第一章　绪论

1．设 $x>0$, x 的相对误差为 δ，求 $\ln x$ 的误差。

解：近似值 x^* 的相对误差为 $\delta = e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^*-x}{x^*}$

而 $\ln x$ 的误差为 $e(\ln x^*) = \ln x^* - \ln x \approx \frac{1}{x^*}e^*$

进而有 $\varepsilon(\ln x^*) \approx \delta$

2．设 x 的相对误差为 2%，求 x^n 的相对误差。

解：设 $f(x)=x^n$，则函数的条件数为 $C_p = |\frac{xf'(x)}{f(x)}|$

又 $\because f'(x)=nx^{n-1}$，$\therefore C_p = |\frac{x\cdot nx^{n-1}}{n}| = n$

又 $\because \varepsilon_r((x^*)n) \approx C_p\cdot\varepsilon_r(x^*)$

且 $e_r(x^*)$ 为 2

$\therefore \varepsilon_r((x^*)^n) \approx 0.02n$

3．下列各数都是经过四舍五入得到的近似数，即误差限不超过最后一位的半个单位，试指出它们是几位有效数字：$x_1^*=1.1021$，$x_2^*=0.031$，$x_3^*=385.6$，$x_4^*=56.430$, $x_5^*=7\times1.0$.

解：$x_1^*=1.1021$ 是五位有效数字；

$x_2^*=0.031$ 是二位有效数字；

$x_3^*=385.6$ 是四位有效数字；

$x_4^*=56.430$ 是五位有效数字；

$x_5^*=7\times1.0.$ 是二位有效数字。

4．利用公式(2.3)求下列各近似值的误差限：(1) $x_1^*+x_2^*+x_4^*$,(2) $x_1^*x_2^*x_3^*$,(3) x_2^*/x_4^*.

其中 x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^* 均为第 3 题所给的数。

解：

$$\varepsilon(x_1^*)=\frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

$$\varepsilon(x_2^*)=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$\varepsilon(x_3^*)=\frac{1}{2}\times 10^{-1}$$

$$\varepsilon(x_4^*)=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$\varepsilon(x_5^*)=\frac{1}{2}\times 10^{-1}$$

$$\begin{aligned}&(1)\varepsilon(x_1^*+x_2^*+x_4^*)\\&=\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)+\varepsilon(x_4^*)\\&=\frac{1}{2}\times 10^{-4}+\frac{1}{2}\times 10^{-3}+\frac{1}{2}\times 10^{-3}\\&=1.05\times 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2)\varepsilon(x_1^*x_2^*x_3^*)\\&=\left|x_1^*x_2^*\right|\varepsilon(x_3^*)+\left|x_2^*x_3^*\right|\varepsilon(x_1^*)+\left|x_1^*x_3^*\right|\varepsilon(x_2^*)\\&=\left|1.1021\times 0.031\right|\times\frac{1}{2}\times 10^{-1}+\left|0.031\times 385.6\right|\times\frac{1}{2}\times 10^{-4}+\left|1.1021\times 385.6\right|\times\frac{1}{2}\times 10^{-3}\\&\approx 0.215\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(3)\varepsilon(x_2^*/x_4^*)\\&\approx\frac{\left|x_2^*\right|\varepsilon(x_4^*)+\left|x_4^*\right|\varepsilon(x_2^*)}{\left|x_4^*\right|^2}\\&=\frac{0.031\times\frac{1}{2}\times 10^{-3}+56.430\times\frac{1}{2}\times 10^{-3}}{56.430\times 56.430}\\&=10^{-5}\end{aligned}$$

5 计算球体积要使相对误差限为 1，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少？

解：球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

则何种函数的条件数为

$$C_p=\left|\frac{R\bullet V'}{V}\right|=\left|\frac{R\bullet 4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right|=3$$

$$\therefore \varepsilon_r(V^*)\approx C_p\bullet\varepsilon_r(R^*)=3\varepsilon_r(R^*)$$

又 $\because \varepsilon_r(V^*)=1$

故度量半径 R 时允许的相对误差限为 $\varepsilon_r(R^*)=\frac{1}{3}\times 1\approx 0.33$

6．设 $Y_0=28$，按递推公式 $Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$ （n=1,2,…）

计算到 Y_{100}。若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$（5 位有效数字），试问计算 Y_{100} 将有多大误差？

解：$\because Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$\therefore Y_{100}=Y_{99}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$Y_{99}=Y_{98}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$Y_{98}=Y_{97}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

……

$Y_1=Y_0-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

依次代入后，有 $Y_{100}=Y_0-100\times\frac{1}{100}\sqrt{783}$

即 $Y_{100}=Y_0-\sqrt{783}$，

若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$，$\therefore Y_{100}=Y_0-27.982$

$\therefore \varepsilon(Y_{100}^*)=\varepsilon(Y_0)+\varepsilon(27.982)=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$

$\therefore Y_{100}$的误差限为 $\frac{1}{2}\times 10^{-3}$。

7．求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根，使它至少具有 4 位有效数字（$\sqrt{783}=27.982$）。

解：$x^2-56x+1=0$，

故方程的根应为 $x_{1,2}=28\pm\sqrt{783}$

故 $x_1=28+\sqrt{783}\approx 28+27.982=55.982$

$\therefore x_1$ 具有 5 位有效数字

$x_2=28-\sqrt{783}=\frac{1}{28+\sqrt{783}}\approx\frac{1}{28+27.982}=\frac{1}{55.982}\approx 0.017863$

x_2 具有 5 位有效数字

8．当 N 充分大时，怎样求 $\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx$？

解 $\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(N+1)-\arctan N$

设$\alpha=\arctan(N+1),\beta=\arctan N$。

则$\tan\alpha=N+1,\tan\beta=N.$

$$\begin{aligned}&\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx\\&=\alpha-\beta\\&=\arctan(\tan(\alpha-\beta))\\&=\arctan\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\bullet\tan\beta}\\&=\arctan\frac{N+1-N}{1+(N+1)N}\\&=\arctan\frac{1}{N^2+N+1}\end{aligned}$$

9．正方形的边长大约为了 100cm，应怎样测量才能使其面积误差不超过$1cm^2$？

解：正方形的面积函数为$A(x)=x^2$

$\therefore\varepsilon(A^*)=2A^*\bullet\varepsilon(x^*).$

当$x^*=100$时，若$\varepsilon(A^*)\le1$,

则$\varepsilon(x^*)\le\frac{1}{2}\times10^{-2}$

故测量中边长误差限不超过 0.005cm 时，才能使其面积误差不超过$1cm^2$

10．设$S=\frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有±0.1秒的误差，证明当 t 增加时 S 的绝对误差增加，而相对误差却减少。

解：$\because S=\frac{1}{2}gt^2,t>0$

$\therefore\varepsilon(S^*)=gt^2\bullet\varepsilon(t^*)$

当t^*增加时，S^*的绝对误差增加

$$\begin{aligned}&\varepsilon_r(S^*)=\frac{\varepsilon(S^*)}{|S^*|}\\&=\frac{gt^2\bullet\varepsilon(t^*)}{\frac{1}{2}g(t^*)^2}\\&=2\frac{\varepsilon(t^*)}{t^*}\end{aligned}$$

当 t^* 增加时，$\varepsilon(t^*)$ 保持不变，则 S^* 的相对误差减少。

11．序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系 $y_n = 10y_{n-1} - 1$ (n=1,2,…),

若 $y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$（三位有效数字），计算到 y_{10} 时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

解：$\because y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$

$\therefore \varepsilon(y_0^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$

又 $\because y_n = 10y_{n-1} - 1$

$\therefore y_1 = 10y_0 - 1$

$\therefore \varepsilon(y_1^*) = 10\varepsilon(y_0^*)$

又 $\because y_2 = 10y_1 - 1$

$\therefore \varepsilon(y_2^*) = 10\varepsilon(y_1^*)$

$\therefore \varepsilon(y_2^*) = 10^2\varepsilon(y_0^*)$

……

$\therefore \varepsilon(y_{10}^*) = 10^{10}\varepsilon(y_0^*)$

$= 10^{10} \times \frac{1}{2} \times 10^{-2}$

$= \frac{1}{2} \times 10^8$

计算到 y_{10} 时误差为 $\frac{1}{2} \times 10^8$，这个计算过程不稳定。

12．计算 $f = (\sqrt{2} - 1)^6$，取 $\sqrt{2} \approx 1.4$，利用下列等式计算，哪一个得到的结果最好？

$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$，　$(3-2\sqrt{2})^3$，　$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$，　$99 - 70\sqrt{2}$。

解：设 $y = (x-1)^6$，

若 $x = \sqrt{2}$，$x^* = 1.4$，则 $\varepsilon(x^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$。

若通过 $\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$ 计算 y 值，则

$$\varepsilon(y^*) = -\left|-6\times\frac{1}{(x^*+1)^7}\right|\bullet\varepsilon(x^*)$$
$$=\frac{6}{(x^*+1)^7}y^*\varepsilon(x^*)$$
$$=2.53y^*\varepsilon(x^*)$$

若通过$(3-2\sqrt{2})^3$计算 y 值，则

$$\varepsilon(y^*) = \left|-3\times 2\times(3-2x^*)^2\right|\bullet\varepsilon(x^*)$$
$$=\frac{6}{3-2x^*}y^*\bullet\varepsilon(x^*)$$
$$=30y^*\varepsilon(x^*)$$

若通过$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$计算 y 值，则

$$\varepsilon(y^*) = -\left|-3\times\frac{1}{(3+2x^*)^4}\right|\bullet\varepsilon(x^*)$$
$$=6\times\frac{1}{(3+2x^*)^7}y^*\varepsilon(x^*)$$
$$=1.0345y^*\varepsilon(x^*)$$

通过$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$计算后得到的结果最好。

13．$f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$,求$f(30)$的值。若开平方用 6 位函数表，问求对数时误差有多大？若改用另一等价公式。$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

计算，求对数时误差有多大？

解

$\because f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，$\therefore f(30)=\ln(30-\sqrt{899})$

设$u=\sqrt{899}, y=f(30)$

则$u^*=29.9833$

$\therefore \varepsilon(u^*)=\frac{1}{2}\times 10^{-4}$

故

$$\varepsilon(y^*) \approx -\frac{1}{|30-u^*|}\varepsilon(u^*)$$

$$=\frac{1}{0.0167}\bullet\varepsilon(u^*)$$

$$\approx 3\times10^{-3}$$

若改用等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

则 $f(30) = -\ln(30+\sqrt{899})$

此时，

$$\varepsilon(y^*) = \left|-\frac{1}{30+u^*}\right|\varepsilon(u^*)$$

$$=\frac{1}{59.9833}\cdot\varepsilon(u^*)$$

$$\approx 8\times10^{-7}$$

第二章 插值法

1．当 $x=1,-1,2$ 时，$f(x)=0,-3,4$，求 $f(x)$ 的二次插值多项式。

解：

$$x_0=1,x_1=-1,x_2=2,$$
$$f(x_0)=0,f(x_1)=-3,f(x_2)=4;$$
$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=-\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$$
$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$
$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{1}{3}(x-1)(x+1)$$

则二次拉格朗日插值多项式为

$$L_2(x)=\sum_{k=0}^{2}y_k l_k(x)$$
$$=-3l_0(x)+4l_2(x)$$
$$=-\frac{1}{2}(x-1)(x-2)+\frac{4}{3}(x-1)(x+1)$$
$$=\frac{5}{6}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{7}{3}$$

2．给出 $f(x)=\ln x$ 的数值表

X	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
lnx	-0.916291	-0.693147	-0.510826	-0.356675	-0.223144

用线性插值及二次插值计算 $\ln 0.54$ 的近似值。

解：由表格知，

$$x_0=0.4,x_1=0.5,x_2=0.6,x_3=0.7,x_4=0.8;$$
$$f(x_0)=-0.916291,f(x_1)=-0.693147$$
$$f(x_2)=-0.510826,f(x_3)=-0.356675$$
$$f(x_4)=-0.223144$$

若采用线性插值法计算 $\ln 0.54$ 即 $f(0.54)$，

则 $0.5<0.54<0.6$

$$l_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=-10(x-0.6)$$

$$l_2(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=-10(x-0.5)$$

$$L_1(x)=f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)$$

$$=6.93147(x-0.6)-5.10826(x-0.5)$$

$$\therefore L_1(0.54)=-0.6202186\approx-0.620219$$

若采用二次插值法计算 $\ln 0.54$ 时，

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=50(x-0.5)(x-0.6)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=-100(x-0.4)(x-0.6)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=50(x-0.4)(x-0.5)$$

$$L_2(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)$$

$$=-50\times0.916291(x-0.5)(x-0.6)+69.3147(x-0.4)(x-0.6)-0.510826\times50(x-0.4)(x-0.5)$$

$$\therefore L_2(0.54)=-0.61531984\approx-0.615320$$

3．给全 $\cos x, 0^\circ\le x\le 90^\circ$ 的函数表，步长 $h=1'=(1/60)^\circ$，若函数表具有 5 位有效数字，研究用线性插值求 $\cos x$ 近似值时的总误差界。

解：求解 $\cos x$ 近似值时，误差可以分为两个部分，一方面，x 是近似值，具有 5 位有效数字，在此后的计算过程中产生一定的误差传播；另一方面，利用插值法求函数 $\cos x$ 的近似值时，采用的线性插值法插值余项不为 0，也会有一定的误差。因此，总误差界的计算应综合以上两方面的因素。

当 $0^\circ\le x\le 90^\circ$ 时，

令 $f(x)=\cos x$

取 $x_0=0, h=(\frac{1}{60})^\circ=\frac{1}{60}\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{10800}$

令 $x_i=x_0+ih, i=0,1,\ldots,5400$

则 $x_{5400}=\frac{\pi}{2}=90^\circ$

当 $x\in[x_k,x_{k+1}]$ 时，线性插值多项式为

$$L_1(x)=f(x_k)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+f(x_{k+1})\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

插值余项为

$$R(x)=\left|\cos x-L_1(x)\right|=\left|\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_k)(x-x_{k+1})\right|$$

又$\because$ 在建立函数表时，表中数据具有 5 位有效数字，且$\cos x\in[0,1]$，故计算中有误差传播过程。

$$\therefore \varepsilon(f^*(x_k))=\frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

$$R_2(x)=\left|\varepsilon(f^*(x_k))\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right|+\left|\varepsilon(f^*(x_{k+1}))\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right|$$

$$\le \varepsilon(f^*(x_k))(\left|\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right|+\left|\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right|)$$

$$=\varepsilon(f^*(x_k))\frac{1}{h}(x_{k+1}-x+x-x_k)$$

$$=\varepsilon(f^*(x_k))$$

$\therefore$ 总误差界为

$$R=R_1(x)+R_2(x)$$

$$=\left|\frac{1}{2}(-\cos\xi)(x-x_k)(x-x_{k+1})\right|+\varepsilon(f^*(x_k))$$

$$\le\frac{1}{2}\times(x-x_k)(x_{k+1}-x)+\varepsilon(f^*(x_k))$$

$$\le\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}h)^2+\varepsilon(f^*(x_k))$$

$$=1.06\times 10^{-8}+\frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

$$=0.50106\times 10^{-5}$$

4．设为互异节点，求证：

（1）$\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)\equiv x^k \qquad (k=0,1,\cdots,n);$

（2）$\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^k l_j(x)\equiv 0 \qquad (k=0,1,\cdots,n);$

证明

（1） 令$f(x)=x^k$

若插值节点为 $x_j, j=0,1,\cdots,n$，则函数 $f(x)$ 的 n 次插值多项式为 $L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)$。

插值余项为 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

又 $\because k\le n,$

$\therefore f^{(n+1)}(\xi)=0$

$\therefore R_n(x)=0$

$$\therefore \sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)=x^k \qquad (k=0,1,\cdots,n);$$

$$(2)\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^k l_j(x)$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(\sum_{i=0}^{n}C_k^i x_j^i(-x)^{k-i})l_j(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}C_k^i(-x)^{k-i}(\sum_{j=0}^{n}x_j^i l_j(x))$$

又 $\because 0\le i\le n$　由上题结论可知

$$\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)=x^i$$

$$\therefore 原式=\sum_{i=0}^{n}C_k^i(-x)^{k-i}x^i$$

$$=(x-x)^k$$

$$=0$$

$\therefore$ 得证。

5 设 $f(x)\in C^2\left[a,b\right]$ 且 $f(a)=f(b)=0,$ 求证：

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|.$$

解：令 $x_0=a, x_1=b$，以此为插值节点，则线性插值多项式为

$$L_1(x)=f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+f(x_1)\frac{x-x_0}{x-x_0}$$

$$==f(a)\frac{x-b}{a-b}+f(b)\frac{x-a}{x-a}$$

又$\because f(a)=f(b)=0$

$\therefore L_1(x)=0$

插值余项为 $R(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{1}{2}f''(x)(x-x_0)(x-x_1)$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}f''(x)(x-x_0)(x-x_1)$

又$\because |(x-x_0)(x-x_1)|$

$\le\left\{\frac{1}{2}[(x-x_0)+(x_1-x)]\right\}^2$

$=\frac{1}{4}(x_1-x_0)^2$

$=\frac{1}{4}(b-a)^2$

$\therefore \max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|.$

6．在$-4\le x\le 4$上给出$f(x)=e^x$的等距节点函数表，若用二次插值求e^x的近似值，要使截断误差不超过10^{-6}，问使用函数表的步长 h 应取多少？

解：若插值节点为x_{i-1},x_i和x_{i+1}，则分段二次插值多项式的插值余项为

$R_2(x)=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})$

$\therefore |R_2(x)|\le\frac{1}{6}(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\max\limits_{-4\le x\le 4}|f'''(x)|$

设步长为 h，即$x_{i-1}=x_i-h,x_{i+1}=x_i+h$

$\therefore |R_2(x)|\le\frac{1}{6}e^4\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}h^3=\frac{\sqrt{3}}{27}e^4h^3.$

若截断误差不超过10^{-6}，则

$|R_2(x)|\le 10^{-6}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{27}e^4h^3\le 10^{-6}$

$\therefore h\le 0.0065.$

7．若$y_n=2^n$,求Δ^4y_n及δ^4y_n.，

解：根据向前差分算子和中心差分算子的定义进行求解。

$y_n=2^n$

$$\Delta^4 y_n = (E-1)^4 y_n$$
$$= \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \binom{4}{j} E^{4-j} y_n$$
$$= \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \binom{4}{j} y_{4+n-j}$$
$$= \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \binom{4}{j} 2^{4-j} \cdot y_n$$
$$= (2-1)^4 y_n$$
$$= y_n$$
$$= 2^n$$

$$\delta^4 y_n = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})^4 y_n$$
$$= (E^{-\frac{1}{2}})^4 (E-1)^4 y_n$$
$$= E^{-2} \Delta^4 y_n$$
$$= y_{n-2}$$
$$= 2^{n-2}$$

8．如果 $f(x)$ 是 m 次多项式，记 $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$，证明 $f(x)$ 的 k 阶差分 $\Delta^k f(x)(0 \le k \le m)$ 是 $m-k$ 次多项式，并且 $\Delta^{m+l} f(x) = 0$（l 为正整数）。

解：函数 $f(x)$ 的 $Taylor$ 展式为

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x)h^m + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)h^{m+1}$$

其中 $\xi \in (x, x+h)$

又 $\because f(x)$ 是次数为 m 的多项式

$\therefore f^{(m+1)}(\xi) = 0$

$\therefore \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

$$= f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x)h^m$$

$\therefore \Delta f(x)$ 为 $m-1$ 阶多项式

$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x))$

$\therefore \Delta^2 f(x)$ 为 $m-2$ 阶多项式

依此过程递推，得$\Delta^k f(x)$是$m-k$次多项式

$\therefore \Delta^m f(x)$是常数

$\therefore$当l为正整数时，

$\Delta^{m+1} f(x)=0$

9．证明$\Delta(f_k g_k)=f_k\Delta g_k+g_{k+1}\Delta f_k$

证明

$$\Delta(f_k g_k)=f_{k+1}g_{k+1}-f_k g_k$$

$$\begin{aligned}&=f_{k+1}g_{k+1}-f_k g_{k+1}+f_k g_{k+1}-f_k g_k\\&=g_{k+1}(f_{k+1}-f_k)+f_k(g_{k+1}-g_k)\\&=g_{k+1}\Delta f_k+f_k\Delta g_k\\&=f_k\Delta g_k+g_{k+1}\Delta f_k\end{aligned}$$

$\therefore$得证

10．证明$\sum_{k=0}^{n-1} f_k\Delta g_k=f_n g_n-f_0 g_0-\sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k$

证明：由上题结论可知

$f_k\Delta g_k=\Delta(f_k g_k)-g_{k+1}\Delta f_k$

$\therefore \sum_{k=0}^{n-1} f_k\Delta g_k$

$=\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta(f_k g_k)-g_{k+1}\Delta f_k)$

$=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta(f_k g_k)-\sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k$

$\because \Delta(f_k g_k)=f_{k+1}g_{k+1}-f_k g_k$

$\therefore \sum_{k=0}^{n-1}\Delta(f_k g_k)$

$=(f_1 g_1-f_0 g_0)+(f_2 g_2-f_1 g_1)+\cdots+(f_n g_n-f_{n-1} g_{n-1})$

$=f_n g_n-f_0 g_0$

$\therefore \sum_{k=0}^{n-1} f_k\Delta g_k=f_n g_n-f_0 g_0-\sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k$

得证。

11．证明$\sum_{j=0}^{n-1}\Delta^2 y_j=\Delta y_n-\Delta y_0$

证明$\sum_{j=0}^{n-1}\Delta^2 y_j=\sum_{j=0}^{n-1}(\Delta y_{j+1}-\Delta y_j)$

$$=(\Delta y_1-\Delta y_0)+(\Delta y_2-\Delta y_1)+\cdots+(\Delta y_n-\Delta y_{n-1})$$
$$=\Delta y_n-\Delta y_0$$

得证。

12．若$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$有$n$个不同实根$x_1,x_2,\cdots,x_n$，

证明：$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0,0\le k\le n-2;\\ n_0^{-1},k=n-1\end{cases}$

证明：$\because f(x)$有个不同实根$x_1,x_2,\cdots,x_n$

且$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$

$\therefore f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

令$\omega_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

则$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_n\omega_n'(x_j)}$

而$\omega_n'(x)=(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$

$$+\cdots+(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

$\therefore \omega_n'(x_j)=(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)$

令$g(x)=x^k$，

$g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)}$

则$g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)}$

又$\therefore \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_n}g[x_1,x_2,\cdots,x_n]$

$\therefore \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0,0\le k\le n-2;\\ n_0^{-1},k=n-1\end{cases}$

$\therefore$得证。

13．证明 n 阶均差有下列性质：

（1）若 $F(x)=cf(x)$，则 $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=cf[x_0,x_1,\cdots,x_n]$；

（2）若 $F(x)=f(x)+g(x)$，则 $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+g[x_0,x_1,\cdots,x_n]$.

证明：

（1）$\because f[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$

$$F[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{F(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{cf(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=c(\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)})$$

$$=cf[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

$\therefore$ 得证。

(2)$\because F(x)=f(x)+g(x)$

$$\therefore F[x_0,\cdots,x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{F(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)+g(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)})$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\frac{g(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)})$$

$$=f[x_0,\cdots,x_n]+g[x_0,\cdots,x_n]$$

$\therefore$ 得证。

14． $f(x)=x^7+x^4+3x+1$,求 $F[2^0,2^1,\cdots,2^7]$ 及 $F[2^0,2^1,\cdots,2^8]$。

解：$\because$ $f(x)=x^7+x^4+3x+1$

若 $x_i=2^i,i=0,1,\cdots,8$

则 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

$\therefore f[x_0,x_1,\cdots,x_7]=\dfrac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\dfrac{7!}{7!}=1$

$f[x_0,x_1,\cdots,x_8]=\dfrac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=0$

15．证明两点三次埃尔米特插值余项是

$$R_3(x)=f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2/4!,\xi\in(x_k,x_{k+1})$$

解：

若 $x\in[x_k,x_{k+1}]$，且插值多项式满足条件

$H_3(x_k)=f(x_k),H_3'(x_k)=f'(x_k)$

$H_3(x_{k+1})=f(x_{k+1}),H_3'(x_{k+1})=f'(x_{k+1})$

插值余项为 $R(x)=f(x)-H_3(x)$

由插值条件可知 $R(x_k)=R(x_{k+1})=0$

且 $R'(x_k)=R'(x_{k+1})=0$

$\therefore R(x)$ 可写成 $R(x)=g(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$

其中 $g(x)$ 是关于 x 的待定函数，

现把 x 看成 $[x_k,x_{k+1}]$ 上的一个固定点，作函数

$\varphi(t)=f(t)-H_3(t)-g(x)(t-x_k)^2(t-x_{k+1})^2$

根据余项性质，有

$\varphi(x_k)=0,\varphi(x_{k+1})=0$

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=f(x)-H_3(x)-g(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2\\&=f(x)-H_3(x)-R(x)\\&=0\end{aligned}$$

$\varphi'(t)=f'(t)-H_3'(t)-g(x)[2(t-x_k)(t-x_{k+1})^2+2(t-x_{k+1})(t-x_k)^2]$

$\therefore \varphi'(x_k)=0$

$\varphi'(x_{k+1})=0$

由罗尔定理可知，存在$\xi\in(x_k,x)$和$\xi\in(x,x_{k+1})$，使

$\varphi'(\xi_1)=0,\varphi'(\xi_2)=0$

即$\varphi'(x)$在$[x_k,x_{k+1}]$上有四个互异零点。

根据罗尔定理，$\varphi''(t)$在$\varphi'(t)$的两个零点间至少有一个零点，

故$\varphi''(t)$在(x_k,x_{k+1})内至少有三个互异零点，

依此类推，$\varphi^{(4)}(t)$在(x_k,x_{k+1})内至少有一个零点。

记为$\xi\in(x_k,x_{k+1})$使

$\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-H_3^{(4)}(\xi)-4!g(x)=0$

又$\because H_3^{(4)}(t)=0$

$\therefore g(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!},\xi\in(x_k,x_{k+1})$

其中ξ依赖于x

$\therefore R(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$

分段三次埃尔米特插值时，若节点为$x_k(k=0,1,\cdots,n)$，设步长为h，即

$x_k=x_0+kh,k=0,1,\cdots,n$在小区间$[x_k,x_{k+1}]$上

$R(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$

$\therefore |R(x)|=\dfrac{1}{4!}|f^{(4)}(\xi)|(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$

$$\le \frac{1}{4!}(x-x_k)^2(x_{k+1}-x)^2 \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$
$$\le \frac{1}{4!}[(\frac{x-x_k+x_{k+1}-x}{2})^2]^2 \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$
$$=\frac{1}{4!}\times\frac{1}{2^4}h^4 \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$
$$=\frac{h^4}{384}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$$

16．求一个次数不高于 4 次的多项式 P（x），使它满足 $P(0)=P'(0)=0, P(1)=P'(1)=0, P(2)=0$

解：利用埃米尔特插值可得到次数不高于 4 的多项式

$x_0=0, x_1=1$

$y_0=0, y_1=1$

$m_0=0, m_1=1$

$$H_3(x)=\sum_{j=0}^{1} y_j\alpha_j(x)+\sum_{j=0}^{1} m_j\beta_j(x)$$

$$\alpha_0(x)=(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$$
$$=(1+2x)(x-1)^2$$

$$\alpha_1(x)=(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$
$$=(3-2x)x^2$$

$$\beta_0(x)=x(x-1)^2$$
$$\beta_1(x)=(x-1)x^2$$

$$\therefore H_3(x)=(3-2x)x^2+(x-1)x^2=-x^3+2x^2$$

设 $P(x)=H_3(x)+A(x-x_0)^2(x-x_1)^2$

其中，A 为待定常数

$\because P(2)=1$

$\therefore P(x)=-x^3+2x^2+Ax^2(x-1)^2$

$\therefore A=\frac{1}{4}$

从而 $P(x)=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$

17．设 $f(x)=1/(1+x^2)$，在 $-5\le x\le 5$ 上取 $n=10$，按等距节点求分段线性插值函数

$I_h(x)$，计算各节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 值，并估计误差。

解：

若 $x_0=-5, x_{10}=5$

则步长 $h=1,$

$$x_i=x_0+ih, i=0,1,\cdots,10$$

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

在小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上，分段线性插值函数为

$$I_h(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}f(x_i)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1})$$

$$=(x_{i+1}-x)\frac{1}{1+x_i^2}+(x-x_i)\frac{1}{1+x_{i+1}^2}$$

各节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 的值为

当 $x=\pm 4.5$ 时， $f(x)=0.0471, I_h(x)=0.0486$

当 $x=\pm 3.5$ 时， $f(x)=0.0755, I_h(x)=0.0794$

当 $x=\pm 2.5$ 时， $f(x)=0.1379, I_h(x)=0.1500$

当 $x=\pm 1.5$ 时， $f(x)=0.3077, I_h(x)=0.3500$

当 $x=\pm 0.5$ 时， $f(x)=0.8000, I_h(x)=0.7500$

误差

$$\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f(x)-I_h(x)|\le\frac{h^2}{8}\max_{-5\le x\le 5}|f''(\xi)|$$

又 $\because f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$\therefore f'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$,

$$f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{24x-24x^3}{(1+x^2)^4}$$

令 $f'''(x)=0$

得 $f''(x)$ 的驻点为 $x_{1,2}=\pm1$ 和 $x_3=0$

$f''(x_{1,2})=\frac{1}{2}, f''(x_3)=-2$

$\therefore \max\limits_{-5\le x\le 5}|f(x)-I_h(x)|\le\frac{1}{4}$

18．求 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上分段线性插值函数 $I_h(x)$，并估计误差。

解：

在区间 $[a,b]$ 上， $x_0=a, x_n=b, h_i=x_{i+1}-x_i, i=0,1,\cdots,n-1,$

$h=\max\limits_{0\le i\le n-1} h_i$

$\because f(x)=x^2$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上分段线性插值函数为

$$I_h(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}f(x_i)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1})$$

$$=\frac{1}{h_i}[x_i^2(x_{i+1}-x)+x_{i+1}^2(x-x_i)]$$

误差为

$$\max\limits_{x_i\le x\le x_{i+1}}|f(x)-I_h(x)|\le\frac{1}{8}\max\limits_{a\le\xi\le b}|f''(\xi)|\bullet h_i^2$$

$\because f(x)=x^2$

$\therefore f'(x)=2x, f''(x)=2$

$\therefore \max\limits_{a\le x\le b}|f(x)-I_h(x)|\le\frac{h^2}{4}$

19．求 $f(x)=x^4$ 在 $[a,b]$ 上分段埃尔米特插值，并估计误差。

解：

在 $[a,b]$ 区间上， $x_0=a, x_n=b, h_i=x_{i+1}-x_i, i=0,1,\cdots,n-1,$

令 $h=\max\limits_{0\le i\le n-1} h_i$

$\because f(x)=x^4, f'(x)=4x^3$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的分段埃尔米特插值函数为

$$I_h(x)=\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)f(x_i)$$
$$+\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)f(x_{i+1})$$
$$+\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2(x-x_i)f'(x_i)$$
$$+\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2(x-x_{i+1})f'(x_{i+1})$$
$$=\frac{x_i^4}{h_i^3}(x-x_{i+1})^2(h_i+2x-2x_i)$$
$$+\frac{x_{i+1}^4}{h_i^3}(x-x_i)^2(h_i-2x+2x_{i+1})$$
$$+\frac{4x_i^3}{h_i^2}(x-x_{i+1})^2(x-x_i)$$
$$+\frac{4x_{i+1}^3}{h_i^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})$$

误差为

$$\left|f(x)-I_h(x)\right|$$
$$=\frac{1}{4!}\left|f^{(4)}(\xi)\right|(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2$$
$$\le\frac{1}{24}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(\xi)\right|\left(\frac{h_i}{2}\right)^4$$

又$\because f(x)=x^4$

$\therefore f^{(4)}(x)=4!=24$

$$\therefore \max_{a\le x\le b}\left|f(x)-I_h(x)\right|\le\max_{0\le i\le n-1}\frac{h_i^4}{16}\le\frac{h^4}{16}$$

20．给定数据表如下：

X_j	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
Y_j	0.5000	0.5477	0.6245	0.6708	0.7280

试求三次样条插值，并满足条件：

(1)$S'(0.25)=1.0000, S'(0.53)=0.6868;$

(2)$S''(0.25)=S''(0.53)=0.$

解：

$$h_0 = x_1 - x_0 = 0.05$$
$$h_1 = x_2 - x_1 = 0.09$$
$$h_2 = x_3 - x_2 = 0.06$$
$$h_3 = x_4 - x_3 = 0.08$$

$$\because \mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} - h_j}, \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} - h_j}$$

$$\therefore \mu_1 = \frac{5}{14}, \mu_2 = \frac{3}{5}, \mu_3 = \frac{3}{7}, \mu_4 = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{9}{14}, \lambda_2 = \frac{2}{5}, \lambda_3 = \frac{4}{7}, \lambda_0 = 1$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0.9540$$
$$f[x_1, x_2] = 0.8533$$
$$f[x_2, x_3] = 0.7717$$
$$f[x_3, x_4] = 0.7150$$

$$(1) S'(x_0) = 1.0000, S'(x_4) = 0.6868$$

$$d_0 = \frac{6}{h_0}(f[x_1, x_2] - f_0') = -5.5200$$

$$d_1 = 6\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{h_0 + h_1} = -4.3157$$

$$d_2 = 6\frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{h_1 + h_2} = -3.2640$$

$$d_3 = 6\frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{h_2 + h_3} = -2.4300$$

$$d_4 = \frac{6}{h_3}(f_4' - f[x_3, x_4]) = -2.1150$$

由此得矩阵形式的方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ \frac{5}{14} & 2 & \frac{9}{14} & & \\ & \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5} & \\ & & \frac{3}{7} & 2 & \frac{4}{7} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.5200 \\ -4.3157 \\ -3.2640 \\ -2.4300 \\ -2.1150 \end{pmatrix}$$

求解此方程组得

$$M_0=-2.0278, M_1=-1.4643$$
$$M_2=-1.0313, M_3=-0.8070, M_4=-0.6539$$

$\because$ 三次样条表达式为

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}$$
$$+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}\ (j=0,1,\cdots,n-1)$$

$\therefore$ 将 M_0,M_1,M_2,M_3,M_4 代入得

$$S(x)=\begin{cases}-6.7593(0.30-x)^3-4.8810(x-0.25)^3+10.0169(0.30-x)+10.9662(x-0.25)\\ x\in[0.25,0.30]\\ -2.7117(0.39-x)^3-1.9098(x-0.30)^3+6.1075(0.39-x)+6.9544(x-0.30)\\ x\in[0.30,0.39]\\ -2.8647(0.45-x)^3-2.2422(x-0.39)^3+10.4186(0.45-x)+10.9662(x-0.39)\\ x\in[0.39,0.45]\\ -1.6817(0.53-x)^3-1.3623(x-0.45)^3+8.3958(0.53-x)+9.1087(x-0.45)\\ x\in[0.45,0.53]\end{cases}$$

$$(2)S''(x_0)=0, S''(x_4)=0$$
$$d_0=2f_0''=0, d_1=-4.3157, d_2=-3.2640$$
$$d_3=-2.4300, d_4=2f_4''=0$$
$$\lambda_0=\mu_4=0$$

由此得矩阵开工的方程组为

$$M_0=M_4=0$$

$$\begin{pmatrix}2 & \frac{9}{14} & 0\\ \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{3}{7} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\\ M_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4.3157\\ -3.2640\\ -2.4300\end{pmatrix}$$

求解此方程组，得

$$M_0=0, M_1=-1.8809$$
$$M_2=-0.8616, M_3=-1.0304, M_4=0$$

又 $\because$ 三次样条表达式为

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}$$
$$+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}$$

将 M_0,M_1,M_2,M_3,M_4 代入得

$$\therefore S(x)=\begin{cases}-6.2697(x-0.25)^3+10(0.3-x)+10.9697(x-0.25)\\ x\in[0.25,0.30]\\ -3.4831(0.39-x)^3-1.5956(x-0.3)^3+6.1138(0.39-x)+6.9518(x-0.30)\\ x\in[0.30,0.39]\\ -2.3933(0.45-x)^3-2.8622(x-0.39)^3+10.4186(0.45-x)+11.1903(x-0.39)\\ x\in[0.39,0.45]\\ -2.1467(0.53-x)^3+8.3987(0.53-x)+9.1(x-0.45)\\ x\in[0.45,0.53]\end{cases}$$

21．若 $f(x)\in C^2[a,b]$，$S(x)$ 是三次样条函数，证明：

$$(1)\int_a^b[f''(x)]^2dx-\int_a^b[S''(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2dx+2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]^2dx$$

(2) 若 $f(x_i)=S(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$，式中 x_i 为插值节点，且 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，则

$$\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$
$$=S''(b)[f'(b)-S'(b)]-S'(a)[f'(a)-S'(a)]$$

证明：

$$(1)\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)]^2dx+\int_a^b[S''(x)]^2dx-2\int_a^b f''(x)S''(x)dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)]^2dx-\int_a^b[S''(x)]^2dx-2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$

从而有

$$\int_a^b[f''(x)]^2dx-\int_a^b[S''(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2dx+2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$

$$(2)\int_a^b S''(x)\left[f''(x)-S''(x)\right]dx$$

$$=\int_a^b S''(x)d\left[f'(x)-S'(x)\right]$$

$$=S''(x)\left[f'(x)-S'(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b\left[f'(x)-S'(x)\right]d[S''(x)]$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\int_a^b S'''(x)\left[f'(x)-S'(x)\right]dx$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\sum_{k=0}^{n-1}S'''\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\bullet\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[f'(x)-S'(x)\right]dx$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\sum_{k=0}^{n-1}S'''\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\bullet\left[f(x)-S(x)\right]\Big|_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]$$

第三章 函数逼近与曲线拟合

1．$f(x)=\sin\dfrac{\pi}{2}x$，给出$[0,1]$上的伯恩斯坦多项式$B_1(f,x)$及$B_3(f,x)$。

解：

$\because f(x)=\sin\dfrac{\pi}{2},x\in[0,1]$

伯恩斯坦多项式为

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})P_k(x)$$

其中 $P_k(x)=\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}x^k(1-x)^{n-k}$

当 $n=1$ 时，

$$P_0(x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1-x)$$

$$P_1(x)=x$$

$$\therefore B_1(f,x)=f(0)P_0(x)+f(1)P_1(x)$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1-x)\sin(\frac{\pi}{2}\times 0)+x\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=x$$

当 $n=3$ 时，

$$P_0(x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1-x)^3$$

$$P_1(x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x(1-x)^2=3x(1-x)^2$$

$$P_2(x)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}x^2(1-x)=3x^2(1-x)$$

$$P_3(x)=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}x^3=x^3$$

$$\therefore B_3(f,x)=\sum_{k=0}^{3} f(\frac{k}{n})P_k(x)$$
$$=0+3x(1-x)^2\bullet\sin\frac{\pi}{6}+3x^2(1-x)\bullet\sin\frac{\pi}{3}+x^3\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{3}{2}x(1-x)^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2(1-x)+x^3$$
$$=\frac{5-3\sqrt{3}}{2}x^3+\frac{3\sqrt{3}-6}{2}x^2+\frac{3}{2}x$$
$$\approx 1.5x-0.402x^2-0.098x^3$$

2．当 $f(x)=x$ 时，求证 $B_n(f,x)=x$

证明：

若 $f(x)=x$，则

$$\begin{aligned}B_n(f,x)&=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})P_k(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)\cdots[(n-1)-(k-1)+1]}{(k-1)!}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}\\&=x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\&=x[x+(1-x)]^{n-1}\\&=x\end{aligned}$$

3．证明函数 $1,x,\cdots,x^n$ 线性无关

证明：

若 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0,\forall x\in R$

分别取 $x^k(k=0,1,2,\cdots,n)$，对上式两端在 $[0,1]$ 上作带权 $\rho(x)\equiv 1$ 的内积，得

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\because$ 此方程组的系数矩阵为希尔伯特矩阵，对称正定非奇异，

$\therefore$ 只有零解 a=0。

$\therefore$ 函数 $1,x,\cdots,x^n$ 线性无关。

4。计算下列函数 $f(x)$ 关于 $C[0,1]$ 的 $\|f\|_\infty,\|f\|_1$ 与 $\|f\|_2$：

(1) $f(x)=(x-1)^3, x\in[0,1]$

(2) $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|,$

(3) $f(x)=x^m(1-x)^n$, m 与 n 为正整数，

(4) $f(x)=(x+1)^{10}e^{-x}$

解：

(1) 若 $f(x)=(x-1)^3, x\in[0,1]$，则

$$f'(x)=3(x-1)^2\geq 0$$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)^3$ 在 $(0,1)$ 内单调递增

$$\|f\|_\infty=\max_{0\le x\le 1}|f(x)|$$
$$=\max\{|f(0)|,|f(1)|\}$$
$$=\max\{0,1\}=1$$

$$\|f\|_\infty=\max_{0\le x\le 1}|f(x)|$$
$$=\max\{|f(0)|,|f(1)|\}$$
$$=\max\{0,1\}=1$$

$$\|f\|_2=(\int_0^1(1-x)^6\,dx)^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\frac{1}{7}(1-x)^7\Big|_0^1]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

(2) 若 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|, x\in[0,1]$，则

$\|f\|_\infty=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|=\frac{1}{2}$

$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$

$=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-\frac{1}{2})dx$

$=\frac{1}{4}$

$\|f\|_2=(\int_0^1 f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$

$=[\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2dx]^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{6}$

(3) 若 $f(x)=x^m(1-x)^n$,m 与 n 为正整数

当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)\ge 0$

$f'(x)=mx^{m-1}(1-x)^n+x^m n(1-x)^{n-1}(-1)$

$=x^{m-1}(1-x)^{n-1}m(1-\frac{n+m}{m}x)$

当 $x\in(0,\frac{m}{n+m})$ 时, $f'(x)>0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,\frac{m}{n+m})$ 内单调递减

当 $x\in(\frac{m}{n+m},1)$ 时, $f'(x)<0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(\frac{m}{n+m},1)$ 内单调递减。

$x\in(\frac{m}{n+m},1) f'(x)<0$

$\|f\|_\infty=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|=$

$=\max\left\{|f(0)|,\left|f(\frac{m}{n+m})\right|\right\}$

$=\frac{m^m\bullet n^n}{(m+n)^{m+n}}$

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$$
$$=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t)^m(1-\sin^2 t)^n d\sin^2 t$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m} t\cos^{2n} t\cos t\bullet 2\bullet\sin t dt$$
$$=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

$$\|f\|_2=[\int_0^1 x^{2m}(1-x)^{2n}dx]^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4m} t\cos^{4n} td(\sin^2 t)]^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^{4m+1} t\cos^{4n+1} tdt]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(2n)!(2m)!}{[2(n+m)+1]!}}$$

(4) 若 $f(x)=(x+1)^{10}e^{-x}$

当 $x\in[0,1]$ 时， $f(x)>0$

$$f'(x)=10(x+1)^9e^{-x}+(x+1)^{10}(-e^{-x})$$
$$=(x+1)^9e^{-x}(9-x)$$
$$>0$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 内单调递减。

$$\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1}|f(x)| =$$
$$= \max\{|f(0)|,|f(1)|\}$$
$$= \frac{2^{10}}{e}$$
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$
$$= \int_0^1 (x+1)^{10} e^{-x} dx$$
$$= -(x+1)^{10} e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 10(x+1)^9 e^{-x} dx$$
$$= 5 - \frac{10}{e}$$
$$\|f\|_2 = [\int_0^1 (x+1)^{20} e^{-2x} dx]^{\frac{1}{2}}$$
$$= 7(\frac{3}{4} - \frac{4}{e^2})$$

5。证明$\|f-g\| \ge \|f\| - \|g\|$

证明：

$$\|f\|$$
$$= \|(f-g)+g\|$$
$$\le \|f-g\| + \|g\|$$
$$\therefore \|f-g\| \ge \|f\| - \|g\|$$

6。对$f(x), g(x) \in C^1[a,b]$，定义

$$(1)(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx$$
$$(2)(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx + f(a)g(a)$$

问它们是否构成内积。

解：

(1) 令 $f(x) \equiv C$（C 为常数，且 $C \ne 0$）

则 $f'(x) = 0$

而 $(f,f) = \int_a^b f'(x)f'(x)dx$

这与当且仅当 $f \equiv 0$ 时，$(f,f) = 0$ 矛盾

$\therefore$ 不能构成 $C^1[a,b]$ 上的内积。

(2) 若 $(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)$，则

$(g,f)=\int_a^b g'(x)f'(x)dx+g(a)f(a)=(f,g),\forall\alpha\in K$

$(\alpha f,g)=\int_a^b[\alpha f(x)]'g'(x)dx+af(a)g(a)$

$=\alpha[\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)]$

$=\alpha(f,g)$

$\forall h\in C^1[a,b]$,则

$(f+g,h)=\int_a^b[f(x)+g(x)]'h'(x)dx+[f(a)g(a)]h(a)$

$=\int_a^b f'(x)h'(x)dx+f(a)h(a)+\int_a^b f'(x)h'(x)dx+g(a)h(a)$

$=(f,h)+(h,g)$

$(f,f)=\int_a^b[f'(x)]^2dx+f^2(a)\geq 0$

若 $(f,f)=0$，则

$\int_a^b[f'(x)]^2dx=0$，且 $f^2(a)=0$

$\therefore f'(x)\equiv 0, f(a)=0$

$\therefore f(x)\equiv 0$

即当且仅当 $f=0$ 时，$(f,f)=0$.

故可以构成 $C^1[a,b]$ 上的内积。

7。令 $T_n^*(x)=T_n(2x-1),x\in[0,1]$，试证 $\{T_n^*(x)\}$ 是在 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式，并求 $T_0^*(x),T_1^*(x),T_2^*(x),T_3^*(x)$。

解：

若 $T_n^*(x)=T_n(2x-1),x\in[0,1]$，则

$\int_0^1 T_n^*(x)T_m^*(x)P(x)dx$

$=\int_0^1 T_n(2x-1)T_m(2x-1)\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$

令 $t=(2x-1)$，则 $t\in[-1,1]$，且 $x=\dfrac{t+1}{2}$，故

$$\int_0^1 T_n^*(x)T_m^*(x)\rho(x)dx$$
$$=\int_{-1}^1 T_n(t)T_m(t)\frac{1}{\sqrt{\frac{t+1}{2}-(\frac{t+1}{2})^2}}d(\frac{t+1}{2})$$
$$=\int_{-1}^1 T_n(t)T_m(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

又$\because$ 切比雪夫多项式$\{T_k^*(x)\}$在区间$[0,1]$上带权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交，且

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)d\frac{x}{\sqrt{1-t^2}}=\begin{cases}0,n\neq m\\ \frac{\pi}{2},n=m\neq 0\\ \pi,n=m=0\end{cases}$$

$\therefore\{T_n^*(x)\}$是在$[0,1]$上带权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式。

又$\because T_0(x)=1,x\in[-1,1]$

$\therefore T_0^*(x)=T_0(2x-1)=1,x\in[0,1]$
$\because T_1(x)=x,x\in[-1,1]$
$\therefore T_1^*(x)=T_1(2x-1)=2x-1,x\in[0,1]$

$\because T_2(x)=2x^2-1,x\in[-1,1]$
$\therefore T_2^*(x)=T_2(2x-1)$
$=2(2x-1)^2-1$
$=8x^2-8x-1,x\in[0,1]$

$\because T_3(x)=4x^3-3x,x\in[-1,1]$
$\therefore T_3^*(x)=T_3(2x-1)$

$=4(2x-1)^3-3(2x-1)$
$=32x^3-48x^2+18x-1,x\in[0,1]$

8。对权函数 $\rho(x)=1-x^2$，区间$[-1,1]$，试求首项系数为 1 的正交多项式 $\varphi_n(x),n=0,1,2,3.$

解：

若$\rho(x)=1-x^2$，则区间$[-1,1]$上内积为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\rho(x)dx$$

定义$\varphi_0(x)=1$，则

$$\varphi_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)\varphi_n(x)-\beta_n\varphi_{n-1}(x)$$

其中

$$\alpha_n=(x\varphi_n(x),\varphi_n(x))/(\varphi_n(x),\varphi_n(x))$$
$$\beta_n=(\varphi_n(x),\varphi_n(x))/(\varphi_{n-1}(x),\varphi_{n-1}(x))$$
$$\therefore \alpha_0=(x,1)/(1,1)$$
$$=\frac{\int_{-1}^{1}x(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx}$$
$$=0$$
$$\therefore \varphi_1(x)=x$$
$$\alpha_1=(x^2,x)/(x,x)$$
$$=\frac{\int_{-1}^{1}x^3(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)dx}$$
$$=0$$
$$\beta_1=(x,x)/(1,1)$$
$$=\frac{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx}$$
$$=\frac{\frac{16}{15}}{\frac{8}{3}}=\frac{2}{5}$$
$$\therefore \varphi_2(x)=x^2-\frac{2}{5}$$

$$\alpha_2=(x^3-\frac{2}{5}x,x^2-\frac{2}{5})/(x^2-\frac{2}{5},x^2-\frac{2}{5})$$

$$=\frac{\int_{-1}^{1}(x^3-\frac{2}{5}x)(x^2-\frac{2}{5})(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{2}{5})(x^2-\frac{2}{5})(1+x^2)dx}$$

$$=0$$

$$\beta_2=(x^2-\frac{2}{5},x^2-\frac{2}{5})/(x,x)$$

$$=\frac{\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{2}{5})(x^2-\frac{2}{5})(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)dx}$$

$$=\frac{\frac{136}{525}}{\frac{16}{15}}=\frac{17}{70}$$

$$\therefore\varphi_3(x)=x^3-\frac{2}{5}x^2-\frac{17}{70}x=x^3-\frac{9}{14}x$$

9。试证明由教材式 (2.14) 给出的第二类切比雪夫多项式族 $\{u_n(x)\}$ 是 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式。

证明：

若 $U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$

令 $x=\cos\theta$，可得

$$\int_{-1}^{1}U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{\sin[(m+1)\arccos x]\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_{\pi}^{0}\frac{\sin[(m+1)\theta\sin[(n+1)\theta]}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}\sin[(m+1)\theta\sin[(n+1)\theta]d\theta$$

当 $m=n$ 时，

$$\int_{0}^{\pi}\sin^2[(m+1)\theta d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos[2(m+1)\theta]}{2}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

当 $m\neq n$ 时，

$$\int_0^\pi \sin[(m+1)\theta\sin[(n+1)\theta]d\theta$$

$$=\int_0^\pi \sin[(m+1)\theta d\{\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta\}$$

$$=\int_0^\pi \frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta d\{\sin[(m+1)\theta]\}$$

$$=\int_0^\pi -\frac{m+1}{n+1}\cos(n+1)\theta\cos(m+1)\theta d\theta$$

$$=-\int_0^\pi \frac{m+1}{n+1}\cos[(m+1)\theta]d\{\frac{1}{n+1}\sin[(n+1)\theta]\}$$

$$=-\int_0^\pi \frac{m+1}{(n+1)^2}\sin[(n+1)]\theta d\{\cos[(m+1)\theta]\}$$

$$=\int_0^\pi (\frac{m+1}{n+1})^2\sin[(n+1)\theta]\sin[(m+1)\theta]d\theta$$

$$=0$$

$$\therefore [1-(\frac{m+1}{n+1})^2]\int_0^\pi \sin[(n+1)\theta]\sin[(m+1)\theta]d\theta=0$$

又$\because m\neq n$，故$(\frac{m+1}{n+1})^2\neq 1$

$$\therefore \int_0^\pi \sin[(n+1)\theta]\sin[(m+1)\theta]d\theta=0$$

得证。

10。证明切比雪夫多项式$T_n(x)$满足微分方程

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0$$

证明：

切比雪夫多项式为

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),|x|\leq 1$$

从而有

$T_n'(x) = -\sin(n\arccos x) \cdot n \cdot (\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}})$

$= \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)$

$T_n''(x) = \frac{n}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(n\arccos x) - \frac{n^2}{1-x^2}\cos(n\arccos x)$

$\therefore (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x)$

$= \frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x) - n^2\cos(n\arccos x)$

$-\frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x) + n^2\cos(n\arccos x)$

$= 0$

得证。

11。假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式？

解：

$\because f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

$\therefore$ 存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$，使

$f(x_1) = \min\limits_{a\le x\le b} f(x),$

$f(x_2) = \max\limits_{a\le x\le b} f(x),$

取 $P = \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$

则 x_1 和 x_2 是 $[a,b]$ 上的 2 个轮流为“正”、“负”的偏差点。

由切比雪夫定理知

P 为 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式。

12。选取常数 a，使 $\max\limits_{0\le x\le 1}\left|x^3 - ax\right|$ 达到极小，又问这个解是否唯一？

解：

令 $f(x) = x^3 - ax$

则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数

$\therefore \max\limits_{0\le x\le 1}\left|x^3 - ax\right|$

$= \max\limits_{-1\le x\le 1}\left|x^3 - ax\right|$

$= \|f\|_\infty$

又$\because f(x)$的最高次项系数为 1，且为 3 次多项式。

$\therefore \omega_3(x)=\frac{1}{2^3}T_3(x)$与 0 的偏差最小。

$\omega_3(x)=\frac{1}{4}T_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x$

从而有$a=\frac{3}{4}$

13。求$f(x)=\sin x$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最佳一次逼近多项式，并估计误差。

解：

$\because f(x)=\sin x, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x\le 0$

$a_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2}{\pi},$

$\cos x_2=\frac{2}{\pi},$

$\therefore x_2=\arccos\frac{2}{\pi}\approx 0.88069$

$f(x_2)=0.77118$

$a_0=\frac{f(a)+f(x_2)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\bullet\frac{a+x_2}{2}$

$=0.10526$

于是得$f(x)$的最佳一次逼近多项式为

$P_1(x)=0.10526+\frac{2}{\pi}x$

即

$\sin x\approx 0.10526+\frac{2}{\pi}x, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$

误差限为

$\|\sin x-P_1(x)\|_\infty$

$=|\sin 0-P_1(0)|$

$=0.10526$

14。求$f(x)=e^x[0,1]$在$[0,1]$上的最佳一次逼近多项式。

解：

$\because f(x)=e^x, x\in[0,1]$

$\therefore f'(x)=e^x,$

$f''(x)=e^x>0$

$$a_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=e-1$$

$$e^{x_2}=e-1$$

$$x_2=\ln(e-1)$$

$$f(x_2)=e^{x_2}=e-1$$

$$a_0=\frac{f(a)+f(x_2)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\bullet\frac{a+x_2}{2}$$

$$=\frac{1+(e-1)}{2}-(e-1)\frac{\ln(e-1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(e-1)$$

于是得 $f(x)$ 的最佳一次逼近多项式为

$$P_1(x)=\frac{e}{2}+(e-1)[x-\frac{1}{2}\ln(e-1)]$$

$$=(e-1)x+\frac{1}{2}[e-(e-1)\ln(e-1)]$$

15。求 $f(x)=x^4+3x^3-1$ 在区间 $[0,1]$ 上的三次最佳一致逼近多项式。

解：

$$\because f(x)=x^4+3x^3-1,x\in[0,1]$$

令 $t=2(x-\frac{1}{2})$，则 $t\in[-1,1]$

且 $x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

$$\therefore f(t)=(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})^4+3(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})^3-1$$

$$=\frac{1}{16}(t^4+10t^3+24t^2 22t-9)$$

令 $g(t)=16f(t)$，则 $g(t)=t^4+10t^3+24t^2+22t-9$

若 $g(t)$ 为区间 $[-1,1]$ 上的最佳三次逼近多项式 $P_3^*(t)$ 应满足

$$\max_{-1\le t\le 1}\left|g(t)-P_3^*(t)\right|=\min$$

当 $g(t)-P_3^*(t)=\frac{1}{2^3}T_4(t)=\frac{1}{8}(8t^4-8t^2+1)$

时，多项式 $g(t)-P_3^*(t)$ 与零偏差最小，故

$$_3^*(t)=g(t)-\frac{1}{2^3}T_4(t)$$
$$=10t^3+25t^2+22t-\frac{73}{8}$$

进而，$f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式为 $\frac{1}{16}P_3^*(t)$，则 $f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式为

$$P_3^*(t)=\frac{1}{16}[10(2x-1)^3+25(2x-1)^2+22(2x-1)-\frac{73}{8}]$$
$$=5x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{129}{128}$$

16。$f(x)=|x|$，在 $[-1,1]$ 上求关于 $\Phi=span\{1,x^2,x^4\}$ 的最佳平方逼近多项式。

解：

$\because f(x)=|x|,x\in[-1,1]$

若 $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0=1,\varphi_1=x^2,\varphi_2=x^4$，则

$$\|\varphi_0\|_2^2=2,\|\varphi_1\|_2^2=\frac{2}{5},\|\varphi_2\|_2^2=\frac{2}{9},$$
$$(f,\varphi_0)=1,(f,\varphi_1)=\frac{1}{2},(f,\varphi_2)=\frac{1}{3},$$
$$(\varphi_0,\varphi_1)=1,(\varphi_0,\varphi_2)=\frac{2}{5},(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{2}{7},$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix}2&\frac{2}{3}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{5}&\frac{2}{7}\\\frac{2}{5}&\frac{2}{7}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{cases}a_0=0.1171875\\a_1=1.640625\\a_2=-0.8203125\end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi=span\{1,x^2,x^4\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4$$
$$= 0.1171875 + 1.640625x^2 - 0.8203125x^4$$

17。求函数 $f(x)$ 在指定区间上对于 $\Phi = span\{1, x\}$ 的最佳逼近多项式：

$$(1)\, f(x) = \frac{1}{x}, [1,3]; (2)\, f(x) = e^x, [0,1];$$
$$(3)\, f(x) = \cos \pi x, [0,1]; (4)\, f(x) = \ln x, [1,2];$$

解：

$$(1) \because f(x) = \frac{1}{x}, [1,3];$$

若 $(f, g) = \int_1^3 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x,$，则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 2, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{26}{3},$$
$$(\varphi_0, \varphi_1) = 4,$$
$$(f, \varphi_0) = \ln 3, (f, \varphi_1) = 2,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & \frac{26}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = 1.1410 \\ a_1 = -0.2958 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = span\{1, x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x) = a_0 + a_1 x$$
$$= 1.1410 - 0.2958x$$

$$(2) \because f(x) = e^x, [0,1]$$

若 $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x,$，则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 1, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2},$$

$$(f, \varphi_0) = e-1, (f, \varphi_1) = 1,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = 0.1878 \\ a_1 = 1.6244 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = span\{1, x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x) = a_0 + a_1 x$$
$$= 0.1878 + 1.6244x$$

(3) $\because f(x) = \cos \pi x, x \in [0,1]$

若 $(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x,$，则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 1, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2},$$

$$(f, \varphi_0) = 0, (f, \varphi_1) = -\frac{2}{\pi^2},$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\pi^2} \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = 1.2159 \\ a_1 = -0.24317 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = span\{1, x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x) = a_0 + a_1 x$$
$$= 1.2159 - 0.24317x$$

(4) $\because f(x) = \ln x, x \in [1,2]$

若 $(f, g) = \int_1^2 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$, 则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 1, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{7}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{3}{2},$$

$$(f, \varphi_0) = 2\ln 2 - 1, (f, \varphi_1) = 2\ln 2 - \frac{3}{4},$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ln 2 - 1 \\ 2\ln 2 - \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = -0.6371 \\ a_1 = 0.6822 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = span\{1, x\}$ 最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x) = a_0 + a_1 x$$
$$= -0.6371 + 0.6822x$$

18。$f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$，在 $[-1,1]$ 上按勒让德多项式展开求三次最佳平方逼近多项式。

解：

$$\because f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x, x \in [-1,1]$$

按勒让德多项式 $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ 展开

$$(f(x),P_0(x)) = \int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi}{2}xdx = \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\Big|_{1}^{-1} = 0$$

$$(f(x),P_1(x)) = \int_{-1}^{1}x\sin\frac{\pi}{2}xdx = \frac{8}{\pi^2}$$

$$(f(x),P_2(x)) = \int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})\sin\frac{\pi}{2}xdx = 0$$

$$(f(x),P_3(x)) = \int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)\sin\frac{\pi}{2}xdx = \frac{48(\pi^2-10)}{\pi^4}$$

则

$$a_0^* = (f(x),P_0(x))/2 = 0$$

$$a_1^* = 3(f(x),P_1(x))/2 = \frac{12}{\pi^2}$$

$$a_2^* = 5(f(x),P_2(x))/2 = 0$$

$$a_3^* = 7(f(x),P_3(x))/2 = \frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}$$

从而 $f(x)$ 的三次最佳平方逼近多项式为

$$S_3^*(x) = a_0^*P_0(x) + a_1^*P_1(x) + a_2^*P_2(x) + a_3^*P_3(x)$$

$$= \frac{12}{\pi^2}x + \frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)$$

$$= \frac{420(\pi^2-10)}{\pi^4}x^3 + \frac{120(21-2\pi^2)}{\pi^4}$$

$$\approx 1.5531913x - 0.5622285x^3$$

19。观测物体的直线运动，得出以下数据：

时间 t(s)	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 s(m)	0	10	30	50	80	110

求运动方程。

解：

被观测物体的运动距离与运动时间大体为线性函数关系，从而选择线性方程

$s = a + bt$

令 $\Phi = span\{1,t\}$

则

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 6, \|\varphi_1\|_2^2 = 53.63,$$

$$(\varphi_0,\varphi_1) = 14.7,$$

$$(\varphi_0,s) = 280, (\varphi_1,s) = 1078,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 6 & 14.7 \\ 14.7 & 53.63 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 \\ 1078 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a = -7.855048 \\ b = 22.25376 \end{cases}$$

故物体运动方程为

$S = 22.25376t - 7.855048$

20。已知实验数据如下：

x_i	19	25	31	38	44
y_j	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $s = a + bx^2$ 的经验公式，并计算均方误差。

解：

若 $s = a + bx^2$，则

$$\Phi = span\{1, x^2\}$$

则

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 5, \|\varphi_1\|_2^2 = 7277699,$$
$$(\varphi_0, \varphi_1) = 5327,$$
$$(f, \varphi_0) = 271.4, (f, \varphi_1) = 369321.5,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a = 0.9726046 \\ b = 0.0500351 \end{cases}$$

故 $y = 0.9726046 + 0.0500351x^2$

均方误差为 $\delta = [\sum_{j=0}^{4}(y(x_j) - y_j)^2]^{\frac{1}{2}} = 0.1226$

21。在某佛堂反应中，由实验得分解物浓度与时间关系如下：

时间 t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
浓度 $y(\times 10^{-4})$	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

用最小二乘法求 $y = f(t)$。

解：
观察所给数据的特点，采用方程

$$y = ae^{\frac{-b}{t}}, (a,b>0)$$

两边同时取对数，则

$$\ln y = \ln a - \frac{b}{t}$$

取 $\Phi = span\left\{1, -\frac{1}{t}\right\}, S = \ln y, x = -\frac{1}{t}$

则 $S = a^* + b^* x$

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 11, \|\varphi_1\|_2^2 = 0.062321,$$
$$(\varphi_0, \varphi_1) = -0.603975,$$
$$(\varphi_0, f) = -87.674095, (\varphi_1, f) = 5.032489,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 11 & -0.603975 \\ -0.603975 & 0.062321 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -87.674095 \\ 5.032489 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a^* = -7.5587812 \\ b^* = 7.4961692 \end{cases}$$

因此

$$a = e^{a^*} = 5.2151048$$
$$b = b^* = 7.4961692$$
$$\therefore y = 5.2151048e^{-\frac{7.4961692}{t}}$$

22。给出一张记录 $\{f_k\} = (4,3,2,1,0,1,2,3)$,用 FFT 算法求 $\{c_k\}$ 的离散谱。

解：

$$\{f_k\} = (4,3,2,1,0,1,2,3),$$

则 $k = 0,1,\cdots,7, N = 8$

$$\omega^0 = \omega^4 = 1,$$
$$\omega^1 = \omega^5 = e^{-\frac{\pi}{4}i},$$
$$\omega^2 = \omega^6 = e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i,$$
$$\omega^3 = \omega^7 = e^{-\frac{3\pi}{4}i},$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	4	3	2	1	0	1	2	3
A_1	4	4	4	2ω	4	0	4	$-2\omega^3$
A_2	8	4	0	4	8	$2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$
C_j	16	$4+2\sqrt{2}$	0	$4-2\sqrt{2}$	0	$4-2\sqrt{2}$	0	$4+2\sqrt{2}$

23，用辗转相除法将 $R_{22}(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$ 化为连分式。

解

$$R_{22}(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$$

$$=3-\frac{12x+18}{x^2+6x+6}$$

$$=3-\cfrac{12}{x+\frac{9}{2}-\cfrac{\frac{3}{4}}{x+\frac{3}{2}}}$$

$$=3-\frac{12}{x+4.5}-\frac{0.75}{x+1.5}$$

24。求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的 $(3,3)$ 阶帕德逼近 $R_{33}(x)$。

解：

由 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

得 $C_0=0,$

$C_1=1,$
$C_2=0,$
$C_3=-\dfrac{1}{3!}=-\dfrac{1}{6},$
$C_4=0,$

$$C_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120},$$

$$C_6 = 0,$$

从而

$$-C_1 b_3 - C_2 b_2 - C_3 b_1 = C_4$$
$$-C_2 b_3 - C_3 b_2 - C_4 b_1 = C_5$$
$$-C_3 b_3 - C_4 b_2 - C_5 b_1 = C_6$$

即

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{120} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{120} \\ 0 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} b_3 = 0 \\ b_2 = \frac{1}{20} \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

又$\because a_k = \sum_{j=0}^{k-1} C_j b_{k-j} + C_k \ (k = 0,1,2,3)$

则

$$a_0 = C_0 = 0$$
$$a_1 = C_0 b_1 + C_1 = 0$$
$$a_2 = C_0 b_2 + C_1 b_1 = 0$$
$$a_3 = C_0 b_3 + C_1 b_2 + C_2 b_1 + C_3 = -\frac{7}{60}$$

故

$$R_{33}(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3}$$

$$=\frac{x-\dfrac{7}{60}x^3}{1+\dfrac{1}{20}x^2}$$

$$=\frac{60x-7x^3}{60+3x^3}$$

25。求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 $(2,1)$ 阶帕德逼近 $R_{21}(x)$。

解：

由 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

得

$$C_0=1,$$
$$C_1=1,$$
$$C_2=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2},$$
$$C_3=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6},$$

从而

$$-C_2b_1=C_3$$

即

$$-\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{6}$$

解得

$$b_1=-\frac{1}{3}$$

又 $\because a_k=\sum_{j=0}^{k-1}C_jb_{k-j}+C_k(k=0,1,2)$

则

$$a_0=C_0=1$$

$$a_1=C_0b_1+C_1=\frac{2}{3}$$

$$a_2=C_1b_1+C_2=\frac{1}{6}$$

故

$$R_{21}(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x}$$

$$=\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}{1-\frac{1}{3}x}$$

$$=\frac{6+4x+x^2}{6-2x}$$

第四章　　数值积分与数值微分

1.确定下列求积公式中的特定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度：

(1) $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$;

(2) $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$;

(3) $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$;

(4) $\int_{0}^{h} f(x)dx \approx h[f(0) + f(h)]/2 + ah^2[f'(0) - f'(h)]$;

解：

求解求积公式的代数精度时，应根据代数精度的定义，即求积公式对于次数不超过 m 的多项式均能准确地成立，但对于 m+1 次多项式就不准确成立，进行验证性求解。

（1）若 (1) $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

令 $f(x)=1$，则

$$2h = A_{-1} + A_0 + A_1$$

令 $f(x)=x$，则

$$0 = -A_{-1}h + A_1 h$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\frac{2}{3}h^3 = h^2 A_{-1} + h^2 A_1$$

从而解得

$$\begin{cases} A_0 = \frac{4}{3}h \\ A_1 = \frac{1}{3}h \\ A_{-1} = \frac{1}{3}h \end{cases}$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^3 dx = 0$$

$$A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = 0$$

故 $\int_{-h}^{h} f(x)dx = A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$成立。

令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^4 dx = \frac{2}{5}h^5$$

$$A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = \frac{2}{3}h^5$$

故此时，

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \neq A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

故 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

具有 3 次代数精度。

（2）若 $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

令 $f(x) = 1$，则

$$4h = A_{-1} + A_0 + A_1$$

令 $f(x) = x$，则

$$0 = -A_{-1}h + A_1 h$$

令 $f(x) = x^2$，则

$$\frac{16}{3}h^3 = h^2 A_{-1} + h^2 A_1$$

从而解得

$$\begin{cases} A_0 = -\frac{4}{3}h \\ A_1 = \frac{8}{3}h \\ A_{-1} = \frac{8}{3}h \end{cases}$$

令 $f(x) = x^3$，则

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx = \int_{-2h}^{2h} x^3 dx = 0$$

$$A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = 0$$

故 $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx = A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$ 成立。

令 $f(x) = x^4$，则

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx = \int_{-2h}^{2h} x^4\, dx = \frac{64}{5}h^5$$

$$A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = \frac{16}{3}h^5$$

故此时，

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \neq A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

因此，

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

具有 3 次代数精度。

（3）若 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$

令 $f(x)=1$，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2 = [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$$

令 $f(x)=x$，则

$$0 = -1 + 2x_1 + 3x_2$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$2 = 1 + 2x_1^2 + 3x_2^2$$

从而解得

$$\begin{cases} x_1 = -0.2899 \\ x_2 = 0.5266 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1 = 0.6899 \\ x_2 = 0.1266 \end{cases}$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$$

$$[f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3 \neq 0$$

故 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$ 不成立。

因此，原求积公式具有 2 次代数精度。

（4）若 $\int_{0}^{h} f(x)dx \approx h[f(0) + f(h)]/2 + ah^2[f'(0) - f'(h)]$

令 $f(x)=1$，则

$$\int_{0}^{h} f(x)dx = h,$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]=h$$

令 $f(x)=x$，则

$$\int_0^h f(x)dx=\int_0^h xdx=\frac{1}{2}h^2$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^2$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\int_0^h f(x)dx=\int_0^h x^2dx=\frac{1}{3}h^3$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^3-2ah^3$$

故有

$$\frac{1}{3}h^3=\frac{1}{2}h^3-2ah^3$$

$$a=\frac{1}{12}$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_0^h f(x)dx=\int_0^h x^3dx=\frac{1}{4}h^4$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^4-\frac{1}{4}h^4=\frac{1}{4}h^4$$

令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_0^h f(x)dx=\int_0^h x^4dx=\frac{1}{5}h^5$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^5-\frac{1}{3}h^5=\frac{1}{6}h^5$$

故此时，

$$\int_0^h f(x)dx\neq h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)],$$

因此，$\int_0^h f(x)dx\approx h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]$

具有 3 次代数精度。

2.分别用梯形公式和辛普森公式计算下列积分：

$(1)\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}dx, n=8;$

$(2)\int_0^1 \frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}dx, n=10;$

$(3)\int_1^9 \sqrt{x}dx, n=4;$

$(4)\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-\sin^2\varphi}\, d\varphi, n=6;$

解：

$(1) n=8, a=0, b=1, h=\frac{1}{8}, f(x)=\frac{x}{4+x^2}$

复化梯形公式为

$$T_8=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)]=0.11140$$

复化辛普森公式为

$$S_8=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{7}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)]=0.11157$$

$(2) n=10, a=0, b=1, h=\frac{1}{10}, f(x)=\frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}$

复化梯形公式为

$$T_{10}=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{9}f(x_k)+f(b)]=1.39148$$

复化辛普森公式为

$$S_{10}=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{9}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{9}f(x_k)+f(b)]=1.45471$$

$(3) n=4, a=1, b=9, h=2, f(x)=\sqrt{x},$

复化梯形公式为

$$T_4=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{3}f(x_k)+f(b)]=17.22774$$

复化辛普森公式为

$$S_4=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{3}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{3}f(x_k)+f(b)]=17.32222$$

$(4) n=6, a=0, b=\frac{\pi}{6}, h=\frac{\pi}{36}, f(x)=\sqrt{4-\sin^2\varphi}$

复化梯形公式为

$$T_6=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{5}f(x_k)+f(b)]=1.03562$$

复化辛普森公式为

$$S_6=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{5}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{5}f(x_k)+f(b)]=1.03577$$

3。直接验证柯特斯教材公式（2。4）具有 5 交代数精度。

证明：

柯特斯公式为

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

令 $f(x)=1$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{90}$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=b-a$$

令 $f(x)=x$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xdx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^3dx=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^4dx=\frac{1}{5}(b^5-a^5)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{5}(b^5-a^5)$$

令 $f(x)=x^5$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^5dx=\frac{1}{6}(b^6-a^6)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{6}(b^6-a^6)$$

令 $f(x)=x^6$，则

$$\int_0^h f(x)dx\neq\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

因此，该柯特斯公式具有5次代数精度。

4。用辛普森公式求积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$ 并估计误差。

解：

辛普森公式为

$$S=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

此时，

$$a=0,b=1,f(x)=e^{-x},$$

从而有

$$S=\frac{1}{6}(1+4e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1})=0.63233$$

误差为

$$|R(f)|=\left|-\frac{b-a}{180}(\frac{b-a}{2})^4f^{(4)}(\eta)\right|$$

$$\leq\frac{1}{180}\times\frac{1}{2^4}\times e^0=0.00035,\eta\in(0,1)$$

5。推导下列三种矩形求积公式：

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2;$$

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2;$$

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3;$$

证明：

(1) $\because f(x)=f(a)+f'(\eta)(x-a),\eta\in(a,b)$

两边同时在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+f'(\eta)\int_a^b(x-a)dx$$

即

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

(2) $\because f(x)=f(b)-f'(\eta)(b-x),\eta\in(a,b)$

两边同时在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)-f'(\eta)\int_a^b(b-x)dx$$

即

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

(3) $\because f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2,\eta\in(a,b)$

两连边同时在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx+\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$

即

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3;$$

6。若用复化梯形公式计算积分$I=\int_0^1 e^x dx$，问区间$[0,1]$应人多少等分才能使截断误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-5}$？若改用复化辛普森公式，要达到同样精度区间$[0,1]$应分多少等分？

解：

采用复化梯形公式时，余项为

$$R_n(f)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta),\eta\in(a,b)$$

又$\because I=\int_0^1 e^x dx$

故$f(x)=e^x,f''(x)=e^x,a=0,b=1.$

$$\therefore |R_n(f)|=\frac{1}{12}h^2|f''(\eta)|\le\frac{e}{12}h^2$$

若$\left|R_n(f)\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$，则

$$h^2\le\frac{6}{e}\times10^{-5}$$

当对区间$[0,1]$进行等分时，

$$h=\frac{1}{n},$$

故有

$$n\ge\sqrt{\frac{e}{6}\times10^{-5}}=212.85$$

因此，将区间 213 等分时可以满足误差要求

采用复化辛普森公式时，余项为

$$R_n(f)=-\frac{b-a}{180}(\frac{h}{2})^4f^{(4)}(\eta),\eta\in(a,b)$$

又$\because f(x)=e^x,$

$$\therefore f^{(4)}(x)=e^x,$$

$$\therefore\left|R_n(f)\right|=-\frac{1}{2880}h^4|f^{(4)}(\eta)|\le\frac{e}{2880}h^4$$

若$\left|R_n(f)\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$，则

$$h^4\le\frac{1440}{e}\times10^{-5}$$

当对区间$[0,1]$进行等分时

$$n=\frac{1}{h}$$

故有

$$n\ge(\frac{1440}{e}\times10^5)^{\frac{1}{4}}=3.71$$

因此，将区间 8 等分时可以满足误差要求。

7。如果$f''(x)>0$，证明用梯形公式计算积分$I=\int_a^b f(x)dx$所得结果比准确值I大，并说明其几何意义。

解：采用梯形公式计算积分时，余项为

$$R_T=-\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3,\eta\in[a,b]$$

又$\because f''(x)>0$且$b>a$

$$\therefore R_T<0$$

又$\because R_T = 1 - T$

$\therefore I < T$

即计算值比准确值大。

其几何意义为，$f''(x) > 0$ 为下凸函数，梯形面积大于曲边梯形面积。

8。用龙贝格求积方法计算下列积分，使误差不超过10^{-5}.

$(1)\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x}dx$

$(2)\int_0^{2\pi} x\sin xdx$

$(3)\int_0^3 x\sqrt{1+x^2}dx.$

解：

$(1) I = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x}dx$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	0.7717433			
1	0.7280699	0.7135121		
2	0.7169828	0.7132870	0.7132720	
3	0.7142002	0.7132726	0.7132717	0.7132717

因此 $I = 0.713727$

$(2) I = \int_0^{2\pi} x\sin xdx$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$
0	3.451313×10^{-6}	
1	8.628283×10^{-7}	-4.446923×10^{-21}

因此 $I \approx 0$

$(3) I = \int_0^3 x\sqrt{1+x^2}dx$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$
0	14.2302495					
1	11.1713699	10.1517434				
2	10.4437969	10.2012725	10.2045744			
3	10.2663672	10.2072240	10.2076207	10.2076691		
4	10.2222702	10.2075712	10.2075943	10.2075939	10.2075936	
5	10.2112607	10.2075909	10.2075922	10.2075922	10.2075922	10.2075922

因此 $I \approx 10.2075922$

9。用 $n=2,3$ 的高斯-勒让德公式计算积分

$$\int_1^3 e^x \sin x dx.$$

解：

$$I=\int_1^3 e^x \sin x dx.$$

$\because x \in [1,3]$, 令 $t=x-2$，则 $t \in [-1,1]$

用 $n=2$ 的高斯—勒让德公式计算积分

$$I \approx 0.5555556 \times [f(-0.7745967)+f(0.7745967)]+0.8888889 \times f(0)$$
$$\approx 10.9484$$

用 $n=3$ 的高斯—勒让德公式计算积分

$$I \approx 0.3478548 \times [f(-0.8611363)+f(0.8611363)]$$
$$+0.6521452 \times [f(-0.3399810)+f(0.3399810)]$$
$$\approx 10.95014$$

10 地球卫星轨道是一个椭圆，椭圆周长的计算公式是

$$S=a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\frac{c}{a})^2 \sin^2\theta}\, d\theta,$$

这是 a 是椭圆的半径轴，c 是地球中心与轨道中心（椭圆中心）的距离，记h 为近地点距离，H 为远地点距离，R=6371（km）为地球半径，则

$$a=(2R+H+h)/2, c=(H-h)/2.$$

我国第一颗地球卫星近地点距离 h=439(km)，远地点距离 H=2384(km)。试求卫星轨道的周长。

解：

$$\because R=6371, h=439, H=2384$$

从而有。

$$a=(2R+H+h)/2=7782.5$$
$$c=(H-h)/2=972.5$$

$$S=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\frac{c}{a})^2 \sin^2\theta}\, d\theta$$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$
0	1.564640		
1	1.564646	1.564648	
2	1.564646	1.564646	1.564646

$I \approx 1.564646$

$S \approx 48708(km)$

即人造卫星轨道的周长为 48708km

11。证明等式

$$n\sin\frac{\pi}{n} = \pi - \frac{\pi^3}{3!n^2} + \frac{\pi^5}{5!n^4} - \cdots$$

试依据 $n\sin(\frac{\pi}{n})(n = 3,6,12)$ 的值，用外推算法求 π 的近似值。

解

若 $f(n) = n\sin\frac{\pi}{n}$，

又 $\because \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$

$\therefore$ 此函数的泰勒展式为

$$f(n) = n\sin\frac{\pi}{n}$$

$$= n[\frac{\pi}{n} - \frac{1}{3!}(\frac{\pi}{n})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\pi}{n})^5 - \cdots]$$

$$= \pi - \frac{\pi^3}{3!n^2} + \frac{\pi^5}{5!n^4} - \cdots$$

$T_n^{(k)} \approx \pi$

当 $n = 3$ 时，$n\sin\frac{\pi}{n} = 2.598076$

当 $n = 6$ 时，$n\sin\frac{\pi}{n} = 3$

当 $n = 12$ 时，$n\sin\frac{\pi}{n} = 3.105829$

由外推法可得

n	$T_0^{(n)}$	$T_1^{(n)}$	$T_2^{(n)}$
3	2.598076		
6	3.000000	3.133975	
9	3.105829	3.141105	3.141580

故 $\pi \approx 3.14158$

12。用下列方法计算积分 $\int_1^3 \frac{dy}{y}$，并比较结果。

(1)龙贝格方法；

(2)三点及五点高斯公式；

(3)将积分区间分为四等分，用复化两点高斯公式。

解

$$I=\int_1^3 \frac{dy}{y}$$

(1)采用龙贝格方法可得

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$
0	1.333333				
1	1.166667	1.099259			
2	1.116667	1.100000	1.099259		
3	1.103211	1.098726	1.098641	1.098613	
4	1.099768	1.098620	1.098613	1.098613	1.098613

故有 $I \approx 1.098613$

(2)采用高斯公式时

$$I=\int_1^3 \frac{dy}{y}$$

此时 $y\in[1,3]$,

令 $x=y-z$, 则 $x\in[-1,1]$,

$$I=\int_{-1}^1 \frac{1}{x+2}dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{x+2},$$

利用三点高斯公式，则

$$I=0.5555556\times[f(-0.7745967)+f(0.7745967)]+0.8888889\times f(0)$$
$$\approx 1.098039$$

利用五点高斯公式，则

$$I\approx 0.2369239\times[f(-0.9061798)+f(0.9061798)]$$
$$+0.4786287\times[f(-0.5384693)+f(0.5384693)]+0.5688889\times f(0)$$
$$\approx 1.098609$$

(3)采用复化两点高斯公式

将区间 $[1,3]$ 四等分，得

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4$$
$$=\int_1^{1.5}\frac{dy}{y}+\int_{1.5}^{2}\frac{dy}{y}+\int_2^{2.5}\frac{dy}{y}+\int_{2.5}^{3}\frac{dy}{y}$$

作变换 $y=\frac{x+5}{4}$，则

$$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+5}dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{x+5},$$

$$I_1\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)\approx 0.4054054$$

作变换 $y=\frac{x+7}{4}$，则

$$I_2=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+7}dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{x+7},$$

$$I_2\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)\approx 0.2876712$$

作变换 $y=\frac{x+9}{4}$，则

$$I_3=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+9}dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{x+9},$$

$$I_3\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)\approx 0.2231405$$

作变换 $y=\frac{x+11}{4}$，则

$$I_4=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+11}dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{x+11},$$

$$I_4\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)\approx 0.1823204$$

因此，有

$$I\approx 1.098538$$

13.用三点公式和积分公式求 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x=1.0,1.1$，和1.2 处的导数值，并估计误差。

$f(x)$ 的值由下表给出：

x	1.0	1.1	1.2
F(x)	0.2500	0.2268	0.2066

解：

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$$

由带余项的三点求导公式可知

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

又$\because f(x_0)=0.2500, f(x_1)=0.2268, f(x_2)=0.2066,$

$$\therefore f'(x_0)\approx\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]=0.247$$

$$f'(x_1)\approx\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]=-0.217$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]=-0.187$$

又$\because f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$$\therefore f'''(x)=\frac{-24}{(1+x)^5}$$

又$\because x\in[1.0,1.2]$

$$\therefore |f'''(\xi)|\le 0.75$$

故误差分别为

$$|R(x_0)|=\left|\frac{h^2}{3}f'''(\xi)\right|\le 2.5\times10^{-3}$$

$$|R(x_1)|=\left|\frac{h^2}{6}f'''(\xi)\right|\le 1.25\times10^{-3}$$

$$|R(x_2)|=\left|\frac{h^2}{3}f'''(\xi)\right|\le 2.5\times10^{-3}$$

利用数值积分求导，

设$\varphi(x)=f'(x)$

$$f(x_{k+1})=f(x_k)+\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x)dx$$

由梯形求积公式得

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(x)dx=\frac{h}{2}[\varphi(x_k)+\varphi(x_{k+1})]$$

从而有

$$f(x_{k+1})=f(x_k)+\frac{h}{2}[\varphi(x_k)+\varphi(x_{k+1})]$$

故

$$\varphi(x_0)+\varphi(x_1)=\frac{2}{h}[f(x_1)-f(x_0)]$$

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)=\frac{2}{h}[f(x_2)-f(x_1)]$$

又∵ $f(x_{k+1})=f(x_{k-1})+\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}\varphi(x)dx$

且 $\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}\varphi(x)dx=h[\varphi(x_{k-1})+\varphi(x_{k+1})]$

从而有

$$f(x_{k+1})=f(x_{k-1})+h[\varphi(x_{k-1})+\varphi(x_{k+1})]$$

故 $\varphi(x_0)+\varphi(x_2)=\frac{1}{h}[f(x_2)-f(x_0)]$

即

$$\begin{cases}\varphi(x_0)+\varphi(x_1)=-0.464\\ \varphi(x_1)+\varphi(x_2)=-0.404\\ \varphi(x_0)+\varphi(x_2)=-0.434\end{cases}$$

解方程组可得

$$\begin{cases}\varphi(x_0)=-0.247\\ \varphi(x_1)=-0.217\\ \varphi(x_2)=-0.187\end{cases}$$

第 5 章 数值分析课后习题全解

第 5 章：解线性方程组的直接方法

1. 证明：由消元公式及 A 的对称性得

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} a_{j1} = -\frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ji}^{2}, \ i, j = 2, 3, \dots\dots\dots, n$$

故 A_2 对称

2. 证明：(1) 因 A 对称正定，故

$$a_{ii} = (Ae_i, e_i) > 0, i = 1, 2, \dots\dots, n$$

其中 e_i =（0,…,0,1,0,...,0）^{T} 为第 i 个单位向量.

(2)由 A 的对称性及消元公式得

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} =$$

$$a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ji}^{(2)}, \quad \text{I,j=2,…,n}$$

故 A_2 也对称.

又

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = L_1 A \ A L_1^T$$

其中

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ . & & . & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & \dots & & 1 \end{bmatrix}$$

显然 L_1 非其异,从而对任意的 x ≠ 0,有

L_1^T X≠ 0,(x, L_1 A L_1^T X)=(L_1^T x, A L_1^T X)>0 （由 A 的正定性)

故 $L_1 A L_1^T$ 正定.

又 $L_1AL_1^T=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$,而 $a_{11}>0$,故 A_2 正定.

3.证明 由矩阵乘法简单运算即得证.

4.解 设有分解

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & \\ 3 & -2 & 1 & \\ & 2 & 5 & 3 \\ & & -1 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ 3 & \alpha_2 & 1 & \\ & 2 & \alpha_3 & 3 \\ & & -1 & \alpha_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \beta_2 & \\ & & 1 & \beta_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

由公式

$$\begin{cases} b_1=a_{1,}c_1=\alpha_1\beta_1 \\ b_i=\alpha_i\beta_{i-1}+\alpha_i, i=2,3,\cdots,n \\ c_i=\alpha_i\beta_i, i=2,3,\cdots,n-1 \end{cases}$$

其中 b_i,a_i,c_i 分别是系数矩阵的主对角线元素及下边和上边的次对角线元素.故有

$$\begin{cases} \alpha_1=4,\beta_1=\dfrac{1}{2} \\ \alpha_2=-\dfrac{7}{2},\beta_2=-\dfrac{2}{7} \\ \alpha_3=\dfrac{39}{7},\beta_3=\dfrac{7}{13} \\ \alpha_4=\dfrac{85}{13} \end{cases}$$

从而有

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & \\ 3 & -2 & 1 & \\ & 2 & 5 & 3 \\ & & -1 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & & & \\ 3 & -\dfrac{7}{2} & & \\ & 2 & \dfrac{39}{7} & \\ & & -1 & \dfrac{85}{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & & \\ & 1 & -\dfrac{2}{7} & \\ & & 1 & \dfrac{7}{13} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

故 $y_1=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$, $\quad y_2=\dfrac{2-3y_1}{-\dfrac{7}{2}}=\dfrac{5}{7}$

$y_3=\dfrac{10-2y_2}{\dfrac{39}{7}}=\dfrac{20}{13}$, $\quad y_4=\dfrac{5+y_3}{\dfrac{85}{13}}=1$

故 $x_4=1, x_3=\frac{20}{13}-\frac{7}{13}x_4=1, x_2=\frac{5}{7}+\frac{2}{7}x_3=1, x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_2=1$

5. 解 (1)设 U 为上三角阵

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

因 $u_{nn}x_n=d_n$， 故 $x_n=\frac{d_n}{u_{nn}}$.

因 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 0 & -3 \\ & & \vdots & 0 & -2 & 1 & 7 \\ & & & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} u_{ii}x_i+\sum_{j=i+1}^{n}u_{ij}x_j=d_i$,故

$$x_i=\frac{d_i-\sum_{j=i+1}^{n}u_{ij}x_j}{u_{ii}},i=n-1,n-2,\cdots,1$$

当 U 为下三角阵时

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ u_{21} & u_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

得, $x_1=\frac{d_1}{u_{11}}$, $\quad x_1=\frac{d_i-\sum_{j=1}^{i-1}u_{ij}x_j}{u_{ii}}$,i=2,3,…,n.

(2)除法次数为 n,乘法次数为

$$1+2+\ldots+(n-1)=n(n-1)/2$$

故总的乘法次数为 n+n(n-1)/2=n(n+1)/2.

(3)设 U 为上三角阵, U^{-1}=S,侧 S 也是上三角阵.由

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & s_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & s_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

得 $\qquad s_{ii}=\frac{1}{u_{ii}}, \qquad$ i=1,2,…,n

$$s_{ij}=-\frac{\sum\limits_{k=i+1}^{j}u_{ik}s_{kj}}{u_{ii}},j=i+1,i+2,\ldots,n;\ i=n-1,n-2,\ldots,1$$

当 U 为下三角阵时,由

$$\begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ d_{21} & d_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & & & \\ s_{21} & s_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

得 $$s_{ii}=\frac{1}{u_{ii}},i=1,2,\ldots,n$$

$$s_{ij}=-\frac{\sum\limits_{k=1}^{i-1}u_{ik}s_{kj}}{u_{ii}},i=2,3,\ldots,n;j=1,2,\ldots,i-1$$

6. 证明 (1)因 A 是对称正定阵,故存在唯一的分解 A=L L^T,其中 L 是具有正对角元素的下三角阵.从而

$$A^{-1}=(LL^T)^{-1}=(L^T)^{-1}L^{-1}=(L^{-1})^TL^{-1}$$

$$(A^{-1})^T=\left[(L^{-1})^TL^{-1}\right]^T=(L^{-1})^TL^{-1}=A^{-1}$$

故 A^{-1} 是对称矩阵.

又 L^{-1} 非奇异,故对任意的 $x\neq 0$,有 $L^{-1}x\neq 0$,故

$$x^TA^{-1}X=x^T(L^{-1})^TL^{-1}x=(L^{-1}x)^T(L^{-1}x)>0$$

故 A^{-1} 是对称正定矩阵,即 A^{-1} 也对称正定.

(2)由 A 对称正盯,故 A 的所有顺序主子式均不为零,从而 A 有唯一的 Doolittle 分解 A=$\bar{L}$U.又

$$U=\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}=DU_0$$

其中 D 为对三角阵, U_0 为单位上三角阵,于是

$$A=U\bar{L}=D\bar{L}U_0$$

又 $$A=A^T=U_O^T D\bar{L}^T$$

由分解的唯一性即得

$$U_O^T=\bar{L}$$

从而有 $$A=D\bar{L}\bar{L}^T$$

又由 A 的对称正定性知

$$d_1=D_1>0,\quad d_i=\frac{D_i}{D_{i-1}}>0\quad (i=2,3,\ldots,n)$$

故 $$D=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix}=D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}$$

故 $A=\bar{L}D\bar{L}^T=\bar{L}D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}\bar{L}^T=(\bar{L}D^{\frac{1}{2}})(\bar{L}D^{\frac{1}{2}})^T=LL^T$

其中 $L=\bar{L}D^{\frac{1}{2}}$ 为三角元为正的下三角矩阵.

7. 解 $$[A|I]=\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -8 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -8 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 19 & 0 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{85}{3} & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{25}{3} \end{array}\right] \text{->}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{85} & \frac{10}{17} & -\frac{23}{85} & -\frac{16}{17} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{33}{85} & -\frac{6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{19}{85} & \frac{5}{17} & -\frac{3}{85} & -\frac{8}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{85} & -\frac{1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17} \end{array}\right] \text{->}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{85} & \frac{10}{17} & -\frac{23}{85} & -\frac{16}{17} \\ \frac{33}{85} & -\frac{6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\ -\frac{19}{85} & \frac{5}{17} & -\frac{3}{85} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{3}{85} & -\frac{1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.0470589 & 0.5882353 & -0.2705882 & -0.9411765 \\ 0.3882353 & -0.3529412 & 0.4823529 & 0.7647059 \\ -0.2235294 & 0.2941176 & -0.0352941 & -0.4705882 \\ -0.0352941 & -0.0588235 & 0.0470589 & 0.2941176 \end{bmatrix}$$

8.　解　设有分解

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ -1 & \alpha_2 & & & \\ & -1 & \alpha_3 & & \\ & & -1 & \alpha_4 & \\ & & & -1 & \alpha_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & & & & \\ 1 & \beta_2 & & & \\ & 1 & \beta_3 & & \\ & & 1 & \beta_4 & \\ & & & 1 & \beta_5 \end{bmatrix}$$

由公式

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_{1,} c_1 = \alpha_1 \beta_1 \\ b_i = \alpha_i \beta_{i-1} + \alpha_i, (i = 2,3,4,5) \\ c_i = \alpha_i \beta_i, (i = 2,3,4) \end{cases}$$

其中 b_i， a_i， c_i 分别是系数矩阵的主角线元素及其下边和上边的次对角线元素，则有

$$\alpha_1 = 2,\quad \alpha_2 = \frac{3}{2},\quad \alpha_3 = \frac{4}{3},\quad \alpha_4 = \frac{5}{4},\quad \alpha_5 = \frac{6}{5}$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{2},\quad \beta_2 = -\frac{2}{3},\quad \beta_3 = -\frac{3}{4},\quad \beta_4 = -\frac{4}{5}$$

由

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & \frac{3}{2} & & & \\ & -1 & \frac{4}{3} & & \\ & & -1 & \frac{5}{4} & \\ & & & -1 & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得 $y_1 = \frac{1}{2}$， $y_2 = \frac{1}{3}$， $y_3 = \frac{1}{4}$， $y_4 = \frac{1}{5}$， $y_5 = \frac{1}{6}$

由

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & 1 & -\frac{2}{3} & & \\ & & 1 & -\frac{3}{4} & \\ & & & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

得 $x_5 = \frac{1}{6}$， $x_4 = \frac{1}{3}$， $x_3 = \frac{1}{2}$， $x_2 = \frac{2}{3}$， $x_1 = \frac{5}{6}$

9．解 设

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ & 1 & l_{32} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法得

$$d_1=2,\quad l_{21}=-\frac{1}{2},\quad l_{31}=\frac{1}{2}$$

$$d_2=-\frac{5}{2},\quad l_{32}=-\frac{7}{5}$$

$$d_3=\frac{27}{5}$$

由

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

得 $y_1=4$，$y_2=7$，$y_3=\dfrac{69}{5}$

由

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -\frac{5}{2} & \\ & & \frac{27}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{7}{5} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ \frac{69}{5} \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{7}{5} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -\frac{5}{2} & \\ & & \frac{27}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ \frac{69}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{14}{5} \\ \frac{23}{9} \end{bmatrix}$$

故 $x_3=\dfrac{23}{9}$=2.555 555 6，$x_2=\dfrac{7}{9}$=0.777 777 8，$x_1=\dfrac{10}{9}$=1.111 111 1

10. 解 A 中 Δ_2=0，故不能分解。但 det(A)=-10 $\neq$ 0,故若将 A 中第一行与第三行交换，则可以分解，且分解唯一。

B 中，$\Delta_2=\Delta_3$=0，但它仍可以分解为

$$B=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & l_{32} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & & 1\\ 0 & 0 & & -1\\ 0 & 0 & l_{32} & -2\end{bmatrix}$$

其中 l_{32} 为一任意常数，且 U 奇异，故分解且分解不唯一，

对 C，$\Delta_i \neq 0$，i=1,2,3,故 C 可分解且分解唯一。

$$C=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 6 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ & 1 & 3\\ & & 1\end{bmatrix}$$

11. 解

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = 1.1$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = 0.8$$

$$\|A\|_F = (\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.71} = 0.842\,615\,0$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}0.6 & 0.1\\ 0.5 & 0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6 & 0.5\\ 0.1 & 0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.37 & 0.33\\ 0.33 & 0.34\end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max}(A^TA) = 0.685\,340\,7$$

故 $$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)} = 0.827\,853\,1$$

12. 证明 （1）有定义知

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i| =$$

$$\|x\|_1 \le \sum_{i=1}^{n}\max_{1\le i\le n}|x_i| = \sum_{i=1}^{\infty}\|x\|_\infty = n\|x\|_\infty$$

故 $$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

（2）由范数定义，有

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^TA) \le$$

$$\lambda_1(A^TA) + \lambda_2(A^TA) + \cdots + \lambda_n(A^TA) = tr(A^TA) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}^2 =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = \|A\|_F^2$$

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A) \geq$$

$$\frac{1}{n}\left[\lambda_1(A^T A) + \lambda_2(A^T A) + \cdots + \lambda_n(A^T A)\right] =$$

$$\frac{1}{n}\|A\|_F^2$$

故
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F$$

13． 证明 （1）因 P 非奇异，故对任意的 x$\neq$0，有 $P_X \neq 0$，故 $\|X\|_p = \|P_x\| \geq 0$，当且仅当 x=0 时，有 $\|x\|_p = \|P_x\| = 0$ 成立。

（2 对任意 $\alpha \in R^1$，有

$$\|\alpha x\|_p = \|P_{ax}\| = |\alpha|\|P_x\| = |\alpha|\|X\|_p$$

（3）$\|x+y\|_p = \|P_{(x+y)}\| = \|P_x + P_y\| \leq$

$$\|P_x\| + \|P_y\| = \|x\|_p + \|y\|_p$$

故 $\|x\|_p$ 是 R^n 上的一种向量范数。

14．证明（1）因 A 正定对称，故当 x=0 时，$\|x\|_A$=0，而当 x$\neq$0 时，$\|x\|_A$ $=(x^T Ax)^{\frac{1}{2}} > 0$。

（2）对任意实数 c，有

$$\|cx\|_A = \sqrt{(cx)^T A(cx)} = |c|\sqrt{x^A Ax} = |c|\|x\|_A$$

（3）因 A 正定，故有分解 A=L L^T，则

$$\|x\|_A = (x^T Ax)^{\frac{1}{2}} = (x^T LL^T x)^{\frac{1}{2}} = ((L^T x)^T (L^T x))^{\frac{1}{2}} = \|L^T x\|_2$$

故对任意向量 x 和 y，总有

$$\|x+y\|_A = \|L^T(x+y)\|_2 = \|L^T x + L^T y\|_2 \leq$$

$$\|L^T x\|_2 + \|L^T y\|_2 = \|x\|_A + \|y\|_A$$

综上所知，$\|x\|_A = (x^T Ax)^{\frac{1}{2}}$ 是一种向量范数。

15．证明　因为

$$\|A\|_s = \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s}$$

由向量范数的等价性知，存在常数 C_1', C_2'>0,使对任意 x,有

$$C_1'\|Ax\|_s \le \|Ax\|_t \le C_2'\|Ax\|_s$$
$$C_1'\|x\|_s \le \|x\|_t \le C_2'\|x\|_s$$

故
$$\frac{C_1'\|x\|_s}{C_2'\|x\|_s} \le \frac{\|Ax\|_t}{\|x\|_t} \le \frac{C_2'\|Ax\|_s}{C_1'\|x\|_s}$$

令 $\frac{C_1'}{C_2'} = C_1, \frac{C_2'}{C_1'} = C_2$,则有

$$C_1\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s} \le \frac{\|Ax\|_t}{\|x\|_t} \le C_2\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s}$$

$$C_1\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s} \le \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_t}{\|x\|_t} \le C_2\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s}$$

即
$$C_1\|A\|_s \le \|A\|_t \le C_2\|A\|_s$$

16．证明 $\|A^{-1}\|_2^2\|A\|_2^2 = Cond[(A)_2]^2$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{x\neq 0}\frac{\|A^{-1}x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \underline{\underline{A^{-1}x = y}} \max_{x\neq 0}\frac{\|y\|_\infty}{\|Ay\|_\infty} = \frac{1}{\max\limits_{y\neq 0}\dfrac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty}}$$

故
$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_\infty} = \min_{y\neq 0}\frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty}$$

17．　证明 设 $\lambda \neq 0$，则

$$\|A\|_\infty = \begin{cases} 3|\lambda|, |\lambda| \ge \dfrac{2}{3} \\ 2, |\lambda| \le \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

又
$$A^{-1}=\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ -1 & 2\lambda\end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty=\frac{2|\lambda|+1}{|\lambda|}$$

故

$$\mathrm{Cond}(A)_\infty=\|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty=\begin{cases}6|\lambda|+3, |\lambda|\ge\frac{2}{3}\\ 2(2+\frac{1}{|\lambda|}), |\lambda|\le\frac{2}{3}\end{cases}$$

从而当$|\lambda|=\frac{2}{3}$时，即$|\lambda|=\pm\frac{2}{3}$时，$\mathrm{Cond}(A)_\infty$有最小值，且

$$\min\mathrm{Cond}(A)_\infty=7$$

18. 解 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-98 & 99\\ 99 & 98\end{bmatrix}, \|A\|_\infty=199, \|A^{-1}\|_\infty=199$

$$Cond(A)_2=\|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty=39601$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}19801 & 19602\\ 19602 & 19405\end{bmatrix}$$

故 $Cond(A)_2=\|A^{-1}\|_2\|A\|_2=$

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}}=39\,205.9745$$

19．证明 因 A 正交，故 $A^TA=AA^T=I, A^{-1}=A^T$，从而有

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^TA)}=\sqrt{\rho(I)}=1$$

$$\|A^{-1}\|_2=\|A^T\|_2=\sqrt{\rho(AA^T)}=\sqrt{\rho(I)}=1$$

故
$$Cond(A)_2=\|A^{-1}\|_2\|A\|_2=1$$

20．证明 $Cond(AB)=\|(AB)^{-1}\|\|AB\|\le\|A^{-1}\|\|B^{-1}\|\|A\|\|B\|=$

$$\|A^{-1}\|\|A\|\|B^{-1}\|\|B\|=Cond(A)Cond(B)$$

21．证明（1）$(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$

故 $A^T A$ 为对称矩阵。

又 A 非奇异，故对任意向量 $x \neq 0$，有 $Ax \neq 0$，从而有

$$x^T A^T Ax = (Ax)^T (Ax) > 0$$

即 $A^T A$ 为对称正定矩阵。

（2） $Cond(A^T A)_2 = \|(A^T A)^{-1}\|_2 \|A^T A\|_2 =$

$$\sqrt{\lambda_{\max}[((A^T A)^{-1})^T (A^T A)^{-1}]}\sqrt{\lambda_{\max}[(A^T A)^T (A^T A)]} =$$

$$\sqrt{\lambda_{\max}[((A^T A)^{-1})^2]}\sqrt{\lambda_{\max}[(A^T A)^2]} =$$

$$\sqrt{\lambda_{\max}^2 (A^T A)^{-1}}\sqrt{\lambda_{\max}^2 (A^T A)} =$$

$$[\sqrt{\lambda_{\max} (A^T A)^{-1}}]^2 [\sqrt{\lambda_{\max} (A^T A)}]^2 =$$

$$\|A^{-1}\|_2^2 \|A\|_2^2 = [Cond(A)_2]^2$$

第六章课后习题解答

1.解：(a)因系数矩阵按行严格对角占优，故雅可比法与高斯-塞德

(b)雅可比法的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k)} - \dfrac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}x_1^{k} - \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\dfrac{1}{5}x_1^{(k)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k)} + \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

取$x^{(0} = (1,1,1)^T$，迭代到17次达到精度要求

$$x^{(17)} = (-4.0000186, 2.9999915, 2.0000012)^T$$

高斯-塞德尔法的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\dfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{5}x_3^{(k)} - \dfrac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\dfrac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \dfrac{3}{10}x_2^{(k+1)} + \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

取$x^{(0)} = (1,1,1)^T$，迭代到8次达到精度要求

$$x^{(8)} = (-4.0000186, 2.9999915, 2.0000012)^T$$

2：解（a）雅可比法的迭代矩阵

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & -0.8 \\ -0.4 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - B_J| = (\lambda - 0.8)(\lambda^2 + 0.8\lambda - 0.32)$$

$\rho(B_J) = 1.0928203 > 1$，故雅可比迭代法

高斯-塞德尔法迭代矩阵

$$B_S = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.16 & -0.64 \\ 0 & 0.032 & 0.672 \end{pmatrix}$$

$\rho(B_S) \le \|B_S\|_\infty = 0.8 < 1$

故高斯-塞德尔迭代法收敛。

（b）雅可比法的迭代矩阵

$$B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$|\lambda I - B_J| = \lambda^3$，$\rho(B_J) = 0 < 1$

故雅可比迭代法收敛。

高斯-塞德尔法的迭代矩阵

$$B_S = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3：证明

必要条件：由 $\lim_{k} A_k = A$，知 $\lim_{k} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$，从而有 $\|A_K - A\| \to 0$（$K \to \infty$）

故对任意的x，有 $\|A_k x - Ax\| \le \|A_k - A\| \, \|x\| \to 0$ $(k \to \infty)$

即 $A_K x \to Ax$, $\lim_{k} A_K x = Ax$.

充分条件：对任意的 $x \in R^n$, 有 $A_k x \to Ax$ $(k \to \infty)$，取 $x_i = (0,\ldots,0,1_i, \ldots)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$

$$A_k x_i = (a_{1i}^{(k)}, a_{2i}^{(k)}, \ldots, a_{ni}^{(k)})^T \to Ax_i \ (k \to \infty)$$

$$Ax_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})^T$$

故 $a_{ji}^{(k)} \to a_{ji}$ $(j = 1,2,\ldots,n;\ i = 1,2,\ldots,n)$

即 $A_k \to A$, $\lim_{k} A_k = A$.

4.解：不一定，因其谱半径 $\rho(B_J)$ 不一定小于1。

对习题2(a)，A对称，$\Delta_1 = 1 > 0$，$\Delta_2 = 0.84 > 0$，$\Delta_3 = |A| = 0.296$

5.解答见例6-4

6. 解：

SOR 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + w\left(-\frac{12}{5} - x_1^{(k)} - \frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + w\left(5 + \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - x_2^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + w\left(\frac{3}{10} - \frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} - x_{3(k)}\right) \end{cases}$$

取初始值 $x^0 = (1,1,1)^T$，计算如表.

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	-2.6000000	3.5650000	1.8005500
2	-4.0274990	3.1400652	2.0228224
3	-4.0572814	2.9908481	2.0101219
4	-4.0042554	2.9935725	2.0000427
5	-3.9981193	2.9997612	1.9996013
6	--3.9996542	3.0002334	1.9999609
7	-4.0000424	3.0000314	2.0000122
8	-4.0000177	2.9999937	2.0000027

因 $\| x^{(8)} - x^{(7)} \|_{\infty} = 0.000377 < 10^{-4}$,

由$|m|<1, |1-wl(A)|<1$得

$$0<w<\frac{2}{l(A)}$$

故当$0<w<\frac{2}{b}$时更有$0<w<\frac{2}{l(A)}$，从而有$|m|<1, l(B)<1$

8.证明: 当 $-\frac{1}{2} < a < 1$ 时, 由

$$\det\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix} = 1-a^2 > 0,\ \det(A) = (1-a)^2(1+2a) > 0$$

故A是正定的又雅可比法迭代矩阵

$$B_J = \begin{pmatrix}0 & -a & -a\\ -a & 0 & -a\\ -a & -a & 0\end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - B_J) = \begin{vmatrix}\lambda & a & a\\ a & \lambda & a\\ a & a & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda a^2 + 2a^3 = (\lambda - a)^2(\lambda + 2a)$$

故 $\rho(B_J) = |2a|$, 故当 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 时, 雅可比迭代法收敛.

9.证明: G相似与它的若当标准行J, 即存在可逆阵P, 使 $J = P^{-1}GP$

由于G的特征值全为零, 故J一定有如下形式

$$J = \begin{pmatrix}J_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_r\end{pmatrix},\ J_i = \begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}_{n_i \times n_i},\ \sum_{i=1}^{r} n_i = n$$

方程组 $x = Gx + g$ 等价于 $(I-G)x = g$, 由 $\lambda(G) = 0$, 故 $\lambda(I-G) = 1 - \lambda(G) = 1 \neq 0$

从而I-G非奇异, 即 $(I-G)x = g$ 有唯一解 x^*, 于是

$$x^* = Gx^* + g$$

与所述迭代格式相减, 有 $x^{(k+1)} - x^* = G(x^{(k)} - x^*)$

故 $x^{(n)} - x^* = G^n(x^{(0)} - x^*)$

又 $G^n = P^{-1}J^nP = 0$

第七章非线性方程求根

一、重点内容提要

（一）问题简介

求单变量函数方程

$$f(x)=0 \qquad (7.1)$$

的根是指求 x^*（实数或复数），使得 $f(x^*)=0$.称 x^* 为方程(7.1)的根,也称 x^* 为函数 $f(x)$ 的零点.若 $f(x)$ 可以分解为 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$

其中 m 为正整数, $g(x)$ 满足 $g(x)\neq 0$,则 x^* 是方程(7.1)的根.当 m=1 时,称 x^* 为单根;当 m>1 时,称 x^* 为 m 重根.若 $g(x)$ 充分光滑, x^* 是方程(7.1)的 m 重根,则有

$$f(x^*)=f'(x^*)=\dots=f^{(m-1)}(x^*)=0,\ f^{(m)}(x^*)\neq 0$$

若 $f(x)$ 在[a,b]上连续且 $f(a)f(b)<0$,则方程(7.1)在(a,b)内至少有一个实根,称[a,b]为方程(7.1)的有根区间.有根区间可通过函数作图法或逐次搜索法求得.

(二)方程求根的几种常用方法

1.二分法

设 $f(x)$ 在[a,b]上连续, $f(a)f(b)<0$,则 $f(x)=0$ 在(a,b)内有根 x^*.再设 $f(x)=0$ 在(a,b)内仅有一个根.令 $a_0=a, b_0=b$,计算 $x_0=\frac{1}{2}(a_0+b_0)$ 和 $f(x_0)$.若 $f(x_0)=0$ 则 $x^*=x$,结束计算;若 $f(a_0)f(x_0)>0$,则令 $a_1=x_0, b_1=b$,得新的有根区间 $[a_1,b_1]$;若 $f(a_0)f(x_0)<0$,则令 $a_1=a_0, b_1=x_0$,得新的有根区间 $[a_1,b_1]$. $[a_0,b_0]\subset[a_1,b_1]$, $b_1-a_1=\frac{1}{2}(b_0-a_0)$.再令 $x_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$ 计算 $f(x_1)$,同上法得出新的有根区间 $[a_2,b_2]$,如此反复进行,可得一有根区间套

$$\dots\subset[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]\subset\dots\subset[a_0,b_0]$$

且 $a_n<x^*<b_n, n=0,1,2,\dots, b_n-a_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})=\dots=\frac{1}{2^n}(b_0-a_0)$.

故 $$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0,\ \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a_n+b_n)=x^*$$

因此, $x_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$ 可作为 $f(x)=0$ 的近似根,且有误差估计

$$|x_n-x^*|\le\frac{1}{2^{n+1}}(b-a) \tag{7.2}$$

2.迭代法

将方程式(7.1)等价变形为 $x=\varphi(x)$ (7.3)

若要求 x^* 满足 $f(x^*)=0$ 则 $x^*=\varphi(x^*)$;反之亦然.称 x^* 为函数 $\varphi(x)$ 的一个不动点.求方程(7.1)的根等价于求 $\varphi(x)$ 的不动点由式(7.3)产生的不动点迭代关系式(也称简单迭代法)为

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,2\ldots \tag{7.4}$$

函数 $\varphi(x)$ 称为迭代函数.如果对任意 $x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,2\ldots$,由式(7.4)产生的序列 $\{x_k\}$ 有极限 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$

则称不动点迭代法(7.4)收敛.

定理 7.1(不动点存在性定理)设 $\varphi(x)\in C[a,b]$ 满足以下两个条件:

1.对任意 $x\in[a,b]$ 有 $a\le\varphi(x)\le b$;

2.存在正常数 $L<1$,使对任意 $x,y\in[a,b]$,都有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|\le|x-y|$ (7.5)

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在惟一的不动点 x^*.

定理 7.2(不动点迭代法的全局收敛性定理)设 $\varphi(x)\in C[a,b]$ 满足定理 7.1 中的两个条件,则对任意 $x_0\in[a,b]$,由(7.4)式得到的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛.到 $\varphi(x)$ 的不动点,并有误差估计式

$$|x_k-x^*|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}| \tag{7.6}$$

和

$$|x_k-x^*|\le\frac{L^k}{1-L}|x_k-x_{k-1}| \tag{7.7}$$

定理 7.3(不动点迭代法的局部收敛性定理)设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点, $\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域连续,且 $|\varphi'(x)|<1$,则迭代法(7.4)局部收敛.

收敛阶的概念 设迭代过程(7.4)收敛于方程 $x=\varphi(x)$ 的根 x^*,如果迭代误差

$e_k = x_k - x^*$ 当 $k \to \infty$ 时成产下列渐近关系式

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} \to C(\text{常数}C \neq 0) \tag{7.8}$$

则称该迭代过程是 p 阶收敛的.特别地,p=1 时称线性收敛,p>1 时称超线性收敛,p=2 时称平方收敛.

定理 7.4(收敛阶定理)对于迭代过程(7.4),如果 $\varphi^{(K)}(x)$ 在所求根 x^* 的邻近连续,并且

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \ldots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$$
$$\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0 \tag{7.9}$$

则该迭代过程在点 x^* 的邻近是收敛的,并有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*) \tag{7.10}$$

斯蒂芬森(Steffensen)迭代法　当不动点迭代法(7.4)只有线性收敛阶,甚至于不收敛时,可用斯蒂芬森迭代法进行加速.具体公式为

$$y_k = \varphi(x_k),\ z_k = \varphi(y_k)$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}$$
$$k = 0,1,2,\ldots \tag{7.11}$$

此法也可写成如下不动点迭代式

$$x_{k+1} = \psi(x_k),\ k = 0,1,2,\ldots$$
$$\psi(x) = x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} \tag{7.12}$$

定理 7.5(斯蒂芬森迭代收敛定理) 设 x^* 为式(7.12)中 $\psi(x)$ 的不动点,则 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点;设 $\varphi''(x)$ 存在, $\varphi'(x^*) \neq 1$,则 x^* 是 $\psi(x)$ 的不动点,则斯蒂芬森迭代法(7.11)是 2 阶收敛的.

3.牛顿迭代法

牛顿迭代法是一种特殊的不动点迭代法,其计算公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},k = 0,1,2,\ldots \tag{7.13}$$

其迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

牛顿迭代法的收敛速度　当 $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0, f''(x^*) \neq 0$ 时,容易证

明,$f'(x^*)\neq 0$, $\varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\neq 0$,由定理 7.4 知,牛顿迭代法是平方收敛的,且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \tag{7.14}$$

重根情形的牛顿迭代法　当 x^* 是 $f(x)=0$ 的 m 重根 $(m\geq 2)$ 时,迭代函数 $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ 在 x^* 处的导数 $\varphi'(x^*)=1-\frac{1}{m}\neq 0$,且 $|\varphi'(x^*)|<1$.所以牛顿迭代法求重根只是线性收敛.若 x^* 的重数 m 知道,则迭代式

$$x_{k+1}==x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},k=0,1,2,\ldots \tag{7.15}$$

求重根二阶收敛.当 m 未知时,x^* 一定是函数 $\mu(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ 的单重零点,此时迭代式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{\mu(x_k)}{\mu'(x_k)}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]-f(x_k)f''(x_k)}$$
$$k=0,1,2,\ldots \tag{7.16}$$

也是二阶收敛的.

简化牛顿法　如下迭代法 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)},k=0,1,2,\ldots$

称为简化牛顿法或平行弦法.

牛顿下山法　　为防止迭代不收敛,可采用牛顿下山法.具体方法见教材.

4.弦截法

将牛顿迭代法(7.13)中的 $f'(x_k)$ 用 $f(x)$ 在 x_{k-1}, x_k 处的一阶差商来代替,即可得弦截法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k+1}) \tag{7.17}$$

定理 7.6 假设 $f(x)$ 在其零点 x^* 的邻域 $\Delta:|x-x^*|\leq\delta$ 内具有二阶连续导数,且对任意 $x\in\Delta$ 有 $f'(x)\neq 0$,又初值 $x_0,x_1\in\Delta$,,则当邻域 Δ 充分小时,弦截法(7.17)将按阶 $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ 收敛到 x^*.这里 p 是方程 $\lambda^2-\lambda-1=0$ 的正根.

5.抛物线法

弦截法可以理解为用过 $(x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k - f(x_k))$ 两点的直线方程的根近似替 $f(x)=0$ 的根．若已知 $f(x)=0$ 的三个近似根 x_k，x_{k-1}，x_{k-2} 用过 $(x_k, f(x_k)), (x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_{k-2}, f(x_{k-2}))$ 的抛物线方程的根近似代替 $f(x)=0$ 的根,所得的迭代法称为抛物线法,也称密勒(Muller)法.

当 $f(x)$ 在 x^* 的邻近有三阶连续导数，$f'(x^*) \neq 0$，则抛物线法局部收敛，且收敛阶为 $p = 1.839 \approx 1.84$.

二、知识结构图

方程近似求根
- 基本概念（单根、重根、有根区间、不动点、收敛阶）
- 求根方法
  - 二分法及其收敛性
  - 不动点迭代法及其收敛性理论
  - （不动点迭代法的加速技巧—Steffensen方法）
  - 牛顿迭代法及其收敛性
  - 插值型迭代法（多点迭代）
    - 弦截法
    - 抛物线法

三、常考题型及典型题精解

例7-1　证明方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $[1,2]$ 上有一个实根 x^*，并用二分法求这个根，要求 $|x_k - x^*| \leq 10^{-3}$. 若要求 $|x_k - x^*| \leq 10^{-6}$，需二分区间 $[1,2]$ 多少次？

解　设 $f(x) = x^3 - x - 1$，则 $f(1) = -1 < 0$，$f(2) = 5 > 0$，故方程 $f(x) = 0$ 在 $[1,2]$ 上有根 x^*. 又因 $f'(x) = 3x^2 - 1$，所以当 $x \in [1,2]$ 时，$f'(x) > 0$，即 $f(x) = 0$ 在 $[1,2]$ 上有惟一实根 x^*. 用二分法计算结果如表7-1所示.

表 7-1

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号
0	1	2	1.5	+
1	1	1.5	1.25	-
2	1.25	1.5	1.375	+
3	1.25	1.375	1.3125	-
4	1.3125	1.375	1.3438	+
5	1.3125	1.13438	1.3282	+
6	1.3125	1.3282	1.3204	-
7	1.3204	1.3282	1.3243	-
8	1.3243	1.3282	1.3263	+

9	1.3243	1.3263	1.3253	+

此时x_9=1.3253满足$|x_9-x^*|\le\dfrac{1}{2^{10}}\le 0.977\times10^{-3}\le10^{-3}$, 可以作为x*的近似值.

若要求$|x_k-x^*|\le10^{-6}$, 只需$|x_k-x^*|\le\dfrac{1}{2^{k+1}}\le10^{-6}$即可, 解得$k+1\ge19.932$, 即只需把[1,2]二分20次就能满足精度要求.

例7-2　已知函数方程$(x-2)e^x=1$, (1)确定有根区间[a,b]; (2)构造不动点迭代公式使之对任意初始近似$x_0\in[a,b]$, 迭代方法均收敛; (3)用所构造的公式计算根的近似值, 要求$|x_k-x_{k-1}|<10^{-3}$.

解　(1)令$f(x)=(x-2)e^x-1$, 由于$f(2)=-1<0$, $f(3)=e^x-1>0$, 因此区间[2,3]是方程f(x)=0的一个有根区间. 又因$f'(x)=(x-1)e^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$, $f'(1)=-e^1-1<0$, 当x>1时f(x)单增, x<1时f(x)单减, 故f(x)=0在$(-\infty,+\infty)$内有且仅有一根x*, 即$x^*\in[2,3]$.

(2)将$(x-2)e^x=1$等价变形为$x=2+e^{-x}$, $x\in[2,3]$. 则$\varphi(x)=2+e^x$. 由于当$x\in[2,3]$时$2\le\varphi(x)\le3$, $|\varphi'(x)|=|-e^{-x}|\le e^{-2}<1$

故不动点迭代法$x_{k+1}=2+e^{-x_k}$, k=0, 1, 2, . . . , 对$\forall x_0\in[2,3]$均收敛.

(3)取$x_0=2.5$, 利用$x_{k+1}=2+e^{-x_k}$进行迭代计算, 结果如表7-2所示.

表 7-2

k	x_k	$\|x_k-x_{k-1}\|$
0	2.5	
1	2.082084999	0.417915001
2	2.124670004	0.042585005
3	2.119472387	0.0005197617
4	2.120094976	0.000622589

此时x_4已满足误差要求，即$x^* \approx x_4 = 2.120094976$.

例7－3　考虑求解方程$2\cos x - 3x + 12 = 0$的迭代公式

$$x_{k+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_k,\ k=0,1,2,...$$

(1)试证：对任意初始近似$x_0 \in R$，该方法收敛；

(2)取$x_0=4$，求根的近似值x_{k+1}，要求$|x_{k+1}-x_k| \le 10^{-3}$；

(3)所给方法的收敛阶是多少？

解　(1)由迭代公式知，迭代函数$\varphi(x)=4+\frac{2}{3}\cos x$，

$x \in (-\infty,+\infty)$.由于$\varphi(x)$的值域介于$(4-\frac{2}{3})$与$(4+\frac{2}{3})$之间，且

$$|\varphi'(x)|=|-\frac{2}{3}\sin x| \le \frac{2}{3} < 1$$

故根据定理7.1，7.2知，$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$内存在惟一的不动点x^*，且对$\forall x_0 \in R$，迭代公式得到的序列$\{x_k\}$收敛于x^*.

(2)　取$x_0=4$，迭代计算结果如表7-3所示.

表 7-3

k	x_k	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	4	
1	3.564237587	0.435762413
2	3.391995168	0.172242419
3	3.354124827	0.037870341
4	3.348333384	0.005791443
5	3.347529903	0.000803481

此时x_5已满足误差要求，即$x^* \approx x_5 = 3.347529903$

（3）由于$\varphi'(x^*) \approx 0.136323129 \ne 0$，故根据定理 7.4 知方法是线性收敛的，并且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k}=\varphi'(x^*)$$

。

例 7-4　对于迭代函数$\varphi(x)=x+C(x^2-2)$，试讨论：

（1）当 C 为何值时，$x_{k+1}=\varphi(x_k)(k=0,1,2,...)$产生的序列$\{x_k\}$收敛于$\sqrt{2}$；

（2）C 为何值时收敛最快？

（3）分别取$C=-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$，计算$\varphi(x)$的不动点$\sqrt{2}$，要求

$$|x_{k+1}-x_k|<10^{-5}$$

解：（1）$\varphi(x)=x+C(x^2-2)$，$\varphi'(x)=1+2Cx$，根据定理 7.3，当

$|\varphi'(\sqrt{2})|=|1+2\sqrt{2}C|<1$，亦即 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<C<0$ 时迭代收敛。

（2）由定理 7.4 知，当 $\varphi'(\sqrt{2})=1+2\sqrt{2}C=0$，即 $C=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 时迭代至少是二阶收敛的，收敛最快。

（3）分别取 $C=\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，并取 $x_0=1.2$，迭代计算结果如表 7-4 所示。

表 7-4

k	$x_k(C=-\frac{1}{2})$	k	$x_k(C=-\frac{1}{2\sqrt{2}})$
0	1.2	0	1.2
1	1.48	1	1.397989899
6	1.413369586	2	1.414120505
12	1.414209303	3	1.414213559
13	1.414215327	4	1.414213562

此时都达到 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-5}$.事实上 $\sqrt{2}=1.414213562\ldots$,

例 7-5 给定初值 $x_0\neq 0,\dfrac{2}{a}$ 以及迭代公式

$$x_{k+1}=x_k(2-ax_k),k=0,1,2,\ldots \text{,常数 } a\neq 0$$

证明: (1)该迭代函数是二阶收敛的;(2)该迭代产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛的充要条件是 $|1-ax_0|<1$.

解: (1) 显然,迭代函数为 $\varphi(x)=x(2-ax)$,且 $\varphi(\dfrac{1}{a})=\dfrac{1}{a}$,即 $\dfrac{1}{a}$ 是 $\varphi(x)$ 的不动点.又

$\varphi'(x)=2(1-ax),\varphi''(x)=-2a$,所以 $\varphi'(\dfrac{1}{a})=0$，$\varphi''(\dfrac{1}{a})=-2a\neq 0$，由定理 7.4 知，

迭代是二阶收敛的，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{e_{k+1}}{e_k^2}=\dfrac{1}{2}\varphi''(\dfrac{1}{a})=-a$.

（2）因 $e_k = x_k - \frac{1}{a} = \frac{1}{a}(ax_k - 1)$，令 $r_k = ax_k - 1$，则

$x_{k+1} = x_k(1-r_k), e_k = \frac{1}{a} r_k$

然而

$$r_k = ax_k - 1 = ax_{k-1}(1-r_{k-1}) - 1$$
$$= (r_{k-1}+1)(1-r_{k-1}) - 1 = -r_{k-1}^2$$

故

$$r_k = -r_{k-1}^2 = -r_{k-2}^4 = \ldots = -r_0^{2^k}$$

$$e_k = \frac{1}{a} r_k = -\frac{1}{a} r_0^{2^k}$$

由此可知 $\lim_{k\to\infty} e_k = 0$ 等价于 $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$，而 $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$ 又等价于 $|r_0| < 1$，即 $|1 - ax_0| < 1$.

注　（1）的结论也可以直接用二阶收敛函数的定义去证明．另外，本题迭代式实际上是对 $f(x) = a - \frac{1}{x}$ 使用牛顿迭代法而得.

例 7-6 对 $\varphi(x) = x + x^3, x = 0$ 为 $\varphi(x)$ 的一个不动点,验证迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 对任意 $x_0 \neq 0$ 不收敛,但改用斯蒂芬森迭代却是收敛的,并说明斯蒂芬森迭代计算 $\varphi(x)$ 的不动点 $x = 0$ 时的收敛阶.

解　由于 $\varphi'(x) = 1 + 3x^2$,当 $x \neq 0$ 时 $|\varphi'(x)| > 1$,且有

$|x_{k+1} - 0| = |\varphi(x_k) - 0| = |\varphi'(\xi)(x_k - 0)|$，$\xi$ 介于 x_k 与 0 之间,若 $x_0 \neq 0, L > 1$,迭代不收敛.

若改用斯蒂芬森迭代(7 .12),可得

$$x_{k+1} = \psi(x_k), \psi(x) = x - \frac{x}{x^4 + 3x^2 + 3}$$

$\psi'(0) = \frac{2}{3}$,根据定理 7.3,斯蒂芬森迭代法收敛.

由于 $\psi'(0) = \frac{2}{3} \neq 0$,故用斯蒂芬森迭代计算不动点 $x = 0$ 时,收敛阶 $p = 1$.(请读者注意,这一结论与定理 7.5 的结论是否矛盾?)

例 7-7　当 R 取适当值时,曲线 $y = x^2$ 与 $y^2 + (x-8)^2 = R^2$ 相切,试用迭法求切点横坐标的近似值,要求不少于四位有效数字,且不必求 R.

解　$y = x^2$ 的导数 $y' = 2x$,由 $y^2 + (x-8)^2 = R^2$ 确定的函数 y 的导数满足

$2yy'+2(x-8)=0$,由两曲线相切的条件,可得

$2\times x^2\times 2x+2(x-8)=0$

即 $2x^3-x-8=0$

令 $f(x)=2x^3-x-8$,则 $f(1)<0, f(2)>0, f(x)=0$ 在 $(1,2)$ 内有实根.又

$f'(x)=6x^2+1>0$,故 $f(x)=0$ 仅有一个根,构造迭代公式

$x_{k+1}=\varphi(x_k), \varphi(x)=(\frac{8-x}{2})^{\frac{1}{3}}, x\in(1,2)$,

则当 $x\in[1,2]$ 时, $1\le\varphi(x)\le 2$.

$$|\varphi'(x)|=|-\frac{1}{6}(\frac{8-x}{2})^{-\frac{2}{3}}|\le L=\frac{1}{6}(\frac{1}{3})^{\frac{2}{3}}<1$$

故迭代收敛.取 $x_0=1.5$,计算结果如表 7-5 所示.

表 7-5

k	x_k	$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$	k	x_k	$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$
0	1.5	0.018752	2	1.482671	0.001423
1	1.481248		3	1.482563	$0.000108<\frac{1}{2}\times10^{-3}$

由于 $|x_3-x^*|\le\frac{L}{1-L}|x_3-x_2|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$,故可取 $x^*\approx x_3=1.483$,即可保证两曲线切点的横坐标的近似值具有四位有效数字.

例 7-8 曲线 $y=x^3-0.51x+1$ 与 $y=2.4x^2-1.89$ 在点 $(1.6,1)$ 附近相切,试用牛顿迭代法求切点的横坐标的近似值 x_{k+1},使 $|x_{k+1}-x_k|\le10^{-5}$.

解 两曲线的导数分别为 $y'=3x^2-0.51$ 和 $y'=4.8x$,两曲线相切,导数相等,故有

$$3x^2-4.8x-0.51=0$$

令 $f(x)=3x^2-4.8x-0.51$,则 $f(1)<0, f(2)>0$,故区间 $[1,2]$ 是 $f(x)=0$ 的有根区间.又当 $x\in[1,2]$ 时, $f'(x)=6x-4.8>0$,因此 $f(x)=0$ 在 $[1,2]$ 上有惟一实根 x^*.对 $f(x)$ 应用牛顿迭代法,得计算公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{3x_k^{\ 2}-4.8x_k-0.51}{6x_k-4.8},k=0,1,2,...$$

由于$f''(x)=6>0$,故取$x_0=2$迭代计算一定收敛,计算结果如表 7-6 所示.

表 7-6

k	x_k	k	x_k
0	2.0	3	1.706815287
1	2.293055556	4	1.700025611
2	1.817783592	5	1.7

继续计算仍得$x_6=1.7$,故$x^*=1.7$.

注　本题也可令$x^3-0.51x+1=2.4x^2-1.89$,解得切点横坐标满足方程

$f(x)=x^3-2.4x^2-51x+2.89=0$,用有重根时的牛顿迭代法(7.15)式计算,此时$m=2$.仍

取$x_0=2$,经四步可得$x^*=1.7$.

例 7-9(牛顿迭代法收敛定理)设$f(x)$在$[a,b]$上具有二阶连续导数,且满足条件

(1)$f(a)f(b)<0;$

(2)在$[a,b]$上$f'(x)\neq 0, f''(x)\neq 0;$

(3)$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$.

则由牛顿迭代法产生的序列$\{x_k\}$单调收敛于$f(x)=0$在$[a,b]$内的惟一实根x^*,并且是平方收敛的.

证明　因$f(x)$在$[a,b]$上连续,由条件(1)知,方程$f(x)=0$在(a,b)内有根x^*.又由于条件(2)知$f'(x)$在$[a,b]$上恒正或恒负,所以$f(x)$在$[a,b]$上严格单调,因而x^*是$f(x)=0$在(a,b)内的惟一实根.

条件(1),(2)共有四种情形:

(1)$f(a)<0,f(b)>0,f'(x)>0,f''(x)>0,\forall x\in[a,b];$

(2)$f(a)<0,f(b)>0,f'(x)>0,f''(x)<0,\forall x\in[a,b];$

(3)$f(a)>0,f(b)<0,f'(x)<0,f''(x)>0,\forall x\in[a,b];$

(4) $f(a)>0, f(b)<0, f'(x)<0, f''(x)<0, \forall x\in[a,b]$.

仅就(1)进行定理证明,其余三种情况的证明方法是类似的.

由 $x_0\in[a,b], f(x_0)f''(x_0)>0$ 可知 $f(x_0)>0$,再由 $f'(x)>0$ 知 $f(x)$ 单增且 $x_0>x^*$.又由牛顿迭代法知

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}<x_0$$

又台劳展开得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_0)(x-x_0)^2$$

其中 ξ_0 介于 x 与 x_0 之间.利用 $f(x^*)=0$,得

$$f(x_0)+f'(x_0)(x^*-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_0^*)(x^*-x_0)^2=0$$

$$x^*=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_0^*)}{f'(x_0)}(x^*-x_0)^2=$$

$$x_1-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_0^*)}{f'(x_0)}(x^*-x_0)^2$$

由 $f'(x)>0, f''(x)>0$ 以及前面证明的 $x_1<x_0$,有

$$x^*<x_1<x_0$$

一般地,设 $x^*<x_k<x_{k-1}$,则必有 $f(x_k)>0$ 且

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}<x_k$$

同样由台劳公式

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{1}{2!}f''(\xi_k)(x-x_k)^2$$

及 $f(x^*)=0$,得

$$f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi_k^*)(x^*-x_k)^2=0$$

$$x^*=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k^*)}{f'(x_k)}(x^*-x_k)^2=$$

$$x_{k+1}-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k^*)}{f'(x_k)}(x^*-x_k)^2<x_{k+1}<x_k$$

根据归纳法原理知,数列 $\{x_k\}$ 单调下降有下界 x^*,因此有极限.设 $\lim_{k\to\infty}x_k=l$.对迭代式

$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 两端取 $k\to\infty$ 的极限,并利用 $f(x)$. $f'(x)$ 的连续性知 $f(l)=0$,即 $l=x^*$.

由上述证明知,有关系式 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$,即对于单根,牛顿迭代法是平方收敛的.

例 7-10 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0, f''(x^*)\neq 0, \{x_k\}$ 是由牛顿迭代法产生的序列,证明

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x_k}{(x_k-x_{k-1})^2}=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

解 牛顿迭代法为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},k=0,1,2,\dots$$

故

$$x_{k+1}-x_k=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{(x_k-x_{k-1})^2}=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\left[\frac{f'(x_{k-1})}{f(x_{k-1})}\right]^2=$$
$$-\frac{f(x_k)-f(x^*)}{[f(x_{k-1})-f(x^*)]^2}\frac{[f'(x_{k-1})]^2}{f'(x_k)}=$$
$$-\frac{f'(\xi_k)[f'(x_{k-1})]^2}{f'(x_k)[f'(\xi_{k-1})]^2}\frac{(x_k-x^*)}{(x_{k-1}-x^*)^2}$$

其中 ξ_k 介于 x_k 与 x^* 之间, ξ_{k-1} 介于 x_{k-1} 与 x^* 之间,根据式(7.14)得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x_k}{(x_k-x_{k-1})^2}=-\lim_{k\to\infty}\frac{f'(\xi_k)[f'(x_{k-1})]^2}{f'(x_k)[f'(\xi_{k-1})]^2}\frac{x_k-x^*}{(x_{k-1}-x^*)^2}=$$
$$-\frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

例 7-11 设 $f(x)$ 具有连续的 m 阶导数, x^* 是 $f(x)=0$ 的 m 重根 $(m\geq 2),\{x_k\}$ 是由牛顿迭代法产生的序列,证明

(1) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=1-\dfrac{1}{m}$;

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_{k-1}}=1-\dfrac{1}{m}$;

(3) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{k-1}-x_k}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}=m$

证明 (1)因 x^* 是 $f(x)=0$ 的 m 重根,则 $f(x)$ 可以表示成

$$f(x)=(x-x^*)^m h(x),\ h(x)\neq 0$$

所以

$$f'(x)=m(x-x^*)^{m-1}h(x)+(x-x^*)^m h'(x)=$$
$$(x-x^*)^{m-1}[mh(x)+(x-x^*)h'(x)]$$

由牛顿迭代法 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 得

$$x_{k+1}-x^*=x_k-x^*-\frac{(x_k-x^*)^m h(x_k)}{(x_k-x^*)^{m-1}[mh(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)]}=$$
$$(x_k-x^*)\left[1-\frac{h(x_k)}{mh(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)}\right]$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=1-\frac{1}{m}$$

(2)

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_{k-1}}=\frac{f(x_k)f'(x_{k-1})}{f(x_{k-1})f'(x_k)}=$$
$$\frac{(x_k-x^*)^m h(x_k)(x_{k-1}-x^*)^{m-1}[mh(x_{k-1})+(x_{k-1}-x^*)h'(x_{k-1})]}{(x_{k-1}-x^*)^m h(x_{k-1})(x_k-x^*)^{m-1}[mh(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)]}=$$
$$\left(\frac{x_k-x^*}{x_{k-1}-x^*}\right)\left(\frac{h(x_k)}{h(x_{k-1})}\right)\frac{mh(x_{k-1})+(x_{k-1}-x^*)h'(x_{k-1})}{mh(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)}$$

利用 $h(x^*)\neq 0$ 及(1)的结论得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_{k-1}}=1-\frac{1}{m};$$

(3)先证明牛顿迭代函数 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 的导函数

$$\varphi'(x)\to 1-\frac{1}{m}(x\to x^*)$$

因 x^* 是 $f(x)$ 的 m 重零点,则由假设,$f(x)$ 具有 m 阶连续导数,得

$$f(x^*)=f'(x^*)=\dots=f^{(m-1)}(x^*)=0, f^{(m)}(x^*)\neq 0$$

且

$$f(x)=\frac{1}{m!}f^{(m)}(\xi_1)(x-x^*)^m$$

$$f'(x)=\frac{1}{(m-1)!}f^{(m)}(\xi_2)(x-x^*)^{m-1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{(m-2)!}f^{(m)}(\xi_3)(x-x^*)^{m-2}$$

其中ξ_1,ξ_2,ξ_3介于x与x^*之间,故有

$$\varphi'(x^*)=\lim_{n\to x^*}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\lim_{n\to x^*}\frac{m-1}{m}\frac{f^{(m)}(\xi_1)f^{(m)}(\xi_3)}{[f^{(m)}(\xi_2)]^2}=1-\frac{1}{m}$$

而

$$\frac{x_{k-1}-x_k}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}=\frac{x_{k-1}-x_k}{(x_{k-1}-x_k)-(x_k-x_{k+1})}=$$
$$\frac{x_{k-1}-x_k}{x_{k-1}-x_k+\varphi'(\xi_k)(x_{k-1}-x_k)}=\frac{1}{1-\varphi'(\xi_k)}$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k-1}-x_k}{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1-\varphi'(\xi_k)}=\frac{1}{1-(1-\frac{1}{m})}=m$$

注　结论(1)和$\varphi'(x^*)=1-\frac{1}{m}$都表明牛顿迭代法求重根时仅为线性收敛.结论(3)可以用来计算重根数m.

例 7-12　考虑下列修正的牛顿公式(单点斯蒂芬森方法)

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f^2(x_k)}{f(x_k+f(x_k))-f(x_k)}$$

设$f(x)$有二阶连续导数,$f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0$,试证明该方法是二阶收敛的.

证明　将$f(x_k+f(x_k))$在x_k处作台劳展开,得

$$f(x_k+f(x_k))=f(x_k)+f'(x_k)f(x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_k)$$

其中ξ介于x_k与$x_k+f(x_k)$之间,于是

$$f(x_k+f(x_k))-f(x_k)=f'(x_k)f(x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_k)$$

$$x_{k+1}-x^*=x_k-x^*-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi)f(x_k)}$$

由于 x^* 是 $f(x)=0$ 的单根,故

$$f(x)=(x-x^*)h(x),h(x^*)\neq 0$$

所以

$$f'(x_k)=h(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)$$

$$x_{k+1}-x^*=x_k-x^*-\frac{(x_k-x^*)h(x_k)}{h(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi)f(x_k)}=$$

$$(x_k-x^*)\left[1-\frac{h(x_k)}{h(x_k)+(x_k-x^*)h'(x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi)f(x_k)}\right]=$$

$$\frac{(x_k-x^*)^2\left[h'(x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi)h(x_k)\right]}{h(x_k)+(x_k-x^*)\left[h'(x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi)h(x_k)\right]}$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{h'(x^*)+\frac{1}{2}h(x^*)f''(x^*)}{h(x^*)}$$

即迭代法是二阶收敛的.

四、学习效果测试题及答案

1、证明方程 $e^x+10x-2=0$ 在 $(0,1)$ 内有一个实根 x^*,并用二分法求这个根.若要求 $|x_n-x^*|<10^{-6}$,需二分区间 $[0,1]$ 多少次?

(答案:当 $|x_n-x^*|<10^{-3}$ 时 $x^*\approx x_9=0.090820313$ 对分次数 $k+1\geq 20$.)

2、对方程 $3x^2-e^x=0$,确定 $[a,b]$ 及 $\varphi(x)$,使 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 对任意 $x_0\in[a,b]$ 均收敛,并求出方程的各个根,误差不超过 10^{-4}.

(答

案

:(1) $[a,b]=[-1,0], \varphi(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{x}{2}}, x^*\approx -0.458962267$;(2)

$[a,b]=[1,0], \varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{x}{2}}, x^*\approx 0.910007572$;(3)

$[a,b]=[3,4], \varphi(x)=\ln(3x^2), x^*\approx 3.733079028$)

3、建立一个迭代公式计算 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$,分析迭代的收敛性,取 $x_0=0$,计算 x_6 .

(答案: $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}, k=0,1,2,\ldots, x_6=1.999397637$.)

4、试分别采用 $\varphi_1(x)=2+\ln x$ 和 $\varphi_2(x)=e^{x-2}$ 的斯蒂芬森迭代法求方程 $x-\ln x=2$ 在区间 $(2,+\infty)$ 内的根 x^* ,要求 $\left|\dfrac{x_k-x_{k-1}}{x_k}\right|\le 10^{-8}$.

(答案:取 $x_0=3$,其解分别为 $x_4\approx 3.146193220$ 和 $x_5=3.146193262$.)

5、由方程 $f(x)=x^4-4x^2+4=0$ 求二重根 $x^*=\sqrt{2}$,试用牛顿法(7.13),有重根时的牛顿法(7.15),(7.16)计算 x^* ,要求 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-8}$.

(答案:三种方法均取 $x_0=1.5$,分别得

$x_{24}=1.414213568, x_3=1.414213562, x_3=1.414213562.$)

6、用弦切法求 $Leonardo$ 方程 $f(x)=x^3+2x^2+10x-20=0$ 的根,要求 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-6}$.

(答案:取 $x_0=1, x_2=2$,用式(7.17)得 $x_5=1.368808108$.)

7、用抛物线法求解方程 $x^3-3x-1=0$ 在 $x_0=2$ 附近的根,要求 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-6}$.

(答案:取 $x_0=1, x_2=2, x_3=2.5, x^*\approx x_6=1.879385242.$)

8、试构造一个求方程 $e^x+x=2$ 根的收敛的迭代格式,要求说明收敛理由,并求根的近似值 x_k ,使 $|x_k-x_{k-1}|\le \dfrac{1}{2}\times 10^{-3}$.

(答案:有根区间 $[0,1]$,不动点迭代式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)=\ln(2-x_k)$,取

$x_0=0.5, x^*\approx x_{14}=0.442671724$.另外,也可用牛顿迭代法求解得 $x^*\approx x_3=0.442854401.$)

9、试确定常数p,q,r,使迭代公式

$$x_{k+1}=px_k+q\frac{a^2}{x_k^5}$$

产生的序列收敛到$\sqrt[3]{a}$,并使其收敛阶尽可能高.

(答案:利用定理 7.4 可得$p=q=\frac{5}{9},r=-\frac{1}{9}$,且$\varphi'''(\sqrt[3]{a})\neq 0$,此时迭代法三阶收敛.)

10、$\varphi(x)=x-p(x)f(x)-q(x)f^2(x)$,试确定函数$p(x)$和$q(x)$,使求解$f(x)=0$且以$\varphi(x)$为迭代函数的迭代法至少三阶收敛.

(答案:利用定理(7.4)可得$p(x)=\frac{1}{f'(x)},q(x)=\frac{1}{2}\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$.)

五、课后习题全解

1、用二分法求方程$x^2-x-1=0$的正根,要求误差小于 0.05.

解　设$f(x)=x^2-x-1,f(1)=-1<0,f(2)=1>0$,故[1,2]为$f(x)$的有根区间.又$f'(x)=2x-1$,故当$0<x<\frac{1}{2}$时,$f(x)$单增,当$x>\frac{1}{2}$时$f(x)$单增.而$f(\frac{1}{2})=-\frac{5}{4},f(0)=-1$,由单调性知$f(x)=0$的惟一正根$x^*\in(1,2)$.根据二分法的误差估计式(7.2)知要求误差小于 0.05,只需$\frac{1}{2^{k+1}}<0.05$,解得$k+1>5.322$,故至少应二分 6 次.具体计算结果见表 7-7.

表 7-7

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号
0	1	2	1.5	-
1	1.5	2	1.75	+
2	1.5	1.75	1.625	+
3	1.5	1.625	1.5625	-
4	1.5625	1.625	1.59375	-
5	1.59375	1.625	1.609375	-

-

即$x^*\approx x_5=1.609375$.

2、为求 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根,设将方程改写成下列等价形式,并建立相应的迭代公式:

(1) $x=1+\dfrac{1}{x^2}$,迭代公式 $x_{k+1}=1+\dfrac{1}{x_k^{2}}$;

(2) $x^3=1+x^2$,迭代公式 $x_{k+1}=(1+x_k^{2})^{\frac{1}{3}}$;

(3) $x^2=\dfrac{1}{x-1}$,迭代公式 $x_{k+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x_k-1}}$.

试分析每种迭代公式的收敛性,并选取一种公式求出具有四位有效数字的近似根.

解　取 $x_0=1.5$ 的邻域[1.3,1.6]来考察.

(1)当 $x\in[1.3,1.6]$ 时, $\varphi(x)=1+\dfrac{1}{x^2}\in[1.3,1.6], |\varphi'(x)|=|-\dfrac{2}{x^3}|\le\dfrac{2}{1.3^3}=L<1$,故迭代公式 $x_{k+1}=1+\dfrac{1}{x_k^{2}}$ 在 $[1.3,1.6]$ 上整体收敛.

(2)当 $x\in[1.3,1.6]$ 时

$$\varphi(x)=(1+x^2)^{1/3}\in[1.3,1.6]$$

$$|\varphi'(x)|=\frac{2}{3}|\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}|<\frac{2}{3}\frac{1.6}{(1+1.3^2)^{\frac{2}{3}}}\le L=0.522<1$$

故 $x_{k+1}=(1+x_k^{2})^{\frac{1}{3}}$ 在[1.3,1.6]上整体收敛.

(3) $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}},|\varphi'(x)|=|\dfrac{-1}{2(x-1)^{3/2}}|>\dfrac{1}{2(1.6-1)}>1$ 故 $x_{k+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x_k-1}}$ 发散.

由于(2)的 L 叫小,故取(2)中迭代式计算.要求结果具有四位有效数字,只需

$$|x_k-x^*|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

即

$$|x_k-x_{k-1}|<\frac{1-L}{L}\times\frac{1}{2}\times10^{-3}<0.5\times10^{-3}$$

取 $x_0=1.5$ 计算结果见表 7-8.

表 7-8

k	x_k	k	x_k
1	1.481248034	4	1.467047973
2	1.472705730	5	1.466243010
3	1.468817314	6	1.465876820

由于 $|x_6 - x_5| < \frac{1}{2}\times 10^{-3}$,故可取 $x^* \approx x_6 = 1.466$.

3、比较求 $e^x + 10x - 2 = 0$ 的根到三位小数所需的计算量:

(1)在区间[0,1]内用二分法;

(2)用迭代法 $x_{k+1} = \frac{2-e^{x_k}}{10}$,取初值 $x_0 = 0$.

解 (1)因 $x^* \in [0,1], f(0) < 0, f(1) > 0$,故 $0 < x^* < 1$,用二分法计算结果见表 7-9.

表 7-9

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号	$\frac{1}{2^{k+1}}$
0	0	1	0.5	+	0.5
1	0	0.5	0.25	+	0.25
2	0	0.25	0.125	+	0.125
3	0	0.125	0.0625	-	0.0625
4	0.0625	0.125	0.09375	+	0.03125
5	0.0625	0.09375	0.078125	-	0.015625
6	0.078125	0.09375	0.0859375	-	0.0078125
7	0.0859375	0.09375	0.08984375	-	0.00390625
8	0.08984375	0.09375	0.091796875	+	0.001953125
9	0.08984375	0.091796875	0.090820312	+	0.000976562
10	0.08984375	0.090820312	0.090332031	-	0.000488281
11	0.090332031	0.090820312	0.090576171	+	0.00024414
12	0.090332031	0.090576171	0.090454101	-	0.00012207
13	0.090454101	0.090576171	0.090515136	-	0.000061035
14	0.090515136	0.090576171	0.090545653	+	0.000030517

此时 $|x_{14} - x^*| \le \frac{1}{2^{15}} = 0.000030517 < \frac{1}{2}\times 10^{-4}, x^* \approx x_{14}$ 具有三位有效数字.

(2)当 $x \in [0, 0.5]$ 时, $\varphi(x) \in [0, 0.5], |\varphi'(x)| = \frac{1}{10}|-e^x| \le L = 0.825$,故迭代试

$x_{k+1} = \frac{1}{10}(2 - e^{x_k})$ 在[0,0.5]上整体收敛.取 $x_0 = 0$,迭代计算结果如表 7-10 所示.

表 7-10

k	x_k	k	x_k
1	0.1	4	0.090512616

2	0.089482908	5	0.090526468
3	0.090639135	6	0.090524951

此时 $|x_6-x^*|\le\dfrac{L}{1-L}|x_6-x_5|\le 0.00000720<\dfrac{1}{2}\times10^{-4}$,故 $x^*\approx x_6$ 精确到三位小数.

4、给定函数 $f(x)$,设对一切 x,$f'(x)$ 存在且 $0<m\le f'(x)\le M$,证明对于范围 $0<\lambda<\dfrac{2}{M}$ 内的任意定数 λ,迭代过程 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 均收敛于 $f(x)=0$ 的根 x^*.

证明　由于 $f'(x)>0$,$f(x)$ 为单增函数,故方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 是惟一的(假定方程有根 x^*).迭代函数 $\varphi(x)=x-\lambda f(x)$,$|\varphi'(x)|=|1-\lambda f'(x)|$,.由 $0<m\le f'(x)\le M$ 及 $0<\lambda<\dfrac{2}{M}$ 得,$\begin{aligned}&0<\lambda m\le\lambda f'(x)\le\lambda M<2,-1<1-\lambda M\le\\&1-\lambda f'(x)\le1-\lambda m<1\end{aligned}$,故

$|\varphi'(x)|\le L=\max\{|1-\lambda m|,|1-\lambda M|\}<1$,由此可得

$|x_k-x^*|\le L|x_{k-1}-x^*|\le\ldots\le L^k|x_0-x^*|\to0(k\to\infty)$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}k=x^*$.

5、用斯蒂芬森迭代法计算第 2 题中(2)的近似根,精确到 10^{-5}.

解　记第 2 题中(2)的迭代函数 $\varphi_2(x)=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$,(3)的迭代函数为 $\varphi_3(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$,利用迭代式(7.11),计算结果见表 7-11.

表 7-11

k	加速 φ_2(x) 的结果 x_k	k	加速 φ_3(x) 的结果 x_k
0	1.5	0	1.5
1	1.465558485	1	1.467342286
2	1.465571233	2	1.465576085
3	1.465571232	3	1.465571232
		4	1.465571232

6、设 $\varphi(x)=x-p(x)f(x)-q(x)f^2(x)$,试确定函数 $p(x)$ 和 $q(x)$,使求解 $f(x)=0$ 且以 $\varphi(x)$ 为迭代函数的迭代法至少三阶收敛.

解　要求 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 三阶收敛到 $f(x)=0$ 的根 x^*,根据定理 7.4,应有

$\varphi(x^*)=x^*, \varphi'(x^*)=0, \varphi''(x^*)=0$.于是由

$$x^*=x^*-p(x^*)f(x^*)-q(x^*)f^2(x^*)=x^*$$
$$\varphi'(x^*)=1-p(x^*)f'(x^*)=0$$
$$\varphi''(x^*)=-2p'(x^*)f'(x^*)-p(x^*)f''(x^*)-2q(x^*)[f'(x^*)]^2=0$$

得

$$p(x^*)=\frac{1}{f'(x^*)}, q(x^*)=\frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{[f'(x^*)]^3}$$

故取

$$p(x)=\frac{1}{f'(x)}, q(x)=\frac{1}{2}\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

即迭代至少三阶收敛.

7、用下列方法求 $f(x)=x^3-3x-1=0$ 在 $x_0=2$ 附近的根.根的准确值 $x^*=1.87938524\ldots$,要求计算结果准确到四位有效数字.

(1)用牛顿法;

(2)用弦截法,取 $x_0=2, x_1=1.9$;

(3)用抛物线法,取 $x_0=1, x_1=3, x_2=2$.

解　$f(1)<0, f(2)>0, f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)\geq 0, f''(x)=6x>0$,对 $\forall x\in[1,2]$.

(1)取 $x_0=2$,用牛顿迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-3x_k-1}{3x_k^2-3}=\frac{2x_k^3+1}{3(x_k^2-1)}$$

计算得 $x_1=1.888888889, x_2=1.879451567, |x_2-x^*|<\frac{1}{2}\times 10^{-3}$,故

$x^*\approx x_2=1.879451567$.

(2)取 $x_2=2, x_1=1.9$,利用弦截法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(x_k-x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

得, $x_2=1.981093936, x_3=1.880840630, x_4=1.879489903, |x_4-x^*|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$,故取

$x^*\approx x_4=1.879489903$.

(3) $x_0=1, x_1=3, x_2=2$.抛物线法的迭代式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{w+sign(w)\sqrt{w^2-4f(x_k)f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]}}$$
$$w=f[x_k,x_{k-1}]+f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x_k-x_{k-1})$$

迭代结果为: $x_3=1.953967549, x_4=1.87801539, x_5=1.879386866$ 已达四位有效数字.

8、分别用二分法和牛顿迭代法求 $x-\tan x=0$ 的最小正根.

解　显然 $x^*=0$ 满足 $x-\tan x=0$.另外当 $|x|$ 较小时, $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots$,故

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时, $\tan x>x$,因此,方程 $x-\tan x=0$ 的最小正根应在 $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 内.

记 $f(x)=x-\tan x, x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$,容易算得 $f(4)=2.842\ldots>0, f(4.6)=-4.26\ldots<0$,因此

[4,4.6]是 $f(x)=0$ 的有限区间.

对于二分法,计算结果见表 7-12.

表 7-12

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号
0	4.0	4.6	4.3	+
1	4.3	4.6	4.45	+
2	4.45	4.6	4.525	-
3	4.45	4.525	4.4875	+
4	4.4875	4.525	4.50625	-
5	4.4875	4.50625	4.496875	-
6	4.4875	4.496875	4.4921875	+
7	4.4921875	4.496875	4.49453125	-
8	4.4921875	4.49453125	4.493359375	+
9	4.493359375	4.49453125	4.493445313	-

此时 $|x_9 - x^*| < \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}$.

若用牛顿迭代法求解,由于 $f'(x) = -(\tan x)^2 < 0, f''(x) = -2\tan x \frac{1}{\cos^2 x} < 0$,故取 $x_0 = 4.6$,迭代计算结果如表 7-13 所示.

表 7-13

k	x_k	k	x_k
1	4.545732122	4	4.493412197
2	4.506145588	5	4.493409458
3	4.49417163	6	4.493409458

所以 $x - \tan x = 0$ 的最小正根为 $x^* \approx 4.493409458$.

9、研究求 $\sqrt{a}$ 的牛顿公式

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}), x_0 > 0$$

证明对一切且序列是递减的.

证法一　用数列的办法,因 $x_0 > 0$ 由 $x_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}})$ 知 $x_k > 0$,且

$x_k = \frac{1}{2}(\sqrt{x_{k-1}} + \sqrt{\frac{a}{x_{k-1}}})^2 + \sqrt{a}, k = 1,2,3,\ldots$.又由

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2a} = 1, \forall k \geq 1$$

故 $x_{k+1} \leq x_k$,即 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单减有下界 $\sqrt{a}$.根据单调原理知, $\{x_k\}$ 有极限.易证起极限为 $\sqrt{a}$.

证法二　设 $f(x) = x^2 - a(a > 0)$.易知 $f(x) = 0$ 在 $[0, +\infty)$ 内有惟一实根 $x^* = \sqrt{a}$.对 $f(x)$ 应用牛顿迭代法,得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}), k = 0,1,2,\ldots$$

利用例 7-9 的结论知,当 $x_0 > \sqrt{a}$ 时, $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 单减有下界 $\sqrt{a}$,且 $\lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt{a}$.当 $x_0 \in (0, \sqrt{a})$ 时,

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0}) = \frac{1}{2}[\sqrt{x_0} - \frac{a}{\sqrt{x_0}}]^2 + \sqrt{a} > \sqrt{a}$$

此时,从 x_1 起, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单减有下界 $\sqrt{a}$,且极限为 $\sqrt{a}$.

10、对于 $f(x)=0$ 的牛顿公式 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$,证明

$$R_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k-1} - x_{k-2})^2}$$

收敛到 $-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$,这里 x^* 为 $f(x)=0$ 的根.

证明见例 7-10.

11、用牛顿迭代法和求重根的牛顿迭代法(7.15)和(7.16)(书中式(4.13),(4.14))计算方程 $f(x) = (\sin x - \frac{x}{2})^2 = 0$ 的一个近似根,准确到 10^{-5} ,初始值 $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

解 $f(x) = (\sin x - \frac{x}{2})^2$ 的根 x^* 为 2 重根,即

$$f'(x) = 2(\sin x - \frac{x}{2})(\cos x - \frac{1}{2})$$

用牛顿法迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\sin x_k - \frac{x_k}{2})^2}{2(\sin x - \frac{x}{2})(\cos x - \frac{1}{2})} =$$

$$x_k - \frac{\sin x_k - \frac{x_k}{2}}{2\cos x_k - 1}, k = 0,1,3,...$$

令 $x_0 = \frac{\pi}{2}$,则 $x_1 = 1.785398, x_2 = 1.844562, ...$,迭代到

$x_{20} = 1.895494, |x^* - 1.89549| < 10^{-5}$.

用求重根的迭代公式(7.15),迭代迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin x_k - \frac{x_k}{2}}{\cos x_k - \frac{1}{2}}, k = 0,1,2,...$$

取 $x_0 = \frac{\pi}{2}$,则 $x_1 = 2.000000, x_2 = 1.900996, x_3 = 1.895512, x_4 = 1.895494, x_5 = 1.895494$.

四次迭代达到上面 x_{20} 的结果.

若用公式(7.16),则有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}$$

将 $f(x), f'(x)$ 及 $f''(x)=2(\cos x-\frac{1}{2})^2-2\sin x(\sin x-\frac{1}{2}x)$ 代入上述迭代公式,得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(\sin x_k-\frac{x_k}{2})(\cos x_k-\frac{1}{2})}{(\cos x_k-\frac{1}{2})^2+\sin x_k(\sin x_k-\frac{x_k}{2})}$$

取 $x_0=\frac{\pi}{2}$,得 $x_1=1.801749, x_2=1.889630, x_3=1.895474, x_4=1.895494, x_5=1.895494$.

结果与公式(7.15)的相同.

12、应用牛顿迭代法于方程 $x^3-a=0$,导出求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式,并讨论其收敛性.

解　设 $f(x)=x^3-a, f'(x)=3x^2, f''(x)=6x$,牛顿迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}=\frac{2x_k^3+a}{3x_k^2}, k=0,1,2,\ldots$$

当 $x>0, f'(x)>0, f''(x)>0$;当 $x<0$ 时, $f'(x)>0, f''(x)<0$,,因此,对于 $a>0$,当 $x_0>\sqrt[3]{a}$ 时 $f(x_0)f''(x_0)>0$,根据例 7-9 的结论知,牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.当 $x_0\in(0,\sqrt[3]{a})$ 时,

$$x_1-\sqrt[3]{a}=\frac{2x_0^3+a}{3x_0^2}-\sqrt[3]{a}=\frac{(\sqrt[3]{a}-x_0)^2}{3x_0^2}(\sqrt[3]{a}+2x_0)>0, x_1>\sqrt[3]{a}$$

从 x_1 起,牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

对于 $a<0$,当 $x_0<\sqrt[3]{a}<0$ 时 $f(x_0)f''(x_0)>0$,.由牛顿法产生的序列 $\{x_k\}$ 单增趋于 $\sqrt[3]{a}$.当 $x_0\in(\sqrt[3]{a},0)$ 时,

$$x_1-\sqrt[3]{a}=\frac{(\sqrt[3]{a}-x_0)^2}{3x_0^2}(\sqrt[3]{a}+2x_0)<0, x_1<\sqrt[3]{a}$$

之后迭代也收敛.

当 $a=0$ 时,迭代式变为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^{\ 3}}{3x_k^{\ 2}} = \frac{2}{3}x_k$$

该迭代对任何 $x_0 \in R$ 均收敛,但收敛速度是线性的.

13、应用牛顿法于方程 $f(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = 0$,导出求 $\sqrt{a}$ 的迭代公式,并用此公式求 $\sqrt{115}$ 的值.

解 $f(x) = 1 - \frac{a}{x^2}, f'(x) = \frac{2a}{x^3}, x \neq 0$,所以牛顿迭代公式有

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1 - \frac{a}{x_k^{\ 2}}}{\frac{2a}{x_k^{\ 3}}} = \frac{1}{2}x_k(3 - \frac{x_k^{\ 2}}{a}), k = 0,1,2,\ldots$$

易知 $f''(x) = \frac{6a}{x^4} < 0$.故取 $x_0 \in (0, \sqrt{a})$ 时,迭代收敛.

对于 $\sqrt{115}$,取 $x_0 = 9$,迭代计算,得

$$x_1 = 10.33043478, x_2 = 10.70242553, x_3 = 10.7237414,$$
$$x_4 = 10.72380529, x_5 = 10.72380529$$

故 $\sqrt{115} \approx 10.72380529$.

14、应用牛顿法于方程 $f(x) = x^n - a = 0$ 和 $f(x) = 1 - \frac{a}{x^n} = 0$,分别导出求 $\sqrt[n]{a}$ 的迭代公式,并求

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x^k)^2}$$

解 对于 $f(x) = x^n - a, f'(x) = nx^{n-1}$,因此牛顿迭代法为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^{\ n} - a}{nx_k^{\ n-1}} = \frac{1}{n}[(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{\ n-1}}], k = 0,1,2,\ldots$$

根据定理 7.4 知

$$(\varphi''(\sqrt[n]{a}) = \frac{n-1}{\sqrt[n]{a}})$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{a} - x_{k+1})}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} = -\frac{1}{2}\frac{n-1}{\sqrt[n]{a}}$$

对于 $f(x)=1-\frac{a}{x^n}, f'(x)=\frac{na}{x^{n+1}}$,牛顿法公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{x_k}{n}[(n+1)-\frac{x_k{}^n}{a}], k=0,1,2,...$$

根据定理 7.4 知

$$(\varphi''(\sqrt[n]{a})=-\frac{n+1}{\sqrt[n]{a}})$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=\frac{1}{2}\frac{n+1}{\sqrt[n]{a}}$$

15、证明迭代公式

$$x_{k+1}=\frac{x_k(x_k{}^2+3a)}{3x_k{}^2+a}$$

是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法.假定初值 x_0 充分靠近根 $x^*=\sqrt{a}$,求

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^2}$$

证明　记 $\varphi(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$,则迭代式为 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 且 $\varphi(\sqrt{a})=\sqrt{a}$.

由 $\varphi(x)$ 的定义,有

$$(3x^2+a)\varphi(x)=x(x^2+3a)$$

对上式两端连续求导三次,得

$$6x\varphi(x)+(3x^2+a)\varphi'(x)=3x^2+3a$$
$$6\varphi(x)+12x\varphi'(x)+(3x^2+a)\varphi''(x)=6x$$
$$18\varphi'(x)+18x\varphi''(x)+(3x^2+a)\varphi'''(x)=6$$

代 $x=\sqrt{a}$ 依次入上三式,并利用 $\varphi(\sqrt{a})=\sqrt{a}$,得

$$\varphi'(\sqrt{a})=0, \varphi''(\sqrt{a})=0, \varphi'''(\sqrt{a})=\frac{3}{2a}\neq 0$$

所以由定理 7.4 知,迭代公式是求 $\sqrt{a}$ 的三阶方法且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^2}=\frac{1}{3!}\bullet\frac{3}{2a}=\frac{1}{4a}$$

16、用牛顿法解方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

取 $(x^{(0)}, y^{(0)})^T = (1.6, 1.2)^T$.

解 记 $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4, f_2(x,y) = x^2 - y^2 - 1$,则

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}, [F'(x,y)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4y} & -\frac{1}{4y} \end{bmatrix}$$

牛顿迭代法为

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} - [F'(x^{(k)}, y^{(k)})]^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) \\ f_2(x^{(k)}, y^{(k)}) \end{pmatrix}$$

代入初值 $(x^{(0)}, y^{(0)})^T = (1.6, 1.2)^T$,迭代计算,得

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.581250000 \\ 1.225000000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.58113834 \\ 1.224744898 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{(3)} \\ y^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.581138830 \\ 1.224744871 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{(4)} \\ y^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.58138830 \\ 1.224744871 \end{pmatrix}$$

第八章　常微分方程初值问题数值解法

1、解：欧拉法公式为

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+h(x_n^2+100y_n^2),n=0,1,2$$

代 $y_0=0$ 入上式，计算结果为

$$y(0.1)\approx y_1=0.0,y(0.2)\approx y_2=0.0010,y(0.3)\approx y_3=0.00501$$

2、解：改进的欧拉法为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$$

将 $f(x,y)=x^2+x-y$ 代入上式，得

$$y_{n+1}=(1-h+\frac{h^2}{2})y_n+\frac{h}{2}[(1-h)x_n(1+x_n)+(1+x_{n+1})x_{n+1}]$$

同理，梯形法公式为

$$y_{n+1}=\frac{2-h}{2+h}y_n+\frac{h}{2+h}[x_n(1+x_n)+x_{n+1}(1+x_{n+1})]$$

将 $y_0=0,h=0.1$ 代入上二式，，计算结果见表 9—5

表　9—5

x_n	改进欧拉 y_n	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$	梯形法 y_n	$\lvert y(x_n)-y_n\rvert$
0．1 0．2	0．005500 0．021927500	0.337418036×10^{-3}	0．005238095 0．021405896	0.755132781×10^{-4}

0．3	0．050144388	0.658253078×10^{-3}	0．049367239	0.136648778×10^{-3}
0．4	0．090930671	0.962608182×10^{-3}	0．089903692	0.185459653×10^{-3}
0．5	0．144992257	0.125071672×10^{-2}	0．143722388	0.223738443×10^{-3}
		0.152291668×10^{-2}		0.253048087×10^{-3}

可见梯形方法比改进的欧拉法精确。

3、证明：梯形公式为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

代 $f(x,y)=-y$ 入上式，得

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[-y_n-y_{n+1}]$$

解得

$$y_{n+1}=(\frac{2-h}{2+h})y_n=(\frac{2-h}{2+h})^2y_{n-1}=\ldots=(\frac{2-h}{2+h})^{n+1}y_0$$

因为 $y_0=1$，故

$$y_n=(\frac{2-h}{2+h})^n$$

对 $\forall x>0$，以 h 为步长经 n 步运算可求得 $y(x)$ 的近似值 y_n，故 $x=nh, n=\frac{x}{h}$，代入上式有

$$y_n=(\frac{2-h}{2+h})^{\frac{x}{h}}$$

$$\lim_{h\to0}y_n=\lim_{h\to0}(\frac{2-h}{2+h})^{\frac{x}{h}}=\lim_{h\to0}(1-\frac{2h}{2+h})^{\frac{x}{h}}=\lim_{h\to0}[(1-\frac{2h}{2+h})^{\frac{2+h}{2h}}]^{\frac{2h}{2+h}\frac{x}{h}}=e^{-x}$$

4、解： 令 $y(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$，则有初值问题

$$y'=e^{x^2}, y(0)=0$$

对上述问题应用欧拉法，取 h=0.5，计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+0.5e^{x_n^2}, n=0,1,2,3$$

由 $y(0)=y_0=0$，得

$$y(0.5)\approx y_1=0.5, y(1.0)\approx y_2=1.142012708$$
$$y(1.5)\approx y_3=2.501153623, y(2.0)\approx y_4=7.245021541$$

5、解： 四阶经典龙格-库塔方法计算公式见式（9.7）。对于问题（1），$f(x,y)=x+y$；对于问题（2），$f(x,y)=\frac{3y}{1+x}$。取 h=0.2，$y_0=y(0)=1$，分别计算两问题的近似解见表 9-6。

表 9-6

x_n	（1）的解 y_n	（2）的解 y_n
0.2	1.242800000	1.727548209
0.4	1.583635920	2.742951299
0.6	2.044212913	4.094181355
0.8	2.651041652	5.829210728
1.0	3.436502273	7.996012143

6、证明： 根据定义 9.2，只要证明 $T_{n+1}=o(h^3)$ 即可。而

$$T_{n+1}=y(x+h)-y(x)-h\varphi(x,y,h)$$

$$\varphi(x,y,h)=\frac{1}{2}[f(x+th,y+thy'(x))+$$
$$f(x+(1-t)h,y+(1-t)hy'(x))]$$

因此只须将 $y(x+h)$ 和 $\varphi(x,y,h)$ 都在 x 处展开即可得到余项表达式：

$$f(x+th,y+thy'(x))=f(x,y)+th\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+thy'(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+o(h^2)$$

$$f(x+(1-t)h,y+(1-t)hy'(x))=f(x,y)+(1-t)h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
$$+(1-t)hy'(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+o(h^2)$$

所以

$$T_{n+1}=y(x)+hy'(x)+\frac{1}{2}h^2y''(x)+\frac{1}{3!}h^3y'''(\xi)-y(x)-$$

$$\frac{1}{2}h[2f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+hy'(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+o(h^2)]=o(h^3)$$

故对任意参数 t，题中方法是二阶的。

7、解：

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-hf(x_n+\frac{h}{2},y(x_n)+\frac{h}{2}y'(x_n))=$$

$$y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{1}{3!}h^3y'''(x_n)+o(h^4)-$$

$$y(x_n)-h\{f(x_n,y_n)+\frac{h}{2}\frac{\partial f(x_n,y(x_n))}{\partial x}+$$

$$\frac{1}{2!}[(\frac{h}{2})^2\frac{\partial^2 f(x_n,y(x_n))}{\partial x^2}+\frac{h}{2}\frac{h}{2}y'(x_n)\frac{\partial^2 f(x_n,y(x_n))}{\partial x\partial y}+$$

$$(\frac{h}{2}y'(x_n))^2\frac{\partial^2 f(x_n,y(x_n))}{\partial y^2}]+o(h^3)\}=\frac{h^3}{3!}y'''(x_n)-$$

$$\frac{h}{8}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(y'(x))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}]_{(x_n,y(x_n))}+o(h^4)=o(h^3)$$

因此，中点公式是二阶的。

对模型方程 $y'=\lambda y(\mathrm{Re}(\lambda)<0)$ 使用中点公式求解，得

$$y_{n+1}=[1+\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2]y_n$$

易知，当 $|1+\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2|\leq 1$ 时，中点公式绝对稳定。特别当 λ 为实数且 $\lambda<0$ 时，上不等式的解为

$$-2\leq\lambda h\leq 0$$

8．解： （1）用欧拉法求解题中初值问题，当$\lambda h = -100h$满足

$$|1 + (-100h)| \le 1$$

时绝对稳定，即当$0 < h \le 0.2$时欧拉法绝对稳定。

（2）当$\lambda h = -100h$满足不等

$$\left|1+\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2+\frac{1}{3!}(\lambda h)^3+\frac{1}{4!}(\lambda h)^4\right| \le 1$$

时，四阶龙格-库塔法绝对稳定，也即当λh满足

$-2.785 \le \lambda h < 0, 0 < h \le \dfrac{-2.785}{\lambda} = 0.02785$时绝对稳定。

（3）对于梯形公式，当$\lambda h = -100h \in (-\infty, 0)$时，绝对稳定，此条件对$\forall h \in (0, +\infty)$都成立，即梯形法对$h$无限制。

9、解： 二阶阿达姆斯显式和隐式方法分别为

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

将$f = 1 - y$代入上二式，化简得

显式方法 $$y_{n+2} = (1 - \frac{3}{2}h)y_{n+1} + \frac{h}{2}y_n + h$$

隐式方法 $$y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h}y_n + \frac{2h}{2+h}$$

取$h = 0.2, y_0 = 0, y_1 = 0.181$，计算结果如表 9-7 所示

表 9-7

x_n	显式 y_n	$\lvert y(x_n) - y_n \rvert$	隐式 y_n	$\lvert y(x_n) - y_n \rvert$

0. 4	0. 3267	0.2979953×10^{-2}	0. 32990909	0.229136×10^{-3}
0. 6	0. 44679		0. 451743801	0.555437×10^{-3}
0. 8	0. 545423	0.4398363×10^{-2}	0. 551426746	0.755710×10^{-3}
1. 0	0. 6264751		0. 63298552	0.864961×10^{-3}
		0.5248035×10^{-2}		
		0.5645458×10^{-2}		

可见，隐式方法比显式方法精确。

10．证明：根据局部截断误差的定义知

$$T_{n+1} = y(x_n + h) - \frac{1}{2}(y(x_n) + y(x_n - h)) -$$
$$\frac{1}{4}h[4y'(x_n + h) - y'(x_n) + 3y'(x_n - h)] =$$
$$y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2y''(x_n) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_n) + o(h^4) - \frac{1}{2}y(x_n) -$$
$$\frac{1}{2}[y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2y''(x_n) - \frac{1}{3!}h^3y'''(x_n) + o(h^4)] -$$
$$\frac{h}{4}[4(y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{1}{2}h^2y'''(x_n) + o(h^3)) - y'(x_n) +$$
$$3(y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{1}{2}h^2y'''(x_n) + o(h^3))] = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2})y(x_n) +$$
$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{4})h^2y''(x_n) + (\frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8})h^3y'''(x_n) + o(h^4) =$$
$$-\frac{5}{8}h^3y'''(x_n) + o(h^4)$$

故方法是二阶的，局部截断误差的主项为$-\dfrac{5}{8}h^3y'''(x_n)$。

11、解 由局部截断误差的定义知

$$T_{n+2} = y(x_n + 2h) + (b-1)y(x_n + h) - by(x_n) -$$
$$\frac{h}{4}[(b+3)y'(x_n + 2h) + (3b+1)y'(x_n)] =$$
$$y(x_n) + 2hy'(x_n) + \frac{1}{2}(2h)^2 y''(x_n) + \frac{1}{3!}(2h)^3 y'''(x_n) +$$
$$\frac{1}{4!}(2h)^4 y^{(4)}(x_n) + o(h^5) + (b-1)[y(x_n) + hy'(x_n) +$$
$$\frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_n) + \frac{1}{4!}h^4 y^{(4)}(x_n) + o(h^5)] -$$
$$by(x_n) - \frac{h}{4}(b+3)[y'(x_n) + 2hy''(x_n) + \frac{1}{2!}(2h)^2 y'''(x_n) +$$
$$\frac{1}{3!}(2h)^3 y^{(4)}(x_n) + o(h^5)] - \frac{h}{4}(3b+1)y'(x_n) =$$
$$(1 + b - 1 - b)y(x_n) +$$
$$[2 + b - 1 - \frac{1}{4}(b+3) - \frac{1}{4}(3b+1)]hy'(x_n) +$$
$$[2 + \frac{1}{2}(b-1) - \frac{1}{2}(b+3)]h^2 y''(x_n) +$$
$$[\frac{4}{3} + \frac{1}{6}(b-1) - \frac{1}{2}(b+3)]h^3 y'''(x_n) +$$
$$[\frac{2}{3} + \frac{1}{24}(b-1) - \frac{1}{3}(b+3)]h^4 y^{(4)}(x_n) + o(h^5) =$$
$$-\frac{1}{3}(b+1)h^3 y'''(x_n) - (\frac{3}{8} - \frac{7}{24}b)h^4 y^{(4)}(x_n) + o(h^5)$$

所以当 $b \neq -1$ 时

$$T_{n+2} = -\frac{1}{3}(b+1)h^3 y'''(x_n) + o(h^4)$$

方法为二阶；当 $b = -1$ 时

$$T_{n+1}=-(\frac{3}{8}-\frac{7}{24}b)h^4y^{(4)}(x_n)+o(h^5)$$

方法为三阶。

12、解： 根据刚性比的定义，若方程组的矩阵 $A=\begin{bmatrix}-10 & 9\\ 10 & -11\end{bmatrix}$ 的特征值 λ_j 满足条件 $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0(j=1,2)$，则

$$s=\frac{\max\limits_{1\le j\le 2}\left|\mathrm{Re}(\lambda_j)\right|}{\min\limits_{1\le j\le 2}\left|\mathrm{Re}(\lambda_j)\right|}$$

称为刚性比，易知 A 的两个特征值为

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-20$$

所以刚性比 s=20。

当 $\lambda h\in[-2.78,0)$ 时，数值稳定。因此当 $0<h\le\frac{-2.78}{-20}=0.139$ 时才能保证数值稳定。