第一章习题答案

选择题（单选题）

1.1　按连续介质的概念，流体质点是指：（d）

（a）流体的分子；（b）流体内的固体颗粒；（c）几何的点；（d）几何尺寸同流动空间相比是极小量，又含有大量分子的微元体。

1.2　作用于流体的质量力包括：（c）

（a）压力；（b）摩擦阻力；（c）重力；（d）表面张力。

1.3　单位质量力的国际单位是：（d）

（a）N；（b）Pa；（c）N/kg；（d）m/s^2。

1.4　与牛顿内摩擦定律直接有关的因素是：（b）

（a）剪应力和压强；（b）剪应力和剪应变率；（c）剪应力和剪应变；（d）剪应力和流速。

1.5　水的动力黏度μ随温度的升高：（b）

（a）增大；（b）减小；（c）不变；（d）不定。

1.6　流体运动黏度ν的国际单位是：（a）

（a）m/s^2；（b）N/m^2；（c）kg/m；（d）$N\cdot s/m^2$。

1.7　无黏性流体的特征是：（c）

（a）黏度是常数；（b）不可压缩；（c）无黏性；（d）符合$\frac{p}{\rho}=RT$。

1.8　当水的压强增加 1 个大气压时，水的密度增大约为：（a）

（a）1/20000；（b）1/10000；（c）1/4000；（d）1/2000。

1.9 水的密度为 1000 $\mathrm{kg/m^3}$，2L 水的质量和重量是多少？

解：$m=\rho V=1000\times0.002=2$（kg）

$$G=mg=2\times9.807=19.614\text{（N）}$$

答：2L 水的质量是 2kg，重量是 19.614N。

1.10 体积为 0.5 m^3的油料，重量为 4410N，试求该油料的密度是多少？

解：$\rho=\frac{m}{V}=\frac{G/g}{V}=\frac{4410/9.807}{0.5}=899.358$（kg/m³）

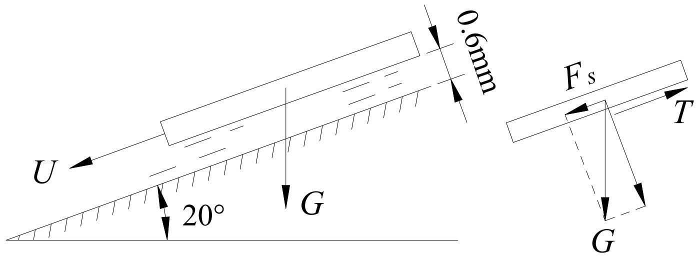
答：该油料的密度是 899.358kg/m³。

1.11 某液体的动力黏度为 0.005 $Pa\cdot s$，其密度为 850 kg/m^3，试求其运动黏度。

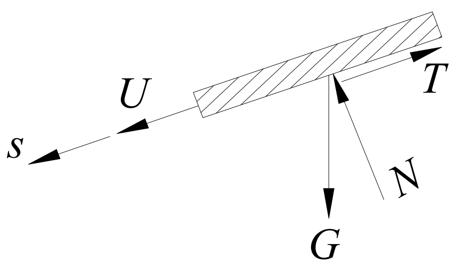
解：$\nu = \dfrac{\mu}{\rho} = \dfrac{0.005}{850} = 5.882 \times 10^{-6}$ （m²/s）

答：其运动黏度为5.882×10^{-6} m²/s。

1.12　有一底面积为 60cm×40cm 的平板，质量为 5Kg，沿一与水平面成 20°角的斜面下滑，平面与斜面之间的油层厚度为 0.6mm，若下滑速度 0.84 m/s，求油的动力黏度 μ。



解：平板受力如图。



沿 s 轴投影，有：

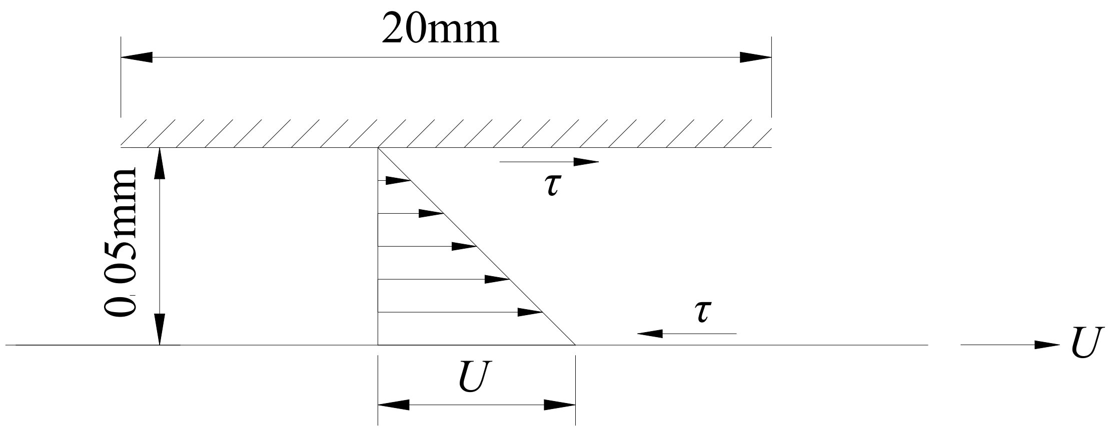
$$G \cdot \sin 20^\circ - T = 0$$

$$T = \mu \frac{U}{\delta} \cdot A = G \cdot \sin 20^\circ$$

$$\therefore \mu = \frac{G \cdot \sin 20^\circ \cdot \delta}{U \cdot A} = \frac{5 \times 9.807 \times \sin 20^\circ \times 0.6 \times 10^{-3}}{0.6 \times 0.4 \times 0.84} = 5.0 \times 10^{-2} \ (\mathrm{kg}/\mathrm{m \cdot s})$$

答：油的动力黏度$\mu = 5.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg}/\mathrm{m \cdot s}$。

1.13　为了进行绝缘处理，将导线从充满绝缘涂料的模具中间拉过。已知导线直径为 0.8mm；涂料的黏度 μ =0.02 $Pa \cdot s$，模具的直径为 0.9mm，长度为 20mm，导线的牵拉速度为 50 m/s，试求所需牵拉力。

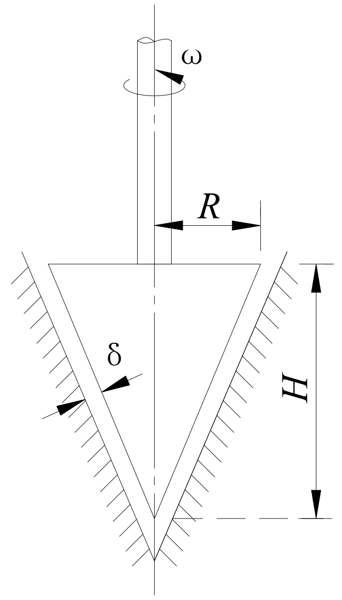


解：$\tau = \mu \frac{U}{\delta} = 0.02 \times \frac{50 \times 1000}{(0.9-0.8)/2} = 20$（kN/m²）

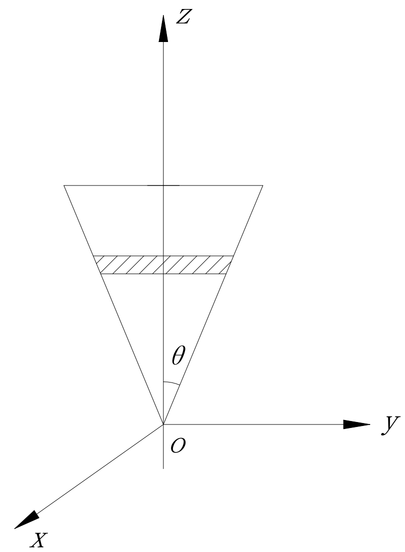
$$T = \pi d \cdot l \cdot \tau = \pi \times 0.8 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-3} \times 20 = 1.01 \text{（N）}$$

答：所需牵拉力为1.01N。

1.14　一圆锥体绕其中心轴作等角速度旋转 ω =16 rad/s，锥体与固定壁面间的距离 δ =1mm，用 μ =0.1 $Pa \cdot s$ 的润滑油充满间隙，锥底半径 R=0.3m，高 H=0.5m。求作用于圆锥体的阻力矩。



解：选择坐标如图，在 z 处半径为 r 的微元力矩为 dM 。



$$dM=\tau dA\cdot r=\frac{\mu\frac{r\omega}{\delta}\cdot 2\pi r dz}{\cos\theta\cdot r}=\mu\cdot\frac{2\pi r^3\omega}{\delta}\cdot\frac{\sqrt{H^2+R^2}}{H}dz$$

其中 $r/R=z/H$

$$\therefore M=\int_0^H\frac{\sqrt{H^2+R^2}}{H}\cdot\frac{2\pi\mu\omega}{\delta}\cdot\frac{R^3}{H^3}z^3dz$$

$$=\frac{\pi\mu\omega}{2\delta}\cdot R^3\sqrt{H^2+R^2}$$

$$=\frac{\pi\times 0.1\times 16}{2\times 1\times 10^{-3}}\times 0.3^3\times\sqrt{0.5^2+0.3^2}$$

$=39.568$（N·m）

答：作用于圆锥体的阻力矩为$39.568\ \mathrm{N\cdot m}$。

1.15 活塞加压，缸体内液体的压强为 0.1Mpa 时，体积为 1000 cm^3，压强为 10Mpa 时，体积为 995 cm^3，试求液体的体积弹性模量。

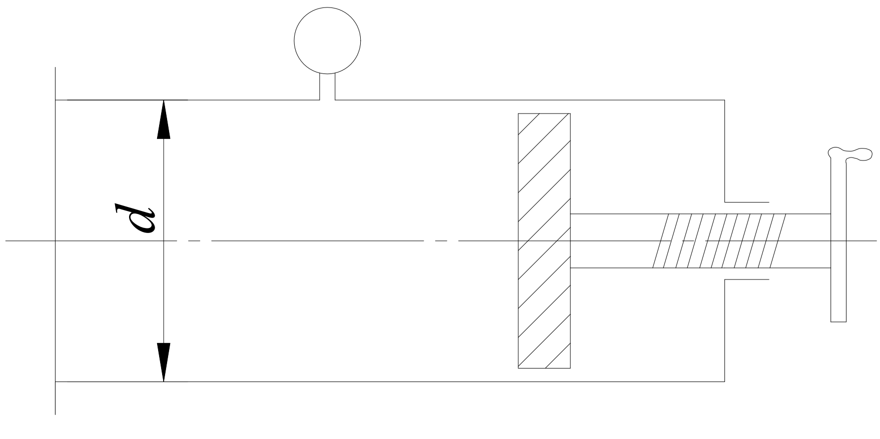
解：$\Delta p=\left(10-0.1\right)\times10^6=9.9$（Mpa）

$$\Delta V=\left(995-1000\right)\times10^{-6}=-5\times10^{-6}$$（m³）

$$K=-\frac{\Delta p}{\Delta V/V}=-\frac{9.9\times10^6}{-5\times10^{-6}/1000\times10^{-6}}=1.98\times10^9$$（pa）

答：液体的体积弹性模量$K=1.98\times10^9$ pa。

1.16 图示为压力表校正器，器内充满压缩系数为k =4.75×10^{-10} m^2/N 的液压油，由手轮丝杠推进活塞加压，已知活塞直径为 1cm，丝杠螺距为 2mm，加压前油的体积为 200mL，为使油压达到 20Mpa，手轮要摇多少转？



解：∵ $K=-\frac{\Delta V/V}{\Delta p}$

$$\therefore \Delta V=-KV\Delta p=-4.75\times10^{-10}\times200\times10^{-6}\times20\times10^6=-1.9\times10^{-6}$$（m³）

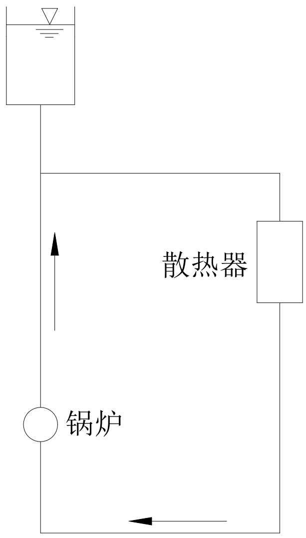
设手轮摇动圈数为n，则有$n\cdot\frac{\pi}{4}d^2\cdot\Delta l=\Delta V$

$$n=\frac{4\Delta V}{\pi d^2\Delta l}=\frac{4\times\left(-1.9\times10^{-6}\right)}{\pi\times\left(1\times10^{-2}\right)^2\times\left(-2\times10^{-3}\right)}=12.10$$ 圈

即要摇动 12 圈以上。

答：手轮要摇 12 转以上。

1.17　图示为一水暖系统，为了防止水温升高时，体积膨胀将水管胀裂，在系统顶部设一膨胀水箱。若系统内水的总体积为 8 m^3，加温前后温差为 50℃，在其温度范围内水的膨胀系数 α_V =0.00051/℃。求膨胀水箱的最小容积。



解：$\because \alpha_V = \dfrac{\Delta V/V}{\Delta T}$

$$\therefore \Delta V = \alpha_V V \Delta T = 0.00051 \times 8 \times 50 = 0.204$$（m³）

答：膨胀水箱的最小容积 0.204 m³。

1.18　钢贮罐内装满 10℃的水，密封加热到 75℃，在加热增压的温度和压强范围内，水的热膨胀系数 α_V =4.1×10^{-4}/℃，体积弹性模量 k =2×10^9 N/m^2，罐体坚固，假设容积不变，试估算加热后罐壁承受的压强。

解：$\because \alpha_V = \dfrac{\Delta V/V}{\Delta T}$

$\therefore$自由膨胀下有：$\dfrac{\Delta V}{V} = \alpha_V \Delta T$

又$\because K = -\dfrac{\Delta p}{\Delta V/V}$

$$\therefore \Delta p = -K\frac{\Delta V}{V} = K \cdot \alpha_V \cdot \Delta T = 4.1\times10^{-4} \times 2\times10^{9} \times \left(75^\circ - 10^\circ\right) = 53.3$$（Mpa）

加热后，钢罐内的压强为 $p = p_0 + \Delta p = 53.3$ Mpa。设 $p_0 = 0$（表压强）。

答：加热后罐壁承受的压强是 53.3 Mpa。

1.19　汽车上路时，轮胎内空气的温度为 20℃，绝对压强为 395kPa，行驶后轮胎内空气的的温度上升到 50℃，试求这时的压强。

解：设满足理想气体方程，则有：$\dfrac{pV}{T}=R=\dfrac{395V_1}{273+20}=\dfrac{p_2V_2}{273+50}$

假设 $V_1=V_2$，可解得 $p=p_2=\dfrac{323\times395}{293}=435.4$（kPa）

答：这时的压强为 435.4 kPa。

第二章习题答案

选择题（单选题）

2.1　静止流体中存在：（a）

（a）压应力；（b）压应力和拉应力；（c）压应力和剪应力；（d）压应力、拉应力和剪应力。

2.2　相对压强的起算基准是：（c）

（a）绝对真空；（b）1 个标准大气压；（c）当地大气压；（d）液面压强。

2.3　金属压力表的读值是：（b）

（a）绝对压强；（b）相对压强；（c）绝对压强加当地大气压；（d）相对压强加当地大气压。

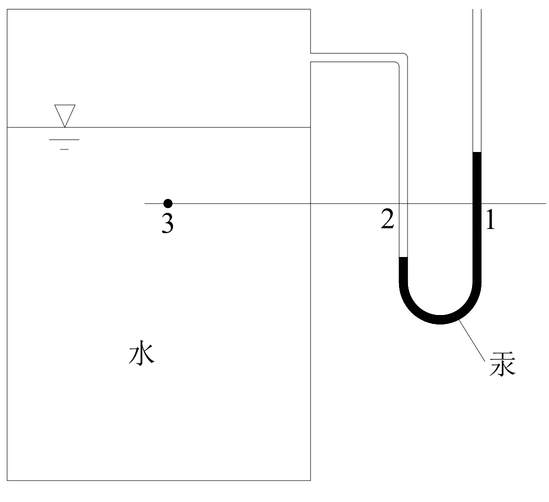
2.4　某点的真空度为 65000Pa，当地大气压为 0.1MPa,该点的绝对压强为：（d）

（a）65000Pa；（b）55000Pa；（c）35000Pa；（d）165000Pa。

2.5　绝对压强 p_{abs} 与相对压强 p 、真空度 p_V 、当地大气压 p_a 之间的关系是：（c）

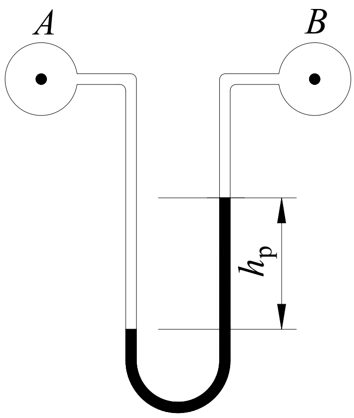
（a） $p_{abs}=p+p_V$；（b） $p=p_{abs}+p_a$；（c） $p_V=p_a-p_{abs}$；（d） $p=p_V+p_V$。

2.6　在密闭容器上装有 U 形水银测压计，其中 1、2、3 点位于同一水平面上，其压强关系为：（c）



（a） $p_1 > p_2 > p_3$；（b） $p_1 = p_2 = p_3$；（c） $p_1 < p_2 < p_3$；（d） $p_2 < p_1 < p_3$。

2.7 用 U 形水银压差计测量水管内 A、B 两点的压强差，水银面高差 h_p=10cm, $p_A - p_B$ 为：（b）

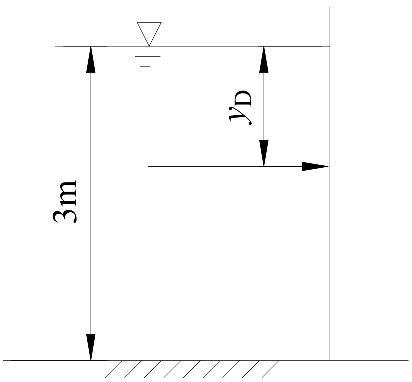


（a）13.33kPa；（b）12.35kPa；（c）9.8kPa；（d）6.4kPa。

2.8 露天水池，水深 5 m 处的相对压强为：（b）

（a）5kPa；（b）49kPa；（c）147kPa；（d）205kPa。

2.9 垂直放置的矩形平板挡水，水深 3m，静水总压力 P 的作用点到水面的距离 y_D 为：（c）



（a）1.25m；（b）1.5m；（c）2m；（d）2.5m。

2.10 圆形水桶，顶部及底部用环箍紧，桶内盛满液体，顶箍与底箍所受张力之比为：（a）

（a）1/2；（b）1.0；（c）2；（d）3。

2.11 在液体中潜体所受浮力的大小：（b）

（a）与潜体的密度成正比；（b）与液体的密度成正比；（c）与潜体淹没的深度成正比；（d）与液体表面的压强成反比。

2.12 正常成人的血压是收缩压 100~120mmHg，舒张压 60~90mmHg，用国际单位制表示是多少 Pa?

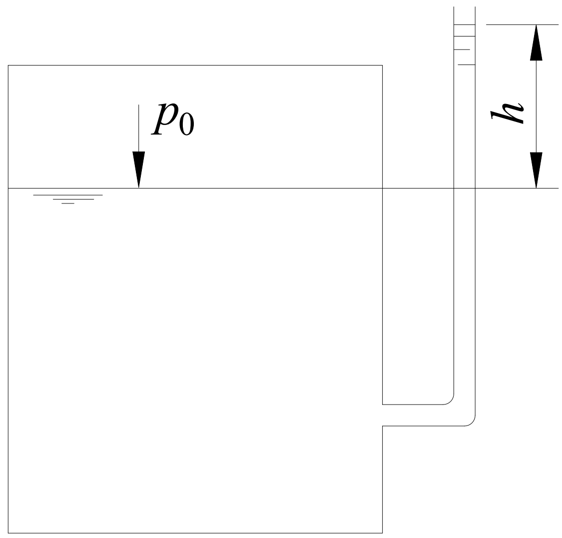
解：$\because\ 1\text{mm}=\dfrac{101.325\times10^3}{760}=133.3\ \text{Pa}$

$\therefore$收缩压：$100\sim120\ \text{mmHg}=13.33\ \text{kPa}\sim16.00\ \text{kPa}$

舒张压：$60\sim90\ \text{mmHg}=8.00\ \text{kPa}\sim12.00\ \text{kPa}$

答：用国际单位制表示收缩压：$100\sim120\ \text{mmHg}=13.33\ \text{kPa}\sim16.00\ \text{kPa}$；舒张压：$60\sim90\ \text{mmHg}=8.00\ \text{kPa}\sim12.00\ \text{kPa}$。

2.13　密闭容器，测压管液面高于容器内液面h=1.8m，液体的密度为850kg/m^3，求液面压强。



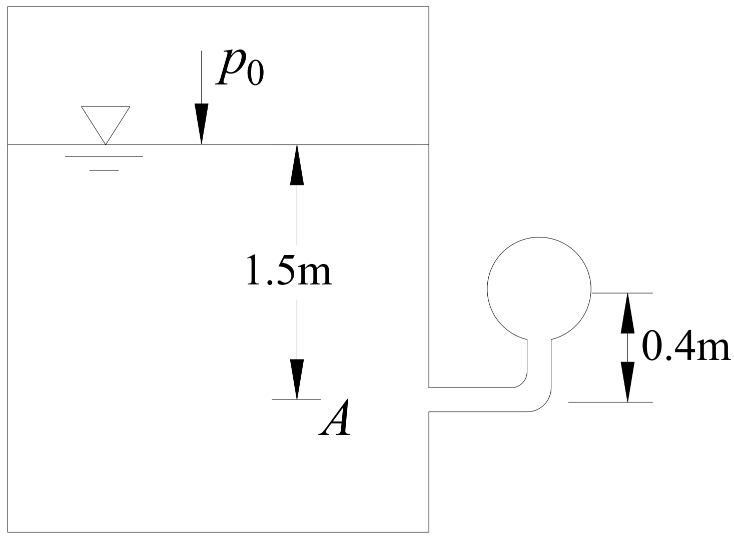
解：$p_0=p_a+\rho gh=p_a+850\times9.807\times1.8$

相对压强为：$15.00\ \text{kPa}$。

绝对压强为：$116.33\ \text{kPa}$。

答：液面相对压强为$15.00\ \text{kPa}$，绝对压强为$116.33\ \text{kPa}$。

2.14　密闭容器，压力表的示值为4900N/m^2，压力表中心比A点高0.4m，A点在水下1.5m，，求水面压强。



解： $p_0 = p_a + p - 1.1\rho g$

$= p_a + 4900 - 1.1 \times 1000 \times 9.807$

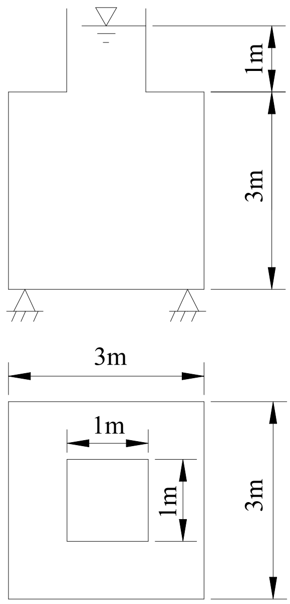
$= p_a - 5.888$ （kPa）

相对压强为： -5.888 kPa。

绝对压强为： 95.437 kPa。

答：水面相对压强为-5.888 kPa，绝对压强为95.437 kPa。

2.15　水箱形状如图所示，底部有 4 个支座，试求水箱底面上总压力和 4 个支座的支座反力，并讨论总压力和支座反力不相等的原因。



解：（1）总压力：$P_Z = A \cdot p = 4\rho g \times 3 \times 3 = 353.052$（kN）

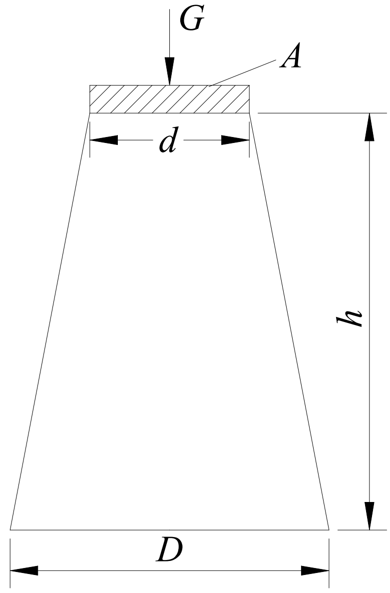
（2）支反力：$R = W_{总} = W_{水} + W_{箱} = W_{箱} + \rho g\left(1\times1\times1+3\times3\times3\right)$

$$= W_{箱} + 9807\times 28 = 274.596\,\text{kN} + W_{箱}$$

不同之原因：总压力位底面水压力与面积的乘积，为压力体$\times\rho g$。而支座反力与水体重量及箱体重力相平衡，而水体重量为水的实际体积$\times\rho g$。

答：水箱底面上总压力是353.052 kN，4 个支座的支座反力是274.596 kN。

2.16 盛满水的容器，顶口装有活塞A，直径d=0.4m，容器底的直径D=1.0m，高h=1.8m，如活塞上加力 2520N（包括活塞自重），求容器底的压强和总压力。



解：（1）容器底的压强：

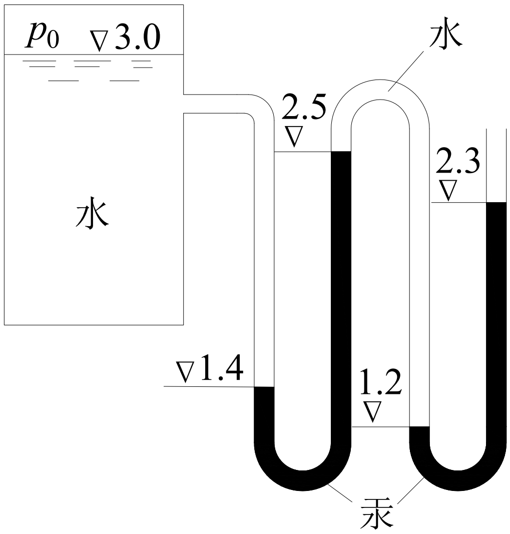
$$p_D = p_A + \rho g h = 2520 \Big/ \frac{\pi}{4}d^2 + 9807\times1.8 = 37.706$$（kPa）（相对压强）

（2）容器底的总压力：

$$P_D = A p_D = \frac{\pi}{4}D^2 \cdot p_D = \frac{\pi}{4}\times1^2\times37.706\times10^3 = 29.614$$（kN）

答：容器底的压强为37.706 kPa，总压力为29.614 kN。

2.17 用多管水银测压计测压，图中标高的单位为 m，试求水面的压强p_0。



解：$p_0 = p_4 - (3.0-1.4)\rho g$

$$= p_5 + (2.5-1.4)\rho_{Hg} g - (3.0-1.4)\rho g$$

$$= p_a + (2.3-1.2)\rho_{Hg} g - (2.5-1.2)\rho g + (2.5-1.4)\rho_{Hg} g - (3.0-1.4)\rho g$$

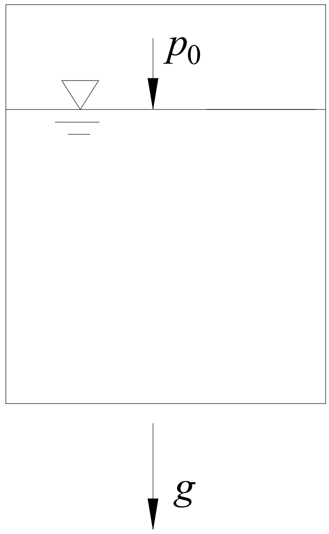
$$= p_a + (2.3+2.5-1.2-1.4)\rho_{Hg} g - (2.5+3.0-1.2-1.4)\rho g$$

$$= p_a + \left[(2.3+2.5-1.2-1.4)\times 13.6 - (2.5+3.0-1.2-1.4)\rho g\right]\rho g$$

$$= p_a + 265.00 \text{（kPa）}$$

答：水面的压强 $p_0 = 265.00$ kPa。

2.18　盛有水的密闭容器，水面压强为 p_0，当容器自由下落时，求水中压强分部规律。



解：选择坐标系，z 轴铅垂朝上。

由欧拉运动方程：$f_z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=0$

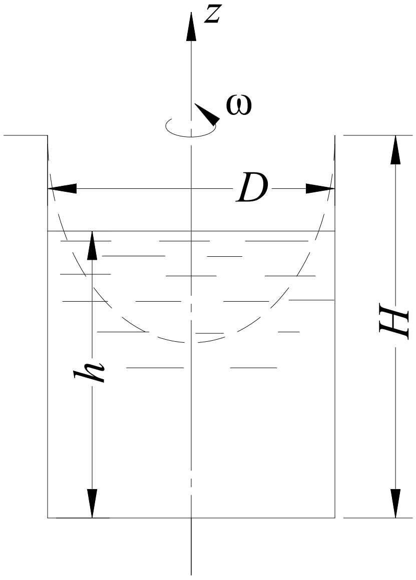
其中 $f_z=-g+g=0$

$\therefore\dfrac{\partial p}{\partial z}=0$， $p=0$

即水中压强分布 $p=p_0$

答：水中压强分部规律为 $p=p_0$。

2.19　圆柱形容器的半径 R =15cm，高 H =50cm，盛水深 h =30cm，若容器以等角速度 ω 绕 z 轴旋转，试求 ω 最大为多少时不致使水从容器中溢出。



解：建立随圆柱容器一起转动的坐标系$oxyz$，o点在水面最低点。

则有：$\rho f_x - \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$

$$\rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

即有：$\rho f_x dx + \rho f_y dy + \rho f_z dz = dp$

其中：$f_z = -g$；$f_x = r\omega^2 \cos\theta = x\omega^2$；$f_y = r\omega^2 \sin\theta = y\omega^2$

故有：$dp = \rho\left(x\omega^2 dx + y\omega^2 dy - g dz\right)$

$$p - p_0 = -\rho g z + \frac{\rho\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

$$p = p_0 - \rho g z + \frac{\rho\omega^2}{2} r^2$$

当在自由面时，$p = p_0$，$\therefore$自由面满足$z_0 = \dfrac{\omega^2}{2g} r^2$

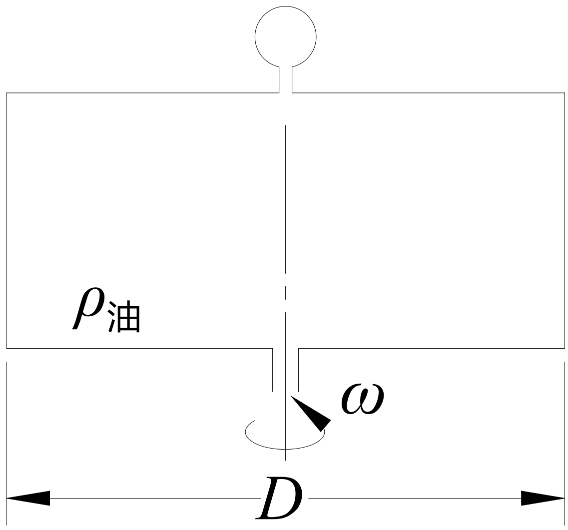
$\therefore p = p_0 + \rho g\left(z_0 - z\right) = p_0 + \rho g h$

上式说明，对任意点$\left(x, y, z\right) = \left(r, z\right)$的压强，依然等于自由面压强$p_0 + 水深 \times \rho g$。

$\therefore$等压面为旋转、相互平行的抛物面。

答：ω最大为 18.67rad/s 时不致使水从容器中溢出。

2.20 装满油的圆柱形容器，直径D=80cm，油的密度ρ=801kg/m^3，顶盖中心点装有真空表，表的读值为4900Pa，试求：（1）容器静止时，作用于顶盖上总压力的大小和方向；（2）容器以角速度ω=20r/s旋转时，真空表的读值不变，作用于顶盖上总压力的大小和方向。



解：（1）$\because$ $p_v = p_a - p' = 4.9$ kPa

$\therefore$相对压强 $p = p' - p_a = -4.9$ kPa

$$P = pA = -4.9\times\frac{\pi D^2}{4} = -4.9\times\frac{\pi}{4}\times 0.8^2 = -2.46 \text{（kN）}$$

负号说明顶盖所受作用力指向下。

（2）当$\omega = 20$ r/s时，压强分布满足 $p = p_0 - \rho g z + \frac{\rho\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)$

坐顶中心为坐标原点，$\therefore \left(x,y,z\right) = \left(0,0,0\right)$时，$p_0 = -4.9$ kPa

$$P = \iint_A p dA = \iint_A \left[p_0 - \rho g z + \frac{\rho\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)\right]dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{D/2}\left(p_0 + \frac{\rho\omega^2}{2}r^2\right)d\theta\cdot r dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{p_0 r^2}{2} + \frac{\rho\omega^2}{8}r^4\right)\Bigg|_0^{\frac{D}{2}}$$

$$=\frac{\pi p_0}{4}D^2+\frac{\pi\omega^2\rho}{64}D^4$$

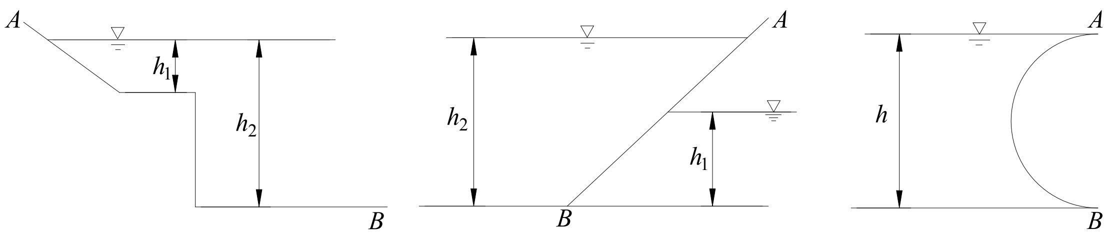
$$=-\frac{\pi\times0.8^2}{4}\times4.9+\frac{\pi\times20^2}{64}\times0.8^4\times\frac{801}{1000}$$

$=3.98$（kN）

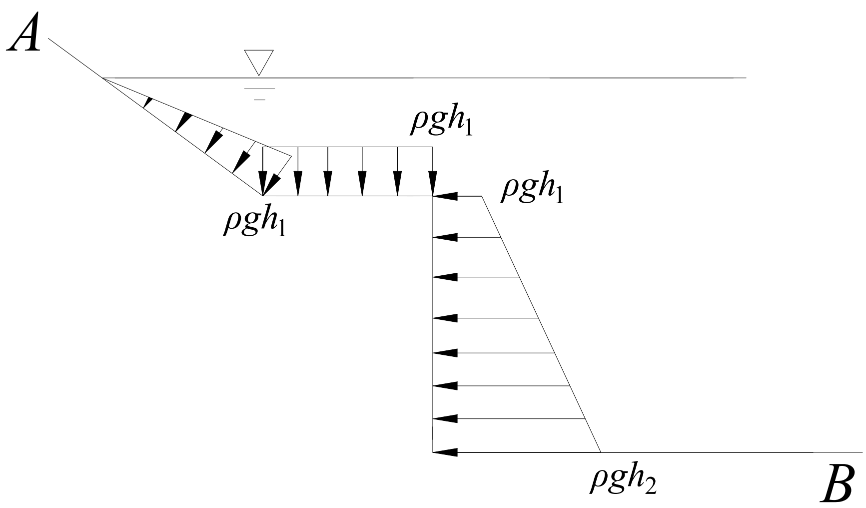
总压力指向上方。

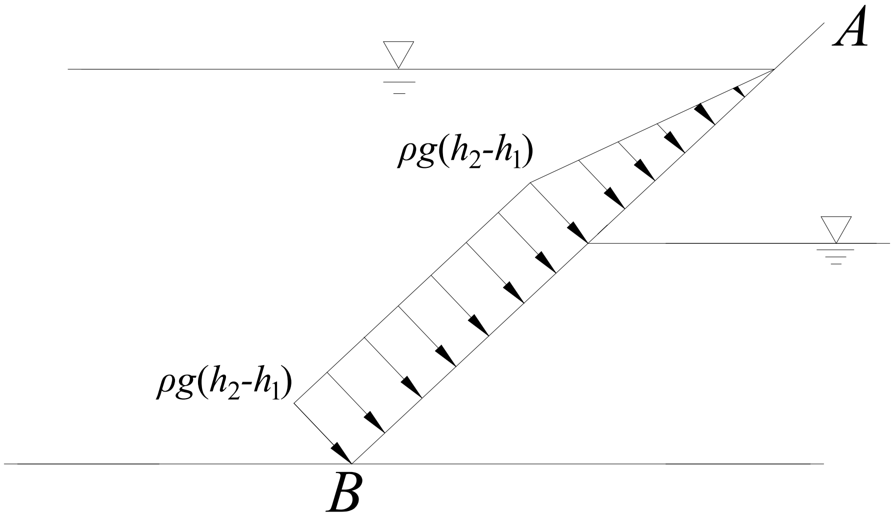
答：（1）容器静止时，作用于顶盖上总压力的大小为2.46 kN，方向向下；（2）容器以角速度ω=20 r/s旋转时，真空表的读值不变，作用于顶盖上总压力为3.98 kN，方向指向上方。

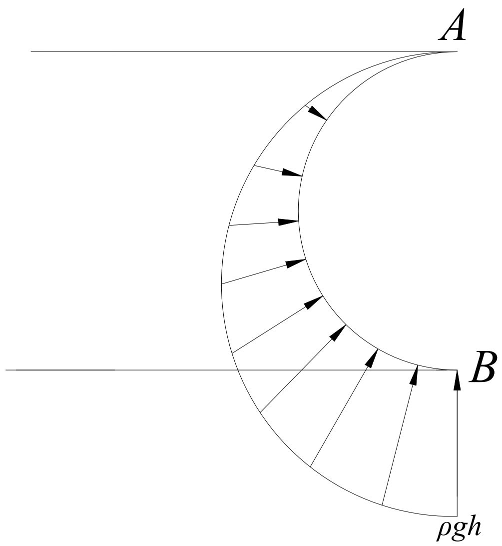
2.21　绘制题图中AB面上的压强分布图。



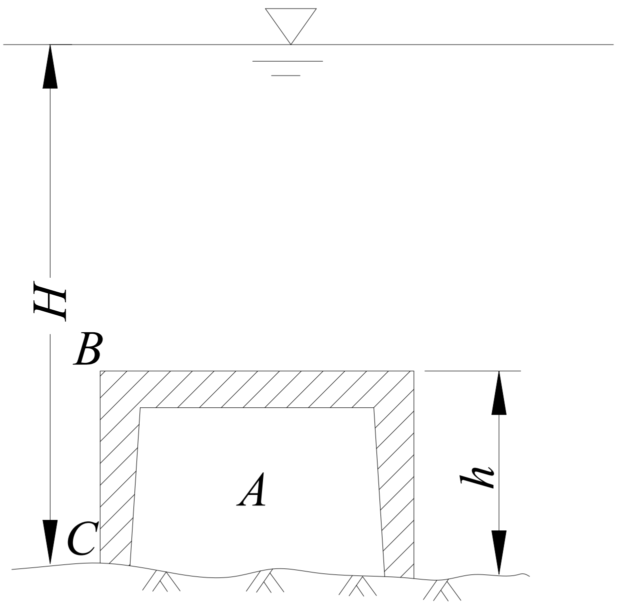
解：







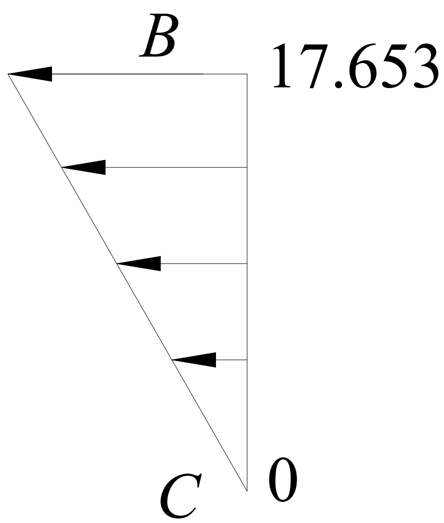
2.22　河水深 H =12m，沉箱高 h =1.8m，试求：（1）使河床处不漏水，向工作室 A 送压缩空气的压强是多少？（2）画出垂直壁 BC 上的压强分布图。



解：（1）当 A 室内 C 处的压强大于等于水压时，不会发生漏水现象。

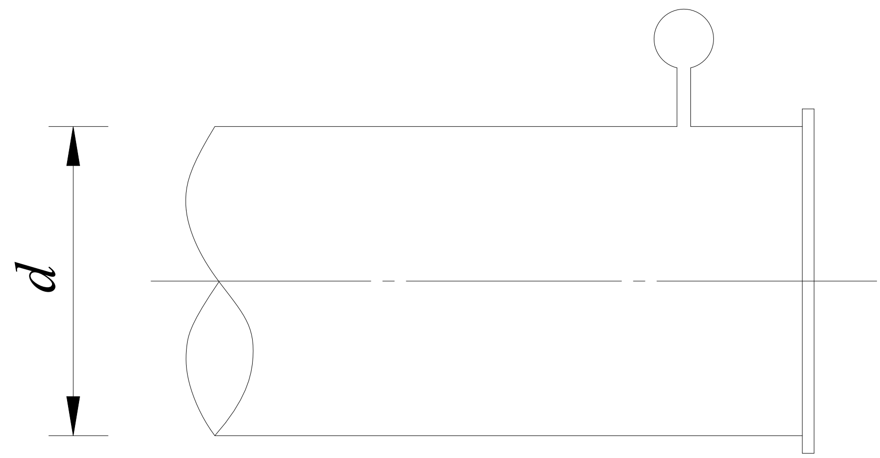
$$\therefore p \geq p_C = 12 \cdot \rho g = 117.684 \text{ kPa}$$

（2）BC 压强分布图为：



答：使河床处不漏水，向工作室 A 送压缩空气的压强是 117.684 kPa。

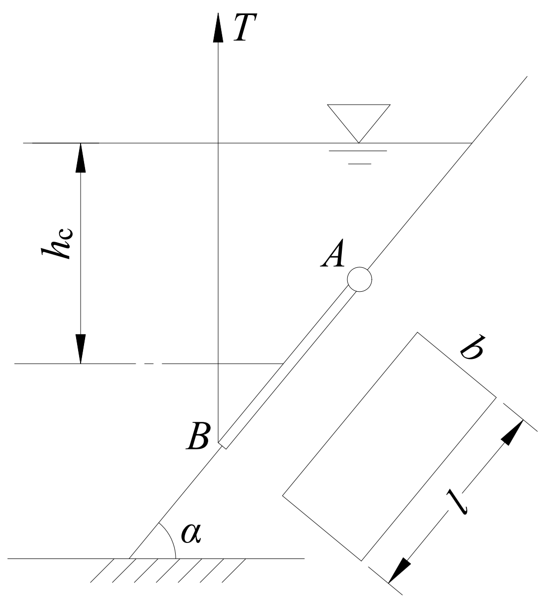
2.23　输水管道试压时，压力表的读值为 8.5at，管道直径 d =1m，试求作用在管端法兰堵头上的静水总压力。



解：$P = p \cdot A = \frac{\pi}{4}D^2 \cdot p = 8.5 \times 98.07 \times 1000 \times \frac{\pi}{4} \times 1^2 = 654.7$（kN）

答：作用在管端法兰堵头上的静水总压力为654.7 kN。

2.24　矩形平板闸门 AB，一侧挡水，已知长 l =2m，宽 b =1m，形心点水深 h_c =2m，倾角 α = 45°，闸门上缘 A 处设有转轴，忽略闸门自重及门轴摩擦力，试求开启闸门所需拉力 T 。



解：（1）解析法。

$$P = p_C \cdot A = h_C \rho g \cdot bl = 1000 \times 9.807 \times 2 \times 1 \times 2 = 39.228 \text{（kN）}$$

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C A} = \frac{h_C}{\sin\alpha} + \frac{\frac{bl^3}{12}}{\frac{h_C}{\sin\alpha}\cdot bl} = \frac{2}{\sin 45^\circ} + \frac{2^2}{\frac{12\times 2}{\sin 45^\circ}} = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{12} = 2.946\text{（m）}$$

对 A 点取矩，当开启闸门时，拉力 T 满足：

$$P\left(y_D - y_A\right) - T\cdot l\cos\theta = 0$$

$$T = \frac{P\cdot\left(y_D - y_A\right)}{l\cos\theta} = \frac{P\left[\frac{h_C}{\sin\alpha} + \frac{l^2}{12\cdot h_C/\sin\alpha} - \left(\frac{h_C}{\sin\alpha} - \frac{l}{2}\right)\right]}{l\cdot\cos\theta}$$

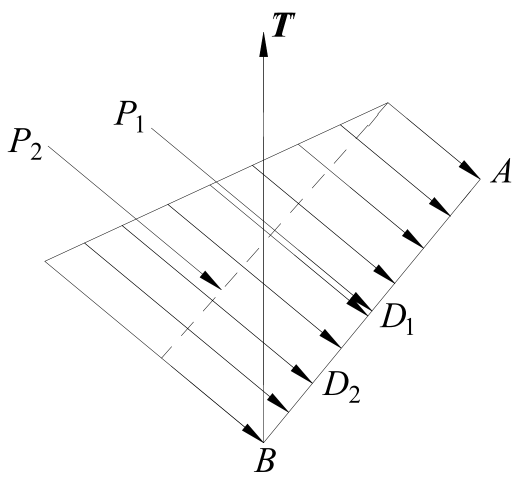
$$= \frac{P\left(\frac{l^2}{12\cdot h_C/\sin\alpha} + \frac{l}{2}\right)}{l\cdot\cos\theta} = 3.9228\times\frac{\sqrt{2}/12 + 1}{2\times\cos 45^\circ}$$

$$= 31.007\text{（kN）}$$

当 $T \geq 31.007$ kN 时，可以开启闸门。

（2）图解法。

压强分布如图所示：



$$p_A = \left(h_C - \frac{l}{2}\sin 45^\circ\right)\rho g = 12.68\text{（kPa）}$$

$$p_B = \left(h_C + \frac{l}{2}\sin 45^\circ\right)\rho g = 26.55\text{（kPa）}$$

$$P = \left(p_A + p_B\right)\times\frac{lb}{2} = \frac{\left(12.68 + 26.55\right)\times 2\times 1}{2} = 39.23\text{（kN）}$$

对 A 点取矩，有 $P_1 \cdot AD_1 + P_2 \cdot AD_2 - T \cdot AB \cdot \cos 45^\circ = 0$

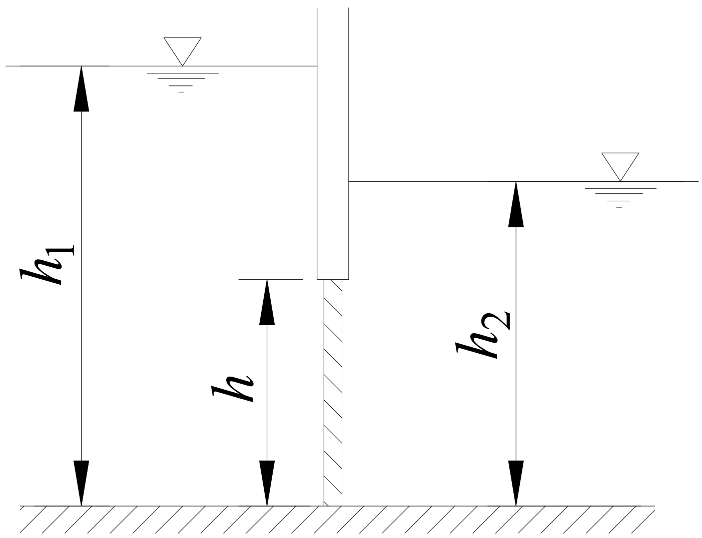
$$\therefore T = \frac{p_A \cdot l \cdot b \cdot \frac{l}{2} + \left(p_B - p_A\right) \cdot l \cdot \frac{1}{2} \times b \times \frac{2}{3} l}{l \cdot \cos 45^\circ}$$

$$= \frac{12.68 \times 1 \times 1 + \left(26.55 - 12.68\right) \times 1 \times \frac{2}{3}}{\cos 45^\circ}$$

$= 31.009$（kN）

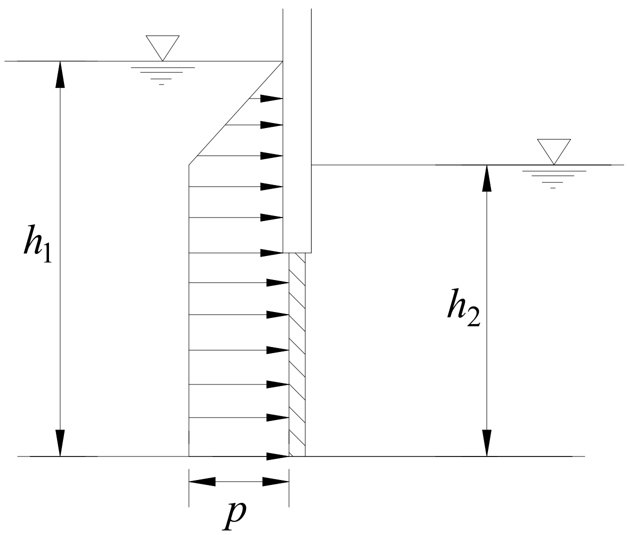
答：开启闸门所需拉力$T = 31.009$ kN。

2.25　矩形闸门高 h =3m，宽 b =2m，上游水深 h_1 =6m，下游水深 h_2 =4.5m，试求：（1）作用在闸门上的静水总压力；（2）压力中心的位置。



解：（1）图解法。

压强分布如图所示：



$$\because p=\left[\left(h_1-h\right)-\left(h_2-h\right)\right]\rho g$$

$$=\left(h_1-h_2\right)\rho g$$

$$=\left(6-4.5\right)\times 1000\times 9.807$$

$=14.71$（kPa）

$P=p\cdot h\cdot b=14.71\times 3\times 2=88.263$（kN）

合力作用位置：在闸门的几何中心，即距地面$(1.5\text{m},\dfrac{b}{2})$处。

（2）解析法。

$P_1=p_1A=\rho g\left(h_1-1.5\right)\cdot hb=\left(6-1.5\right)\times 9807\times 3\times 2=264.789$（kN）

$$y_{D1}=y_{C2}+\frac{I_C}{y_{C2}A}=4.5+\frac{\frac{bh^3}{12}}{4.5\times bh}=\frac{1}{4.5}\left(4.5^2+\frac{h^2}{12}\right)$$

$=\dfrac{1}{4.5}\times\left(20.25+0.75\right)=4.667$（m）

$P_2=p_2A=\rho g\left(h_2-1.5\right)\cdot hb=3\times 9.807\times 3\times 2=176.526$（kN）

$y_{D2}=y_{C1}+\dfrac{I_C}{y_{C1}A}=\dfrac{1}{y_{C1}}\left(y_{C1}^2+\dfrac{I_C}{A}\right)=\dfrac{1}{3}\left(3^2+0.75\right)=3.25$（m）

合力：$P=P_1-P_2=88.263$（kN）

合力作用位置（对闸门与渠底接触点取矩）：

$$y_DP=P_1\left(h_1-y_{D1}\right)-P_2\left(h_2-y_{D2}\right)$$

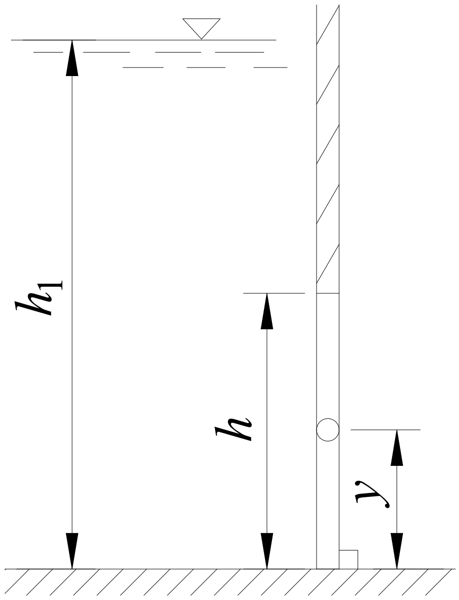
$$y_D=\frac{P_1\left(h_1-y_{D1}\right)-P_2\left(h_2-y_{D2}\right)}{P}$$

$$=\frac{264.789\times\left(6-4.667\right)-176.526\times\left(4.5-3.25\right)}{88.263}$$

$=1.499$（m）

答：（1）作用在闸门上的静水总压力88.263kN；（2）压力中心的位置在闸门的几何中心，即距地面$(1.5\text{m},\dfrac{b}{2})$处。

2.26 矩形平板闸门一侧挡水，门高h=1m，宽b=0.8m，要求挡水深h_1超过 2m 时，闸门即可自动开启，试求转轴应设的位置y。



解：当挡水深达到 h_1 时，水压力作用位置应作用在转轴上，当水深大于 h_1 时，水压力作用位置应作用于转轴上，使闸门开启。

$$P=\left(h_1-\frac{h}{2}\right)\rho g\cdot hb=1.5\times1000\times9.807\times1\times0.8=11.7684\text{（kPa）}$$

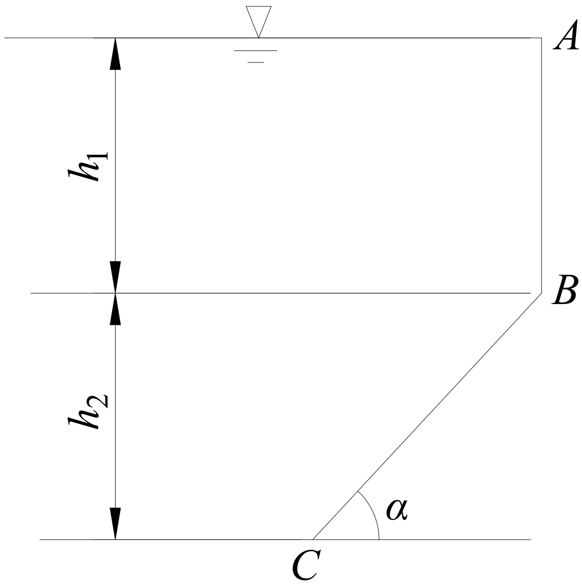
$$y_D=\left(h_1-\frac{h}{2}\right)+\frac{h^2}{\left(h_1-\frac{h}{2}\right)\times12}=1.5+\frac{1^2}{1.5\times12}=1.556\text{（m）}$$

∴转轴位置距渠底的距离为：$2-1.556=0.444$（m）

可行性判定：当 h_1 增大时 $y_C=\left(h_1-\frac{h}{2}\right)$ 增大，则 $\frac{I_C}{y_C A}$ 减小，即压力作用位置距闸门形越近，即作用力距渠底的距离将大于 0.444 米。

答：转轴应设的位置 $y=0.444$ m。

2.27　折板 ABC 一侧挡水，板宽 b =1m，高度 $h_1=h_2$ =2m，倾角 α =45°，试求作用在折板上的静水总压力。



解：水平分力：

$$P_x = \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot \rho g \cdot (h_1 + h_2) b = \frac{(2+2)^2}{2} \times 1000 \times 9.807 \times 1 = 78.456 \text{（kN）（→）}$$

竖直分力：

$$P_z = V \cdot \rho g = \rho g \left(h_1 h_2 \cot\alpha + \frac{1}{2} h_1 h_2 \cot\alpha \right) b$$

$$= \rho g \cdot \frac{3}{2} h_1 h_2 \cdot b$$

$$= 1000 \times 9.807 \times \frac{3}{2} \times 2 \times 2 \times 1$$

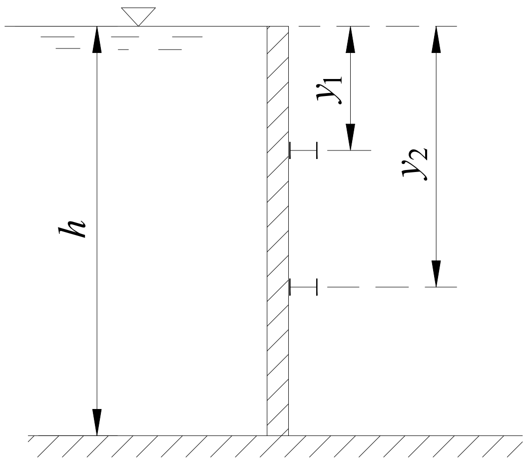
$$= 58.842 \text{（kN）（↓）}$$

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = 98.07 \text{（kN）}$$

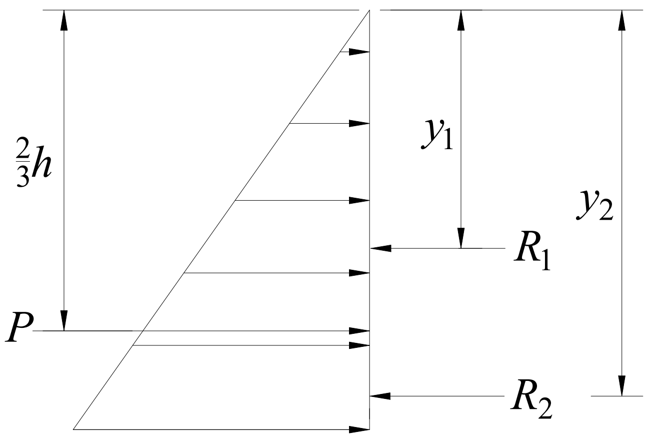
$$\tan\theta = \frac{P_z}{P_x} = 0.75 \text{，} \theta = \tan^{-1} \frac{P_z}{P_x} = 36.87^\circ$$

答：作用在折板上的静水总压力 $P = 98.07$ kN。

2.28 金属矩形平板闸门，门高 h =3m，宽 b =1m，由两根工字钢横梁支撑，挡水面与闸门顶边齐平，如要求两横梁所受的力相等，两横梁的位置 y_1、 y_2 应为多少？



解 ：



静水总压力：$P=\dfrac{h}{2}\cdot\rho g\cdot hb=\dfrac{3^2}{2}\times1000\times9.807\times1=44.132$（kN）

总压力作用位置：距渠底$\dfrac{1}{3}h=1$（m）

对总压力作用点取矩，$\because R_1=R_2$

$\therefore \dfrac{2}{3}h-y_1=y_2-\dfrac{2}{3}h$，$y_1+y_2=\dfrac{4}{3}h$

设水压力合力为$\dfrac{P}{2}$，对应的水深为h_1；$\dfrac{h_1^2}{2}\rho gb=\dfrac{h^2}{4}\rho gb$

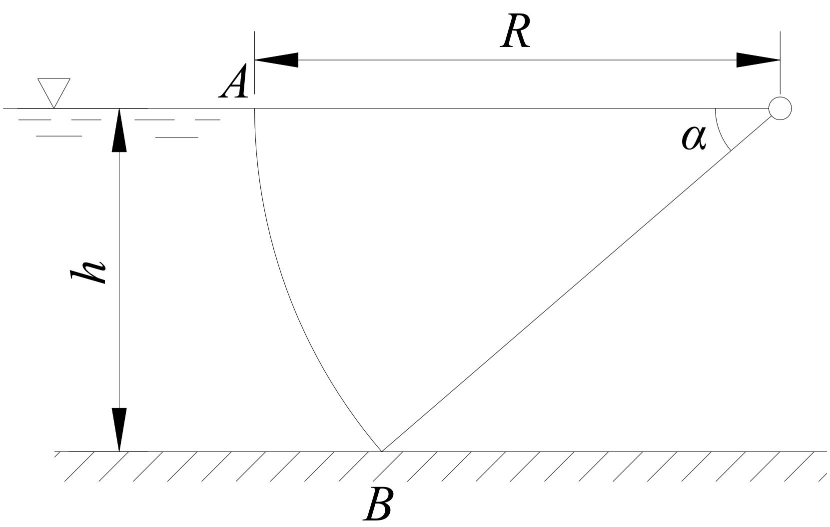
$$\therefore h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} h = 2.1213 \text{（m）}$$

$$\therefore y_1 = \frac{2}{3} h_1 = 1.414 \text{（m）}$$

$$y_2 = \frac{4}{3} h - y_1 = 4 - 1.414 = 2.586 \text{（m）}$$

答：两横梁的位置 $y_1 = 1.414$ m、 $y_2 = 2.586$ m。

2.29 一弧形闸门，宽 2m，圆心角 $\alpha = 30°$，半径 R =3m，闸门转轴与水平齐平，试求作用在闸门上的静水总压力的大小和方向。



解：（1）水平压力：$P_x = \dfrac{(R\sin\alpha)^2}{2}\rho g \cdot b = \dfrac{(3\times\sin 30^\circ)^2}{2} \times 2 \times 9.807$

$$= 22.066 \text{（kN）（→）}$$

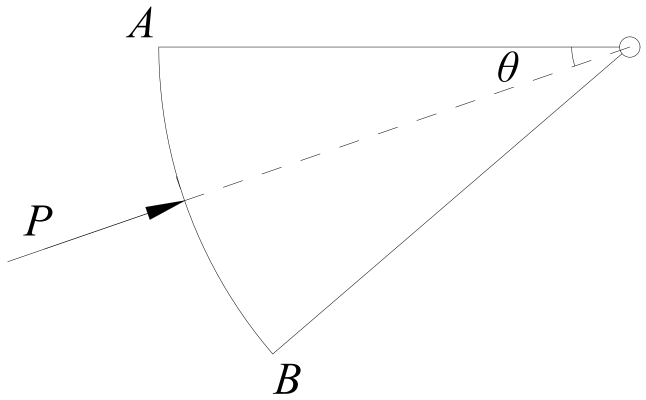
（2）垂向压力：$P_z = V\rho g = \rho g\left(\pi R^2 \cdot \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{2} R\sin\alpha \cdot R\cos\alpha\right)$

$$= 9.807 \times \left(\frac{\pi\times 3^2}{12} - \frac{3^2}{2}\sin 30^\circ \cos 30^\circ\right) \times 2$$

$$= 7.996 \text{（kN）（↑）}$$

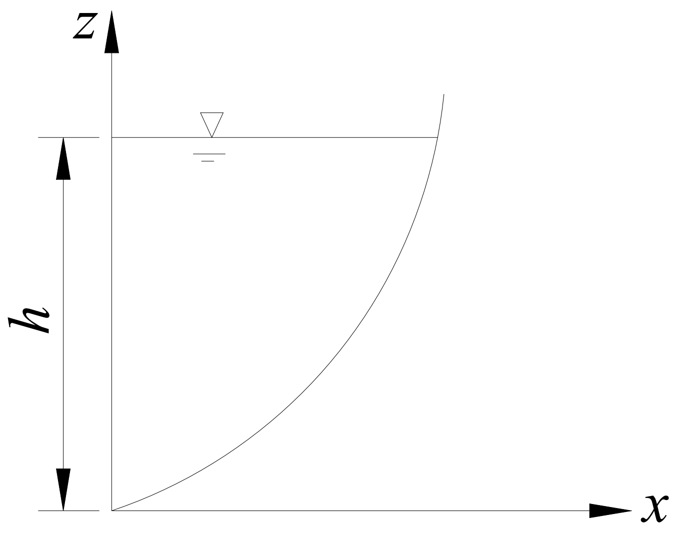
合力：$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{22.066^2 + 7.996^2} = 23.470$（kN）

$$\theta = \arctan\frac{P_z}{P_x} = 19.92^\circ$$



答：作用在闸门上的静水总压力$P = 23.470$ kN，$\theta = 19.92^\circ$。

2.30　挡水建筑物一侧挡水，该建筑物为二向曲面（柱面），$z = \alpha x^2$，α为常数，试求单位宽度曲面上静水总压力的水平分力P_x和铅垂分力P_z。



解：（1）水平压力：$P_x = \frac{h}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot 1 = \frac{1}{2}\rho g h^2$（→）

（2）铅垂分力：$P_z = \rho g \cdot 1 \cdot \int_0^{\sqrt{h/a}} (h - z) dx$

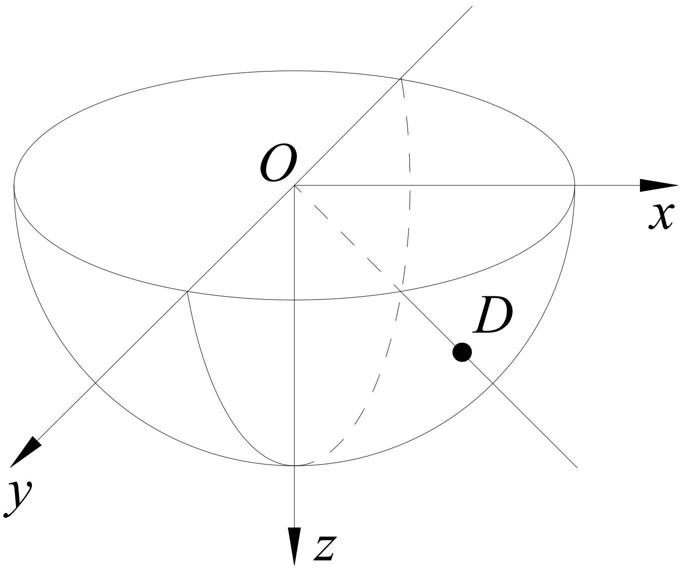
$$= \rho g \cdot \left(hx - \frac{a}{3} x^3 \right) \Big|_0^{\sqrt{h/a}}$$

$$= \rho g \sqrt{\frac{h}{a}} \left(h - \frac{a}{3} \cdot \frac{h}{a} \right)$$

$$=\frac{2}{3}\rho gh\sqrt{\frac{h}{a}}\ （\downarrow）$$

答：单位宽度曲面上静水总压力的水平分力$P_x=\frac{1}{2}\rho gh^2$，铅垂分力$P_z=\frac{2}{3}\rho gh\sqrt{\frac{h}{a}}$。

2.31　半径为R，具有铅垂轴的半球壳内盛满液体，求作用在被两个互相正交的垂直平面切出的 1/4 球面上的总压力和作用点D的位置。



解：（1）$P_x=\rho g\int_0^R zxdz=\rho g\int_0^R z\sqrt{R^2-z^2}dz\xrightarrow[du=-2zdz]{u=R^2-z^2}\frac{\rho g}{2}\int_0^{R^2}u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{3}\rho gR^3$（→）

形心坐标$z_C=\frac{P_x}{\rho gA}=\frac{\frac{1}{3}\rho gR^3}{\rho g\cdot\frac{\pi R^2}{4}}=\frac{3\pi}{4R}$

（2）同理，可求得$P_y=\frac{1}{3}\rho gR^3$（↙）

（3）$P_z=V\rho g=\frac{1}{8}\rho g\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\sin\theta\cdot d\theta d\varphi dr=\frac{1}{8}\rho g\cdot 4\pi\cdot\frac{R^3}{3}\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}$

$$=\frac{1}{8}\rho g\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\pi}{6}\rho gR^3\ （\downarrow）$$

$$P=\sqrt{P_x^2+P_y^2+P_z^2}=0.7045\rho gR^3$$

在 xoy 平行平面的合力为 $\frac{\sqrt{2}}{3}\rho gR^3$，在与 x,y 轴成 45° 铅垂面内，

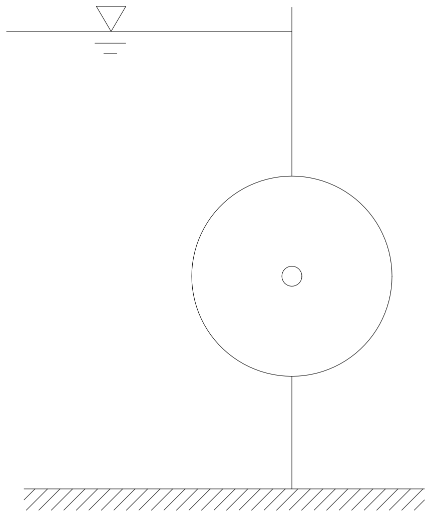
$$\arctan\frac{P_z}{P_{xy}}=\arctan\frac{\pi/6}{\sqrt{2}/3}=\arctan\frac{\sqrt{2}\pi}{4}=48.00^{\circ}$$

∴D 点的位置为：$z_D = R\sin 48.00^{\circ} = 0.743R$

$$x_D = y_D = R\cos 48.00^{\circ}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0.473R$$

答：作用在被两个互相正交的垂直平面切出的 1/4 球面上的总压力 $P = 0.7045\rho g R^3$，作用点 D 的位置 $x_D = y_D = 0.473R$，$z_D = 0.743R$。

2.32　在水箱的竖直壁面上，装置一均匀的圆柱体，该圆柱体可无摩擦地绕水平轴旋转，其左半部淹没在水下，试问圆柱体能否在上浮力作用下绕水平轴旋转，并加以论证。



答：不能。因总水压力作用线通过转轴 o，对圆柱之矩恒为零。

证明：设转轴处水深为 h_0，圆柱半径为 R，圆柱长为 b。

则有 $P_x = h_0\cdot\rho g\cdot 2R\cdot b = 2\rho g h_0 R b$（→）

$y_{Dx} = h_0 + \dfrac{I_C}{h_0 A}$，到转轴 o 的作用距离为 $\dfrac{I_C}{h_0 A}$。

即 $y_{Do} = \dfrac{\dfrac{b(2R)^3}{12}}{h_0\cdot 2R\cdot b} = \dfrac{R^2}{3h_0}$

$$P_z = V\rho g = \frac{\pi R^2}{2}\cdot b\cdot\rho g\ （\uparrow）$$

到 o 轴的作用距离为 $\frac{4R}{3\pi}$

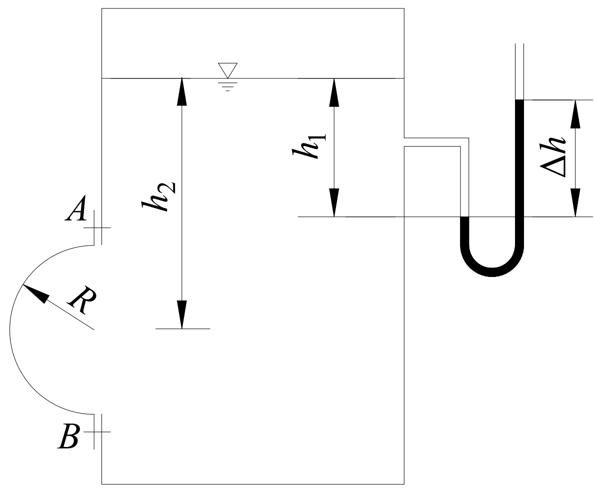
两力对 o 轴的矩为：$P_x \cdot y_{Dx} - P_z \cdot \frac{4R}{3\pi}$

$$= 2\rho g h_0 Rb \cdot \frac{R^2}{3h_0} - \frac{\pi R^2}{2}\rho g b \cdot \frac{4R}{3\pi}$$

$$= \rho g\left(\frac{2}{3}R^3 b - \frac{2}{3}R^3 b\right)$$

$$= 0$$

2.33　密闭盛水容器，水深 h_1 =60cm，h_2 =100cm，水银测压计读值 Δh =25cm，试求半径 R =0.5m 的半球形盖 AB 所受总压力的水平分力和铅垂分力。



解：（1）确定水面压强 p_0。

$$p_0 = \Delta h \cdot \rho_{Hg} \cdot g = \rho g\left(\Delta h \cdot \frac{\rho_{Hg}}{\rho} - h_1\right)$$

$$= 1000 \times 9.807 \times (0.25 \times 13.6 - 0.6)$$

$$= 27.460$$（kPa）

（2）计算水平分量 P_x。

$$P_x = p_C \cdot A = (p_0 + h_2 \rho g) \cdot \pi R^2$$

$$= (27.460 + 1.0 \times 9.807) \times 0.5^2 \pi$$

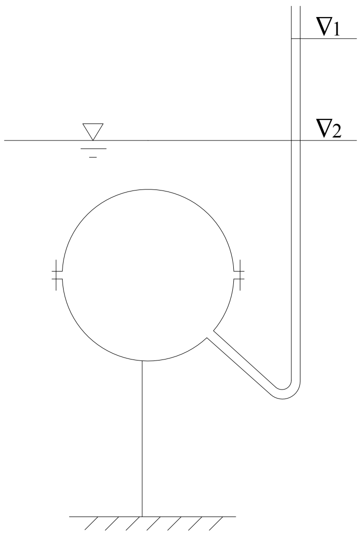
$$= 29.269$$（kN）

（3）计算铅垂分力P_z。

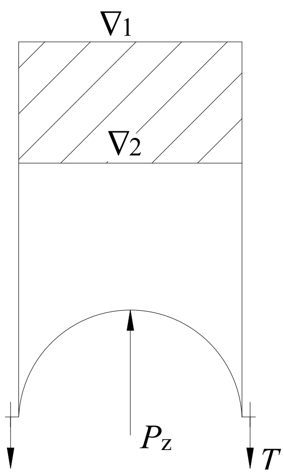
$$P_z = V\rho g = \frac{4\pi R^3}{3} \times \frac{1}{2} \times \rho g = \frac{4 \times \pi \times 0.5^3}{6} \times 9.807 = 2.567 \text{（kN）}$$

答：半球形盖 AB 所受总压力的水平分力为29.269 kN，铅垂分力为2.567 kN。

2.34 球形密闭容器内部充满水，已知测压管水面标高∇_1=8.5m，球外自由水面标高∇_2=3.5m，球直径D=2m，球壁重量不计，试求：（1）作用于半球连接螺栓上的总压力；（2）作用于垂直柱上的水平力和竖向力。



解：（1）取上半球为研究对象，受力如图所示。



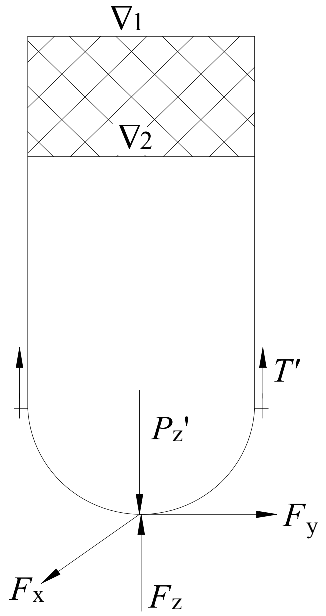
$$\because P_z = V\rho g = \frac{\pi D^2}{4} \cdot (\nabla_1 - \nabla_2) \cdot \rho g$$

$$= \frac{\pi \times 2^2}{4} \times (8.5 - 3.5) \times 1000 \times 9.807$$

$=154.048$（kN）

$\therefore T=P_z=154.048$（kN）

（2）取下半球为研究对象，受力如图。



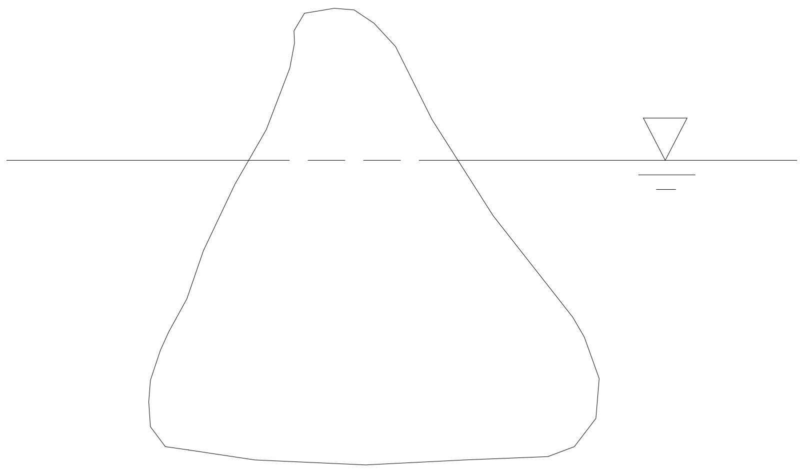
$$\because P_z'=\frac{\pi D^2}{4}\cdot\left(\nabla_1-\nabla_2\right)\cdot\rho g=\frac{\pi\times 2^2}{4}\times\left(8.5-3.5\right)\times 1000\times 9.807=154.048 \text{（kN）}$$

$$F_z=P_z'-T'=0$$

$$F_x=F_y=0$$

答：（1）作用于半球连接螺栓上的总压力为154.048kN；（2）作用于垂直柱上的水平力和竖向力$F_x=F_y=0$。

2.35　极地附近的海面上露出冰山的一角，已知冰山的密度为920kg/m^3，海水的密度为1025kg/m^3，试求露出海面的冰山体积与海面下的体积之比。



解：设冰山的露出体积为V_1，在水上体积为V_2。

$$\text{则有}\left(V_1+V_2\right)\rho_{冰}\cdot g=V_2\rho_{海水}\cdot g$$

$$\therefore\left(1+\frac{V_1}{V_2}\right)=\frac{\rho_{海水}}{\rho_{冰}}$$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\rho_{海水}}{\rho_{冰}}-1=\frac{1025}{920}-1=0.114$$

答：露出海面的冰山体积与海面下的体积之比为0.114。

第三章习题答案

选择题（单选题）

3.1　用欧拉法表示流体质点的加速度$\vec{a}$等于：（d）

（a）$\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$；（b）$\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}$；（c）$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$；（d）$\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$。

3.2　恒定流是：（b）

（a）流动随时间按一定规律变化；（b）各空间点上的流动参数不随时间变化；（c）各过流断面的速度分布相同；（d）迁移加速度为零。

3.3　一维流动限于：（c）

（a）流线是直线；（b）速度分布按直线变化；（c）流动参数是一个空间坐标和时间变量的函数；（d）流动参数不随时间变化的流动。

3.4 均匀流是：（b）

（a）当地加速度为零；（b）迁移加速度为零；（c）向心加速度为零；（d）合加速度为零。

3.5 无旋流动限于：（c）

（a）流线是直线的流动；（b）迹线是直线的流动；（c）微团无旋转的流动；（d）恒定流动。

3.6 变直径管，直径 d_1=320mm, d_2=160mm,流速 v_1=1.5m/s。v_2 为：（c）

（a）3m/s；（b）4m/s；（c）6m/s；（d）9m/s。

2.36 已知速度场 $u_x=2t+2x+2y$，$u_y=t-y+z$，$u_z=t+x-z$。试求点（2，2，1）在 t=3 时的加速度。

解：$$a_x=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}$$

$$=2+(2t+2x+2y)\cdot 2+(t-y+z)\cdot 2+0$$

$$=2+6t+4x+2y+2z$$

$$=2(3t+2x+y+z+1)$$

$$a_y=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$=1+0-(t-y+z)+(t+x-z)\cdot 1$$

$$=1+x+y-2z$$

$$a_z=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$=1+(2t+2x+2y)+0-(t+x-z)$$

$$=1+t+x+2y+z$$

$a_x(3,2,2,1)=2\times(3\times 3+2\times 2+2+1+1)=34$（m/s²）

$a_y(3,2,2,1)=1+2+2-2=3$（m/s²）

$$a_z(3,2,2,1)=1+3+2+4+1=11\text{ (m/s²)}$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{34^2+3^2+11^2}=35.86\text{ (m/s²)}$$

答：点（2，2，1）在t=3 时的加速度$a=35.86$ m/s²。

3.8 已知速度场$u_x=xy^2$，$u_y=-\frac{1}{3}y^3$，$u_z=xy$。试求：（1）点（1，2，3）的加速度；（2）是几维流动；（3）是恒定流还是非恒定流；（4）是均匀流还是非均匀流。

解：（1）$a_x=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=xy^4-\frac{2}{3}xy^4+0=\frac{1}{3}xy^4$

$$a_y=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}=0+0+\frac{1}{3}y^5+0=\frac{1}{3}y^5$$

$$a_z=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=0+xy^3-\frac{1}{3}xy^3=\frac{2}{3}xy^3$$

$$a_x(1,2,3)=\frac{1}{3}\times1\times2^4=\frac{16}{3}\text{ (m/s²)}$$

$$a_y(1,2,3)=\frac{1}{3}\times2^5=\frac{32}{3}\text{ (m/s²)}$$

$$a_x(1,2,3)=\frac{2}{3}\times1\times2^3=\frac{16}{3}\text{ (m/s²)}$$

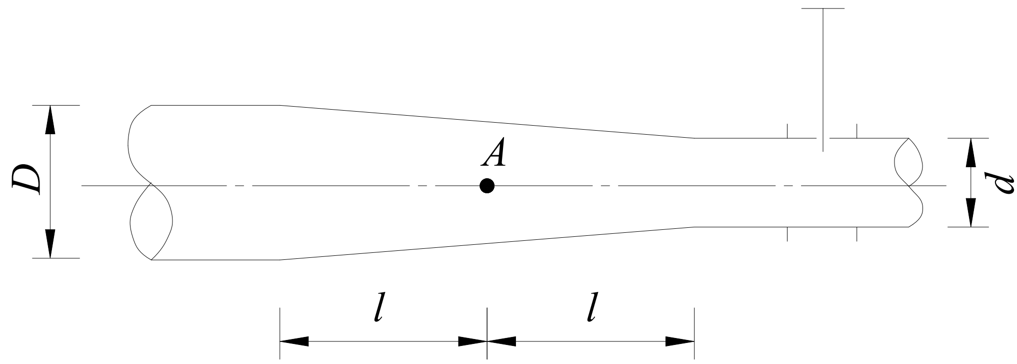
$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=13.06\text{ (m/s²)}$$

（2）二维运动，空间点的运动仅与x、y坐标有关；

（3）为恒定流动，运动要素与t无关；

（4）非均匀流动。

3.9 管道收缩段长l=60cm，直径D=20cm，d=10cm，通过流量Q=0.2m^3/s，现逐渐关闭调节阀门，使流量成线性减小，在 20s 内流量减为零，试求在关闭阀门的第 10s 时，管轴线上A点的加速度（假设断面上速度均匀分布）。



解：解法一

流量函数：$Q(t)=0.2-\dfrac{0.2}{20}t=0.2(1-0.05t)$

直径函数：$d(x)=D_1-\dfrac{x}{2l}(D_1-d_2)=\dfrac{x}{2l}d_2+\left(1-\dfrac{x}{2l}\right)D_1$

∴流速方程$(0\sim 2l)$：$u(x,t)=\dfrac{4Q(t)}{\pi d^2(x)}$

加速度：$a(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$=\frac{4}{\pi d^2(x)}\frac{\partial Q}{\partial t}+u\frac{4Q}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{d^2(x)}\right]$$

$$=\frac{4}{\pi d^2(x)}\cdot(-0.01)+u\frac{4Q}{\pi}\cdot(-1)\frac{2}{d^3(x)}\frac{\partial d}{\partial x}$$

$$=\frac{4}{\pi d^2(x)}\left[-0.01-\frac{4Q^2}{\pi d^3(x)}\left(\frac{d_2}{l}-\frac{D_1}{l}\right)\right]$$

对 A 点：$a_A=a(l,10)=\dfrac{4}{\pi d^2(l)}\left[-0.01-\dfrac{4Q^2(10)}{\pi d^3(l)}\left(\dfrac{D_1-d_2}{l}\right)\right]$

$d(l)=\dfrac{d_2+D_1}{2}=\dfrac{0.2+0.1}{2}=0.15$（m）

$Q(10)=0.1$（m³/s）

代入得：$a_A=\dfrac{4}{\pi\times 0.15^2}\left[-0.01-\dfrac{4\times 0.1^2}{\pi\times 0.15^3}\cdot\left(\dfrac{0.2-0.1}{0.6}\right)\right]=35.01$（m/s²）

解法二近似解法

$$a=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u_2-u_1}{2l}$$

在$t=10$（s）时，$Q=0.1$（m³/s），$d=0.15$（m）

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{4}{\pi d^2}\cdot\left(-\frac{0.2}{20}\right)=\frac{-4\times0.01}{\pi d^2}=-\frac{1.78}{\pi}$$

$$u_2=\frac{0.1\times4}{\pi\times0.1^2}=\frac{40}{\pi}$$

$$u_1=\frac{0.1\times4}{\pi\times0.2^2}=\frac{10}{\pi}$$

$$u=\frac{0.1\times4}{\pi\times0.15^2}=\frac{17.78}{\pi}$$

$$\therefore a_A=-\frac{1.78}{\pi}+\frac{17.78}{\pi}\cdot\frac{(40-10)/\pi}{2l}=44.47\ （\text{m/s}^2）$$

答：在关闭阀门的第 10s 时，管轴线上A点的加速度为35.01m/s²。

3.10 已知平面流动的速度场为$u_x=a$，$u_y=b$，a、b为常数，试求流线方程并画出若干条上半平面（y>0）的流线。

解：$\because \dfrac{dx}{u_x}=\dfrac{dy}{u_y}$

$\therefore bdx-ady=0$

$bx-ay=c$　　或　　$y=\dfrac{b}{a}x+c'$　为线性方程

答：流线方程为$bx-ay=c$。

3.11 已知平面流动的速度场为$u_x=-\dfrac{cy}{x^2+y^2}$，$u_y=\dfrac{cx}{x^2+y^2}$，其中c为常数。试求流线方程并画出若干条流线。

解：　$\because \dfrac{dx}{u_x}=\dfrac{dy}{u_y}$

$\therefore cxdx+cydy=0$

$x^2+y^2=c'^2$为圆心在$(0,0)$的圆族。

答：流线方程为$x^2+y^2=c'^2$，为圆心在$(0,0)$的圆族。

3.12 已知平面流动的速度场为$\vec{u}=(4y-6x)t\vec{i}+(6y-9x)t\vec{j}$。求$t$=1 时的流线方程，并画出 1≤$x$≤4 区间穿过$x$轴的 4 条流线图形。

解：$\dfrac{dx}{(4y-6x)t}=\dfrac{dy}{(6y-9x)t}$

当$t=1$秒时，$(6y-9x)dx=(4y-6x)\partial y$

$$3(2y-3x)dx-2(2y-3x)\partial y=0$$

$$3dx-2dy=0$$

$$\therefore 3x-2y=c$$

过$(1,0)$的流线为：$3x-2y=3$

过$(2,0)$的流线为：$3x-2y=6$

过$(3,0)$的流线为：$3x-2y=9$

过$(4,0)$的流线为：$3x-2y=12$

答：t=1 时的流线方程为$3x-2y=c$。

3.13 不可压缩流体，下面的运动能否出现（是否满足连续性条件）?

（1）$u_x=2x^2+y^2$；$u_y=x^3-x(y^2-2y)$

（2）$u_x=xt+2y$；$u_y=xt^2-yt$

（3）$u_x=y^2+2xz$；$u_y=-2yz+x^2yz$；$u_z=\dfrac{1}{2}x^2z^2+x^3y^4$

解：（1）$\because \dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=4x-x(2y-2)\neq 0$

$\therefore$不能出现。

（2）$\because \dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=t-t=0$

$\therefore$能出现。

（3）$\because \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=2z-2z+x^2z+x^2z\neq 0$

$\therefore$不能出现。

3.14 已知不可压缩流体平面流动，在 y 方向的速度分量为 $u_y = y^2$ -2 x +2 y 。试求速度在 x 方向的分量 u_x 。

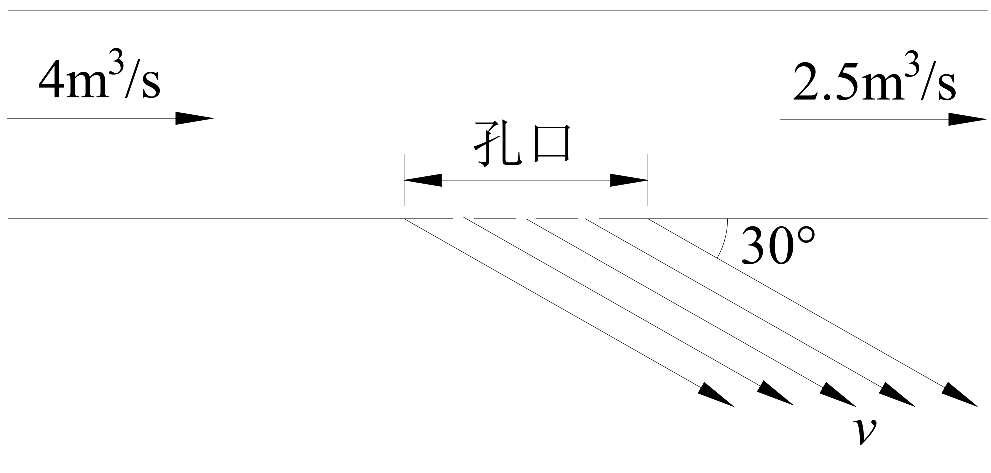
解：$\because \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$

$\therefore \frac{\partial u_x}{\partial x}=-\left(2+2y\right)$

$\therefore u_x=-\left(2+2y\right)x+c\left(y\right)=-2x-2xy+c\left(y\right)$

答：速度在 x 方向的分量 $u_x=-2x-2xy+c\left(y\right)$。

3.15 在送风道的壁上有一面积为 0.4 m^2 的风口，试求风口出流的平均速度 v 。



解：　$\because Q_1=Q_2+Q_3$　　其中：$Q_1=4$ m³/s，$Q_2=2.5$ m³/s

$\therefore Q_3=4-2.5=1.5$（m³/s）

$Q_3=A\cdot v\cdot \sin 30^\circ=0.4\times\frac{1}{2}\times v$

$\therefore v=\frac{1.5}{0.2}=7.5$（m/s）

答：风口出流的平均速度 $v=7.5$ m/s。

3.16 求两平行平板间，流体的单宽流量，已知速度分布为$u=u_{\max}[1-\left(\frac{y}{b}\right)^2]$。式中$y=0$为中心线，$y=\pm b$为平板所在位置，$u_{\max}$为常数。

解：单宽流量为：$q=1.0\int_{-b}^{+b}udy$

$$=2\int_{0}^{+b}\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]\cdot u_{\max}dy$$

$$=2u_{\max}\left[b-\frac{1}{3}b\right]$$

$$=\frac{4}{3}bu_{\max}$$

答：两平行平板间，流体的单宽流量为$\frac{4}{3}bu_{\max}$。

3.17 下列两个流动，哪个有旋？哪个无旋？哪个有角变形？哪个无角变形？

（1）$u_x=-ay$，$u_y=ax$；$u_z=0$

（2）$u_x=-\frac{cy}{x^2+y^2}$，$u_y=\frac{cx}{x^2+y^2}$，$u_z=0$

式中a、c是常数。

解：（1）$\omega_t=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(a+a)=a$有旋。

$$\varepsilon_{yx}=\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(a-a)=0$$无角变形。

（2）$\omega_t=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{c\left(x^2+y^2\right)-2cx^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{-c\left(x^2+y^2\right)+2cy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2c\left(x^2+y^2\right)-2c\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$=0$无旋（不包括奇点$(0,0)$）。

$$\varepsilon_{yx}=\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\frac{2c\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{c\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\neq 0$$ 存在角变形运动。

3.18 已知有旋流动的速度场 $u_x=2y+3z$，$u_y=2z+3x$，$u_z=2x+3y$。试求旋转角速度和角变形速度。

解：$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}(3-2)=\frac{1}{2}$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}(3-2)=\frac{1}{2}$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(3-2)=\frac{1}{2}$$

$$\omega=\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon_{yx}=\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{5}{2}$$

$$\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)=\frac{5}{2}$$

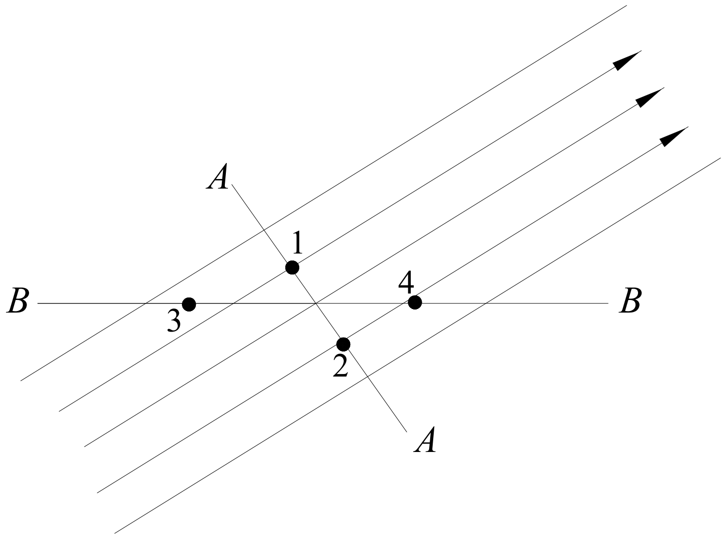
$$\varepsilon_{zy}=\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=\frac{5}{2}$$

答：旋转角速度 $\omega_x=\omega_y=\omega_z=\frac{1}{2}$，角变形速度 $\varepsilon_{yx}=\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{yz}=\frac{5}{2}$。

第四章习题答案

选择题（单选题）

4.1 等直径水管，A-A 为过流断面，B-B 为水平面，1、2、3、4 为面上各点，各点的流动参数有以下关系：（c）

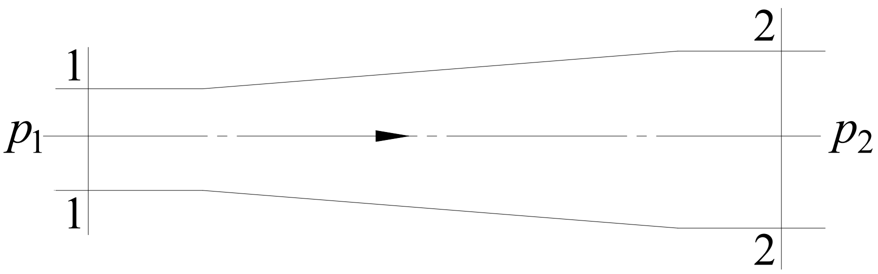


（a） $p_1 = p_2$；（b） $p_3 = p_4$；（c） $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$；（d） $z_3 + \frac{p_3}{\rho g} = z_4 + \frac{p_4}{\rho g}$。

4.2 伯努利方程中 $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}$ 表示：（a）

（a）单位重量流体具有的机械能；（b）单位质量流体具有的机械能；（c）单位体积流体具有的机械能；（d）通过过流断面流体的总机械能。

4.3 水平放置的渐扩管，如忽略水头损失，断面形心点的压强，有以下关系：（c）



（a） $p_1 > p_2$；（b） $p_1 = p_2$；（c） $p_1 < p_2$；（d）不定。

4.4 黏性流体总水头线沿程的变化是：（a）

（a）沿程下降；（b）沿程上升；（c）保持水平；（d）前三种情况都有可能。

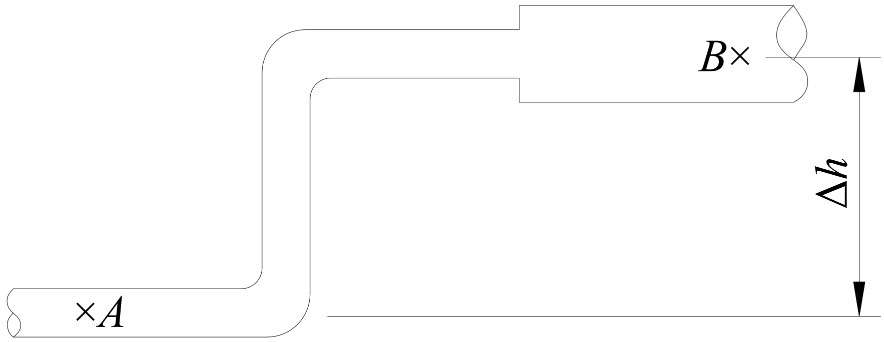
4.5 黏性流体测压管水头线的沿程变化是：（d）

（a）沿程下降；（b）沿程上升；（c）保持水平；（d）前三种情况都有可能。

4.6 平面流动具有流函数的条件是：（d）

无黏性流体；（b）无旋流动；（c）具有速度势；（d）满足连续性。

4.7 一变直径的管段 AB，直径 d_A=0.2m，d_B=0.4m，高差 Δh=1.5m，今测得 p_A=30 kN/m^2，p_B=40 kN/m^2，B 处断面平均流速 v_B=1.5 m/s.。试判断水在管中的流动方向。



解：以过 A 的水平面为基准面，则 A、B 点单位重量断面平均总机械能为：

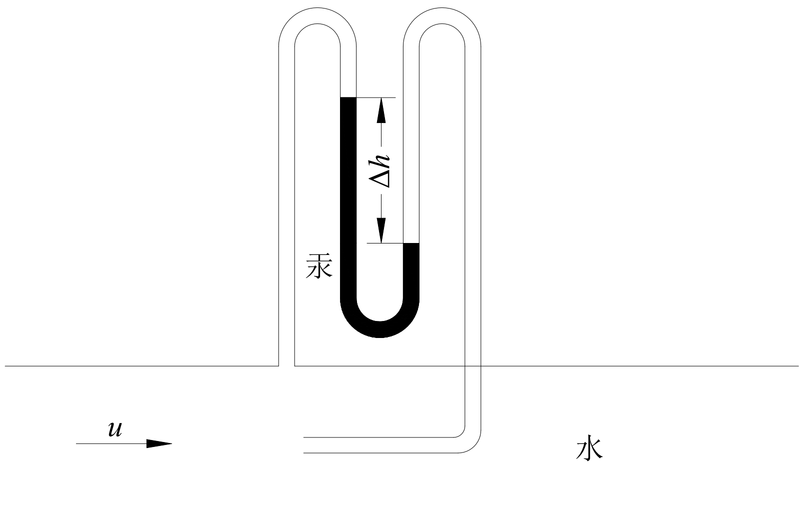
$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{\alpha_A v_A^2}{2g} = 0 + \frac{30\times10^3}{1000\times9.807} + \frac{1.0\times1.5^2}{2\times9.807}\times\left(\frac{0.4}{0.2}\right)^4 = 4.89 \text{（m）}$$

$$H_B = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{\alpha_B v_B^2}{2g} = 1.5 + \frac{40\times10^3}{1000\times9.807} + \frac{1.0\times1.5^2}{2\times9.807} = 5.69 \text{（m）}$$

∴水流从 B 点向 A 点流动。

答：水流从 B 点向 A 点流动。

4.8 利用皮托管原理，测量水管中的点速度 v。如读值 Δh=60mm，求该点流速。

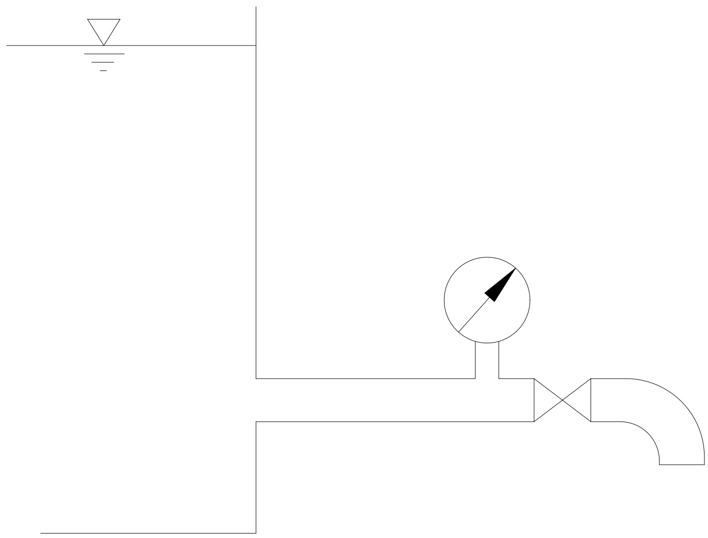


解：$u = \sqrt{\dfrac{2\cdot\Delta p}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{2g\left(\rho_{Hg}-\rho\right)\Delta h}{\rho}} = \sqrt{2\times9.807\times12.6\times60\times10^{-3}} = 3.85$（m/s）

答：该点流速 $u = 3.85$ m/s。

4.9 水管直径 50mm，末端阀门关闭时，压力表读值为 21 kN/m^2。阀门打开后读值降至

5.5 kN/m^2，如不计水头损失，求通过的流量。



解：（1）水箱水位 $H=z+\dfrac{p}{\rho g}=0+\dfrac{21\times10^3}{1000\times9.807}=2.14$（m）

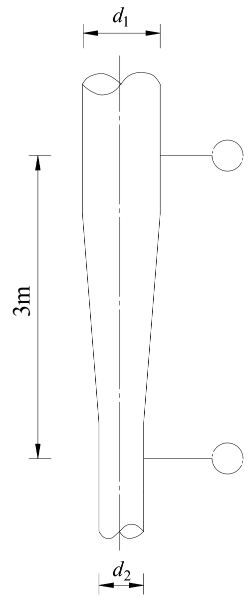
（2）阀门开启后，从水箱液面到仪表处列伯努利方程，可得：$H=\dfrac{p}{\rho g}+\dfrac{v^2}{2g}$

$$\therefore v=\sqrt{2g\left(H-\frac{p}{\rho g}\right)}=\sqrt{2\times9.807\times\left(2.14-\frac{5.5\times10^3}{1000\times9.807}\right)}=5.57\text{（m/s）}$$

$$Q=vA=5.57\times\frac{\pi\times0.05^2}{4}=0.011\text{（m}^3\text{/s）}$$

答：通过的流量 $Q=0.011$ m^3/s。

4.10 水在变直径竖管中流动，已知粗管直径 d_1=300mm，流速 v_1=6 m/s 。为使两断面的压力表读值相同，试求细管直径（水头损失不计）。



解：以过下压力表处的水平面为基准面，列伯努利方程如下：

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w1-2}$$

$\because h_{w1-2}=0$，$z_1=3$ m，$z_2=0$

取 $\alpha_1=\alpha_2$，当 $p_1=p_2$ 时，有：

$$v_2^2=2gz_1+v_1^2=2\times 9.807\times 3+6^2=94.842$$

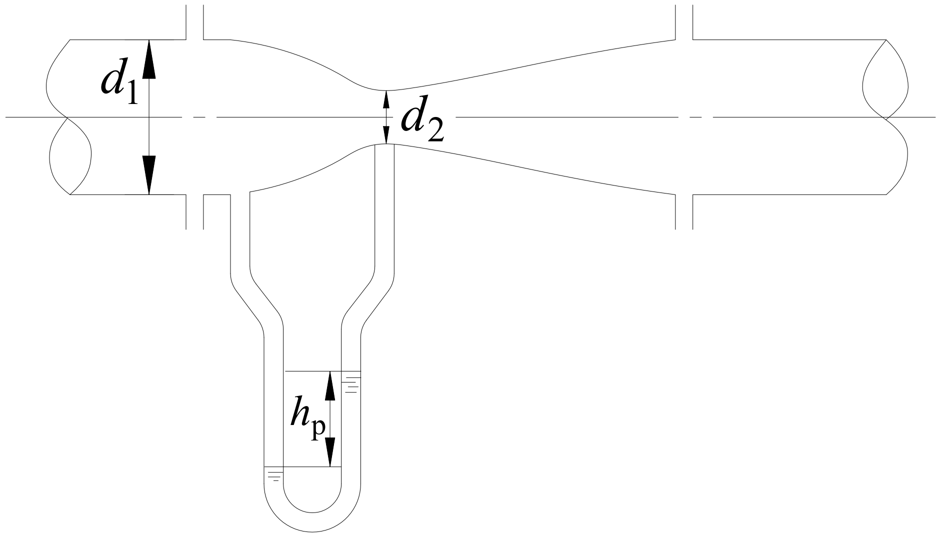
$v_2=9.74$（m/s）

由连续性方程 $v_2A_2=v_1A_1$

$$\therefore d_2=d_1\sqrt{\frac{v_1}{v_2}}=300\times\sqrt{\frac{6}{9.74}}=235.5\text{（mm）}$$

答：细管直径为235.5 mm。

4.11 为了测量石油管道的流量，安装文丘里流量计，管道直径 d_1=200mm，流量计喉管直径 d_2=100mm，石油密度 ρ=850 kg/m^3，流量计流量系数 μ=0.95。现测得水银压差计读书 h_p=150mm，问此时管中流量 Q 是多少。



解：$Q=\mu K\sqrt{\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{油}}-1\right)h_p}$

其中：$\mu=0.95$；$K=\frac{\frac{\pi d_1^2}{4}\times\sqrt{2g}}{\sqrt{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}=\frac{\frac{\pi\times0.2^2}{4}\times\sqrt{2\times9.807}}{\sqrt{\left(\frac{0.2}{0.1}\right)^4-1}}=0.0359$

$h_p=0.15$（m）

$Q=\mu K\sqrt{\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{油}}-1\right)h_p}=\mu K\sqrt{\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{水}}\cdot\frac{\rho_{水}}{\rho_{油}}-1\right)h_p}$

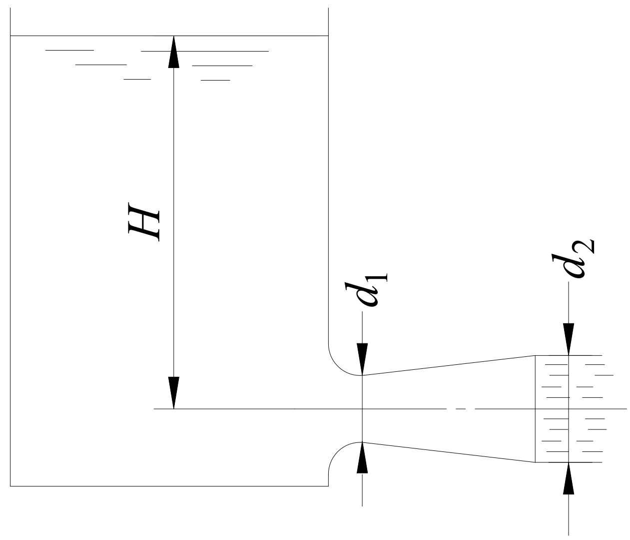
$=0.95\times0.0359\times\sqrt{\left(13.6\times\frac{1000}{850}-1\right)\times0.15}$

$=0.0511575$（m³/s）
$=51.2$（l/s）

答：此时管中流量$Q=51.2$ l/s。

4.12 水箱中的水从一扩散短管流到大气中，直径d_1=100mm，该处绝对压强p_1=0.5 大气压，

直径d_2=150mm，试求水头H，水头损失忽略不计。



解：（1）以出水管轴线为基准面，列管径d_1与d_2处的伯努利方程，可得：

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

取$\alpha_1=\alpha_2=1.0$， $p_2=0$， $p_1=-0.5\times 101.325=-50.663$ kPa

$$\because v_1^2-v_2^2=-\frac{2p_1}{\rho}$$

$$\therefore v_2^2\left[\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4-1\right]=\frac{2\times 50.663\times 10^3}{\rho}=101.325$$

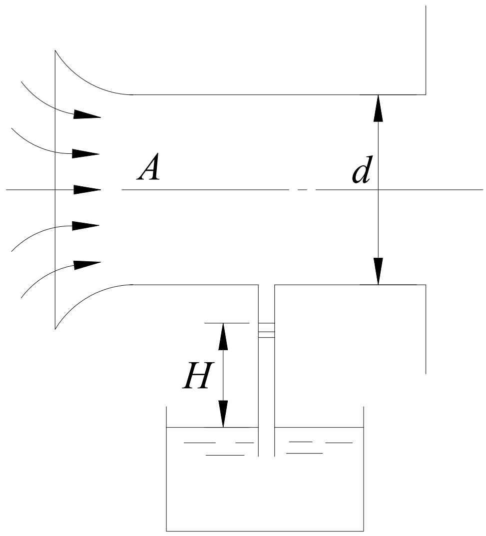
$$v_2=\left[\frac{101.325}{\left(\frac{0.15}{0.1}\right)^4-1}\right]^{1/2}=4.994\text{（m/s）}$$

（2）从液面到短管出口列能量（伯努利）方程。

$$H=\frac{v_2^2}{2g}=\frac{4.994^2}{2\times 9.807}=1.27\text{（m）}$$

答：水头$H=1.27$ m。

4.13 离心式通风机用集流器A从大气中吸入空气，直径d=200mm 处接一根细玻璃管，已知管中的水上升H=150mm，求进气流量（空气的密度ρ=1.29 kg/m^3）。



解:以集流器轴线的水平面为基准面,从距进口一定距离的水平处列到测管处的伯努利方程,可得:

$\frac{p_a}{\rho g}=\frac{p_H}{\rho g}+\frac{\alpha v^2}{2g}$ 不计损失，取 $\alpha=1.0$

$\therefore v=\sqrt{\frac{2\left(p_a-p_H\right)}{\rho}}$

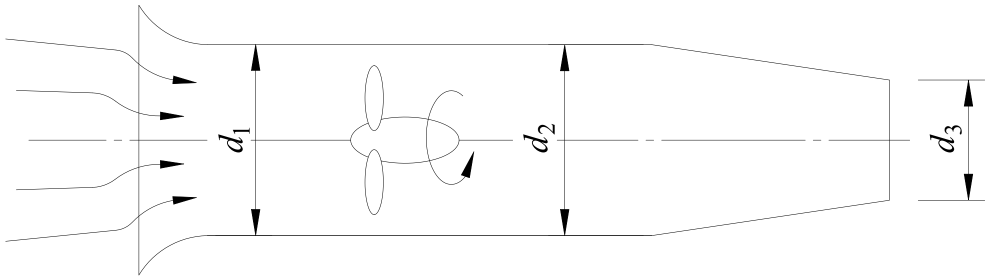
其中 $p_a=0$，则 $p_H=-H\cdot\rho_{水}g$

$\therefore v=\sqrt{\frac{2Hg\rho_{水}}{\rho}}=\sqrt{2\times0.15\times9.807\times\frac{1000}{1.29}}=47.76$（m/s）

$Q=vA=47.76\times\frac{\pi}{4}\times0.2^2=1.5$（m³/s）

答：进气流量 $Q=1.5$ m³/s。

4.14 一吹风装置，进排风口都直通大气，风扇前、后断面直径 $d_1=d_2$ =1m，排风口直径 d_3 =0.5m，已知排风口风速 v_3 =40 m/s，空气的密度 ρ =1.29 kg/m^3，不计压强损失，试求风扇前、后断面的压强 p_1 和 p_2。



解：以过轴线的水平面为基准面，以 d_2 及 d_3 截面列伯努利方程：

$$\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}=\frac{p_3}{\rho g}+\frac{\alpha_3 v_3^2}{2g}$$

其中 $p_3=0$，$v_3=40$（m/s），$\alpha_2=\alpha_3=1.0$，$v_2=v_3\cdot\frac{d_3^2}{d_2^2}$

$$\therefore p_2=\frac{\rho}{2}\left(v_3^2-v_2^2\right)=\frac{\rho v_3^2}{2}\left[1-\left(\frac{d_3}{d_2}\right)^4\right]=\frac{1.29}{2}\times 40^2\times\left[1-\left(\frac{0.5}{1.0}\right)^4\right]=967.5\text{（Pa）}$$

从大气到 d_1 断面，列伯努利方程：

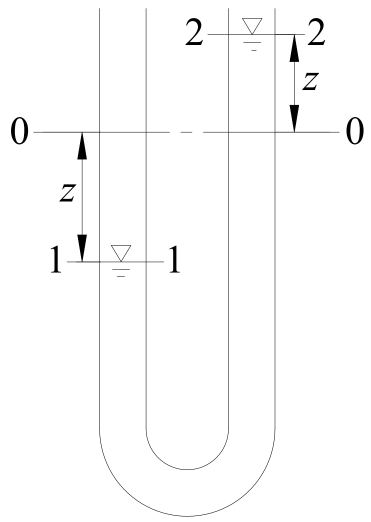
$$0+\frac{p_a}{\rho g}=0+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$$

其中 $\alpha_1=1.0$，$p_a=0$（相对压强），$v_1=v_2=v_3\cdot\frac{d_3^2}{d_2^2}$

$$\therefore p_1=-\frac{\rho}{2}v_1^2=-\frac{1.29}{2}\times 40^2\times\left(\frac{0.5}{1.0}\right)^4=-64.5\text{（Pa）}$$

答：风扇前、后断面的压强 $p_1=-64.5$ Pa，$p_2=967.5$ Pa。

4.15 两端开口的等直径 U 形管，管内液柱长度为 L，使液面离开平衡位置而造成液柱振荡，水头损失忽略不计，求液柱的振荡方程 $z=f\left(t\right)$。



解：取 0–0 断面为基准面，由非恒定流的伯努利方程：

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{u_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{u_2^2}{2g}+\frac{1}{g}\int_0^L\frac{\partial u}{\partial t}dl$$

$\because z_1=-z$， $z_2=z$， $p_1=p_2=0$， $u_1=u_2$

$\therefore -2z=\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}\int_0^L dl=\frac{L}{g}\frac{\partial u}{\partial t}$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{-2gz}{L}$

$\because u\left(z,t\right)=u\left(t\right)$

$u\left(t\right)=\frac{dz}{dt}$

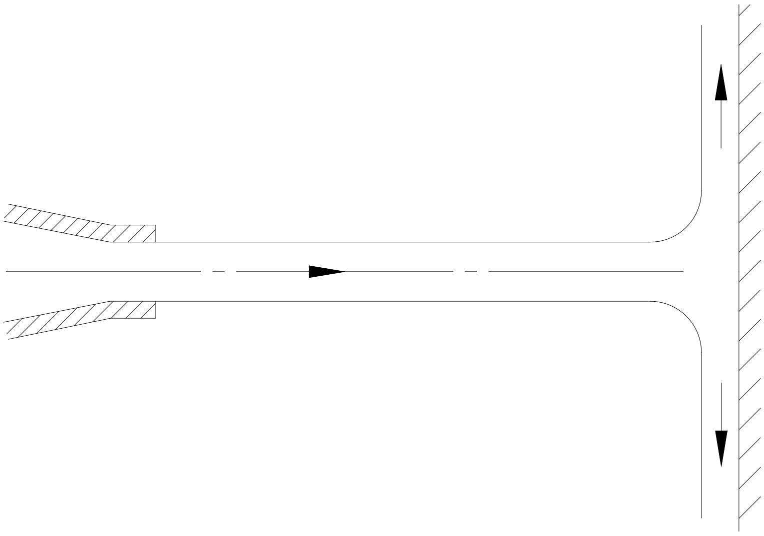
$\therefore \frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{2g}{L}z$

令 $z=c\cos\omega t$，则 $\omega=\sqrt{\frac{2g}{L}}$

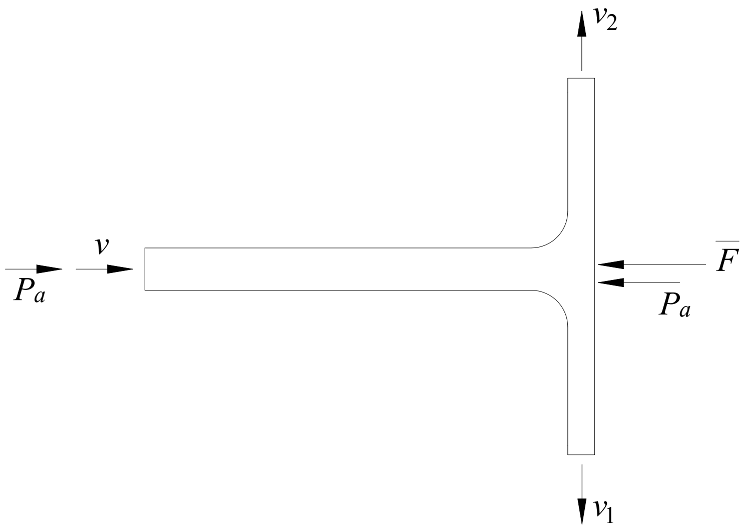
$z=z_0\cos\sqrt{\frac{2g}{L}}t=z_0\sin\left(\sqrt{\frac{2g}{L}}t+\frac{\pi}{2}\right)$

答：液柱的振荡方程 $z=z_0\cos\sqrt{\frac{2g}{L}}t=z_0\sin\left(\sqrt{\frac{2g}{L}}t+\frac{\pi}{2}\right)$。

4.16 水力采煤用水枪在高压下喷射强力水柱冲击煤层，喷嘴出口直径 d =30mm，出口水流速度 v =54 m/s ，求水流对煤层的冲击力。



解：取控制体如图，受力如图。



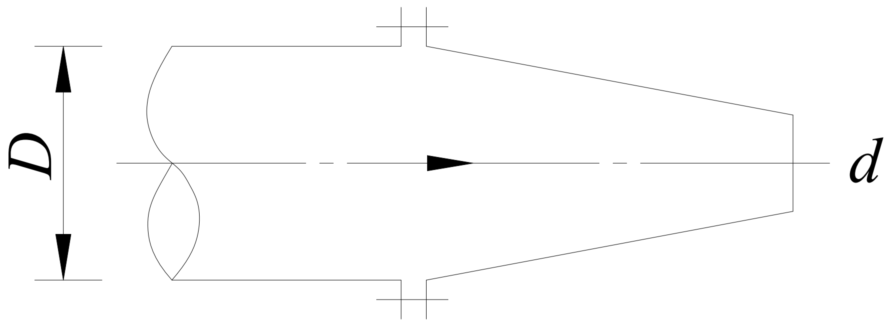
$$\rho Q\left(v_2-v\right)=-F$$

$$\therefore F=\rho Qv=\rho\frac{\pi d^2}{4}\cdot v^2=\frac{\pi\times0.03^2}{4}\times1000\times54^2=2.061 \text{（kN）}$$

水流对煤层的作用力与 $\overline{F}$ 构成作用力与反作用力，大小为 2.061 kN，方向向右。

答：水流对煤层的冲击力 $F=2.061$ kN，方向向右。

4.17 水由喷嘴射出，已知流量 Q =0.4 m^3/s ，主管直径 D =0.4 m/s ，喷口直径 d =0.1m，水头损失不计，求水流作用在喷嘴上的力。



解：（1）取过轴线的水平面为基准面，列螺栓断面与出口断面的伯努利方程：

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=0+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

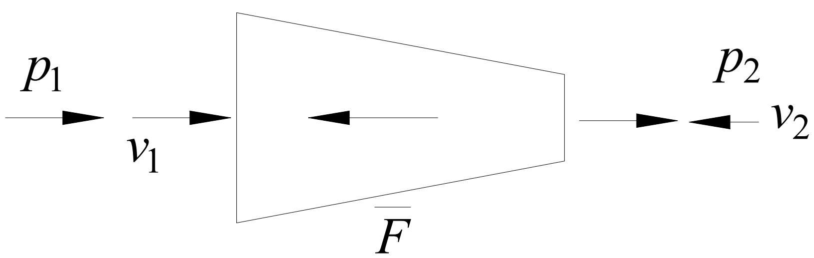
$$\therefore p_1=\frac{\rho}{2}\left(v_2^2-v_1^2\right)=\frac{\rho v_2^2}{2}\left[1-\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right]$$

$$=\frac{1000}{2}\times\left(50.93^2-3.18^2\right)=1291.854 \text{（kPa）}$$

$$v_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{0.4\times 4}{\pi\times 0.4^2}=3.18 \text{（m/s）}$$

$$v_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{0.4\times 4}{\pi\times 0.1^2}=50.93 \text{（m/s）}$$

（2）取控制体如图所示，列动量方程。



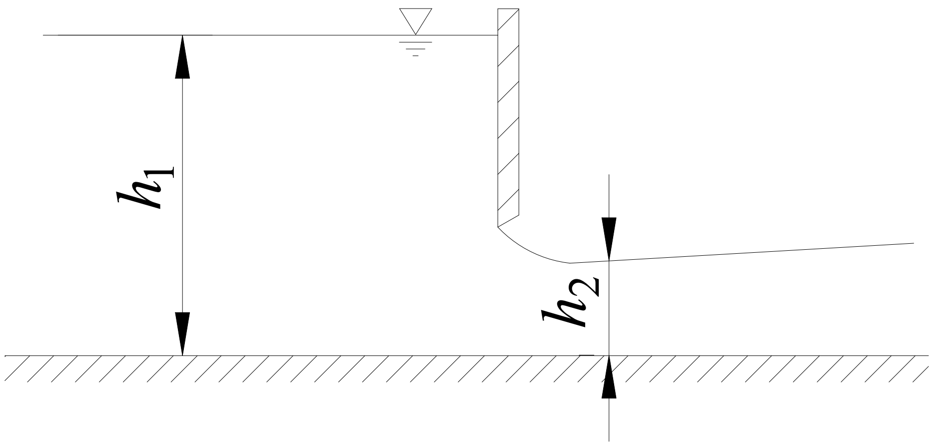
$$\rho Q\left(v_2-v_1\right)=p_1 A_1-F$$

$$\therefore F=p_1 A_1-\rho Q\left(v_2-v_1\right)$$

$$=1291.854\times\frac{\pi\times0.4^2}{4}-1\times0.4\times\left(50.93-3.18\right)=143.239\text{（kN）}$$

答：水流作用在喷嘴上的力为143.239 kN。

4.18 闸下出流，平板闸门宽 b =2m，闸前水深 h_1 =4m，闸后水深 h_2 =0.5m，出流量 Q =8 m^3/s，不计摩擦阻力，试求水流对闸门的作用力，并与按静水压强分布规律计算的结果相比较。

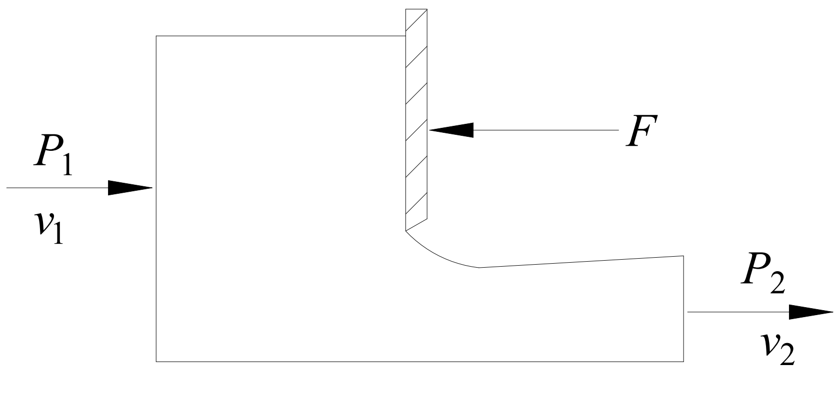


解：（1）由连续方程 $Q=h_1\cdot b\cdot v_1=h_2\cdot b\cdot v_2$

$$\therefore v_1=\frac{Q}{h_1b}=\frac{8}{2\times4}=1\text{（m/s）}$$

$$v_2=\frac{Q}{h_2b}=\frac{8}{2\times0.5}=8\text{（m/s）}$$

（2）由动量方程，取控制体如图。



$$\rho Q\left(v_2-v_1\right)=p_1A_1-p_2A_2-F$$

$$\therefore F=\frac{h_1}{2}\rho g\cdot h_1 b-\frac{h_2}{2}\rho g\cdot h_2 b-\rho Q\left(v_2-v_1\right)$$

$$=\left(\frac{h_1^2}{2}-\frac{h_2^2}{2}\right)\rho g b-\rho Q\left(v_2-v_1\right)$$

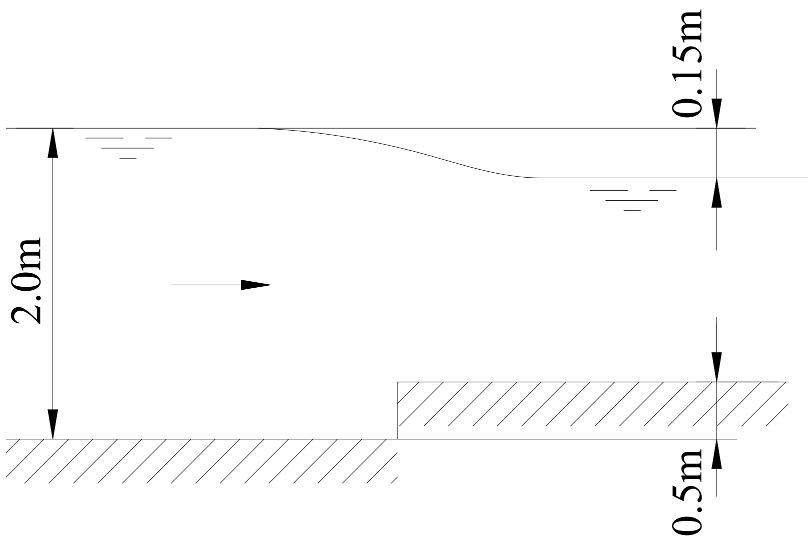
$$=1000\times 9.807\times 2\times\left(\frac{4^2}{2}-\frac{0.5^2}{2}\right)-1000\times 8\times\left(8-1\right)$$

$$=98.46\text{（kN）}$$

$$F_{静}=\frac{1}{2}\left(4-0.5\right)^2\cdot\rho g\cdot b=\frac{1}{2}\times 1000\times 9.807\times 3.5^2\times 2=120.14\text{（kN）}$$

答：水流对闸门的作用力$F=98.46$kN，按静水压强分布规律计算的结果$F_{静}=120.14$kN。

4.19 矩形断面的平底渠道，其宽度B为 2.7m，渠底在某断面处抬高 0.5m，该断面上游的水深为 2m，下游水面降低 0.15m，如忽略边壁和渠底阻力，试求：（1）渠道的流量；（2）水流对底坎的冲力。



解：（1）以上游渠底为基准面，列上、下游过水断面的能力方程：

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

其中：$p_1=p_2=p_a=0$，$z_1=2.0$ m，$z_2=2.0-0.15=1.85$ m

$$v_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{Q}{Bh_1}，\quad v_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{Q}{Bh_2}$$

$h_1=2.0$ m，$h_2=2.0-0.15-0.5=1.35$ m

$$\therefore v_2^2 - v_1^2 = Q^2\left(\frac{1}{B^2h_2^2} - \frac{1}{B^2h_1^2}\right) = (z_1 - z_2)\cdot 2g$$

$$Q = \left[\frac{2g(z_1 - z_2)}{\frac{1}{B^2h_2^2} - \frac{1}{B^2h_1^2}}\right]^{1/2} = \left[\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 - \left(h_2/h_1\right)^2}\right]^{1/2}\cdot Bh_2$$

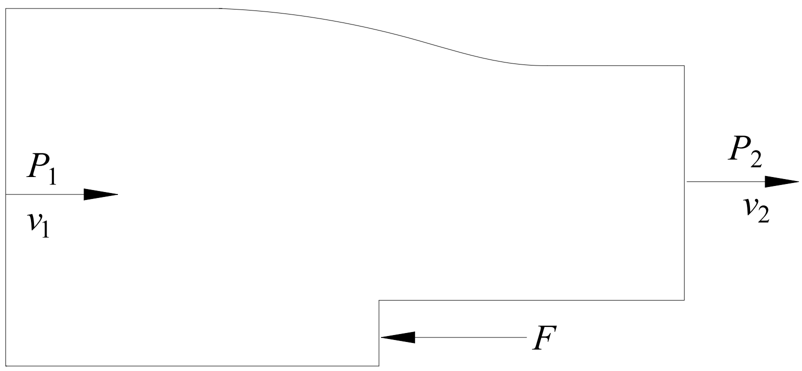
$$= 2.7\times 1.35\times\left[\frac{2\times 9.807\times 0.15}{1 - \left(1.35/2\right)^2}\right]^{1/2}$$

$$= 8.47\ \text{（m}^3\text{/s）}$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{Bh_1} = \frac{8.47}{2.7\times 2} = 1.57\ \text{（m/s）}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{Bh_2} = \frac{8.47}{2.7\times 1.35} = 2.32\ \text{（m/s）}$$

（2）取控制体如图，列动量方程.



$$\rho Q(v_2 - v_1) = p_1A_1 - p_2A_2 - F$$

$$\therefore F = p_1A_1 - p_2A_2 - \rho Q(v_2 - v_1)$$

$$= \frac{h_1^2}{2}\rho gB - \frac{h_2^2}{2}\rho gB - \rho Q(v_2 - v_1)$$

$$= \rho gB\left(\frac{h_1^2 - h_2^2}{2}\right) - \rho Q(v_2 - v_1)$$

$$= 1000\times 9.807\times 2.7\times\left(\frac{2^2 - 1.35^2}{2}\right) - 1000\times 8.47\times(2.32 - 1.57)$$

$=22.48$（kN）

答：（1）渠道的流量$Q=8.47$ m³/s；（2）水流对底坎的冲力$F=22.48$ kN。

4.20 下列不可压缩流体、平面流动的速度场分别为：

（1）$u_x=y$；$u_y=-x$

（2）$u_x=x-y$；$u_y=x+y$

（3）$u_x=x^2-y^2+x$；$u_y=-(2xy+y)$

试判断是否满足流函数ψ和流速势φ的存在条件，并求ψ、φ。

解：（1）$\because \dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=0$，满足连续方程，流速数$\psi$存在。

又$\because \omega_z=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x}-\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\dfrac{1}{2}(-1-1)=-1$，有旋，故$\phi$不存在。

$\because \dfrac{\partial \psi}{\partial y}=u_x=y$，$\dfrac{\partial \psi}{\partial x}=-u_y=x$

$$d\psi=\frac{\partial \psi}{\partial x}dx+\frac{\partial \psi}{\partial y}dy=xdx+ydy$$

$\therefore$流速数$\psi=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+c$

（2）$\because \dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=1+1=2\neq 0$，流动不存在。

（3）$\because \dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=2x+1-(2x+1)=0$，故流速数存在。

又$\because \omega_z=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x}-\dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\dfrac{1}{2}(-2y+2y)=0$，有旋，故存在势函数$\phi$。

流函数ψ与势函数ϕ满足：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \phi}{\partial x}=\dfrac{\partial \psi}{\partial y}=u_x=x^2-y^2+x\\[2mm]\dfrac{\partial \phi}{\partial y}=-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}=u_y=-(2xy+y)\end{cases}$$

解得：$\phi(x,y)=\dfrac{1}{3}x^3-xy^2+\dfrac{1}{2}x^2+c(y)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2xy + \frac{dc}{dy} = -2xy - y$$

$$\therefore c(y) = -\frac{1}{2}y^2 + c_0$$

$$\phi = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + \frac{x^2 - y^2}{2} + c_0$$

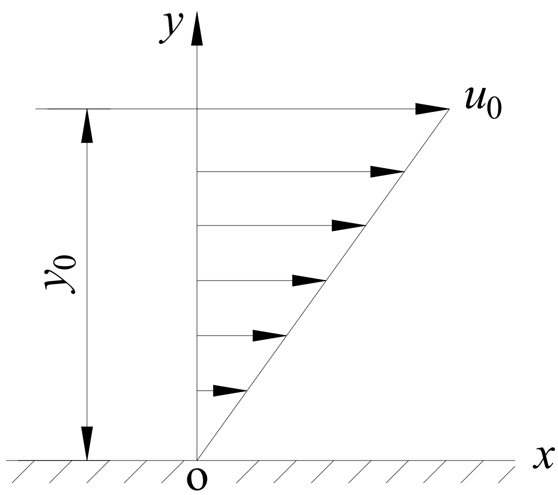
又可解得：$\psi = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + xy + c'(x)$

$$\because \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_y = 2xy + y = 2xy + y + \frac{dc'}{dx}$$

$$\therefore \frac{dc'}{dx} = 0，\ c' = c_1$$

$$\therefore \psi = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + xy + c_1$$

4.21 已知平面流动的速度为直线分布，若 y_0=4m，u_0=80 m/s，试求：（1）流函数 ψ；（2）流动是否为有势流动。



解：已知 $u_x = cy$，当 $y = y_0 = 4$ m，$u_x = 80$ m/s。

$\therefore c = 20$（s^{-1}），$u_x = 20y$

由连续性条件：$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$，$\therefore \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$

$\therefore u_y = 0$

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=-u_y dx+u_x dy=0dx+20ydy$$

$\therefore \psi=10y^2+c$，当 $y=0$ 时，$\psi=0$。

$\therefore \psi=10y^2$

$\because \omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(0-20)=-10$（$s^{-1}$）

∴流动有旋。

答：（1）流函数 $\psi=10y^2$；（2）流动有旋。

4.22　已知平面无旋流动的速度为速度势 $\varphi=\frac{2x}{x^2-y^2}$，试求流函数和速度场。

解：$\because \frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$；$\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$

$$\therefore \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{2\left(x^2-y^2\right)-4x^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}=-\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{4xy}{\left(x^2-y^2\right)^2}$$

$$u_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2};\quad u_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{4xy}{\left(x^2-y^2\right)^2}$$

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=-\frac{4xydx+2\left(x^2+y^2\right)dy}{\left(x^2-y^2\right)^2}$$

$$=-\frac{4xy}{\left(x^2-y^2\right)^2}dx-\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2}dy$$

$$\therefore \psi=\int_{y=const}-\frac{4xy}{\left(x^2-y^2\right)^2}dx-\int_{x=const}\frac{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2}{(x+y)^2(x-y)^2}dy$$

$$=\left.\frac{2y}{x^2-y^2}\right|_{y=const}-\int_{x=const}\left[\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right]dy$$

$$=\frac{2y}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x^2-y^2}$$

$$=0$$

答：流函数$\psi=0$；速度场$u_x=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=-\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2}$，$u_y=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=-\dfrac{4xy}{\left(x^2-y^2\right)^2}$。

4.23　已知平面无旋流动的流函数$\psi=xy+2x-3y+10$，试求速度势和速度场。

解：$u_x=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=x-3$，$u_y=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=-y-2$

$$\because \frac{\partial\phi}{\partial x}=u_x=x-3，\therefore \phi=\frac{1}{2}x^2-3x+c\left(y\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{dc}{dy}=-\left(y+2\right)，\therefore c\left(y\right)=-\left(\frac{1}{2}y^2+2y\right)$$

$$\therefore \phi\left(x,y\right)=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{2}y^2-2y=\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)-3x-2y$$

答：$\phi=\dfrac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)-3x-2y$；$u_x=x-3$，$u_y=-y-2$。

4.24　已知平面无旋流动的速度势$\varphi=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$，试求速度场。

解：$u_x=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$u_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

4.25　无穷远处有一速度为u_0的均匀直线来流，坐标原点处有一强度为$-q$的汇流，试求两个流动叠加后的流函数，驻点位置以及流体流入和流过汇流的分界线方程。

解：无穷远均匀直线流的速度势为：在x方向的流速为U_0，y方向为零。

$$\phi_1=U_0x，\psi_1=U_0y$$

在原点的汇流为：$\phi_2=-\dfrac{q}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$\psi_2=-\dfrac{q}{2\pi}\theta$

$\therefore \phi = \phi_1 + \phi_2 = U_0 x - \dfrac{q}{4\pi}\ln\left(x^2 + y^2\right)$

$$\psi = U_0 y - \frac{q}{2\pi}\theta = U_0 y - \frac{q}{2\pi}\arctan\frac{y}{x}$$

零流线方程：$U_0 y - \dfrac{q}{2\pi}\arctan\dfrac{y}{x} = 0$

驻点位置：$\left.\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=0,x=x_s} = \left.\left(U_0 - \dfrac{q}{2\pi}\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)\right|_{y=0,x=x_s} = 0$

$$U_0 - \frac{q}{2\pi}\frac{x_s}{x_s^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x_s = \frac{q}{2\pi U_0}$$

$\therefore$过$\left(x_s, 0\right)$的流线方程为$\psi = 0$

即$U_0 y - \dfrac{q}{2\pi}\arctan\dfrac{y}{x} = 0$

答：流函数$\psi = U_0 y - \dfrac{q}{2\pi}\arctan\dfrac{y}{x}$，驻点位置$x_s = \dfrac{q}{2\pi U_0}$，流体流入和流过汇流的分界线方程$U_0 y - \dfrac{q}{2\pi}\arctan\dfrac{y}{x} = 0$。