摘要

二维相位解缠是合成孔径雷达干涉（InSAR）数据处理流程中最为重要的环节之一，无论是合成孔径雷达干涉数据处理的最终目的是建立数字高程模型还是应用于提取地表变形信息，相位解缠步骤都是必不可少的，相位解缠精度的高低直接影响着干涉高程或形变结果的精度。

目前，相位解缠算法可以分为两大类：一类是基于路径积分的相位解缠算法，这类算法以枝切法、mast-cut 算法、flynn 算法为代表；另一类算法是基于最小二乘求解的相位解缠算法，这类算法以基于 DCT/FFT 的最小二乘算法和 pcg 算法为代表。基于路径积分的相位解缠算法通过对相邻像元之间的相位差进行积分来实现相位解缠；而基于最小二乘的相位解缠算法通过使缠绕相位的梯度与真实相位的梯度差的平方和最小来实现绝对相位的恢复。

本论文首先介绍了几种经典算法的原理，其次基于模拟数据比较了各种算法的解缠精度和效率。最后通过融合第一类算法中的枝切法和第二类算法中的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法产生了一种新的算法，并通过实验验证了这种算法的解缠效果。

论文的实验研究分为两部分，第五章为实验的第一部分，这部分基于模拟的缠绕相位数据对各种算法的解缠时间效率与解缠精度进行了对比与分析；第六章为实验的第二部分，这部分分别基于模拟缠绕相位数据和上海地区的真实相位数据进行了枝切和最小二乘融合算法的相位解缠实验。

关键词：合成孔径雷达干涉；相位解缠；枝切法；最小二乘算法

Abstract

Two-dimensional phase unwrapping is considered as one of the most important procedures in the data processing and analysis of synthetic aperture radar interferometry (InSAR). Phase unwrapping is indispensable for the purpose of either creating digital elevation model (DEM) or extracting surface deformation information with the InSAR approach. The achieved accuracy level of DEM or deformation measurements is highly dependent on the accuracy in the unwrapped phases.

At present, the existing phase-unwrapping algorithms can be grouped into two categories. The first category reconstructs the continuous phase surface by a path-based integrating operation, and its typical representatives are the branch-cut, mast-cut and Flynn algorithm. The second category determines the absolute phases using least squares solution, and its typical representatives are the DCT/FFT and PCG algorithm. The first category of algorithms accomplish phase unwrapping by integrating phase gradients between neighboring pixels in an interferogram, while the second category of algorithms conduct phase unwrapping by minimizing the sum of the square of gradient difference between the unwrapped and wrapped phase field.

This thesis will first review the principles of several typical phase-unwrapping algorithms. These different algorithms are then evaluated by comparing their estimation accuracy and computation efficiency. By integrating the branch-cut and DCT/FFT algorithm, a new algorithm is finally extended and validated by experimental analysis.

The experiments carried out in this thesis are divided into two parts.

As the first part of the experiments, Chapter 5 treats comparisons and analyses for different phase-unwrapping algorithms on the computation time efficiency and the achievable accuracy by using the simulated phase data. As second part of the experiments, Chapter 6 will involve in the integration of two types of algorithms, i.e., branch-cut and least squares algorithms. Both the simulated phase data and the real phase data around Shanghai area are used for the validation of the integrated algorithm.

Key words: Synthetic aperture radar interferometry(InSAR); Phase unwrapping; Branch-cut algorithm; Leas squares algorithm

第一章 绪论

1.1 合成孔径雷达干涉测量概述

1.1.1 InSAR技术及应用

合成孔径雷达干涉(Synthetic Aperture Radar Interferometry，InSAR)是正在发展中的极具潜力的微波遥感新技术，其诞生至今已近30年。起初，它主要应用于生成数字高程模型(DEM)和制图，后来很快被扩展为差分干涉技术(differential InSAR,Din-SAR)并应用于微小的地表形变，它已在研究地震形变、火山运动、冰川漂移、城市沉降以及山体滑坡等方面表现出极好的前景[1]。目前，欧美国家对这一技术正竞相研究，我国对雷达干涉的研究仍处于起步阶段，但已引起了国内测绘界与地学界同仁们的极大兴趣和广泛关注。

InSAR是利用SAR技术获得的两幅或多幅影像中的相位信息来获取地表的三维信息和变化信息的一项技术，如图1-1所示，A1、A2分别为卫星的天线，R为卫星到地面的斜距，H为卫星到星下点的高度，P为地面上的一点，z为P点到地球参考面的距离。天线A1和A2分别向P点发射电磁波信号，然后分别接收P点反射的电磁波信号，此两幅天线接收到的电磁波复信号经过共轭相乘后的相位即为干涉相位。其干涉的原理与杨氏干涉实验的原理类似，在杨氏干涉实验中(如图1-2中图a所示),穿过相距较小的两条狭缝的同一光源的两条光波，由于到达第二块木板的距离差呈周期性变化而在第二块木板上形成干涉现象，即：形成明暗相间的条纹，同理，在合成孔径雷达干涉中(如图1-2中图b所示)，卫星天线两次成像时发射到地面同一点的两束电磁波，由于存在路径差，同样会发生干涉现象，在图像上形成有规律的干涉条纹。与杨氏干涉实验对比，卫星两次成像时对地面同一点发射的两束电磁波类似于杨氏干涉实验中穿过狭缝的两束光波，而卫星信号干涉形成的干涉条纹类似于杨氏干涉实验中的穿过狭缝的两束光波形成的明暗相间的条纹(如图1-2中图a和图b所示)。

以上简单介绍了InSAR技术的原理，现在我们简单介绍一下InSAR技术的应用情况。目前，InSAR技术的应用主要在六个领域，第一个领域是地形测绘。SAR影像在地形测量中的早期应用是利用侧视成像的几何关

系，以及由此产生的阴影、顶底倒置和迎坡缩短等特征来测定地物目标的位置和高度，但这只在特定条件下对某个别目标可行[2~3]。目前，这方面

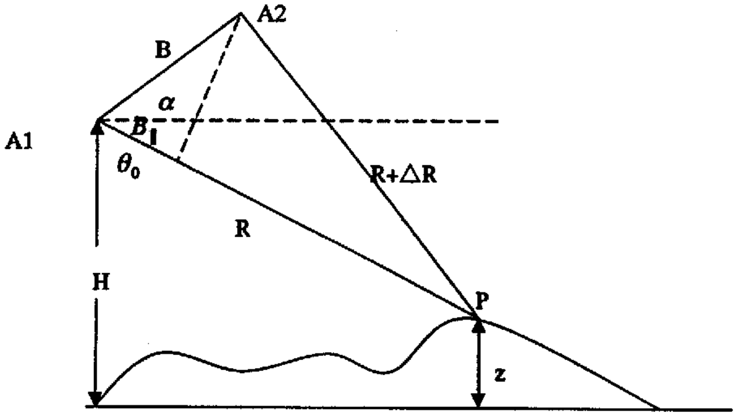
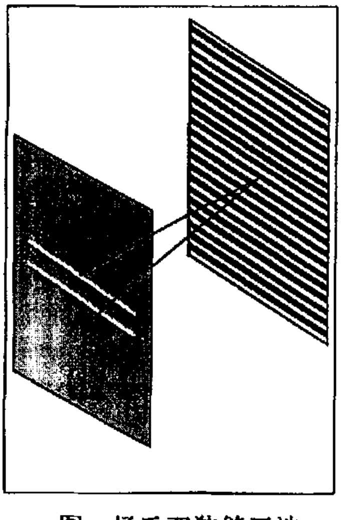


图 1-1 SAR 干涉成像示意图[4]



图a 杨氏双狭缝干涉

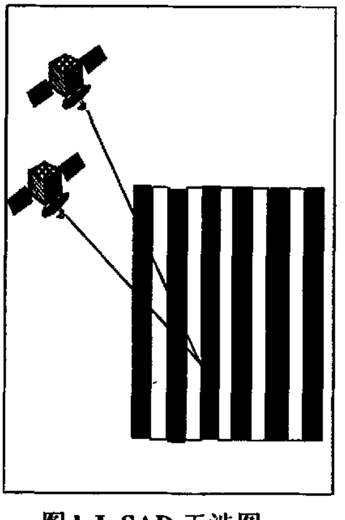


图 b InSAR 干涉图

图 1-2 杨氏与 InSAR 干涉示意图

的应用主要集中在InSAR影像自动提取DEM，地物的特征提取和识别两个方面的研究。InSAR技术应用的第二个领域是城市目标显示和城市形态分析。街道和建筑物结构及走向在不同波段、不同极化的SAR影像上的特征不同，可以为城市规划提供新的重要证据。InSAR技术可以用来生成城市的三维模型。也有学者利用干涉测量进行城市结构方面的研究[5]。InSAR技术应用的第三个领域是海洋表面状态监测。InSAR技术可以用于检测海洋表面的运动，如对海洋洋流、锋面和船只的尾迹等的监测。InSAR技术应用的第四个领域是极地冰况监测。冰川运动可以通过干涉测量技术检测到，精度达米级[6]。InSAR技术应用的第五个领域是农业和资源调查。通过SAR影像特有的文理特征，可以识别线性构造和宏观地貌，在资源调查方面很早就有了应用。近年来发现干涉数据可以用来估计农作物的高度[7]；利用干涉数据进行土地利用制图，可以有效的改善SAR影像计算机自动分类的结果[8]。InSAR技术应用的第六个领域是地表变形检测。利用D-InSAR技术来检测地震引起的地表变形[9~10]和地表沉降监测[11]是InSAR技术两个非常重要的应用。

1.1.2 合成孔径雷达干涉（InSAR）高程测量基本原理

合成孔径雷达有两种成像模式，第一种模式是单轨道双天线模式，第二种模式是单天线重复轨道模式。这里以重复轨道测量为例来介绍InSAR的基本原理。重复轨道干涉测量的卫星天线与地面目标的几何关系如图1-1所示。在图1-1中，A1和A2分别表示两幅天线位置，天线之间的距离用基线B表示，基线与水平方向的夹角为α，H表示平台的高度，地面一点P到天线A1的路径用R表示，Θ_0是第一幅天线的参考视线角，地形高程用 z 表示。天线A1和天线A2接收的SAR信号s_1和s_2分别表示为：

$$s_1(R)=u_1(R)e^{i\Phi(R)}$$

$$s_2(R+\Delta R)=u_2(R+\Delta R)e^{i\Phi(R+\Delta R)} \tag{1-1}$$

其中$s_1(R)$为天线A1接收的信号，$u_1(R)$为天线A1接收到的复信号的模，

$\Phi(R)$为天线A1接收到的复信号的相位，$s_2(R+\Delta R)$为天线A2接收到的信号，$u_2(R+\Delta R)$为天线A2接收到的复信号的模，$\Phi(R+\Delta R)$为天线A2接收到的复信号的相位。天线接收信号的相位由两部分组成：一是由路径确定的相位，二是由地面不同的散射特性造成的随机相位。因此，接收信号的相位可以表示如下：

$$\varphi_1 = 2\frac{2\pi}{\lambda}R + \arg\{u_1\}$$
$$\varphi_2 = 2\frac{2\pi(R+\Delta R)}{\lambda} + \arg\{u_2\} \tag{1-2}$$

其中φ_1表示由天线A1接收到的复信号的相位，φ_2表示由天线A2接收到的复信号的相位，$\arg\{u_1\}$和$\arg\{u_2\}$分别表示天线A1和天线A2接收到的由地面不同的散射特性造成的随机相位。由于两幅SAR图像不是完全重合，因此需要对它们进行配准处理，配准后的图像进行复共轭相乘，就得到了复干涉纹图。

$$s_1(R)s_2^*(R+\Delta R) = \left|s_1(R)s_2^*(R+\Delta R)\right|e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \left|s_1(R)s_2^*(R+\Delta R)\right|e^{\frac{-i4\pi\Delta R}{\lambda}} \tag{1-3}$$

$s_1(R)$表示天线A1接收到的复信号，$s_2^*(R+\Delta R)$表示天线A2接收到的复信号的共轭。上式中假定了两幅图像中随机相位的贡献相同。对单幅图像来说相位是随机的，但据公式(1-3)可知，干涉纹图的相位是确定的。它由信号的路径差ΔR决定，干涉纹图的相位可以表示如下：

$$\phi = \frac{-4\pi\Delta R}{\lambda} + 2\pi N \qquad N = 0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{1-4}$$

上式中ϕ为干涉纹图的相位，ΔR为天线A1和A2接收信号的路径差，λ为天线A1和A2接收信号的波长。在实际的干涉处理中，只能得到干涉相位的主值（缠绕相位），而无法得到真实相位，必须进行相位解缠才能得到真实相位。

由图1-1的几何关系可以得出

$$\sin(\theta_0 - \alpha) = \frac{(R+\Delta R)^2 - R^2 - B^2}{2RB} \tag{1-5}$$

$$z = H - R\cos\theta_0 \tag{1-6}$$

由于ΔR非常小，因此公式(1-5)中ΔR^2可以忽略，由此得：

$$\Delta R \approx B\sin(\theta_0-\alpha)+\frac{B^2}{2R} \tag{1-7}$$

由于 B<<R,因此公式(1-7)可简化为

$$\Delta R \approx B\sin(\theta_0-\alpha) \tag{1-8}$$

设基线平行于视线的分量为$B_{\parallel}$，平行于视线方向的分量为$B_{\perp}$，则有：

$$B_{\parallel}=B\sin(\theta_0-\alpha)$$

$$B_{\perp}=B\cos(\theta_0-\alpha) \tag{1-9}$$

将公式(1-9)代入公式(1-8)，则：

$$\Delta R \approx B_{\parallel} \tag{1-10}$$

联合公式(1-4)、公式(1-10)，则：

$$\phi=\frac{-4\pi B_{\parallel}}{\lambda} \tag{1-11}$$

对于地面上任意一个不与 P 点重合的点P',如图 1-3 所示，它的视角与 P 点略有不同，不妨设为$\theta_0+\Delta\theta$，则P'点的干涉相位为：

$$\phi'=\frac{-4\pi B}{\lambda}\sin(\theta_0+\Delta\theta-\alpha) \tag{1-12}$$

由于$\Delta\theta$很小，因此有如下等价：

$$\Delta\theta \approx \sin\Delta\theta \tag{1-13}$$

设 P、P'点的高度差为Δz，由图 1-2 可知

$$R\sin\Delta\theta=\frac{\Delta z}{\sin\theta_0} \tag{1-14}$$

结合(1-11)、(1-12)、(1-13)和(1-14)式，在干涉纹图上这两点之间的相位差为：

$$\Delta\phi = \frac{-4\pi B\cos(\theta_0-\alpha)\Delta z}{\lambda R\sin\theta_0} = \frac{-4\pi B_\perp \Delta z}{\lambda R\sin\theta_0} \tag{1-15}$$

公式(1-15)表明了相位差$\Delta\phi$和高度差Δz之间的关系，这就是合成孔径雷达干涉测量的理论依据。

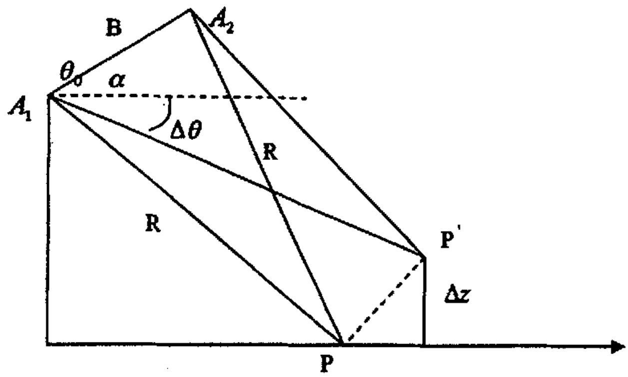


图 1-3 干涉相位随高度变化几何示意图

1.1.3 合成孔径雷达干涉差分干涉形变测量原理

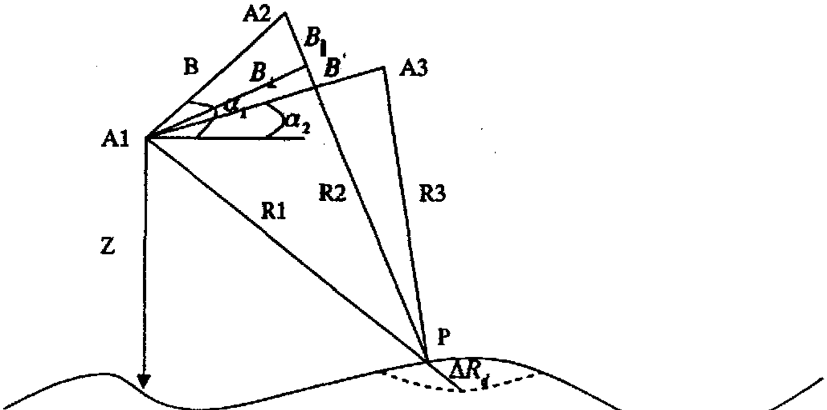


图 1-4 是 D-InSAR 的成像几何示意

图 1-4 是 D-InSAR 的成像几何示意图[12]，A1 和 A2 是卫星两次对同一地区成像时天线的位置，在地表未发生形变前获取第一幅 SAR 图像，则由 P 点返回的复信号为：

$$s_1(R_1)=|s_1(R_1)|\exp(-\frac{4\pi}{\lambda}R_1)$$

$|s_1(R)|$为复信号$s_1(R)$的模，R_1为获取第一幅图像时卫星天线与地面点 P 的距离，λ为卫星发射信号的波长。在地表发生形变后获取第二幅 SAR 图像(假设这种形变与雷达分辨单元相比很小，可认为雷达信号仍是相关的)，此时 P 点返回的信号为：

$$s_2(R_2)=|s_2(R_2)|\exp(-\frac{4\pi}{\lambda}(R_2+\Delta R_d))$$

$|s_2(R_2)|$为复信号$s_2(R_2)$的模，$R_2+\Delta R_d$为获取第二幅图像时卫星天线与地面点 P 的距离，ΔR_d为地面视线向形变量。这两幅 SAR 图像所形成的干涉纹图的相位ϕ_1既包含了区域的地形信息，又包含了观测期间地表的形变信息，

$$\phi_1\approx-\frac{4\pi}{\lambda}B_{\parallel}-\frac{4\pi}{\lambda}\Delta \mathrm{R}_d=-\frac{4\pi}{\lambda}B\sin(\theta_1-\alpha_1)-\frac{4\pi}{\lambda}\Delta R_d$$

上式中 B 为第一次与第二次成像时的基线长，$B_{\parallel}$为基线的平行分量，$B_{\perp}$为基线的垂直分量。假设在形变发生前获取第三幅图像，则接收到的 P 点的信号为：

$$s_3(R_3)=|s_3(R_3)|\exp(-\frac{4\pi}{\lambda}R_3)$$

$|s_3(R_3)|$为复信号$s_3(R_3)$的模，R_3为获取第三幅图像时卫星天线与地面点 P 的距离。第三幅图像与第一幅图像形成的干涉纹图其干涉相位ϕ_2只包含地形信息

$$\phi_2\approx-\frac{4\pi}{\lambda}B_{\parallel}^{'}=-\frac{4\pi}{\lambda}B^{'}\sin(\theta_2-\alpha_2)$$

$B_{\parallel}^{'}$为第一次与第三次成像时基线的平行分量。由视线向形变量ΔR_d所引起的相位ϕ_d为：

$$\phi_d = \phi_1 - \frac{B_{\|}}{B_{\|}'}\phi_2 = -\frac{4\pi}{\lambda}\Delta R_d \tag{1-16}$$

ϕ_1为第一幅 SAR 图像与第二幅 SAR 图像干涉的相位，ϕ_2为第一幅 SAR 图像与第三幅 SAR 图像干涉的相位。上式左边的各量可由干涉纹图的相位和轨道参数计算得到，进而可确定图像每点的视线向形变量ΔR_d。

基线距的比值

$$\frac{B_{\|}}{B_{\|}'} = \frac{B\sin(\theta_1 - \alpha_1)}{B'\sin(\theta_2 - \alpha_2)} \tag{1-17}$$

是视角θ的函数，它取决于成像参数和图像上每一点的地形。为了利用(1-17)式来求解(1-16)式，必须由干涉数据采集研究区的地形图或利用其它的算法获取高程资料。由于视角θ是由参考视角θ_0和区域视角增量$\Delta\theta_z$两部分组成，对于某一成像方式θ_0是确定的，$\Delta\theta_z$随地形而变化。为了计算简便和确保计算结果的精度，可以采用“去平地”算法，从干涉纹图移去“平地效应”引起的相位量，所得到的新的相位值分别为

$$\begin{aligned}\phi_{f1} &= -\frac{4\pi}{\lambda}B[\sin(\theta_{0_1} + \Delta\theta_{z_1} - \alpha_1) - \sin(\theta_{0_1} - \alpha_1)] - \frac{4\pi}{\lambda}\Delta R_d \\ &= -\frac{4\pi}{\lambda}B\cos(\theta_{0_1} - \alpha_1)\Delta\theta_{z_1} - \frac{4\pi}{\lambda}\Delta R_d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{f2} &= -\frac{4\pi}{\lambda}B'[\sin(\theta_{0_2} + \Delta\theta_{z_2} - \alpha_2) - \sin(\theta_{0_2} - \alpha_2)] \\ &= -\frac{4\pi}{\lambda}B'\cos(\theta_{0_2} - \alpha_2)\Delta\theta_{z_2}\end{aligned}$$

假设$\Delta\theta_{0_0} \approx \Delta\theta_{0_2}$，用“去平地”相位重新表示(1-16)式得：

$$\phi_d = \phi_{f1} - \frac{B_\perp}{B_\perp'}\phi_{f2} = -\frac{4\pi}{\lambda}\Delta R_d \tag{1-18}$$

(1-18)式中，无需精确的值和地形信息，就可以求解视线向形变量ΔR_d。需

要注意的是，在去平地处理过程中，如果所用的基线距的值并不是真实的基线距值，将会引入误差，造成位移图的变形。

以上就是利用 D-InSAR 来进行形变测量的原理。

1.1.4 合成孔径雷达干涉测量数据处理

InSAR 数据为复型数据，它的数据处理流程如图 1-3 所示[13]：由此图可以看出，干涉测量工作主要包括 4 个方面：① InSAR 复型影像数据的配准，所谓配准就是使用来计算干涉相位的两幅复图像的点对应地面的同一点；② 干涉条纹图的生成，所谓干涉条纹图就是配准后的两幅影像干涉的结果；③ 相位解缠；④ 数字高程模型的建立，即利用解缠后的相位生成数字高程模型。无论是在合成孔径雷达干涉高程的数据处理工作中，还是在合成孔径雷达干涉变形测量的数据处理工作中，相位解缠都是其中最重要的工作，相位解缠结果的好坏直接影响着建立的数字高程模型和测量的变形的精度。

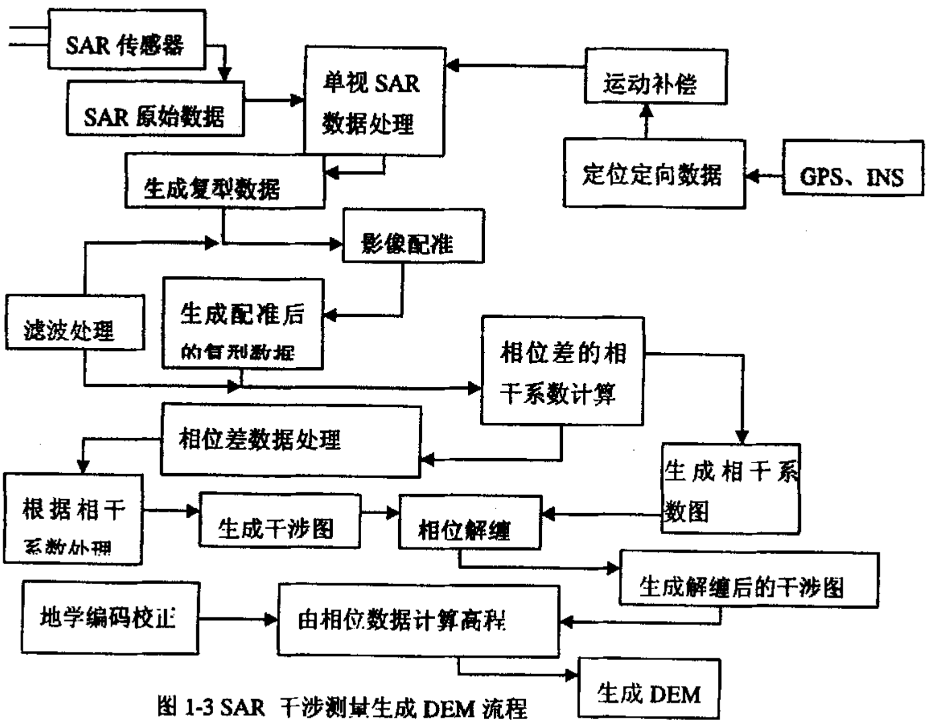


图 1-3 SAR 干涉测量生成 DEM 流程

1.2 国内外研究现状

相位解缠技术最早出现在20世纪60年代末、70年代初，当时所研究的主要是一维相位解缠问题。一维相位解缠一般采用积分法，在相邻点之间进行主值差的积分。而后又发展了自适应积分法，它具有获取充分采样的傅立叶变换的性能。但是这种算法由于采样率固定，因而会有因相位变化快、采样率较低而导致的模糊问题。

二维相位解缠的研究始于20世纪70年代末，是由于自适应光学和补偿式成像的发展而进行的。二维相位解缠需要兼顾两个方面：一致性和精确性。一致性是指在解缠后的矩阵中，任意两点之间的相位差是与这两点之间的路径无关的。精确性是指解缠后的相位要能忠实的恢复原始相位函数。

国外对相位解缠算法的研究比较早，贡献也比较大。1988年Goldstein等[14]人提出了枝切(Branch Cut)法,这种算法通过积分相邻像元上的差分相位来进行相位解缠，它对数据质量好的局部相位的解缠精度比较高，解缠时间比较短，但是，当枝切放置错误时，将会导致误差的传递。1990年Prati利用相位质量图指导枝切线设置[15]，Derauw于1995年利用相干图指导设置枝切线，但没有提出详细的算法[16]，1996年Flynn给出了详细的算法[17]，称之为"Mask-cut"算法。1997年Flynn等提出了基于最小不连续测度的相位解缠算法，也简称"Flynn"算法[18]，这种算法利用网络图的算法自动选择合适的积分路径，以使解缠相位数据中的不连续的长度最小。1999年，Xu Wei等提出了可利用干涉数据相干系数等辅助信息指导积分路径选择的区域增长算法，并在处理复杂的相位数据时获得成功[19]。另外Fried[20]等于1977年提出了不带权的最小二乘相位解缠算法，这种算法的缺点是无权重，因此相位噪声对解缠结果的影响比较大。

除了以上提到的相位解缠算法以外，还有一些其他的算法，如条纹检测、网格自动化、知识介入、基于模型等。国内对相位解缠算法的研究比较晚，至今对相位解缠算法所做的比较多的工作是对某些相位解缠算法的比较[21]工作。纵观国内外有关参考文献，目前存在较多的相位解缠算法可分为两类：第一类是利用相邻相位在空间上的相关性进行相位解缠，主要

采用积分的算法，典型算法如：Goldstein's Branch-Cut Algorithm[22~24]、Quanty-Guided Path Following Algorithm、Mask-Cut Algorithm[25~29]、Flynn's Minimum Discontinuity Approach 等等；第二类是将相位解缠问题转化为数学上的最小范数问题来进行求解，典型算法如：Unweighted Least-Squares Phase Unwrapping[30~36]、Weighted Least-Squares Phase Unwrapping、Minimum L^p-Norm Phase Unwrapping[37]等等。

相位解缠通常是一个棘手的问题，主要原因有以下几方面：

① 雷达斜距成像方式和地形起伏引起的图像几何畸变（如雷达阴影、透视收缩、叠掩等）；

② 干涉相位信号的低信噪比；

③ 表面不连续（如地形陡坎、断层边沿的形变）致使干涉相位存在显著跳跃，没有足够的先验信息，很难确定这种跳变值。

目前的解缠算法的有效性强烈依赖于干涉数据的质量和特征，没有一种通用的算法。

1.3 本文研究的主要内容和意义

合成孔径雷达干涉测量是一项应用前景非常广泛的技术，相位解缠是这项技术中非常关键的一步，本论文研究的目标就是相位解缠问题。至今为止，人们对相位解缠技术做了很多的研究，发展了很多的相位解缠算法。这些算法可以分为两类，一类是基于路径跟踪的相位解缠算法，另一类是基于最小二乘的相位解缠算法。这些算法的解缠精度和解缠效率是不同，另外这些算法只对特定情况下的数据解缠有效。对于给定的待解缠数据，这些算法中的一种或几种算法可能会解缠失败。

基于以上提到的当今相位解缠算法的状况，确定本硕士论文的研究目标为：第一，比较第一类相位解缠算法中的枝切法、Mask-cut 算法、Flynn 算法与第二类相位解缠算法中的基于 FFT/DCT 的最小二乘算法、Pcg 算法对模拟相位数据的解缠结果的差异，比较分析它们解缠效率和解缠精度的高低；第二，结合已有的相位解缠算法，生成一种集合了这两类算法的优点的新的相位解缠算法。

目前，研究 InSAR 的专家和学者对相位解缠算法的研究做了很多的工作，他们比较了一些算法的解缠精度和解缠效率。但并未对两大类相位解缠算法做深入的比较工作。本论文通过分别选择两大类算法中的 3 种经典算法做对比解缠实验研究，更深刻的了解了两大类算法的解缠差异和解缠特点，为生产实践中相位解缠算法的选择提供了参考依据。

本论文除了比较两大类算法中的几种算法的解缠差异以外，还生成了一种结合了两大类算法优点的相位解缠算法。这种算法是两大类算法整合的结果，也是对相位解缠算法的一个发展。

1.4 本论文的组织结构

本论文共分为六章，第一章是绪论部分，在这部分首先介绍了合成孔径雷达干涉技术及其应用情况，接着介绍了合成孔径雷达干涉高程测量和形变测量的原理，接着又介绍了合成孔径雷达干涉中相位解缠的国内外研究现状，最后介绍了本论文的研究目标和意义；从第二章到第六章是本文的正文部分，第二章首先介绍了相位解缠的概念，其次介绍了两大类相位解缠算法—枝切法和最小二乘法的相位解缠原理；第三章介绍了相位解缠算法中的基于路径跟踪的相位解缠算法(枝切法、Mask-cut 算法、区域生长法、Flynn 算法)；第四章介绍了相位解缠算法中的基于最小二乘的算法(不带权的最小二乘算法和有权重的最小二乘算法)；第五章为两大类相位解缠算法的比较实验比较研究，在这一章比较了各种算法(枝切法、Mask-cut 算法、Flynn 算法、基于 DCT-FFT 的最小二乘算法、Pcg 算法)的解缠精度和解缠效率；第六章为相位解缠算法的结合研究，在这一章研究了枝切法带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的结合。

第二章 相位解缠算法的核心思想

2.1相位解缠概述

在合成孔径雷达干涉测量中，相位解缠是指将 SAR 信号的相位由主值恢复到真实值的过程。相位解缠不仅应用于合成孔径雷达干涉测量中，在信号与图像处理、合成孔径声纳、自适应光学、声音成像、光学与微波干涉、补偿式成像、核磁共振（MR）、地震信号处理等方面也有重要的应用。

相位解缠技术最早出现在 20 世纪 60 年代末、70 年代初，当时主要研究的是一维相位解缠问题[38]。一维相位解缠一般采用积分法，在相邻点之间进行主值差的积分。图 2-1 为理想状态下的一维干涉相位，图 2-2 为对应的解缠相位。一维相位解缠的过程就是从图 2-1 所示的干涉相位恢复为图 2-2 所示的解缠相位的过程。

二维相位解缠的研究始于 20 世纪 70 年代末，它并不是将一维相位解缠算法简单的推广到二维，因为这样误差会沿垂直向或水平向传播。目前人们研究了很多种二维相位解缠算法，这些算法大体分为两类，一类是基于路径跟踪的相位解缠算法，另一类是基于最小二乘的相位解缠算法。基于路径跟踪的相位解缠算法采用积分相邻像元上的差分相位来进行相位解缠，它通过判断留数点，选择合适的积分路径，隔绝噪声区，阻止相位误差的全程传播，因此，它能保证局部上的解缠结果是正确的，然而却不能保证整体上解缠结果的正确性；基于最小二乘的相位解缠算法不考虑相邻像元上相位的积分，它通过使缠绕相位的梯度与真实相位的梯度差的平方最小来实现相位解缠，这类算法能够将局部噪声对整个解缠平面的影响降低到最小，但对于含有噪声的局部解缠平面来说，它只是真实的解缠平面的一个最近似的解缠平面，而不是真实的解缠平面。

面的一个最近似的解缠平面，而不是真实的解缠平面。

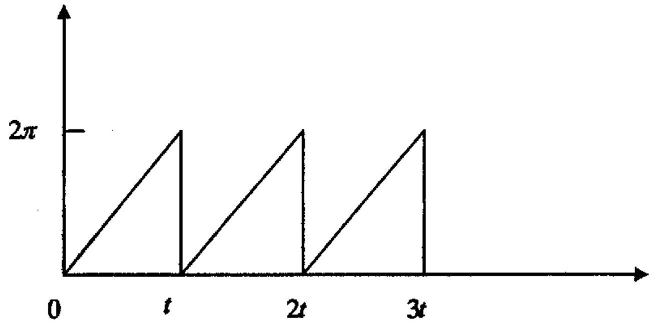


图 2-1 理想状态下的干涉相位图[38]

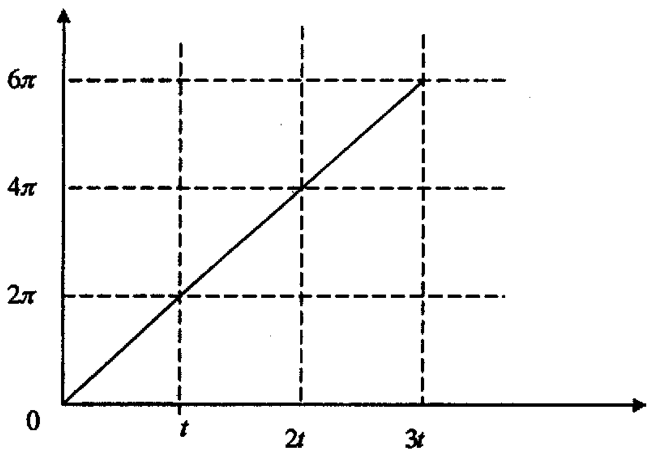


图 2-2 解缠相位图

2.2 基于路径跟踪的相位解缠算法思想

2.2.1 数学背景

两幅 SAR 图像经过干涉以后，我们可以获得一幅缠绕相位图像，各像元上的值为对应的干涉相位的主值。根据 Nyquist[21]定理，当相邻像元上的相位差小于π时，可以通过积分的算法来恢复相位的真实值。在 SAR 干涉图像中，大部分相邻像元之间的相位差都是小于π的，基于路径跟踪的相位解缠算法就是通过积分相邻缠绕相位的差分值来恢复相位的真实

值的。假设我们已知在像元γ_0上的相位，那么在其它像元γ上的相位可以通过以下公式来获得：

$$\varphi(r)=\int_C \nabla\varphi d_r+\varphi(r_0) \tag{2-1}$$

符号$\varphi(\gamma)$为像元γ上的解缠相位，$\varphi(\gamma_0)$为像元γ_0上的已知解缠相位，C 为积分路径，根据积分理论，

$$I=\int_C F(r)d_r \tag{2-2}$$

上式中$F(r)$为积分函数，C 为积分路径。(2-2)式的线性积分不仅依赖积分路径 C 的起点和终点，还依赖积分路径 C 本身[39]。要使积分与路径无关，则要求下列闭合积分成立

$$\oint F(r)d_r=0 \tag{2-3}$$

在二维相位解缠中，公式(2-3)常用来作为探测积分是否与路径无关的条件。InSAR 缠绕相位数据中，不是所有的积分路径都满足公式(2-3)，有些像元上的缠绕相位数据由于受到噪声的影响，或者由于其它的原因，导致通过这些像元的闭合积分不能满足公式(2-3)，这些像元上的相位在 InSAR 中被称为"残留点(residue)"，或者“电荷”(具有正负性，见随后的讨论)，在路径跟踪的相位解缠算法中，关键的问题在于如何判断这些电荷并将它们相连（称为“分枝”）以达到正负抵消，且防止积分路径穿过这些分枝。

2.2.2 残留点探测

为了在相位解缠的过程中很好的利用这些留数点，我们需要定位这些残留点的位置。假设缠绕相位函数为$\psi(m,n)$，W为缠绕操作算子，那么对$\psi(m,n)$做如下图所示积分时，将满足公式(2-3) ,图 2-3 为残留点探测示意图，在此积分的 2×2 个像元上，一般认为左上角的像元为残留点。残留点有正、负之分，当积分值 q 等于 1 时，认为它是正的残留点，当积分值等于-1 时，认为它为负的残留点。当积分值等于 0 时，认为它不是残留点。如果它是正的或的负的残留点时，这 4 个像元成为一个残留点集。

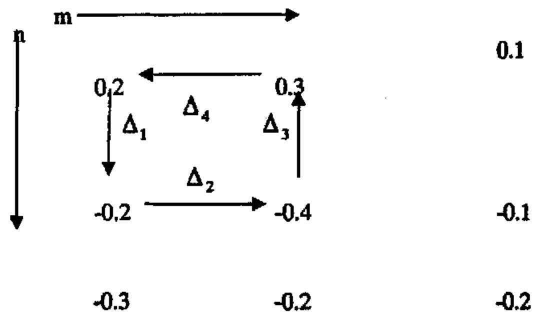


图 2-3 残留点探测示意图[40]

其中

$$\Delta_1 = W\{\psi(m,n+1)-\psi(m,n)\},$$

$$\Delta_2 = W\{\psi(m+1,n+1)-\psi(m,n+1)\},$$

$$\Delta_3 = W\{\psi(m+1,n)-\psi(m+1,n)\},$$

$$\Delta_4 = W\{\psi(m,n)-\psi(m+1,n)\}$$

在此积分过程中，

$$q = \sum_{i=1}^{4}\Delta_i = -1.0$$

其中 $\Delta_3 = W\{0.3-(-0.4)\} = -0.3$

2.3 基于最小二乘的相位解缠算法思想

基于最小二乘的相位解缠算法是InSAR相位解缠算法中的一类非常重要的算法，目前已发展出了基于 FFT 的最小二乘法、基于 DCT 的最小二乘法、基于误差方程的最小二乘法等算法[41]，这些算法通过使缠绕相位的梯度与真实相位的梯度差的平方最小来实现相位解缠，如下公式所示：

$$\varepsilon^2 = \int W(\nabla\phi - g)^2 dA$$

其中，dA积分面积，W是一个权函数，g是受噪声影响的真实的相位梯度，g可以表示如下：

$$g = \nabla\varphi + n$$

其中n是噪声矢量，$\nabla\varphi$为真实的相位梯度。

基于FFT的最小二乘法与基于DCT的最小二乘法在实现算法上有很大的相似性，运算速度基本一致，解缠结果也接近。基于误差方程的最小二乘法的优势在于有着严格的数学描述，但与基于DCT/FFT的最小二乘法相比，它计算效率不高，很难处理图幅较大的图像。

这三种算法的实现过程将在第四章中详细介绍。

2.4 本章小结

相位解缠的实质就是将SAR信号的相位由主值恢复到真实值。目前的相位解缠算法分为两大类，基于路径跟踪的相位解缠算法和基于最小二乘的相位解缠算法。基于路径跟踪的相位解缠算法的思想就是绕过不可靠的相位(即残留点)对相邻像元的差分相位进行积分；基于最小二乘的相位解缠算法的基本思想就是使缠绕相位的梯度与真实相位的梯度差的平方最小。另外本章还专门用一节介绍了残留点的探测方法，即通过判断相邻四个像元上的缠绕相位的代数和来判断此四个像元是否为残留点，需要注意的是，残留点一般标记为此四个像元左上角那个像元。

第三章 基于路径跟踪的相位解缠算法

3.1 概述

基于路径跟踪的相位解缠算法通过对相邻像元的差分相位进行积分来进行相位解缠。几十年来，研究者研究出了许多的相位解缠算法，至今为止，基于路径跟踪的相位解缠算法有枝切法[14]、区域法[42]、Mask-cut[17]算法、像元扩散法[43]、最小生成树法[44]、条纹检测法[45]、像元排序法[46~49]、区域生长法[50~51]，最小不连续算法[18] (简称 Flynn 算法)等算法。本章不对以上提到的所有算法都进行详细的介绍，依据本论文的研究目的，本章依次对基于路径跟踪的相位解缠算法中的枝切法、Mask-cut 算法和最小不连续算法进行介绍。

3.2 枝切法

1988 年 Goldstein[14]等提出了枝切法，识别正负残留点，并连接邻近的残留点对或多个残留点，实现残留点“电荷”平衡，生成最优的枝切线，确定积分路径，防止误差沿积分路径传递。

基于 Goldstein 算法实施相位解缠的基本步骤为：

① 识别残留点

② 生成枝切线

③ 绕过枝切线进行积分

基本操作如下：对缠绕相位图像进行扫描，寻找残留点，当扫描到残留点时，将一个3×3的窗口放置在该残留点上，在窗口内寻找其他的残留点，当寻找到新的残留点时，将这两个残留点连接起来，如果残留点的极性相反，则表明通过连接枝切线实现了残留点的“极性平衡”；如果残留点的极性相同，且这个残留点未与其它残留点相连接，则将其极性加入到它所连接的残留点集中，否则其极性不加入此残留点集中(例如：假设已有残留点集的极性为+2，搜索到的新的残留点的极性与搜索窗口中心点的极性相同，都为+1，且搜索到的这个残留点未与其它残留点相连接，则将其极性加入到残留点集的极性中，那么残留点集的极性将变为+3，如果此残留点已经与其他的残留点连接了，那么其极性不加入到残留点集的极性中去，

残留点集的极性仍为+2),然后将窗口移到新的残留点上，继续搜索，直到这些残留点对达到了“极性平衡”。如果在新的残留点上继续搜索时，没有搜索到使这些残留点对达到“极性平衡”的残留点，则将窗口放大到5×5,7×7或更大范围来搜索。如果搜索到边界时，则将残留点与边界相连。生成枝切线后，积分相邻像元上的差分相位进行相位解缠，枝切线上的相位不参与此积分过程。生成枝切线的过程如下图所示，图3-1是残留点之间连接枝切线的示意图，图3-2为Goldstein枝切法的基本操作过程，图3-3是在有第三个残留点的情况下如何连接枝切线的示意图：。

在这种算法中，有两个步骤非常关键，第一是当搜索窗口找到新的残留点后，无论该残留点是否与其它的残留点两连，都将该残留点与窗口中心的残留点两连；第二是当搜索窗口到达图像的边界时，则将残留点与边

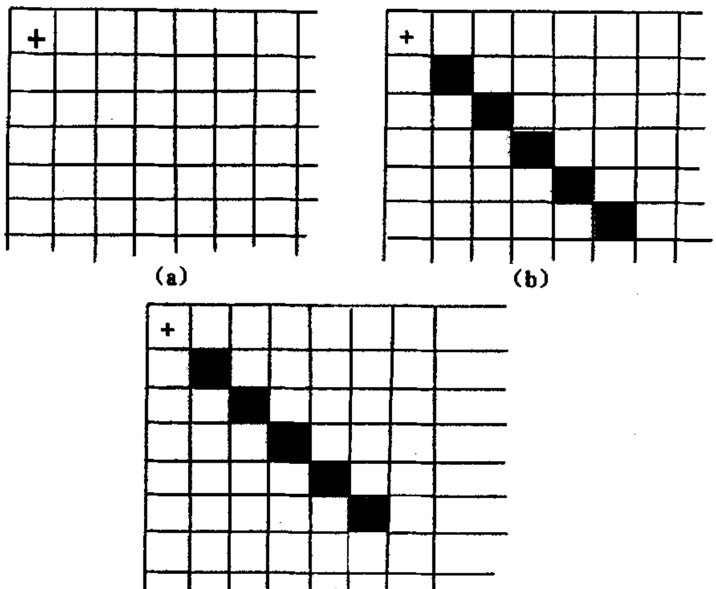
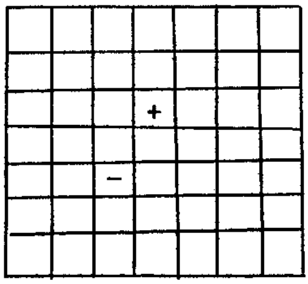


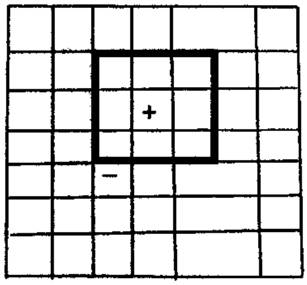
图3-1 残留点之间连接枝切线的示意图[52]
(a) 正残留点与负残留点 (b) 残留点间的枝切线
(c) 枝切线不包括左上方像元

界相连，以阻止积分路径[52]。

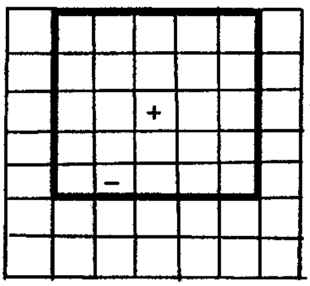
有一点需要注意，残留点是由四个像元定义的，一般把左上角的像元定义为残留点，但是枝切并不包括左上角的这个像元。



（a）



（b）



（c）

图 3-2 Goldstein 枝切法的基本操作过程[52]

（a）正残留点与负残留点 （b）3×3的搜索窗

（c）搜索窗扩大为5×5

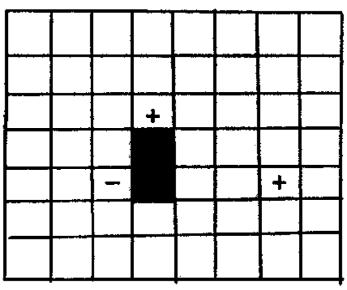


图3-3 a

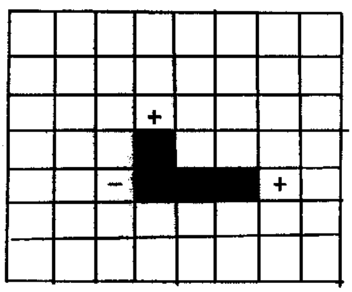


图3-3 b

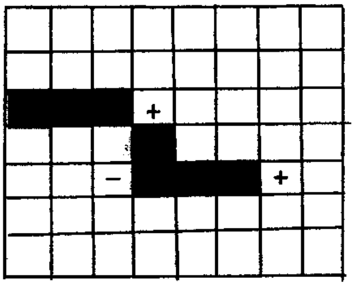


图3-3 c

图3-3 在有第三个残留点的情况下连接枝切线的示意图

3.2 Mask-Cut 算法

Mask-Cut 算法[17]将 Goldstein 枝切法和质量指导的路径跟踪算法结合了起来，这种算法从残留点开始出发，穿过低质量区生成像元掩摸 (Mask)。当一个 Mask 所连接的残留点的总“电荷”为 0(既有相同数目的正残留点和负残留点)或 Mask 已生长至图像的边界时，终止“生长”。由于”mask-cut”实际上是采用区域生长的算法，所以”Mask-Cut”一般比较粗，必须采用多态算法对其细化，然后利用扩散填充法对”Mask-Cut”周围的像元进行解缠。解缠步骤为：

输入：缠绕相位(相位质量信息)

步骤 1：识别残留点

步骤 2：生成 Mask-Cut

步骤 3：细化 Mask-Cut

步骤 4：沿绕过 mask-cut 的路径积分

这种算法与 Goldstein 枝切法类似，它识别残留点，并用枝切线将残留点连接起来，与 Goldstein 枝切法不同的是，它利用相位质量图指导枝切线的设置，从这一点上来说它又与质量指导的路径跟踪法相似。一般来说，这种算法与质量指导的路径跟踪算法的解缠结果基本相同。需要注意的是，在

残留点不仅仅分布在低质量相位区的情况下，mask-cut算法与质量指导的路径跟踪算法都无法正常工作，在这种情况下，枝切法更为有效。

3.4 Flynn 算法

Flynn 算法[18]也属于路径跟踪的相位解缠算法。设任意一个像元上的缠绕相位为$\psi_{m,n}$，解缠相位为$\phi_{m,n}$,则缠绕相位与解缠相位应满足下列关系

$$\phi_{m,n}=\psi_{m,n}+2\pi c_{m,n}$$

其中$c_{m,n}$为整倍数，此处称为“缠绕数”。对于一对相邻的像元，如果它们的相位差的绝对值大于π，我们称之为一个“间断”(discontinuity)。对于整数k,如果它与2π的乘积与此相位差最接近，则我们称k为这对像元的“跳跃数”(jump count)。因此，沿垂直方向和水平方向，跳跃数由下列方程定义

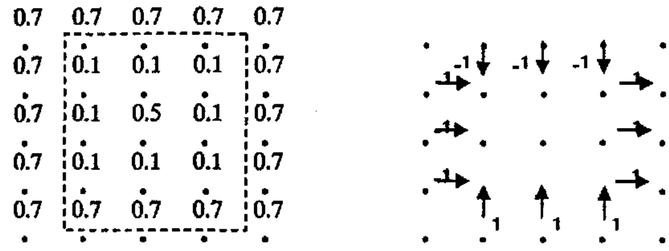
$$v_{m,n}=Int(\frac{\phi_{m,n}-\phi_{m+1,n}}{2\pi})$$

$$z_{m,n}=Int(\frac{\phi_{m,n}-\phi_{m,n+1}}{2\pi})$$

Int( )为取整操作。对于一幅相位图像，其跳跃数的总量由下列方程定义

$$E=\sum|v_{m,n}|+\sum|z_{m,n}|$$

跳跃数与缠绕数是有联系的，缠绕数$c_{m,n}$增加将会引起跳跃数$v_{m,n}$和$z_{m,n}$增加，跳跃数$v_{m-1,n}$和$z_{m,n-1}$减少；反之，跳跃数的变化也会引起缠绕数的变化。图3-7和图3-8说明了缠绕数和跳跃数之间的关系。图3-7(a)表示的是“金字塔”形状的平面的缠绕相位值(按比例换算到区间[0，1]，“0”表示相位值为0，“1”表示相位值为2π)，黑点代表像元，数字代表相位值，虚线表示“边缘线”(fringe line)的位置，即相邻像元之间相位差大于π的位置，它形成了一个“闭合框”。因为这些数据还未进行解缠，所以这些相位的缠绕数为零。图3-7(b)用黑色箭头表示了不为0的跳跃数，箭头旁的数值表示跳跃数的值。与箭头首尾都无关的像元与其它相邻像元



(a) (b)

图 3-7 缠绕数与跳跃数的关系图。(a)"金字塔"模型的缠绕相位。黑点代表像元，其中的数字等于$\frac{\text{缠绕相位值}}{2\pi}$，虚线框表示相位差大于$\pi$的像元的边界；(b)为(a)中的跳跃数。黑色箭头表示跳跃数，数字表示跳跃数值，中间未标箭头部分的跳跃数为 0

如果上图 3-7(a)中虚线框包围的像元的缠绕数增加，即相位值由 0.1 和 0.5 分别变为 1.1 和 1.5，那么图 3-7(b)中跳跃数值将会由-1 变为 0，跳跃数值 1 会减小为 0，导致总的跳跃数为 0。这样相位就被解缠了，在解缠平面中也就没有“间断”(discontinuities)了。

Flynn 算法通过识别上图中相位差大于π的边界，然后对边界内的相位加上2π的整倍数，来减少跳跃数 E，当跳跃数 E 减少时，缠绕数$c_{m,n}$也减少了，这样就达到了解缠相位的目的。

Flynn 算法通过探测上图所示的边缘线形成的闭合边界，然后对边界内的像元的相位增加2π的整倍数相位来减少相位的跳跃数，达到减少相位的缠绕数的目的，从而实现相位的解缠。Flynn 算法相位解缠分为 3 步：

(1) 计算输入相位中的跳跃数；

(2)扫描闭合的边界，对闭合边界内的相位加上2π的整倍数，使跳跃数减少；

(3) 依据跳跃数来计算解缠相位。

3.5 小结

本章介绍了基于路径跟踪的相位解缠算法中的 3 种算法—枝切法、Mask-cut 算法和 Flynn 算法。枝切法通过连接残留点，阻止积分路径穿过

不可靠的区域来进行相位解缠；Mask-cut 算法的解缠过程与枝切法类似，不同的是这种算法采用了其它的信息—质量图[53]—来指导“枝切“的设置，因此，这种算法有助于提高解缠的精度，但是这种算法将会受到质量图这个条件的制约。Flynn 算法与枝切法和 Mask-cut 算法不同，它采用跳跃数与缠绕数之间的关系来进行相位解缠，减少了设置“枝切”的工作，但对跳跃数与缠绕数的计算工作却又更多的占用了系统资源。

第四章 基于最小二乘的相位解缠算法

4.1 概述

最小二乘法属于最小范数法的范畴，对于最小范数法[54] L^p 来说，当 p=2 时，最小范数法就是最小二乘法。在合成孔径雷达干涉测量相位解缠中，最小二乘相位解缠分为不带权的最小二乘法相位解缠和有权重的最小二乘法相位解缠两大类，不带权的最小二乘法相位解缠又分为基于基本迭代法的最小二乘相位解缠[41]、基于 FFT 的最小二乘相位解缠[41]、基于 DCT 的最小二乘相位解缠[41]和基于误差方程的最小二乘相位解缠[41]4 种。

本章在不带权的最小二乘法部分介绍了基于基本迭代法的最小二乘算法、基于 FFT 的最小二乘算法、基于 DCT 的最小二乘算法和基于误差方程的最小二乘算法四种；在带权的最小二乘法部分介绍了 Picard 算法[55]和 Pcg 算法[55]两种算法。

4.1 不带权的最小二乘算法

4.1.1 基本迭代法

基本迭代法有 3 种，第一种是 $\omega-Jacobi$ 迭代法，第二种是 $Gauss-Seidel$ 迭代法，第三种是 SOR 法[41]，其迭代公式分别如下

(1) $\omega-Jacobi$ 迭代法

$$\phi_{i,j}^{k+1}=(1-\omega)+\omega(\phi_{i+1,j}^{k}+\phi_{i-1,j}^{k}+\phi_{i,j-1}^{k}+\phi_{i,j-1}^{k}-\rho_{i,j})/4 \tag{4-1}$$

其中 $0\le\omega\le1$，k 为迭代次数，$\rho_{i,j}$ 由公式(4-5)计算。每个完整的迭代需要 $2(M\times N)$ 次 乘和 $6(M\times N)$ 次加减运算。

(2) $Gauss-Seidel$ 迭代法

$$\phi_{i,j}^{k+1}=(\phi_{i+1,j}^{k}+\phi_{i-1,j}^{k}+\phi_{i,j+1}^{k+1}+\phi_{i,j-1}^{k+1}-\rho_{i,j})/4 \tag{4-2}$$

k 为迭代次数，$\rho_{i,j}$ 由公式(4-5)计算。每个完整的迭代需要 $(M\times N)$ 次 乘和

$4(M\times N)$次加减运算。

(3) SOR 法

$$\phi_{i,j}^{k+1}=(1-\omega)\phi_{i,j}^{k}+\omega(\phi_{i+1,j}^{k}+\phi_{i-1,j}^{k}+\phi_{i,j+1}^{k+1}+\phi_{i,j-1}^{k+1}-\rho_{i,j})/4 \tag{4-3}$$

其中$0\le\omega\le1$，k 为迭代次数，$\rho_{i,j}$由公式(4-5)计算。在每个松弛迭代中，SOR 的计算量与 $\omega-Jacobi$和$Gauss-Seidel$迭代法相当。如果选择好最佳松弛因子，该算法的收敛速度比$\omega-Jacobi$迭代法和$Gauss-Seidel$迭代法高一个量级。

4.1.2 基于 FFT 的最小二乘法

定义缠绕相位函数为$\psi_{i,j}(i=0,1,2,\cdots,M,j=0,1,2,\cdots,N)$，定义解缠相位函数为$\phi_{i,j}(i=0,1,2,\cdots,M,j=0,1,2,\cdots,N)$，缠绕相位函数的值域为$[-\pi,\pi)$，并且满足条件$\exp(j\psi)=\exp(j\phi)$。对函数$\psi_{i,j}$在二维平面内分别按照$i=M$和$j=N$作镜像操作(图 14)，得到函数定义如下：

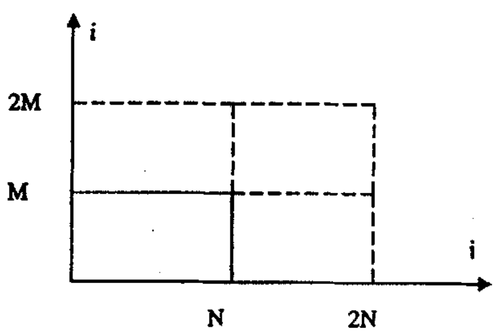


图 14 镜像对称操作

$$\tilde{\psi}_{i,j}=\begin{cases}\psi_{i,j} & 0\le i\le M;0\le j\le N\\ \psi_{2M-i,j} & M<i<2M;0<j<N\\ \psi_{i,2N-j} & 0\le i\le M;N<j<2N\\ \psi_{2M-i,2N-j} & M<i<2M;N<j<2N\end{cases}$$

x 方向和 y 方向的相位差定义如下：

$$\Delta^{x}_{i,j}=W\{\tilde{\psi}_{i+1,j}-\tilde{\psi}_{i,j}\}$$

$$\Delta^{y}_{i,j}=W\{\tilde{\psi}_{i,j+1}-\tilde{\psi}_{i,j}\}$$

其中$W\{\ \}$是缠绕操作。

对解缠相位函数也作同上一样的镜像对称操作，得到它的扩展函数$\tilde{\phi}_{i,j}$，则离散泊松方程的最小二乘解为：

$$(\tilde{\phi}_{i+1,j}-2\tilde{\phi}_{i,j}+\tilde{\phi}_{i-1,j})+(\tilde{\phi}_{i,j+1}-2\tilde{\phi}_{i,j}+\tilde{\phi}_{i,j-1})=\tilde{\rho}_{i,j} \tag{4-4}$$

其中

$$\tilde{\rho}_{i,j}=(\Delta^{x}_{i,j}-\Delta^{x}_{i-1,j})+(\Delta^{y}_{i,j}-\Delta^{y}_{i,j-1}) \tag{4-5}$$

函数$\tilde{\rho}_{i,j}$也为周期函数，对(4-4)式作二维傅立叶变换，得到

$$\Phi_{m,n}=\frac{P_{m,n}}{2\cos(\pi m/M)+2\sin(\pi n/M)-4}$$

其中$\Phi_{m,n}$和$P_{m,n}$分别是$\tilde{\phi}_{i,j}$和$\tilde{\rho}_{i,j}$的二维傅立叶变换($\Phi_{0,0}$没有定义，可令其为0)。对$\Phi_{m,n}$进行反傅立叶变化得到$\tilde{\phi}_{i,j}$，$\phi_{i,j}$即为在$i=0,1,2,\cdots,M;j=0,1,2,\cdots,N$范围的$\tilde{\phi}_{i,j}$。

具体实施步骤为：

① 计算$0\le i\le M,0\le j\le N$上的$\rho_{i,j}$值

② 对$\rho_{i,j}$做镜像对称操作，得到

$$\tilde{\rho}_{i,j}=\begin{cases}\rho_{i,j} & 0\le j\le N\\ \rho_{i,2N-j} & N<j\le 2N\end{cases}$$

对 $\tilde{\rho}_{i,j}$ 进行傅立叶变换，得到 $P_{i,j}$

③ 计算 $\Phi_{m,n}$

④ 对 $\Phi_{m,n}$ 进行反傅立叶变换得到解缠函数 $\phi_{i,j}$

4.1.3 基于 DCT 的最小二乘相位解缠

对离散函数 $\phi_{m,n}$ 进行离散余弦正变换，得到结果 $\hat{\phi}_{m,n}$ 为：

$$\hat{\phi}_{m,n}=\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}4\phi_{i,j}\cos\left[\frac{\pi}{2M}m(2i+1)\right]\cos\left[\frac{\pi}{2N}n(2j+1)\right]\quad 0\le m\le M-1, 0\le n\le N-1$$

对离散函数 $C_{m,n}$ 进行二维余弦反变换，得到结果 $\phi_{m,n}$ 为：

$$\phi_{i,j}=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\omega(m,n)C_{m,n}\cos\left[\frac{\pi}{2M}m(2i+1)\right]\cos\left[\frac{\pi}{2N}n(2j+1)\right]$$

其中，$\omega(m,n)=\omega_1(m)\omega_2(n)$，$\omega_1(m)$ 和 $\omega_2(n)$ 定义如下：

$$\omega_1(m)=\frac{1}{2},\quad m=0;\quad \omega_1(m)=1,\quad 1\le m\le M-1$$

$$\omega_2(m)=\frac{1}{2},\quad n=0;\quad \omega_2(n)=1,\quad 1\le n\le N-1$$

解缠相位的 DCT 变换 $\hat{\phi}_{i,j}$ 与 $\rho_{i,j}$ 的 DCT 变换 $\hat{\rho}_{i,j}$ 的关系为：

$$\hat{\phi}_{i,j}=\frac{\hat{\rho}_{i,j}}{2\cos(\pi i/M)+2\cos(\pi i/N)-4}$$

对 $\hat{\phi}_{i,j}$ 作反 DCT 变换，则得到解缠相位。起对应的边界条件为：

$$\phi_{0,j}=\phi_{-1,j}$$
$$\phi_{M,j}=\phi_{M-1,j}\qquad j=0,1,2,\cdots,N-1$$

$$\phi_{i,0} = \phi_{i,-1}$$

$$\phi_{i,N} = \phi_{i,N-1} \qquad i = 0,1,2,\cdots,M-1$$

具体的实施步骤为：

① 根据(3-4)式计算 $\rho_{i,j}, 0 \le i \le M-1, 0 \le j \le N-1$

② 计算 $\rho_{i,j}$ 的 DCT 变换 $\hat{\rho}_{i,j}$

③ 计算 $\hat{\phi}_{i,j}$

④ 对 $\hat{\phi}_{i,j}$ 进行反 DCT 变换，计算 $\phi_{i,j}$

4.1.4 基于误差方程的最小二乘法

最小二乘法相位解缠的原则就是使缠绕函数的离散偏差微分与解缠后函数离散偏差微分的差达到最小。据此可以列出误差方程：

$$V_x = \partial\psi / \partial x - \partial\phi / \partial x$$

$$V_y = \partial\psi / \partial y - \partial\phi / \partial y$$

其中 ψ 为缠绕相位函数，ϕ 为解缠相位函数，根据离散函数的微分计算算法，以上两式可写为：

$$V_{x_{i,j}} = \phi_{i+1} - \phi_{i,j} - \Delta^x_{i,j} \tag{3-6}$$

$$\Delta^x_{i,j} = \psi_{i+1,j} - \psi_{i,j} \tag{3-7}$$

$$V_{y_{i,j}} = \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j} - \Delta^y_{i,j}$$

$$\Delta^y_{i,j} = \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}$$

令：

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{0,0} \\ \phi_{0,1} \\ \vdots \\ \phi_{0,N-1} \\ \phi_{1,0} \\ \vdots \\ \phi_{N-1,N-2} \\ \phi_{N-1,N-1} \end{bmatrix}_{NN} \qquad L = \begin{bmatrix} \Delta^x_{0,0} \\ \Delta^x_{0,1} \\ \vdots \\ \Delta^x_{0,N-1} \\ \Delta^x_{1,0} \\ \vdots \\ \Delta^x_{N-2,N-1} \\ \Delta^y_{0,0} \\ \Delta^y_{1,0} \\ \vdots \\ \Delta^y_{N-1,N-3} \\ \Delta^y_{N-1,N-2} \end{bmatrix}_{2N(N-1)}$$

可将(3-6)、(3-7)式写为：

$$V = A\Phi - L \tag{3-8}$$

其中 A 是大小为$[2N(N-1)(N\times N)]$的系数矩阵：

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

由(3-8)式共$2N(N-1)$个线性方程，根据最小二乘原理，由误差方程(3-8)式组成法方程为：

$$A^T PA\Phi - A^T PL = 0$$

其中，P 为缠绕相位偏差微分的权阵。在干涉相位质量较好时，认为各点的权重相等，P 为一单位矩阵。对于干涉质量不好的干涉条纹图，可根据各点的信噪比或相干性等衡量干涉质量的参数，给定一权阵 P。解法方程，即可得到解缠相位的最小二乘估值：

$$\hat{\Phi}=(A^T PA)^{-1}A^T PL$$

至此，我们可以根据模糊相位，通过最小二乘估值，得到解缠相位。基于误差方程的最小二乘法相位解缠的优势在于有严格的数学描述，但计算效率不高，很难处理图幅较大的图像。

4.2 加权最小二乘的相位解缠

4.2.1 数学描述

不带权的最小二乘法运算速度快，但由于解缠时穿过了相位的不一致区，所以常常造成解缠面的误差。这个缺陷可以通过引入权重来弥补。一般来说，权重数据 $\omega_{i,j}$ 的取值范围是[0,1],权重由相位质量图或其他先验知识所确定。加权重的最小二乘即是求解下式：

$$\min\left\{\sum_{i,j}U_{i,j}(\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}-\Delta^x_{i,j})^2+\sum_{i,j}V_{i,j}(\phi_{1,j+1}-\phi_{i,j}-\Delta^y_{i,j})^2\right\} \tag{3-9}$$

其中梯度权重 $U_{i,j}$ 和 $V_{i,j}$ 定义如下：

$$U_{i,j}=\min(\omega^2{}_{i+1,j},\omega^2{}_{i,j}) \qquad V_{i,j}=\min(\omega^2_{i,j+1},\omega^2_{i,j})$$

这个问题的最小二乘解 $\phi_{i,j}$ 定义为：

$$U_{i,j}(\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j})-U_{i-1,j}(\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j})+V_{i,j}(\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j})- \\ V_{i,j-1}(\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1})=C_{i,j} \tag{3-10}$$

其中，$C_{i,j}$ 是加权相位拉普拉斯操作数，

$$C_{i,j}=U_{i,j}\Delta^x_{i,j}-U_{i-1,j}\Delta^x_{i-1,j}+V_{i,j}\Delta^y_{i,j}-V_{i-1,j}\Delta^x_{i,j-1}$$

对(3-10)式进行整理得：

$$\phi_{i,j}=\frac{U_{i,j}\phi_{i+1,j}+U_{i-1,j}\phi_{i-1,j}+V_{i,j}\phi_{i,j+1}+V_{i,j-1}\phi_{i,j-1}-C_{i,j}}{U_{i,j}+U_{i-1,j}+V_{i,j}+V_{i-1,j}} \tag{3-11}$$

通过对(3-11)进行多次迭代，可求得$\phi_{i,j}$。

将不带权的最小二乘表示为矩阵形式：

$$Ax=b \tag{3-12}$$

最小二乘解即求正交方程

$$A^TAx=A^Tb$$

的解。x 是长度为MN的解缠相位向量，b 是长度为$N(M-1)+M(N-1)$的缠绕相位差向量。

加权最小二乘问题表示为：

$$WA\phi=Wb$$

加权最小二乘的解为：

$$A^TW^TWA\phi=A^TW^TWb$$

令$Q=A^TW^TWA$，$\bar{b}=W^TWb$，$c=A^T\bar{b}$则有

$$Q\phi=c \tag{3-13}$$

(3-13)式是加权最小二乘的矩阵描述。

4.2.2 Picard 迭代法

将(3-13)式中的 Q 分解为 P 和差异阵 D，得

$$Q=P+D$$

代入(3-13)式得

$$(P+D)\phi=c$$

将括号展开得

$$P\phi=c-D\phi \tag{3-14}$$

利用多次迭代求解方程(3-14)

$$P\phi_{k+1} = c - D\phi_k = \rho_k$$

k 为迭代次数，此过程中调用

$$D\phi_k = (Q-P)\phi_K$$

其中 $Q = A^T W^T WA$ 是对加权相位差(3-9)进行操作的离散拉普拉斯算子，$P = A^T A$ 是对不带权的相位差进行操作的拉普拉斯算子。ρ_k 用二维数组表示如下：

$$\rho_{i,j} = c_{i,j} - [U_{i,j}(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) - U_{i-1,j}(\phi_{1,j} - \phi_{-1,j})$$
$$+ V_{i,j}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}) - V_{i,j-1}(\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1})]$$

实施的具体步骤如下：

① 利用初始的权重数据和缠绕相位差计算向量 c;

② 设定最大迭代次数 k_{max}；

③ 设定初始条件，$k = 0, \phi_k = 0$；

④ 计算向量 $\rho_k = c - D\phi_k$；

⑤ 利用 DCT 法求解 $P\phi_{k+1} = \rho_k$；

⑥ 如果 $k < k_{max}$，继续，否则得到最终结果 ϕ_{k+1} ；

⑦ 更新迭代计数器，$k = k+1$；

⑧ 转到④。

Picard 迭代法比较简单，但它收敛速度很慢，因此并不适用。

4.2.3 Pcg 迭代法

Picard 迭代法的缺点就是收敛速度慢，不适合在实际应用中使用，它最大的价值就是引出了 Pcg 迭代法。Pcg 迭代法与 Picard 迭代法非常类似，它也是加权的最小二乘法，首先利用无权的最小二乘法对缠绕相位进行解缠，解缠的结果作为此种迭代法的初值，然后利用 Pcg 迭代对相位进行精确解缠。

4.3 小结

基于最小二乘的相位解缠算法分为带权的最小二乘算法和不带权的最小二乘算法两类。不带权的最小二乘算法主要介绍了基于基本迭代的最小二乘算法、基于 FFT 的最小二乘算法、基于 DCT 的最小二乘算法和基于误差方程的最小二乘算法 4 种；带权的最小二乘算法主要介绍了 Picard 迭代算法和 Pcg 迭代算法两种。带权的最小二乘算法给质量不好的相位一个很小的权，降低了质量不好的相位对整幅解缠图像的影响，因此从精度上来说，带权的最小二乘相位解缠算法的解缠精度高于不带权的最小二乘法的解缠精度。

第五章 在模拟数据上的相位解缠算法比较研究

5.1 概述

本章为相位解缠算法的比较研究，通过一系列的实验，比较了第一类相位解缠算法中的枝切法、Mask-cut 算法、Flynn 算法和第二类算法中的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法、Pcg 算法在解缠精度和解缠效率上的差异。

这些比较实验的过程为：首先模拟一个“圆锥”曲面，此圆锥面上各像元的值就为解缠相位的精确值，然后对此圆锥面上各像元的相位值进行缠绕操作，缠绕结果为本次实验的缠绕相位。在此缠绕相位上分别添加块状高斯噪声和线状高斯噪声，然后分别用枝切法、Mask-cut 算法、Flynn 算法、基于 DCT/FFT 的最小二乘算法和 Pcg 算法解缠此添加了高斯噪声的缠绕相位，比较各种算法解缠结果的差异。

分析以上各种算法解缠结果差异的标准主要有两个，一个标准是解缠时间，解缠时间越短，算法的解缠效率越高，解缠时间越长，算法的解缠效率越低；另一个标准是解缠精度，此解缠精度的高低也用两种标准表示，一种标准是用解缠结果再缠绕后的相位与初始未加高斯噪声时的缠绕相位之差表示，此差越小，表示算法的解缠精度越高，此差越大，表示算法的解缠精度越低；另一种标准是用解缠结果与模型(模拟的圆锥面)相位之差表示，此差越小，表示解缠结果越精确，即算法的解缠精度越高，反之，则表示算法的解缠精度越低。实验过程中将分别考察噪声区域和非噪声区域及整个解缠平面的解缠精度高低。

本次实验比较的对象是第一类相位解缠算法中的枝切法、Mask-cut 算法、Flynn 算法和第二类相位解缠算法中的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法、Pcg 算法。本次实验的目的是比较并分析两类算法相位解缠的特点和差异。本次相位解缠算法比较实验的顺序依次为枝切法与不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的比较、枝切法与 Pcg 算法的比较、Mask-cut 算法与带权的基于 DCT/FFT 算法的比较、Mask-cut 算法与 Pcg 算法的比较、Flynn 算法与基于 DCT/FFT 算法的比较、Flynn 算法与 Pcg 算法的比较。

5.2 实验数据简介

本次实验的数据为模拟数据。通过数学方法模拟一个圆锥曲面，此曲面上各像元对应的值即为精确的解缠相位值，图 5-1 为此模拟曲面的二维平面显示，在此模型上，从四周到中央解缠相位的值逐渐增大，值由 0 逐渐增大到 2π。图 5-2 为与模拟的解缠相位图像对应的缠绕相位图像，由于解缠相位的值位于区间[0，2π]，因此图像 5-2 缠绕相位的值位于区间[-π，π]。图 5-3 为在缠绕相位平面上添加了块状和线状高斯噪声的缠绕相位图像，块状噪声区域位于图像的左上方，块状噪声和线状噪声所在的区域统称
区。

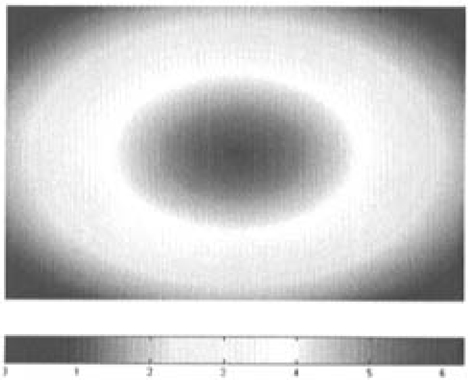


图 5-1 圆锥模型解缠相位图

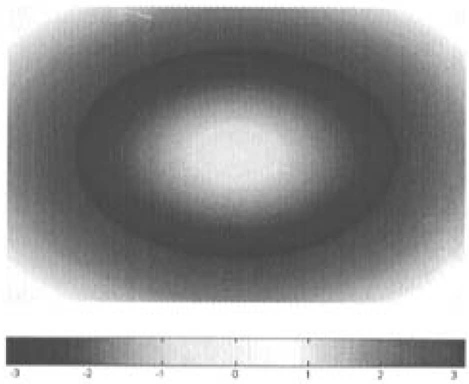


图 5-2 圆锥模型缠绕相位图

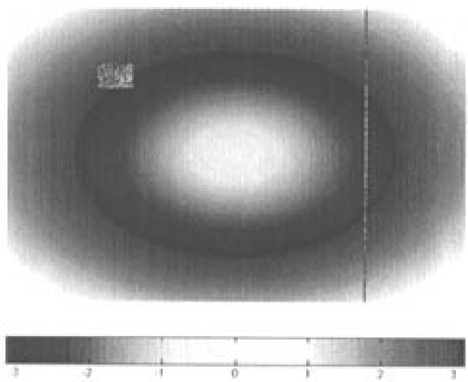


图 5-3 在图 5-2 上添加了块状和线状噪声的缠绕相位图

5.3 枝切法与不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘法比较

枝切法是典型的基于路径跟踪的相位解缠算法，这种算法不需要质量图引导就可以完成相位解缠操作，

它的基本思想是通过积分相邻像元的差分相位实现相位解缠。不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘法是典型的基于最小二乘的相位解缠算法，这种算法也不需要质量图引导就可以完成相位解缠操作，它的基本思想是使解缠平面相邻像元之间的相位梯度与缠绕相位平面相邻像元之间的相位梯度之差的平方最小。

以上简单回顾了一下这两种相位解缠算法解缠思想的差异，现在我们开始比较这两种算法在解缠结果上的差异。图像 5-4 和图像 5-5 分别为枝切法和不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠图像 5-3 所示缠绕相位的解缠结果。从解缠图像上看，两种算法的解缠结果差别不大，为了研究

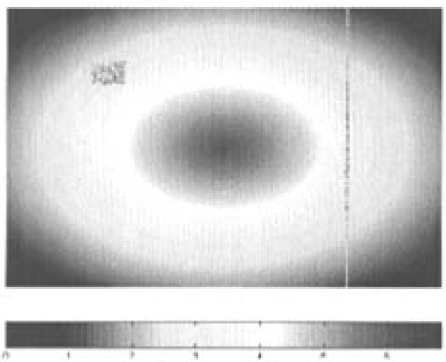


图 5-4　枝切法解缠图 5-3 所示相位的结果

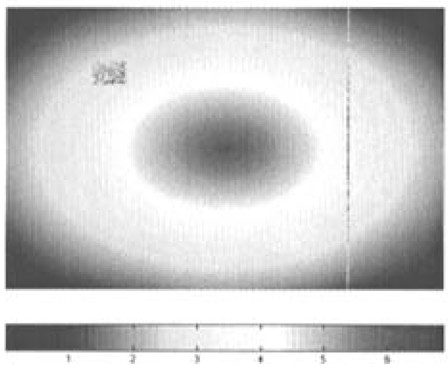


图 5-5 不带权基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠图 5-3 所示相位的结果

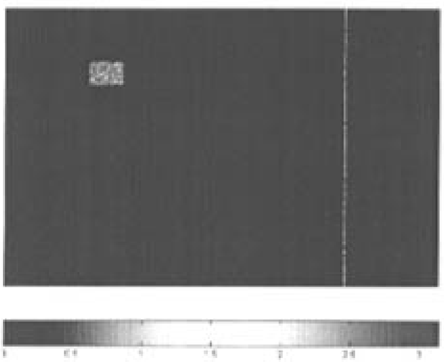


图 5-6 图 5-4 与图 5-1 所示相位之差

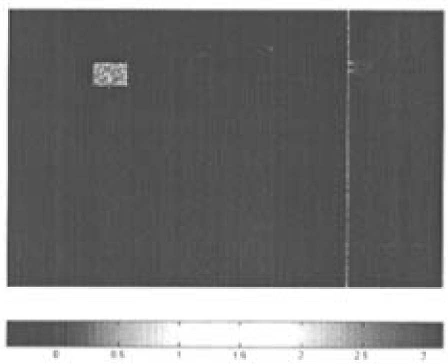


图 5-7 图 5-5 与图 5-1 所示相位之差

他们的差别，现将他们分别与模型的精确解缠相位(图 5-1 所示)求差，图 5-6 与图 5-7 分别为图 5-4 所示相位与图 5-1 所示相位之差和图 5-5 与图 5-1 所示相位之差。

为了深入研究图像 5-6 和图像 5-7 的相位差异，下面对图像 5-6 和图像 5-7 的噪声区和非噪声区的相位值分别做统计，图像 5-8 和图像 5-9 分别为图像 5-6 和图像 5-7 在噪声区的相位值分布的统计条形图，横坐标为相位值的大小，纵坐标为等于这些相位值的像元占整个噪声区的像元的百分比。对比图 5-8 和图 5-9，这两幅图相差很小，这说明枝切法和不带权的

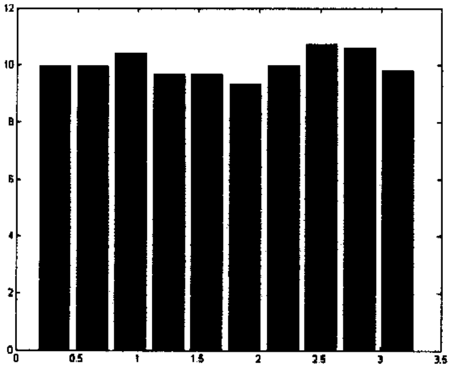


图 5-8 图像 5-6 噪声区的值大小分布统计

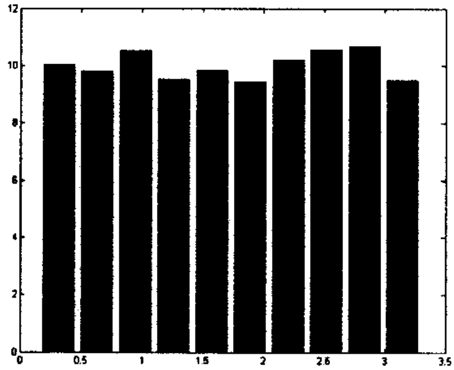


图 5-9 图像 5-7 噪声区的值大小分布统计

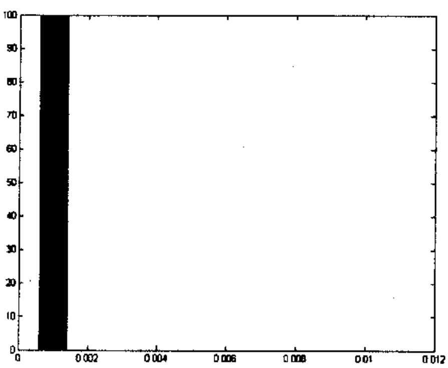


图 5-10 图像 5-6 非噪声区值大小分布统计图

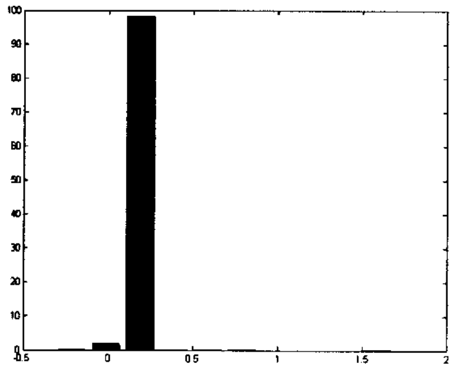


图 5-11 图像 5-7 非噪声区值大小分布统计图

基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠低信噪比的相位的精度相同。

以上比较研究了这两种算法对噪声区域内的相位的解缠精度问题，下面开始研究这两种算法对非噪声区域内的相位解缠精度问题。图像 5-10 和图像 5-11 分别为图像 5-6 和图像 5-7 在非噪声区内的相位值的统计条形图。在图像 5-10 上，100%的相位值为 0，在图像 5-11 上，超过 98%的值位于区间[0.1,0.3]上，将近 1%的相位值为 0，另有约 1%的相位值位于区间[0.3,1.7]上，这些统计数据说明枝切法对信噪比高相位的解缠精度比不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度高。

通过以上对比分析可以得出两个结论：第一，不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对信噪比低的相位的解缠精度与枝切法对这些相位的解缠精度相同；第二，枝切法对信噪比高的相位的解缠精度高于不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度。

以上分别通过枝切法和基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠结果与精确解缠相位求差来比较研究了这两种算法的解缠精度高低，下面将通过将这两种算法的解缠结果进行再缠绕操作，然后把再缠绕后的相位与模型的缠绕相位进行求差来继续研究这两种算法解缠的精度高低。

图 5-12 和图 5-13 分别为图 5-4 和图 5-5 进行再缠绕后的结果。图 5-14 和图 5-15 分别为图 5-12 和图 5-13 的相位与图 5-2 的相位求差的结果。为

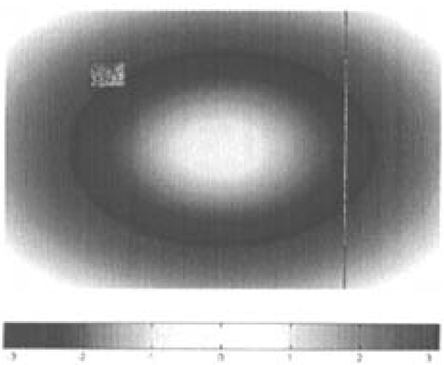


图 5-12 图 5-4 再缠绕后的结果

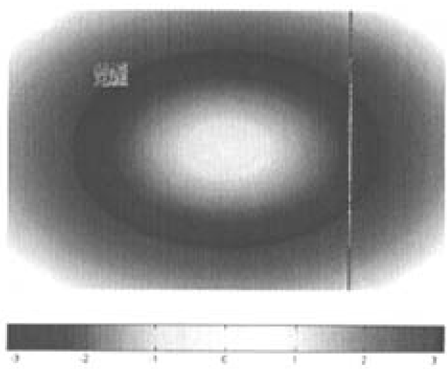


图 5-13 图 5-5 再缠绕后的结果

了深入研究图 5-14 和图 5-15 的差别，下面分别对图 5-14 和图 5-15 所示的

相位进行统计，图 5-16 和图 5-17 分别为图 5-14 和图 5-15 所示相位的统计图，其中横坐标表示相位值的大小，纵坐标表示等于横坐标所示相位值的像元占整幅影像像元的百分比。对比图像 5-16 和图像 5-17，在图像 5-16

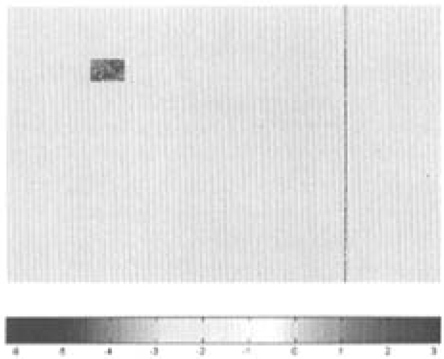


图 5-14　图 5-12 与图 5-2 值之差

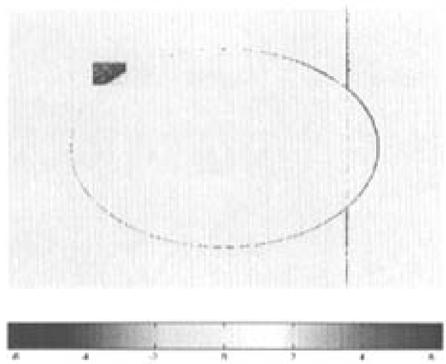


图 5-15　图 5-13 与图 5-2 值之差

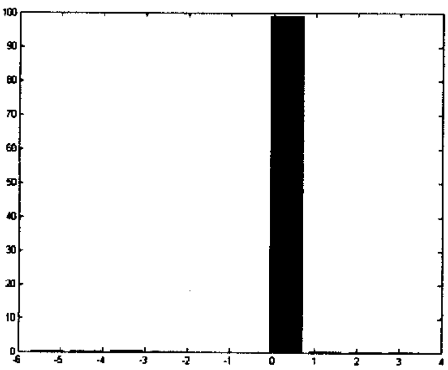


图 5-16　图 5-14 中的值的大小分布统计图

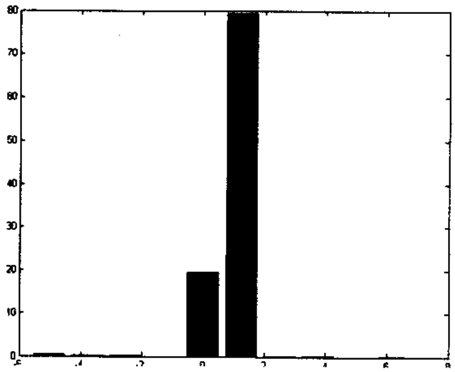


图 5-17　图 5-15 中的值的大小分布统计图

中，超过 99%的相位值约为 0；在图 5-17 中，将近 20%的值约为 0，将近 80%的值在区间[1，2 上，这些数据表明，利用枝切法解缠的解缠相位更能忠实的恢复原始相位函数，即从整体上来说，枝切法解缠图 5-3 所示缠绕相位的精度高于不带权的基于 DCT/FFT 最小二乘相位解缠算法解缠这些相位的精度。

以上通过比较研究了枝切法和基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠精度的问题，下面来研究这两种算法的解缠效率。表 5-1 列举了相同的条件下，这两种算法的解缠时间。通过对比发现，枝切法的解缠时间比不带权

表 5-1 枝切法与不带权的 DCT/FFT 最小二乘算法

解缠算法	图像大小	解缠时间
枝切法	513×513	0.4530
DCT/FFT 算法	513×513	0.6570

的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠时间短，因此，枝切法的解缠效率高于基于 DCT/FFT 的最小二乘算法。

通过以上对枝切法和不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法在解缠精度和解缠效率上的研究，得出以下结论：枝切法对信噪比高的相位的解缠精度高于不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度；枝切法对信噪比低的相位的解缠精度于不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度相同；枝切法的解缠效率高于不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠效率。

5.4 枝切法和 Pcg 算法的比较

枝切法和 Pcg 算法在解缠思想上是不同的，前者通过路径积分的方法实现相位解缠，后者通过整体拟合的算法实现相位解缠。现在我们来具体研究一下这两种算法在解缠精度上的差异。图 5-18 为枝切法解缠图像 5-3 所示缠绕相位的结果，图像 5-19 为 Pcg 算法解缠图像 5-3 所示缠绕相位的结果。对比图 5-18 和图 5-19，在图 5-18 上，噪声区凌乱的相位比较明显，而在图 5-19 上，噪声区的相位比较规则，无法明显看出噪声的痕迹。

为了进一步研究图像 5-18 和图像 5-19 的精度，下面分别使这两幅图像的相位值与精确解缠相位图像 5-1 对应的相位值求差，然后依据这些相位差值来研究枝切法和 Pcg 算法的解缠精度问题。图像 5-20 和图像 5-21 分别为图像 5-18 与图像 5-1 的值求差的结果和图像 5-19 与图像 5-1 求差的结果。对比图像 5-18 和图像 5-19，这两幅图像差别明显，在块状噪声区域

和线性噪声的右方区域差别特别明显。

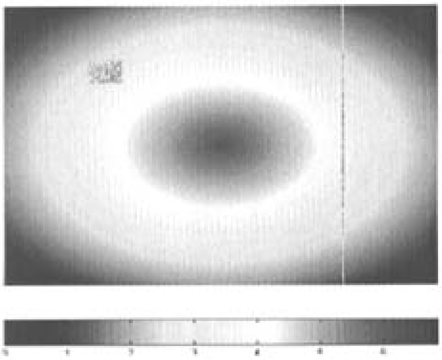


图 5-18 枝切法解缠图像 5-3 所示相位的结果

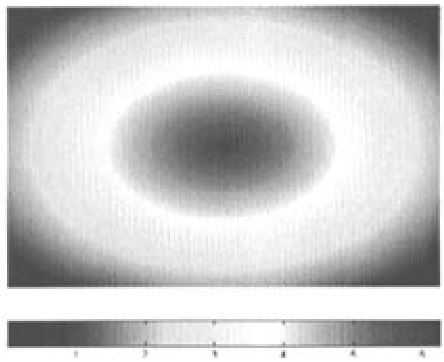


图 5-19 Pcg 算法解缠图像 5-3 所示相位的结果

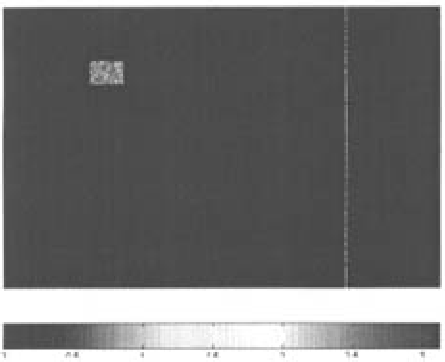


图 5-20 图 5-28 与图 5-1 对应的相位之差

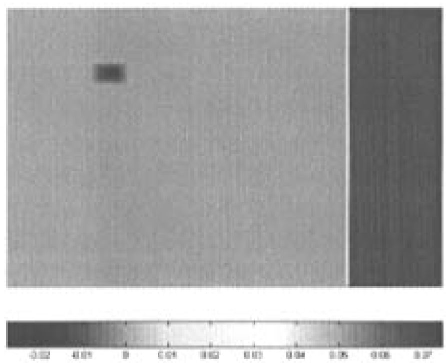
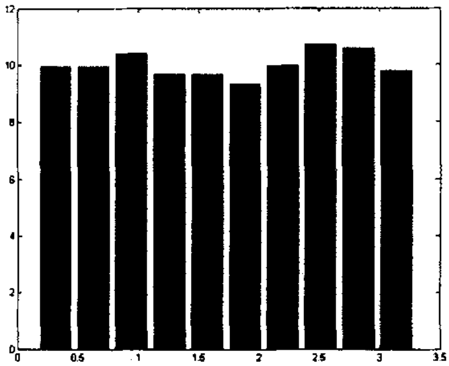
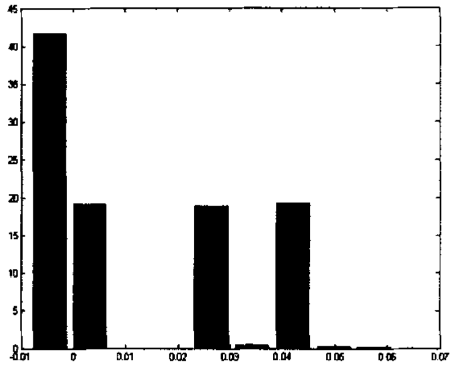


图 5-21 图 5-19 与图 5-1 对应的相位之差

为了深入研究图像 5-20 和图像 5-21 的差别，下面分别对这两幅图像中的噪声区和非噪声区内的相位值做统计。图像 5-22 为图像 5-20 中噪声区内的相位差值的统计条形图，图像 5-23 为图像 5-21 中噪声区内的相位差值的统计条形图，其中横坐标表示相位值的大小，纵坐标表示等于这些值的像元所占整个噪声区像元的百分比。对比图 5-22 和图 5-23，在图像 5-22 上，值比较均匀的分布在区间[0,3.5]之间，绝对值大于 2.5 的值约 30%，绝对值小于 2.5 的值约 70%，而图像 5-23 上约 42%的相位值在区间[-0.01,0]



图像 5-22 图 5-20 中噪声区内的相位差值的统计图



图像 5-23 图 5-21 中噪声区内的相位差值的统计图

上，约 18%的相位值在区间[0,0.01]上，约 20%的相位值在区间[0.02,0.03]上，还有约 20%的相位值在区间[0.04,0.05]上，以上统计数据说明在噪声区，Pcg 算法的解缠结果更接近精确的相位解缠结果，即 Pcg 算法对信噪比低的相位的解缠精度高于枝切法对这些相位的解缠精度。

以上研究了枝切法和 Pcg 算法对信噪比低的相位的解缠精度问题，下面研究枝切法和 Pcg 算法对信噪比高的相位的解缠精度问题。图像 5-24 和图像 5-25 分别为图像 5-20 和图像 5-21 中非噪声区的相位差值的统计图。

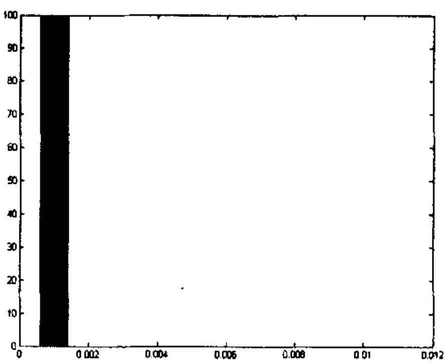


图 5-24 图 5-20 中非噪声区的值的统计图

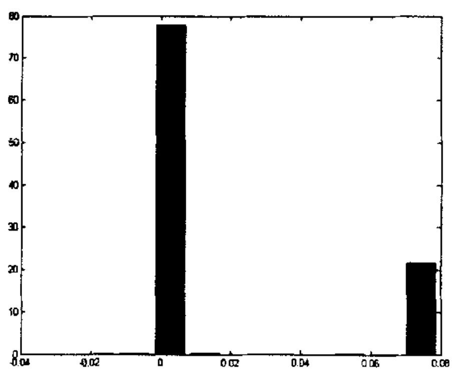


图 5-25 图 5-21 中非噪声区的值的统计图

在图 5-24 中，约 100%的相位值等于 0；在图 5-25 中，约 78%的相位值等于 0，约 22%的相位值位于区间[0.06,0.08]，以上统计数据说明图 5-18 的

相位数据更接近精确相位数据，即枝切法解缠信噪比高的相位的解缠精度高于 Pcg 算法解缠这些相位的精度。

以上通过对带噪声的相位进行解缠，然后把解缠相位与精确解缠相位求差，通过对此相位差的统计来研究了枝切法和 Pcg 算法的解缠精度高低，下面将在缠绕相位上继续比较研究这两种算法的解缠精度问题。

图 5-26 和图 5-27 分别为图 5-18 和图 5-19 再缠绕的结果。对比图 5-26

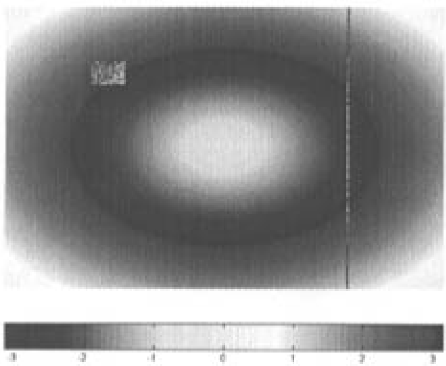


图 5-26　图 5-18 再缠绕的结果

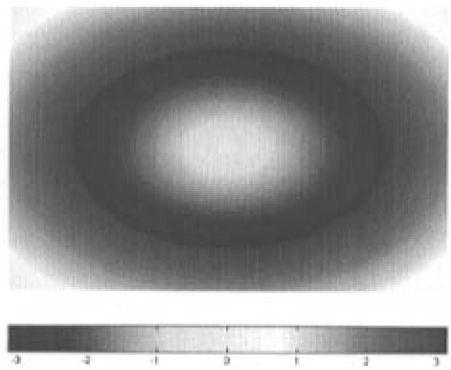


图 5-27　图 5-19 再缠绕的结果

和图 5-27，图 5-26 上噪声区域的噪声明显，而图 5-27 上噪声区域的噪声不明显。

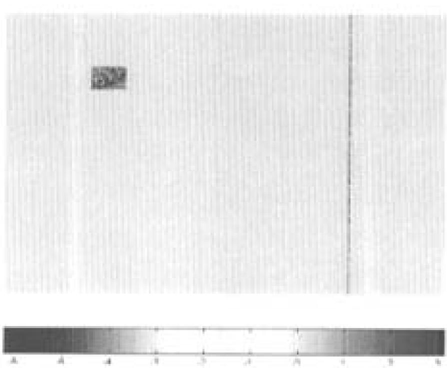


图 5-28　图 5-26 与图 5-2 相位之差

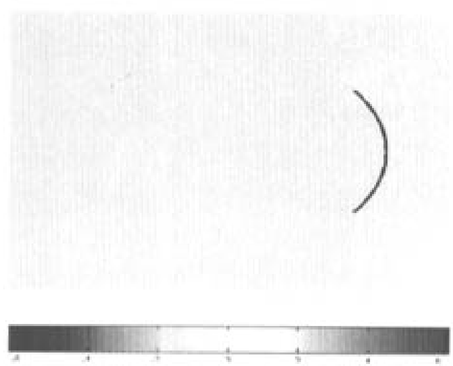


图 5-29　图 5-27 与图 5-2 相位之差

为了深入研究图 5-26 和图 5-27 的差别，下面分别将图像 5-26 和图像 5-27 的相位值与图像 5-2 对应的的相位值求差，然后对这些相位差值进行统计。图 5-28 和图 5-29 分别为图 5-26 和图 5-27 的相位与图 5-2 对应的相位求差的结果。图像 5-30 和图像 5-31 分别为图像 5-28 和图像 5-29 中相位值的统计图。横坐标表示相位差值的大小，纵坐标表示等于这些相位差值的像元占所有像元的百分比。对比这两幅图，在图 5-30 中，超过 99%的相

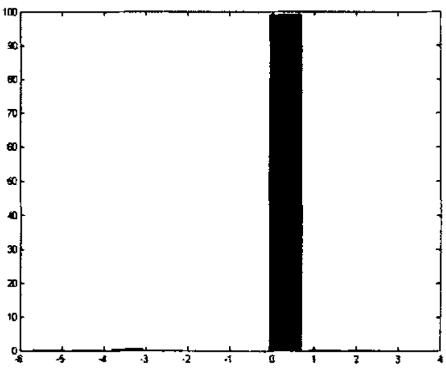


图 5-30 图 5-28 中相位统计图

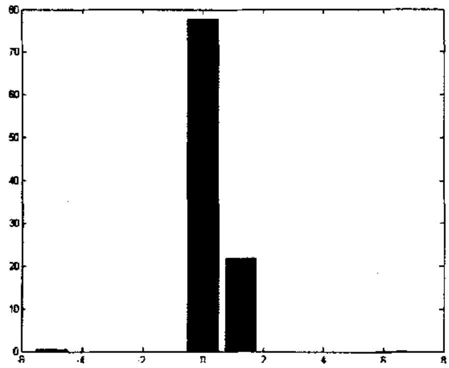


图 5-31 图 5-29 中相位统计图

位值约为 0，而在图 5-31 中，超过 78%的相位值约为 0，约 22%的相位值位于区间[1,2]上，这说明在整体上，枝切法解缠图像 5-3 所示相位的精度高于 Pcg 算法解缠这些相位的精度。

以上比较研究了枝切法和 Pcg 算法的解缠精度问题，下面将研究这两种算法的解缠效率问题。表 5-2 对比了这两种算法在解缠图 5-3 所示的缠绕相位时的解缠时间，通过对比可以知道，枝切法的解缠时间比 Pcg 算法短，因此说枝切法的解缠效率高于 Pcg 算法。

表 5-2 枝切法与 pcg 算法解缠时间表

解缠算法	图像大小	解缠时间（秒）
枝切法	513×513	0.4530
pcg 算法	513×513	0.8750

通过以上的研究我们可以得出以下结论：枝切法对信噪比低的相位的

解缠精度比 Pcg 算法对这些相位的解缠精度低；枝切法对信噪比高的相位的解缠精度稍高于 Pcg 算法对这些相位的解缠精度；枝切法的解缠效率高于 Pcg 算法。

5.5 Mask-cut 算法与带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法比较

Mask-cut 算法属于路径跟踪的相位解缠算法，它通过质量图指导，从残留点出发，穿过低质量区形成像元掩模(mask)，然后在非像元掩模区域采用积分的算法解缠相位；带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法，通过质量图给低质量区的相位一个非常小的权，而给高质量区的相位一个比较大的权，从而避免解缠过程中低质量区的相位对高质量区的相位形成较大的影响，然后通过整体拟合的算法来解缠相位。

以上比较了这两种算法在解缠思想和过程上的差别，下面通过对这两种算法解缠结果的比较来研究这两种算法在解缠精度上的差异。

图 5-30 和图 5-31 分别为 Mask-Cut 算法和带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠图 5-3 所示缠绕相位的结果。为了深入比较研究这两种算法解缠结果的精度，分别将图 5-30 和图 5-31 所示的相位与图 5-1 所示的精确解缠相位求差，图 5-32 和图 5-33 分别为图 5-31 与图 5-1 求差的结果和图 5-32 与图 5-1 求差的结果。

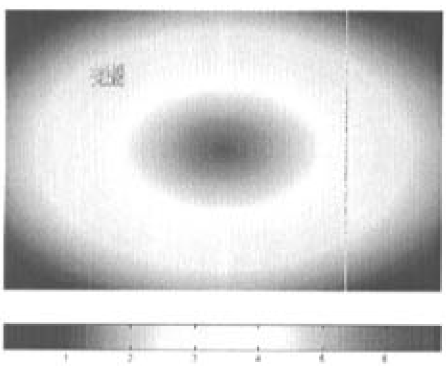


图 5-30 Mask-Cut 算法解缠的结果

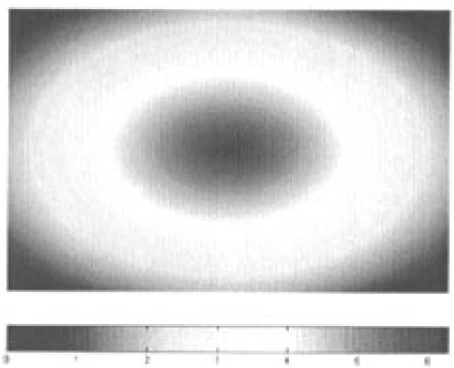


图 5-31 带权的基于 DCT/FFT 算法解缠的结果

为了详细的说明图 5-32 和图 5-33 的差别，分别对图 5-32 和图 5-33 上噪声区和非噪声区各像元上的相位值做统计，图 5-34 和图 5-35 分别为

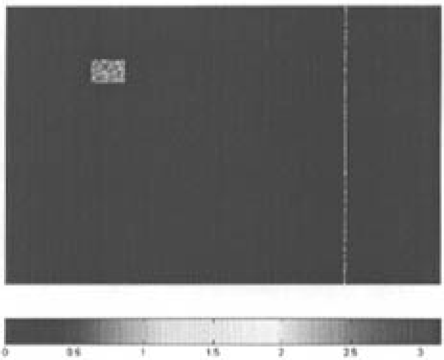


图 5-32　图像 5-30 与图像 5-1 对应的相位值之差

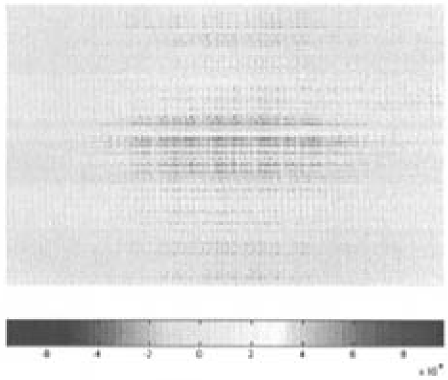


图 5-33　图像 5-31 与图像 5-1 对应的相位值之差

图 5-32 和图 5-33 噪声区内的相位值的统计条形图。在图 5-34 中，相

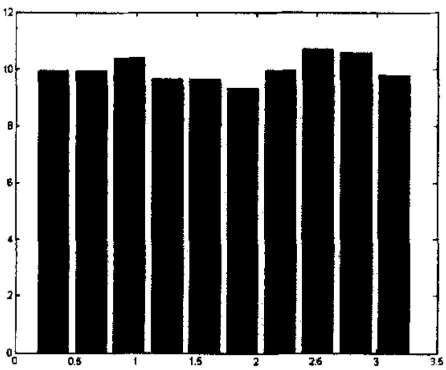


图 5-34　图像 5-32 噪声区内的相位统计

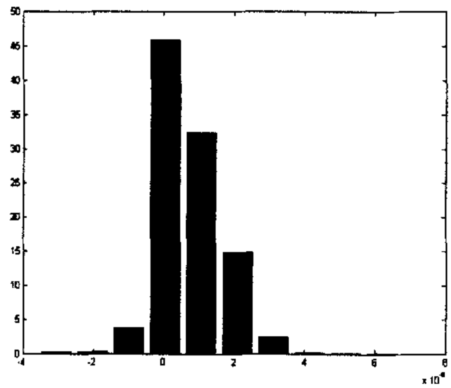


图 5-35　图像 5-33 噪声区内的相位统计

位差值低于 0.5 的像元约占噪声区像元的 10%，而在图 5-35 中，相位差值低于 0.5 的像元约占噪声区像元的 100%，这些数据说明图 5-31 中噪声区内的相位更接近图 5-1 中噪声区内的精确解缠相位，即带权的基于

DCT/FFT 的最小二乘算法解缠信噪比低的相位的精度高于 Mask-Cut 算法解缠这些相位的精度。

以上通过比较研究了 Mask-Cut 算法和带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对信噪比低的相位的解缠精度问题，下面将研究这两种算法对信噪比高的相位的解缠精度问题。

图 5-36 和图 5-37 分别为图 5-32 和图 5-33 中非噪声区内的相位的统计图。图 5-36 中超过 95%的值位于区间$[0.05\times10^{-6},0.15\times10^{-6}]$之间，而图 5-37 中超过 98%的值位于区间$[-2\times10^{-6},4\times10^{-6}]$之间，因此，Mask-Cut 算法对信噪比高的相位的解缠精度比带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度高。

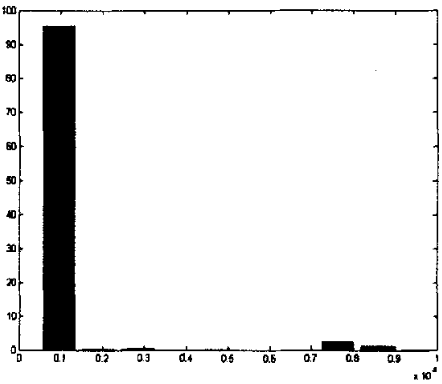


图 5-36　图 5-32 非噪声区中的值的大小的统计图

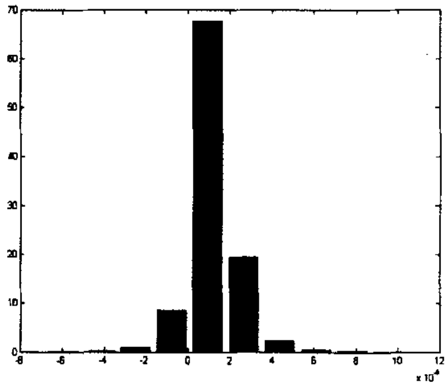


图 5-37　图 5-33 非噪声区中的值的大小的统计图

以上通过 Mask-Cut 算法和带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠相位与精确解缠相位之差研究了这两种算法的解缠精度问题。下面通过这两种算法的解缠相位的再缠绕相位与模型的缠绕相位之差来继续研究这两种算法的解缠精度问题。

图 5-38 和图 5-39 分别为图 5-30 和图 5-31 所示相位进行再缠绕操作后的相位。图 5-40 与图 5-41 分别为图 5-38 与图 5-2 对应的相位值之差和

图 5-39 与图 5-2 对应的相位值之差，从图像上看，图 5-38 与图 5-39 差别

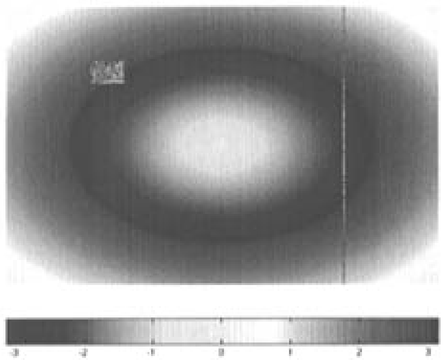


图 5-38　图 5-30 进行再缠绕后的相位

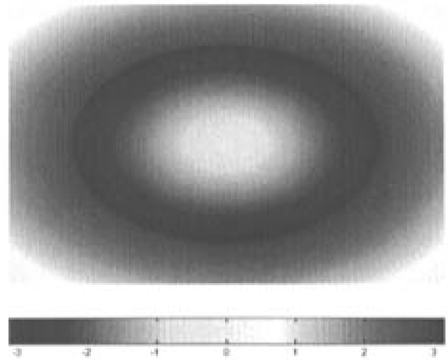


图 5-39　图 5-31 进行再缠绕后的相位

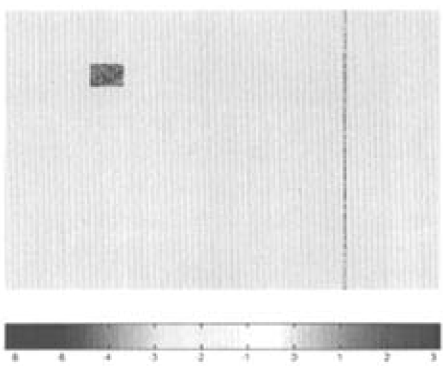


图 5-40　图 5-38 与图 5-2 对应的相位之差

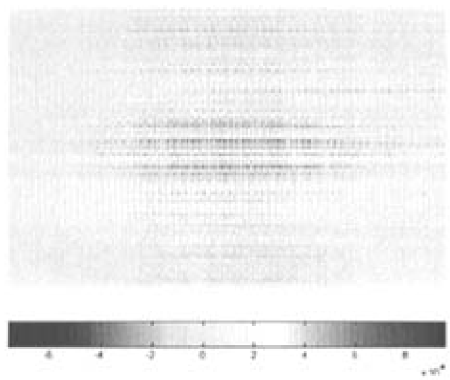


图 5-41　图 5-39 与图 5-2 对应的相位之差

比较大。为了深入研究它们的差别，下面分别对图像 5-40 和图像 5-41 各像元上的相位值进行统计，图 5-42 为图 5-40 上相位值的统计图，图 5-43 为图 5-41 上相位值的统计图，由图 5-42 和图 5-43 可知， 图 5-42 上超过 99%的相位值的绝对值为 0，而图 5-41 上接近 99%的相位值绝对值在区间 $[0,5\times10^{-6}]$上，其余的相位值的绝对值都小于 10^{-5}，由此可知，在整体上 Mask-Cut 算法解缠图像 5-3 所示缠绕相位的解缠精度高于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠这些相位的解缠精度。

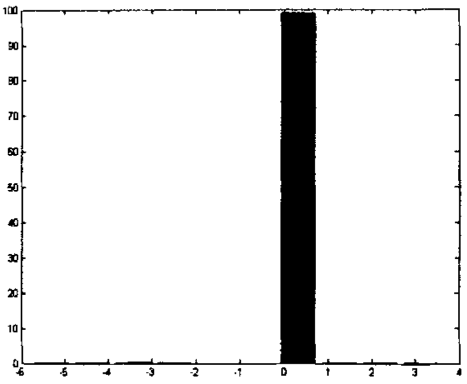


图 5-42 图 5-40 上的相位统计图

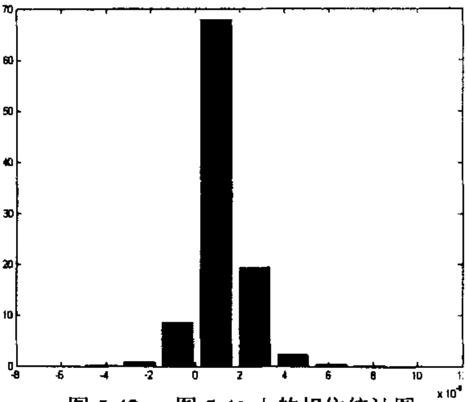


图 5-43 图 5-41 上的相位统计图

以上通过两种方法研究了 Mask-Cut 算法和带权的基于 DCT/FFT 的相位解缠算法的解缠精度问题，下面开始研究这两种算法的解缠效率问题。表 5-3 比较了 Mask-Cut 算法和带权的基于 DCT/FFT 的相位解缠算法解缠图像 5-3 的时间，通过表 5-3 可知，Mask-Cut 算法的解缠时间比带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法长，因此，带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠效率比 Mask-Cut 算法的解缠效率高。

表 5-3 Mask-Cut 算法与 WDCT/FFT 算法解缠时间表

解缠算法	图像大小	解缠时间（秒）
Mask-Cut 算法	513×513	1.6250
EDCT/FFT 算法	513×513	1.266

WDCT/FFT: 带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法

通过以上的比较研究，我们得出以下结论：Mask-Cut 算法解缠信噪比低的相位的解缠精度低于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度；Mask-Cut 算法解缠信噪比高的相位的解缠精度高于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度；Mask-Cut 算法的解缠效率低于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠效率。

5.6 Mask-Cut 算法与 Pcg 算法比较

Mask-Cut 算法和 Pcg 算法分别属于第一类基于路径跟踪的相位解缠算法和第二类基于最小二乘的相位解缠算法。Mask-Cut 算法通过积分相邻像元上的差分相位来实现相位解缠，而 Pcg 算法通过整体拟合的方式来实现相位解缠。下面我们开始研究这两种算法的解缠精度问题。

图 5-44 和图 5-45 分别为 Mask-Cut 算法和 Pcg 算法的解缠结果。下面

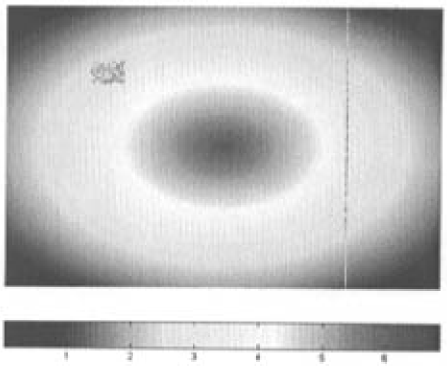


图 5-44 Mask-Cut 算法解缠的结果

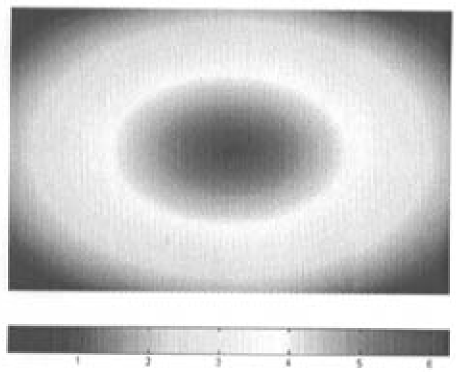


图 5-45 Pcg 算法解缠结果

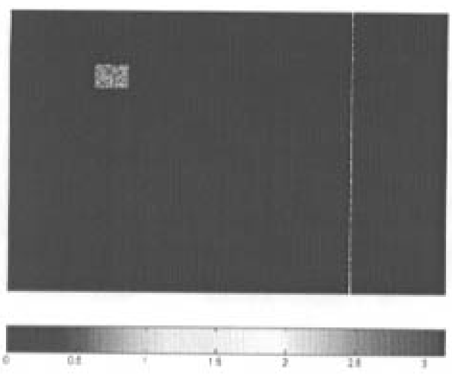


图 5-46 图 5-44 与图 5-1 对应相位之差

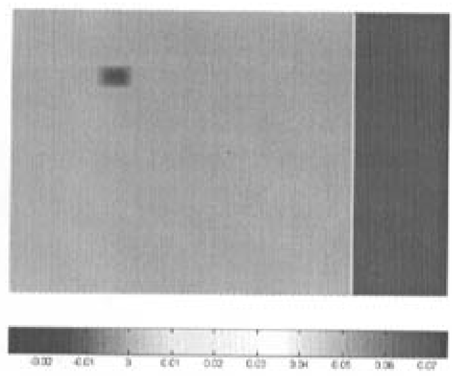


图 5-47 图 5-45 与图 5-1 对应相位之差

通过这两种算法的解缠结果与精确解缠结果求差来研究这两种算法的解缠精度。图 5-46 和图 5-47 分别为图 5-44 与图 5-1 的对应的相位值之差和

图 5-45 与图 5-1 对应的相位值之差。下面分别对图像 5-46 和图像 5-47 的噪声区和非噪声区内的相位值进行统计，图像 5-48 为图像 5-46 噪声区内相位值的统计图，图像 5-49 为图像 5-47 噪声区内相位值的统计图。

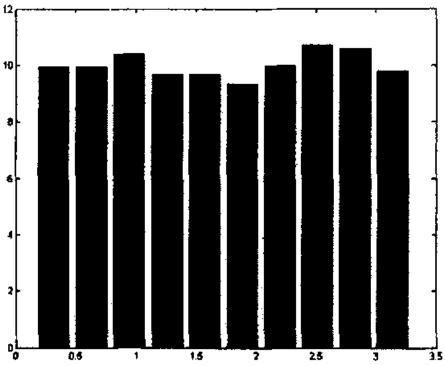


图 5-48　图 5-46 噪声区内相位值统计图

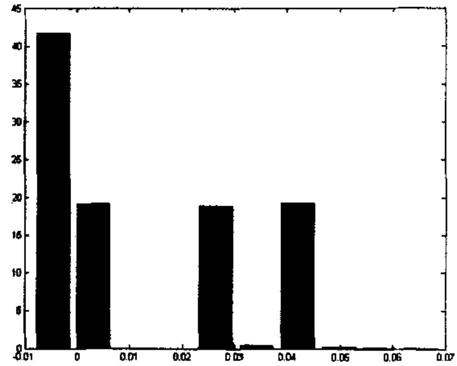


图 5-49　图 5-47 噪声区内相位值统计图

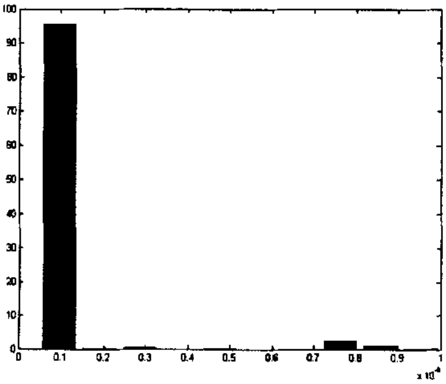


图 5-50　图 5-46 非噪声区内相位值统计图

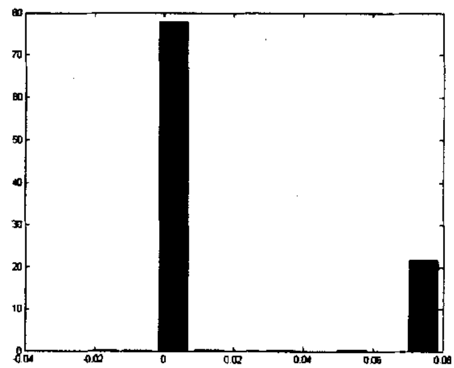


图 5-51　图 5-47 非噪声区内相位值统计图

图 5-48 和图 5-49 相差比较大，图 5-48 中绝对值相位低于 0.5 的像元约占整个噪声区域像元的 10%，而图 5-49 中相位绝对值低于 0.5 像元约占整个噪声区域像元的 100%，这说明 Mask-Cut 算法比 Pcg 算法对信噪比低的相位的解缠精度低。

以上比较了 Mask-Cut 算法和 Pcg 算法对信噪比低的相位的解缠精度问题，下面比较这两种算法对信噪比高的相位的解缠精度高低。图 5-50 和图 5-51 分别为图 5-46 和图 5-47 非噪声区内相位值的统计值。在图 5-50

中，超过96%的值位于接近于0，另有3%的值位于区间[0.7×10^{-6}，0.8×10^{-6}]上，接近1%的值位于区间[0.8×10^{-6}，0.9×10^{-6}]上，而在图5-51中，约78%的值位于区间[-0.02,0.02]上，20%的值位于区间[0.06,0.08]上，因此，图5-44非噪声区域的相位更接近图5-1所示的精确解缠相位，即Mask-Cut算法对信噪比高的相位的解缠精度比Pcg算法对这些相位的解缠精度高。

以上通过Mask-Cut算法和Pcg算法的解缠相位与模型的精确解缠相位之差研究了这两种算法的解缠精度问题，下面通过将这两种算法的解缠相位进行再缠绕，然后与模型的缠绕相位求差来继续比较研究这两种算法的解缠精度问题。

图5-52和图5-53分别为图像5-44和图像5-45进行再缠绕后的相位

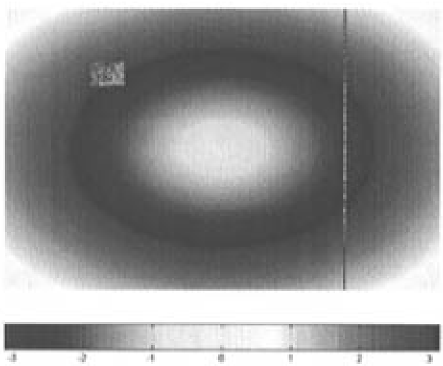


图5-52 图5-44进行再缠绕后的相位图像

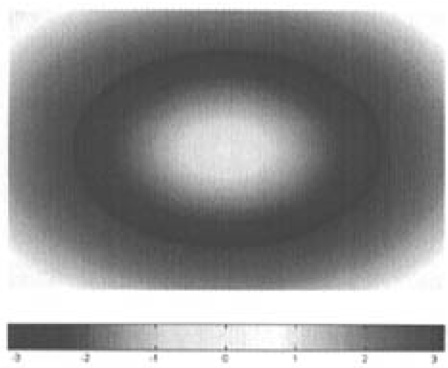


图5-53 图5-45进行再缠绕后的相位图像

图像。为了研究这两幅图像的差别，下面分别将这两幅图像的相位值与图像5-2所示的相位值求差。图像5-54与图像5-55分别为图像5-52与图像5-2对应的相位值求差的结果和图像5-53与图像5-2对应的相位值求差的结果。为了研究图像5-54和图像5-55的差别，下面分别对图像5-54和图像5-55的相位值进行统计，图5-56和图5-57分别为图5-54和图5-55的相位值进行统计的结果。在图5-56上，超过99%的相位值约为零，而在图5-57上，约78%的相位值约为零，约22%的值在区间[0,2]上，以上数据说

明图 5-52 所示的相位更忠实的恢复了原始缠绕相位，即说明在整体上，

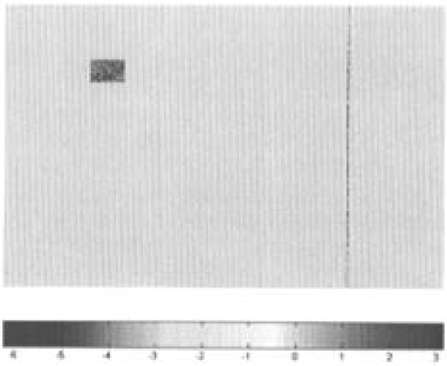


图 5-54　图 5-52 与图 5-2 所示相位之差

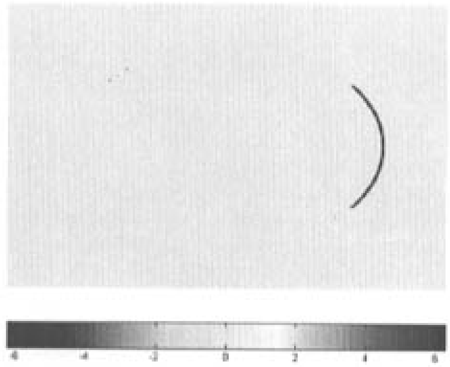


图 5-55　图 5-53 与图 5-2 所示相位之差

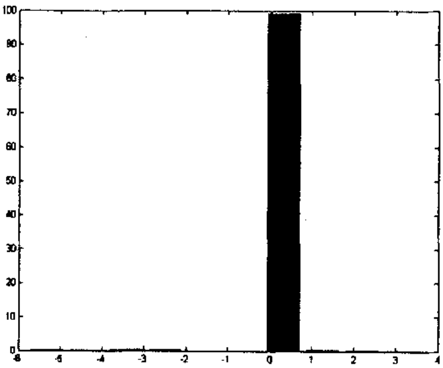


图 5-56　图 5-54 的相位值统计图

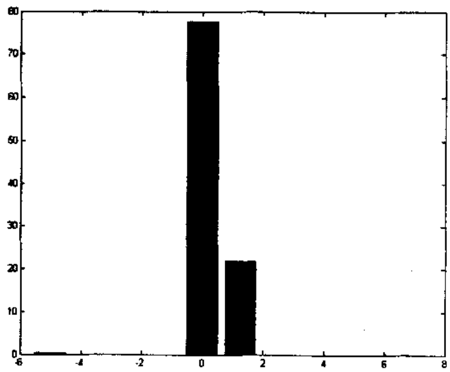


图 5-57　图 5-55 的相位值统计图

Mask-Cut 算法解缠图 5-3 的解缠相位比 Pcg 算法解缠图 5-3 的解缠相位更精确。

表 5-4 Mask-Cut 算法与 Pcg 算法解缠时间表

解缠算法	图像大小	解缠时间（秒）
Mask-Cut 算法	513×513	1.6250
Pcg 算法	513×513	0.8750

以上研究了 Mask-Cut 算法和 Pcg 算法的解缠精度问题，下面将研究这两种算法的解缠效率问题。表 5-4 比较了这两种算法解缠图 5-3 所示相位的解缠时间，通过表 5-4 可以知道，Pcg 算法的解缠时间比 Mask-Cut 算法的解缠时间短，因此说，Pcg 算法的解缠效率比 Mask-Cut 算法的解缠效率高。

以上比较了 Mask-Cut 算法和 Pcg 算法的解缠精度和解缠效率，通过以上的比较得出以下结论：Mask-Cut 算法比 Pcg 算法解缠信噪比低的相位的解缠精度低；Mask-Cut 算法比 Pcg 算法解缠信噪比高的相位的解缠精度高；在整体上，Mask-Cut 算法解缠图 5-3 所示缠绕相位的解缠精度比 Pcg 算法解缠图 5-3 所示缠绕相位的精度高；Pcg 算法的解缠效率比 Mask-Cut 算法的解缠效率高。

5.7 Flynn 算法与带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法比较

Flynn 算法属于第一类的相位解缠算法，带权的基于 DCT/FFT 的最小

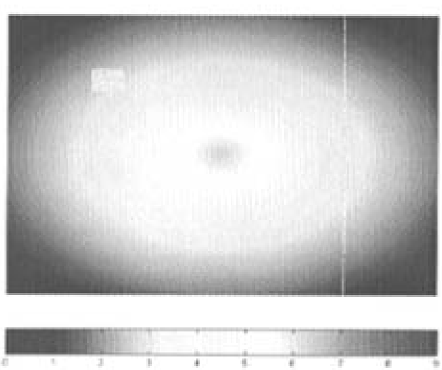


图 5-58 Flynn 算法解缠结果

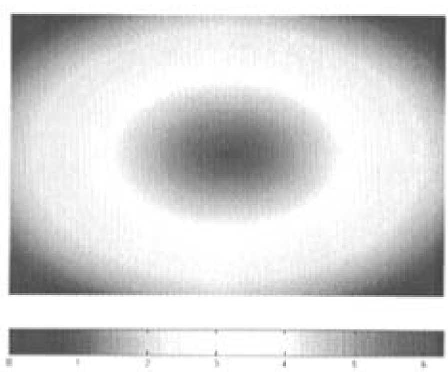


图 5-59 带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠结果

二乘算法属于第二类的相位解缠算法，下面开始比较这两类算法的解缠精度。图 5-58 和图 5-59 分别为 Flynn 算法和带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠图 5-3 所示缠绕相位的解缠结果。

为了深入研究图像 5-58 和图像 5-59 的差别，下面分别将图像 5-58 和图像 5-59 所示相位与图像 5-1 所示解缠相位求差，依据此相位差来研究图像 5-58 和图像 5-59 的差别。图像 5-60 和图像 5-61 分别为图像 5-58 与图

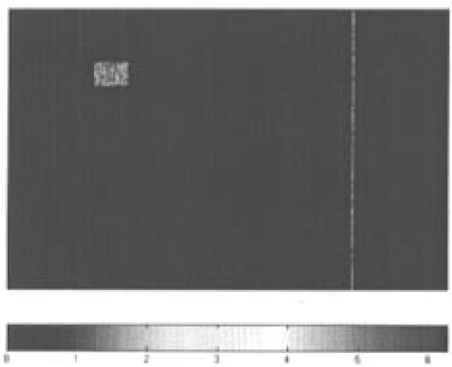


图 5-60 图像 5-58 与图像 5-1 相位值之差

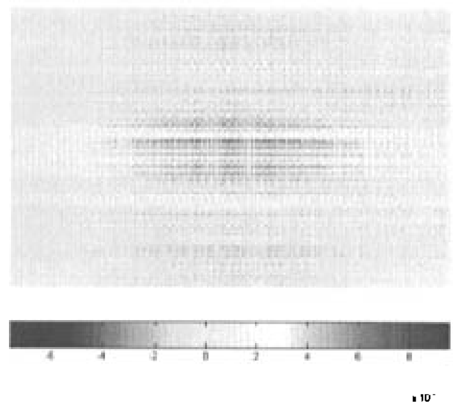


图 5-61 图像 5-59 与图像 5-1 相位值之差

像 5-1 对应的相位之差和图像 5-59 与图像 5-1 对应的相位之差。从整体上看，图像 5-60 大部分地区的相位差值接近于 0，而图像 5-61 大部分地区不为 0。

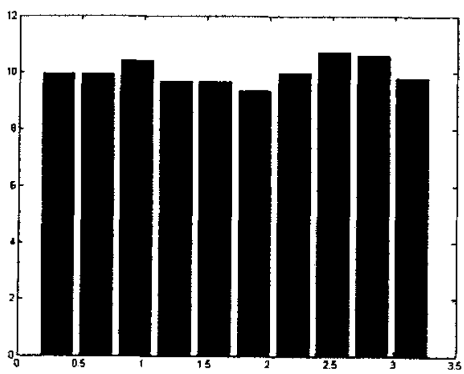


图 5-62 图像 5-560 噪声区内相位值统计

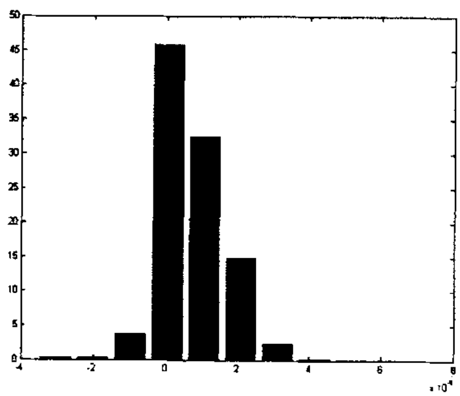


图 5-63 图像 5-51 噪声区内相位值统计图

为了精确的研究图像 5-60 和图像 5-61 的差别，下面分别对图像 5-60

和图像 5-61 的噪声区和非噪声区的相位差值做统计。图像 5-62 和图像 5-63 分别为图像 5-60 和图像 5-61 噪声区内相位值的统计图，横坐标表示相位差值的大小，纵坐标表示等于这些相位值的像元占整个噪声区像元的百分比。在图像 5-62 中绝对值小于 1 的相位差值约占 30%，绝对值大于 1 且小于 2 的相位差值约占 30%，绝对值大于 2 且小于 3 的相位差值约占 30%，绝对值大于 3 的相位差值约占 10%；在图像 5-63 中，绝对值小于 1 的相位差值占 100%，以上对比数据说明，图像 5-59 噪声区内的相位更接近图 5-1 相同区域内的精确解缠相位，即带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对信噪比低的相位的解缠精度高于 Flynn 算法对这些相位的解缠精度。

以上比较研究了 Flynn 算法和带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对信噪比低的相位的解缠精度高低，下面研究这两种算法对信噪比高的相位的解缠精度。图 5-64 和图 5-65 分别为图 5-60 和图 5-61 非噪声区相位值的统计图。横坐标表示相位差值的大小，纵坐标表示等于这些相位差值的像元所占整个非噪声区像元的百分比。在图像 5-64 上，接近 100%的相位差

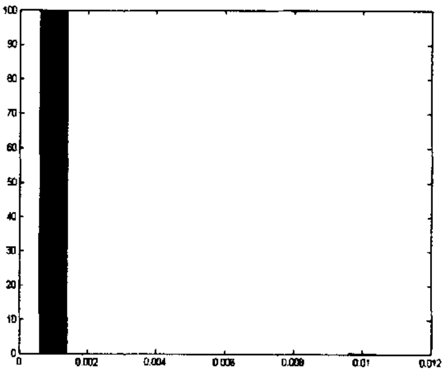


图 5-64 图 5-60 非噪声区的相位统计

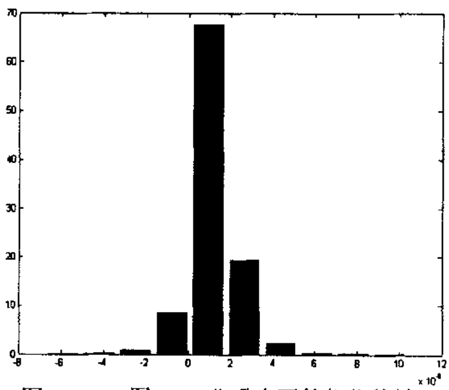


图 5-65 图 5-61 非噪声区的相位统计

值接近 0，而在图像 5-65 上，接近 99%的相位差值在区间$[-3\times10^{-6},5\times10^{-6}]$上， 100%的相位差的绝对值小于$1.2\times10^{-5}$，通过以上数据对比可知，Flynn 算法对信噪比高的相位的解缠精度高于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠精度。

以上通过 Flynn 算法和带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠相

位与模型的精确解缠相位之差比较研究了这两种算法的解缠精度高低。下面通过这两种算法的解缠相位的再缠绕相位与模型的缠绕相位之差来继续研究这两种算法的解缠精度问题。

图像 5-66 和图像 5-67 分别为图像 5-58 和图像 5-59 所示解缠相位的再缠绕相位图像。为了深入研究这两幅图像的差别，下面分别将这两幅图像的相位与图 5-2 所示的相位求差，图 5-68 与图 5-69 分别为图像 5-66 和图像 5-67 所示的相位与图像 5-2 所示的相位求差的结果。

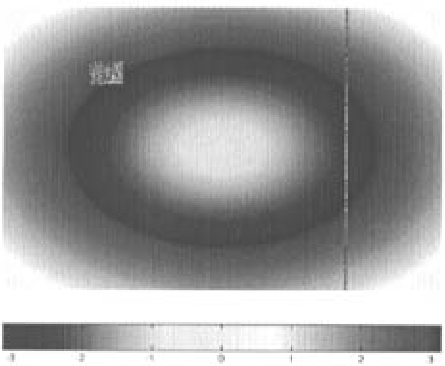


图 5-66　图 5-58 所示相位的缠绕相位

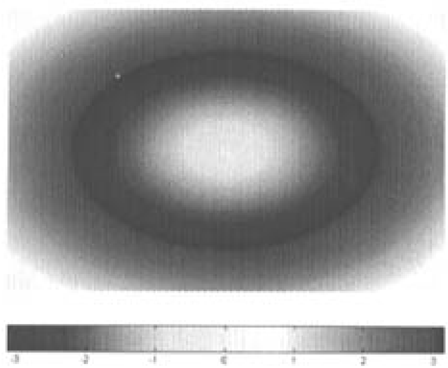


图 5-67　图 5-59 所示相位的再缠绕相位

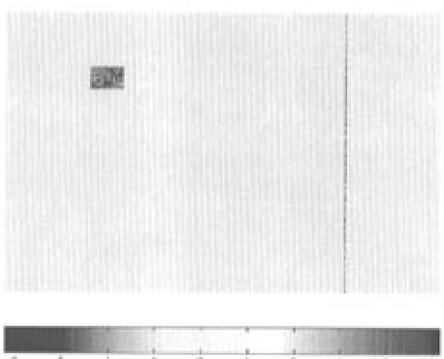


图 5-68　图 5-66 与图 5-2 所示相位之差

图 5-69　图 5-67 与图 5-2 所示相位之差

为了细致的研究图像 5-68 和图像 5-69 的差别，下面分别对图像 5-68 和图像 5-69 的相位差值进行统计。图 5-70 为图 5-68 所示相位的统计图，图 5-71 为图 5-69 所示相位的统计图，其中横坐标表示相位差值的大小，

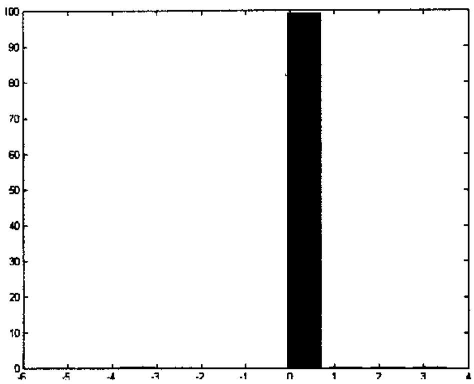


图 5-70　图 5-58 中的相位统计

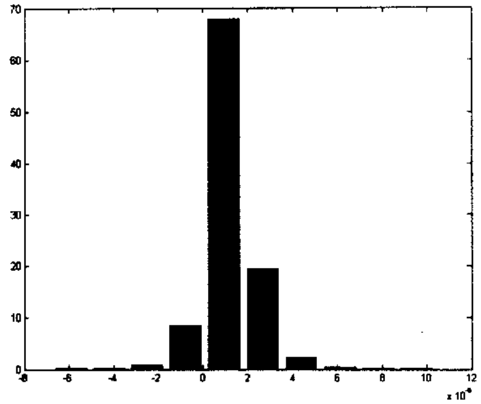


图 5-71　图 5-59 中的相位统计

纵坐标表示等于这些相位差值的像元所占统计区域的像元的百分比。在图像 5-70 上超过 99%的相位差值约为 0，而在图像 5-71 上相位差值位于区间 $[-6\times10^{-6}, 1\times10^{-5}]$上，在整体上，Flynn 算法解缠图像 5-3 所示相位的精度与带权的基于 DCT/FFT 算法解缠图像 5-3 所示相位的精度相等。

表 5-5　Flynn 算法与 WDCT/FFT 算法解缠时间表

解缠算法	图像大小	解缠时间（秒）
Flynn 算法	513×513	0.8280
WDCT/FFT 算法	513×513	0.6570

WDCT/FFT: 指带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法

以上通过比较研究了 Flynn 算法和带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的相位解缠精度问题，下面通过这两种算法的解缠时间研究这两种算法的解缠效率问题。表 5-5 对比了这两种算法解缠图像 5-3 所示相位的解缠时间，通过表 5-5 可知，利用 Flynn 算法解缠图像 5-3 所示相位的时间比带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠这些相位的时间长，因此，Flynn 算法的解缠效率比带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠效率低。

通过以上 Flynn 算法和带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的比较研究得出以下结论：带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对信噪比低的相位

的解缠精度高于 Flynn 算法对这些相位的解缠精度；Flynn 算法对信噪比高的相位的解缠精度高于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠精度；在整体上，Flynn 算法解缠图像 5-3 所示相位的精度与带权的基于 DCT/FFT 算法解缠图像 5-3 所示相位的精度相等；Flynn 算法的解缠效率比带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠效率低。

5.8 Flynn 算法与 Pcg 算法比较

Flynn 算法属于第一类相位解缠算法，Pcg 算法属于第二类相位解缠算法，本节将比较这两种算法的解缠精度和解缠效率。图 5-72 和图 5-73 分别为 Flynn 算法和 Pcg 算法解缠图 5-3 所示缠绕相位的解缠结果。

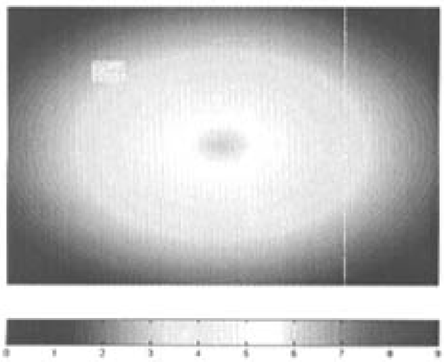


图 5-72 Flynn 算法解缠结果

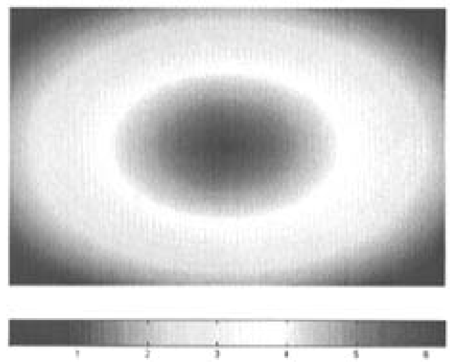


图 5-73 Pcg 算法解缠结果

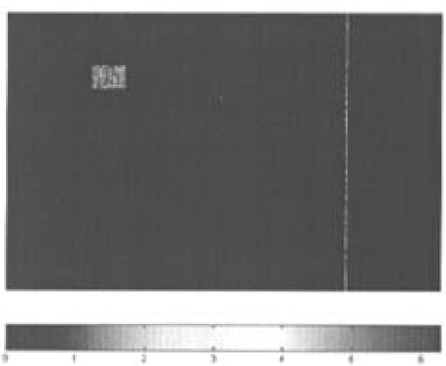


图 5-74 图 5-72 与图 5-1 所示相位之差

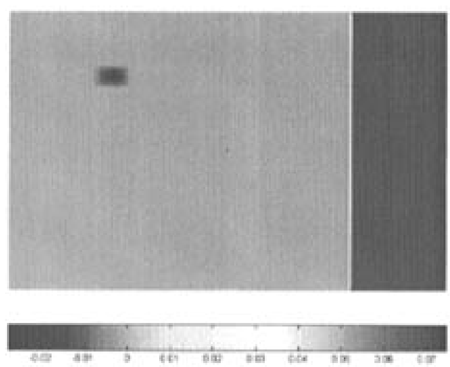


图 5-75 图 5-73 与图 5-1 所示相位之差

为了深入研究图 5-72 和图 5-73 的差别，下面分别将图 5-72 和图 5-73

所示的相位与图 5-1 所示的相位求差，图 5-74 和图 5-75 分别为图 5-72 所示相位与图 5-1 所示的相位求差结果和图 5-73 所示的相位与图 5-1 所示的相位求差的结果。

图像 5-74 和图像 5-75 差别比较大，为了研究这两幅图像的差别，下面分别对这两幅图像的噪声区和非噪声区的相位值做统计，图像 5-76 和图像 5-77 分别为图像 5-74 和图像 5-75 噪声区内的相位差值的统计图，横坐标表示相位差值的大小，纵坐标表示等于这些相位差值的像元占噪声区总

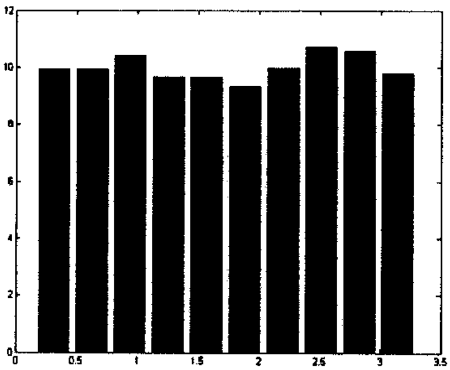


图 5-76　图 5-74 噪声区的相位差值统计图

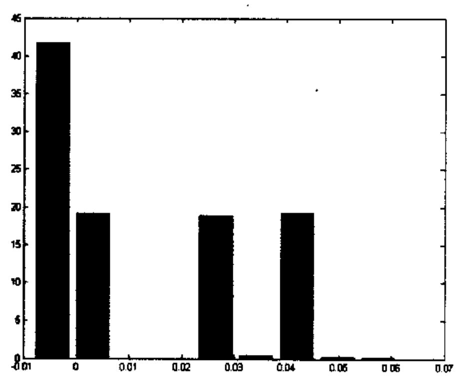


图 5-77　图 5-75 噪声区的相位差值统计图

像元的百分比。图 5-76 中，绝对值小于 2.8 的相位差值约占 90%，而在图 5-77 中，约 60%的相位差值位于区间[-0.01,0.01]上，约 19%的相位差值位于区间[0.02,0.03]上，约 18%的值位于区间[0.04,0.05]上，其余的相位数据也都小于 0.07，以上的这些统计数据表明：图像 5-72 噪声区内相位更接近图 5-1 对应区域的精确解缠相位，即 Flynn 算法解缠信噪比低的相位的解缠精度低于 Pcg 算法解缠这些相位的精度。

以上比较研究了 Flynn 算法和 Pcg 算法解缠信噪比低的相位的解缠精度问题，下面开始研究 Flynn 算法和 Pcg 算法解缠信噪比高的相位的解缠精度问题。图 5-78 和图 5-79 分别为图 5-74 和图 5-75 非噪声区相位差值的统计图，横坐标表示相位差值的大小，纵坐标表示等于这些相位差值的像元所占整个非噪声区像元的百分比。在图 5-78 中，约 100%的相位差值接近于 0，而在图 5-79 中，约 78%的相位差值约为 0，约 21%的相位差值在

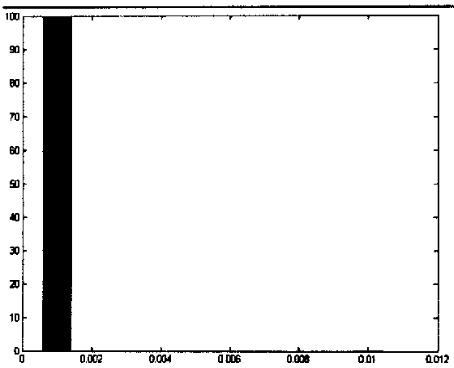


图 5-78 图 5-74 非噪声区中相位差值的统计图

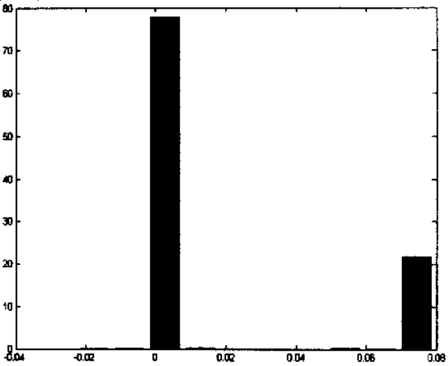


图 5-79 图 5-75 非噪声区中相位差值的统计图

区间[0.06,0.08]上，其余约 1%的相位差值的绝对值小于 0.06。以上对比统计数据表明，图像 5-72 在非噪声区的相位数据比图像 5-73 在非噪声区的相位数据更接近图像 5-1 在对应区域的精确解缠数据，即 Flynn 算法解缠信噪比高的相位的解缠精度高于 Pcg 算法解缠这些相位的精度。

以上通过 Flynn 算法和 Pcg 算法的解缠相位与模型的精确解缠相位之差研究了 Flynn 算法和 Pcg 算法的解缠精度问题，下面通过这两种算法的解缠相位的再缠绕相位与模型的缠绕相位之差继续研究这两种算法的解缠精度。

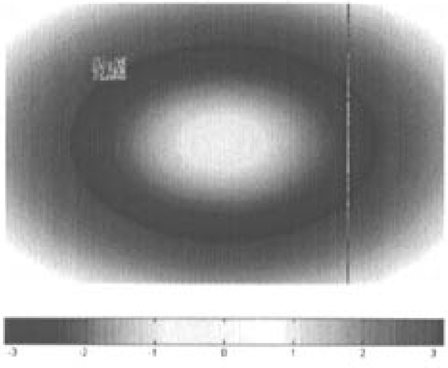


图 5-80 图 5-72 所示相位的再缠绕相位

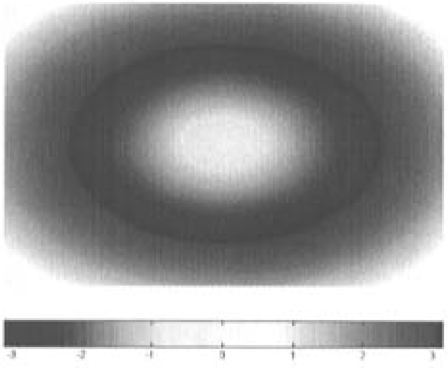


图 5-81 图 5-73 所示相位的再缠绕相位

图 5-80 和图 5-81 分别为图像 5-72 和图像 5-73 所示解缠相位的再缠

绕相位，图 5-82 和图 5-83 分别为图像 5-80 和图像 5-81 所示缠绕相位与图 5-2 所示缠绕相位之差，为了研究这两幅图像的差别，，下面分别对

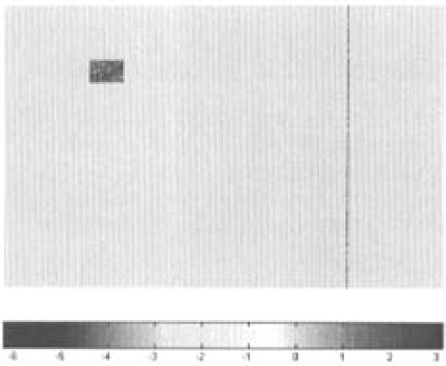


图5-82 图5-80与图5-2所示缠绕相位之差

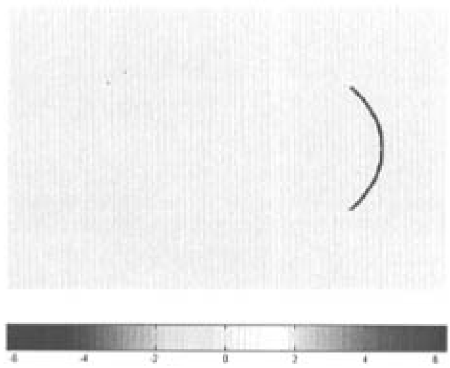


图5-83 图5-81与图5-2所示缠绕相位之差

图像 5-82 和图像 5-83 的相位值进行统计。图 5-84 和图 5-85 分别为图像 5-82 和图像 5-83 所示相位的统计图，其中横坐标表示相位值的大小，纵坐标表示等于这些相位值的像元占整个图像所有像元的百分比。在图 5-84

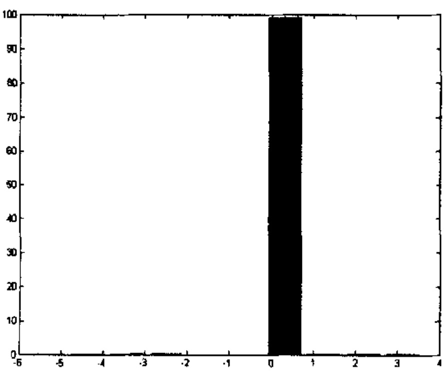


图5-84 图5-82所示相位的统计图

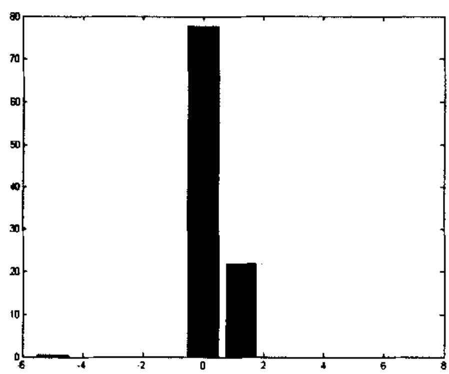


图5-85 图5-83所示相位的统计图

中，约 100%的相位差值为 0，在图 5-85 中，约 78%的相位差值为 0，另外约 21%的相位差值位于区间[1,2]上，其余的相位差值的绝对值位于区间[4,6]上，以上统计数据表明，在整体上图 5-72 的解缠相位更接近图 5-1 所示的精确解缠相位，即 Flynn 算法解缠图 5-3 所示相位的解缠精度高于 Pcg

算法解缠图 5-3 所示相位的精度。

以上研究了 Flynn 算法和 Pcg 算法的解缠精度问题，下面将研究 Flynn 算法和 Pcg 算法的解缠效率问题。表 5-6 对比了 Flynn 算法和 Pcg 算法解缠图 5-3 所示缠绕相位的解缠时间，通过表 5-6 可知，Flynn 算法解缠图 5-3 所示相位的时间比 Pcg 算法解缠这些相位的时间短，因此，Flynn 算法的解缠效率比 Pcg 算法高。

表 5-6 Flynn 算法与 Pcg 算法解缠时间表

解缠算法	图像大小	解缠时间（秒）
Flynn 算法	513×513	0.8280
Pcg 算法	513×513	0.8750

通过以上的研究，得出以下结论：Flynn 算法解缠信噪比低的相位的解缠精度低于 Pcg 算法解缠这些相位的精度；Flynn 算法比 Pcg 算法解缠信噪比高的相位的解缠精度高；在整体上 Flynn 算法解缠图 5-3 所示相位的解缠精度高于 Pcg 算法解缠这些相位的精度；Flynn 算法比 Pcg 算法的解缠效率高。

5.9 小结

本章为相位解缠算法的比较研究部分，主要研究了第一类相位解缠算法中的枝切法、Mask-Cut 算法、Flynn 算法和第二类相位解缠算法中的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法、Pcg 算法在解缠精度和解缠效率方面的差异。

对以上提到的这些相位解缠算法的精度的比较是通过两种方法进行的，第一种算法是通过这些算法的解缠相位与模型的精确解缠相位求差，然后统计在噪声区和非噪声区上的相位差的大小，相位差越小，表示算法的解缠精度越高，相位差越大表示解缠精度越低；第二种方法是通过将这些算法的解缠相位进行再缠绕，然后把再缠绕的结果与模型的缠绕相位求差，接着统计这些差值的大小，这些相位差值越小，表示这种算法的解缠精度越高，这种相位差值越大，表示这种算法的解缠精度越低。

对以上提到的这些相位解缠算法的解缠效率的比较是通过比较这些

算法的解缠时间来进行的，相位解缠时间越短，表示这种算法的解缠效率越高，反之，表示这种算法的解缠效率越低。

通过本章算法的比较研究，得出以下结论：

(1)枝切法对信噪比高的相位的解缠精度高于不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度；枝切法对信噪比低的相位的解缠精度于不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度相同；枝切法的解缠效率高于不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠效率。

(2)枝切法对信噪比低的相位的解缠精度比 Pcg 算法对这些相位的解缠精度低；枝切法对信噪比高的相位的解缠精度稍高于 Pcg 算法对这些相位的解缠精度；枝切法的解缠效率高于 Pcg 算法。

(3)Mask-Cut 算法解缠信噪比低的相位的解缠精度低于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度；Mask-Cut 算法解缠信噪比高的相位的解缠精度高于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度；Mask-Cut 算法的解缠效率低于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠效率。

(4)Mask-Cut 算法比 Pcg 算法解缠信噪比低的相位的解缠精度低；Mask-Cut 算法比 Pcg 算法解缠信噪比高的相位的解缠精度高；在整体上，Mask-Cut 算法解缠图 5-3 所示缠绕相位的解缠精度比 Pcg 算法解缠图 5-3 所示缠绕相位的精度高；Pcg 算法的解缠效率比 Mask-Cut 算法的解缠效率高。

(5)带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对信噪比低的相位的解缠精度高于 Flynn 算法对这些相位的解缠精度；Flynn 算法对信噪比高的相位的解缠精度高于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠精度； Flynn 算法的解缠效率比带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠效率低。

(6)Flynn 算法解缠信噪比低的相位的解缠精度低于 Pcg 算法解缠这些相位的精度；Flynn 算法解缠信噪比高的相位的解缠精度比 Pcg 算法高；Flynn 算法的解缠效率比 Pcg 算法高。

(7)在本章比较的这些相位解缠算法中，第一类相位解缠算法解缠信噪比低的相位的解缠精度比第二类相位解缠算法解缠这些相位的精度低；第一类相位解缠算法解缠信噪比高的相位的解缠精度比第二类相位解缠算法精度高。

第六章 相位解缠算法结合

在第三章和第四章中分别介绍了相位解缠中的两大类算法—基于路径跟踪的相位解缠算法和基于最小二乘的相位解缠算法，通过第五章各种算法的对比可知，这两大类在解缠的精度上、解缠的效率上是有区别的，第一类相位解缠算法解缠信噪比高的相位的解缠精度比第二类相位解缠算法的解缠精度高，第一类相位解缠算法解缠信噪比低的相位的解缠精度比第二类相位解缠算法的解缠精度低。本章要做的工作就是结合这两类算法，使算法的解缠精度得到提高。

6.1 枝切法与带权的基于DCT/FFT最小二乘算法相结合解缠模拟数据

通过第五章的相位解缠算法比较研究可知，枝切法相位解缠具有快速、精度高的特点，但是当“枝”连接错误时，可能会导致解缠错误，甚至导致局部不能解缠，另外，枝切法对信噪比高的相位的解缠精度高，而对信噪比低的相位的解缠精度低；带权的基于DCT/FFT的最小二乘算法对信噪比低的相位的解缠精度高，而对信噪比高的相位的解缠精度则相对枝切法低。

以上简单回顾了枝切法和带权的基于DCT/FFT的最小二乘算法的解缠特点，下面介绍枝切法与带权的基于DCT/FFT的最小二乘算法的结合算法，结合这两种算法来进行相位解缠的目的是为了在不影响枝切法解缠信噪比高的相位的解缠精度的同时，提高枝切法相位解缠结果中信噪比低的相位的解缠精度。这种算法首先分别用枝切法和带权的基于DCT/FFT的最小二乘算法解缠，然后用带权的基于DCT/FFT的最小二乘算法解缠的结果代替枝切法相位解缠结果中信噪比低的区域的解缠相位，而信噪比高的区域则保留枝切法解缠的结果。需要注意的是，可以依据质量图来对信噪比低的区域进行判断。

图6-1和图6-2分别为枝切法解缠图5-3所示相位的结果和这种枝切法与带权的基于DCT/FFT的最小二乘算法的结合算法解缠图5-3的结果。

对比这两幅图，图 6-2 噪声区域非常不明显，而图 6-1 的对应区域则非常明显。需要注意的是：在两种算法结合时，首先应该将带权的基于 DCT/FFT 的最小

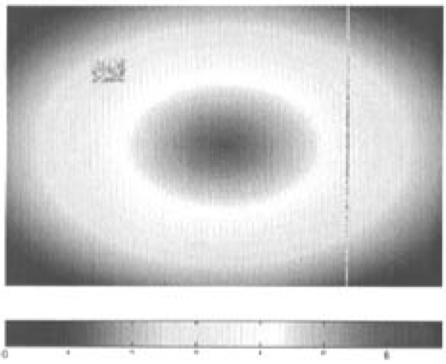


图 6-1 枝切法解缠图 5-3 所示相位的结果

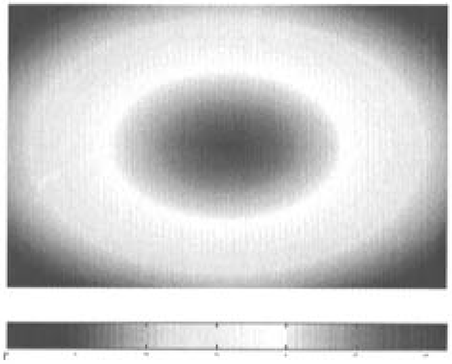


图 6-2 枝切法与最小二乘的结合算法解缠图 5-3 所示相位的结果

二乘算法的解缠结果加上一个常数 t,这个常数依据下列公式计算：

$$t = p(i,j) - P^{'}(i,j) \tag{6-1}$$

上式中，t 为增加的常数，$p(i,j)$为带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠图像上高信噪比地区的行号为 i,列号为 j 的像元的解缠相位，$p^{'}(i,j)$为枝切法解缠相位图像上与$p(i,j)$对应的行号为 i,列号为 j 的像元的解缠相位。

6.2 枝切法与带权的基于 DCT/FFT 最小二乘算法相集合解缠真实数据

上一节研究了枝切法与带权的最小二乘算法结合解缠图 5-3 所示模拟相位，实验结果表明，解缠结果中既保留了枝切法解缠高信噪比相位的精确的结果，又使得枝切法解缠结果中低信噪比相位的解缠精度得到了提高。本节研究这两种算法的结合算法解缠真实相位数据的效果。

图 6-3 为上海地区的局部干涉相位数据图像，其中图像的左上方信号紊乱的区域为信噪比低的区域，右侧呈线形的区域也为信噪比低的区域。图 6-4 为枝切法解缠图 6-3 所示相位的结果，图 6-5 为枝切法与最小二乘算法的结合算法解缠图 6-3 所示相位的结果。

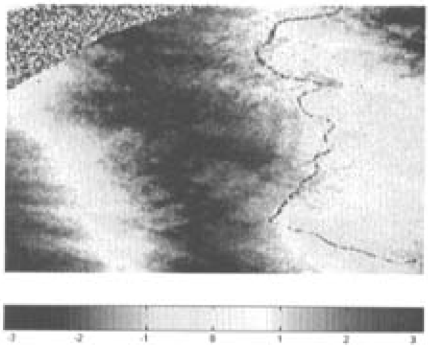


图 6-3 上海地区局部干涉相位

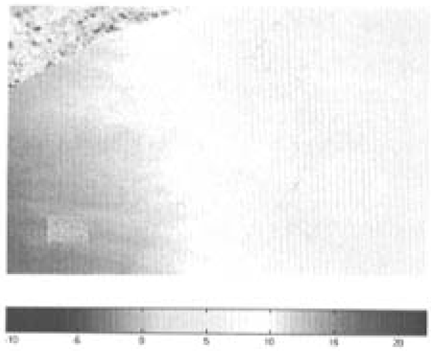


图 6-4 枝切法解缠图 6-3 所示相位结果

对比图 6-4 和图 6-5 左上方部分，在图 6-4 上，解缠相位信号比较紊乱，在图 6-5 上，解缠信号则比较规则。对比图 6-5 上黑框圈起的区域与图 6-4 对应的区域，图 6-5 上对应的区域更平滑。图像 6-4 和图像 6-5 其他部分则相差不大，这说明在信噪比低的区域，图像 6-5 的解缠相位比图像 6-4 的解缠相位精度高；在信噪比高的区域，图像 6-5 和图像 6-4 的解缠相位精度相同。

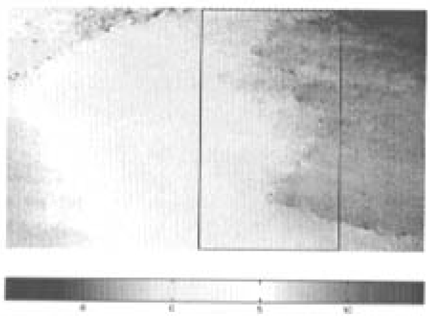


图 6-5 枝切法与最小二乘的结合算法解缠图 6-3 所示相位的结果

6.3 小结

本章介绍了枝切法和最小二乘算法的结合算法，这种算法首先分别用枝切法和带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠，然后用带权的基于

DCT/FFT 的最小二乘算法解缠的结果代替枝切法相位解缠结果中信噪比低的区域的解缠相位，而信噪比高的区域则保留枝切法解缠的结果。需要注意，在两种算法结合时，首先应该将带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠结果加上一个常数，这个常数可以依据这两种算法在信噪比高的区域的解缠解缠结果之差确定。

结论与不足

二维相位解缠是合成孔径雷达干涉测量数据处理中非常重要的一步，20 世纪 70 年代末人们开始对二维相位解缠技术进行研究，至今人们发展了几十种相位解缠算法，这些算法可以分为两大类，一类是以枝切法为代表的基于路径跟踪的相位解缠算法，另一类是以最小二乘算法为代表的基于最小二乘的相位解缠算法。路径跟踪法通过积分相邻像元的相位值来实现相位解缠；基于最小二乘的相位解缠算法通过在整体上使缠绕相位的梯度与真实相位的梯度差的平方最小来实现相位解缠。

本论文在第五章将第一类相位解缠算法中的枝切法、Mask-Cut 算法、Flynn 算法和第二类相位解缠算法中的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法、Pcg 算法进行了比较研究，主要研究了这两类相位解缠算法的解缠精度和解缠效率。对相位解缠算法精度的比较是在两种标准下进行的，第一种标准为算法的解缠相位与模型的精确解缠相位之差，这种差值越小，表示算法的解缠精度越高，反之，表示这种算法的解缠精度越低；第二种标准为算法解缠结果的再缠绕相位与模型的缠绕相位之差，这种差值越小表示算法的解缠精度越高，反之，表示算法的解缠精度越低。对相位解缠算法效率的比较是通过算法的解缠时间来表示的，算法的解缠时间越短，表示算法的解缠效率越高，反之，表示算法的解缠效率越低。

通过第五章相位解缠算法的比较研究，得出以下结论：

⑴枝切法对信噪比高的相位的解缠精度高于不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度；枝切法对信噪比低的相位的解缠精度于不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度相同；枝切法的解缠效率高于不带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠效率。

⑵枝切法对信噪比低的相位的解缠精度比 Pcg 算法对这些相位的解缠精度低；枝切法对信噪比高的相位的解缠精度稍高于 Pcg 算法对这些相位的解缠精度；枝切法的解缠效率高于 Pcg 算法。

⑶Mask-Cut 算法解缠信噪比低的相位的解缠精度低于带权的基于

DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度；Mask-Cut 算法解缠信噪比高的相位的解缠精度高于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对这些相位的解缠精度；Mask-Cut 算法的解缠效率低于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠效率。

(4)Mask-Cut 算法比 Pcg 算法解缠信噪比低的相位的解缠精度低；Mask-Cut 算法比 Pcg 算法解缠信噪比高的相位的解缠精度高；在整体上，Mask-Cut 算法解缠图 5-3 所示缠绕相位的解缠精度比 Pcg 算法解缠图 5-3 所示缠绕相位的精度高；Pcg 算法的解缠效率比 Mask-Cut 算法的解缠效率高。

(5)带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法对信噪比低的相位的解缠精度高于 Flynn 算法对这些相位的解缠精度；Flynn 算法对信噪比高的相位的解缠精度高于带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠精度； Flynn 算法的解缠效率比带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠效率低。

(6)Flynn 算法解缠信噪比低的相位的解缠精度低于 Pcg 算法解缠这些相位的精度；Flynn 算法解缠信噪比高的相位的解缠精度比 Pcg 算法高；Flynn 算法的解缠效率比 Pcg 算法高。

(7)在本章比较的这些相位解缠算法中，第一类相位解缠算法解缠信噪比低的相位的解缠精度比第二类相位解缠算法解缠这些相位的精度低；第一类相位解缠算法解缠信噪比高的相位的解缠精度比第二类相位解缠算法精度高。

在第六章对以后的相位解缠算法的结合做了研究，在这部分主要研究了枝切法和带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的结合。这种结合是通过下列途径实现的，首先分别用枝切法和带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠相位，然后用带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠的信噪比低的相位的结果来代替枝切法解缠结果中信噪比低的相位。这种算法有一个关键的部分，在用带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法解缠结果代替枝切法中对应的相位前，应该首先对这两个解缠平面进行纠正，即在带权的基于 DCT/FFT 的最小二乘算法的解缠结果中加上一个常数，否则不能很好的结合。研究结果表明在不损失枝切法解缠信噪比高的相位的解缠精度下，

大大提高了枝切法解缠结果中信噪比低的相位的解缠精度。

由于条件限制，本文存在以下一些不足：

(1)相位解缠算法比较的对象是基于路径跟踪的相位解缠算法和基于最小二乘的相位解缠算法中的一些经典算法，比较的范围比较窄。

(2)对相位解缠效率的比较是通过比较算法的相位解缠时间来进行的，而未能与算法的解缠精度结合来考虑。

(3)对相位解缠算法的比较研究是通过模拟数据来进行的，而未能在真实数据上进行比较。

(4)对相位解缠算法的结合研究仅仅研究了枝切法和带权的基于DCT/FFT的最小二乘算法的结合，而未进行其它算法的实验。

致谢

首先感谢我的导师刘国祥教授对我论文的支持。我的论文是在刘老师的悉心指导下完成的。在我攻读硕士学位期间，刘老师不但给我提供了优越的学习环境，而且在我实验过程中遇到困难时，刘老师总能循循善诱，悉心给我指导，提出意见并且给我提供了大量论文相关资料和珍贵的试验数据。刘老师不但学识渊博，而且治学态度严谨，给我留下了深刻的印象，将会使我终生受益非浅。再次对刘老师表示诚挚的感谢和崇高的敬意。

特别感谢师兄罗小军对我的鼓励和帮助。罗小军师兄帮助我解决了许多实验过程中出现的问题，给了我许多有益的建议，帮我共同分析实验中出现的现象，给了我极大的启示，使我对问题的认识更深刻。

感谢测量系的所有老师，感谢你们对我的指导和培养。

感谢师兄周乐韬、袁林果、蔡国林给我的许多帮助。

感谢 1310 实验室的所有人员，感谢你们给了我一个学术氛围浓厚、学术交流积极、人际关系和睦的良好的学习交流环境。

感谢我的父母和家人对我的支持。

有在交大学习的经历，青春无悔！感谢母校对我的培养和教育！ 祝母校早日跻身世界一流大学的行列！

参考文献

[1] Liu,Guoxiang.Mapping of Earth Deformations with Satellite Radar Interferometry:A Study of Its Accuracy and Reliability Performances [D].Ph .D.thesis:Dept.of Land Surveying &Geo-Informatics, The Hong Kong Polytechnic University, pp.250,2003.

[2] 张澄波.1989.综合孔径雷达—原理，系统分析与应用.北京：科学出版社

[3] 张俊，费奇，陈学广，等.1998.利用单幅 SAR 图像推求目标深度算法.华中理工大学学报，26(3)

[4] 王超、张红、刘智.星载合成孔径雷达干涉测量.北京：科学出版社，2002:33

[5] Xia Z G, Henderson F M.1997.Understanding the relationships between radar response patterns and the bio-and geophysical parameters of urban areas.IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing,35(1):93~101

[6] Goldstein R M, Engelhardt H, Kamb B,et al.1993.Satellite radar interfero-Metry for monitoring ice-sheet motion:appilication to an antarctic ice stream. Science,262:1 525

[7] Engdahl M E, Borgeaud M, Rast M.2001.The use of ERS-1/2 tandem inter-Ferometric coherence in the estimation of agricultural crop height.IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing,39(8):1799~1806

[8] Strozzi T, Dammert P B G, Wegmuller U,et al.2000.Landuse mapping with ERS SAR interferometry. IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sen-Sing, 38(2):766~775

[9] Massonnet D,Rossi M,Carmona C,et al.1993.The displacement field of the Landers earthquake mapped by radar interferometry.Nature,364:138~142

[10] Zebker H A,Goldstein R M.1986. Topographic mapping derived from in-Terferometric synthetic aerture radar measurements.Journal of Geo-physical Research,91(B5):4993~4999

[11] Refice A,Bovenga E,Wasowski J,et al.2000. Use of INSAR data for lands-Lide monitoring:a case study from southern Italy. Proceedings of IGARSS' 2000, Honolulu

[12] 王超、张红、于勇、刘智.雷达差分干涉测量.地理学与国土研究.2002

18(3):13~16

[13] 舒宁.雷达影像干涉测量原理.武汉：武汉大学出版社，2003:24

[14] R.M.Goldstein,H.A.Zebker,and C.L.Werner.1988.Satellite radarinterferometry:Two-dimensional phaseunwrapping.Radio Science,23(4):713~720

[15] C.Prati,M.Giani,and N.Leuratti.1990.SAR interferometry:A 2-D phase unwrapping techniqueBased on phase and absolute values information .Proceedings of the 1990 international Geoscience and Remote sensing Symposium.IEEE.Piscataway,2043~2046

[16] D.Derauw,Phase unwrapping using coherence measurements .1995.Synthetic Aperture Radar and Passive Microwave Sensing ,Proceedings of the SPIE.Society of Photo-Optional Instrumentation Engineers.Bellingham.Wa,2584:319~324

[17] T.J.Flynn.1966.Consistent 2-D phase unwrapping guided by a quality map.Proceedings of the1996 International Geoscience and Remote Sensing Symposium.Lincoln.Nebraska.IEEE.piscataway,2057~2059

[18] D.C.Ghiglia,and M.D.Pritt.1998.Two-dimensional phase Unwrapping:theory, algorithms,and software,Join Wiley & Sons.Inc:151~171

[19] Xu Wei,Cumming Ian.1999.A region-growing algorithm for INSAR phase unwrapping.IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing,37(1):124~134

[20] D.L.Fried.1977.Least-Square Fitting a wave-front distorion estimation to an array of phase-difference measure-ments.J.Opt.Soc.Am,67(3):370~375

[21] 许才军、王华.INSAR相位解缠算法比较及误差分析.武汉大学学报. 2004,29(1):67~71

[22] J.M.Huntley.1989.Noise-immune phase unwrapping algorithm.Applied Optics,28(15):3268~3270

[23] J.M.Huntly and J.R.Buckland.1995.Characterization of sources of 2π phase discontinuity in speckle interfero-grams.J.Opt.Soc.Am,12(1):107~117

[24] J.R.Buckland,J.M.Huntly and S.R.E.Turner.1995.Unwrapping noisy phase maps by use of a minimum-cost matching algorithm.AppliedOptics, 34(23):5100~5108

[25] C.Prati,F.Rocca,A.M.Guarnieri and E.Damonti.1990.Seismic migration for SAR focusing Interferometric application .IEEE Trans.Geophys. Remote sens.,28:627~640

[26]C.Prati,M.Giani,and N.Leuratti.1990.SAR interferometry:A 2-D phase

unwrapping techniqueBased on phase and absolute values information . Proceedings of the 1990 international Geoscience and Remote sensing Symposium.IEEE.Piscataway,2043~2046

[27]X.Y.Su,G.von Bally,and D.Vukicevic.1993.Phase-stepping grating profilometry:Utilization of Intensity modulation analysis in complex objects evaluation.Optics Communications,98:141~150

[28]D.Derauw,Phase unwrapping using coherence measurements .1995.Synthetic Aperture Radar and Passive Microwave Sensing ,Proceedings of the SPIE.Society of Photo-Optional Instrumentation Engineers.Bellingham.Wa, 2584:319~324

[29] T.J.Flynn.1966.Consistent 2-D phase unwrapping guided by a quality map.Proceedings of the 1996 International Geoscience and Remote Sensing Symposium.Lincoln.Nebraska.IEEE.piscataway,2057~2059

[30] D.L.Fried.1977.Least-Square Fitting a wave-front distorion estimation to an array of phase-difference measure-ments.J.Opt.Soc.Am,67(3):370~375

[31] R.H.Hudgin.1977.Wave-front reconstruction for compensated imaging. J.Opt.Soc.Am,67(3):375~378

[32] H.Rakajo and T.Takahashi.1988.Noniterative method for obtaining the exact solution for the normal equation in Least-Squares phase estimation for the phasedifference.J.Opt.Soc.Am,5(11):1818~1827

[33] M.D.Pritt,and J.S.Shipman.1994.Least-Squares two-dimensional phase unwrapping using FFT's .IEEE TransGeosci.Remote Sens.,32(3):706~708

[34] D.G.Ghiglia and L.A.Romero.1987.Robust two-dimensional weighted and unweighted phase that uses fast transforms and iterative metrods.J.Opt.Soc. Am,11(1):267~280

[35] U.Spagnolini.1995.2-D phase unwrapping and instantaneous frequency estimation.IEEE Trans.Geosci.Remote Sens.,33(3):579~589

[36] M.D.Pritt.1996.Phase unwrapping by means of multigrid techniques for interferometric SAR.IEEE Trans.Geosci.Remote Sens.,34(3):728~738

[37] D.G.Ghiglia and L.A.Romero.1996.Minimum L^P-norm two dimensional phase unwrapping .J.Opt.Soc.Am,13(10):1999~2013

[38] 王超、张红、刘智.星载合成孔径雷达干涉测量.北京：科学出版社，2002：100-102

[39] D.C.Ghiglia,and M.D.Pritt.1998.Two-dimensional phase Unwrapping: theory,algorithms,and software,Join Wiley & Sons.Inc:31~34

[40] D.C.Ghiglia,and M.D.Pritt.1998.Two-dimensional phase Unwrapping:theory, algorithms,and software,Join Wiley & Sons.Inc:46~49

[41] 王超、张红、刘智.星载合成孔径雷达干涉测量.北京：科学出版社，2002：119-125

[42] Rein-Lien Hsu,Shaoyun chen,Anil K.Jain,Carolyn Mercer.1998.Local weight selection for two dimensional phase unwrapping.NASA Project Report.December 29

[43] D.J.Bone.1991.Fourier fringe analysis:The two-dimensional phase unwrapping problem.Applied Optics,30(25):3627~3632

[44] T.R.Judge,C.Quan,and P.J.Bryanston-Cross.1992.Holographic deformation measurements by Fourier transform technique with automatic phase unwrapping , Optical engineering,31(3):533~543

[45] Q.Lin,J.F.Vesecky,and H.A.Zebker.1994.Phase unwrapping through fringe-line detection in Synthetic aperture radar interferometry.Applied Optics,33(2):201~208

[46] J.A.Quiroga and E.Bernabeu.1994.Phase-unwrapping algorithm for noise phase-map processing.Applied Optics,33(29):6725~6731

[47] J.A.Quiroga,A.Gonzalez-Cano and E.Bernabeu.1995.Phase-unwrapping algorithm based on an adaptive criteri-on,Applied Optics,34(14):2560~2563

[48] B.Strobel.1996.Processing of interferometric phase maps as complex-valued phasor images.Applied Optics,35(13):2192~2198

[49] J.L.Li,X.Y.Su and J.T.Li.1997.Phase unwrapping based reliability and edge detection .Optical Engineering 36(6):31~35

[50] Wei Xu,Ian Cumming .1999.A region-growing algorithm for INSAR phase unwrapping.IEEE Trans.Geosci.Remote Sens.,37(1):124~134

[51] G.Fornaro,E.Sansosti.1999.A two-dimensional region frowing least squares phase unwrapping alforithm for interferometric SAR processing .IEEE Trans.Geosci.Remote Sens.,37(5):2215~2226

[52] D.C.Ghiglia,and M.D.Pritt.1998.Two-dimensional phase Unwrapping: theory,algorithms,and software,Join Wiley & Sons.Inc

[53] D.C.Ghiglia,and M.D.Pritt.1998.Two-dimensional phase Unwrapping: theory,algorithms,and software,Join Wiley & Sons.Inc：70~82

[54] 王超、张红、刘智.星载合成孔径雷达干涉测量.北京：科学出版社，2002：117~118

[55] D.C.Ghiglia,and M.D.Pritt.1998.Two-dimensional phase Unwrapping: theory,algorithms,and software,Join Wiley & Sons.Inc：218~231

攻读硕士期间发表的论文

[1] 付进朋，刘国祥，InSAR 相位解缠质量评价方法研究，四川测绘