

对两道模考试题的分析与感悟

周德明¹, 王华民²

(1. 江苏省无锡市太湖高级中学 214125; 2. 江苏省无锡市滨湖区教研中心 214100)

经过一阶段的学习,需要进行考试检测,以了解“学”与“教”的情况. 医生治病需先诊断,再用药. 教师讲评前也需先分析错因,然后有针对性、按步骤地进行. 现已进入大数据时代,数学学科由于学科特点,其说理、推理、结论都习惯于“用数据说话”,求真求实. 因此分析的前提是数据统计、与学生交流,以查找问题、诊断分析,为讲评的有效性提供依据,这是提高教学质量的重要环节. 经统计发现,无锡市2013年秋学期高三数学期末试卷有两道试题得分率极低,令人大跌眼镜,以下通过对其数据分析,归纳优化复习之策略.

1 统计反馈与分析

问题1 (试题11) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 右支上一点 P 到左焦点的距离是到右准线距离的6倍,则该双曲线离心率的范围为_____.

数据显示 一个四星级学校18个班级近750人,得分率统计,竟然有8个班得0分,6个班级各有1人答对,3个班级各有2人答对,1个班级有3人答对,总共15人答对,人均0.1分,得分率2%,得分率在20%以下为难题,可见这属于超难题.

学生反馈 通过与学生在课上和课外的访谈,了解到不少错误形式,这些错误资源值得我们研讨.

错误答案1 $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

解答过程1 用离心率 e 表示 x_0 . 由题意 $PF_1 = 6d_2$ 及焦半径公式,得

$$a + ex_0 = 6\left(x_0 - \frac{a^2}{c}\right),$$

按 x_0 整理得

$$(6-e)x_0 = a + 6 \cdot \frac{a^2}{c},$$

$$x_0 = \frac{a + 6 \cdot \frac{a^2}{c}}{6-e},$$

因为 $x_0 \geq a$, 所以

$$\frac{1 + 6 \cdot \frac{1}{e}}{6-e} \geq 1,$$

$$\text{即 } \frac{e+6}{e(6-e)} \geq 1, \quad (*)$$

$$e+6 \geq e(6-e), e^2 - 5e + 6 \geq 0,$$

解得 $e \leq 2$ 或 $e \geq 3$.

解答过程2 用离心率 e 表示 d_2 . 由 $PF_1 = 6d_2$ 及 $PF_1 - PF_2 = 2a$, 得 $2a + PF_2 = 6d_2$, 因为 $PF_2 = ed_2$, 所以

$$2a + ed_2 = 6d_2,$$

$$(6-e)d_2 = 2a, d_2 = \frac{2a}{6-e},$$

观察图像(图略)得 $d_2 \geq a - \frac{a^2}{c}$, 即

$$\frac{2a}{6-e} \geq a - \frac{a^2}{c},$$

由 $a > 0$, 得

$$\frac{2}{6-e} \geq 1 - \frac{1}{e},$$

$$\text{即 } \frac{2}{6-e} \geq \frac{e-1}{e}, \quad (1)$$

$$2e \geq (6-e)(e-1), \quad (2)$$

所以 $e^2 - 5e + 6 \geq 0$, 同上得 $e \leq 2$ 或 $e \geq 3$.

错误答案2 $(1, 2] \cup [3, 6)$.

解答过程 观察、审视(*), 因为 $e+6 > 0$, 且右边 > 0 , 所以 $e(6-e) > 0$, 由 $e > 1$,

故 $6-e>0$, 所以 $e<6$, 结合 $e\leq 2$ 或 $e\geq 3$, 得 $1<e\leq 2$ 或 $3\leq e<6$.

错误答案 3 $0<e\leq \frac{-7+\sqrt{73}}{2}$.

解答过程 由题设得

$$a+ex_0=6\left(\frac{a^2}{c}-x_0\right),$$

$$e^2+7e-6\leq 0,$$

所以

$$\frac{-7-\sqrt{73}}{2}\leq e\leq \frac{-7+\sqrt{73}}{2},$$

因 $e>0$, 故

$$0<e\leq \frac{-7+\sqrt{73}}{2}.$$

错误解答 4 有少数学生, 虽然答案正确, 但有凑巧、瞎蒙的因素.

思考过程 老师曾讲过, 椭圆离心率的分界线, 当 $b=c$ 时的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 双曲线的分界线, 当 $b=a$ 时离心率为 $\sqrt{2}$, 而由题设 $a>b>0$, 联系到图像, 故猜想离心率小于 $\sqrt{2}$, 而双曲线离心率 $e>1$, 故 $e\in(1, \sqrt{2})$.

正确解答 1 ……由 $a>b>0$ 得 $a^2>b^2, a^2>c^2-a^2, c^2<2a^2, e^2<2, e<\sqrt{2}, 1<e^2<2$, 所以 $e\in(1, \sqrt{2})$.

正确解答 2 ……从特殊值 a, b 入手, 当 $a=b$ 时, $c=\sqrt{2}a$, 离心率为 $\sqrt{2}$, 因 $a>b$, 观察图像得 $c<\sqrt{2}a$, 所以 $e<\sqrt{2}$, 又 $e>1$, 故 $e\in(1, \sqrt{2})$.

诊断分析 对于错解 1, 解答过程 1 是用离心率 e 表示右支上点 P 的横坐标 x_0 , 解答过程 2 是用 e 表示点 P 到右准线的距离 d_2 (用 x_0 或 d_2 表示离心率 e 有困难), 再分别根据 x_0 和 d_2 的取值范围, 得出 e 的范围, 构造了关于 e 的不等式, 两种解答都利用了双曲线的定义, 但两种解答过程都忽略了双曲线离心率的隐含条件 $e>1$, 解答过程 1 还

忽视了不等式两边成立的隐含条件, 对 (*) 式, 由 $e+6>0$, 且右边 >0 , 故 $e(6-e)>0, e<6$, 这样使得 e 的范围扩大而失真; 解答过程 2 从 (1) 到 (2) 是有问题的, 把 $6-e$ 当成正数推理了, 它忽视了式子成立的隐含条件. 其实应分 $6-e$ 大于零、小于零讨论, 或根据 $d_2=\frac{2a}{6-e}>0$, 得 $6-e>0$, 即 $e<6$. 错解 2 的学生已经注意到隐含条件 $e>1$ 和式子成立的条件, 比较错误 1 已经进了一大步, 但却忽视了题设的条件 $a>b>0$, 属于审题不细. 错解 3 的学生习惯了椭圆中准线的位置关系, 误以为 $\frac{a^2}{c}>x_0$, 产生了思维定势, 未能画图、从“形”上观察确定. 错解 4 的学生没有利用“……距离的 6 倍”这一条件, 显然有误. 如果把题设条件 $a>b>0$ 改为 $0<a<b$, 则 $e>\sqrt{2}$, 结合 $1<e\leq 2$ 或 $3\leq e<6$, 得 $e\in(\sqrt{2}, 2]\cup[3, 6)$, 如此修改, 可避免一些碰巧的因素, 避免蒙对.

问题 2 (试题选修 4-4: 极坐标与参数方程)

在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 ρ

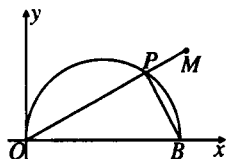


图 1

$=2\cos\theta$, 如图 1 曲线 C 与 x 轴交于 O, B 两点, P 是曲线 C 在 x 轴上方图像上任意一点, 连接 OP 并延长至 M , 使 $PM=PB$, 当 P 变化时, 求动点 M 轨迹的长度.

数据显示 上述四星级学校, 得分仅有 22%. 而第一道矩阵变换, 得分则超过 82%.

学生反馈 对于本题, 难点在于如何求轨迹方程, 若用极坐标方程求解, 学生不熟悉、不习惯, 缺乏解题思路; 另外, 教师为学生传授秘笈, 遇到极坐标难解的, 就把极坐标方程转换成普通方程.

学生(不少)解答 因为曲线 C 的极坐

标方程为 $\rho = 2\cos \theta$, 所以 $\rho^2 = 2\rho\cos \theta$. 转化为普通方程: $x^2 + y^2 = 2x$. 设 $P(x_0, y_0)$, $M(x, y)$, 则

$$x_0^2 + y_0^2 = 2x_0. \quad (1)$$

因为 $PM = PB$, 所以

$$(x_0 - 2)^2 + y_0^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

展开整理得

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + 4x_0 - 4 = 0. \quad (2)$$

如何消 x_0 ? 挖掘隐含条件: 由 O, P, M 3 点共线, 得 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OM}$, 所以

$$\begin{cases} x_0 = \lambda x, \\ y_0 = \lambda y, \end{cases} \quad (3)$$

(3)代入(1)得

$$\lambda^2(x^2 + y^2) = 2\lambda x. \quad (4)$$

(3)代入(2)得

$$(x^2 + y^2)(1 - 2\lambda) + 4\lambda x - 4 = 0. \quad (5)$$

从(4)(5)如何消去 λ , 学生陷入困境, 从局部或整体操作, 在短时间内都很难成功.

参考答案 设 $M(\rho, \theta)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则

$$OP = 2\cos \theta, PB = 2\sin \theta.$$

所以

$$\rho = OP + PB = 2\cos \theta + 2\sin \theta,$$

$$\rho^2 = 2\rho\sin \theta + 2\rho\cos \theta.$$

转化为普通方程

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y,$$

所以 M 的轨迹方程为

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2, x, y > 0,$$

其轨迹是上述圆在第一象限的部分, 恰好为半圆. 所以点 M 的轨迹长度为 $\sqrt{2}\pi$.

诊断分析 以上两种解题思路的差异很明显, 前一思路转换为普通方程求解, 不仅繁琐、费时还不能成功; 后一种思路从极坐标的定义出发, 寻求 ρ 与 θ 的关系, 则很容易列出其关系式, 获得极坐标方程. 另外, 本题也有部分考生得出整个圆 $2\sqrt{2}\pi$, 是源于未能注意其范围而失分.

反思本题学生存在的问题, 要么缺乏解

题思路, 要么机械的化成普通方程. 寻求原因, 大致有以下两点:

1) 学生习惯于求解一些机械的、有套路的问题, 不少学生对于用回归定义求解圆锥曲线的问题重视不够, 意识不强; 本题是求轨迹的长度问题, 缘于平常较少涉及.

2) 高三理科复习时间偏紧, 部分学校对理科附加题的“矩阵、极坐标参数方程”两个模块, 只选择一些模考试题, 讲解某些所谓热点问题、主要考点, 因没有按序上课, 是一种速成培训, 教师传授一些秘诀, 缺乏系统性、过程性, 一旦遇到非热点试题, 自然困难重重.

2 启示与优化

通过这两道得分率极低试题的统计和与学生的访谈, 用数据道出了在教学中存在的问题, 而且具有一定的普遍性, 它启示我们要侧重于以下 3 个方面做一些优化.

2.1 要注意让学生学会挖掘隐性条件, 寻求解题突破

一个数学问题给出的条件, 有的是显性, 有的则为隐性. 解题时, 常因未能发掘其隐性条件而陷入困境或造成失误. 从试题 1 的错误解答过程, 我们不难感觉到大多数学生都是有思路的, 问题出在挖掘隐性条件的能力较低. 本题隐性条件较多, 双曲线就隐含着离心率 $e > 1$, 条件 $a > b > 0$ 又隐含着离心率 $e < \sqrt{2}$. 尤其是在解决一些复杂问题时, 更容易忽视其隐含条件, 如本题对于式子 $\frac{e+6}{e(6-e)}$

≥ 1 , $\frac{2}{6-e} \geq \frac{e-1}{e}$, 隐含的离心率 $6-e > 0$, 就更难识别, 学生这些缺乏思考、分辨能力低下, 是否与我们某些数学课堂让学生观察、分析、自我反思的机会偏少有关? 如何应对?

1) 需要教师转变教学观, 把思考、操作的机会让给学生, 把质疑、发现的机会让给学生.

2)需要教师加强审题教学,教学生如何细心审题、揣摩题意,发掘其隐性条件,及时作出判断.这样,既容易发现解题的突破口,还可避免某些不必要的分类,提高解题的正确性.

3)需要教师有意选编一些需要挖掘隐性条件的习题,选编一些需要进行观察判断才能确定方向的习题,用于课堂教学和作业布置,通过练习与讲评,提升学生挖掘隐性条件的意识和能力.

2.2 要注意循序渐进、注意“回归”,帮助学生提升解题实效

从问题2暴露出在选修系列中缺乏系统性、过程性,难以寻求解题突破,且容易失误,我们应好好吸取这一教训.教学应按教学规律办事,循序渐进,一步一个脚印,不能只想走捷径,而要“接地气”,做到:

1)要回归课本.这是近年江苏高考试卷的一个主要特点,回归课本,不仅要研究课本内容,也要研究课本例题、习题,进行适当整合、变式,使得学生在动态中建构知识与方法.

2)要回归定义.要在全面夯实基础、注重通性通法的同时,注意回归定义.理解定义的作用不仅在于理论上,有时也能直接解决数学问题,如平面向量基本定理不仅是坐标运算的基础,还能直接解决含参数的二元方程问题,圆锥曲线的定义对于过焦点、准线等问题有特殊的解题功效.

2.3 要注意避免思维定势的负迁移,完善学生认知

在与学生访谈中了解到,问题1中有些学生看到了 $a > b > 0$,但没有在意,因为椭圆标准方程后都有一个 $a > b > 0$,以为是一个用不着的“虚”的条件;错误解答3中误以为双曲线的准线 $\frac{a^2}{c}$ 在右焦点的右侧,这两处都是因为学生习惯了椭圆的套路,显然训练椭

圆的试题较多,产生了思维定势.思维定势是一种思维的定向预备状态,既能产生积极影响的有益方面,同时也会产生一些刻板的习惯和固定的模式,不容易改变思维方向,遇到类似的问题时,容易墨守成规,以固定的模式去解题,使得思维单调、窄化,产生负迁移.

在教学过程中,要充分发挥正迁移的作用,尽量避免思维定势负迁移作用的发生,需要采取一些有效措施.除了要加强审题教学外,还要着重关注以下几点:

1)增强新刺激,更换旧思路.由于思维定势使旧思路畅通,保留在大脑皮层中的旧痕迹十分深刻,如若没有强烈的持续的新刺激来加以冲击,新思路就难以形成和发展.德国著名学者费希纳在研究中指出,刺激量与感觉是成正比,刺激量增减10倍,感觉量才增减1倍.有些就只是无法用习惯性的思路去思考,这时就必须有强烈的新刺激才能有效地迫使学生从旧思路旧方法中省悟过来,转移到新方法的思维中.

2)题组教学,变换问题.教材知识的单线型发展,也是造成学生思维定势产生的主要原因.因此,数学教学在进行整合设计时,例题、习题常采用题组教学.选取的题型一般为基本题加变式题,变换题目的条件或结论,变换问题的呈现方式,以避免解题方法的固定及习惯性,使学生不因结构的定型化而产生思维定势.这也有利于知识的纵向、横向联系.

3)反思交流,对比强化.思维定势的消极影响具有持久性,并不容易在新授后就能完全克服.因学生是学习的主体,学生思维定势的问题,终究要通过学生自己的努力才能解决,要让学生通过自身实践、反思,认识到问题的严重性,自己讲出来,并与同伴交流,因为学生更能听进同伴的讲解,具有共振“效应”.这就要求教师注意收集

(下转第45页)

$$+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$=1-\frac{1}{n}<1,$$

$$\text{故 } \frac{\ln 2}{2^4}+\frac{\ln 3}{3^4}+\cdots+\frac{\ln n}{n^4}$$

$$<\frac{1}{2e}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$<\frac{1}{2e}.$$

考后问及学生失分原因时,答案惊人一致:最后一问完全没有解题方向.

我们常说“方向大于方式”,即在学习的过程中,确立努力的方向比探讨如何努力更关键,解题何尝不是如此.解题教学中我们教给学生的一些解题技巧莫过于一招一式,充其量只是方式,朝着什么样的方向达成目标才是关键,而这正是我们教学中普遍缺失的.

以上两例中的最后一问是题目的重心所在,对于求和不等式的证明,当常规的“数学归纳法”、“数列单调性法”、“比较对应项法”都无法直接证明时,我们常用放缩法,如何放缩才恰当呢?盲目的放缩无异于“瞎猫碰死耗子”,这时我们应该反思前面问题解决了,我们得到了什么?要证的问题还需要什么,能否在已知与未知之间寻找联系想办法将问

题解决?其实,例1只要抓住第(II)问的结论:“ $a=1$ 时 $f(x)\geq 0$ 恒成立”就可得到基本不等关系 $1+x\leq e^x$,然后换元,将待证式左边放缩为等比数列后再求和,便可将问题解决;而例2则由第(I)问的结论 $f(x)\geq g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立时 $k\geq \frac{1}{2e}$,得到不等关系 $\frac{\ln x}{x^2}\leq \frac{1}{2e}$,即等价于 $\frac{\ln x}{x^4}\leq \frac{1}{2e}\cdot \frac{1}{x^2}$,放缩后用裂项相消的方法求和,问题同样可解决.

我们试想,如果割裂了前后问题之间的联系,不就漠视了命题人设置前面这些基础问题的良苦用心,解题不就迷失了方向?

数学是思维型学科,数学教学是一个既要“结果”,更要“过程”的思维教学.“讲解题,不讲怎样解题”,“讲解法,不讲如何想到解法”,最后沦落为“解法若干加技巧若干”的灌输式教学模式只会给学生加重学习负担,禁锢学生的思维形成与发展.

因此,在解题教学中,我们不但要教给学生一些解题的方法技巧,更要展示解题的思维过程,引导他们在解题过程中不断进行反思,帮助他们从已得结论中挖掘出有用隐含条件,架起从未知通向已知的桥梁

(收稿日期:2014-06-04)

(上接第32页)

一些错例素材,交给学生反思、交流,并整理、分析,得出注意点.譬如要克服问题1中思维定势问题,需要把椭圆、双曲线的性质进行对比,在关注它们共同点的同时,要让学生重点说出其不同点,大家再补充,交流如下:①定义的差异(一个是距离之和、一个为距离之差的绝对值);②基本量 a, b, c 的差异(椭圆中 a 为直角三角形的斜边,双曲线中 c 为斜边);③准线位置的差异(椭圆在两侧,双曲线在之间);④渐近线的差异(有、无)等.这样,在学生头脑中就形成了对这两种圆锥曲线的更全面的认识.

只要我们在教学中采取积极的态度和有效的措施,就能使学生消极的思维定势得到最大限度的克服,帮助学生掌握正确的学法,有利于学生形成良好的思维品质.

为了使复习教学更具针对性、更加科学合理,本文充分利用错误资源,以数据分析,获得启示:必须遵循教学规律、挖掘隐性条件、消除思维定势的消极影响,让学生拓宽解题思路,从而促进课堂教学的优化与升级.

(收稿日期:2014-06-30)