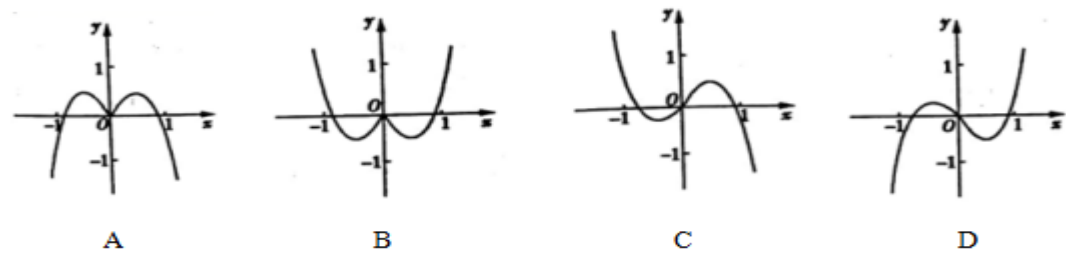


考试科目：理科数学 满分：150 分 考试时间：120 分钟

命题者：苏灿强 审核者：周彩瑛、连春蔚、刘彬辉

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

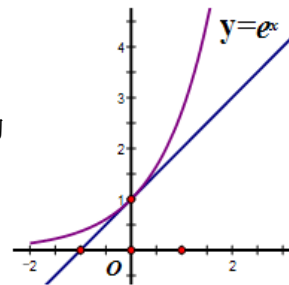
1. 已知集合 $A=\{x|x^2-5x-6\leq 0\}$, $B=\{x|y=\ln(x-1)\}$, 则 $A\cap B$ 等于
- A. $[-1, 6]$ B. $(1,6]$ C. $[-1,+\infty)$ D. $[2, 3]$
2. 下列说法正确的是
- A. 命题“若 $x^2-3x-4=0$, 则 $x=4$.” 的否命题是“若 $x^2-3x-4=0$, 则 $x\neq 4$.”.
- B. 若命题 $p:\forall n\in N, 3^n>500$, 则 $\neg p:\exists n_0\in N, 3^{n_0}\leq 500$.
- C. $\exists x_0\in(-\infty,0), 3^{x_0}<4^{x_0}$.
- D. “ $a>0$ ”是“函数 $y=x^a$ 在定义域上单调递增”的充分不必要条件.
3. 已知函数 $f(x)=x+\sin x$, 若 $a=f(3), b=f(2), c=f(\log_2 6)$, 则 a, b, c 的大小关系是
- A. $a<b<c$ B. $c<b<a$ C. $b<c<a$ D. $b<a<c$
4. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(4, \sigma^2)$, 若 $P(X>m)=0.4$, 则 $P(X>8-m)=$
- A. 0.6 B. 0.5 C. 0.4 D. 与 σ 的值有关
5. 如表提供了某厂节能降耗改造后, 在生产 A 产品过程中记录的产量 x 吨与相应的生产能耗 y 吨的几组对应数据, 根据表中提供的数据, 求出 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.7x+0.35$, 则下列结论错误的是
- | | | | | |
|-----|-----|-----|---|-----|
| x | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y | 2.5 | t | 4 | 4.5 |
- A. 线性回归直线一定过点 $(4.5, 3.5)$ B. t 的取值必定是 3.15
- C. 产品的生产能耗与产量呈正相关 D. A 产品每多生产 1 吨, 则相应的生产能耗约增加 0.7 吨
6. 二项式 $\left(x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$ 展开式的常数项为
- A. -80 B. -16 C. 16 D. 80
7. 函数 $y=x^3+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的图象大致为



8. 由曲线 $y=x^3, y=\sqrt{x}$ 围成的封闭图形的面积为
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{1}{2}$
9. 某些首饰, 如手镯, 项链吊坠等都是椭圆形状, 这种形状给人以美的享受, 在数学中, 我们把这种椭圆叫做“黄金椭圆”, 其离心率 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
- 
- 设黄金椭圆的长半轴, 短半轴, 半焦距分别为 a, b, c , 则 a, b, c 满足的关系是
- A. $b^2=ac$ B. $2b=a+c$ C. $a=b+c$ D. $2b=ac$
10. 将甲, 乙等 5 位同学分别保送到北京大学, 清华大学, 浙江大学等三所大学就读, 则每所大学至少保送一人的不同保送的方法数为
- A. 180 种 B. 150 种 C. 240 种 D. 540 种
11. 设 P 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a, b>0)$ 上的点, F_1, F_2 分别为 C 的左、右焦点, 且 $PF_2\perp F_1F_2$, PF_1 与 y 轴交于点 Q , O 为坐标原点, 若四边形 OF_2PQ 有内切圆, 则 C 的离心率为
- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. 2
12. 已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 对任意实数 x 均有 $(1-x)f(x)+xf'(x)>0$ 成立, 且 $y=f(x+1)-e$ 是奇函数, 则不等式 $xf(x)-e^x>0$ 的解集是
- A. $(-\infty, e)$ B. $(e, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(-\infty, 1)$
- 二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。
13. 复数 $z=\frac{1-2i}{2+i^5}$ 的实部为_____

14. 设 A 是整数集的一个非空子集, 对于 $k \in A$, 如果 $k-1 \notin A$, 且 $k+1 \notin A$, 那么称 k 是 A 的一个“好元素”. 给定 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 由 S 的 3 个元素构成的所有集合中, 含有“好元素”的集合共有_____个 (用数字作答)

15. 某同学在研究函数 $y = e^x$ 在 $x = 0$ 处的切线问题中, 偶然通过观察上图中的图象发现了一个恒成立的不等式: 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $e^x \geq x + 1$, 仿照该同学的研究过程, 请你研究函数 $y = \ln x$ 的在点 $x = 2$ 处的切线问题, 写出一个类似的恒成立的不等式: _____.

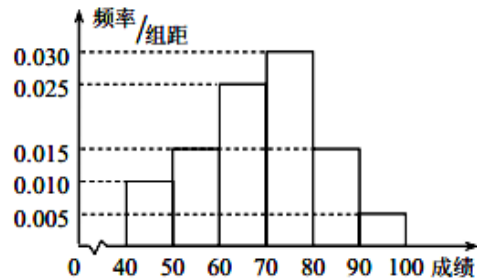


16 抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 已知点 A, B 为抛物线 E 上的两个动点, 且满足 $\angle AFB = \frac{2\pi}{3}$. 过弦 AB 的中点 M 作抛物线 E 准线的垂线 MN , 垂足为 N , 则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 60 分.

17. (12 分) 在某校举行的航天知识竞赛中, 参与竞赛的文科生与理科生人数之比为 1:3, 且成绩分布在 $[40, 100]$, 分数在 80 以上 (含 80) 的同学获奖. 按文理科用分层抽样的方法抽取 200 人的成绩作为样本, 得到成绩的频率分布直方图 (见下图).



	文科生	理科生	合计
获奖	5		
不获奖			
合计			200

(I) 在答题卡上填写上面的 2×2 列联表, 能否有超过 95% 的把握认为“获奖与学生的文理科有关”?

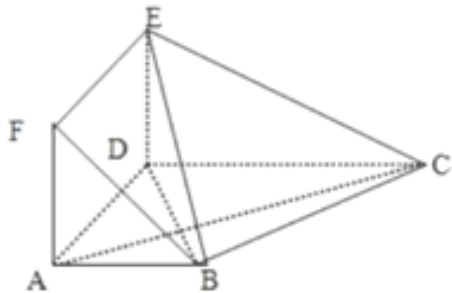
(II) 将上述调查所得的频率视为概率, 现从该校参与竞赛的学生中, 任意抽取 3 名学生, 记“获奖”学生人数为 X , 求 X 的分布列及数学期望.

附表及公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$

$P(K^2 > k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

18. (12 分) 在多面体 $ABCDEF$ 中, 底面 $ABCD$ 是梯形, 四边形 $ADEF$ 是正方形, $AB \parallel DC$, $AB = AD = 1$, $CD = 2$, $AC = EC = \sqrt{5}$,

- (I) 求证: 平面 $EBC \perp$ 平面 EBD ;
 (II) 设 M 为线段 EC 上一点, $3\overline{EM} = \overline{EC}$, 求二面角 $M - BD - E$ 的平面角的余弦值.



19. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且以两焦点为直径的圆的内接正方形面积为 2.

- (I) 求椭圆 C 的标准方程;
 (II) 若直线 $l: y = kx + 2$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 在 y 轴上是否存在点 D , 使直线 AD 与 BD 的斜率之和 $k_{AD} + k_{BD}$ 为定值? 若存在, 求出点 D 坐标及该定值, 若不存在, 试说明理由.

20. (12 分) 某商场计划销售某种产品, 现邀请生产该产品的甲、乙两个厂家进场试销 10 天. 两个厂家提供的返利方案如下: 甲厂家每天固定返利 70 元, 且每卖出一件产品厂家再返利 2 元; 乙厂家无固定返利, 卖出 40 件以内 (含 40 件) 的产品, 每件产品厂家返利 4 元, 超出 40 件的部分每件返利 6 元. 分别记录其 10 天内的销售件数, 得到如下频数表:

甲厂家销售件数频数表:

销售件数	38	39	40	41	42
天数	2	4	2	1	1

乙厂家销售件数频数表:

销售件数	38	39	40	41	42
天数	1	2	2	4	1

- (I) 现从甲厂家试销的 10 天中抽取两天, 求一天销售量大于 40 而另一天销售量小于 40 的概率;
 (II) 若将频率视作概率, 回答以下问题:

①记乙厂家的日返利额为 X （单位：元），求 X 的分布列和数学期望；

②商场拟在甲、乙两个厂家中选择一家长期销售，如果仅从日返利额的角度考虑，请利用所学的统计学知识为商场作出选择，并说明理由.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x + ax + \frac{2}{x} - 3$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) 若 $f(x) \geq 0$ ，求 a 的取值范围.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数， $0 \leq \alpha < \pi$)，曲线 C

的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \beta \\ y = 2 + 2 \sin \beta \end{cases}$ (β 为参数)，以坐标原点 O 为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐

标系.

(I) 求曲线 C 的极坐标方程；

(II) 设 C 与 l 交于 M 、 N 两点 (异于 O 点)，求 $|OM| + |ON|$ 的最大值.

23. [选修 4—5：不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = \left| x - \frac{1}{4} \right| + \left| x + \frac{1}{4} \right|$ ， M 为不等式 $f(x) \leq 2$ 的解集.

(I) 求 M ； (II) 证明：当 $a, b \in M$ 时， $2\sqrt{1-ab} \geq a - b$.