目 录

第一章　随机事件和概率

第一节　基本概念

1、概念网络图

$$
\text{随机试验}E \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{基本事件}\omega \\ \text{样本空间}\Omega \\ \text{随机事件}A\end{array}\right\} \rightarrow P(A)\left\{\begin{array}{l}\text{古典概型} \\ \text{几何概型} \\ \text{五大公式}\left\{\begin{array}{l}\text{加法}B+C \\ \text{减法}B-C \\ \text{条件概率}B/C\text{和乘法公式}BC \\ \text{全概公式}\end{array}\right\} \\ \text{独立性}\end{array}\right\}
$$

2、重要公式和结论

（1）排列组合公式	$P_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$　　从 m 个人中挑出 n 个人进行排列的可能数。 $C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$　　从 m 个人中挑出 n 个人进行组合的可能数。
（2）加法和乘法原理	**加法原理（两种方法均能完成此事）：m+n** 某件事由两种方法来完成，第一种方法可由 m 种方法完成，第二种方法可由 n 种方法来完成，则这件事可由 m+n 种方法来完成。 **乘法原理（两个步骤分别不能完成这件事）：m×n** 某件事由两个步骤来完成，第一个步骤可由 m 种方法完成，第二个步骤可由 n 种方法来完成，则这件事可由 m×n 种方法来完成。
（3）一些常见排列	重复排列和非重复排列（有序） 对立事件（至少有一个） 顺序问题
（4）随机试验和随机事件	如果一个试验在相同条件下可以重复进行，而每次试验的可能结果不止一个，但在进行一次试验之前却不能断言它出现哪个结果，则称这种试验为随机试验。

	试验的可能结果称为随机事件。
（5）基本事件、样本空间和事件	在一个试验下，不管事件有多少个，总可以从其中找出这样一组事件，它具有如下性质： ①每进行一次试验，必须发生且只能发生这一组中的一个事件； ②任何事件，都是由这一组中的部分事件组成的。 这样一组事件中的每一个事件称为基本事件，用ω来表示。 基本事件的全体，称为试验的样本空间，用Ω表示。 一个事件就是由Ω中的部分点（基本事件ω）组成的集合。通常用大写字母*A*，*B*，*C*，…表示事件，它们是Ω的子集。 Ω为必然事件，Ø为不可能事件。 不可能事件（Ø）的概率为零，而概率为零的事件不一定是不可能事件；同理，必然事件（Ω）的概率为 1，而概率为 1 的事件也不一定是必然事件。
（6）事件的关系与运算	①关系： 如果事件 A 的组成部分也是事件 *B* 的组成部分，（*A* 发生必有事件 *B* 发生）：$A\subset B$ 如果同时有 $A\subset B$，$B\supset A$，则称事件 *A* 与事件 *B* 等价，或称 *A* 等于 *B*：*A*=*B*。 A、*B* 中至少有一个发生的事件：$A\bigcup B$，或者 *A*+*B*。 属于 *A* 而不属于 *B* 的部分所构成的事件，称为 *A* 与 *B* 的差，记为 *A*-*B*，也可表示为 *A*-*AB* 或者 $A\overline{B}$，它表示 *A* 发生而 *B* 不发生的事件。 A、*B* 同时发生：$A\bigcap B$，或者 *AB*。$A\bigcap B$=Ø，则表示 A 与 B 不可能同时发生，称事件 A 与事件 B 互不相容或者互斥。基本事件是互不相容的。 Ω-A 称为事件 A 的逆事件，或称 A 的对立事件，记为$\overline{A}$。它表示 A 不发生的事件。互斥未必对立。 ②运算： 结合率：A(BC)=(AB)C　A∪(B∪C)=(A∪B)∪C 分配率：(AB)∪C=(A∪C)∩(B∪C)　(A∪B)∩C=(AC)∪(BC) 德摩根率：$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$　$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$，$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$
（7）概率的公理化定义	设Ω为样本空间，A为事件，对每一个事件A都有一个实数 P(A)，若满足下列三个条件： 1° 0≤P(A)≤1， 2° P(Ω) =1 3° 对于两两互不相容的事件A_1，A_2，…有 $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$ 常称为可列（完全）可加性。 则称 P(A)为事件A的概率。
（8）古典概型	1° $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\cdots\omega_n\}$， 2° $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots P(\omega_n)=\frac{1}{n}$。 设任一事件$A$，它是由$\omega_1,\omega_2\cdots\omega_m$组成的，则有 $P(A)=\{(\omega_1)\bigcup(\omega_2)\bigcup\cdots\bigcup(\omega_m)\}=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_m)$ $=\frac{m}{n}=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$

（9）几何概型	若随机试验的结果为无限不可数并且每个结果出现的可能性均匀，同时样本空间中的每一个基本事件可以使用一个有界区域来描述，则称此随机试验为几何概型。对任一事件 A， $P(A)=\dfrac{L(A)}{L(\Omega)}$。其中 L 为几何度量（长度、面积、体积）。
（10）加法公式	P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) 当 P(AB)＝0 时，P(A+B)=P(A)+P(B)
（11）减法公式	P(A-B)=P(A)-P(AB) 当 B⊂A 时，P(A-B)=P(A)-P(B) 当 A=Ω 时，P($\overline{B}$)=1- P(B)
（12）条件概率	定义 设 A、B 是两个事件，且 P(A)>0，则称 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生条件下，事件 B 发生的条件概率，记为 $P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$。 条件概率是概率的一种，所有概率的性质都适合于条件概率。 例如 P(Ω/B)=1⇒P($\overline{B}$/A)=1-P(B/A)
（13）乘法公式	乘法公式：$P(AB)=P(A)P(B/A)$ 更一般地，对事件 A_1，A_2，…A_n，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有 $P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\ldots\ldots P(A_n\mid A_1A_2\ldots A_{n-1})$。
（14）独立性	**①两个事件的独立性** 设事件 A、B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A、B 是相互独立的。 若事件 A、B 相互独立，且 $P(A)>0$，则有 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$ 若事件 A、B 相互独立，则可得到 $\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立。 必然事件 Ω 和不可能事件Ø与任何事件都相互独立。 Ø与任何事件都互斥。 **②多个事件的独立性** 设 ABC 是三个事件，如果满足两两独立的条件， P(AB)=P(A)P(B)；P(BC)=P(B)P(C)；P(CA)=P(C)P(A) 并且同时满足 P(ABC)=P(A)P(B)P(C) 那么 A、B、C 相互独立。 对于 n 个事件类似。
（15）全概公式	设事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足 1° $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相容，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$， 2° $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$， 则有 $P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots+P(B_n)P(A\mid B_n)$。
（16）贝叶斯公式	设事件 B_1，B_2，…，B_n 及 A 满足 1° B_1，B_2，…，B_n 两两互不相容，$P(Bi)$>0，$i=1$，2，…，n，

	2° $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$，$P(A)>0$， 则 $P(B_i/A)=\dfrac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A/B_j)}$，i=1，2，…n。 此公式即为贝叶斯公式。 $P(B_i)$，（$i=1$，2，…，n），通常叫先验概率。$P(B_i/A)$，（$i=1$，2，…，n），通常称为后验概率。贝叶斯公式反映了“因果”的概率规律，并作出了“由果朔因”的推断。
（17）伯努利概型	我们作了n次试验，且满足 ◆ 每次试验只有两种可能结果，A发生或A不发生； ◆ n次试验是重复进行的，即A发生的概率每次均一样； ◆ 每次试验是独立的，即每次试验A发生与否与其他次试验A发生与否是互不影响的。 这种试验称为伯努利概型，或称为n重伯努利试验。 用p表示每次试验A发生的概率，则$\overline{A}$发生的概率为$1-p=q$，用$P_n(k)$表示n重伯努利试验中A出现$k(0\le k\le n)$次的概率， $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$。

例 11：有 5 个队伍参加了甲 A 联赛，两两之间进行循环赛两场，没有平局，试问总共输的场次是多少？

例 1．2：到美利坚去，既可以乘飞机，也可以坐轮船，其中飞机有战斗机和民航，轮船有小鹰号和 Titanic 号，问有多少种走法？

例 1．3：到美利坚去，先乘飞机，后坐轮船，其中飞机有战斗机和民航，轮船有小鹰号和 Titanic 号，问有多少种走法？

例 1．4：10 人中有 6 人是男性，问组成 4 人组，三男一女的组合数。

例 1．5：两线段 MN 和 PQ 不相交，线段 MN 上有 6 个点 A_1，A_2…，A_6，线段 PQ 上有 7 个点 B_1，B_2，…，B_7。若将每一个 A_i 和每一个 B_j 连成不作延长的线段 A_iB_j(i=1,2,…6;j=1,2,…,7)，则由这些线段 A_iB_j 相交而得到的交点（不包括 A_1…，A_6，B_1…，B_7 13 个点）最多有

A. 315 个　　B. 316 个　　C. 317 个　　D. 318 个

例 1．6：3 封不同的信，有 4 个信箱可供投递，共有多少种投信的方法？

例 1．7：某市共有 10000 辆自行车，其牌照号码从 00001 到 10000，求有数字 8 的牌照号码的个数。

例 1．8：3 白球，2 黑球，先后取 2 球，放回，至少一白的种数？（有序）

$C_3^1\bullet C_5^1=15$　　　　$C_5^1\bullet C_5^1-C_2^1\bullet C_2^1=21$

例 1．9：3 白球，2 黑球，先后取 2 球，不放回，至少一白的种数？（有序）

$C_3^1\bullet C_4^1=12$　　　　$C_5^1\bullet C_4^1-C_2^1\bullet C_1^1=18$

例 1．10：3 白球，2 黑球，任取 2 球，至少一白的种数？（无序）

$$C_3^1 \bullet C_4^1 = 12 \qquad C_5^2 - C_2^2 = 9$$

例 1．11：化简 (A+B)(A+$\overline{B}$)($\overline{A}$+B)

例 1．12：$\overline{(A \cup B)}C = (\overline{A}C) \cup (\overline{B}C)$　成立的充分条件为：

(1)C$\subset \overline{A}$　(2) C$\subset \overline{B}$

例 1．13：3 白球，2 黑球，先后取 2 球，放回，至少一白的概率？

例 1．14：3 白球，2 黑球，先后取 2 球，不放回，至少一白的概率？

例 1．15：3 白球，2 黑球，任取 2 球，至少一白的概率？

例 1．16：袋中装有α个白球及β个黑球。

①从袋中任取 a+b 个球，试求其中含 a 个白球，b 个黑球的概率（a≤α，b≤β）。

②从袋中任意地接连取出 k+1（k+1≤α+β）个球，如果取出后不放回，试求最后取出的是白球的概率。

③上两题改成“放回”。

例 1．17：从 6 双不同的手套中任取 4 只，求其中恰有一双配对的概率。

例 1．18：有 5 个白色珠子和 4 个黑色珠子，从中任取 3 个，问其中至少有 1 个是黑色的概率？

例 1．19：设 O 为正方形 ABCD[坐标为（1，1），（1，-1），（-1，1），（-1，-1）]中的一点，求其落在 $x^2+y^2\leq 1$ 的概率。

例 1．20：某市共有 10000 辆自行车，其牌照号码从 00001 到 10000，求偶然遇到的一辆自行车，其牌照号码中有数字 8 的概率。

例 1．21：一只袋中装有五只乒乓球，其中三只白色，两只红色。现从袋中取球两次，每次一只，取出后不再放回。试求：①两只球都是白色的概率；②两只球颜色不同的概率；③至少有一只白球的概率。

例 1．22：5 把钥匙，只有一把能打开，如果某次打不开就扔掉，问以下事件的概率？①第一次打开；②第二次打开；③第三次打开。

例 1．23：某工厂生产的产品以 100 件为一批，假定每一批产品中的次品最多不超过 3 件，并具有如下的概率：

一批产品中的次品数	0	1	2	3
概　　率	0.1	0.2	0.3	0.4

现在进行抽样检验，从每批中抽取 10 件来检验，如果发现其中有次品，则认为该批产品是不合格的，求一批产品通过检验的概率。

例 1．24：某工厂生产的产品以 100 件为一批，假定每一批产品中的次品最多不超过 3 件，并具有如下的概率：

一批产品中的次品数	0	1	2	3
概　　率	0.1	0.2	0.3	0.4

现在进行抽样检验，从每批中抽取 10 件来检验，如果发现其中有次品，则认为该批产品是不合格的，求通过检验的一批产品中，恰有 $i(i=0,1,2,3,4)$ 件次品的概率。

例 1．25：A，B，C 相互独立的充分条件：

（1）A，B，C 两两独立

（2）A 与 BC 独立

例 1．26：甲，乙两个射手彼此独立地射击同一目标各一次，甲射中的概率为 0.9，乙射中的概率为 0.8，求目标被射中的概率。

例 1．27：有三个臭皮匠独立地解决一个问题，成功解决的概率分别为 0.45，0.55，0.60，问解决该问题的能力是否赶上诸葛亮（成功概率为 0.9)？

例 1．28：假设实验室器皿中产生 A 类细菌与 B 类细菌的机会相等，且每个细菌的产生是相互独立的，若某次发现产生了 n 个细菌，则其中至少有一个 A 类细菌的概率是________。

例 1．29：袋中装有 α 个白球及 β 个黑球，从袋中任取 a+b 次球，每次放回，试求其中含 a 个白球，b 个黑球的概率（a≤α，b≤β）。

例 1．30：有 4 组人，每组一男一女，从每组各取一人，问取出两男两女的概率？

例 1．31：进行一系列独立的试验，每次试验成功的概率为 p，则在成功 2 次之前已经失败 3 次的概率为：

A. $4p^2(1-p)^3$　　B. $4p(1-p)^3$　　C. $10p^2(1-p)^3$

D. $p^2(1-p)^3$　　E. $(1-p)^3$

第二节　重点考核点

事件的运算、概率的定义（古典概型和几何概型）、条件概率和乘法公式、全概和贝叶斯公式、独立性和伯努利概型

第三节　常见题型

1、事件的运算和概率的性质

例 1．32：(A⋃B)-C=(A-C)⋃B　成立的充分条件为：

(1)A⋂B=Ø　(2) $\overline{A}$⋂C=Ø

例 1．33：A,B,C 为随机事件，“A 发生必导致 B、C 同时发生”成立的充分条件为：

(1) A∩B∩C=A　(2)A∪B∪C=A

例 1．34：设 A，B 是任意两个随机事件，则 $P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}=$________。

例 1．35：假设事件 A 和 B 满足 P（B | A）=1，则

（A） A 是必然事件。　　（B） $A\supset B$。

（C） $A\subset B$。　　（D） $P(A\overline{B})=0$。　　[　]

2、古典概型和几何概型

例 1．36：有两组数，都是{1，2，3，4，5，6}，分别任意取出一个，其中一个比另一个大

2 的概率？

例 1．37：52 张扑克牌，任取 5 张牌，求出现一对、两对、同花顺的概率。

例 1．38：设有 n 个质点，每个以相同的概率落入 N 个盒子中。设 A=“指定的 n 个盒子中各有 1 个质点”，对以下两种情况，试求事件 A 的概率。

（1）（麦克斯威尔-波尔茨曼统计）假定 N 个质点是可以分辨的，还假定每个盒子能容纳的质点数不限。

（2）（费米-爱因斯坦统计）假定 n 个质点是不可分辨的，还假定每个盒子至多只能容纳一个质点。

例 1．39：袋中有 10 个球，其中有 4 个白球、6 个红球。从中任取 3 个，求这三个球中至少有 1 个是白球的概率。

例 1．40：侯车问题：某地铁每隔五分钟有一列车通过，在乘客对列车通过该站时间完全不知道的情况下，求每个乘客到站等车时间不多于 2 分钟的概率。

例 1．41：会面问题：甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的，如果甲船和乙船停泊的时间都是两小时，求它们会面的概率是多少？

3、条件概率和乘法公式

例 1．42：从 0 到 9 这 10 个数中任取一个数并且记下它的值，放回，再取一个数也记下它的值。当两个值的和为 8 时，出现 5 的概率是多少？

例 1．43：一个家庭有两个孩子，已知至少一个是男孩，问另一个也是男孩的概率？

4、全概和贝叶斯公式

例 1．44：在盛有 10 只螺母的盒子中有 0 只，1 只，2 只，…，10 只铜螺母是等可能的，今向盒中放入一个铜螺母，然后随机从盒中取出一个螺母，则这个螺母为铜螺母的概率是

A.　6/11　B. 5/10　 C. 5/11　 D. 4/11

例 1．45：有 5 件产品，次品的比例为 20%，从中抽查 2 件产品，没有次品则认为合格，问合格的概率？

例 1．46：有 5 件产品，每件产品的次品率为 20%，从中抽查 2 件产品，没有次品则认为合格，问合格的概率？

例 1．47：发报台以概率 0.6 和 0.4 发出信号“·　”和“—”，由于通信系统存在随机干扰，当发出信号为“·　”和“—”时，收报台分别以概率 0.2 和 0.1 收到信号“—”和“·　”。求收报台收到信号“·　”时，发报台确实发出信号“·　”的概率。

例 1．48：100 个球，40 个白球，60 个红球，先后不放回取 2 次，问第 2 次取到白球的概率？

例 1．49：袋中有 4 个白球、6 个红球，先从中任取出 4 个，然后再从剩下的 6 个球中任取一个，则它恰为白球的概率是___________。

例 1．50：设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份。随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份，

（1）　求先抽到的一份是女生表的概率 p；

（2）　已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q。

5、独立性和伯努利概型

例 1．51：设两两相互独立的三事件 A，B，C，满足：$ABC=\Phi, P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，并且$P(A+B+C)=\frac{9}{16}$，求事件 A 的概率。

例 1．52：设 P(A)>0,P(B)>0，证明

（1）　若 A 与 B 相互独立，则 A 与 B 不互斥；

（2）　若 A 与 B 互斥，则 A 与 B 不独立。

例 1．53：对行任意二事件 A 和 B，

（A）　若 $AB\neq\Phi$，则 A，B 一定独立。

（B）　若 $AB\neq\Phi$，则 A，B 有可能独立。

（C）　若 $AB=\Phi$，则 A，B 一定独立。

（D）　若 $AB=\Phi$，则 A，B 一定不独立。

例 1．54：“A,B,C 为随机事件，A -B 与 C 独立”的充分条件：

(1) A,B,C 两两独立　　（2）P（ABC）=P（A）P（B）P（C）

例 1．55：设 A，B，C 是三个相互独立的随机事件，且 $0<P(C)<1$。则在下列给定的四对事件中不相互独立的是

（A）$\overline{A+B}$ 与 C。　　　　（B）$\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$。

（C）$\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$。　　　　（D）$\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$。　　　　[　　]

例 1．56：将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：A_1={掷第一次出现正面}，A_2={掷第二次出现正面}，A_3={正、反面各出现一次}，A_4={正面出现两次}，则事件

（A）A_1,A_2,A_3 相互独立。　　　　（B）A_2,A_3,A_4 相互独立。

（C）A_1,A_2,A_3 两两独立。　　　　（D）A_2,A_3,A_4 两两独立。

例 1．57：某班车起点站上车人数是随机的，每位乘客在中途下车的概率为 0.3，并且它们下车与否相互独立。求在发车时有 10 个乘客的条件下，中途有 3 个人下车的概率。

例 1．58：某种硬币每抛一次正面朝上的概率为 0.6，问连续抛 5 次，至少有 4 次朝上的概率。

例 1．59：A 发生的概率是 0.6，B 发生的概率是 0.5，问 A,B 都不发生的最大概率？

例 1．60：两只一模一样的铁罐里都装有大量的红球和黑球，其中一罐（取名“甲罐”）内的红球数与黑球数之比为 2：1，另一罐（取名“乙罐”）内的黑球数与红球数之比为 2：1 。今任取一罐并从中取出 50 只球，查得其中有 30 只红球和 20 只黑球，则该罐为“甲罐”的概率是该罐为“乙罐”的概率的

(A) 154 倍 (B)254 倍 (C)798 倍 (D)1024 倍

第四节　历年真题

数学一：

1（87，2 分）　设在一次试验中 A 发生的概率为 p，现进行 n 次独立试验，则 A 至少发生一次的概率为________；而事件 A 至多发生一次的概率为__________。

2（87，2）　三个箱子，第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球，第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球，第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球。现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出 1 个球，这个球为白球的概率等于________。已知取出的球是白球，此球属于第二个箱子的概率为________。

3（88，2 分）　设三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率为___________。

4（88，2 分）　在区间（0，1）中随机地取两个数，则事件"两数之和小于 $\frac{6}{5}$"的概率为__________。

5（89，2 分）　已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B|A)=0.8$，则和事件 $A\bigcup B$ 的概率 $P(A\bigcup B)=$________。

6（89，2 分）　甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为__________。

7（90，2 分）　设随机事件 A，B 及其和事件 $A\bigcup B$ 的概率分别是 0.4，0.3 和 0.6，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$_________。

8（91，3 分）　随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比。则原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为________。

9（92，3 分）　已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，则事件 A、B、C 全不发生的概率为__________。

10（93，3 分）　一批产品有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为__________。

11（94，3 分）　已知 A、B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$___________。

12（96，3 分）　设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1%和 2%，现从由 A 厂和 B 厂的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品是 A 厂生产的概率是______。

13（97，3 分）　袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球。今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第 2 个人取得黄球的概率是__________。

14（98，3 分）　设 A、B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有

（A）$P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　　　（B）$P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$　　　　（D）$P(AB)\neq P(A)P(B)$

15（99，3 分）　设两两相互独立的三事件 A，B 和 C 满足条件：$ABC=\Phi$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$__________。

16（00，3 分）　设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$__________。

17（06，4 分）　设 A,B 为随机事件，且 $P(B)>0, P(A|B)=1$，则必有

（A）$P(A\cup B)>P(A)$.　　　　（B）$P(A\cup B)>P(B)$.

（C）$P(A\cup B)=P(A)$.　　　　（D）$P(A\cup B)=P(B)$.

数学三：

1（87，2 分）　若二事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB)=0$，则

（A）A 和 B 不相容（互斥）。　　　　（B）AB 是不可能事件。

（C）AB 未必是不可能事件。　　　　（C）$P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

[　]

2（87，8 分）　设有两箱同种零件：第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品。现从两箱中随机挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件（取出的零件均不放回）。试求

（1）　先取出的零件是一等品的概率 p；

（2）　在先取出的是一等品的条件下，后取出的零件仍然是一等品的条件概率 q。

3（88，2 分）　设 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，那么

（1）若 A 与 B 互不相容，则 $P(B)=$____________；

（2）若 A 与 B 相互独立，则 $P(B)=$____________。

4（88，2 分）（是非题）　若事件 A，B，C 满足等式 $A\cup C=B\cup C$，则 A=B

（　　）。

5（88，7 分）　玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，设各箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为 0.8，0.1 和 0.1。一顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，而顾客开箱随机地察看 4 只；若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回。试求：

（1）顾客买此箱玻璃杯的概率；

（2）在顾客买的此箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率。

6（89，3 分）　以 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 为：

（A）“甲种产品滞销，乙种产品畅销”。
（B）“甲、乙两种产品均畅销”。
（C）“甲种产品滞销”。
（D）“甲种产品滞销或乙种产品畅销”。 [ ]

7（90，3 分）一射手对同一目标独立地进行 4 次射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则该射手的命中率为__________。

8（90，3 分） 设 A、B 为二随机事件，且 $B \subset A$，则下列式子正确的是

（A）$P(A+B)=P(A)$ （B）$P(AB)=P(A)$

（C）$P(B|A)=P(B)$ （D）$P(B-A)=P(B)-P(A)$

[ ]

9（90，4 分） 从 0，1，2，…，9 等 10 个数字中任意选出 3 个不同的数字，求下列事件的概率：
A_1={三个数字中不含 0 和 5}；
A_2={三个数字中不含 0 或 5}。

10（91，3 分） 设 A 和 B 是任意两个概率不为零的互不相容事件，则下列结论中肯定正确的是：

（A）$\overline{A}$与$\overline{B}$不相容。 （B）$\overline{A}$与$\overline{B}$相容。

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$。 （D）$P(A-B)=P(A)$

11（92，3 分） 将 C，C，E，E，I，N。S 这七个字母随机地排成一行，则恰好排成 SCIENCE 的概率为_____。

12（92，3 分） 设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则

（A）$P(C)\le P(A)+P(B)-1$ （B）$P(C)\ge P(A)+P(B)-1$

（C）$P(C)=P(AB)$ （D）$P(C)=P(A\cup B)$ [ ]

13（93，3 分） 设两事件 A 与 B 满足 $P(B|A)=1$，则

（A）A 是必然事件。 （B）$P(B|\overline{A})=0$。

（C）$A\supset B$。 （D）$A\subset B$。

14（94，3 分） 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则事件 A 和 B

（A）互不相容。 （B）互相对立。
（C）不独立。 （D）独立。 [ ]

15（95，8 分） 某厂家生产的每台仪器，以概率 0.7 可以直接出厂，以概率 0.3 需进一步调试，经调试后以概率 0.8 可以出厂，以概率 0.2 定为不合格产品不能出厂。现该厂新生产了 $n(n\ge 2)$ 台仪器（假设各台仪器的生产过程相互独立），求

（1）　全部能出厂的概率 α；

（2）　恰有两台不能出厂的概率 β；

（3）　至少有两台不能出厂的概率 θ。

16（96，3 分）　已知 $0 < P(B) < 1$,

且 $P[(A_1 + A_2) | B] = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$，则下列选项成立的是

（A）$P[(A_1 + A_2) | \overline{B}] = P(A_1 + \overline{B}) + P(A_2 | \overline{B})$

（B）$P(A_1 B + A_2 B) = P(A_1 B) + P(A_2 B)$

（C）$P(A_1 + A_2) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$

（D）$P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)$　　　　[　]

17（96，6 分）　考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$, 其中 B、C 分别是将一枚骰子连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q。

18（98，9 分）　设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份。随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份

（3）　求先抽到的一份是女生表的概率 p;

（4）　已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q。

19（00，3 分）　在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的。在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电。以 E 表示事件“电炉断电”，而 $T_{(1)} \le T_{(2)} \le T_{(3)} \le T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于

（A）$\{T_{(1)} \ge t_0\}$　　　　（B）$\{T_{(2)} \ge t_0\}$

（C）$\{T_{(3)} \ge t_0\}$　　　　（D）$\{T_{(4)} \ge t_0\}$　　　　[　]

20（03，4 分）　将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：A_1={掷第一次出现正面}，A_2={掷第二次出现正面}，A_3={正、反面各出现一次}，A_4={正面出现两次}，则事件

（A）A_1, A_2, A_3 相互独立。　　（B）A_2, A_3, A_4 相互独立。

（C）A_1, A_2, A_3 两两独立。　　（D）A_2, A_3, A_4 两两独立。

第二章　随机变量及其分布

第一节　基本概念

1、概念网络图

$$\begin{Bmatrix}\text{基本事件}\omega\\ \text{随机变量}X(\omega)\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}\text{随机事件}A\\ a<X\le b\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}P(A)\\ F(b)-F(a)\end{Bmatrix}$$

$$\text{分布函数：}F(x)=P(X\le x)\rightarrow\ \text{八大分布}\left\{\begin{array}{l}\text{离散型}\left\{\begin{array}{l}0-1\text{分布}\\ \text{二项分布}\\ \text{泊松分布}\\ \text{超几何分布}\\ \text{几何分布}\end{array}\right\}\\[2ex] \text{连续型}\left\{\begin{array}{l}\text{均匀分布}\\ \text{指数分布}\\ \text{正态分布}\end{array}\right\}\end{array}\right\}\rightarrow\text{函数分布}$$

2、重要公式和结论

（1）离散型随机变量的分布律	设离散型随机变量 X 的可能取值为 X_k(k=1,2,…)且取各个值的概率，即事件($X=X_k$)的概率为 $P(X=x_k)=p_k$，k=1,2,…， 则称上式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律。有时也用分布列的形式给出： $\dfrac{X}{P(X=x_k)}\Big\vert\dfrac{x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots}{p_1,p_2,\cdots,p_k,\cdots}$。 显然分布律应满足下列条件： （1）$p_k\ge 0$，$k=1,2,\cdots$，　　（2）$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$。

（2）连续型随机变量的分布密度	设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数，若存在非负函数 $f(x)$，对任意实数 x，有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$， 则称 X 为连续型随机变量。$f(x)$ 称为 X 的概率密度函数或密度函数，简称概率密度。 密度函数具有下面 4 个性质： 1° $f(x)\geq 0$。 2° $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$。	
（3）离散与连续型随机变量的关系	$P(X=x)\approx P(x<X\leq x+dx)\approx f(x)dx$ 积分元 $f(x)dx$ 在连续型随机变量理论中所起的作用与 $P(X=x_k)=p_k$ 在离散型随机变量理论中所起的作用相类似。	
（4）分布函数	设 X 为随机变量，x 是任意实数，则函数 $F(x)=P(X\leq x)$ 称为随机变量 X 的分布函数，本质上是一个累积函数。 $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$ 可以得到 X 落入区间 $(a,b]$ 的概率。分布函数 $F(x)$ 表示随机变量落入区间（– ∞，x]内的概率。 分布函数具有如下性质： 1° $0\leq F(x)\leq 1,\quad -\infty<x<+\infty$； 2° $F(x)$ 是单调不减的函数，即 $x_1<x_2$ 时，有 $F(x_1)\leq F(x_2)$； 3° $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$； 4° $F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$ 是右连续的； 5° $P(X=x)=F(x)-F(x-0)$。 对于离散型随机变量，$F(x)=\sum\limits_{x_k\leq x}p_k$； 对于连续型随机变量，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$。	
（5）八大分布	0-1 分布	P(X=1)=p，P(X=0)=q
	二项分布	在 n 重贝努里试验中，设事件 A 发生的概率为 p。事件 A 发生的次数是随机变量，设为 X，则 X 可能取值为 $0,1,2,\cdots,n$。 $P(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$，其中 $q=1-p, 0<p<1, k=0,1,2,\cdots,n$， 则称随机变量 X 服从参数为 n，p 的二项分布。记为 $X\sim B(n,p)$。 当 $n=1$ 时，$P(X=k)=p^k q^{1-k}$，$k=0.1$，这就是（0-1）分布，所以（0-1）分布是二项分布的特例。
	泊松分布	设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$\lambda>0$，$k=0,1,2\cdots$， 则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim\pi(\lambda)$ 或者 P(λ)。 泊松分布为二项分布的极限分布（np=λ，n→∞）。

	超几何分布	$P(X=k)=\frac{C_M^k \bullet C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k=0,1,2\cdots,l$ $l=\min(M,n)$ 随机变量 X 服从参数为 n,N,M 的超几何分布，记为 H(n,N,M)。
	几何分布	$P(X=k)=q^{k-1}p, k=1,2,3,\cdots$，其中 p≥0，q=1-p。 随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布，记为 G(p)。
	均匀分布	设随机变量 X 的值只落在[a，b]内，其密度函数 $f(x)$ 在[a，b]上为常数 $\frac{1}{b-a}$，即 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & 其他，\end{cases}$ 则称随机变量 X 在[a，b]上服从均匀分布，记为 X~U(a，b)。 分布函数为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 1, & x>b。\end{cases}$ 当 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 时，X 落在区间（x_1,x_2）内的概率为 $P(x_1<X<x_2)=\frac{x_2-x_1}{b-a}$。
	指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$，则称随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布。 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0。\end{cases}$ 记住积分公式： $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx=n!$

<table>
<tr>
<td rowspan="1"></td>
<td>正态分布</td>
<td>设随机变量 X 的密度函数为
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad -\infty<x<+\infty,$$
其中 μ、$\sigma>0$ 为常数，则称随机变量 X 服从参数为 μ、σ 的正态分布或高斯（Gauss）分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。
$f(x)$ 具有如下性质：
1° $f(x)$ 的图形是关于 $x=\mu$ 对称的；
2° 当 $x=\mu$ 时，$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 为最大值；
若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 X 的分布函数为
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt。$$
参数 $\mu=0$、$\sigma=1$ 时的正态分布称为标准正态分布，记为 $X\sim N(0,1)$，其密度函数记为
$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$
分布函数为
$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt。$$
$\Phi(x)$ 是不可求积函数，其函数值，已编制成表可供查用。
$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ 且 $\Phi(0)=\frac{1}{2}$。
如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。
$$P(x_1<X\le x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)。$$</td>
</tr>
<tr>
<td>（6）分位数</td>
<td colspan="2">下分位表：$P(X\le\mu_\alpha)=\alpha$；
上分位表：$P(X>\mu_\alpha)=\alpha$。</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">（7）函数分布</td>
<td>离散型</td>
<td>已知 X 的分布列为
$$\begin{array}{c|c} X & x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots \\ \hline P(X=x_i) & p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots \end{array},$$
$Y=g(X)$ 的分布列（$y_i=g(x_i)$ 互不相等）如下：
$$\begin{array}{c|c} Y & g(x_1),\ g(x_2),\ \cdots,\ g(x_n),\ \cdots \\ \hline P(Y=y_i) & p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots \end{array},$$
若有某些 $g(x_i)$ 相等，则应将对应的 p_i 相加作为 $g(x_i)$ 的概率。</td>
</tr>
<tr>
<td>连续型</td>
<td>先利用 X 的概率密度 $f_X(x)$ 写出 Y 的分布函数 $F_Y(y)=P(g(X)\le y)$，再利用变上下限积分的求导公式求出 $f_Y(y)$。</td>
</tr>
</table>

例 2．1：4 黑球，2 白球，每次取一个，不放回，直到取到黑为止，令 X(ω)为“取白球的数”，求 X 的分布律。

例 2．2：给出随机变量 X 的取值及其对应的概率如下：

$$\frac{X}{P}\left|\frac{1,2,\cdots,k,\cdots}{\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\cdots,\frac{1}{3^k},\cdots}\right.,$$

判断它是否为随机变量 X 的分布律。

例 2．3：设离散随机变量 X 的分布列为

$$\frac{X}{P}\left|\frac{-1,0,1,2}{\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2}}\right.,$$

求 X 的分布函数，并求 $P(X\le\frac{1}{2})$，$P(1<X\le\frac{3}{2})$，$P(1\le X\le\frac{3}{2})$。

例 2．4：　$f_1(x)+f_2(x)$ 是概率密度函数的充分条件是：

（1）$f_1(x),f_2(x)$ 均为概率密度函数

（2）$0\le f_1(x)+f_2(x)\le 1$

例 2．5：袋中装有 α 个白球及 β 个黑球，从袋中先后取 a+b 个球（放回），试求其中含 a 个白球，b 个黑球的概率（a≤α，b≤β）。

例 2．6：某人进行射击，设每次射击的命中率为 0.001，若独立地射击 5000 次，试求射中的次数不少于两次的概率，用泊松分布来近似计算。

例 2．7：设某时间段内通过一路口的汽车流量服从泊松分布，已知该时段内没有汽车通过的概率为 0.05，则这段时间内至少有两辆汽车通过的概率约为多少？

例 2．8：袋中装有 α 个白球及 β 个黑球，从袋中任取 a+b 个球，试求其中含 a 个白球，b 个黑球的概率（a≤α，b≤β）。

例 2．9：袋中装有 α 个白球及 β 个黑球，从袋中先后取 a+b 个球（不放回），试求其中含 a 个白球，b 个黑球的概率（a≤α，b≤β）。

例 2．10：袋中装有 α 个白球及 β 个黑球，从袋中先后取 a+b 个球（放回），试求直到第 a+b 次时才取到白球的概率（a≤α，b≤β）。

例 2．11：4 黑球，2 白球，每次取一个，放回，直到取到黑为止，令 X(ω)为“抽取次数”，求 X 的分布律。

例 2．12：5 把钥匙，只有一把能打开，如果某次打不开不扔掉，问以下事件的概率？①第一次打开；②第二次打开；③第三次打开。

例 2．13：若随机变量 X 服从[1，6]上的均匀分布，求方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根的概率。

例 2．14：设非负随机变量 X 的密度函数为 f(x)=A $x^7e^{-\frac{x^2}{2}}$，x>0，则 A=__________。

例 2．15：设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $P(|X-\mu|<3\sigma)$。

例 2．16：X~N(2，σ^2)且 P(2<X<4)＝0.3，则 P(X<0)＝?

例 2．17：设随机变量 X 服从正态分布 N(0,1)，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足

$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$.　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　(D) $u_{1-\alpha}$.

例 2．18：已知随机变量 X 的分布列为

$$\begin{array}{c|cccccc} X & 0, & \frac{\pi}{2}, & \pi, & \cdots, & n\bullet\frac{\pi}{2}, & \cdots \\ \hline P & p, & pq, & pq^2, & \cdots, & pq^n, & \cdots \end{array},$$

其中 $p+q=1$。求 $Y=\sin X$ 的分布列。

例 2．19：已知随机变量 $X\sim f(x)=\dfrac{1}{x(1+x^2)}$，求 $Y=2X+3$ 的密度函数 $f_Y(y)$。

第二节　重点考核点

常见分布、函数分布

第三节　常见题型

1、常见分布

例 2．20：若有彼此独立工作的同类设备 90 台，每台发生故障的概率为 0.01。现配备三个修理工人，每人分块包修 30 台，求设备发生故障而无人修理的概率。若三人共同负责维修 90 台，这时设备发生故障而无人修理的概率是多少？

例 2．21：随机变量 X 满足 P（X>h）=P(X>a+h｜X>a)．(a,h 均为正整数)的充分条件为：

(1) X 服从几何分布 P(X=k)=p(1-p)$^{k-1}$ (k=1,2,…)

(2) X 服从二项分布 P(X=k)=C_n^k P^k (1-p)$^{n-k}$ (k=0,1,2,…n)

例 2．22：实验器皿中产生甲乙两种细菌的机会是相等的，且产生细菌的数 X 服从参数为 λ 的泊松发布，试求：

（1）产生了甲类细菌但没有乙类细菌的概率；

（2）在已知产生了细菌而且没有甲类细菌的条件下，有两个乙类细菌的概率。

例 2．23：设随机变量 X 服从[a,b](a>0)的均匀分布，且 P(0<X<3)＝$\dfrac{1}{4}$，P(X>4)＝$\dfrac{1}{2}$，求：

（1）X 的概率密度　（2）P(1<X<5)

例 2．24：X,Y 独立，均服从 U[1,3]，A={X≤a}，B={Y≤a}，已知 P(A∪B)=$\dfrac{5}{9}$，求 a=?

定义：如果 P({X≤x}∩{Y≤y})=P(X≤x)P(Y≤y)，称 X 与 Y 独立。

例 2．25：设随机主量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & x\in[0,1]\\[2ex] \dfrac{2}{9}, & x\in[3,6]\\[2ex] 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其使得 $P(X\geq k)=\dfrac{2}{3}$，则 k 的取值范围是____________。

例 2．26：设顾客到某银行窗口等待服务的时间 X（单位：分）服从指数发布，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, x>0\\ 0, x\leq 0\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，如超过 10 分钟，他就离开。他一个月到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，求 Y 的分布列，并求 P(Y≥1)。

例 2．27：$X^3\sim N(1,7^2)$，则 P(1<X<2)=?

例 2．28：设随机变量 X 的概率密度为：$\phi(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|},(-\infty<x<+\infty)$ 则其分布函数 F(x)是

（A） $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\[2ex] 1, & x\geq 0.\end{cases}$

（B） $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\[2ex] 1-\dfrac{1}{2}e^{-x} & x\geq 0.\end{cases}$

（C） $F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}e^{-x}, & x<0,\\[2ex] 1, & x\geq 0.\end{cases}$

（D） $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-x}, & x<0,\\[2ex] 1-\dfrac{1}{2}e^{-x}, & 0\leq x<1,\\[2ex] 1, & x\geq 1.\end{cases}$　　　　[　]

例 2．29：设随机变量 X 的绝对值不大于 1，即|X|≤1，且 $P(X=-1)=\frac{1}{8}, P(X=1)=\frac{1}{4}$，在事件{-1<X<1}出现的条件下，X 在（-1，1）内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比。试求 X 的分布函数 F(x)及 P（X<0）（即 X 取负值的概率）。

2、函数分布

例 2．30：设随机变量 X 具有连续的分布函数 F(x)，求 Y=F（X）的分布函数 F（y）。
（或证明题：
设 X 的分布函数 F(x)是连续函数，证明随机变量 Y=F（X）在区间（0，1）上服从均匀分布。）
例 2．31：设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 若 x\in[1,8]\\ 0, & 其他\end{cases}$$

F（*x*）是 *X* 的分布函数，求随机变量 *Y=F*（*X*）的分布函数。
例 2.32：假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布，平均无故障工作的时间（EX）为 5 小时。设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机。试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 F（y）。

第四节　历年真题

数学一：

1（88，2 分）设随机变量 *X* 服从均值为 10，均方差为 0.02 的正态分布上。已知 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du, \Phi(2.5)=0.9938$，则 *X* 落在区间（9.95，10.05）内的概率为__________。

2（88，6 分）　设随机变量 *X* 的概率密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 Y=1-$\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$。

3（89，2 分）　设随机变量ξ在区间（1，6）上服从均匀分布，则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率是__________。

4（90，2 分）　已知随机变量 *X* 的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$，则 X 的概率分布函数 *F*（*x*）=__________。

5（93，3 分）　设随机变量 *X* 服从（0，2）上的均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 在（0，

4）内的概率分布密度 $f_Y(y)=$__________。

6（95，6 分）　　设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$。

7（02，3 分）　　设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\mu=$________。

8（04，4 分）　　设随机变量 X 服从正态分布 N(0,1)，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$.　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　　(D) $u_{1-\alpha}$.　　[　　]

9（06，4 分）　设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

（A）$\sigma_1<\sigma_2$.　　　　（B）$\sigma_1>\sigma_2$.

（C）$\mu_1<\mu_2$.　　　　（D）$\mu_1>\mu_2$.

数学三：

1（87，2 分）（是非题）　连续型随机变量取任何给定实数值的概率都等于 0。

2（87，4 分）　　已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=0.2$，$P\{X=2\}=0.3$，$P\{X=3\}=0.5$ 试写出其分布函数 $F(x)$.

3（88，6 分）　　设随机变量 X 在区间（1，2）上服从均匀分布，试求随机变量 $Y=e^{2X}$ 的概率密度 $f(y)$。

4（89，3 分）　　设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & 若 x<0 \\ A\sin x, & 若 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ 1, & 若 x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

则 A=__________，$P\{|X|<\frac{\pi}{6}\}$=_________。

5（89，8 分）　设随机变量 X 在[2，5]上服从均匀分布，现在对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于 3 的概率。

6（90，7 分）　对某地抽样调查的结果表明，考生的外语成绩（百分制）近似服从正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率。

[附表]：

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数。

7（91，3 分）　设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, & 若 x<-1\\ 0.4, & 若 -1\le x<1\\ 0.8, & 若 1\le x<3\\ 1, & 若 x\ge 3\end{cases}$$

则 X 的概率分布为________。

8（91，5 分）　一辆汽车沿一街道行驶，要过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且红、绿两种信号显示的时间相等。以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求 X 的概率分布。

9（92，7 分）　设测量误差 $X\sim N(0,10^2)$。试求在 100 次独立重复测量中，至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α，并用泊松分布求出 α 的近似值（要求小数点后取两位有效数字）。

[附表]：

λ	1	2	3	4	5	6	7	…
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	…

10（93，8 分）　设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布。

（1）　求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布；

（2）　求在设备已经无故障工作 8 小时的情形下，再无故障运行 8 小时的概率 Q。

11（94，3 分）　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件$\{X\le \frac{1}{2}\}$出现的次数，则$P\{Y=2\}=$________。

12（95，3 分）　设随机变量 X~N（μ，σ²），则随着 σ 的增大，概率 $P(|X-\mu|<\sigma)$

（A）单调增大。　　　　　　　　（B）单调减小。
（C）保持不变。　　　　　　　　（D）增减不定。

13（97，7 分）　设随机变量 X 的绝对值不大于 1，$P(X=-1)=\frac{1}{8}, P(X=1)=\frac{1}{4}$。在事件{-1<X<1}出现的条件下，X 在区间（-1，1）内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比。试求 X 的分布函数 $F(x)=P(X\le x)$。

14（00，3 分）　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 若x\in[0,1]\\ \frac{2}{9}, & 若x\in[3,6]\\ 0, & 其他\end{cases}$$

若k使得$P\{X\ge k\}=\frac{2}{3}$，则k的取值范围是________。

15（03，13 分）　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 若x\in[1,8]\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$F(x)$是X的分布函数.求随机变量$Y=F(X)$的分布函数.

16（04，4 分）　设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha\in(0,1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于

(A)　$u_{\frac{\alpha}{2}}$.　　(B)　$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　　(C)　$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　　(D)　$u_{1-\alpha}$.　　　　[　　]

17（06，4 分）　设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$,随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$,则必有　(　　)

(A)　$\sigma_1<\sigma_2$

(B)　$\sigma_1>\sigma_2$

(C)　　$\mu_1 < \mu_2$

(D)　　$\mu_1 > \mu_2$

第三章　二维随机变量及其分布

第一节　基本概念

1、概念网络图

$$\xi(X,Y)\to\left\{\begin{array}{l} \text{联合分布}\left\{\begin{array}{c}\text{离散型分布律}\\ \text{连续型分布密度}\end{array}\right\} \\ \text{边缘分布} \\ \text{条件分布} \\ \text{独立性}\end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l} \text{常见二维分布}\left\{\begin{array}{l}\text{均匀分布}\\ \text{正态分布}\end{array}\right\} \\ \text{函数分布}\left\{\begin{array}{c} Z=X+Y \\ Z=\max,\min(X_1,X_2,\cdots X_n) \\ \text{三大统计分布}\left\{\begin{array}{l}\chi^2\text{分布}\\ t\text{分布}\\ F\text{分布}\end{array}\right\}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

2、重要公式和结论

<table>
<tr>
<td rowspan="2">（1）联合分布</td>
<td>离散型</td>
<td>
如果二维随机向量ξ（X，Y）的所有可能取值为至多可列个有序对（x,y），则称ξ为离散型随机量。
设ξ =（X，Y）的所有可能取值为 $(x_i, y_j)(i, j=1,2,\cdots)$，且事件{ξ= (x_i, y_j) }的概率为 p_{ij}, 称
$$P\{(X,Y)=(x_i,y_j)\}=p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$$
为ξ =（X，Y）的分布律或称为 X 和 Y 的联合分布律。联合分布有时也用下面的概率分布表来表示：
<table>
<tr><td>X \ Y</td><td>y_1</td><td>y_2</td><td>…</td><td>y_j</td><td>…</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>p_{11}</td><td>p_{12}</td><td>…</td><td>p_{1j}</td><td>…</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>p_{21}</td><td>p_{22}</td><td>…</td><td>p_{2j}</td><td>…</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td></td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>x_i</td><td>p_{i1}</td><td></td><td>…</td><td>p_{ij}</td><td>…</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td><td></td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
</table>
这里 p_{ij} 具有下面两个性质：
（1）p_{ij}≥0（i,j=1,2,…）；
（2）$\sum_i \sum_j p_{ij}=1.$
</td>
</tr>
<tr>
<td>连续型</td>
<td>
对于二维随机向量 $\xi=(X,Y)$，如果存在非负函数 $f(x,y)(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$，使对任意一个其邻边分别平行于坐标轴的矩形区域 D，即 D={(X,Y)|a<x<b,c<y<d}有
$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy,$$
则称ξ为连续型随机向量；并称 f(x,y)为ξ=（X，Y）的分布密度或称为 X 和 Y 的联合分布密度。
分布密度 f(x,y)具有下面两个性质：
（1）　f(x,y)≥0；
（2）　$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1.$
</td>
</tr>
<tr>
<td>（2）二维随机变量的本质</td>
<td colspan="2">$\xi(X=x,Y=y)=\xi(X=x\cap Y=y)$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>（3）联合分布函数</td><td colspan="2">设（X，Y）为二维随机变量，对于任意实数 x, y, 二元函数
$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$
称为二维随机向量（X，Y）的分布函数，或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数。
分布函数是一个以全平面为其定义域，以事件 $\{(\omega_1,\omega_2)\,|\,-\infty<X(\omega_1)\le x,-\infty<Y(\omega_2)\le y\}$ 的概率为函数值的一个实值函数。分布函数 F(x, y) 具有以下的基本性质：
（1）$0\le F(x,y)\le 1$;
（2）F（x, y）分别对 x 和 y 是非减的，即
当 $x_2>x_1$ 时，有 F（x_2, y）≥F(x_1, y)；当 $y_2>y_1$ 时，有 F(x, y_2) ≥F(x, y_1)；
（3）F（x, y）分别对 x 和 y 是右连续的，即
$$F(x,y)=F(x+0,y),F(x,y)=F(x,y+0);$$
（4）$F(-\infty,-\infty)=F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0,F(+\infty,+\infty)=1.$
（5）对于 $x_1<x_2$，$y_1<y_2$，
$F(x_2，y_2)-F(x_2，y_1)-F(x_1，y_2)+F(x_1，y_1)\ge 0.$</td></tr>
<tr><td>（4）离散型与连续型的关系</td><td colspan="2">$P(X=x，Y=y)\approx P(x<X\le x+dx，y<Y\le y+dy)\approx f(x，y)dxdy$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（5）边缘分布</td><td>离散型</td><td>X 的边缘分布为
$P_{i\bullet}=P(X=x_i)=\sum_j p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$；
Y 的边缘分布为
$P_{\bullet j}=P(Y=y_j)=\sum_i p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$。</td></tr>
<tr><td>连续型</td><td>X 的边缘分布密度为
$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy;$
Y 的边缘分布密度为
$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx.$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（6）条件分布</td><td>离散型</td><td>在已知 $X=x_i$ 的条件下，Y 取值的条件分布为
$P(Y=y_j\,|\,X=x_i)=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$；
在已知 $Y=y_j$ 的条件下，X 取值的条件分布为
$P(X=x_i\,|\,Y=y_j)=\dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$，</td></tr>
<tr><td>连续型</td><td>在已知 Y=y 的条件下，X 的条件分布密度为
$f(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$；
在已知 X=x 的条件下，Y 的条件分布密度为
$f(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（7）独立性</td><td>一般型</td><td>$F(X,Y)=F_X(x)F_Y(y)$</td></tr>
<tr><td>离散型</td><td>$p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}$
有零不独立</td></tr>
</table>

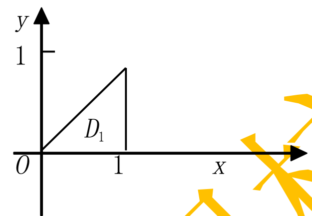
<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>连续型</td><td>$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
直接判断，充要条件：
①可分离变量
②正概率密度区间为矩形</td></tr>
<tr><td>二维正态分布</td><td>$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]},$$
$\rho=0$</td></tr>
<tr><td>随机变量的函数</td><td>若 $X_1,X_2,\cdots X_m,X_{m+1},\cdots X_n$ 相互独立， h,g 为连续函数，则：
h（X_1，X_2，$\cdots X_m$）和 g（X_{m+1}，$\cdots X_n$）相互独立。
特例：若 X 与 Y 独立，则：h（X）和 g（Y）独立。
例如：若 X 与 Y 独立，则：3X+1 和 5Y-2 独立。</td></tr>
<tr><td>（8）二维均匀分布</td><td colspan="2">设随机向量（X，Y）的分布密度函数为
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D} & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$
其中 S_D 为区域 D 的面积，则称（X，Y）服从 D 上的均匀分布，记为（X，Y）～U（D）。
例如图 3.1、图 3.2 和图 3.3。


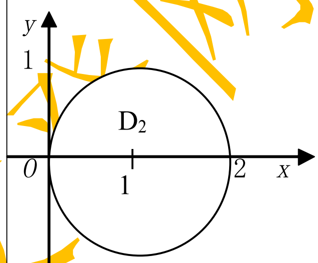
图 3.1


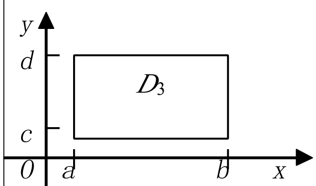
图 3.2


图 3.3</td></tr>
</table>

（9）二维正态分布	设随机向量（X，Y）的分布密度函数为 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$， 其中 $\mu_1,\mu_{2,}\sigma_1>0,\sigma_2>0,\|\rho\|<1$ 是 5 个参数，则称（X，Y）服从二维正态分布， 记为（X，Y）～N（$\mu_1,\mu_{2,}\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$). 由边缘密度的计算公式，可以推出二维正态分布的两个边缘分布仍为正态分布， 即 X～N（$\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_{2,}\sigma_2^2)$. 但是若 X～N（$\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_{2,}\sigma_2^2)$，(X，Y)未必是二维正态分布。	
（10）函数分布	Z=X+Y	根据定义计算：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$ 对于连续型，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$ 两个独立的正态分布的和仍为正态分布（$\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2$）。 n 个相互独立的正态分布的线性组合，仍服从正态分布。 $\mu=\sum_i C_i\mu_i$，　$\sigma^2=\sum_i C_i^2\sigma_i^2$
	Z=max,min(X₁,X₂,…Xₙ)	若 $X_1,X_2\cdots X_n$ 相互独立，其分布函数分别为 $F_{x_1}(x)$，$F_{x_2}(x)\cdots F_{x_n}(x)$，则 Z=max,min(X₁,X₂,…Xₙ)的分布函数为： $F_{\max}(x)=F_{x_1}(x)\bullet F_{x_2}(x)\cdots F_{x_n}(x)$ $F_{\min}(x)=1-[1-F_{x_1}(x)]\bullet[1-F_{x_2}(x)]\cdots[1-F_{x_n}(x)]$

	χ^2 分布	设 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且服从标准正态分布，可以证明它们的平方和 $W = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 的分布密度为 $f(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} & u \ge 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$ 我们称随机变量W服从自由度为n的 χ^2 分布，记为W～$\chi^2(n)$，其中 $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x} dx.$ 所谓自由度是指独立正态随机变量的个数，它是随机变量分布中的一个重要参数。 χ^2 分布满足可加性：设 $Y_i - \chi^2(n_i),$ 则 $Z = \sum_{i=1}^{k} Y_i \sim \chi^2(n_1 + n_2 + \cdots + n_k).$
	t 分布	设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，且 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n),$ 可以证明函数 $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 的概率密度为 $f(t) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (-\infty < t < +\infty).$ 我们称随机变量 T 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 T～t(n)。 $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

	F 分布	设 $X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$，且 X 与 Y 独立，可以证明 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 的概率密度函数为 $$f(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)}\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}y^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}y\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$ 我们称随机变量 F 服从第一个自由度为 n_1，第二个自由度为 n_2 的 F 分布，记为 F～f(n_1, n_2). $$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$

例 3．1　二维随机向量（X，Y）共有六个取正概率的点，它们是：（1，-1），（2，-1），（2，0），2，2），（3，1），（3，2），并且（X，Y）取得它们的概率相同，则（X，Y）的联合分布及边缘分布为

X \ Y	-1	0	1	2	$p_{i}\cdot$
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1

例 3．2：　设二维连续型随机变量（X，Y）在区域 D 上服从均匀分布，其中

$$D=\{(x,y):\|x+y\|\leq 1,\|x-y\|\leq 1\},$$

求 X 的边缘密度 $f_X(x)$

例 3．3：设随机变量 X 以概率 1 取值 0，而 Y 是任意的随机变量，证明 X 与 Y 相互独立。

例 3．4：如图 3.1，f(x, y)=8xy，$f_X(x)=4x^3$，$f_Y(y)=4y-4y^3$，不独立。

例 3．5：$f(x,y)=\begin{cases}Axy^2, 0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 1\\ 0, 其他\end{cases}$

例 3．6：设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，且 X～U（0，1），Y～e（1），求 Z=X+Y 的分布密度函数 $f_z(z)$。

例 3．7：设随机变量 X 与 Y 独立，其中 X 的概率分布为

$$X \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix},$$

而 Y 的概率密度为 e(1)，求随机变量 U= $\dfrac{X}{Y+1}$ 的概率密度 g(u)。

第二节　重点考核点

二维随机变量联合分布函数、随机变量的独立性、简单函数的分布

第三节　常见题型

1、二维随机变量联合分布函数

例 3．8：如下四个二元函数，哪个不能作为二维随机变量（X，Y）的分布函数？

（A） $F_1(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}), & 0<x<+\infty, 0<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（B） $F_2(x,y) = \dfrac{1}{\pi^2}\left(\dfrac{\pi}{2} + \arctan\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{\pi}{2} + \arctan\dfrac{y}{3}\right).$

（C） $F_3(x,y) = \begin{cases} 1, & x+2y \geq 1, \\ 0, & x+2y<1. \end{cases}$

（D） $F_4(x,y) = \begin{cases} 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & 0<x<+\infty, 0<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$　　　　[　　]

例 3．9：设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，它们均匀地分布在（0，l）内，试求方程 t^2+Xt+Y=0 有实根的概率。

例 3．10：将一枚均匀硬币连掷三次，以 X 表示三次试验中出现正面的次数，Y 表示出现正面的次数与出现反面的次数的差的绝对值，求（X，Y）的联合分布律。

例 3．11：设随机变量 $X_i \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, i=1,2$，且 $P(X_1X_2=0)=1$，求 $P(X_1=X_2)$.

例 3．12：设某班车起点站上车人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 p(0<p<1)，并且他们在中途下车与否是相互独立的，用 Y 表示在中途下车的人数，求：二维随机向量（X，Y）的概率分布。

例 3．13：设平面区域 D 是由 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 y=0, x=1, x=e^2 所围成（如图 3.15），二维随机向量 ξ=（X，Y）在 D 上服从均匀分布，求（X，Y）关于 X 的边缘分布密度在 x=2 处的值。

例 3．14：设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布，求

(Ⅰ) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度；

(Ⅱ) Y 的概率密度；

(Ⅲ) 概率 $P\{X+Y>1\}$.

2、随机变量的独立性

例 3．15：设随机变量 X 在 1，2，3，4 四个整数中等可能地取值，另一随机变量 Y 在 1～X 中等可能地取一整数值，试求（X，Y）的分布律，X，Y 的边缘分布律，并判断独立性。

例 3．16：设随机变量 X 与 Y 独立，并且 P(X=1)=P(Y=1)=p，P(X=0)=P(Y=0)=1-p=q，0<p<1。定义随机变量 Z 为

$$Z=\begin{cases}1 & 若X+Y为偶数, \\ 0 & 若X+Y为奇数,\end{cases}$$

问当 p 取何值时，X 与 Z 相互独立？

例 3．17：设

$$\xi(X,Y)\sim F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right),$$

求：（1）A，B，C 的值；

（2） f(x,y)；

（3） $f_1(x), f_2(y)$

（4） 判断独立性。

例 3．18：设（X，Y）的密度函数为 $\varphi(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & x>0, y>x, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

试求：　（1）X，Y 的边缘密度函数，并判别其独立性；

（2）（X，Y）的条件分布密度；

（3）P（X>2|Y<4）.

3、简单函数的分布

例 3．19：设随机变量 $X_i(i=1,2,3,4)$ 相互独立同 B（1，0，4），求行列式

$$X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$$

的概率分布。

例 3．20：设随机变量（X，Y）的分布密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} 3x & 0<x<1, 0<y<x, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

试求Z=X-Y 的分布密度。

例 3．21：设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形 G={（x,y）|1≤x≤3，1≤y≤3}上的均匀分布，试求随机变量 U=|X-Y|的概率密度 f(u).

例 3．22：设某型号的电子元件寿命（以小时计）近似服从 N（160，20^2）分布，随机选取 4 件，求其中没有一件寿命小于 180 小时的概率。

例 3．23：对某种电子装置的输出测量了 5 次，得到的观察值 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5，设它们是相互独立的变量，且都服从同一分布

$$F(z)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{z^2}{8}}, & x\geq 0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

试求：$\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}>4$ 的概率。

例 3．24：设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 相互独立同 N（0，2^2）分布，求常数 a，b，c，d 使

$$Y=aX_1^2+b(X_2+X_3)^2+c(X_4+X_5+X_6)^2+d(X_7+X_8+X_9+X_{10})^2$$

服从 χ^2 分布，并求自由度 m。

例 3.25：设随机变量 X 与 Y 相互独立同服从 N(0，3^2)分布，$x_1,x_2,\cdots,x_9$ 以及 $y_1,y_2,\cdots,y_9$ 是分别来自总体 X，Y 的样本，求统计量

$$K=\frac{\sum_{i=1}^{9}x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9}y_i^2}}$$

的分布。

例 3．26：设随机变量 X～t(n)(n>1)，求 $Y=\frac{1}{X^2}$ 的分布。

第四节　历年真题

数学一：

1（87，6 分）　设随机变量 *X*，*Y* 相互独立，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

求随机变量 Z=2X+Y 的概率密度函数。

2（91，6 分）　设二维随机变量（*X*，*Y*）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)} & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求随机变量 Z=X+2Y 的分布函数。

3（92，6 分）　设随机变量 *X* 与 *Y* 相互独立，X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，Y 服从[-π，π]上均匀分布，试求 *Z=X+Y* 的概率分布密度（计算结果用标准正态分布函数Φ表示，其中 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}(dt)$。

4（94，3 分）　设相互独立的两个数随机变量 *X* 与 *Y* 具有同一分布律，且 *X* 的分布律为

X	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 *Z*=max{*X*，*Y*}的分布律为________。

5（95，3 分）　设 *X* 和 *Y* 为两个随机变量，且

$$P\{X\ge 0,Y\ge 0\}=\frac{3}{7},P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=\frac{4}{7}$$

则 $P\{\max(X,Y)\ge 0\}=$__________。

6（98，3 分）设平面区域 *D* 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0,x=1,x=e^2$ 所围成，二维随

机变量（X，Y）在区域 D 上服从均匀分布，则（X，Y）关于 X 的边缘概率密度在 x=2 处的值为______。

7（99，3 分）　设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 N（0，1）和 N（1，1），则

（A）$P\{X+Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　　　　（B）$P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

（C）$P\{X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　　　　（D）$P\{X-Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

8（99，8 分）　设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量（X，Y）联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处。

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{\bullet j}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$p\{Y=y_j\}=p_{\bullet j}$	$\frac{1}{6}$			1

9（02，3 分）　设 X_1和X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度

分别为 $f_1(x)$和$f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$和$F_2(x)$，则

（A）$f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；

（B）$f_1(x)\bullet f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度；

（C）$F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数；

（D）$F_1(x)\bullet F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数。　　　　[　]

10（03，4 分）　设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 $P\{X+Y\le 1\}$=________。

11（05，4 分）　从数 1，2，3，4 中任取一个数，记为 X，再从 1，…，X 中任取一个数，记为 Y，则 P{Y=2}=______.

12（05，4 分）　设二维随机变量（X，Y）的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件{X=0}与{X+Y=1}互相独立，则

（A）a=0.2, b=0.3　　　　　　　　（B） a=0.4, b=0.1

（D）a=0.3, b=0.2　　　　　　　　（D）a=0.1, b=0.4　　[　　　　]

13（05，9 分）　设二维随机变量（*X*，*Y*）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\quad 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：(I)（X，Y）的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(II) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

14（06，4 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间[0, 3]上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=$_________.

15（06，9 分）随机变量 x 的概率密度为 $f_x(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},-1<x<0\\ \frac{1}{4},0\le x<2\\ 0,\text{其他}\end{cases}$ 令 $y=x^2, F(x,y)$ 为二维随机变量(X,Y)的分布函数.

(Ⅰ)求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$

(Ⅱ) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$

数学三：

1（90，3 分）　设随机变量 *X* 和 *Y* 相互独立，其概率分布为

m	-1	1
$P\{X=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

m	-1	1
$P\{Y=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列式子正确的是：

（A） $X=Y$ （B） $P\{X=Y\}=0$

（C） $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$ （D） $P\{X=Y\}=1$

2（90，5分） 一电子仪器由两个部件构成，以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命（单位：千小时），已知 X 和 Y 的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)} & 若x\geq,y\geq 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（1） 问 X 和 Y 是否独立？

（2） 求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率。

3（92，4分） 设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（1） 求 X 的概率密度 $f_X(x)$;

求 $P\{X+Y\leq 1\}$。

4（94，8分） 设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立且同分布，

$P(X_i=0)=0.6, P(X_i=1)=0.4(i=1,2,3,4)$。

求行列式

$$X=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}$$

的概率分布。

5（95，8分） 已知随机变量（X，Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 若0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求（X，Y）的联合分布函数。

6（97，3分） 设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布，P（X=−1—）=P（Y=−1）$=\frac{1}{2}$，P（X=1）=P（Y=1）$=\frac{1}{2}$，则下列各式成立的是

（A） $P(X=Y)=\frac{1}{2}$ （B） $P(X=Y)=1$

（C） $P(X+Y=0)=\frac{1}{4}$ （D） $P(XY=1)=\frac{1}{4}$ ［ ］

7（98，3分） 设 $F_1(x)与F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数。为使

$F(x)=a_1F_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取

（A） $a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　　（B） $a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$

（C） $a=\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$　　（D） $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

8（99，3 分）　设随机变量 $X_i\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}(i=1,2)$,

且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1,$ 则 $P\{X_1=X_2\}$ 等于

（A）0　　（B） $\frac{1}{4}$　　（C） $\frac{1}{2}$　　（D）1　　[　]

9（01，8 分）　设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形 $G=\{(x,y):1\le x\le 3,2\le y\le 3\}$ 上的均匀分布。试求随机变量 $U=|X-Y|$ 的概率密度 $p(u)$。

10（03，13 分）　设随机变量 X 与 Y 独立，其中 X 的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$$

而 Y 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$。

11（05，4 分）从数 1，2，3，4 中任取一个数，记为 X，再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，则 $P\{Y=2\}=$____________.

12（05，4 分）　设二维随机变量（X，Y）的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$互相独立，则 $a=$____________, $b=$____________.

13（05，13 分）　设二维随机变量（X, Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（I）(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$;

（II）$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$;

（III）$P\left\{Y\le\frac{1}{2}\middle|X\le\frac{1}{2}\right\}$.

14（06，4 分） 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间$[0,3]$上的均匀分布,则

$P\{\max(X,Y)\le 1\}=$__________

第四章　随机变量的数字特征

第一节　基本概念

1、概念网络图

$$\text{一维随机变量}\rightarrow\left\{\begin{array}{c}\text{期望}\\\text{方差}\\\text{矩}\\\text{切比雪夫不等式}\end{array}\right\}$$

$$\text{二维随机变量}\rightarrow\left\{\begin{array}{c}\text{期望}\\\text{方差}\\\text{协方差}\\\text{相关系数}\\\text{协方差矩阵}\end{array}\right\}$$

2、重要公式和结论

（1）		离散型	连续型

一维随机变量的数字特征	期望 期望就是平均值	设 X 是离散型随机变量，其分布律为 $P(X=x_k)=p_k$，k=1,2,…,n， $E(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ （要求绝对收敛）	设 X 是连续型随机变量，其概率密度为 f(x)， $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ （要求绝对收敛）
	函数的期望	Y=g(X) $E(Y)=\sum_{k=1}^{n} g(x_k)p_k$	Y=g(X) $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$
	方差 $D(X)=E[X-E(X)]^2$， 标准差 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$，	$D(X)=\sum_{k}[x_k-E(X)]^2 p_k$	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$
	矩	①对于正整数 k，称随机变量 X 的 k 次幂的数学期望为 X 的 k 阶原点矩，记为 v_k，即 $v_k=E(X^k)=\sum_i x_i^k p_i$， k=1,2，…. ②对于正整数 k，称随机变量 X 与 E（X）差的 k 次幂的数学期望为 X 的 k 阶中心矩，记为 μ_k，即 $\mu_k=E(X-E(X))^k$. $=\sum_i (x_i-E(X))^k p_i$， k=1,2，….	①对于正整数 k，称随机变量 X 的 k 次幂的数学期望为 X 的 k 阶原点矩，记为 v_k，即 $v_k=E(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$， k=1,2，…. ②对于正整数 k，称随机变量 X 与 E（X）差的 k 次幂的数学期望为 X 的 k 阶中心矩，记为 μ_k，即 $\mu_k=E(X-E(X))^k$. $=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^k f(x)dx$， k=1,2，….
	切比雪夫不等式	设随机变量 X 具有数学期望 E（X）=μ，方差 D（X）=σ²，则对于任意正数 ε，有下列切比雪夫不等式 $P(\|X-\mu\|\ge\varepsilon)\le\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 切比雪夫不等式给出了在未知 X 的分布的情况下，对概率 $P(\|X-\mu\|\ge\varepsilon)$ 的一种估计，它在理论上有重要意义。	
（2）期望的性质	（1）　E(C)=C （2）　E(CX)=CE(X) （3）　E(X+Y)=E(X)+E(Y)，$E(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i)=\sum_{i=1}^{n} C_i E(X_i)$ （4）　E(XY)=E(X) E(Y)，充分条件：X 和 Y 独立； 充要条件：X 和 Y 不相关。		

（3）方差的性质	（1）　D(C)=0；E(C)=C （2）　$D(aX)=a^2D(X)$；　E(aX)=aE(X) （3）　$D(aX+b)= a^2D(X)$；　E(aX+b)=aE(X)+b （4）　$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ （5）　D(X±Y)=D(X)+D(Y)，充分条件：X 和 Y 独立； 充要条件：X 和 Y 不相关。 D(X±Y)=D(X)+D(Y) ±2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]，无条件成立。 而 E(X+Y)=E(X)+E(Y)，无条件成立。		
（4）常见分布的期望和方差		期望	方差
	0-1 分布 $B(1,p)$	p	$p(1-p)$
	二项分布 $B(n,p)$	np	$np(1-p)$
	泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ
	几何分布 $G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
	超几何分布 $H(n,M,N)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
	均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
	指数分布 $e(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
	正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
	χ^2分布	n	2n
	t 分布	0	$\frac{n}{n-2}$ (n>2)
（5）二维随机变量的数字特征	期望	$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_{i\bullet}$ $E(Y)=\sum_{j=1}^{n} y_j p_{\bullet j}$	$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$ $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy$
	函数的期望	$E[G(X,Y)]=$ $\sum_i\sum_j G(x_i,y_j)p_{ij}$	$E[G(X,Y)]=$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y)f(x,y)dxdy$
	方差	$D(X)=\sum_i [x_i-E(X)]^2 p_{i\bullet}$ $D(Y)=\sum_j [x_j-E(Y)]^2 p_{\bullet j}$	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} [x-E(X)]^2 f_X(x)dx$ $D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} [y-E(Y)]^2 f_Y(y)dy$
	协方差	对于随机变量 X 与 Y，称它们的二阶混合中心矩 μ_{11} 为 X 与 Y 的协方差或相关矩，记为 σ_{XY}或 $\operatorname{cov}(X,Y)$，即 $\sigma_{XY}=\mu_{11}=E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$ 与记号 σ_{XY} 相对应，X 与 Y 的方差 D(X)与 D(Y)也可分别记为 σ_{XX} 与 σ_{YY}。	

	相关系数	对于随机变量 X 与 Y，如果 D（X）>0，D(Y)>0，则称 $\dfrac{\sigma_{XY}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为 X 与 Y 的相关系数，记作 ρ_{XY}（有时可简记为 ρ）。 | ρ |≤1，当| ρ |=1 时，称 X 与 Y 完全相关：$P(X=aY+b)=1$ 完全相关 $\begin{cases}正相关，当\rho=1时(a>0),\\负相关，当\rho=-1时(a<0),\end{cases}$ 而当 $\rho=0$ 时，称 X 与 Y 不相关。 以下五个命题是等价的： ① $\rho_{XY}=0$； ②cov(X,Y)=0； ③E(XY)=E(X)E(Y)； ④D(X+Y)=D(X)+D(Y)； ⑤D(X-Y)=D(X)+D(Y).
	协方差矩阵	$\begin{pmatrix}\sigma_{XX} & \sigma_{XY}\\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY}\end{pmatrix}$
	混合矩	对于随机变量 X 与 Y，如果有 $E(X^kY^l)$ 存在，则称之为 X 与 Y 的 *k+l* 阶混合原点矩，记为 v_{kl}；*k+l* 阶混合中心矩记为： $u_{kl}=E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l]$.
（6）协方差的性质	(i)　cov（X，Y)=cov（Y，X)； (ii)　cov(aX,bY)=ab cov(X,Y)； (iii)　cov(X_1+X_2，Y)=cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y)； (iv)　cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).	
（7）独立和不相关	(i)　若随机变量 X 与 Y 相互独立，则 $\rho_{XY}=0$；反之不真。 (ii)　若（X，Y)~N（$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$）， 则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 X 和 Y 不相关。	

例 4．1：箱内装有 5 个电子元件，其中 2 个是次品，现每次从箱子中随机地取出 1 件进行检验，直到查出全部次品为止，求所需检验次数的数学期望。

例 4．2：将一均匀骰子独立地抛掷 3 次，求出现的点数之和的数学期望。

例 4．3：袋中装有标着 1，2，…，9 号码的 9 只球，从袋中有放回地取出 4 只球，求所得号码之和 *X* 的数学期望。

例 4．4：设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

求 E（X）及 D（X）。

例 4．5：设随机变量 X~N（0，4），Y~U（0，4)，且 X，Y 相互独立，求 E（XY)，D（X+Y）及 D（2X-3Y）。

例 4．6：罐中有 5 颗围棋子，其中 2 颗为白子，另 3 颗为黑子，如果有放回地每次取 1 子，共取 3 次，求 3 次中取到的白子次数 X 的数学期望与方差。

例 4．7：在上例中，若将抽样方式改为不放回抽样，则结果又是如何？

例 4．8：“随机变量 X 的数学期望 E(X)= μ．”的充分条件：

(1) X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}$ $(\lambda>0,-\infty<x<+\infty)$

(2) X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，　$(-\infty<x<+\infty)$

例 4．9：利用切比雪夫不等式估计随机变量与其数学期望之差大于 3 倍标准差的概率。

例 4．10：设随机变量 X 和 Y 的方差存在且不等于 0，则 D（X+Y）=D（X）+D（Y）是 X 和 Y（　　　）。

（A）　不相关的充分条件，且不是必要条件；

（B）　独立的充分条件，但不是必要条件；

（C）　不相关的充分必要条件；

（D）　独立的充分必要条件。

例 4．11：设 X 与 Y 相互独立都服从 P（λ），令 U=2X+Y，V=2X-Y。求随机变量 U 和 V 的相关系数 ρ_{UV}.

例 4．12：设（X，Y）服从 D={(x,y)|$x^2+y^2\leq1$|}上的均匀分布，求 σ_{XY} 和 ρ_{XY}，并且讨论 X 与 Y 的独立性。

第二节　重点考核点

常见分布的数学期望和方差；随机变量矩、协方差和相关系数；独立和不相关

第三节　常见题型

1、一维随机变量及其函数的数字特征

例 4．13：判断随机变量 X 是否存在期望和方差。

（1）$x_k=(-1)^k\frac{2^k}{k},k=1,2,\cdots$，$P(X=x_k)=\frac{1}{2^k}$；

（2）$f(x)=\frac{1}{\pi}\bullet\frac{1}{1+x^2},-\infty<x<+\infty$。

例 4．14：设随机变量 X 在区间[a，b]中取值，证明：a≤E(X)≤b。

例 4．15：将 n 只球放入到 N 只盒子中去，设每只球落入各个盒子是等可能的，求有球盒子数 X 的数学期望。

例 4．16：一辆送客汽车，载有 m 位乘客从起点站开出，沿途有 n 个车站可以下车，若到达一个车站，没有乘客下车就不停车。设每位乘客在每一个车站下车是等可能的，试求汽车平

均停车次数。

例 4．17：投硬币 n 次，设 X 为出现正面后紧接反面的次数，求 E(X)。

例 4．18：一台仪器由 5 只不太可靠的元件组成，已知各元件出故障是独立的，且第 k 只元件出故障的概率为 $p_k=\dfrac{k+1}{10}$，则出故障的元件数的方差是

A．1.3　　B．1.2　　C．1.1　　　D．1.0

例 4．19：设 X 是 n 重贝努里试验中事件 A 出现的次数，且 P(A)=p,

令 Y= $\begin{cases}0 & \text{当}X\text{为偶数}\\ 1 & \text{当}X\text{为奇数}\end{cases}$，求 Y 的数学期望。

例 4.20：设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，求 $E[\min(|X|,1)]$。

例 4．21：地铁到达一站时间为每个整点的第 5 分、25 分、55 分钟，设一乘客在早 8 点～9 点之间随机到达，求侯车时间的数学期望。

例 4．22：设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为-2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为-0.5，则根据切比雪夫不等式，有

$$P(|X+Y|\ge 6)\le \underline{\qquad\qquad}。$$

2、二维随机变量及其函数的数字特征

例 4．23：设两个随机变量 X，Y 相互独立，都服从 $N\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，求 D（|X-Y|）。

例 4．24：今有两封信欲投入编号为 I、II、III 的 3 个邮筒，设 X，Y 分别表示投入第 I 号和第 II 号邮箱的信的数目，试求（1）（X，Y）的联合分布；（2）X 与 Y 是否独立；（3）令 U=max （X,Y），V=min(X,Y)，求 E（U）和 E（V）。

例 4．25：假设二维随机变量（X，Y）在矩形 G={（X,Y）|0≤x≤2, 0≤y≤1}上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0, & X\le Y,\\ 1, & X>Y;\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & X\le 2Y,\\ 1, & X>2Y.\end{cases}$$

（1）　求 U 和 V 的联合分布；

（2）　求 U 和 V 的相关系数 ρ.

例 4．26：设 X～e（1），$Y_k=\begin{cases}0, & x\le k\\ 1, & x>k\end{cases}$（k=1,　2），求：

（1） $\xi=(Y_1,Y_2)$ 的分布；

（2） Y_1与Y_2边缘分布，并讨论他们的独立性；

（3） $E(Y_1+Y_2)$.

例 4．27：设 A，B 为两个随机事件,且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}，\\ 0, & A\text{不发生}，\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}，\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求

(Ⅰ) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}；

(Ⅲ) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

例 4．28：n 封信任意投到 n 个信封里去，而每个信封应该对应着唯一的一封信，设信与信封配对的个数为 X，求 E(X)与 D(X)。

3、独立和不相关

例 4．29：已知随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 N（1，3^2）和 N（0，4^2），且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

（1）求 Z 的数学期望 E（Z）和方差 D（Z）；（2）求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}；（3）问 X 与 Z 是否相互独立？为什么？

例 4．30：设（X，Y）的联合密度函数为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}2-x-y & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）　判别 X，Y 是否相互独立，是否相关；

（2）　求 E（XY），　D（X+Y）

例 4．31：如果 X 与 Y 满足 D（X+y）=D（X-Y），则必有

（A）X 与 Y 独立。　　（B）X 与 Y 不相关。

（C）D（Y）=0。　　（D）D(X)・D(Y)=0.　　[　]

例 4．32：将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 与 Y 的相关系数等于

（A）-1。　　（B）0。　　（C）$\frac{1}{2}$。　　（D）1。　　[　]

例 4．33：设随机变量 X 的分布密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty.$

(1) 求 X 的数学期望 E（X）和方差 D（X）;

(2) 求 X 与|X|的协方差，并问 X 与|X|是否不相关?

(3) 问 X 与|X|是否相互独立? 为什么?

例 4．34：设 A，B 是二随机事件，随机变量

$$X=\begin{cases}1, & \text{若}A\text{出现},\\ -1, & \text{否则},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若}B\text{出现},\\ -1, & \text{否则}.\end{cases}$$

证明 X,Y 不相关与 A,B 独立互为充分且必要条件。

例 4．35：对于任意二事件 A 和 B，0<P(A)<1,0<P(B)<1,

$$\rho=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\overline{A})P(\overline{B})}}$$

称做事件 A 和 B 的相关系数。

（1） 证明事件 A 和 B 独立的充分必要条件是其相关系数等于零;

（2） 利用随机变量相关系数的基本性质，证明$|\rho|\le 1$.

4、应用题

例 4．36：设某种商品每周的需求量 X 服从区间[10，30]上的均匀分布的随机变量，而经销商店进货数量为区间[10，30]中的某一整数，商店每销售一单位商品可获利 500 元；若供大于求则削价处理，每处理 1 单位商品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每 1 单位商品仅获利 300 元，为使商店所获利润期望值不少于 9280 元，试确定最少进货量。

例 4．37：市场上对商品需求量为 X～U（2000，4000），每售出 1 吨可得 3 万元，若售不出而囤积在仓库中则每吨需保养费 1 万元，问需要组织多少货源，才能使收益最大?

第四节　历年真题

数学一：

1（87，2 分）　已知连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$$

则 EX=____________，DX=____________。

2（89，6 分）　设随机变量 X 与 Y 独立，且 X~N（1，2），Y~N（0，1），试求随机变量 Z=2X-Y+3 的概率密度函数。

3（90，2 分）　已知随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，且胡机变量 Z=3X-2，则 EZ=__________。

4（90，6 分）　设二维随机变量（X，Y）在区域 D：0<X<1，$|y|<x$ 内服从均匀分布，求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 Z=2X+1 的方差 DZ。

5（91，3 分）　设随机变量 X 服从均值为 2、方差为 σ^2 的正态分布，且 $P\{2<X<4\}=0.3$,则$P\{X<0\}=$_________。

6（92，3 分）　设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $E(X+e^{-2X})=$_________。

7（93，6 分）　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$$

（1）　求 EX 和 DX;

（2）　求 X 与 $|X|$ 的协方差，并问 X 与 $|X|$ 是否不相关？

（3）　问 X 与 $|X|$ 是否相互独立？为什么？

8（94，6 分）　已知随机变量 $X\sim N(1,3^2)$，$Y\sim N(0,4^2)$,且X与Y的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$,设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$。

（1）　求 EZ 和 DZ;

（2）　求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ};

（3）　问 X 与 Z 是否相互独立？为什么？

9（95，3 分）　设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 $E(X^2)$=___________。

10（96，3 分）　设ξ和 η 是两个相互独立且均服从正态分布 N（0，$\frac{1}{2}$）的随机变量，则 $E(|\xi-\eta|)=$___________。

11（96，6 分）　设ξ和 η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量，已知ξ 的分布律为 $P(\xi=i)=\frac{1}{3},i=1,2,3$又设$X=\max(\xi,\eta),Y=\min(\xi,\eta)$.

（1）　写出二维随机变量（X，Y）的分布律；

（2）　求 EX。

12（97，3 分）设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2，则随机变量 3X-2Y 的方差是

（A）8　　（B）16　　（C）28　　（D）44　　[　]

13（97，7 分）　从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 $\frac{2}{5}$。设 X 为途中遇到红灯的次数，求随机变量 X

的分布律、分布函数和数学期望。

14（98，6 分）　设两个随机变量 *X*、*Y* 相互独立，且都服从均值为 0、方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布，求|X-Y|的方差。

15（00，3 分）　设二维随机变量（*X*，*Y*）服从二维正态分布，则随机变量 $\xi = X+Y$ 与 $\eta = X-Y$ 不相关的充分必要条件为

（A）$E(X)=E(Y)$

（B）$E(X^2)-[E(X)]^2 = E(Y^2)-[E(Y)]^2$

（C）$E(X^2)=E(Y^2)$

（D）$E(X^2)+[E(X)]^2 = E(Y^2)+[E(Y)]^2$　　　[　　]

16（00，8 分）　某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0<p<1)$，各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时即停机检修。设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 *X*，求 *E*（*X*）和 *D*（*X*）。

17（01，3 分）　将一枚硬币重复掷 *n* 次，以 *X* 和 *Y* 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 *X* 和 *Y* 的相关系数等于

（A）-1　　（B）0　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）1　　[　　]

18（02，7 分）　设随机变量 *X* 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le \pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y^2 的数学期望。

19（03，10 分）　已知甲、乙两箱中装有两种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品。从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求：

（1）　乙箱中次品件数 *X* 的数学期望。

（2）　从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

20（04，4 分）　设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$ ____.

21（04，4 分）　设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>1)$ 独立同分布，且其方差为 $\sigma^2>0$.

令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则

(A)　$\text{Cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$.　　　(B)　$Cov(X_1,Y)=\sigma^2$.

(C) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$. (D) $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$. [ ]

22（04，9 分） 设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求：（I）二维随机变量(X,Y)的概率分布；

（II）X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

数学三：

1（87，4 分） 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求随机变量 $Y=\frac{1}{X}$ 的数学期望 $E(Y)$。

2（89，7 分） 已知随机变量（X，Y）的联合密度为

$$F(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：（1）$P\{X<Y\}$；

（2）$E(XY)$。

3（91，3 分） 对任意两个随机变量 X 和 Y，若 $E(XY)=E(X)\bullet E(Y)$，则

（A）$D(XY)=D(X)\bullet D(Y)$。 （B）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

（C）X 与 Y 独立。 （D）X 与 Y 不独立。 [ ]

4（91，6 分） 设随机变量（X，Y）在圆域 $x^2+y^2\le r^2$ 上服从联合均匀分布。

（1） 求（X，Y）的相关系数 ρ

（2） 问 X 和 Y 是否独立？

5（92，5 分） 某设备由三大部件构成，在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10，0.20 和 0.30。设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求

E（X）和 D（X）。

6（93，8 分）　　设随机变量 X 和 Y 同分布，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（1）　已知事件 $A=\{X>a\}和B=\{Y>a\}独立,且P\{A\cup B\}=\frac{3}{4},求常数a$；

（2）　求 $\frac{1}{X^2}$ 的数学期望。

7（94，8 分　）　　设由自动线加工的某种零件的内径 X（毫米）服从正态分布 N（μ，1），内径小于 10 或大于 12 为不合格品，其作为合格品，销售每件合格品获利，销售每件不合格品亏损。已知销售利润 T（单位：元）与销售零件的内径 X 有如下关系：

$$T=\begin{cases}-1, & 若x<10\\ 20, & 若10\le X\le 12\\ -5, & 若X>12\end{cases}$$

问平均内径μ取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

8（95，3 分）　　设随机变量 X 和 Y 独立同分布，记 $U=X-Y,V=X+Y,则随机变量U与V必然$

（A）不独立。　　　　　　　　　（B）独立。

（C）相关系数不为零。　　　　　（D）相关系数为零。　　　　[　　]

9（96，7 分）　　设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作。一周五个工作日，若无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障仍可获利润 5 万元；若发生两次故障，获利润 0 元；若发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元。求一周内的利润期望。

10（97，6 分）　　游客乘电梯从底层到电视塔的顶层观光。电梯于每个整点的第 5 分钟、第 25 分钟和第 55 分钟从底层起行。设一游客在早上八点的第 X 分钟到达底层侯梯处，且 X 在[0，60]上服从均匀分布，求该游客等候时间的数学期望。

11（97，6 分）　　两台同样的自动记录仪，每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布。先开动其中一台，当其发生故障时停用而另一台自动开动。试求两台自动记录仪无故障工作的总时间 T 的概率密度 $f(t)$、数学期望和方差。

12（98，10 分）　　一商店经销某种商品，每周的进货量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是两个相互独立的随机变量，且都服从区间[10，20]上的均匀分布。商店每售出一单位商品可得利润 1 000 元；若需求量超过了进货量，可以其他商店调剂供应，这时每单位商品的售出获利润为 500 元。试求此商店经销该种商品每周所得利润的期望值。

13（99，3 分）　　设随机变量 $Xi_j(i,j=1,2,\cdots,n;n\ge 2)$ 独立同分布，$EX_{ij}=2,$ 则行列式

$$Y=\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 EY=____________。

14（99，9 分） 假设二维随机变量（*X*，*Y*）在矩形 $g=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0, & 若X\le Y\\ 1, & 若X>Y\end{cases} \qquad V=\begin{cases}0, & 若X\le 2Y\\ 1, & 若X>2Y\end{cases}$$

（1） 求 *U* 和 *V* 的联合分布；

（2） 求 *U* 和 *V* 的相关系数 *r*。

15（00，3 分） 设随机变量 *X* 在区间[-1，2]上服从均匀分布，随机变量

$$Y=\begin{cases}1, & 若X>0\\ 0, & 若X=0\\ -1, & 若X<0\end{cases}$$

则方差 *DY*=____________。

16（00，8 分） 设 *A*，*B* 是二随机事件，随机变量

$$X=\begin{cases}1, & 若A出现\\ -1, & 若A不出现\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & 若B出现\\ -1, & 若B不出现\end{cases}$$

试证明随机变量 *X* 和 *Y* 不相关的充分必要条件是 *A* 与 *B* 相互独立。

17（01，3 分） 将一枚硬币重复掷 *n* 次，以 *X* 和 *Y* 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 *X* 和 *Y* 的相关系数等于

（A）-1 （B）0 （C）$\frac{1}{2}$ （D）1 [ ]

18（02，3 分） 设随机变量 *X* 和 *Y* 的联合概率分布为

概率 Y / X	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15

1	0.08	0.32	0.20

则X^2和Y^2的协方差$\operatorname{cov}(X^2, Y^2) =$____________.

19（02，8 分） 假设随机变量 U 在区间[-2，2]上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & 若U\le -1\\ 1, & 若U>-1\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}-1, & 若U\le 1\\ 1, & 若U>1\end{cases}$$

试求（1）X 和 Y 的联合概率分布；

（2）$D(X+Y)$。

20（02，8 分）设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布，平均无故障工作的时间（EX）为 5 小时。设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机。试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$。

21（03，4 分） 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9，若 $Z=X-0.4$，则 Y 与 Z 的相关系数为____________。

22（04，4 分） 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$____.

23（04， 13 分） 设 A， B 为两个随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$， $P(B|A)=\frac{1}{3}$， $P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A发生,\\ 0, & A不发生,\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & B发生,\\ 0, & B不发生.\end{cases}$$

求

(Ⅰ) 二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ) X与Y的相关系数 ρ_{XY};

(Ⅲ) $Z=X^2+Y^2$的概率分布.

24（06， 13 分）设随机变量 X 的概率密度为

$$f_x(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, -1<x<0\\ \frac{1}{4}, 0\le x<2,\\ 0, 其它\end{cases}$$ 令 $Y=X^2$，$F(X,Y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，

求:

(Ⅰ) Y 的概率密度 $f_Y(y)$

(Ⅱ) $\operatorname{cov}(X,Y)$

(III) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$

第五章　大数定律和中心极限定理

第一节　基本概念

1、概念网络图

$$\text{大数定律}\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{切比雪夫大数定律}\\ \text{伯努利大数定律}\\ \text{辛钦大数定律}\end{matrix}\right\}$$

$$\text{中心极限定理}\rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{列维－林德伯格定理}\\ \text{棣莫弗－拉普拉斯定理}\end{matrix}\right\}$$

二项定理

泊松定理

2、重要公式和结论

（1）大数定律 $\overline{X}\rightarrow\mu$	切比雪夫大数定律	设随机变量 X_1，X_2，…相互独立，均具有有限方差，且被同一常数 C 所界：D（X_i）<C(i=1,2,…),则对于任意的正数 ε，有 $$\lim_{n\to\infty}P\left(\left\lvert\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right\rvert<\varepsilon\right)=1.$$ 特殊情形：若 X_1，X_2，…具有相同的数学期望 E（X_I）=μ，则上式成为 $$\lim_{n\to\infty}P\left(\left\lvert\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right\rvert<\varepsilon\right)=1.$$

	伯努利大数定律	设μ是n次独立试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，则对于任意的正数ε，有 $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\frac{\mu}{n}-p\right\|<\varepsilon\right)=1.$$ 伯努利大数定律说明，当试验次数n很大时，事件A发生的频率与概率有较大判别的可能性很小，即 $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\frac{\mu}{n}-p\right\|\geq\varepsilon\right)=0.$$ 这就以严格的数学形式描述了频率的稳定性。
	辛钦大数定律	设X_1，X_2,…，X_n,…是相互独立同分布的随机变量序列，且E（X_n）=μ，则对于任意的正数ε有 $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right\|<\varepsilon\right)=1.$$
（2）中心极限定理 $\overline{X}\to N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$	列维－林德伯格定理	设随机变量X_1，X_2,…相互独立，服从同一分布，且具有相同的数学期望和方差：$E(X_k)=\mu, D(X_k)=\sigma^2\neq 0(k=1,2,\cdots)$，则随机变量 $$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$ 的分布函数$F_n(x)$对任意的实数x，有 $$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$ 此定理也称为**独立同分布**的中心极限定理。
	棣莫弗－拉普拉斯定理	设随机变量X_n为具有参数n，p(0<p<1)的二项分布，则对于任意实数x,有 $$=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$
（3）二项定理	若当$N\to\infty$时，$\frac{M}{N}\to p(n,k\text{不变})$，则 $$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\to C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\qquad(N\to\infty).$$ 超几何分布的极限分布为二项分布。	
（4）泊松定理	若当$n\to\infty$时，$np\to\lambda>0$，则 $$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\qquad(n\to\infty).$$ 其中k=0，1，2，…，n,…。 二项分布的极限分布为泊松分布。	

例5．1：设总体X服从参数为2的指数分布，X_1，X_2,…，X_n为来自总体X的简单随机样本，

则当$n\to\infty$时,$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于__________。

例5．2：设$\{X_k\}$为相互独立且同分布的随机变量序列，并且X_k的概率分布为

$$P(X_k=2^{i-2\ln i})=2^{-i}(i=1,2,\cdots).$$

试证$\{X_i\}$服从大数定律。

例5．3：一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的，假设每箱平均重50千克，标准差为5千克。若用最大载重量为5吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于0.977。

例5．4：两只一模一样的铁罐里都装有大量的红球和黑球，其中一罐（取名“甲罐”）内的红球数与黑球数之比为2：1，另一罐（取名“乙罐”）内的黑球数与红球数之比为2：1 。今任取一罐并从中取出50只球，查得其中有30只红球和20只黑球，则该罐为“甲罐”的概率是该罐为“乙罐”的概率的

(A) 154倍 (B)254倍 (C)798倍 (D)1024倍

第二节　重点考核点

中心极限定理

第三节　常见题型

1、大数定律

例5．5：设X_1，X_2,…，X_n,…相互独立同分布，且E（X_n）=0，则

$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i<n\right)$=__________。

例5．6：设X_1，X_2,…，X_n,…是相互独立的随机变量序列，X_n服从参数为n的指数分布(n=1,2, …)，则下列中不服从切比雪夫大数定律的随机变量序列是：

（A）X_1，X_2,…，X_n,…；　　（B）X_1，2^2X_2,…，n^2X_n,…

（C）X_1，$X_2/2$,…，X_n/n,…；　　（D）X_1，$2X_2$,…，nX_n,…

2、中心极限定理

例5．7：设X_1，X_2,…，X_n,…是相互独立的随机变量序列，在下面条件下，X_1^2，X_2^2,…，

$X_n^2, \cdots$满足列维－林德伯格中心极限定理的是：

（A）$P\{X_i = m\} = p^m q^{1-m}, m = 0,1$；

（B）$P\{X_i \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt$；

（C）$P\{|X_i| = m\} = \frac{c}{m^2}, m = 1,2,\cdots$，常数$c = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m^2}\right)^{-1} = \frac{3}{\pi^2}$；

（D）X_i服从参数为i的指数分布。

例 5．8：某人要测量 A、B 两地之间的距离，限于测量工具，将其分成 1200 段进行测量，设每段测量误差（单位：千米）相互独立，且均服从（-0.5，0.5）上的均匀分布。试求总距离测量误差的绝对值不超过 20 千米的概率。

例 5．9：设男孩出生率为 0.515，求在 10000 个新生婴儿中女孩不少于男孩的概率。

第四节　历年真题

数学一：

1（01，3 分）　设随机变量 X 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X - E(X)| \ge 2\} \le$ ________。

数学三：

1（88，6 分）　某保险公司多年的统计资料表明，在索赔中被盗索赔户占 20%。以 X 表示在随机抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数。

（1）　写出 X 的概率分布；

（2）利用棣美佛-拉普拉斯定理，求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值。

[附表]Φ（x）是标准正态分布函数。

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

2（89，3 分）　设 X 为随机变量且 $EX = \mu, DX = \sigma^2$。则由切比雪夫不等式，有 $P\{|X - \mu| \ge 3\sigma\} \le$ ________。

3（96，6 分）　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本。已知 $EX^k=a_k(k=1,2,3,4)$，证明当 n 充分大时，随机变量 $Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布，并指出其分布参数。

4（99，3 分）　在天平上重复称量一重为 a 的物品。假设各次称量结果相互独立且服从正态分布 $N(a,0.2^2)$.若以 $\overline{X}_n$ 表示 n 次称量结果的算术平均值，则为使

$$P\{|\overline{X}_n-a|<0.1\}\geq 0.95$$

n 的最小值应小于自然数____________。

5（01，3 分）　设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为-2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为-0.5，则根据切比雪夫不等式有 $P\{|X+Y|\geq 6\}\leq$____________.

6（01，8 分）　一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的。假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克。若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977。（Φ（2）=0.977，其中 Φ（x）是标准正态分布函数。）

第六章　数理统计的基本概念

第一节　基本概念

1、概念网络图

$$\text{数理统计的基本概念}\left\{\begin{array}{c}\text{总体}\\ \text{个体}\\ \text{样本}\\ \text{样本函数}\\ \text{统计量}\end{array}\right\}\rightarrow\text{正态总体下的四大分布}$$

2、重要公式和结论

（1）数理统计的基本概念	总体	在数理统计中，常把被考察对象的某一个（或多个）指标的全体称为总体（或母体）。我们总是把总体看成一个具有分布的随机变量（或随机向量）。

	个体	总体中的每一个单元称为样品（或个体）。
	样本	我们把从总体中抽取的部分样品 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为样本。样本中所含的样品数称为样本容量，一般用 n 表示。在一般情况下，总是把样本看成是 n 个相互独立的且与总体有相同分布的随机变量，这样的样本称为简单随机样本。在泛指任一次抽取的结果时，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示 n 个随机变量（样本）；在具体的一次抽取之后，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示 n 个具体的数值（样本值）。我们称之为样本的两重性。
	样本函数和统计量	设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体的一个样本，称 $$\varphi=\varphi\quad(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$ 为样本函数，其中 φ 为一个连续函数。如果 φ 中不包含任何未知参数，则称 φ（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）为一个统计量。
	常见统计量及其性质	样本均值　$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$ 样本方差　$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.$ 样本标准差　$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}.$ 样本 k 阶原点矩 $M_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k,k=1,2,\cdots.$ 样本 k 阶中心矩 $M_k'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^k,k=2,3,\cdots.$ $E(\overline{X})=\mu$，$D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$， $E(S^2)=\sigma^2$，$E(S^{*2})=\frac{n-1}{n}\sigma^2$， 其中 $S^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，为二阶中心矩。
（2）正态总体下的四大分布	正态分布	设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，则样本函数 $u\overset{def}{=}\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$
	t 分布	设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，则样本函数 $$t\overset{def}{=}\frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$ 其中 t(n-1) 表示自由度为 n-1 的 t 分布。

	χ^2分布	设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，则样本函数 $$w\overset{def}{=}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$ 其中$\chi^2(n-1)$表示自由度为n-1的χ^2分布。
	F 分布	设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma_1^2)$的一个样本，而$y_1,y_2,\cdots,y_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma_2^2)$的一个样本，则样本函数 $$F\overset{def}{=}\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1),$$ 其中 $$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\overline{x})^2,\qquad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\overline{y})^2;$$ $F(n_1-1,n_2-1)$表示第一自由度为n_1-1，第二自由度为n_2-1的F分布。
（3）正态总体下分布的性质	$\overline{X}$与S^2独立。	

例6.1：从正态总体$N(3.4,6^2)$中抽取容量为n的样本，如果要求其样本均值位于区间（1.4，5.4）内的概率不小于0.95，问样本容量n至少应取多大？

第二节　重点考核点

统计量的分布

第三节　常见题型

1、统计量的性质

例6．2：设$(X_1,X_2,\cdots,X_7)$取自总体$X\sim N(0,0.5^2)$，则$P\left(\sum_{i=1}^{7}X_i^2>4\right)=$______________。

例6.3：设总体X服从正态分布$N(\mu_1,\sigma^2)$,总体Y服从正态分布$N(\mu_2,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots X_{n_1}$

和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\_\_\_\_.$$

2、统计量的分布

例 6．4：设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\qquad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\qquad S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 n-1 的 t 分布的随机变量是

（A） $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$.　　　　（B） $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$.

（C） $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$.　　　　（D） $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$.　　　　[　　]

例 6．5：设总体 X～N（0，1^2），从总体中取一个容量为 6 的样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_6)$，设 $Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$，试确定常数 C，使随机变量 CY 服从 χ^2 分布。

第四节　历年真题

数学一：

1（98，4 分）　从正态总体 $N(3.4,6^2)$ 中抽取容量为 n 的样本，如果要求其样本均值位于区间（1.4，5.4）内的概率不小于 0.95，问样本容量 n 至少应取多大？

[附表]：$\Phi(Z)=\int_{-\infty}^{Z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

Z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(Z)$	0.900	0.950	0.975	0.990

2（01，7 分） 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\ge 2)$，其样本的均值 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 E（Y）。

3（03，4 分） 设随机变量 $X\sim t(n)(n>1), Y=\frac{1}{X^2}$，则

（A）$Y\sim x^2(b)$ （B）$Y\sim x^2(n-1)$

（C）$Y\sim F(n,1)$ （D）$Y\sim F(1,n)$

4（05，4 分） 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\ge 2)$ 为来自总体 N（0，1）的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则

（A）$n\overline{X}\sim N(0,1)$ （B）$nS^2\sim\chi^2(n)$

（C）$\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$ （D）$\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$

5（05，9 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 N（0，1）的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i=X_i-\overline{X}, i=1,2,\cdots,n.$

求：（I） Y_i 的方差 $DY_i, i=1,2,\cdots,n;$

（II） Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1,Y_n)$.

数学三：

1（94，3 分） 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \qquad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \qquad S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是

（A）$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$ （B）$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$

（C）$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$ （D）$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$ [ ]

2（97，3 分） 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,3^2)$，，而 $X_1,X_2,\cdots X_9$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本。则统计量 $U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}$ 服从__________分布，参数为________。

3（98，3 分） 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $n(0,2^2)$ 的简单随机样本。$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$.则当$a=$________，$b$=________时，统计量 X 服从 x^2 分布，其自由度为__________。

4（99，7 分） 设 $X_1,X_2,\cdots X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6),\quad Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$$

$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}(X_i-Y_2)^2,\quad Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$$

证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布。

5（01，3 分） 设总体 X~N（0，2^2），而 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量

$$Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2}$$

服从________分布，参数为________。

6（02，3 分） 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则

（A）$X+Y$ 服从正态分布。 （B）X^2+Y^2 服从 x^2 分布。

（C）X^2 和 Y^2 都服从 x^2 分布。 （D）X^2/Y^2 服从 F 分布。 [ ]

7（03，4 分） 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 X 的

简单随机样本，则当$n\to\infty$时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}X_i^2$依概率收敛于____________。

8（04，4 分）　设总体X服从正态分布$N(\mu_1,\sigma^2)$，总体Y服从正态分布$N(\mu_2,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots X_{n_1}$和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_{n_2}$分别是来自总体X和Y的简单随机样本，则

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\_\_\_\_\_.$$

9（06，4 分）　设总体 X 的概率密度为$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<+\infty),x_1,x_2,\ldots\ldots x_n$为总体的简单随机样本,其样本方差$S^2$,则 E$S^2$=__________

第七章　参数估计

第一节　基本概念

1、概念网络图

$$\text{从样本推断总体}\left\{\begin{array}{l}\text{点估计}\left\{\begin{array}{c}\text{矩估计}\\ \text{极大似然估计}\end{array}\right\}\rightarrow\text{估计量的评选标准}\left\{\begin{array}{l}\text{无偏性}\\ \text{有效性}\\ \text{一致性}\end{array}\right\}\\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\text{区间估计}\end{array}\right\}$$

2、重要公式和结论

（1）点估计	矩估计	设总体 X 的分布中包含有未知数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$，则其分布函数可以表成 $F(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$.它的 k 阶原点矩 $v_k=E(X^k)(k=1,2,\cdots,m)$ 中也包含了未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$，即 $v_k=v_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$。又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体 X 的 n 个样本值，其样本的 k 阶原点矩为 $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k\quad(k=1,2,\cdots,m).$$ 这样，我们按照“当参数等于其估计量时，总体矩等于相应的样本矩”的原则建立方程，即有 $$\begin{cases} v_1(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \\ v_2(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_m(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^m. \end{cases}$$ 由上面的 m 个方程中，解出的 m 个未知参数 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)$ 即为参数（$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$）的矩估计量。 若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的矩估计，$g(x)$ 为连续函数，则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的矩估计。

<table>
<tr><td rowspan="1"></td><td>极大似然估计</td><td>当总体 X 为连续型随机变量时，设其分布密度为 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$，其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 为未知参数。又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体的一个样本，称
$$L(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$$
为样本的似然函数，简记为 L_n.
当总体 X 为离型随机变量时，设其分布律为 $P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$，则称
$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$$
为样本的似然函数。
若似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ 在 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 处取到最大值，则称 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 分别为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的最大似然估计值，相应的统计量称为最大似然估计量。
$$\left.\frac{\partial \ln L_n}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_i=\hat{\theta}_i}=0, i=1,2,\cdots,m$$
若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的极大似然估计，$g(x)$ 为单调函数，则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的极大似然估计。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">（2）估计量的评选标准</td><td>无偏性</td><td>设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为未知参数 θ 的估计量。若 E（$\hat{\theta}$）=θ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。
E（$\overline{X}$）=E（X），E（S^2）=D（X）</td></tr>
<tr><td>有效性</td><td>设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是未知参数 θ 的两个无偏估计量。若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。</td></tr>
<tr><td>一致性</td><td>设 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的一串估计量，如果对于任意的正数 ε，都有
$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n-\theta|>\varepsilon)=0,$$
则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的一致估计量（或相合估计量）。
若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计，且 $D(\hat{\theta})\to 0(n\to\infty)$，则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计。
只要总体的 E(X)和 D(X)存在，一切样本矩和样本矩的连续函数都是相应总体的一致估计量。</td></tr>
</table>

（3）区间估计	置信区间和置信度	设总体X含有一个待估的未知参数θ。如果我们从样本$x_1,x_2,\cdots,x_n$出发，找出两个统计量$\theta_1=\theta_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$\theta_2=\theta_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(\theta_1<\theta_2)$，使得区间$[\theta_1,\theta_2]$以$1-\alpha(0<\alpha<1)$的概率包含这个待估参数θ，即 $$P\{\theta_1\le\theta\le\theta_2\}=1-\alpha,$$ 那么称区间$[\theta_1,\theta_2]$为θ的置信区间，$1-\alpha$为该区间的置信度（或置信水平）。	
	单正态总体的期望和方差的区间估计	设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，在置信度为$1-\alpha$下，我们来确定μ和σ^2的置信区间$[\theta_1,\theta_2]$。具体步骤如下： （i）选择样本函数； （ii）由置信度$1-\alpha$，查表找分位数； （iii）导出置信区间$[\theta_1,\theta_2]$。	
		已知方差，估计均值	（i）选择样本函数 $$u=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$ （ii）查表找分位数 $$P\left(-\lambda\le\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\le\lambda\right)=1-\alpha.$$ （iii）导出置信区间 $$\left[\bar{x}-\lambda\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\bar{x}+\lambda\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$
		未知方差，估计均值	（i）选择样本函数 $$t=\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$ （ii）查表找分位数 $$P\left(-\lambda\le\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\le\lambda\right)=1-\alpha.$$ （iii）导出置信区间 $$\left[\bar{x}-\lambda\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{x}+\lambda\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$
		方差的区间估计	（i）选择样本函数 $$w=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\kappa^2(n-1).$$ （ii）查表找分位数 $$P\left(\lambda_1\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\lambda_2\right)=1-\alpha.$$ （iii）导出σ的置信区间 $$\left[\sqrt{\frac{n-1}{\lambda_2}}S,\sqrt{\frac{n-1}{\lambda_1}}S\right]$$

例 7．1：设总体 $X \sim U(a,b)$，求对 a, b 的矩估计量。

例 7．2：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是总体的一个样本，试证

（1）$\hat{\mu} = \frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{10}x_2 + \frac{1}{2}x_3$；

（2）$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{5}{12}x_3$；

（3）$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{12}x_3$.

都是总体均值 u 的无偏估计，并比较有效性。

例 7．3：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是取自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，试证

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

是 σ^2 的相合估计量。

第二节　重点考核点

矩估计和极大似然估计；估计量的优劣；区间估计

第三节　常见题型

1、矩估计和极大似然估计

例 7．4：设 $X \sim U(0,\theta), \theta > 0$，求 θ 的最大似然估计量及矩估计量。

例 7．5：设总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-(x-\mu)/\theta} & x \geq \mu, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 θ >0, θ, μ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为取自 X 的样本。试求 θ, μ 的极大似然估计量。

2、估计量的优劣

例 7．6：设 n 个随机变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 独立同分布，

$$D(x_1)=\sigma^2, \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,$$

则

（A）S 是 σ 的无偏估计量；　　　　（B）S 是 σ 的最大似然估计量；

（C）S 是 σ 的相合估计量；　　　　（D）S^2 与 $\bar{x}$ 相互独立。

例 7．7：设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自 X 的简单随机样本。

（1）　求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

（2）　求 $\hat{\theta}$ 的方差 D（$\hat{\theta}$）；

（3）　讨论 $\hat{\theta}$ 的无偏性和一致性（相合性）。

3、区间估计

例 7．8：从一批钉子中随机抽取 16 枚，测得其长度（单位：cm）为

2.14，　2.10，　2.13，　2.15，　2.13，　2.12，　2.13，　2.10

2.15，　2.12，　2.14，　2.10，　2.13，　2.11，　2.14，　2.11

假设钉子的长度 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，在下列两种情况下分别求总体均值 μ 的置信度为 90%的置信区间。

（1）　已知 σ =0.01.

（2）　σ 未知.

例 7．9：为了解灯泡使用时数的均值 μ 及标准差 σ，测量 10 个灯泡，得 $\bar{x}$=1500 小时，S=20 小时。如果已知灯泡的使用时数服从正态分布，求 μ 和 σ 的 95%的置信区间。

例 7．10：设总体 X～N（3.4，6^2），从中抽取容量为 n 的样本，若要求其样本均值 $\bar{x}$ 位于区间[1.4，5.4]内的概率不小于 0.95，问样本容量 n 至少应取多大？

第四节　历年真题

数学一：

1（97，5 分）　　设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中$\theta>-1$是未知参数.$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量。

2（99，6 分）　　设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x) & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体 X 的简单随机样本。

（1）　求 θ 的矩估计量 θ；

（2）　求 D（θ）。

3（00，6 分）　　设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

其中 θ>0 为未知参数。又设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是X的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值。

4（02，7 分）　　设总体 X 的概率分别为

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ（0< θ <$\frac{1}{2}$）是未知参数，利用总体 X 的如下样本值

3，　1，　3，　0，　3，　1，　2，　3

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

5（03，4 分）　　已知一批零件的长度 X（单位：cm）服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40cm，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是____________。

（注：标准正态分布函数值$\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95$）

6（03，8 分）　　设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数，从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记 $\hat{\theta}$=min（$X_1,X_2,\cdots,X_n$）。

（1）　求总体 X 的分布函数 F（x）；

（2）　求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$；

如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性。

7（04，9 分）　　设总体 X 的分布函数为

$$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1, X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求：

（I）　β 的矩估计量；

（II）　β 的最大似然估计量.

8（06，9 分）　设总体 X 的概率密度为

$$F(X,0)=\begin{cases}\theta & 0<x<1\\ 1-\theta & 1\le x<2\\ 0 & 其它\end{cases}\quad 其中\theta是未知参数(0<\theta<1),$$

$X_1,X_2...,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,记 N 为样本值 $x_1,x_2...,x_n$ 中小于1的个数,求 θ 的最大似然估计.

数学三:

1（91，5 分）　　设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda a x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}, & x>0\\ \\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 是未知参数,$\alpha>0$ 是已知常数。试根据来自总体 X 的简单随机样本

$X_1, X_2, \cdots X_n$，求 λ 的最大似然估计量 $\overline{\lambda}$。

2（92，3 分）　设 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 独立同分布，

$DX_1 = \sigma^2, \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Xi - \overline{X})^2$，则

（A）S是σ 的无偏估计量。

（B）S是σ 的最大似然估计是。

（C）S是σ 的相合估计量（即一致估计量）。

（D）S与$\overline{X}$相互独立。　　　　[　]

3（93，3 分）　设总体 X 的方差为 1，根据来自 X 的容量为 100 的简单随机样本，测得样本均值为 5。则 X 的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为__________。

4（96，3 分）　设由来自正态总体 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本，得样本均值 $\overline{X} = 5$.则未知参数μ的置信度为0.95的置信区间是________。

5（00，8 分）　设 0.51，1.25，0.80，2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值。已知 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$。

（1）　求 X 的数学期望 EX（记 EX 为 b）；

（2）　求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

（3）　利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间。

6（02，3 分）　设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & 若x \geq \theta \\ 0, & 若x < \theta \end{cases}$$

则 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则未知参数θ 的矩估计量为__________。

7（04，13 分）　设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x > \alpha, \\ 0, & x \leq \alpha, \end{cases}$$

其中参数 $\alpha > 0, \beta > 1$. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，

（Ⅰ）当 $\alpha = 1$ 时，求未知参数 β 的矩估计量；

（Ⅱ）当 $\alpha = 1$ 时，求未知参数 β 的最大似然估计量；

(III) 当 $\beta=2$ 时，求未知参数 α 的最大似然估计量.

8（05，4 分）　设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知。现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\bar{x}=20(cm)$，样本标准差 s=1(cm)，则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是

A、$(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16))$.

B、$(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16))$.

C、$(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$.

D、$(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15))$.

9（05，13 分）　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 N（0，σ^2）的简单随机样本，其样本均值为 $\bar{X}$. 记 $Y_i=X_i-\bar{X},i=1,2,\cdots,n$.

求：（I）Y_i的方差$DY_i,i=1,2,\cdots,n$;

（II）Y_1与Y_n的协方差$Cov(Y_1,Y_n)$.

(III) 若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求常数 c.

10（06，13 分）　设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta,0<x<1\\1-\theta,1\le x<2\\0,其它\end{cases}$,其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$, $X_1,X_2,......X_n$ 为来自总体的随机样本,记 N 为样本值 $X_1,X_2,......X_n$ 中小于 1 的个数,求:

（I）θ 的矩估计;

（II）θ 的最大似然估计.

第八章　假设检验

第一节　基本概念

1、概念网络图

$$\text{假设检验的基本概念}\begin{cases}\text{基本思想}\\ \text{基本步骤}\\ \text{两类错误}\end{cases}\rightarrow \text{单正态总体的假设检验}$$

2、重要公式和结论

基本思想	假设检验的统计思想是，概率很小的事件在一次试验中可以认为基本上是不会发生的，即小概率原理。 为了检验一个假设 H_0 是否成立。我们先假定 H_0 是成立的。如果根据这个假定导致了一个不合理的事件发生，那就表明原来的假定 H_0 是不正确的，我们拒绝接受 H_0；如果由此没有导出不合理的现象，则不能拒绝接受 H_0，我们称 H_0 是相容的。与 H_0 相对的假设称为备择假设，用 H_1 表示。 这里所说的小概率事件就是事件 $\{K\in R_\alpha\}$，其概率就是检验水平α，通常我们取α=0.05，有时也取 0.01 或 0.10。	
基本步骤	假设检验的基本步骤如下： (i)　提出零假设 H_0； (ii)　选择统计量 K； (iii)　对于检验水平α查表找分位数λ； (iv)　由样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 计算统计量之值 K； 将 $\hat{K}$ 与 λ 进行比较，作出判断：当 $\|\hat{K}\|>\lambda(\text{或}\hat{K}>\lambda)$ 时否定 H_0，否则认为 H_0 相容。	
两类错误	第一类错误	当 H_0 为真时，而样本值却落入了否定域，按照我们规定的检验法则，应当否定 H_0。这时，我们把客观上 H_0 成立判为 H_0 为不成立（即否定了真实的假设），称这种错误为“以真当假”的错误或第一类错误，记 α 为犯此类错误的概率，即 $P\{\text{否定}H_0\|H_0\text{为真}\}=\alpha$； 此处的α恰好为检验水平。
	第二类错误	当 H_1 为真时，而样本值却落入了相容域，按照我们规定的检验法则，应当接受 H_0。这时，我们把客观上 H_0。不成立判为 H_0 成立（即接受了不真实的假设），称这种错误为“以假当真”的错误或第二类错误，记 β 为犯此错误的概率，即 $P\{\text{接受}H_0\|H_1\text{为真}\}=\beta$。

	两类错误的关系	人们当然希望犯两类错误的概率同时都很小。但是，当容量 n 一定时，α 变小，则 β 变大；相反地，β 变小，则 α 变大。取定 α 要想使 β 变小，则必须增加样本容量。 在实际使用时，通常人们只能控制犯第一类错误的概率，即给定显著性水平 α 。α 大小的选取应根据实际情况而定。当我们宁可“以假为真”、而不愿“以真当假”时，则应把 α 取得很小，如 0.01，甚至 0.001。反之，则应把 α 取得大些。

单正态总体均值和方差的假设检验

条件	零假设	统计量	对应样本函数分布	否定域
已知 σ^2	$H_0:\mu=\mu_0$	$U=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$	N（0，1）	$\|u\|>u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
	$H_0:\mu\le\mu_0$			$u>u_{1-\alpha}$
	$H_0:\mu\ge\mu_0$			$u<-u_{1-\alpha}$
未知 σ^2	$H_0:\mu=\mu_0$	$T=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\|t\|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$H_0:\mu\le\mu_0$			$t>t_{1-\alpha}(n-1)$
	$H_0:\mu\ge\mu_0$			$t<-t_{1-\alpha}(n-1)$
未知 σ^2	$H_0:\sigma^2=\sigma^2$	$w=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\kappa^2(n-1)$	$w<\kappa^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$或 $w>\kappa^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2$			$w>\kappa^2_{1-\alpha}(n-1)$
	$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$			$w<\kappa^2_{\alpha}(n-1)$

例 8．1：用一仪器间接测量温度 5 次：1250，1265，1245，1260，1275（℃），而用另一种精密仪器测得该温度为 1277℃（可看作真值），问用此仪器测量温度有无系统偏差（测量的温度服从正态分布）？

第二节　重点考核点

单正态总体均值和方差的假设检验

第三节　常见题型

1、单正态总体均值和方差的假设检验

例 8．2：食品厂用自动装罐机装罐头食品，每罐标准重量为 500g，每隔一定时间需要检验机器的工作情况，现抽 10 罐，测得其重量（单位：g）：

495，　510，　505，　498，　503，　492，　502，　512，　497，　506。

假设重量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，试问机器工作是否正常（$\alpha=0.02$）?

例 8．3：用包装机包装某种洗衣粉，在正常情况下，每袋重量为 1000g，标准差 σ 不能超过 15g。假设每袋洗衣粉的净重服从正态分布。某天检验机器工作的情况，从已装好的袋中随机抽取 10 袋，测得其净重（单位：g）为：1020，　1030，　968，　994，　1014，　998，　976，　982，　950，　1048。

问这天机器是否工作正常（$\alpha=0.05$）

例 8．4：设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分，并给出检验过程。

例 8．5：用机器包装某种饮料，已知每盒重量为 500 克，误差不超过 10 克。今抽查了 9 盒，测得平均重量为 490 克，标准差为 16 克，问这台自动包装工作是否正常（显著性水平 $\alpha=0.05$）。

2、两类错误

例 8．6：总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，有一个容量为 4 的简单随机样本 X_1，X_2，X_3，X_4。已知 $\sigma^2=16$，原假设 H_0：$\mu=5$；H_1：$\mu\neq5$，$\alpha=0.05$。

（1）算出 $\overline{X}$ 的拒绝域和接受域；

（2）若 $\mu=6$，计算第二类错误 β。

例 8．7：设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2),\sigma^2$ 未知，$x_1,\cdots,x_n$ 为来自 X 的样本值，现对 μ 进行假设检验。若在显著性水平 α=0.05 下拒绝了 $H_0:\mu=\mu_0$，则当显著性水平改为 α=0.01 时，下列结论正确的是

（A）必拒绝 H_0。　　　　　（B）必接受 H_0。

（C）第一类错误的概率变大。　　（D）可能接受，也可能拒绝 H_0.

第四节　历年真题

数学一：

1（98，4 分）　设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分。问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程。

［附表］：t 分布表。$P\{t(n)\le t_p(n)\}=p$

$t_p(n)$ \ p / n	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281

数学三：

1（95，3 分）　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中参数 μ,σ^2 未知。记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

则假设 $H_0:\mu=0$ 的 t 检验使用的统计量 t____________。