag{3.3.18}$$

$$m_1 \le m_2^* \le u_2(t_2^m) < u_1(t_1^m), \tag{3.3.19}$$

其中

$$\begin{aligned}
m_1 &:= \min\{m_1^*, m_2^*\}, \\
m_1^* &:= \ln\left[\frac{c_1^u}{b_1^u}\left(\frac{a_1^l}{c_1^u} - \frac{\bar{a}_3}{b_3^l}\exp\left[\frac{\gamma_0^u\bar{a}_3}{(\alpha_0-\gamma_0')^l} + 2T\bar{a}_3\left(1 + \frac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right)\right]\right)\right], \\
m_2^* &:= \ln\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^l.
\end{aligned}$$

分两种情形讨论:

情形 (1). 假设 $u_1(t_1^m) \le u_2(t_2^m)$; 则 $u_1(t_1^m) \le u_2(t_1^m)$.

由此及 (3.3.5) 可知

$$a_1(t_1^m) \le b_1(t_1^m)e^{u_1(t_1^m)} + c_1(t_1^m)e^{u_3(t_1^m)}.$$

由此及 (3.3.11), 我们有

$$a_1(t_1^m) \le b_1(t_1^m)e^{u_1(t_1^m)} + \frac{c_1(t_1^m)\bar{a}_3}{b_3^l}\exp\left[\frac{\gamma_0^u\bar{a}_3}{(\alpha_0-\gamma_0')^l} + 2T\bar{a}_3\left[1+\frac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right]\right],$$

其蕴涵

$$a_1^l \le b_1^u e^{u_1(t_1^m)} + \frac{c_1^u\bar{a}_3}{b_3^l}\exp\left[\frac{\gamma_0^u\bar{a}_3}{(\alpha_0-\gamma_0')^l} + 2T\bar{a}_3\left[1+\frac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right]\right].$$

所以,

$$u_1(t_1^m) \ge \ln\left\{\frac{c_1^u}{b_1^u}\left(\frac{a_1^l}{c_1^u} - \frac{\bar{a}_3}{b_3^l}\exp\left[\frac{\gamma_0^u\bar{a}_3}{(\alpha_0-\gamma_0')^l} + 2T\bar{a}_3\left(1+\frac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right)\right]\right)\right\} := m_1^*. \tag{3.3.20}$$

情形 (2). 假设 $u_1(t_1^m) > u_2(t_2^m)$; 则 $u_1(t_2^m) > u_2(t_2^m)$.
由此及 (3.3.6) 可知

$$b_2(t_2^m)e^{u_2(t_2^m)} \ge a_2(t_2^m),$$

其蕴涵

$$e^{u_2(t_2^m)} \ge \frac{a_2(t_2^m)}{b_2(t_2^m)}.$$

即

$$u_2(t_2^m) \ge \ln(\frac{a_2}{b_2})^l := m_2^*. \tag{3.3.21}$$

由 (3.3.20) 与 (3.3.21) 便知结论 C 成立.
结论 D.

$$u_3(t) \ge m_3^* - 2T\bar{a}_3\left[1+\frac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right] - \gamma_0^u e^{M_2} := m_2,\ t\in R, \tag{3.3.22}$$

其中

$$m_3^* := \ln\frac{a_3^l - c_3^u e^{M_1}}{\bar{b}_3+\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\frac{1}{T}\int_0^T|\gamma_0'(t)|dt}.$$

选取 $t_3^M \in [0,T]$ 使得 $u_3(t_3^M) = \max\limits_{t\in[0,T]} u_3(t)$. 由 (3.3.12) 知

$$\begin{aligned}\int_0^T a_3(t)dt \ &\le \ \left[\int_0^T b_3(t)dt + \int_0^T \alpha(t)dt + \int_0^T \beta(t)dt + \int_0^T |\gamma_0'(t)|dt\right]e^{u_3(t_3^M)}\\ &+ \ \int_0^T c_3(t)dt e^{u_1(t_1^M)}.\end{aligned}$$

所以,

$$e^{u_3(t_3^M)} \ge \frac{a_3^l - c_3^u e^{M_1}}{\bar{b}_3+\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\frac{1}{T}\int_0^T|\gamma_0'(t)|dt}.$$

即

$$u_3(t_3^M) \geq \ln \frac{a_3^l - c_3^u e^{M_1}}{\bar{b}_3 + \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \frac{1}{T}\int_0^T |\gamma_0'(t)|dt} = m_3^*.$$

由此及 (3.3.15) 便知

$$\begin{aligned} & u_3(t) + \lambda\gamma_0(t)e^{u_3(t-\tau_2(t))} \\ \geq\ & u_3(t_3^M) + \lambda\gamma_0(t_3^M)e^{u_3(t_3^M - \tau_2(t_3^M))} - \int_0^T \left| \left[u_3(t) + \gamma_0(t)e^{u_3(t-\tau_2(t))}\right]' \right| dt \\ \geq\ & m_3^* - 2T\bar{a}_3 \left[1 + \frac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right]. \end{aligned}$$

由此及 (3.3.11) 便知结论 D 成立.

显然，下列不等式之一成立：

$$(i)\ \ M_1^* > m_2^*,\ (ii)\ \ M_1^* \leq m_2^*.$$

因为 $m_1^* < M_1^*$ 且 $m_2^* \leq M_2^*$, (ii) 蕴涵 $M_2^* > m_1^*$. 于是，根据结论 A 与结论 C, 下列 4 种情形之一必成立：

$$(P_1)\ \ m_1 \leq m_1^* \leq u_1(t_1^m) \leq u_2(t_2^m),\ u_2(t_2^M) \leq u_1(t_1^M) \leq M_1^* \leq M_1;$$

$$(P_2)\ \ m_1 \leq m_2^* \leq u_2(t_2^m) < u_1(t_1^m),\ u_2(t_2^M) \leq u_1(t_1^M) \leq M_1^* \leq M_1;$$

$$(P_3)\ \ m_1 \leq m_1^* \leq u_1(t_1^m) \leq u_2(t_2^m),\ u_1(t_1^M) < u_2(t_2^M) \leq M_2^* \leq M_1;$$

$$(P_4)\ \ m_1 \leq m_2^* \leq u_2(t_2^m) < u_1(t_1^m),\ u_1(t_1^M) < u_2(t_2^M) \leq M_2^* \leq M_1.$$

由此及结论 B, D, 有

$$|u_i(t)| \leq \max\{|M_1|, |m_1|\}(i=1,2), |u_3(t)| \leq \max\{|M_2|, |m_2|\}, t \in R.$$

令

$$M_0 = \max\{|M_1|, |m_1|, |\ln\frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_1}|, |\ln\frac{\bar{a}_2}{\bar{b}_2}|, |M_2|, |m_2|, |\ln\frac{\bar{a}_3}{\bar{b}_3 + \bar{\alpha}}|\}.$$

则 $\|u(t)\| = \max\limits_{1\leq i\leq 3} |u_i(t)| \leq M_0, t \in R$.

取 $M > M_0$ 使得 $k = \gamma_0^u e^M < 1$. 显然，引理 3.2.1 的条件 (iii) 满足. 易见

$$g(u) = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 - \bar{b}_1 e^{u_1} \\ \bar{a}_2 - \bar{b}_2 e^{u_2} \\ \bar{a}_3 - (\bar{b}_3 + \bar{\alpha})e^{u_3} \end{pmatrix} \neq 0$$

$\forall (u_1, u_2, u_3) \in \partial B_M(R^3)$, 且 $deg_B(g, B_M(R^3), 0) = -1$. 于是，引理 3.2.1 的条件 (iv),(v) 满足. 下面证明条件 (i) 也成立. 事实上，对 $t \in R, \varphi, \psi \in C_M = \{\phi \in C : \|\phi\| \leq M\}$,

有

$$
\begin{aligned}
& \|b(t,\varphi)-b(t,\psi)\| = \max_{1\le i\le 3}|b_i(t,\varphi)-b_i(t,\psi)| = |\gamma_0(t)e^{\varphi_3(-\tau_2(t))}-\gamma_0(t)e^{\psi_3(-\tau_2(t))}| \\
= \ & |\gamma_0(t)|\exp\left[\theta\varphi_3(-\tau_2(t))+(1-\theta)\psi_3(-\tau_2(t))\right]|\varphi_3(-\tau_2(t))-\psi_3(-\tau_2(t))| \\
\le \ & \gamma_0^u e^M\|\varphi-\psi\|_c = k\|\varphi-\psi\|_c.
\end{aligned}
$$

易知 $f: R\times C_M\times[0,1]\to R^n$ 关于 λ 的连续性关于 $(t,\varphi)\in R\times C_M$ 是一致的. 所以, 引理 3.2.1 的所有条件均成立. 由引理 3.2.1 可知, 系统 (3.3.1) 有一个 T- 周期解 $(u_1^*(t),u_2^*(t),u_3^*(t))^T$. 易知 $(x_1^*(t),x_2^*(t),y^*(t))^T=(\exp[u_1^*(t)],\exp[u_2^*(t)],\exp[u_3^*(t)])^T$ 是系统 (3.1.1) 的一个 T- 周期正解. 证毕.

由定理 3.3.1 的证明可得

定理 3.3.2. 假设 $a_3(t),b_3(t),\alpha(t),\gamma(t),\tau_i(t)(i=1,2)$ 如同 (H_1) 所设, 进一步假设系统 (3.1.3) 满足

$(H_3)'$ $\alpha_0(t)>\gamma_0'(t),\gamma_0^u e^{M_0^*}<1$,

其中

$$
\begin{aligned}
M_0^* &= \max\{|M^*|,|m^*|,|\ln\tfrac{\bar a_3}{\bar b_3+\bar\alpha}|\}, \\
M^* &= \ln\tfrac{\bar a_3}{b_3^l}+\tfrac{\gamma_0^u\bar a_3}{(\alpha_0-\gamma_0')^l}+2T\bar a_3\left[1+\tfrac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right], \\
m^* &= \ln\tfrac{a_3^l}{\bar b_3+\bar\alpha+\frac{1}{T}\int_0^T|\gamma_0'(t)|dt}-2T\bar a_3\left[1+\tfrac{|\gamma_0'|^u}{(1-\tau_2')^l b_3^l}\right]-\gamma_0^u e^{M^*}.
\end{aligned}
$$

则系统 (3.1.3) 至少有一个 T- 周期正解.

注 3.3.1. 当 $\tau_1(t)=\tau_2(t)$, (3.1.3) 化为文献 [20,43] 所研究的种群模型. 定理 3.3.2 的条件比文献 [20] 的定理 3.1 及文献 [43] 的定理 2 与定理 4 的条件易于验证.

注 3.3.2. 本节的方法可应用于中立型时滞捕食者 - 食饵扩散系统正周期解的存在性问题.

参考文献

[1] C. Alvareg, A. C. Lager, An application of topological degree to the periodic competing species problem, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 28(1986), 202-219.

[2] H. Bereketoglu and I. Györi, Global asymptotic stability in a nonautonomous Lotka-Volterra type system with infinite delay, J. Math. Anal. Appl., 210(1997), 279-291.

[3] E. Beretta and Y. Kuang, Convergence results in a well known delayed predator-prey system, J. Math. Anal. Appl., 204(1996), 840-853.

[4] F. Brauer, A. C. Soudack, Coexistence of properties of some predator-prey systems under constant rate harvesting and stocking, J. Math. Biol., 12(1981), 101-114.

[5] F. Brauer, A. C. Soudack, On constant effort harvesting and stocking in a class of predator-prey systems, J. Theor. Biol., 95(1982), 247-252.

[6] L. Cesari, Nonlinear Problems across a Point of Resonance for Non-self-adjoint Systems, Academic Press, San Dingo, 1978, pp 43-67.

[7] J. M. Cushing, Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics, Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 20, Springer-Verlag, New York, 1977.

[8] J. M. Cushing, Periodic time-dependent predator-prey system, SIAM J. Appl. Math., 32(1977), 82-95.

[9] T. Ding, Unbounded perturbations of forced harmonic oscillations at resonance, Proc. Amer. Math. Soc., 88(1983), 59-66.

[10] T. Ding, The nonlinear oscillation on the resonance points, Science in China, A(1)(1982, 1-13. (in Chinese).

[11] L. Erbe and W. Krawcewicz and J. Wu, A composite coincidence degree with applications to boundary value problems of neutral equations, Trans. Amer. Math. Soc., 335(1993), 459-478.

[12] G. Fan and Y. Li, Existence of positive periodic solutions for a periodic logistic equation, Applied Mathematics and Computation, 139(2), 2003.

[13] M. Fan, K. Wang, Global existence of positive periodic solutions of periodic predator-prey system with infinite delays, J. Math. Anal. Appl., 262(1)2001, 1-11.

[14] M. Fan, K. Wang, Periodicity in a delayed ratio-dependent predator prey systems, J. Math. Anal. and Appl., 262(1)2001, 179-190.

[15] M. Fan, K. Wang, Positive periodic solution of a periodic differential competition systems with infinite delays, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., (81)2001, 197-203.

[16] 范猛，王克， Existence of positive periodic solutions of a system of integro-differential equations, Acta Math. Sinica, 44(3)2001, 437-444. (In Chinese)

[17] 范猛，王克， Existence and global attractivity of positive periodic solutions of multispecies ecological competition system, Acta Mathematics Sinica, 43(1)2000, 77-82. (In Chinese)

[18] M. Fan, K. Wang, Global periodic solutions of a generalized n species Gilpin Ayala competition model, Computers and Mathematics with Applications, (40)2000, 1141-1151.

[19] M. Fan, K. Wang and D. Q. Jiang, Existence and global attractivity of positive periodic solutions of periodic n-species Lotka-Volterra competition systems with several deviating ar-

guments, Mathematical Biosciences, 160(1999), 47-61.

[20] H. Fang and J. B. Li, On the existence of periodic solutions of a neutral delay model of single-species population growth, J. Math. Anal. Appl., 259(2001), 8-17.

[21] H. I. Freedman, J. B. Shukla, Models for the effect of toxicant in single species and predator-prey system, J. Math. Biol., 30(1991), 15-30.

[22] H. I. Freedman and J. Wu, Periodic solutions of single-species population models with periodic delay, SIAM J. Math. Anal., 23(1992), 689-701.

[23] Xianlong Fu and Shunian Zhang, Periodic soluitions of differential equations at resonance with unbounded nonlinearities, Nonl. Anal., 3(2003), 755-767.

[24] S. Fucik, Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems, D. Reidel Publishing, Dordrecht, Holland, 1980.

[25] R. E. Gaines and J. Mawhin, Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[26] K. Gopalsamy, Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics, Mathematics and its Applications 74, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992.

[27] K. Gopalsamy, X. He, L. Wen, On a periodic neutral logistic equation, Glasgow Math. J., 33(1991), 281-286.

[28] K. Gopalsamy, B. G. Zhang, On a periodic neutral logistic equation, Dyn. Stab. Systems, 2(1988), 183-195.

[29] I. Gyori and G. Ladas, Oscillation Theory of Delay Differential Equations, Oxford Science Publications, Oxford, 1991.

[30] J. Hainzl, Stability and Hopf bifurcation in a predator-prey system with several parameters, SIAM J. Appl. Math., 48(1)1988, 170-190.

[31] J. Hale, Ordinary Differential Equations, Wiley Interscience, New York, 1969.

[32] T. G. Hallam, C. E. Clark, R. R. Lassider, Effects of toxicants on populations, A qualitative approach I: Equilibrium environmental exposure, Ecol. Modelling, 8(1983), 291-304.

[33] T. G. Hallam, C. E. Clark, G. S. Jordan, Effects of toxicants on populations, A qualitative approach II: First order kinetics, J. Math. Biol., 18(1983), 25-37.

[34] T. G. Hallam, J. T. Deluna, Effects of toxicants on populations, A qualitative apppoach III: Environmental and food chain pathways, J. Theory Biol., 109(1984), 411-429.

[35] G. W. Harrison, Global stability of predator-prey interaction, J. Math. Biol., 8(1979), 159-171.

[36] X. Z. He, Stability and delays in a predator-prey system, J. Math. Anal. Appl., 198(1996), 355-370.

[37] W. Krawcewicz and J. Wu, Theory of Degrees with Applications to Bifurcations and Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1996.

[38] Y. Kuang, Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, Academic Press, New York, 1993.

[39] Y. Kuang, Global stability of Gause-type predator-prey systems, J. Math. Biol., 28(1990), 463-474.

[40] Y. Kuang and H. I. Freedman, Uniqueness of limit cycles in Gause-type models of predator-prey systems, Math. Biosci., 88(1988), 67-84.

[41] A. C. Lazer and D. E. Leach, Bounded perturbations of forced harmonic oscillations at resonance, Ann. Mat. Pura Appl., 82(1969), 49-68.

[42] A. Leung, Periodic solutions for prey-predator differetial delay equaiton, J. Diff. Eqns., 26(1977), 391-403.

[43] Y. K. Li, Positive periodic solution for a neutral delay model, Acta Mathematica Sinica, 39(1996), 789-795 .

[44] Y. K. Li, Periodic solutions for delay lotka-volterra competition systems, J. Math. Anal. Appl., 246(2000), 230-244.

[45] Y. K. Li, Periodic solutions of a periodic delay predator-prey system, Proc. of AMS., 127(1999), 1331-1335.

[46] Y. K. Li, Y. Kuang, Periodic solutions in periodic state-dependent delay equations and population models, Proc. of AMS., 130 (2002), 1345-1353.

[47] Y. K. Li, Y. Kuang, Periodic solutions in periodic delay Lotka-Volterra equations and systems, J. Math. Anal. Appl., 255(2001), 260-280.

[48] Y. K. Li, G. Xu, Positive periodic solutions for an integrodifferential model of mutualism, Applied Mathematics Letters, 14(5)(2001).

[49] Xiaoxin Liao, Absolute Stability of Nonlinear Control Systems, Kluwer Academic Publisher, China Science Press, 1993.

[50] N. G. Lloyd, Degree Theory, Cam. Uni. Press, 1978.

[51] 鲁世平, 葛渭高, 一类二阶 n- 维中立型微分系统周期解问题, 数学学报, 46(2003), 601-610.

[52] S. Ma, Z. Wang and J. Yu, An abstract existence theorem at resonance and its applications, J. Diff. Eq., (145)1998, 274-294.

[53] S. Ma, Z. Wang and J. Yu, Semilinear equations at resonance with the kernel of arbitrary dimension, Tohoku Math. J., 50(1998), 513-529.

[54] S. Ma, Z. Wang and J. Yu, Coincidence degree and periodic solutions of Duffing equations, Nonl. Anal., 34(1998), 443-460.

[55] S. Ma, Z. Wang ana J. Yu, The existence of periodic solutions for nonlinear systems of first order differential equations at resonance, Appl. Math. Mech., 21(2000), 1282-1291.

[56] 马世旺, 庾建设, 王志成, 具有周期扰动的泛函微分方程的周期解, 科学通报, 43(13)(1998), 1386-1389.

[57] R. M. May, Stability and Complex in Model Ecosystem, Princeton Uni. Press, Princeton, 1974.

[58] R. K. Nagle, Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations with small parameter, SIAM J. Math. Anal., 9(1978), 719-729.

[59] R. K. Nagle and Z. Sinkala, Existence of 2π-periodic solutions for nonlinear systems of first-order ordinary differential equations at resonance, Nonl. Anal., 25(1995), 1-16.

[60] W. V. Petryshyn and Z.S. Yu, Existence theorems for higher order nonlinear periodic boundary value problems, Nonlinear Anal., 6. No.9(1982).

[61] E. C. Pielou, An Introduction to Mathematical Ecology, Wiley, New York, 1969.

[62] G. H. Pimbley JR, Periodic solutions of predator-prey equation stimulating an immune response I, Math. Biosci., 20(1974), 27-51.

[63] N. Rouche and J. Mawhin, Ordinary Differential Equations, Pitman, London, 1980.

[64] 宋新宇, 陈兰荪, 一类浮游生物植化相克时滞微分方程的周期解, 数学物理学报, 23A(2003), 8-13.

[65] X. Song and L. Chen, Persistence and global stability for nonautomous predator-prey system with diffusion and time delay, Computers Math. Appl., 35(1998), 33-40.

[66] B. R. Tang and Y. Kuang, Existence, uniqueness and asymptotic stability of periodic functional differential systems, Tohoku Math. J., 49(1997), 217-239.

[67] K. Wang, Persistence for nonautonomous predator-prey systems with infinite delay, Acta Math. Sinica, 40(1997), 321-332.

[68] W. Wang, P. Fergola and C. Tenneriello, Global attractivity of periodic solutions of population models, J. Math. Anal. Appl., 211(1997), 498-511.

[69] W. Wang and Z. Ma, Harmless delays for uniform persistence, J. Math. Anal. Appl., 158(1991), 256-268.

[70] P. Weng, Existence and global stability of positive periodic solution of periodic integrodifferential systems with feedback controls, Computers and Mathematics with Applications, 40(6)2000, 747-759.

[71] G. Z. Zeng, L. S. Chen and J. F. Chen, Persistence and periodic orbits for two-species nonautonomous diffusion Lotka-Volterra models, Mathl. Comput. Modeling., 20(1994), 69-80.

[72] B. G. Zhang, K. Gopalsamy, Global attractivity and oscillations in a periodic logistic equation, J. Math. Anal. Appl., 150(1990), 274-283.

[73] J. G. Zhang, L. S. Chen and X. D. Chen, Persistence and global stability for two-species nonautonomous competition Lotka-Volterra system with time delay, Nonlinear Anal., 37(1999), 1019-1028.

[74] 张正球, 王志成, Periodic solutions for nonautonomous predator-prey system with diffusion and time delay, Hiroshima Math. J., 31(2001), 371-381.

[75] 张正球, 王志成, Periodic solutions for a two-species nonautonomous competition Lotka-Volterra system with time delay, J. Math. Anal. Appl., 265(2002), 38-48.

[76] Y. Zhao and V. Hutson, Permanence in Kolmogorov periodic predator-prey models with diffusion, Nonlinear Analysis TMA, 23(1994), 651-668.

[77] Jin Zhen and Zhien Ma, Periodic solutions for delay differential equations model of plankton allelopathy, Computers and Mathematics with Applications, 44(2002), 491-500.

博士后在站期间发表和完成的论文

1. Fang Hui and Wang Zhicheng, Existence and global attractivity of positive periodic solutions for delay Lotka-Volterra competition patch systems with stocking, J. Math. Anal. Appl., (Accepted) (SCI).

2. Fang Hui and Li Jibin, On the existence of periodic solutions of a neutral delay model of single-species population growth, J. Math. Anal. Appl., 259(2001), 8-17. (SCI)

3. Fang Hui, Positive periodic solutions of n-species neutral delay systems, Czechoslovak Mathematical Journal, In Press. (SCI Expanded)

4. Fang Hui and Wang Zhicheng, Periodic boundary value prodlems of impulsive differential equations, Applied Mathematics E-Notes, 1(2001), 77-85.

5. Fang Hui and Wang Zhicheng, Existence of positive periodic solutions of a neutral delay competition model with diffusion and stock, Preprint.

6. Fang Hui and Wang Zhicheng, Existence and global attractivity of positive periodic solutions for delayed Predator-Prey patch systems with periodic stocking, Preprint.

7. Fang Hui and Wang Zhicheng, Solvability of nonlinear operator equations and its applications, Preprint.

致 谢

本文是在导师王志成教授的悉心指导下完成的，他广博的学识、严谨的治学态度、谦逊的为人和求真的作风使我受益终身。在此，谨向恩师表示诚挚的谢意。

感谢湖南大学数学与计量经济学院以及湖南大学博士后工作办公室的领导和老师们对我的支持和帮助，特别要感谢庾建设教授、黄立宏教授对我的关心和帮助。此外，我还要感谢郭志明博士、张正球博士、何智敏博士、黄建华博士在研究工作中所给予的帮助。

这份刚刚完成的研究报告，是我努力学习的结晶，它饱含着恩师的悉心指导和精心培养，渗透了自己的辛勤工作，得益于各位老师的热忱关心和真诚帮助，离不开父母和家人的无私支持和热情鼓励。在此，谨向指导、关心和帮助过我的老师、亲人和朋友再次表示诚挚的谢意。