

Fracture Mechanics with ABAQUS

(中文翻译版)



翻译制作: wild_field

前言

本文翻译的是 ABAQUS 断裂力学 (Fracture Mechanics with ABAQUS)。这本教程是从 simwe 下载的，在翻译的过程中，发现两个问题：

1. 英文原版的第 96 页与 97 页的内容相同，97 真正的内容缺失。
2. 英文原版的教程并没有完，还应有下文。

希望有知道详情的朋友能回答这两个问题，谢谢！

在这本翻译版中，图片和大部分公式均复制于英文原版，图片中的英文没有翻译过来，相信也不会影响大家翻阅。

此翻译版的目的在于方便大家学习，为尊重本人的劳动，请不要修改此翻译版及另作其他用途。

最后祝大家 2008 快乐！

wild_field

目 录

第 1 讲 线弹性断裂力学—LEFM.....	- 1 -
1.1 介绍	- 1 -
1.2 小范围屈服和 K 主导区.....	- 3 -
1.3 材料限制	- 3 -
1.4 能量释放率和应力强度因子.....	- 4 -
1.5 小范围屈服下的裂纹扩展.....	- 6 -
1.6 混合型断裂	- 7 -
1.7 裂尖奇异性	- 9 -
第 2 讲 J 积分	- 11 -
2.1 J 积分定义	- 11 -
2.2 J 积分作为能量释放率.....	- 14 -
2.3 塑性裂尖场	- 16 -
2.4 小范围屈服下的 J 积分.....	- 17 -
第 3 讲 J 积分的积分表示范围.....	- 19 -
3.1 J 积分的积分表示范围.....	- 19 -
3.2 二维 J 积分表示范围.....	- 19 -
3.3 三维情况下 J 积分概述.....	- 23 -
3.4 三维 J 积分表示范围.....	- 24 -
3.5 J 积分的计算	- 25 -
3.6 材料的不连续	- 26 -
第 4 讲 弹塑性估计方法.....	- 28 -
第 5 讲 线弹性单元	- 32 -
5.1 线弹性建模	- 32 -
5.2 非线性	- 37 -
第 6 讲 断裂力学：ABAQUS 应用.....	- 41 -
6.1 裂尖单元	- 41 -
6.1.1 二维情况裂尖奇异性建模.....	- 42 -
6.1.2 三维情况裂尖奇异性建模.....	- 44 -
6.2 裂尖有限应变分析.....	- 45 -
6.3 围线积分的计算	- 47 -
6.4 不同裂尖网格的对比.....	- 50 -
6.5 撕开型模型的计算.....	- 55 -
6.6 围线积分计算时应用*NORMAL 选项.....	- 56 -
6.7 多裂纹尖端的 J 积分.....	- 57 -
6.8 壳中穿透裂纹	- 57 -
6.9 混合型断裂	- 60 -
6.10 裂纹扩展	- 62 -
6.11 弹-塑性材料的数值计算.....	- 70 -
6.12 关于断裂其它的 ABAQUS 应用.....	- 70 -

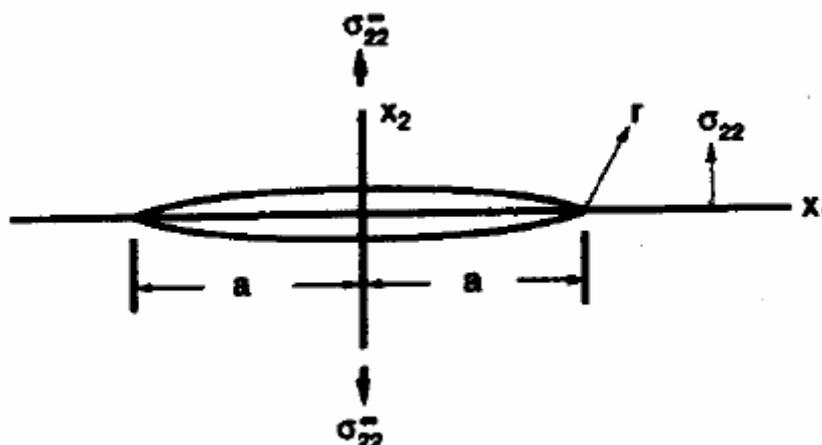
第 1 讲 线弹性断裂力学—LEFM

目录

- 介绍.....1
- 小范围屈服和 K 主导区.....3
- 材料限制.....3
- 能量释放率和应力强度因子.....4
- 小范围屈服下的裂纹扩展.....6
- 混合型断裂.....7
- 裂尖奇异性.....9

1.1 介绍

考虑线弹性无限大板中长度为 $2a$ 的尖裂纹的应力集中 (Griffith crack)。



在对称面上法向应力的完备解为

$$\sigma_{22}(x_1, x_2 = 0) = \begin{cases} 0, & \text{if } |x_1| < a \\ \sigma_{22}^{\infty} |x_1| / \sqrt{x_1^2 - a^2}, & \text{if } |x_1| > a \end{cases}$$

如果用距裂纹尖端的距离 r 来表示 $\sigma_{22}(x_2 = 0)$, $x_1 = a + r$

$$\sigma_{22}(x_1 = a + r, x_2 = 0) = \sigma_{22}^{\infty} \frac{(a + r)}{\sqrt{r(2a + r)}}$$

在 $r \rightarrow 0$ 条件下,

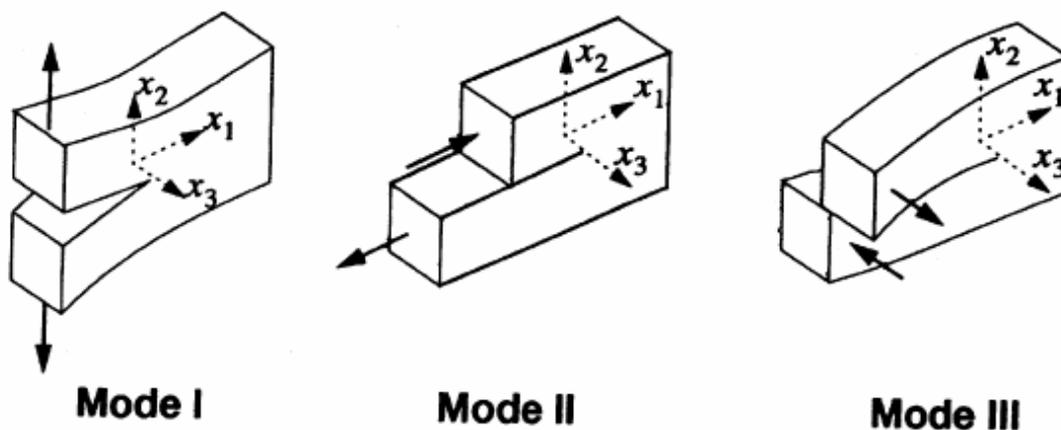
$$\sigma_{22}(x_1 = a + r, x_2 = 0) = \sigma_{22}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_I$$

定义 I 型（张开型）应力强度因子 K_I 为

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{22}(x_1 = a+r, x_2 = 0) \sqrt{2\pi r}.$$

应力强度因子是描述裂纹尖端场的一个参数，它与载荷的大小及几何有关。

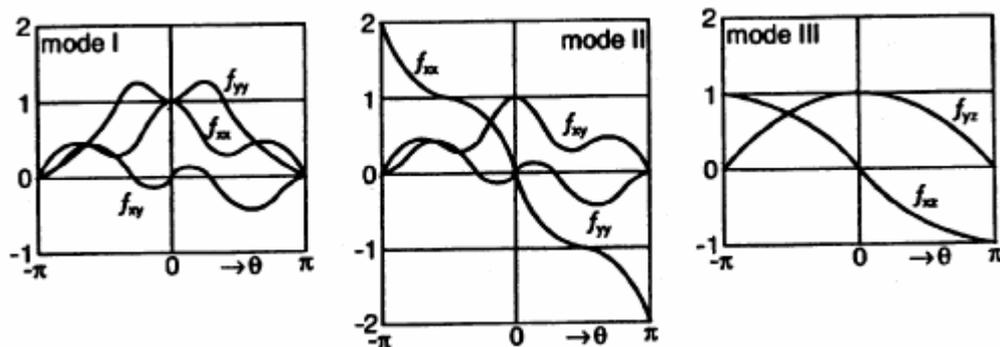
共有三种断裂模型（如下图所示）：



通过叠加每一种断裂模型的结果我们可以得到在任何应力下的裂尖应力场：

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta),$$

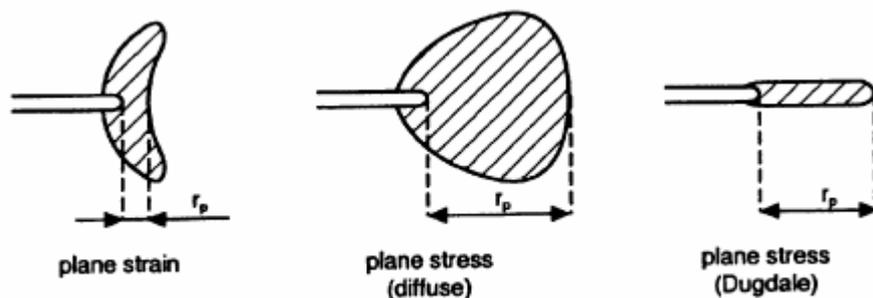
其中 r 为距裂尖的距离， $q = \arctan(x_2/x_1)$ ， K_I 为 I 型（张开）应力强度因子， K_{II} 为 II 型（面内剪切）应力强度因子， K_{III} 为 III 型（撕开）应力强度因子。



1.2 小范围屈服和 K 主导区

要使 LEFM 有效，围绕在裂纹尖端处一定要有一个环形区域，在其内上面所述的场函数能很好的近似等于完备应力场。

要使 LEFM 有效，材料进入塑性的区域要足够的小。典型的塑性区形状如下图所示：



比较 Griffith crack 渐进的 (asymptotic) 应力场与完备的应力场，

$$\frac{\sigma_{22}^{\text{complete}}(r)}{\sigma_{22}^{\text{asymptotic}}(r)} = \frac{1 + r/a}{\sqrt{1 + r/(2a)}}$$

在 $r = 0.1a$ 时，上式的比值为 1.07，可知若想准确地用渐进的应力场来代替完备的应力场， r 必须小于在问题中出现的其他一些特征长度一定的百分比，这些特征长度如：

- 裂纹长度
- 剩余的未扩展区域长度
- 三维裂纹前缘曲率半径
- 裂纹尖端距加载点的距离

1.3 材料限制

令 $s_{22} = s_0$ ，我们可以估计塑性区半径 r_p 的大小， s_0 为屈服应力。

$$r_p \approx \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2 \approx \frac{1}{6} \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2$$

因为在塑性区边界上面力为平衡力系，主矢和主矩都等于零，塑性区对围在它外面弹性区的影响随着距边界距离的增大迅速衰减，当距离为三倍 r_p 时影响可忽略不计（圣维南原理）。

如果 a 为问题中的特征长度，那么 K 主导区的半径 r_K 可表示为，

$$a/5 > r_K > 3r_p \approx \frac{1}{2} \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2$$

或

$$a > 2.5 \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2.$$

这是美国 ASTM 标准 E-399 关于 K_{Ic} 试验中样件尺寸的限制。

如果把 Griffith crack K_I 的结果带入，可以得到

$$\frac{\sigma_{22}^{\infty}}{\sigma_0} < \sim 0.36.$$

所以，如果名义应力小于 $\sigma_0/2$ ，一般线弹性可以使用而且小范围屈服的条件据说也是满足的。

1.4 能量释放率和应力强度因子

裂纹扩展需要的能量被定义为：

$$G = - \left. \frac{\partial PE}{\partial a} \right|_{Loads},$$

这里 PE 为位能，G 为能量释放率。

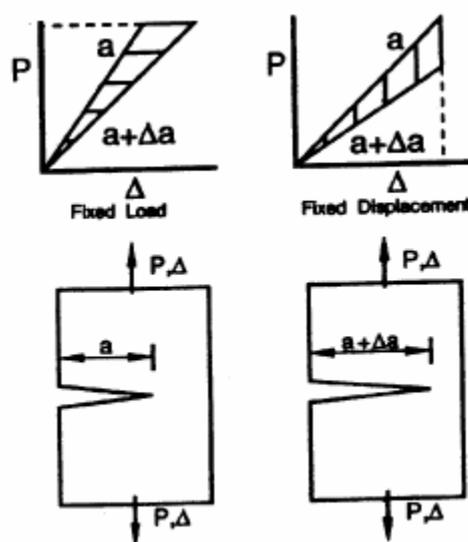
考虑两个基本相同的模型的能量差，一个模型的裂纹长度为 a ，另一个模型的裂纹长度为 $a + \Delta a$ 。

位移载荷曲线阴影部分的面积为弹性材料的位能差（一种为固定载荷情况，一种为固定位移情况）。

考虑使尖裂纹沿着裂纹线扩展 Δa 所需要的能量。裂纹未扩展前，裂纹尖端前部的应力如下

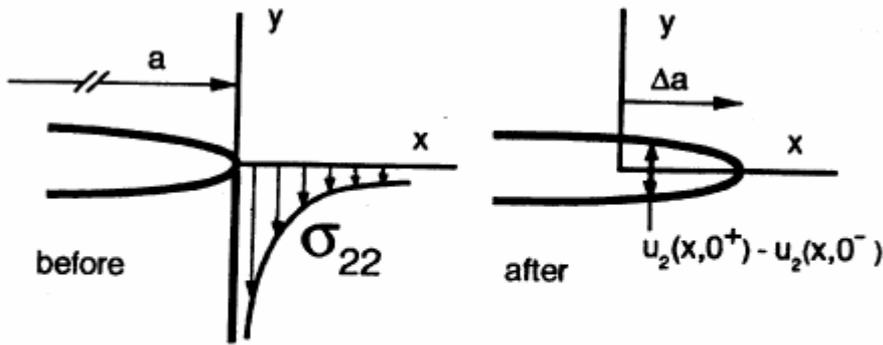
$$\sigma_{22}(x_1, 0) = \frac{K(a)}{\sqrt{2\pi x_1}} \quad \text{for } 0 < x_1 < \Delta a.$$

裂纹扩展 Δa 了后，上式的应力要发生卸载，所以释放的能量为



$$G\Delta a = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta a} \sigma_{22}(x_1, 0) [u_2(x_1, 0^+) - u_2(x_1, 0^-)] dx_1,$$

这里 $u_2(x_1, 0^+) - u_2(x_1, 0^-)$ 为裂纹扩展了 Δa 时裂纹面的张开位移。



(A) Stress Profile Ahead of Crack Tip

(B) Separation of Crack Faces After Crack Tip Advances Δa .

对于很小的 Δa 有

$$u_2(x_1, 0^+) - u_2(x_1, 0^-) = K(a + \Delta a) \frac{(1 + \kappa)}{G} \sqrt{\frac{\Delta a - x_1}{2\pi}},$$

在平面应变状态下 $k = 3 - 4\nu$ ，在平面应力状态下 $k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ 。将之带入上面的积分式中可以得到

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K^2 \text{ for plane strain}$$

$$G = \frac{K^2}{E} \text{ for plane stress.}$$

在受载的含有裂纹的三维体中，裂纹每扩展单位长度的能量释放率为（假设为线弹性情况）。

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2.$$

1.5 小范围屈服下的裂纹扩展

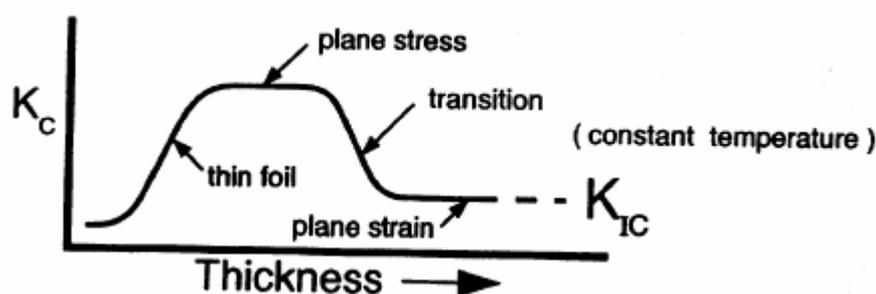
对于完全脆性材料而言，新的表面的出现需要表面能 T ，裂纹扩展的必要条件为

$$G = 2T = G_c^{\text{def}}$$

这里 G 是与几何和载荷相关的函数。目前所知唯一能符合这种条件的材料是云母。在真空环境下，劈开云母间的层可以产生一个裂纹，对层间施加压力后裂纹又可以“愈合”。

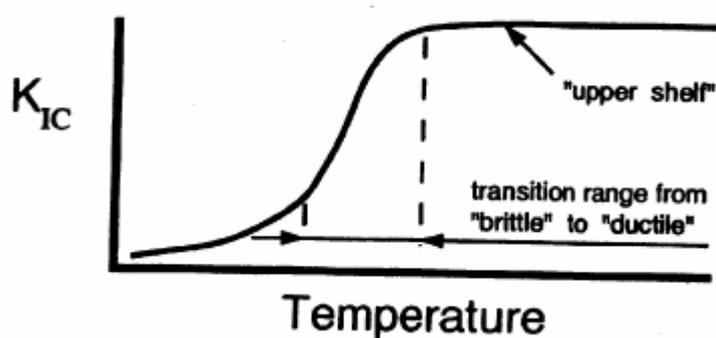
对于更多现实的材料而言，尽管伴随断裂过程中产生新的表面和塑性变形，如果 G_c 还可以被解释为裂纹每扩展单位长度的能量，那么 G_c 就可以作为断裂判据。 G_c 的值必须由试验来决定。

因为 G_c 与 K 有关系，断裂判据也可以由应力强度因子 K 来表示， K_c 为断裂韧性，由试验可知， K_c 为试验厚度的函数。



K_c 实用的最小值是在平面应变下的。这是一个通常由试验来决定的量，因为它的变化幅度不明显（微粒子的薄片情况除外）。然而，如果为材料的薄壁断裂情况， K_c 是介于平面应力和平面应变之间一个适当的值。

断裂韧性 K_{IC} 与温度关系明显，如下图所示。材料脆性与韧性间转换温度的范围与材料自身相关，对许多常规金属材料而言，它的值介于材料的工作温度范围内。



一些典型材料的 r_p 是由 K 主导区的屈服应力及 Mises 应力相比较得到的，裂纹的长度是由 ASTM 标准限定的。对一些具有高断裂韧性的材料而言，有效断裂试验试件的尺寸是很大的。

Material	T (°C)	σ_0 (MPa)	K_{IC} (MN/m ^{3/2})	r_p (mm)	Crack length (mm)
A061-T651 (Al)	20	269	33	5	38
A075-T651 (Al)	20	620	36	0.35	8.4
AISI 4340 (Steel)	0	1500	33	0.05	1.2
A533-B (Steel)	93	620	200	11	260

1.6 混合型断裂

在拉伸载荷下，几乎所有与裂纹扩展方向相关的理论都假定或预定裂纹扩展时 $K_{II} = 0$ ，因此在 I 型裂纹的条件下，具有连续一阶导数的宏观可见裂纹会沿着直线扩展。裂纹的曲率会随着载荷发生变化，当载荷改变时，裂尖应力场的强度也会随之发生很大的变化，这时混合型断裂也将会发生。

下面讨论的三种理论，当计算裂纹扩展方向时，把 $K_{II} = 0$ 代入这三种理论，它们预测的裂纹扩展角度稍许不同。ABAQUS/Standard 对均匀各向同性的线弹性材料提供了 3 种判据：最大切向应力判据、最大能量释放率判据及 $K_{II} = 0$ 判据。

- 最大切向应力判据 (MTS):

$$\hat{\theta} = \cos^{-1} \left(\frac{3K_{II}^2 + \sqrt{K_I^2 + 8K_I^2 K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2} \right)$$

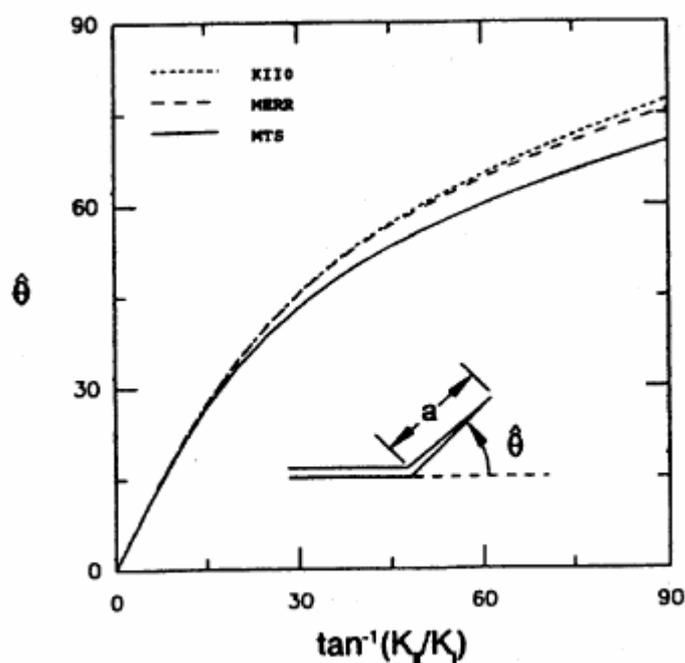
裂纹扩展的起始角度是相对于裂纹面的, $\hat{q} = 0$ 表示裂纹沿着直线扩展; 当 $K_{II} > 0$ 时, $\hat{q} < 0$, 当 $K_{II} < 0$ 时 $\hat{q} > 0$ 。

- 最大能量释放率判据 (MERR):

最大能量释放率判据假定裂纹沿着裂尖缠线能量释放率最大的方向扩展。

- $K_{II} = 0$ 判据 (KII0):

这个判据简单的假定裂纹会沿着裂尖缠线上 $K_{II} = 0$ 的方向扩展。



1.7 裂尖奇异性

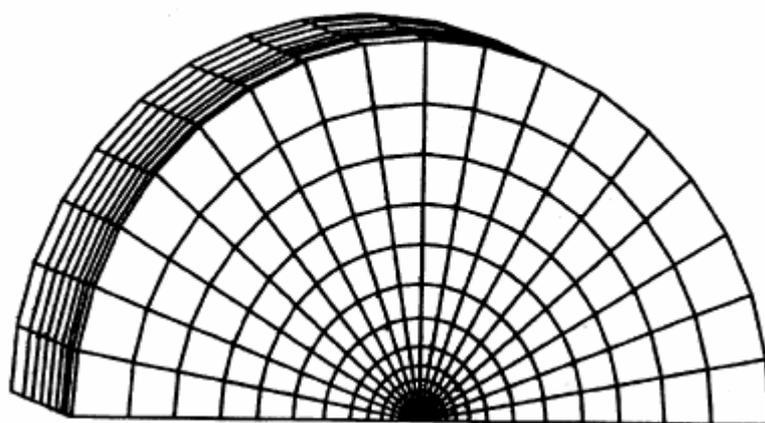
当裂尖线与自由表面相交时，裂尖奇异性的本质会发生改变。例如，在平面裂纹对称载荷下，当裂尖线与自由面成直角时，

$$\sigma \propto r^{-4.52} \text{ for } \nu = 0.3.$$

根据应力强度因子的定义，当裂纹到达自由面时 $K_I \rightarrow 0$ ，但这并不表明断裂在表面不会发生。

$K_I \rightarrow 0$ 仅表明应力强度因子的定义不适合这种情况。然而，却也能说明为什么断裂试件的裂纹前缘在表面处容易弯曲。如果裂纹前缘与表面相交成

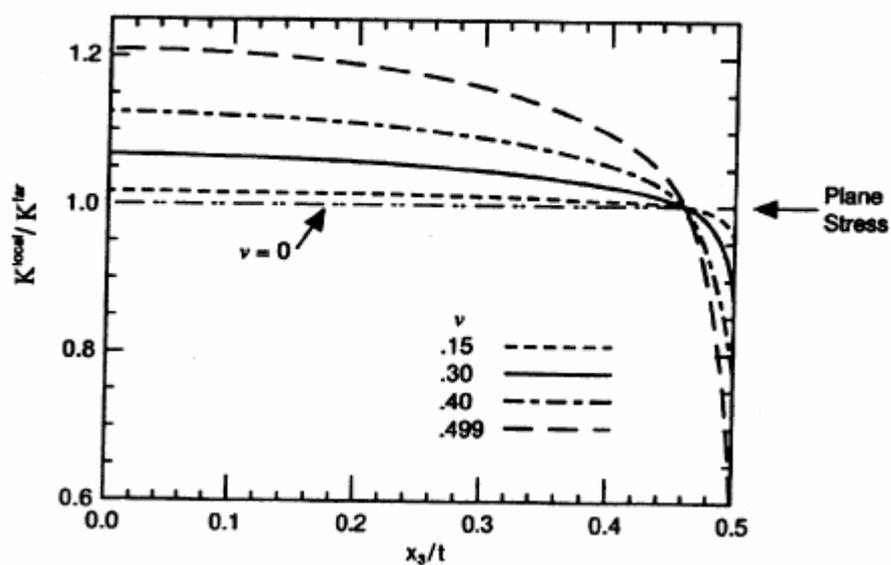
$$\approx 101^\circ, \sigma \propto r^{-5} \text{ for } \nu = 0.3.$$



含有裂纹的板和壳的数值计算表明：在裂纹区域自由表面处存在一个 5% 厚度的边界层。在 1.5 倍板厚的射线范围内，变形是平面应力状态。当裂纹线到达表面处，应力场的本质将改变。

沿着裂纹线，板壳中部的变形接近平面应变状态，边界层的变形为平面应力状态。

如果有限元网格在厚度方向划分比较粗糙，上述的现象将不能正确地模拟，并且将导致接近表面处的 J 积分计算值的不稳定。



在分析覆层裂纹时上述结论提示了一个问题：相对于基础材料，覆层一般都很薄，如果网格的尺寸仅适合基础材料，在分析覆层的应力时网格可能就太粗糙了。

第 2 讲 J 积分

目录

• J 积分定义.....	11
• J 积分作为能量释放率.....	14
• 塑性裂尖场.....	16
• 小范围屈服下的 J 积分.....	17

2.1 J 积分定义

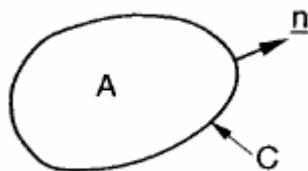
先从二维情况的弹性体在机械载荷下、小变形梯度、小应变及小旋转的情况下定义 J 积分。

当围线积分绕着裂纹尖端时,它是这个区域内一个守恒的积分,没有奇异性,并且与积分的路径无关。当裂纹扩展时, J 积分在数值上等于能量的释放率。

考虑下面的积分

$$I = \oint_C \left(W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds,$$

这里 C 表示围线的外围,法线 \mathbf{n} 围绕着一个完全连通的区域,其内部没有奇异性,



其中

$$W(\underline{\varepsilon}) = \int_0^{\underline{\varepsilon}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

为应变能密度。

下面将说明 I 是一个守恒的积分: $I = 0$ 。

I 还可以这样表示为

$$I = \oint_C \left(W \delta_{1j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} \right) n_j ds,$$

这里定义

$$P_{1j} \stackrel{\text{def}}{=} - \left(W \delta_{1j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} \right)$$

为 Eshelby's “能量-动量张量（矢量）”。

因为 C 为一闭合曲线，根据散度定理有，

$$I = \oint_C \left(W \delta_{1j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} \right) n_j ds = \int_A \frac{\partial}{\partial x_j} \left(W \delta_{1j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} \right) dA.$$

还知

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1},$$

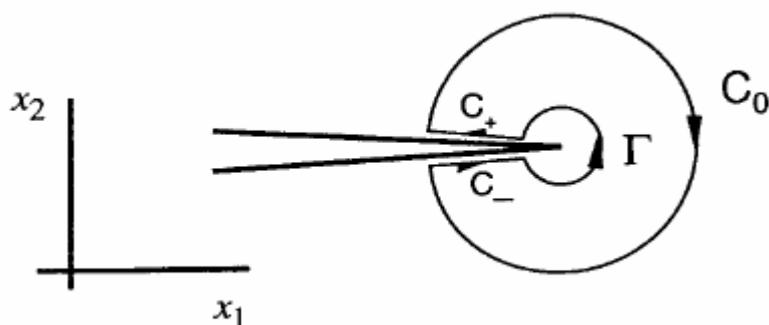
这里已经假定材料为非线弹性。并且

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} \right) &= \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \overbrace{\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)}^{\text{equals 0 by equilibrium}} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_j} \sigma_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_j} \\ &= \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

因此， $I = 0$ 并且为守恒的积分。

I 提供了一个围绕着裂纹尖端与路径无关的积分 J，考虑一个平行于 x_1 轴的裂纹。

设 C 为围线，由 Γ, C_+, C_0, C_- 组成。



既然 I 是一个守恒的积分

$$I = \oint_{\Gamma + C_0 + C_+ + C_-} \left(W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds = 0.$$

沿着 C_+ 和 C_- 路径时 $n_1 = 0$ ，因为在这两条线上，围线的法线是 x_2 的方向。

假定裂纹面是自由拉伸的，沿着 C_+ 和 C_- 有

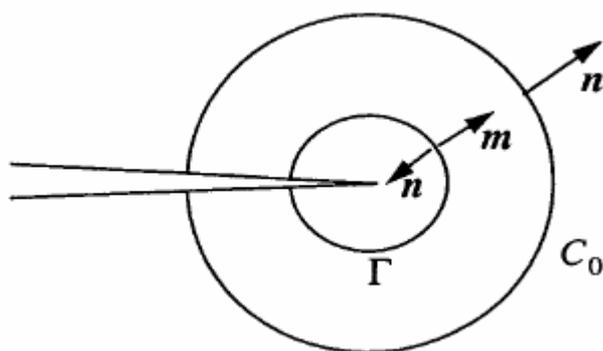
$$\sigma_{ij} n_j = t_i = 0$$

所以沿着 C_+ 和 C_- 积分的值为零，因此有，

$$\int_{\Gamma} \left(W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds + \int_{C_0} \left(W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds = 0,$$

这里 n_i 表示围线的外法线。

反转围线 Γ 的法线，如下图所示，



可知，

$$\int_{C_0} \left(W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds = - \int_{\Gamma} \left(W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds$$

$$= \int_{\Gamma} \left(W m_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} m_j \right) ds.$$

用 n_i 替代 m_i 有

$$J = \int_{\Gamma} \left(W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds$$

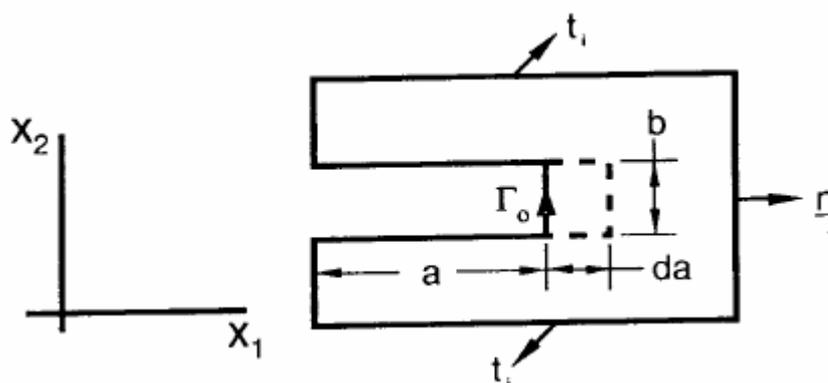
J 积分的值与路径 Γ （只要围绕着裂尖）无关，所以，J 积分与路径无关。

上述证明所需的条件：

1. 在裂纹方向上，材料是各向同性的。
2. 材料是弹性的。如果材料不是弹性的，对于限定的载荷而言，假定材料为弹性时会有一个小错误；比如，当用塑性变形代替渐进的塑性时是有道理的。

2.2 J 积分作为能量释放率

考虑下面的一个钝凹槽模型，作用载荷 t_i ，尺寸如下图所示。



系统势能为

$$PE = \int_A W dA - \int_{S_T} t_i u_i ds.$$

计算势能相对于凹槽长度 a 的改变量，其他条件保持不变。

$$\frac{\partial(PE)}{\partial a} = -\int_{\Gamma_0} W n_1 ds + \int_A \frac{\partial W}{\partial a} dA - \int_{S_T} t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds.$$

还有

$$\int_A \frac{\partial W}{\partial a} dA = \int_A \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial a} dA = \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial a} dA.$$

因为 \mathbf{x}_{ij} 和 u_i 是一致的场，根据虚功定理有

$$\int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial a} dA = \int_{S_T} t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds.$$

还有，

$$\frac{\partial(PE)}{\partial a} = -\int_{\Gamma_0} W n_1 ds.$$

上式还可以写为

$$\frac{\partial(PE)}{\partial a} = -\int_{\Gamma_0} \left(W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds$$

因为积分的第二个部分为零（凹槽的末端 Γ_0 可自由张开）。

令 $b \rightarrow 0$ ，钝的凹槽变成了尖裂纹。等号右边的积分 J 是与路径无关的，所以可以求得围绕裂尖的任何路径下的能量释放率。

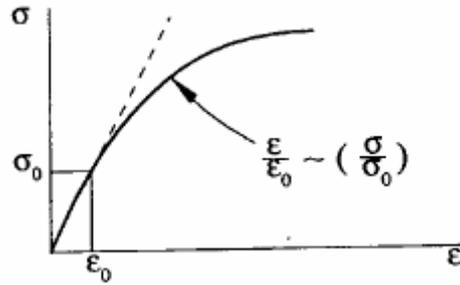
$$\frac{\partial(PE)}{\partial a} = -\int_{\Gamma} \left(W n_1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \sigma_{ij} n_j \right) ds = -J.$$

因此有，

$$J = -\frac{\partial(PE)}{\partial a} \Big|_{Loads}.$$

2.3 塑性裂尖场

考虑具有 Ramberg-Osgood 本构关系的材料,



$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n,$$

这里 s_0 为有效屈服应力, $x_0 = s_0 / E$ 为相应的屈服应变, E 为杨氏模量, a 和 n 为根据材料应力应变数据所定的参数。

裂尖应变场满足以下的幂律方程:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n.$$

对于多向应力情况, 上式的幂律关系可以推广至下式

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} = \frac{3}{2} \alpha \left(\frac{q}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\sigma_0},$$

这里 $S_{ij} = s_{ij} + p d_{ij}$ 为偏应力, $p = -\frac{1}{3} s_{kk}$ 为当量压应力, $q = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}$ 为 Mises 当量偏应力。

这代表非线性、不能压缩的弹性材料, 经常被作为塑性材料的变形理论。

Hutchinson、Rice 和 Rosengren 研究成果(后来由 Shih 推广到混合载荷模式)指出在裂尖处应力场为如下形式

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij},$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij},$$

$$u_i - \hat{u}_i = \alpha \varepsilon_0 r \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} u_i.$$

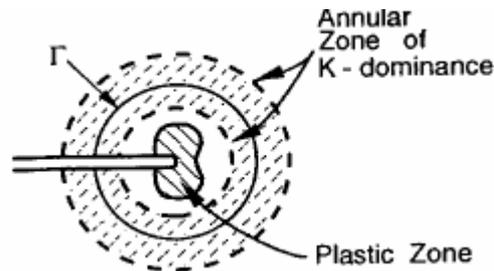
这里 $u_i - \hat{u}_i$ 是与裂纹尖端相关的位移，这个场通常被叫做 HRR 裂尖场。

方程 $\tilde{S}_{ij}(q, n, M^P)$, $\tilde{x}_{ij}(q, n, M^P)$ 和 $\tilde{u}_i(q, n, M^P)$ 在裂纹尖端处的结果是随角度而变的。 $I_n(n, M^P)$ 是一个常量积分。 M^P 体现在裂纹尖端处 (当 $q = 0$, $r \rightarrow 0$ 时) s_{qq} 与 s_{rq} 的比值, 还能体现一型或二型载荷的大小。

根据 J 积分 (J 积分给出了任何幂律材料裂尖附近奇异性的强度), HRR 场提供了一个裂尖附近状态的标量参数。

2.4 小范围屈服下的 J 积分

选择 J 积分的围线 Γ , 让它完全落在 K 主导区的环形域内。



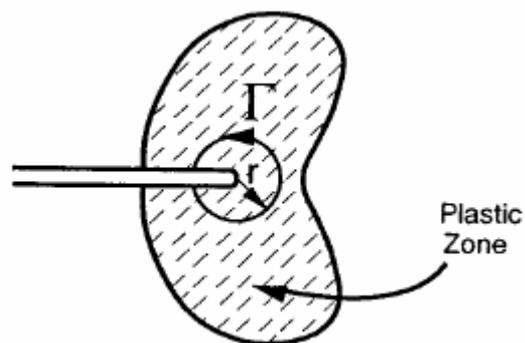
在 K 主导区内, J 积分的被积函数可以被积分出来。对于 I 型裂纹有

$$J = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \text{ for plane strain}$$

$$J = \frac{1}{E} K_I^2 \text{ for plane stress.}$$

既然 J 积分是与路径无关的, 这样就可以通过选择围线 Γ 来计算 K。

选择围线 Γ 落在塑性区范围内, 假设载荷为单调载荷, 塑性变形可以作为非线性弹性:



选择围线为半径为 r ($r \ll r_p$), 圆心在裂纹尖端的圆。路径无关表明当围线缩小到裂尖时, J 积分的值不会改变, 并且 J 不等于 0, 因为它为裂纹扩展时的能量释放率, 所以被积函数一定具有 r^{-1} 奇异性。

$$W \sim \sigma \varepsilon \sim \frac{1}{r}.$$

对于幂律材料有

$$\sigma \sim \left(\frac{1}{r}\right)^{1/(n+1)} \quad \text{and} \quad \varepsilon \sim \left(\frac{1}{r}\right)^{n/(n+1)}.$$

当 $n=1$ 时 (线弹性),

$$\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad \varepsilon \sim \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

第 3 讲 J 积分的积分表示范围

目录

• J 积分的积分表示范围.....	19
• 二维 J 积分表示范围.....	19
• 三维情况下 J 积分概述.....	23
• 三维 J 积分表示范围.....	24
• J 积分的计算.....	25
• 材料的不连续.....	26

3.1 J 积分的积分表示范围

• 用有限元公式计算二维的线积分和三维的面积分是不容易的且不准确，但二维的面积分和三维的体积分不存在上述问题。

• 因此把 J 积分中的线积分转成二维的面积分以及把 J 积分中的面积分转成三维的体积分是有道理的。

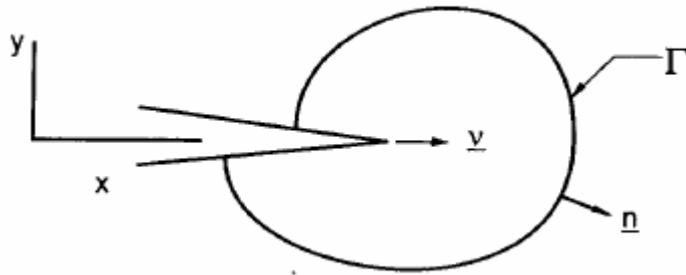
3.2 二维 J 积分表示范围

可以把裂纹的 Eshelby 驱动力 G 作为与 J 积分一样的基本量。在围线 Γ 缩至裂纹尖端的条件下裂纹驱动力为裂纹扩展单位长度所需的能量，

$$G = J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left[(W + T)n_s - n_i \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_s} \right] v_s ds,$$

这里 u_i 为表示裂纹扩展方向的单位向量； n_i 为围线 Γ 的法线，方向为背向裂纹尖端； W 为工程应力工作密度； T 为动能密度。

这里的定义与先前的 J 积分定义相似，但可以推广到任意的裂纹方向。



对于固定的裂纹，动能密度 T 在裂尖被束缚（非奇异），所以有下面的极限，

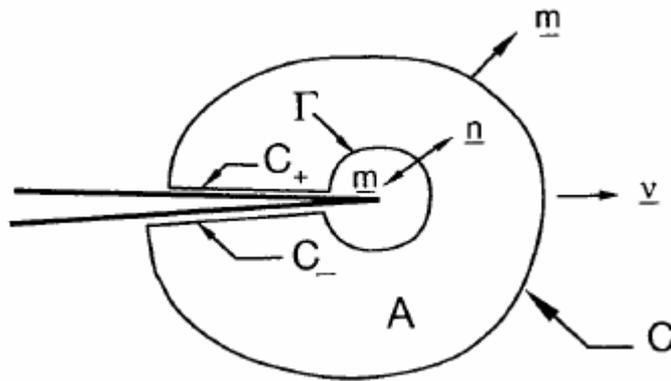
$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} T n_i v_i ds \rightarrow 0.$$

所以有，

$$G = J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left[W n_s - n_i \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_s} \right] v_s ds.$$

沿着裂纹面，绕着裂尖扩展围线形成一闭合区域 $\Gamma + C_+ + C_0 + C_-$ ，面积为 A ，

法线向外，在 Γ 上 $m_i = -n_i$ 。



引入一个额外的向量 q_i ，在 A 内是连续的，在 Γ 上 $q_i = u_i$ （在裂纹扩展方向上的一个单位向量），在 C 上有 $\sqrt{q_i q_i} = 0$ ，在 C_- 和 C_+ 上 $\sqrt{q_i q_i}$ 的值从 1 到 0 连续变化。

$$G = \oint_{\Gamma + C_+ + C_- + C} m_i \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_s} - W \delta_{is} \right) q_s ds - \int_{C_+ + C_-} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_s} q_s ds,$$

在裂纹面 C_+ 和 C_- 上， $t_j = m_i s_{ij}$ 为牵引力， $m_s q_s = 0$ 。

应用散度定理将闭合线积分转成域积分。被积函数要足够的光滑。假设 q_i 在任何不连续的面上都满足光滑要求，有

$$G = \int_A \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_s} - W \delta_{is} \right) q_s \right] dA - \int_{C_+ + C_-} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_s} q_s ds.$$

考虑域积分的被积函数，

$$\begin{aligned} I &= \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} q_k - W q_i \right) \\ &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} q_k + \sigma_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} q_k + \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial W}{\partial x_i} q_i - W \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \\ &= -f_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} q_k + \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_k} q_k + \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial W}{\partial x_i} q_i - W \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

这里 f_i 为单位体积内的体力，包括 d'Alembert 力 ($f_i = -r_i^{\text{eff}}$)，平衡力为

$$f_j = -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}.$$

如果采用等价于弹性材料的概念，可以把工程工作密度看作是工程应变的函数，即 $W = W(x_{ij}^m)$ ，如

$$\frac{\partial W}{\partial x_s} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}^m} \frac{\partial \epsilon_{ij}^m}{\partial x_s} = \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_s} - \frac{\partial \epsilon_{ij}^{th}}{\partial x_s} \right),$$

这里 x_{ij}^{th} 是热应变。

在 ABAQUS 中，以上假设是被承认的，因为在 J 积分有效的例子中，他能给出准确的结果。即便是在 J 积分无效的情况下，裂纹驱动力的概念仍然是有效的。比如在下面的情况下，W 为位置的函数，塑性变形或塑性变形后的卸载产生的非比例变形。

J 积分已由试验证明是断裂的一个预言工具，研究表明当 J 积分不再有效时裂纹驱动力的概念仍是有效的。

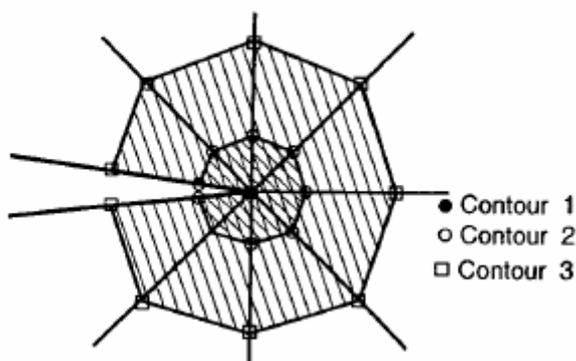
在 ABAQUS 中，应用了等效弹性材料概念并且进一步发展了被积函数

$$I = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - f_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} q_k - W \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^{th}}{\partial x_k} q_k.$$

还可以写成

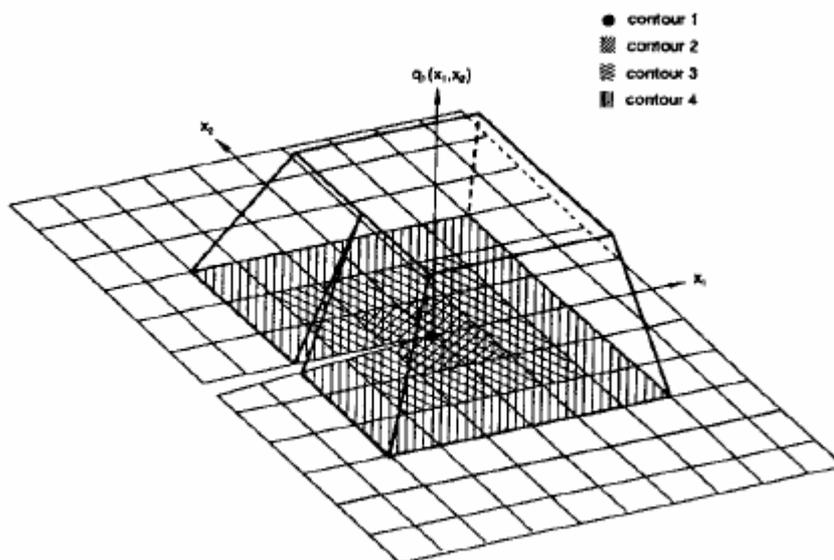
$$G = \int_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - f_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} q_k - W \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{th}}{\partial x_k} q_k \right] dA - \int_{C_+ + C_-} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} q_k ds.$$

为了计算在二维情况下的积分，ABAQUS 定义了围绕着裂纹尖端由单元组成的环形的域。



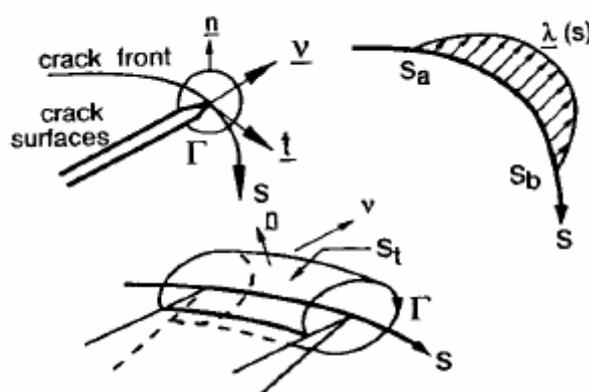
不同的围线（域）被建立。第一个围线由那些直接与裂纹尖端节点相连的单元构成；下一个围线由与前一个围线相接触的单元环组成，以此类推。

计算 J 时，围线外的节点处的 $\sqrt{q_i q_i}$ 的值为 0，围线内的所有节点（裂纹扩展方向） $\sqrt{q_i q_i}$ 的值为 1，但外层单元的中间点除外，这些节点根据在单元中的位置被置于 0 和 1 间的某个值。



3.3 三维情况下 J 积分概述

在三维情况下 J 积分要考虑一个围绕着裂纹线的管状面 S_Γ 。裂纹扩展的局部方向为 v_i ，它垂直于局部裂纹前缘方向 t_i 并位于裂纹面内。随着管状面半径逐渐趋近于 0，与路径无关的条件仅是局部条件并在裂纹面与裂纹前缘、管状面垂直相交的范围内适用。



在裂纹面内，裂纹扩展虚位移为 $I(s)$ 时所释放的虚能为

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \int_L J(s) \lambda(s) ds \\ &= \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{S_\Gamma} \lambda(s) n_i H_{ij} v_j dS, \end{aligned}$$

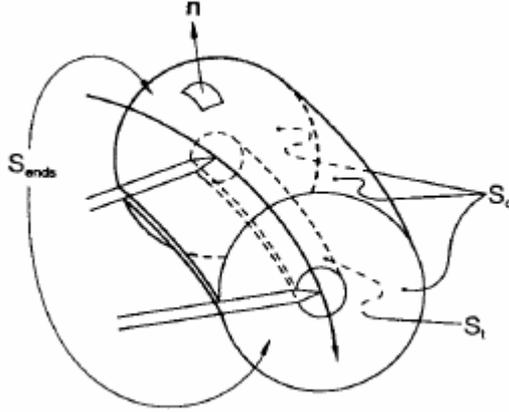
这里 L 表明积分是从裂纹的一端到另一端， $dS = ds d\Gamma$ ，还知

$$H_{ij} = W \delta_{ij} - \sigma_{is} \frac{\partial u_s}{\partial x_j}$$

与 J 积分在二维情况下的被积函数是相同的。 $J(s)$ 为 J 积分在位置 s 处的值。

3.4 三维 J 积分表示范围

为了把面积分转换为体积分，在 S_t 的外面再引入一个面 S_0 ，垂直裂纹前缘方向引入端面 S_{ends} ，定义 $S \stackrel{def}{=} S_t + S_0 + S_{ends}$ ，则取面 S 封闭空间为 V 。



引入额外的函数 q_i ，使它在 S_0 上数值为 0，在 S_t 上有 $q_i = I v_i$ ， v_i 为 J 积分计算点处的裂纹扩展方向。 q_i 在面 S 上从 0 到 $I v_i$ 光滑变化。

q_i 不在外表面的切线方向上，否则扰动可以改变模型的几何。在 ABAQUS 中可以用 *NORMAL 选项来定义面法线。因此

$$\bar{J} = - \int_S m_i H_{ij} q_j dS + \int_{S_{ends}} m_i H_{ij} q_j ds,$$

m_i 为面 S 的外法线。

根据散度定理有

$$\bar{J} = \int_V \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - f_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} q_k - W \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{th}}{\partial x_k} q_k \right] dv - \int_{S_{ends}} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} q_k ds.$$

如果在裂纹面上有载荷，这种影响可以通过调整 S_{ends} 把裂纹面的部分包含在 V 内来考虑。

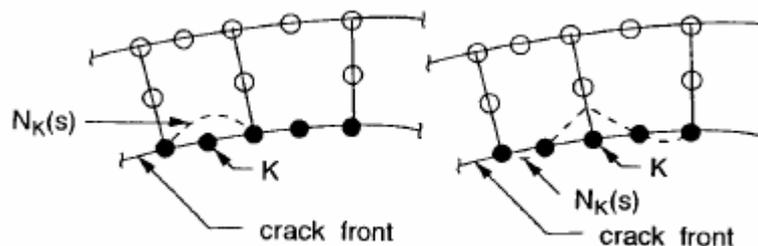
3.5 J 积分的计算

为了计算沿着裂尖线各节点的 J 积分值, 沿着裂纹前缘的单元 I 由相同的插值函数离散化:

$$\lambda(s) = \sum_{P=1}^{NC} N^P(s) \lambda^P,$$

这里 NC 为裂纹线的节点组数, 插值要求定义节点组的裂纹线从裂纹的一端到另一端要连续。

选择每一个 I^P 以适合其他的 I^P , 使其对域积分 \bar{J}^P 的值无影响, 沿着裂纹前缘的各个节点组 P 的 J 积分的值可以如下计算:



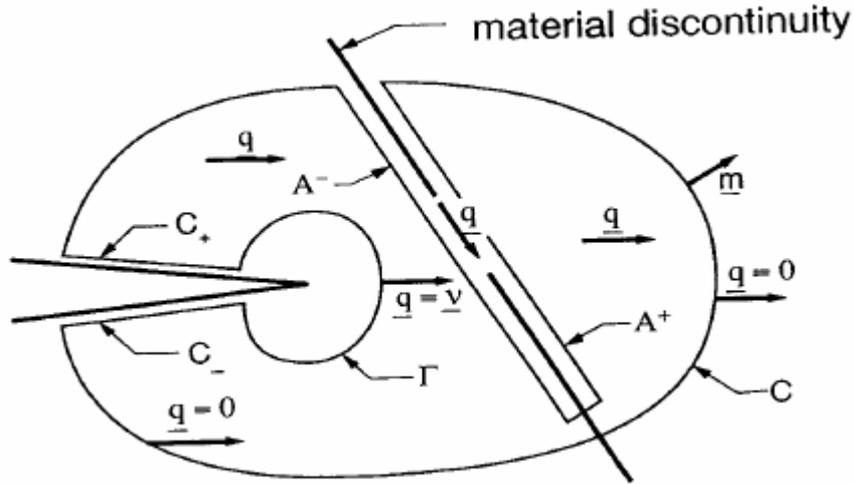
$$J^P = \frac{\bar{J}^P}{\int_L N^P ds}$$

3.6 材料的不连续

$$G = \oint_{\Gamma + C_+ + C + C_-} m_i \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_s} - W \delta_{is} \right) q_s ds - \int_{C_+ + C_-} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_s} q_s ds$$

假定上式被积函数足够光滑能应用散度定理。如果域内包含材料不连续的面，被积函数就不够光滑。然而通过选择 q_i 使之在不连续的面没有法向分量，被积函数就满足必要的光滑性，所以散度定理可以被应用。

如下图所示接近材料不连续处的裂纹，路径 C 围绕着裂纹尖端并且包含 $A^- + A^+$ ——沿着不连续区的一边，穿过不连续区（路径长度为零），在沿着不连续区的另一边。



沿路径 $A^- + A^+$ 的积分为

$$G_A \stackrel{\text{def}}{=} \int_{A^- + A^+} m_i \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - W \delta_{ik} \right) q_k ds.$$

这里 $m_i^{A^-} = -m_i^{A^+}$ 。因为我们选择的 q_i 在不连续的界面上没有法向分量，在 $A^- + A^+$ 上 $m_i q_i = 0$ 。在界面处的相容性要求

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^- q_j = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^+ q_j,$$

因为 q_i 沿着界面， G_A 可以简化为

$$G_A = \int_{A^-} m_i (\sigma_{ij}^- - \sigma_{ij}^+) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} q_k ds.$$

界面的平衡还要求

$$m_i (\sigma_{ij}^- - \sigma_{ij}^+) = 0.$$

因此，如果所选的 q_i 在界面上没有法向分量的话，那么 $G_A = 0$ 。

• 两种材料板的 J 积分分析

举个例子，右图表明一个单边裂纹模型，由两种材料组成，材料连接界面与模型的端面成一定的角度。含裂纹的材料杨氏模量为 $2 \times 10^5 MPa$ ，泊松比为 0.3；不含裂纹的材料杨氏模量为 $2 \times 10^4 MPa$ ，泊松比为 0.1。模型在端部被均匀拉伸一段距离。



沿着材料不连续面，定义其法线用 *NORMAL 选项，不连续处界面的双侧法线都需要被定义。

***NORMAL**

LEFT, NORM, 1.0, 0.125, 0.0

RIGHT, NORM, 1.0, -0.125, 0.0

所计算的 10 个围线的 J 积分的值如下：

Contour	J (N/mm)	
	No Normals	With Normals
1	55681	55681
2	57085	57085
3	57052	57052
4	57058	57058
5	35188	57116
6	31380	57114
7	27536	57114
8	23512	57113
9	19172	57116
10	14181	57094

表明在材料不连续界面处定义法线是必要的（围线 5-10）。

第 4 讲 弹塑性估计方法

- 依据弹性和全塑性结果，线弹性幂律塑性材料在小应变下方法估计。
 - 线弹性材料与载荷成比例的结果
 - 纯幂律非线性弹性材料在拉伸载荷下被提高到一定的幂次与载荷成比例的结果
 - 因此可以证明一个结构在一定载荷下的断裂参数并且可以依比例决定同一类载荷在不同数值下的结果
 - 这种方法（一种用于弹塑性断裂分析的工程方法）促进了 EPRI 的弹塑性断裂手册和塑性断裂手册的发展
- 这种方法建立在把材料塑性看作纯幂律的基础上

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n,$$

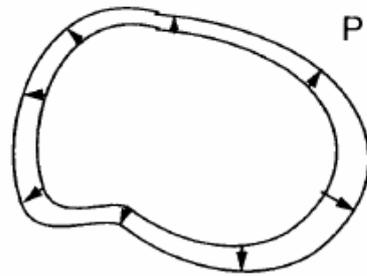
通过 J_2 塑性流动理论可以推广到多轴的情况

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{q}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\sigma_0},$$

这里 S_{ij} 为偏应力， q 为 Mises 等价应力。 x_{ij} 为纯偏量：当 $x_{kk} = 0$ 时，材料为完全不可压缩。

• 这种方法应用于所有边界上的规定拉力都随一载荷参数 P 改变的情况。

对于这种类型的材料，在这样的载荷下（应用 Il'yushin 的结果），整个物体的应力都随着载荷参数线性变化。



这还意味着如果载荷参数单调增长，Mises 流动原理也严格适用，这里 $x_{ij} = x_{ij}^{pl}$ 。（对于幂律材料，因为各点的应力按比例增长，在应力空间中塑性应变的方向也一直保持不变。）

当所有的边界和载荷条件都能近似看作纯拉伸条件时，这种方法适用。

- 设载荷参数为 s^∞ ，有

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} = \frac{\sigma^\infty}{\sigma_0} \hat{\sigma}_{ij}, \quad \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} = \alpha \left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_0} \right)^n \hat{\varepsilon}_{ij}, \quad \frac{u_i}{\varepsilon_0 L} = \alpha \left(\frac{\sigma^\infty}{\sigma_0} \right)^n \hat{u}_i,$$

这里 L 是与裂纹尺寸相关的（如裂纹的长度）， $\hat{\sigma}_{ij}$ ， $\hat{\varepsilon}_{ij}$ 及 \hat{u}_i 是与 n 和几何尺寸无关的量。

- 通常规定无穷远处的应力与 s_0 之比 (s^∞/s_0) 为载荷参数 P ，规定一参考载荷（极限载荷 P_0 通常被应用），有以下形式

$$\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 L} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1} h_1, \quad \frac{\delta}{\alpha \varepsilon_0 L} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^n h_2, \quad \frac{\Delta_c}{\alpha \varepsilon_0 L} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^n h_3,$$

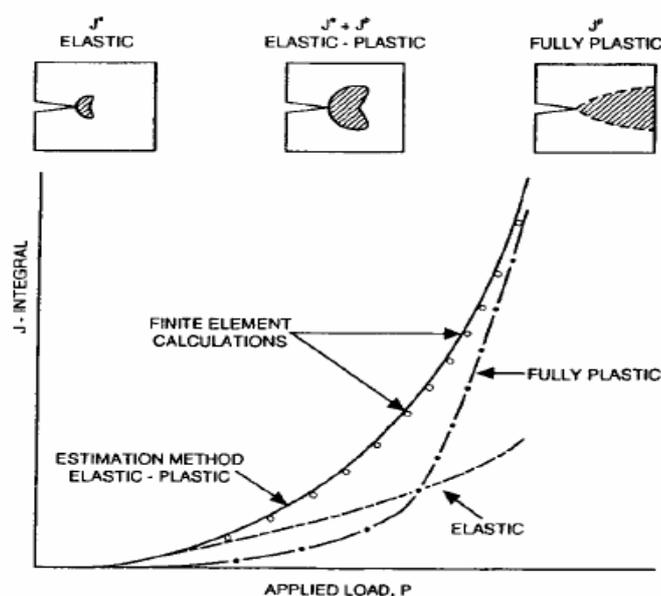
这里的 h_1 ， h_2 和 h_3 是与 n 和几何尺寸不相关的量， d 为裂纹尖端张开位移， Δ_c 表示为由于裂纹存在而产生的载荷线位移或旋转。

- 实际的弹-塑性材料可近似为 $\frac{x}{x_0} = \frac{s}{s_0} + a \left(\frac{s}{s_0} \right)^n$ ，这个结论整合了线弹性和全塑性结论。

和全塑性结论。

$$J = J^{el}(a^{el}) + J^{pl} \quad \delta = \delta^{el}(a^{el}) + \delta^{pl} \quad \Delta_c = \Delta_c(a^{el}) + \Delta_c^{pl},$$

这里 $a^{el} = a + \frac{1}{2} r_p^{est}$ ， r_p^{est} 为线弹性下塑性区大小的估计，它是与载荷相关的（但在高载情况下，全塑性为主导时，它与载荷的关系不是重要的）。



• 这种方法有用，但需要注意： h_i 的数值结果不容易获得。比如，除平面应力状态的所有情况，不可压缩可能产生网格自锁。一些已经刊发的结论证实了这一点，它们在大边缘的情况下差距很大。（一些在老版 EPRI 手册中的结论已经证明是不准确的）

在塑性手册中，关于管壁裂纹的一些几何尺寸的结果已经被列为表格。

• 因为 $J^{pl} \propto (P/P_0)^{n+1}$ ， P 或 P_0 很小的变化都会引起 J^{pl} 很大的变化。

与 h_i 的自身一致性检查一致，对于幂律材料，Parks 和其他人都建议进行一致性检查。

由 J 的定义

$$J = -\left. \frac{\partial PE}{\partial a} \right|_{Loads}$$

对于拉伸边界条件下的模型，作用载荷 P ，载荷点位移为 u

$$PE = \int_0^u P du - Pu = -\int_0^P u dP$$

还有

$$J = -\left. \frac{\partial PE}{\partial a} \right|_{Loads} = -\int_0^u \left. \frac{\partial P}{\partial a} \right|_u du = \int_0^P \left. \frac{\partial u}{\partial a} \right|_{Loads} dP$$

因为 $\partial u / \partial a|_{Loads} = \partial \Delta_c / \partial a|_{Loads}$ ，J 可以用 h_3 来计算：

$$\begin{aligned} J &= \alpha \varepsilon_0 \sigma_0 L \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1} h_1 \\ &= \frac{\alpha \varepsilon_0 P_0}{n+1} \left[\frac{\partial L}{\partial a} h_3 + L \frac{\partial h_3}{\partial a} - \frac{n L h_3}{P_0} \frac{dP_0}{da} \right] \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

这里的 J 表示纯幂律材料的 J

计算不同 a 下的 h_i 时，可以采取对比的方法。如果存在很大的不同，结论就是不可靠的，在结论被应用前一定要查明原因。

• 这种方法还依靠幂律材料的缩放有效性；并不是所有的弹-塑性材料都遵守幂律。关于材料数据的一些典型的值在塑性手册的第 13 章给出。

- 正如下表数据所示，幂律材料如相似的钢合金有很大的不同。

Material	Temp (°F)	α	n	σ_0 (ksi)	σ_u (ksi)	$E \times 10^6$ (psi)
A106 GR B	120	3.80	4.00	37.0	71.7	27.0
A106 GR C	550	2.51	4.20	27.1	60.0	26.0
A516 GR 70	550	2.51	4.20	27.1	60.0	26.0
Generic CS	550	2.51	4.20	27.1	60.0	26.0
TP304 SS	75	4.70	3.80	34.5	79.7	28.3
TP304 SS	70	9.16	3.20	45.3		30.0
TP304 SS	70	3.82	5.04	34.7		28.3
TP304 SS	550	11.0	6.90	33.7	50.5	25.5
TP304 SS	550	7.30	8.90	23.7	63.1	25.5
TP316 SS	550	12.00	4.80	29.6	58.1	25.5

第 5 讲 线弹性单元

目录

- 线弹性建模.....32
- 非线性.....37

5.1 线弹性建模

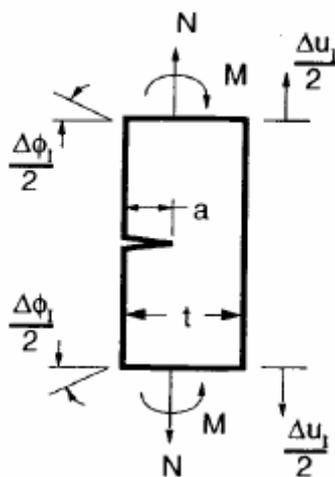
线弹性是为解决壳结构部分穿透裂纹模型问题而设计的。线弹性不一定仅应用于壳，虽然它通常如此。

线弹性应用——因为我们仅对刻画任意位置裂纹的一些重要参数（比如 J 或 K ）感兴趣，并且我们还知道：在不清楚裂纹前缘局部细节的情况下，这些参数也可以被估计。

线弹性的基础为用等效的分布力代替部分穿透的裂纹以匹配由于裂纹而引入结构的柔量。

弹性的刚度随着裂纹的长度 a 变化。

这个刚度是建立在匹配单边裂纹（single-edge notch: SEN）模型裂纹局部柔量的基础上的。



这意味着模型忽略了裂纹前缘的曲率：在裂纹前缘存在大曲率的地方，模拟结果是不准确的。

设单边裂纹模型受无限远处的拉力 N_I 和弯矩 M_I 作用， Δu_I 和 $\Delta \Phi_I$ 表示为

裂纹前缘某点处随之变化所产生的位移和转角。在壳模型中，这些体现在横跨面裂纹时位移和转角的不连续。

设广义力 $Q_1 = N_I$ 及 $Q_2 = M_I$ ，设附加广义位移 $q_1 = \Delta u_I$ 及 $q_2 = \Delta \Phi_I$ 。

因为应力强度因子随载荷线性变化，所以有

$$K_I = k_1 N_I + k_2 M_I = k_i Q_i$$

这里重复的下标 i 表示让其取 1、2 遍历求和。这里 $k_i = k_i(a, t)$ ，它是裂纹长度 a 和模型厚度 t 的函数（它是单边裂纹模型在无穷远处受单位拉力或弯矩下的应力强度因子）。

单边裂纹模型的余能为

$$\Omega_C = \frac{1}{2} Q_i C_{ij} Q_j$$

这里 $C_{ij}(a, t)$ 为裂纹模型的柔度， $q_i = C_{ij} Q_j$ ，我们知道应力强度因子与裂纹每扩展单位长度的能量释放率有关，根据下式

$$\frac{K_I^2}{E'} = G = \left. \frac{\partial \Omega_C}{\partial a} \right|_Q$$

有

$$\frac{K_I^2}{E'} = \frac{1}{2} Q_i \frac{\partial C_{ij}}{\partial a} Q_j$$

K_I^2 还有如下定义

$$K_I^2 = Q_i k_i k_j Q_j$$

对任意的 Q_i 和 Q_j ，定义柔度为

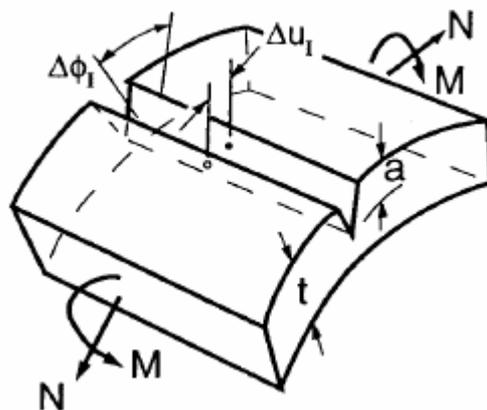
$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial a} = \frac{2}{E'} k_i k_j$$

所以

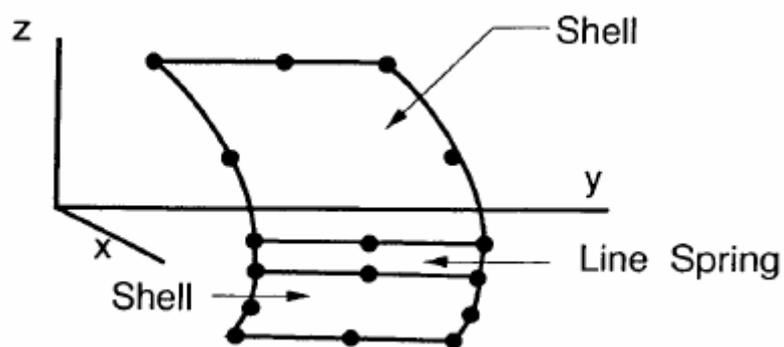
$$C_{ij} = \frac{2}{E'} \int_0^a k_i(s) k_j(s) ds$$

$[C_{ij}]^{-1}$ 即为有限元所需要的刚度。

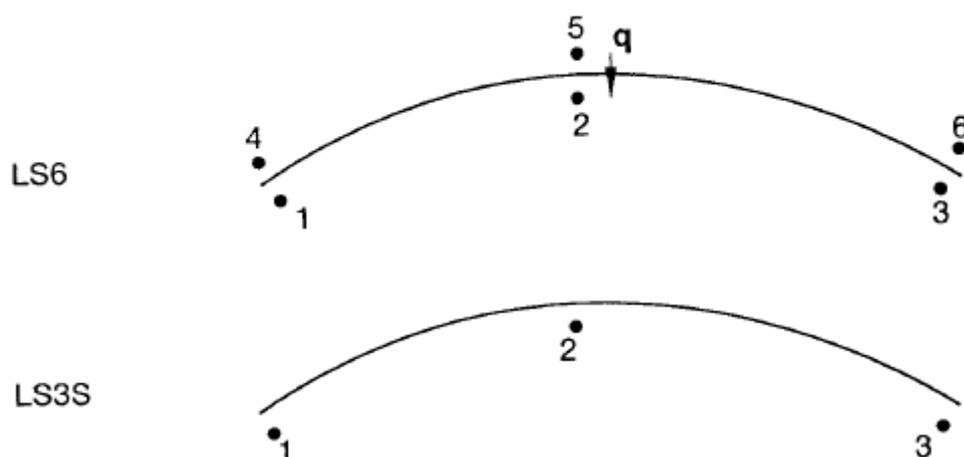
裂纹前缘处每单位长度线弹性单元的刚度与裂纹的深度有关, 分布的线弹性单元可以被建立, 节点的位移和转角随着力与弯矩而变。



这种单元被插入到壳单元网格中代表部分穿透的裂纹壳。



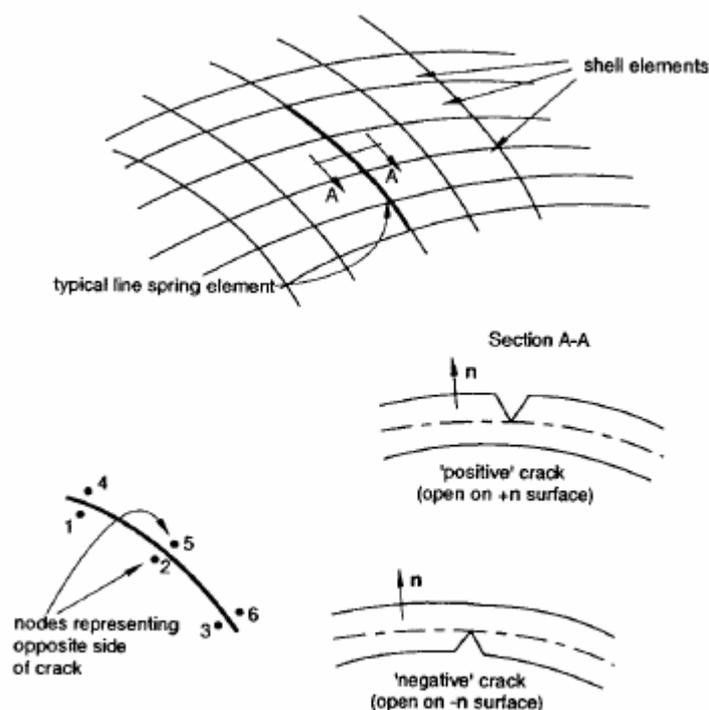
在 ABAQUS 中有两种线弹性单元: LS6 和 LS3S。



LS3S 单元假设线弹性单元的变形为对称变形——它应该被用于 I 型裂纹的情况。它是一个 3 节点单元，并具有对称的边界条件（这些对称的边界条件一定不能应用于 LS3S 单元的节点上）。

LS6 单元没有变形上的限制，它是一个 6 节点单元。它被编号更像边界元，而不是壳元。

裂纹可以出现在壳表面的任何一侧，在 *SURFACE FLAW 选项中应用 SIDE 参数来标定出现裂纹的一侧。



这些单元仅被用于小变形分析，线单元的应变定义如下：

E11: I 型裂纹的张开位移 $(u_B - u_A) \cdot q$

E22: I 型裂纹的张开角度 $(\Phi_B - \Phi_A) \cdot t$

以下应变仅存在于 LS6 单元：

E33: II 型裂纹厚度上的剪力 $(u_B - u_A) \cdot n$

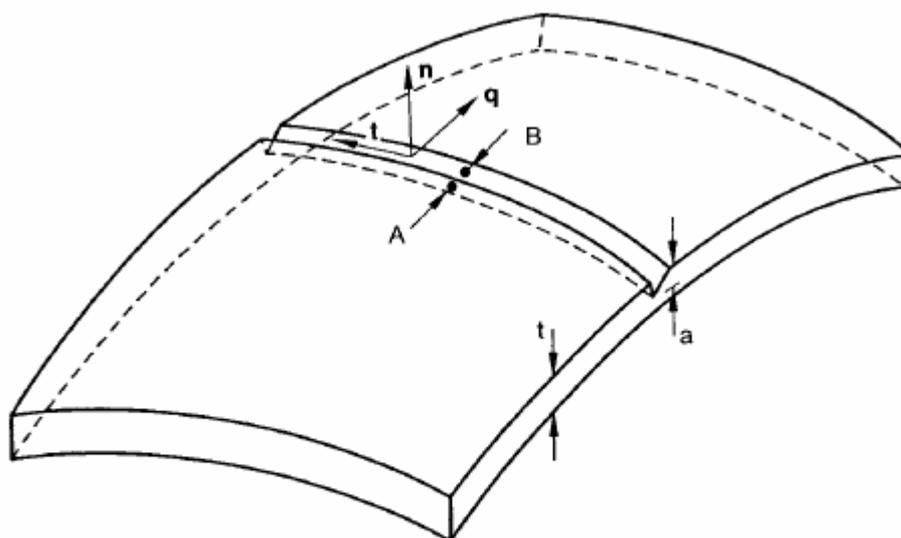
E12: II 型裂纹转角 $(\Phi_B - \Phi_A) \cdot n$

（这个应变没有作用）

E13: III 型裂纹反平面剪力 $(u_B - u_A) \cdot t$

E23: III 型裂纹张开角度 $(\Phi_B - \Phi_A) \cdot q$

在要求应力输出时，可输出相应的力和弯矩。

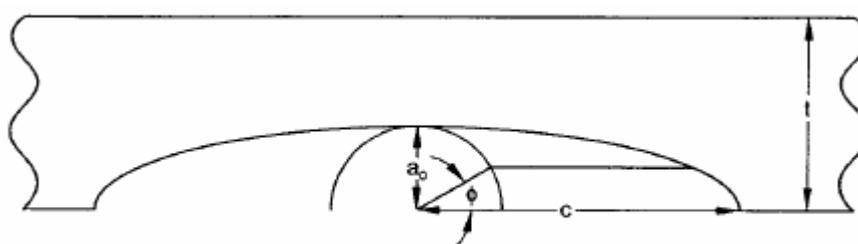


Notation for Line Spring Strains

单元类型为 LS3S 时， q 必须指向模型（背离对称面）； q 是由单元切线 t 按右手定则来确定的； t 是单元从 1 节点到 3 节点的正方向；法线 n 由给定的坐标系定义（或者用 *NORMAL 选项定义）。

线弹性单元的可以输出 J ， J^{el} 和 J^{pl} ，如果相关还可以输出 K_I ， K_{II} 和 K_{III} 。

在裂纹表面上可以考虑常压力。然而，它通过重叠来实现，也就是说当存在塑性时它不能被考虑。



a_0 = maximum flaw depth

$2c$ = surface length of crack

t = shell thickness

ϕ = angle on an inscribed circle for locating a point on the crack

Geometry of a Semi-Elliptical Flaw

一般来说表面裂纹被建模为半椭圆形。在 $0 < \Phi < 30^\circ$ 的范围内，变形不是二维的，近似线弹性不能被应用（除非被用于非常精准的分析）。然而，表面裂纹区域经常只含有很小的裂纹线。

如果 a/t 的比值表明裂纹不是很深或非常浅，当 a/c 趋近于 0 时，近似线弹性就比较准确了。

比如，一帶有表面裂纹的匀质板在拉伸载荷下，当 $a/c < 0.4$ 且 $\Phi > 30^\circ$ ， $0.2 < a/t < 0.8$ 时， K_I 的值在很小的百分比下变化。在弯矩作用下，当 $a/c=1$ 时 K_I 的值还很准确。然后对于大多数的裂纹深度，在弯曲变形时最大的应力强度因子出现在 $\Phi = 0$ ，因此除了作参数研究外此结论对断裂预测没有什么作用。

对于含有表面裂纹（内部裂纹）的圆柱体，在内部压力或离心载荷下，线弹性可以给出很好的结果，甚至是半圆形裂纹。

总的来说，线弹性的结果应该和其他详细的结果对照。如果线弹性单元的限制得到验证，他们可以非常有效的处理参数研究问题。

尽管线弹性单元是为解决壳问题而设计的，它也可以与体元结合。如体元的表面与线弹性单元相联，体元的位移必须被转换成转角（通常应用 *EQUATION 选项），并且位移部分穿过壳的厚度。

为了避免数值计算问题，当裂纹的深度趋近于 0 时，规定裂纹的最小深度为 $t/50$ 。

5.2 非线性弹性

ABAQUS 中也有非线性弹性单元，作为线弹性单元的延伸，它结合了弹性和全塑性（滑移线）的结论。

因为在混合加载模式下现在还没有理论能适用于弹-塑性线弹性单元，在 ABAQUS 中，弹-塑性线弹性模型的应用仅限于 I 型裂纹情况。

为了表述方便，定义广义应变向量如下：

$$q_1 = \Delta u_I$$

$$q_2 = \Delta \Phi_I$$

$$q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

定义广义力如下：

$$Q_1 = N_l$$

$$Q_2 = M_l$$

$$Q = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

单元的虚功定义为：

$$\delta W = \int_L Q \cdot \delta q dL$$

这里 L 为线弹性单元的长度。

线弹性所适用的材料为含有裂纹、各向同性、硬化塑性的单一材料。

广义应变率可分解为弹性和塑性

$$dq = dq^{el} + dq^{pl}$$

I 型条件下，弹性应变与广义力有如下关系

$$Q = D^{el} \cdot q^{el}$$

塑性应变率被定义为垂直于屈服面 F ：

$$dq^{pl} = d\bar{q}^{pl} \frac{\partial F}{\partial Q}$$

硬化是根据材料的应力-应变数据通过自变量的等价功来计算的。

裂纹每单位长度的塑性功为

$$dW^{pl} = Q \cdot dq^{pl}$$

还可以表示为

$$dW^{pl} = \iint \sigma_0 d\bar{\epsilon}^{pl} dz dy$$

这里 $\sigma_0(\bar{\epsilon}^{pl})$ 为材料单轴的应力-应变数据， z 表示在厚度方向上的位置， y 表示沿着单边裂纹模型的长度。

第二个表达式可以近似为

$$dW^{pl} = \sigma_0 d\bar{\epsilon}^{pl} (t-a)^2 f$$

这里 $\sigma_0(\bar{\epsilon}^{pl})$ 为材料在当量塑性应变 $\bar{\epsilon}^{pl}$ 下屈服应力的代表值, f 为引入的一个常量用来匹配模型的数值结果。Parks 和 White 在 1982 年假设 $f = 0.4$, 这个数值在 ABAQUS 中被用到。

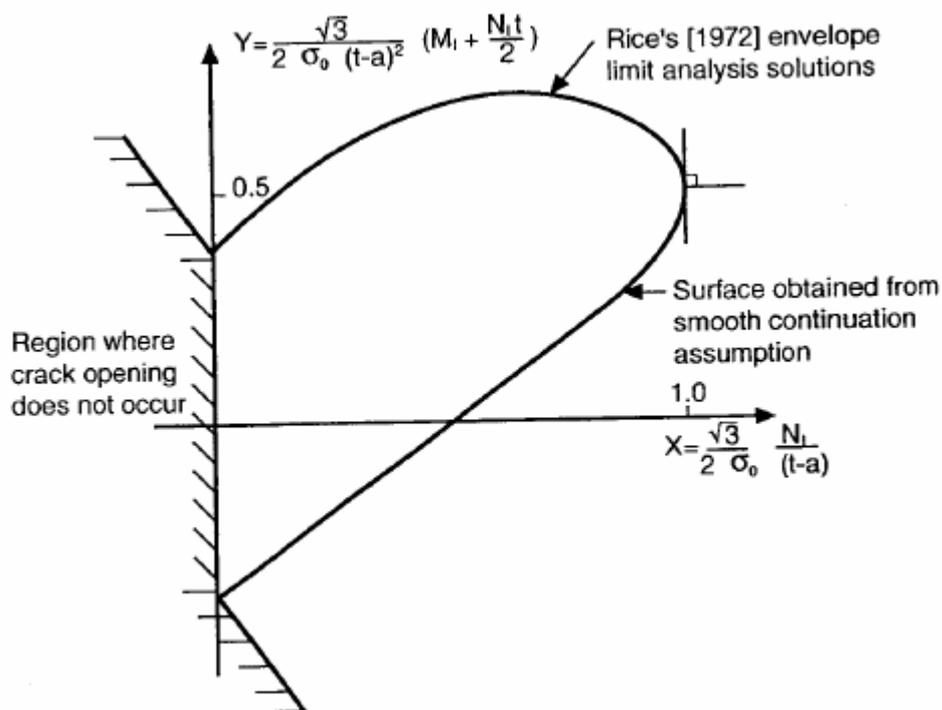
dW^{pl} 这两种定义在定义硬化时效果是一样的。

根据广义力变量 N_I 和 M_I 定义了屈服面, 定义

$$X = \frac{\sqrt{3}N_I}{2\sigma_0(t-a)^2}$$

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0(t-a)^2} \left(M_I + N_I \frac{t}{2} \right)$$

对于 $X \leq Y$, 屈服函数 F 作为极限分析结果的包络线; 对于 $X > Y$, 屈服面是极限分析数据的光滑延展。



为了得到线弹性单元的 J , J 被假设分为弹性和塑性两部分

$$j = j^{el} + j^{pl}$$

由线弹性有

$$j^{el} = \frac{2K_I \dot{K}_I}{E'} = \frac{2K_I}{E'} k_i \dot{Q}_i$$

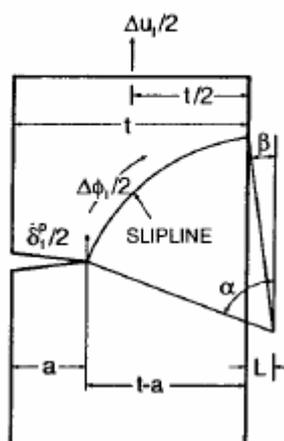
由滑移线的流动场有

$$j^{pl} = m \sigma_0 \dot{\delta}_t^{pl}$$

这里 m 为流动场的一个函数，受拉时范围~1，受弯时范围~2。

由滑移线场的运动学有

$$\dot{\delta}_t^{pl} = \dot{q}_1 + (t/2 - a) \dot{q}_2$$



因为没有人尝试修改 J 的弹性部分以适于塑性，弹性部分仅是近似的。 J 的值要准确，须要求 J^{el} 的值相对于 J^{pl} 的值要小。

唯一与线弹性单元相关的材料行为定义是 *ELASTIC 选项和 *PLASTIC 选项。塑性仅被用于 I 型情况，因此 LS3S 和 LS6 单元的弹-塑性分析被用于 I 型裂纹为主导时。

热应变的影响没有考虑。然而既然热应变经常在壳中发生，相关的结果可以被考虑。

第 6 讲 断裂力学：ABAQUS 应用

目录

• 裂尖单元.....	41
-二维情况裂尖奇异性建模.....	42
-三维情况裂尖奇异性建模.....	44
• 裂尖有限应变分析.....	45
• 围线积分的计算.....	47
• 不同裂尖网格的对比.....	50
• 撕开型模型的计算.....	55
• 围线积分计算时应用*NORMAL 选项.....	56
• 多裂纹尖端的 J 积分.....	57
• 壳中穿透裂纹.....	57
• 混合型断裂.....	60
• 裂纹扩展.....	62
• 弹-塑性材料的数值计算.....	70
• 关于断裂其它的 ABAQUS 应用.....	70

6.1 裂尖单元

- 裂纹尖端引起应力集中。
 - 在裂尖处应力和应变梯度都很大。
 - 临近裂尖区域的有限元网格一定要精细以求得准确地应力和应变。
- J 积分为能量尺度；即便是在很粗糙的网格下，准确地 J 积分的值也能够获得，虽然局部的应力和应变场不是非常的准确。
 - 在线弹性情况下这的确是事实。
 - 材料的非线性越是严重，裂尖区域的建模也应该越精细以求得可信的结果。
- 对于在小应变分析中的网格集中，一定要考虑裂尖处的奇异性。

-这个方法是允许有偏差的。

-在裂尖区域考虑奇异性所获得的 J 积分的值比不考虑奇异性更准确。

-考虑裂尖奇异性后应力和应变场会模拟的更准确。

在小应变分析中（几何非线性没有在*STEP 选项中应用），应变的奇异性为：

-线弹性 $\epsilon \propto r^{-1/2}$

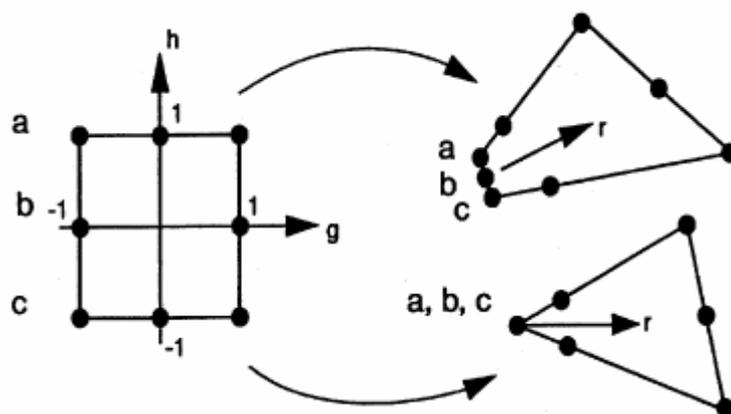
-完全塑性 $\epsilon \propto r^{-1}$

-幂律硬化 $\epsilon \propto r^{-\frac{n}{n+1}}$

6.1.1 二维情况裂尖奇异性建模

• 倒塌 8 节点等参元的一边（由节点 a、b、c 组成），使这三个点重合与裂尖点。

• 把两侧边的中间节点移动到靠近裂尖的 1/4 分点位置处。



$$\epsilon \rightarrow \frac{A}{r} + \frac{B}{r^{1/2}} \quad \text{as } r \rightarrow 0$$

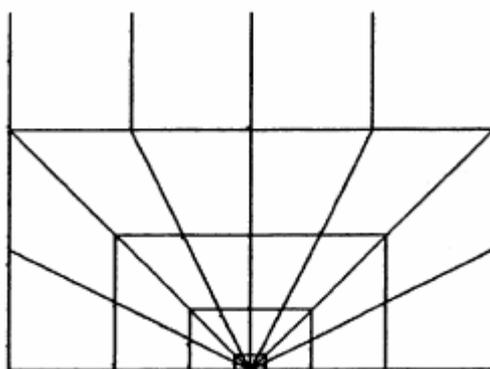
-如果节点 a、b 和 c 通过在联接矩阵（组成单元的节点组）中标定为相同的节点号约束在一起，或者通过*EQUATION 或*MPC 选项把它们束缚在一起，则 A=0。应力和应变满足平方根（1/2）奇异性（适用于线弹性情况）。

-如果节点 a、b 和 c 可以独立自由的移动，应变的奇异性适合全塑性情况。

• 对于介于线弹性和全塑性之间的材料（大多数金属）而言，如果其正确的奇异性不能应用，使用比正确奇异性强的奇异性为好。在数值上会强迫奇异性的系数会非常小。

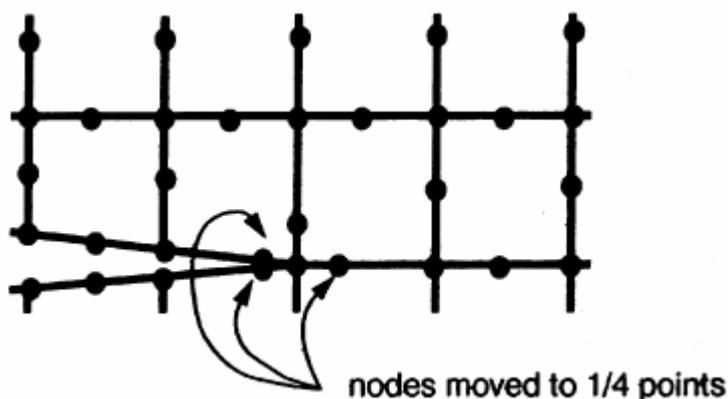
• 应变的角独立性在这些奇异元中不能模拟。

- 在裂尖处要建有足够多的单元。要取得合理的结果，裂尖处单元的夹角要在 10° （准确）到 20° （比较准确）之间。



- 非线性材料通常需要更精细的网格。

• 如果单元的一侧没有倒塌，把中间节点移动到靠近裂尖的 1/4 分点处（如下图所示），应变在单元的这个侧边上满足平方根奇异性，但在单元内部不满足。这种建模的效果比没有奇异性要好，但没有倒塌的单元好。



• 倒塌一阶四边形单元一侧的独立点，则

$$\epsilon \rightarrow \frac{B}{r} \quad \text{as } r \rightarrow 0$$

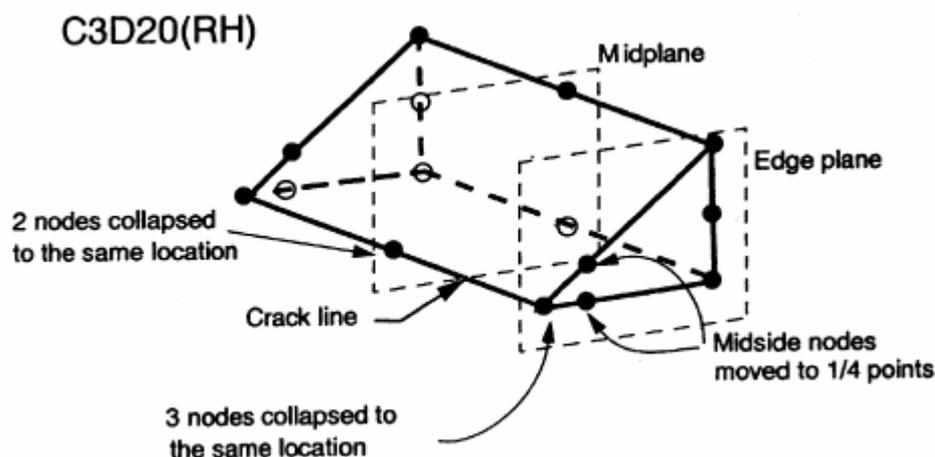
• 在 ABAQUS 中以下的二维单元可以用于奇异应变和 J 积分的运算：

- 二阶四边形平面应变单元、平面应力单元和轴对称单元。

- 一阶四边形平面应变单元，平面应力单元，轴对称单元和不调和单元。

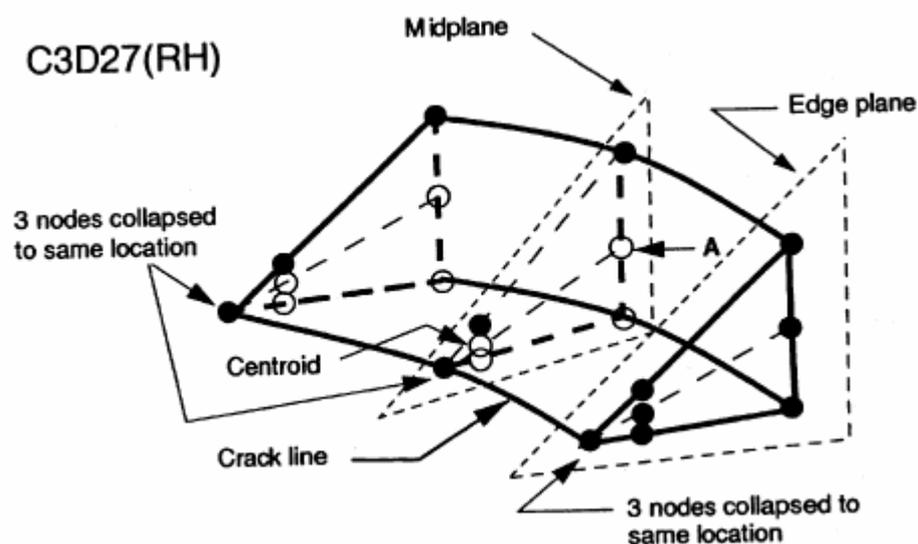
6.1.2 三维情况裂尖奇异性建模

20个节点和27个节点的六面体元（brick）可以倒塌一个面创建奇异场。



- 在端面（Edge plane）上：
 - 如果倒塌面的三个节点可以独立地移置（在联接矩阵中用不同的节点号来表示）而且中间节点保持不动， $x \propto r^{-1}$ 。
 - 如果倒塌面的三个节点可以独立地移置而且中间节点移动到 1/4 分点处， $x \propto Ar^{-1} + Br^{-1/2}$ 。
 - 如果倒塌面的三个节点被束缚在同一点（通过联接矩阵中使用相同的节点号或应用 MPC-type TIE 选项或*EQUATION 选项来实现）而且中间节点移动到 1/4 分点处， $x \propto r^{-1/2}$ 。
- 在 20 个节点六面体元的中面（Midplane）上：
 - 如果倒塌面的二个节点可以独立地移置， $x \propto r^{-1}$ 。
 - 如果倒塌面的二个节点被束缚在一点， $x \propto r^0$ 。
 - 无论在何种情况下在中面的奇异性都与在端面时不同，这将导致裂尖场沿着裂尖线出现局部的不稳定。

- 在 27 个节点六面体元的中面上（所有额外的节点都在单元面上）：



-如果所有中面的节点和形心点都被考虑而且把中间节点移到 1/4 分点处，端面和中面的奇异性是一样的。

-ABAQUS 不允许质心点离开单元的几何形心。因此在中面的行为将与在端面时不一样，裂纹场沿着裂纹线将出现不稳定。

-中面上标记为“A”的节点经常被略去；这将使在端面和中面上采用不同的插值函数，从而进一步导致了裂尖场的不稳定。

- 对于所有单元，最好考虑它的奇异性，如果单元的边是直的。
- 三维情况下垂直于裂尖线的面应该是扁平的，如果它们不平，当中间节点移到 1/4 分点处时，单元的雅克比矩阵在一些积分点处将是负的。

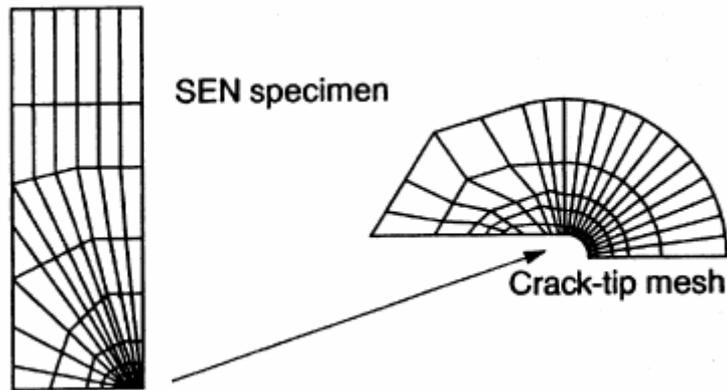
-可以通过把中间节点从 1/4 分点处向中点方向移动一点距离来修正，至于移动多少不是重要的。

6.2 裂尖有限应变分析

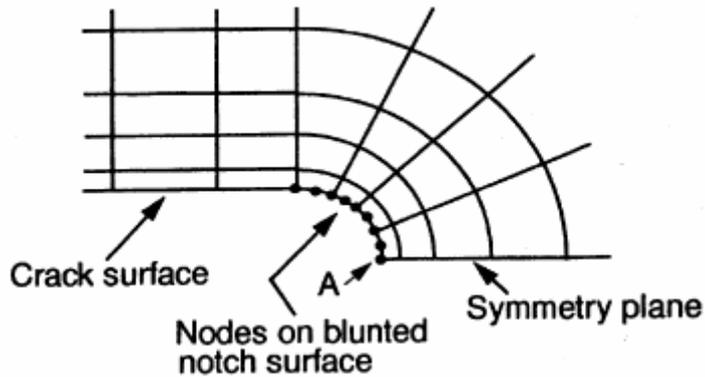
- 有限应变分析（当存在几何非线性）：
 - 奇异元不能被应用（一般来说）。
 - 如果裂尖区域的结果需要很详细，裂尖区域的网格需要划分的足够精细以模拟非常高的应变梯度。即便只是求解 J 积分，裂尖区域的变形是主要的结论，裂尖区域的网格也要划分的足够精细以避免数值问题。

-实际上，裂尖区域不是十分尖而经常被建模为比较钝的凹槽，其半径 $r \approx 10^{-3} r_p$ 。凹槽也应该足够得小以使模型在值得注意的载荷下变形后的形状不再依靠原几何。一般来说，实际上凹槽的变形要高于其四倍的原始半径。

-凹槽周围单元的尺寸必须为凹槽尖端半径的 1/10 左右。



- 凹槽钝边面上的所有节点定义了裂尖



-若想使 J 积分和 C_I 积分与路径无关，裂纹面必须相互平行（或平行于对称面），除非 *NORMAL 选项被应用（参看围线积分计算中应用 *NORMAL）。

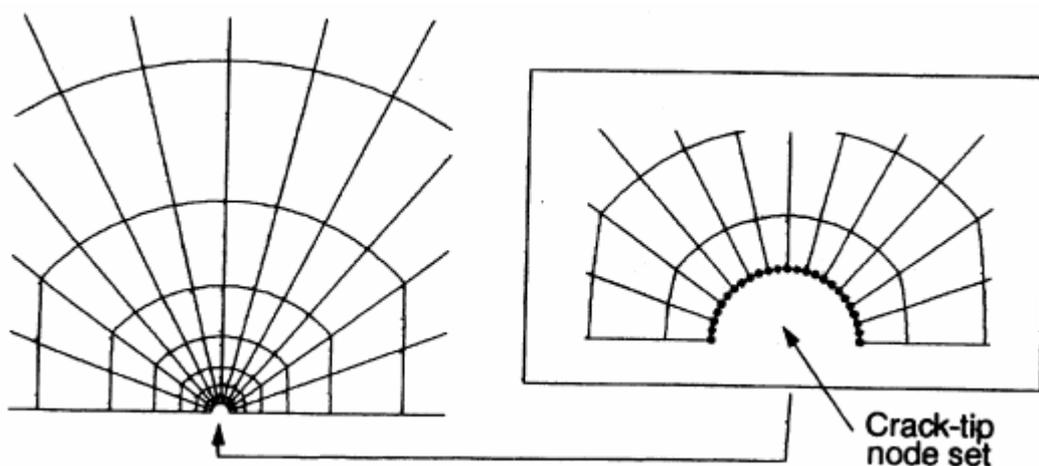
-所有钝边面上的节点必须被加入裂尖节点组，如果凹槽半径收缩至零，所有将进入裂尖区域的节点也应该被加入裂尖节点组。

-如果网格很粗糙将使距裂尖最近的积分点离裂尖很远，如果裂纹被建模为尖裂纹足够准确地 J 积分的值仍可以得到，不要应用奇异元。裂尖有限-应变区域的大多数细节（准确地应力和应变）将丢失。这已经被成功地用于疲劳模型的裂纹建模（应用超弹性）；使用者必须判断这是

否为适合的技术。

-在处理超弹性问题时，几何非线性经常使用，因此如何处理裂尖区域是一个值得考虑的问题。

•小应变分析但包含有限旋转的情况，如微薄结构的弯曲，在裂尖区域一个小的基准孔（keyhole）应该被建立。



-定义裂尖计算围线积分的节点组要包含所有基准孔的节点。单元不能为奇异元。

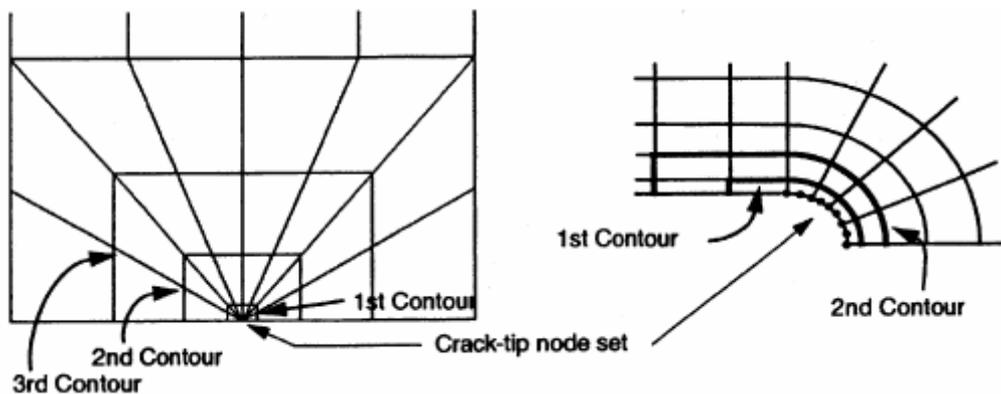
6.3 围线积分的计算

***CONTOUR INTEGRAL, CONTOURS= n , TYPE= J , SYMM, NORMAL, OUTPUT, FREQUENCY**

• 参数:

-CONTOURS= n

确定需要计算的围线积分的次数。



第一个积分域必须为从一个裂纹面到另一个裂纹面（或到对称面）的单元组成的环域。

下一个积分域为包围前一个积分域的单层单元环域。ABAQUS 可以自动地计算积分域。

裂纹在稳定扩展时的 J 积分和 C_I 积分是路径（域）无关的。第一层围线内（紧挨着裂尖的域）应力和应变值是不准确的，也就是说由第一层围线所计算的值应该被忽略。

-SYMM

当裂纹依赖对称面或仅一半结构被建模时使用。所计算的围线积分的结果要乘以 2。

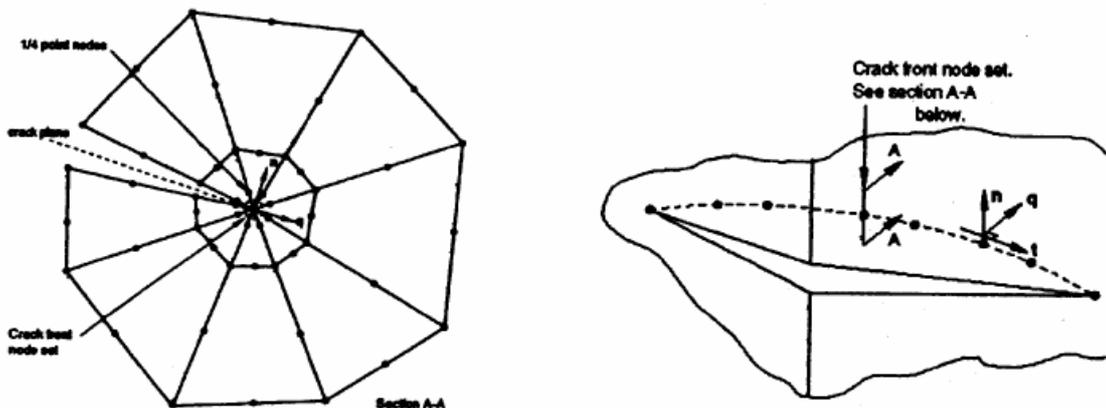
这个参数仅能被用于 I 型裂纹。

-TYPE=J or C or K FACTORS or T-STRESS

用 J 表示输出 J 积分，C 表示输出 C_I 积分，K FACTORS 表示输出应力强度因子，T-STRESS 表示输出计算的 T 应力。

-NORMAL

当裂纹面的法线需要确定时应用，并且裂纹的扩展方向 q 也必须给出。



-当 NORMAL 参数被使用时

只有在平面裂纹情况才能获得 J 积分的值。

从一个端到另一个端点，要按照节点组的顺序来定义裂纹前缘的节点组，不要丢掉裂纹线上的任何一个节点。

-当 NORMAL 参数被省略时

裂尖节点组命名，裂纹扩展方向 q 。

重复每个节点组定义裂纹前缘。数据必须从一端的一个节点组开始，
按着裂纹线上节点的顺序，直到裂纹的另一端为止。

这种格式允许非平面的裂纹被分析。

-OUTPUT

如果这个参数被省略，围线积分的值将被打印在数据文件中（.dat）而不是保存在结果文件中（.fil）。

设 OUTPUT=FILE，则围线积分的值将被保存在结果文件中。

设 OUTPUT=BOTH，则围线积分的值将同时被保存在数据文件和结果文件中。

这个值也将被写入数据库文件中（.odb），除非 FREQUENCY 参数在 *OUTPUT，HISTORY 选项或 *CONTOUR INTEGRAL 选项中被设置为零。

- 输出的频率由 *OUTPUT，HISTORY 选项或 *CONTOUR INTEGRAL 选项中频率值的大者决定。

-FREQUENCY

这个参数为增量步的输出频率，默认值为 FREQUENCY=1。

设 FREQUENCY=0 来抑制输出。

- 围线积分计算中可以施加的载荷：

- 热载荷

- 连续单元的裂纹面载荷，包括用户子程序定义的载荷

- 相同的体力

- 施加在一些连续单元上的离心载荷

- 围线积分计算中不能施加的载荷：

- 分布载荷，在分析时会产生错误信息

- 与集中力相关的载荷不允许施加，改变网格划分，划分为更小的单元，在单元上施加一个分量载荷

- 与接触力相关的载荷不允许施加

6.4 不同裂尖网格的对比

在无限空间中的便士型裂纹

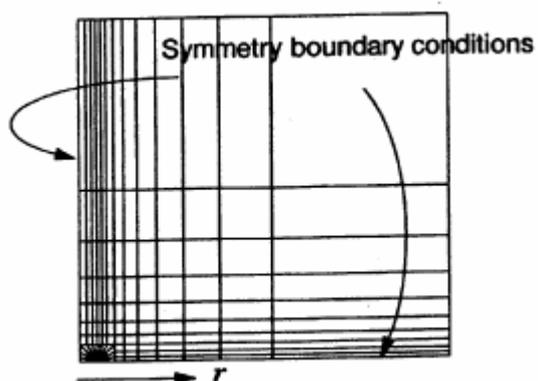
模型特征

- 网格扩展到与裂纹足够远的地方，因此有限边界不会影响裂尖的结果。
- 便士型（圆片型）裂纹的半径为 1。
- 非均匀载荷： $p = Ar^n$ 。

不同网格的特征：

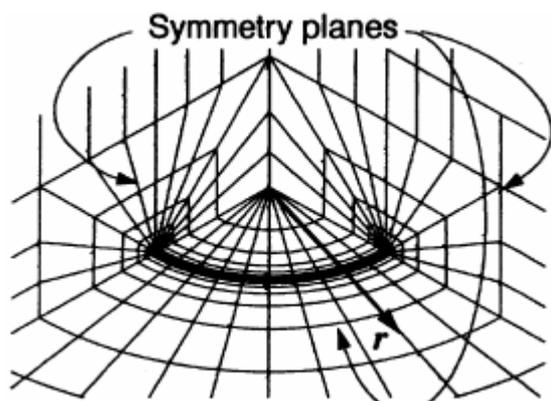
- 轴对称或三维
- 精细或粗糙的网格，应用*NFILL, SINGULAR 选项划分的网格（单元的大小与到奇异区距离的平方成正比）
- 有或没有 1/4 分点的单元
- 不同单元类型的应用
 - 一阶和二阶
 - 有或没有缩减积分

轴对称模型



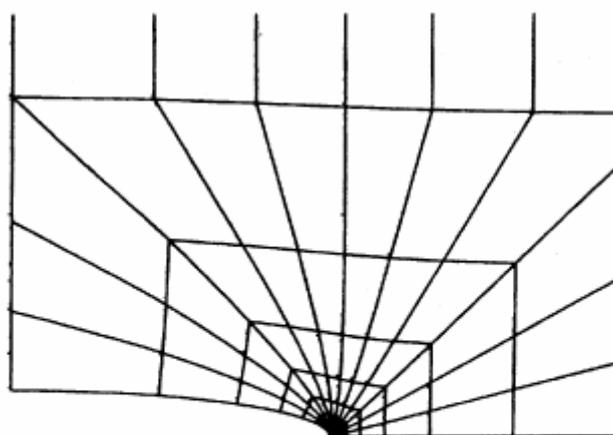
- 轴对称网格
- 线弹性
- 小应变
- 1700 个自由度

三维模型



- 三位网格
- 线弹性
- 小应变
- 37400 个自由度

- 在垂直于裂纹前缘的节点面上，网格与轴对称网格是相同的。



Deformed Crack Tip

DMAG = 250

- 四种不同类型的网格被用于裂尖区域。
 1. 精细的网格；单元没有中间点（1/4 分点）；垂直于裂纹线的裂尖单元长度=0.0004。
 2. 精细的网格；单元有中间点（1/4 分点）；垂直于裂纹线的裂尖单元长度=0.0004。
 3. 由*NFILL, SINGULAR 产生网格；垂直于裂纹线的裂尖单元长度=0.007。
 4. 粗糙的网格；单元没有中间点（1/4 分点）；垂直于裂纹线的裂尖单元长度=0.08。
- 在围绕裂纹的圆周方向（对称模型为180°）有 10 个单元。

- 从 $r=0$ 到裂纹线，在半径方向上有 12 个单元。

由没有中间点（1/4 分点）的网格所得的 J 积分（网格类型 1 和 4）

Loading	Analytical Result	3-D			Axisymmetric		
		C3D20		C3D8	CAX8		CAX4
		Coarse	Fine	Fine	Coarse	Fine	Fine
Uniform far field	.0579	.0574	.0580	.0621	.0573	.0579	.0628
Uniform crack face	.0579	.0574	.0580	.0621	.0573	.0579	.0628
Nonuniform crack face (n=1)	.0357	.0342	.0357	.0378	.0331	.0357	.0384
Nonuniform crack face (n=2)	.0257	.0225	.0257	.0269	.0246	.0257	.0272
Nonuniform crack face (n=3)	.0201	.0163	.0201	.0208	.0164	.0201	.0213

- n 的值越大，裂尖的网格要求越精细。
- 下表给出了应用不同的裂尖网格时 J 积分的变化，结果选取了端面（Edge）和中面（Midside）。
- 非均匀载荷时 $n=3$ 。
- 正确的结果为 2.01×10^{-2}
- 下表给出的 J 积分的值扩大了 100 倍。

由 *NFILL, SINGULAR 产生的网格（网格类型 3）

Contour	C3D27		C3D27R		C3D20		C3D20R		C3D8
	Edge	Midside	Edge	Midside	Edge	Midside	Edge	Midside	Edge
1	2.037	2.029	2.069	2.001	2.028	2.034	2.070	2.029	1.985
2	1.985	1.977	1.998	2.004	1.986	1.977	2.016	1.971	1.834
3	1.970	1.961	2.007	1.997	1.970	1.961	1.983	1.971	1.850
4	1.950	1.941	2.006	1.995	1.950	1.941	1.965	1.957	1.848
5	1.937	1.928	2.004	1.995	1.936	1.928	1.954	1.947	1.849

由 Bias 产生的网格，没有中间点（1/4 分点）（网格类型 1）

Contour	C3D27		C3D27R		C3D20		C3D20R		C3D8
	Edge	Midside	Edge	Midside	Edge	Midside	Edge	Midside	Edge
1	1.967	1.958	1.940	1.994	2.154	1.862	3.083	1.388	2.035
2	2.017	2.008	2.031	1.999	2.015	2.009	3.478	1.274	2.082
3	2.017	2.007	2.029	2.001	2.013	2.009	2.608	1.710	2.072
4	2.016	2.007	2.029	2.001	2.012	2.009	2.230	1.899	2.047
5	2.014	2.005	2.029	2.000	2.010	2.007	2.088	1.968	2.021

由 Bias 产生的网格，有中间点（1/4 分点）（网格类型 2）

Contour	C3D27		C3D27R		C3D20		C3D20R		C3D8
	Edge	Midside	Edge	Midside	Edge	Midside	Edge	Midside	Edge
1	2.017	2.008	2.027	2.000	1.886	2.063	2.983	1.515	2.035
2	2.017	2.008	2.027	2.002	2.015	2.008	3.425	1.300	2.082
3	2.017	2.008	2.027	2.002	2.013	2.009	2.601	1.714	2.072
4	2.016	2.007	2.027	2.002	2.012	2.009	2.230	1.900	2.047
5	2.015	2.005	2.027	2.002	2.010	2.007	2.088	1.969	2.021

结论

- 除了 C3D20R 单元，沿着裂尖由很强的 bias 划分的网格能获得很准确的结果。

-对于 C3D20R 单元，如果裂尖的单元太小将会发生很严重的错误。既然 C3D20R 单元经常被应用在裂尖网格，所以知道这一点是很重要的。

-当应用适度的 bias 划分网格时 C3D20R 单元可以给出很合理的结果。

- 端面和中面所计算的 J 积分的值有些偏差。

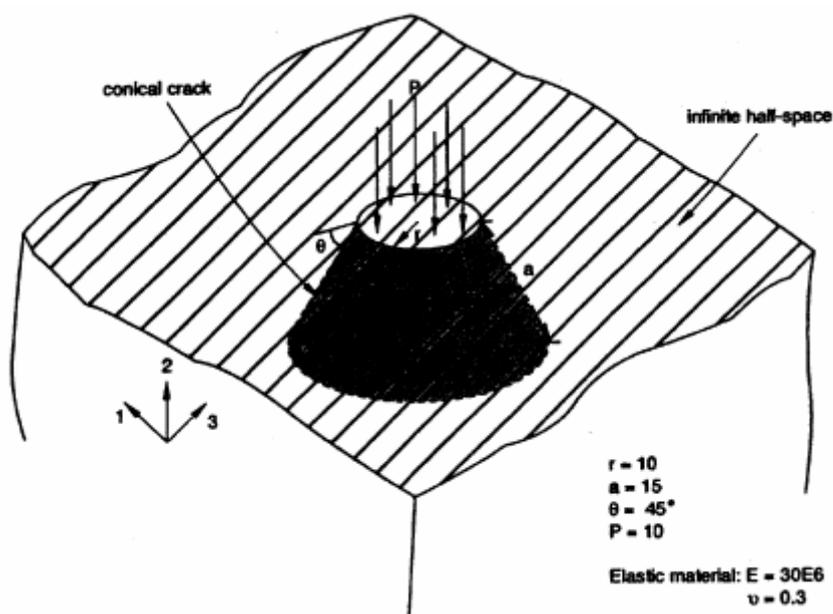
-一般情况下误差都会小于 1%，但网格和模拟的问题相关。

-对于非均匀变形的典型问题，这种偏差只在第一个围线内很明显（可能也有第 2 个围线）。

- 在较粗糙的单元中考虑奇异性很有好处。

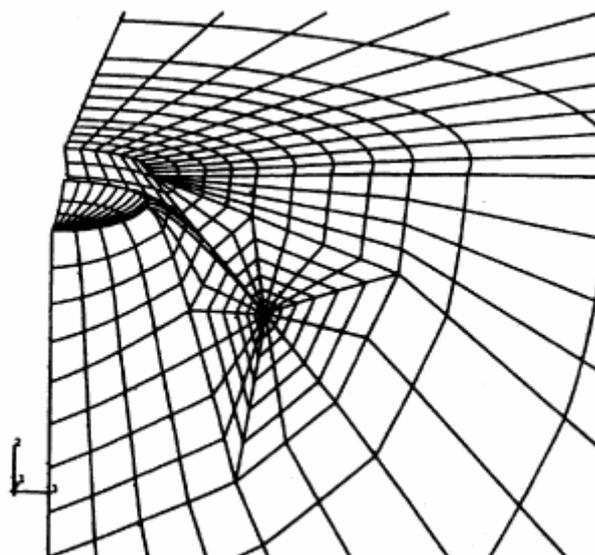
半空间中的圆锥型裂纹

沿着裂纹前缘的每一个节点组，裂纹扩展的方向都是不同的。



三维模型

- 全三维模型变形后形状。



- 三维网格下 J 积分值

-作为对比，把轴对称结果当作正确结果

-即便围绕对称轴的三维网格很粗糙，结果也认为是正确的，误差仅为 2%。

		Contour					
		1	2	3	4	5	6
Axisymmetric		1.3605	1.3316	1.3363	1.3372	1.3375	1.3377
Three Dimensions	Corner Nodes	1.3615	1.3314	1.3355	1.3356	1.3352	1.3345
	Midside Nodes	1.3603	1.3316	1.3367	1.3380	1.3387	1.3394

分模型

因为三维模型太大（2800 个波峰的均方根），大多数工作站都不能计算。我们可以应用分模型来创建 2 种网格，这是非常小的。

- 在图 6-1 所示的阴影部分被替代为一个环状单元，分模型为阴影部分。
- 总体模型和分模型都有 1700 个波峰的均方根。

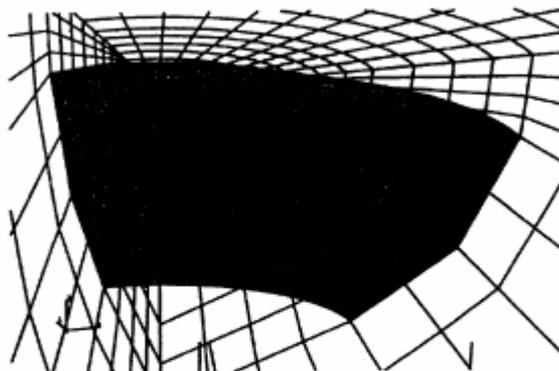


Figure 6-1. Three-Dimensional Global Model with Submodel Overlaid

• 分模型的 J 积分值:

-因为其粗糙的网格，总体模型仅能计算一层围线积分。

-分模型和总体模型的偏差导致结果的不准确，其原因为总体模型粗糙的网格所致。J 积分的误差为 4%。

		Contour					
		1	2	3	4	5	6
Global	Corner Nodes	.6933					
	Midside Nodes	1.1602					
Submodel	Corner Nodes	1.3921	1.3614	1.3658	1.3661	1.3658	1.3653
	Midside Nodes	1.3905	1.3616	1.3670	1.3684	1.3693	1.3701

6.5 撕开型模型的计算

撕开型模型不能直接计算。从其定义，

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{E \partial J}{\sigma_0^2 \partial a} \Big|_{\text{constant load}} \\
 &= \frac{E (J|_{a+\Delta a} - J|_a)}{\sigma_0^2 \Delta a} \Big|_{\text{constant load}}
 \end{aligned}$$

假设 Δa 非常小，如果 Δa 为典型裂纹长度的 1%，数值的差异可以给出合理

的结果，因为数值的完美化，更小的差异将导致不正确的结果。

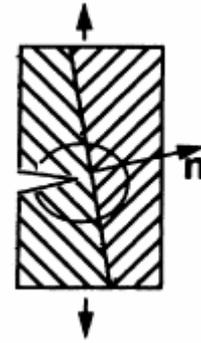
计算 $J|_{a+\Delta a}$ 和 $J|_a$ 须从无载结构开始单独分析。

6.6 围线积分计算时应用 *NORMAL 选项

材料不连续

在计算围线积分的域内，J 积分的路径无关要求材料在裂纹扩展时为各向同性。

如果在裂纹前方处材料不连续，应用 *NORMAL 选项可以更正 J 积分的计算，使之在不连续的域内仍然是路径无关的。

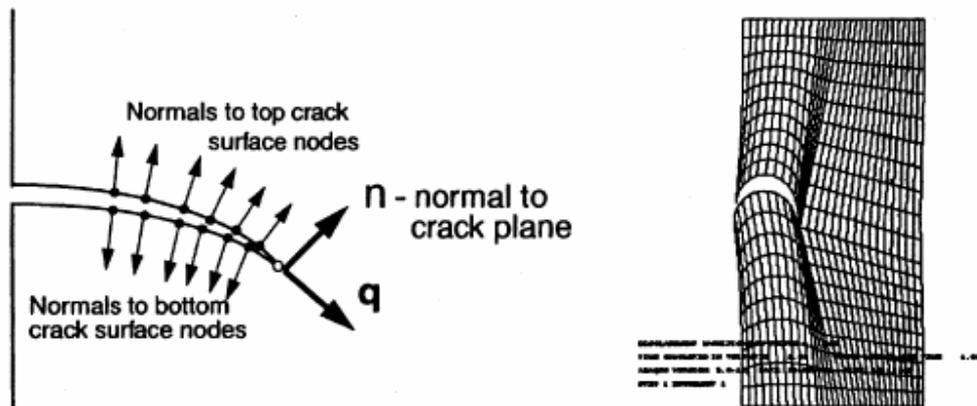


出现在围线积分域内材料不连续区的所有节点都要标定其法线方向，法线为材料不连续线的法线。

细节介绍看第 3 讲。

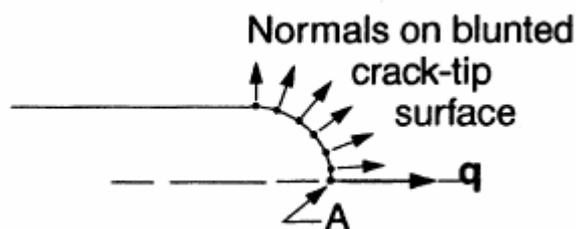
弯曲的裂纹和钝凹槽

如果裂纹面是弯曲的，*NORMAL 选项必须被用于裂纹面位于积分域内的节点。在裂尖处 *NORMAL 选项必须被应用。



Contour Number	1	2	3	4	5	6	7	8	9
J without Normals	3.074	3.109	3.307	3.293	3.210	2.906	2.548	2.434	2.424
J with Normals	3.074	3.109	3.307	3.293	3.257	3.306	3.299	3.307	3.307

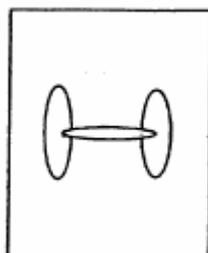
除非只有节点 A 需要被标定在 J 积分裂尖节点组，否则，其它处于凹槽钝边面上的节点都要标定其法线方向，并将这些节点都加入裂尖节点组。后者能取得更好的结果。



6.7 多裂纹尖端的 J 积分

通过重复应用*CONTOUR INTEGRAL 选项，ABAQUS 可以计算多裂尖处的 J (或 C_I) 积分。

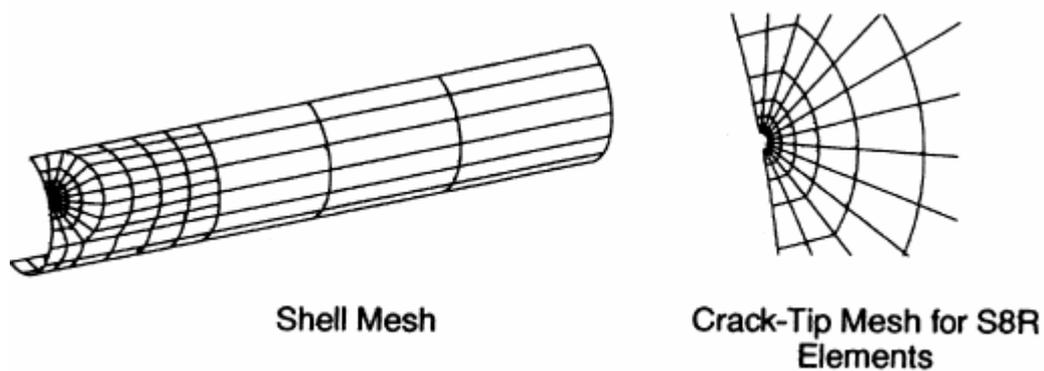
如果一个裂尖的积分域包含了另一个裂尖，那么 J 积分的值将为 0。



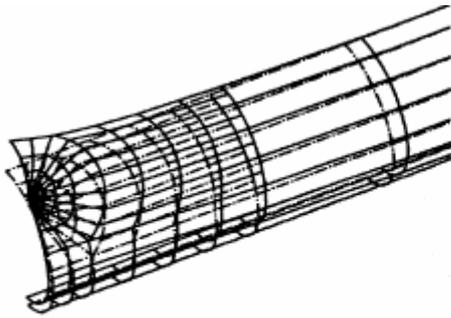
6.8 壳中穿透裂纹

如果要输出围线积分一定要用四边形壳单元。

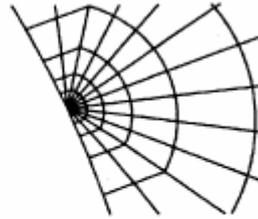
S8R 和 S4R 单元的边不能倒塌。如果为聚焦的网格，裂尖处必须被建模为基准孔 (keyhole), 它的半径与壳的其他尺寸相比很小。



S8R5 单元可以倒塌，其中间点可以移动到 1/4 分点处。



Deformed Shape—Axial Loading



Crack-Tip Mesh for S8R5 Elements

q 向量必须位于壳面内，否则*NORMAL 选项必须被标定在围线积分域内所有的节点上。

在壳网格中，计算围线积分时没有考虑机械载荷的影响，建议工作区如下：

1. 应用载荷对围线积分的影响是域大小的函数，通过把围线积分表图为位置的函数，可以反推到裂尖，可以获得关于围线积分值的一个合理估计。

三种网格对比结果：

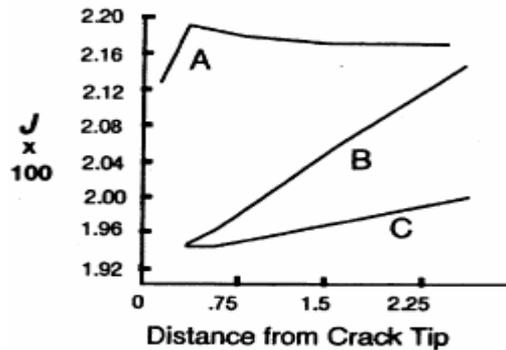
- A: 应用 S8R5 单元的奇异网格。
- B: 应用 S8R 单元的基准孔网格 (r=0.147)。
- C: 应用 S8R5 单元的基准孔网格 (r=0.147)。

载荷为内部压力，有端盖。

分析结果： $J = 1.725 \times 10^{-2}$ 。

对于裂尖基准孔处网格，最小误差为 11%。

总的来说，应用奇异的壳单元没有什么作用。



2. 如果要求解 J 积分，它可以从数值差得到：

$$J = - \left. \frac{\partial PE}{\partial a} \right|_{\text{Constant Load}}$$

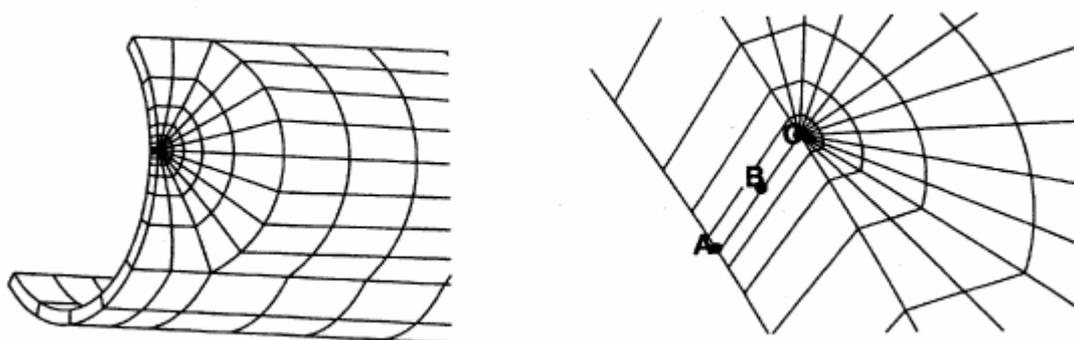
$$= - \left. \frac{PE|_{a+\Delta a} - PE|_a}{\Delta a} \right|_{\text{Constant Load}}$$

PE 可以从两个独立的分析得到，它们的裂纹长度相差为 Δa 。

在数据 (.dat) 文件中 PE 的值一般都不是很大，所以不能进行上述计算，PE 的值应该从结果 (.fil) 文件中读取。

一个相似的技术可以被用于求得长时间的 C_I 积分。

3. 如果主要是膜的变形，壳可以用单层的 20 个节点六面体元 (birck) 模拟，因为这种单元包含有利于围线积分的载荷。



-为了求得准确的结果，在半径方向上应多于一个单元。J 积分的值将与路径相关除非采用平均法。

-设想 J 为每单位长度的力，如果 J 积分的值为当量的节点力，平均算法如下：

$$J|_{shell} = \frac{J_A + 4J_B + J_C}{6}$$

-应用一层 C3D20R 单元模拟得到 J 积分值对比（受内压的封闭管）

CONTOUR	J Values × 100					
	1	2	3	4	5	6
At Node A	2.274	2.362	2.375	2.417	2.487	2.539
At Node B	1.718	1.786	1.780	1.759	1.725	1.699
At Node C	1.643	1.722	1.739	1.777	1.844	1.894
Averaged	1.798	1.872	1.872	1.872	1.872	1.872

-对于厚壁管而言，当把压力作用于管的内表面和中间面时，偏差是很大的。

-在这种情况下，偏差为 $r_{midsurface} / r_{inner} = 1.05$ 。既然 J 与载荷的平方成正比，J 积分的差距差不多为 10%。

- 相同的管在轴向载荷下的结果（远处端部位移 0.1）：

CONTOUR	J Values × 10000					
	1	2	3	4	5	6
S8R with Keyhole	6.322	6.365	6.460	6.629	6.854	6.981
S8R5 with Focused Mesh	5.845	6.082	6.101	6.126	6.154	6.142
S8R5 with Keyhole	6.314	6.308	6.325	6.352	6.381	6.370
Averaged C3D20R	5.862	6.102	6.104	6.103	6.102	6.101

-分析的结果： $J = 7.043 \times 10^4$ 。

-误差处于 10-15%。管的厚度与管的平均半径之比为 1:10.5，这是比薄壁壳更典型的薄壁管结构。

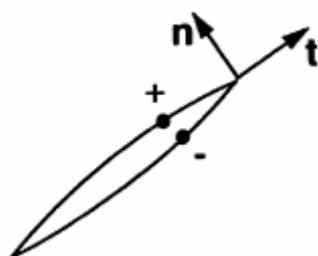
-在 ABAQUS 中，计算壳的 J 积分时，仅平面内的应力和应变条件被考虑，横向剪切被忽略。

-在结果被接受之前要进行网格集中研究。

6.9 混合型断裂

- J 积分或 C_I 积分不区分载荷的类型。
- 在弹性情况下可以采用以下方法：

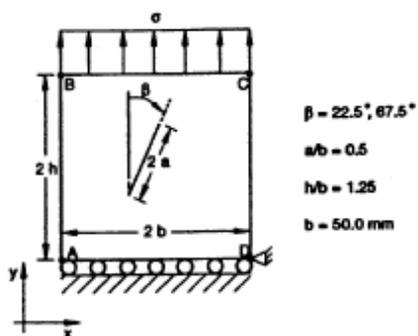
1. 应用裂纹面的位移。



让 $R = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{t \cdot (u^+ - u^-)}{n \cdot (u^+ - u^-)}$ ，由渐进应力强度

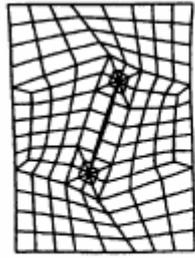
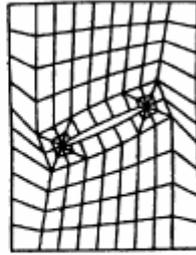
因子场有：

$$K_I = \sqrt{\frac{JE}{(1+R^2)(1-\nu^2)}}, \quad K_{II} = RK_I$$



β	Element Type	$\frac{K_I}{K_0}$	$\frac{K_{II}}{K_0}$
22.5°	CPE8	0.185 (-2.9%)	0.405 (+0.1%)
22.5°	CPE8R	0.184 (-2.9%)	0.407 (+.4%)
67.5°	CPE8	1.035 (+0.2%)	0.364 (-1.7%)
67.5°	CPE8R	1.038 (+0.8%)	0.368 (-0.5%)

$$K_0 = \sigma \sqrt{\pi a}$$

 $\beta = 22.5^\circ$  $\beta = 67.5^\circ$

这种方法在二维情况可以给出合理的结果，可以推广到三维情况（原则上）。

应用平均的 J 积分值（第一个积分域除外）。应用平均的 R 值（裂尖后第一对节点除外）。

2. 应用互作用积分：

应用原理为线性叠加和互易定理。

设 $K_a, a = 1, 2 \text{ or } 3$ 为实际载荷的应力强度因子。考虑一个辅助的场，它被定义为所关心模式下的平面应变应力强度因子场。也就是说，如果要获得 I 型应力强度因子，这个场为

$$\sigma_{ij}^{aux} = \frac{k_1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^1(\theta)$$

这里 $a = 1$ ， $f_{ij}^1(q)$ 为已知（第 1 讲）。

实际情况的 J 积分要看构成（一般用于各向异性情况）：

$$J = K_1 B_{11}^{-1} K_1 + 2K_1 B_{12}^{-1} K_2 + 2K_1 B_{13}^{-1} K_3 + \text{terms not involving } K_1,$$

这里 B_{ij} 仅与材料属性有关。将实际载荷叠加 k_1 场计算 J 积分的值：

$$J_{tot}^1 = (K_1 + k_1) B_{11}^{-1} (K_1 + k_1) + 2(K_1 + k_1) B_{12}^{-1} K_2 + 2(K_1 + k_1) B_{13}^{-1} K_3 + \text{terms not involving } K_1 \text{ or } k_1$$

辅助场的 J 积分：

$$J_{aux}^1 = k_1 B_{11}^{-1} k_1$$

J ， J_{tot}^1 和 J_{aux}^1 均可以通过域积分简单算出（小的改变来计算 J_{tot}^1 ）。

因为在 J_{tot}^1 和 J 中不含 K_1 或 k_1 的项相等，定义互作用积分 J_{int}^1 如下：

$$\begin{aligned} J_{int}^1 &= J_{tot}^1 - J - J_{aux}^1 \\ &= 2k_1 B_{11}^{-1} K_1 + 2k_1 B_{12}^{-1} K_2 + 2k_1 B_{13}^{-1} K_3 \end{aligned}$$

如果重复计算 (k_2 和 k_3), 等式的线性系统结果:

$$J_{int}^{\alpha} = k_{\alpha} B_{\alpha s}^{-1} K_s, \alpha = 1, 2, \text{ or } 3.$$

如果 k_a 被指定为单位值, $K_a = B_{as} J_{int}^s$ 。

用法:

- 应用 *CONTOUR INTEGRAL, TYPE=K FACTORS 选项来计算应力强度因子。

- 这个参数仅能被用于线弹性材料。

裂纹扩展:

- 三个准则来判断裂纹开始扩展的方向 (讨论在第 1 讲)

- 最大切向应力准则 (MTS)

- 最大能量释放率准则 (MERR)

- KII=0 准则 (KII0)

- *CONTOUR INTEGRAL, DIRECTION=MTS/MERR/KII0

- 这个参数只能和 TYPE=K FACTORS 参数联合用于均匀的, 各向同性的线弹性材料。

6.10 裂纹扩展

- 在 ABAQUS 中, 可以模拟裂纹沿着预先确定的面扩展。

- 裂纹可以从单个裂尖或多裂尖处扩展。

- 潜在的裂纹面可以通过接触面定义来建模 (边界元不允许)。

- 这些面起先可以绑在一起, 但在裂纹扩展时要松绑。

- Debonding (松绑) 仅能在二维时使用。

- 松绑的判据:

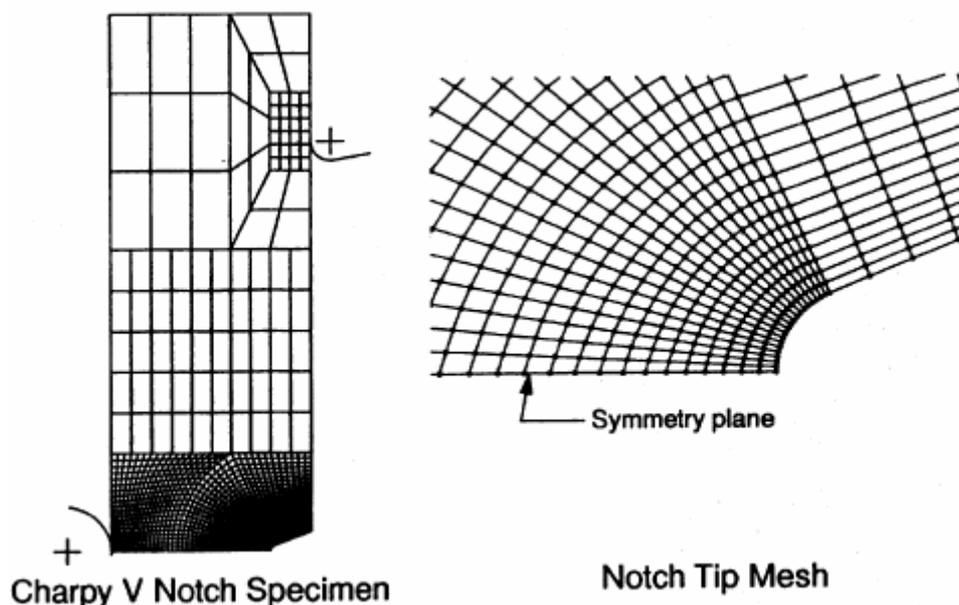
- 裂纹张开位移 (COD) 判据。

- 在裂尖前一段距离应力评定判据。

- 裂纹长度看作时间的函数。

- 松绑后, 接触面行为转化为一般的接触, 可包含摩擦力的影响。

- 二维的裂纹扩展可以应用 *INITIAL CONDITIONS , *DEBOND 和 *FRACTURE CRITERION 选项来建模。



- 起先相联接的接触对应用 *INITIAL CONDITIONS , TYPE=CONTACT 选项; 例如,

*INITIAL CONDITIONS , TYPE=CONTACT , [NORMAL] ASURF , BSURF , BONDNODES

- ASURF 和 BSURF 代表从面和主面。
- BONDNODES 为起先被绑的从面上的节点组。
- NORMAL 参数表明在 BONDNODES 节点组的节点仅在法线方向上被绑, 在切向上可以自由移动。
- 如果在 BONDNODES 节点组的节点在所有方向上都被绑, 忽略 NORMAL 参数。
- NORMAL 选项经常被用于对称情况。

- 应用 *DEBOND 选项确定松绑时要在给定的分析步中; 例如,
*DEBOND , SLAVE=ASURF , MASTER=BSURF , [INCREMENT= , FREQUENCY, OUTPUT]

0. , 1. , t_1 , a_1 , t_2 , a_2 , t_3 , a_3 , t_4 , a_4 , ..., t_f , 0.

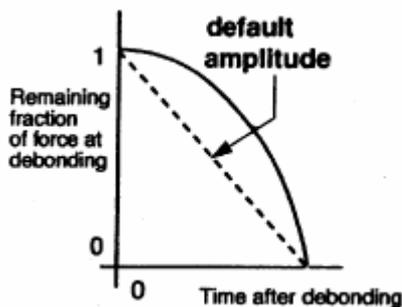
-从面和主面参数确定面被松绑。

-TIME INCREMENT 参数指定一个建议的时间增量，当松绑开始后。

(默认: t_f)

-FREQUENCY 和 OUTPUT 参数控制裂纹扩展变量的结果被存入数据和结果文件。

- $a(t_i)$ 为振幅-时间函数，指出当时间为 $t_0 + t_i$ 时，在接触面间被转换的力的大小。(t_0 代表松绑开始的时刻)



当断裂判据在某个节点满足条件时，节点力也会下降，因为用户在*DEBOND 选项中指定了松绑。

节点上的力在 0 时刻的值必须为 1.0，在最后的时刻必须为 0。

- *FRACTURE CRITERION 选项被用于指定松绑判据。
- 当失效函数 f 处于以下范围内时，松绑就会发生，

$$(1 - f_{tol}) \leq f \leq (1 + f_{tol})$$

这里 f_{tol} 的默认值为 0.1。

-应用的松绑判据决定 f 的形式。

-当 f 的值超过 $1 + f_{tol}$ ，ABAQUS 时间增量步会马上返回并在正确地时间/载荷下执行松绑。

-在*FRACTURE CRITERION 选项中的 TOLERANCE 参数可以指定 f_{tol} 一个非默认的值。使 f_{tol} 足够大因此过盈返回不会发生。

***FRACTURE CRITERION, TYPE=COD**

- 裂纹张开位移判据定义为

$$f = \frac{\delta}{d_c}$$

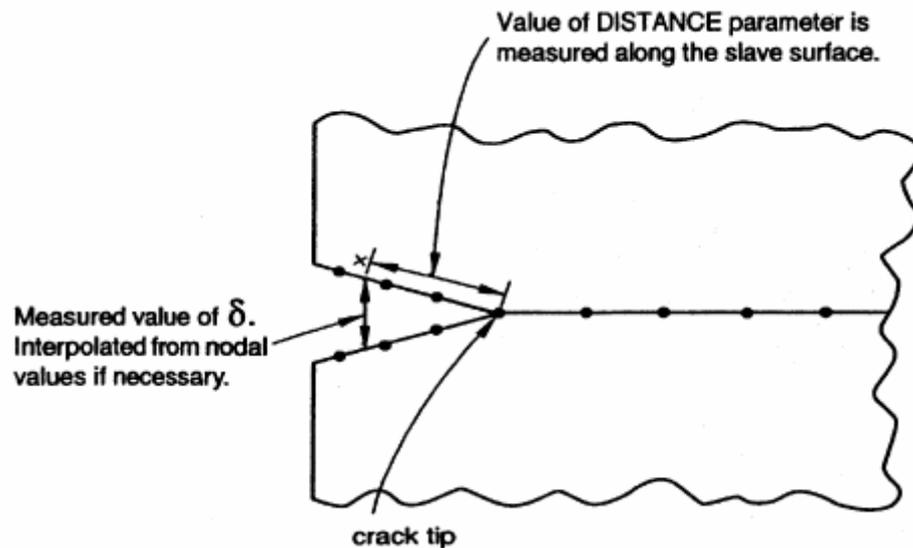
这里 d 为距裂尖后某一距离处裂纹的张开位移 (COD), $d_c(\Delta a)$ 为 COD 的判据值。

-这个判据被指定为 TYPE=COD。

- d_c 是累计裂纹长度 Δa (沿着从面初始裂尖与当前裂尖的距离) 的函数。

-一般来说, COD 判据被用于易延展材料的裂纹扩展。

-DISTANCE 参数的值必须被指定为联接当前裂尖点与从面 (主面) 上的点的直线距离。

***FRACTURE CRITERION, TYPE=CRITICAL STRESS**

- 应力判据被定义为

$$f = \sqrt{\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_f}\right)^2 + \left(\frac{\tau_1}{\tau_f}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{\tau_f}\right)^2}$$

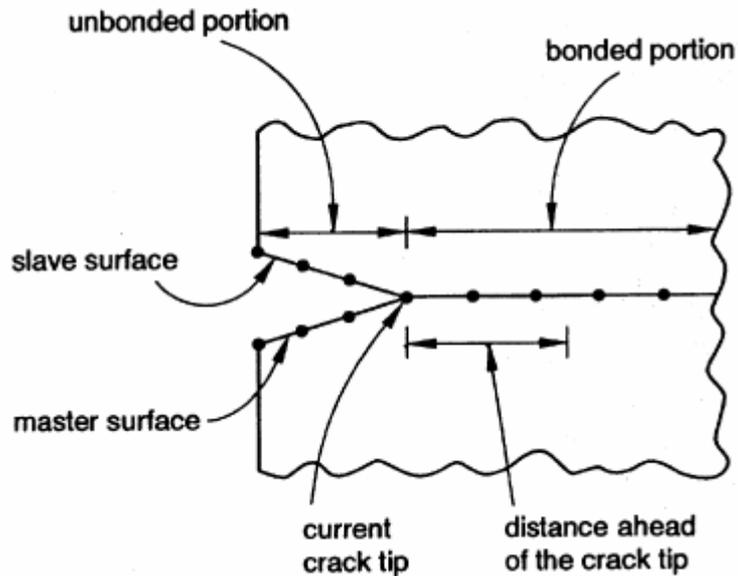
这里 s_n 为法向拉伸界面力 (受压为 0), (t_1, t_2) 为界面剪切应力。

-这个判据被指定为 TYPE=CRITICAL STRESS。

- s^f , t_1^f 和 t_2^f 是选项*FRACTURE CRITERION 中副选项的数据。

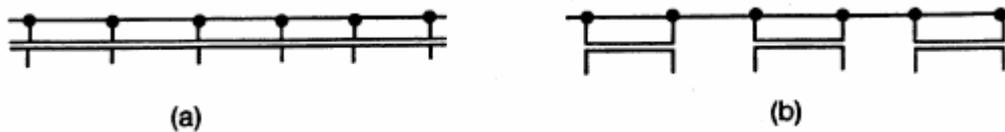
-一般来说, CRITICAL STRESS 判据被用于脆性材料的裂纹扩展。

-在裂尖前方一定距离处取界面应力,这段距离由 DISTANCE 参数确定。



• ABAQUS 以前版本的节点应力 (NODAL STRESS) 判据可以通过设置 DISTANCE 参数为 0 得到恢复。

如果 DISTANCE=0, 节点应力是关于界面如何建模的函数。



相同的界面有两种建模方式 (在每个模型的每一个节点接触力是相同的)。因为节点应力为节点力除以属于这个节点与之相连的面积,所以在 (b) 模型中的节点应力为 (a) 的二倍。因此,在失效判据中的变量也必须乘以 2。

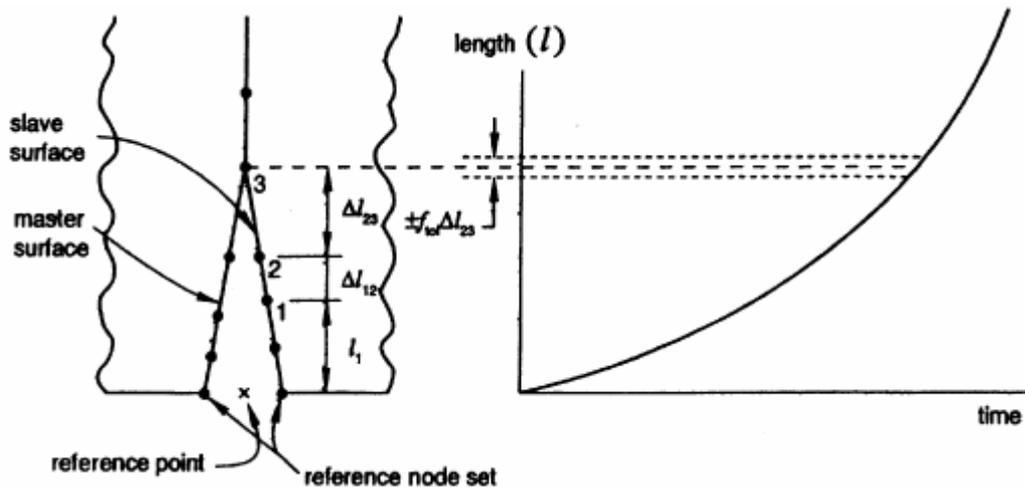
-*FRACTURE CRITERION , TYPE=CRITICAL STRESS , DISTANCE=0.0 可能不是一个可靠的断裂判据。

***FRACTURE CRITERION, TYPE=CRACK LENGTH**

- 裂纹长度相对于时间的准据由 TYPE=CRACK LENGTH 来标定。
 - 参考点为用户指定的一些节点位置的平均化，裂纹长度就是从参考点来测量的。NSET 参数就是用来指定这些节点的。
 - 裂纹长度 l 与时间的关系由 *FRACTURE CRITERION 副选项给出。
 - 松绑函数 f 与裂纹长度 l 相关，当前裂纹长度是参考点到初始裂尖的距离加上初始裂尖到当前裂尖的距离。
 - 例如：当前裂尖在节点 3，初始裂尖在节点 1，当前裂纹长度为 l_3 ， f 定义为

$$f = \frac{l - (l_3 - \Delta l_{23})}{\Delta l_{23}}$$

这里 $l_3 = l_1 + \Delta l_{12} + \Delta l_{23}$ 。

**裂纹扩展分析 ABAQUS 结果文件**

- 在预处理阶段
 - 当 *PREPRINT, MODEL=YES 被使用时，所有从面上的节点的初始接触情况都被保存于打印结果文件中。
 - 所有模型中的裂尖都被确认并标记为 crack 1, crack 2 等。与这些裂纹相关的从面和主面也需要确认。
 - 一般来说，*PREPRINT, MODEL=NO。

-预处理阶段的打印结果文件输出（Verification Problem 3.31, Crack propagation analysis）:

INITIAL CONTACT STATUS

SLAVE SURFACE:		BSURF		
MASTER SURFACE:		ASURF		
NODE NUMBER	STATUS	CLEARANCE	NOTE	
101	BONDED	0.0000E+00		
81	BONDED	0.0000E+00		
61	BONDED	0.0000E+00		
41	BONDED	0.0000E+00	CRACK TIP	
21	NOT BONDED	0.0000E+00		
1	NOT BONDED	0.0000E+00		

CRACK NUMBER	SLAVE SURFACE	MASTER SURFACE	INITIAL CRACK TIP NODE NUMBER
1	BSURF	ASURF	41

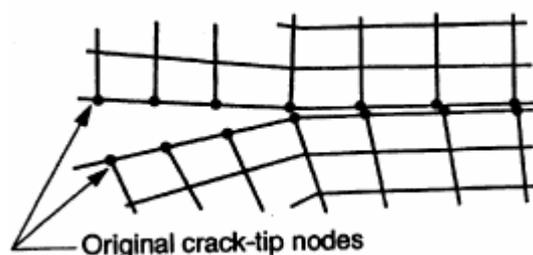
*****原文件 96 与 97 内容相同，97 页内容缺失*****

• 联接失效的数量可以通过*CONTACT PRINT 选项来设置，输出的变量为：

- DBT: 联接开始失效的时刻
- DBSF: 联接失效时仍保留的剩余应力
- DBS: 联接失效剩余应力的构成

• 围线积分输出：

- 对不同的裂尖节点组应用多要求。
- 裂尖节点组包含沿着联接面的所有节点。

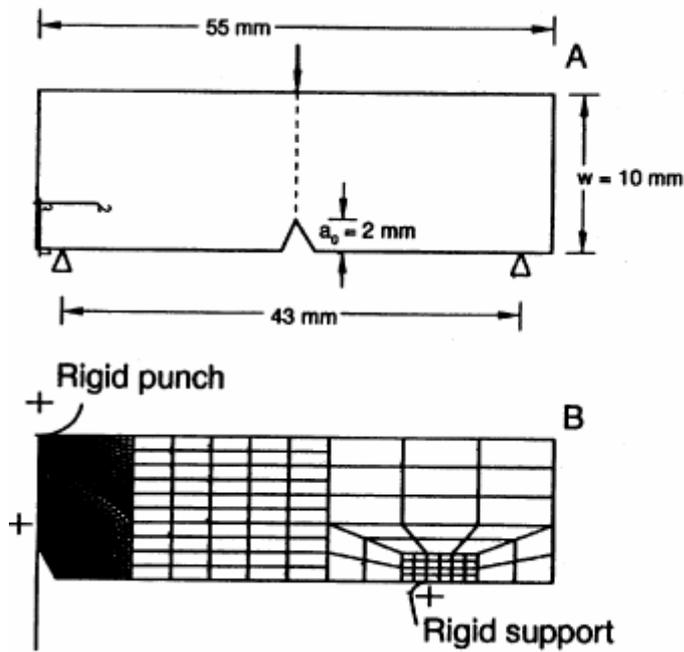


标记的所有节点都可以加入裂尖节点组。也就是说在这种情况下，仅有一个围线积分来计算 J 积分值。

若使 J 积分输出有效，裂纹的扩展量要比塑性区的尺寸小。

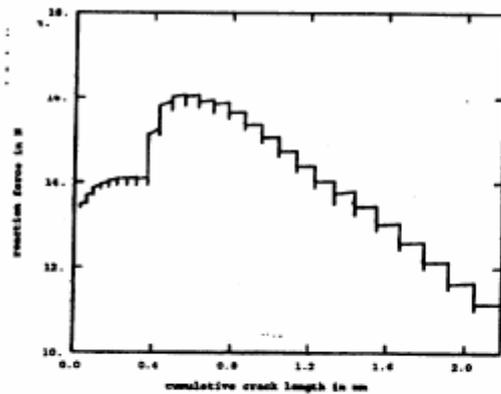
• 既然松绑含有接触，线弹性单元比较好。

-例子：Crack growth in a three-point bend specimen (ABAQUS Example Problem 1.4.4)

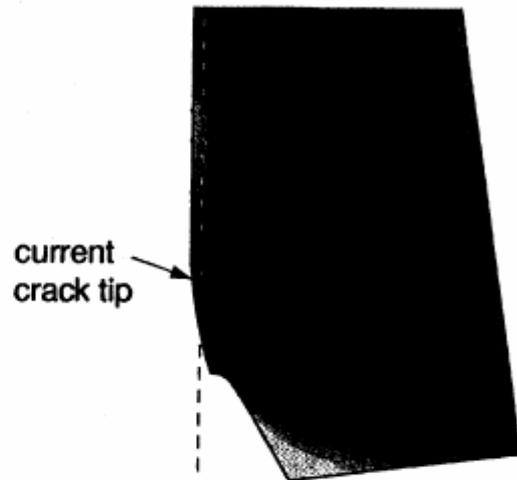


A) Schematic of three-point bend specimen. An elastic-plastic material is used.

B) Half-symmetry finite element model of three-point bend specimen.



Variation of the reaction force at the rigid punch as a function of the cumulative crack length. The crack length criterion is used.



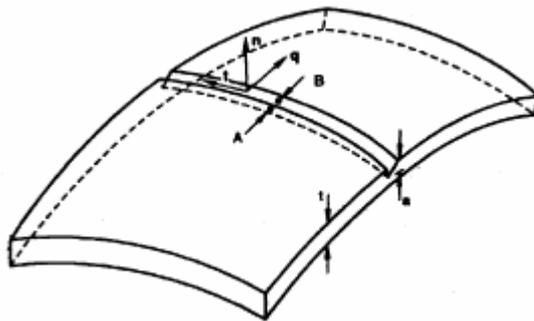
Contours of Mises stress near the crack tip for an accumulated crack length of 2.18 mm. The crack length criterion is used.

6.11 弹-塑性材料的数值计算

- 对于米塞斯塑性，塑性变形是不可压缩的。
 - 总变形率是不可压缩的（体积为常量），塑性变形为主要的变形。
- 所有 ABAQUS 四边形单元和六面体单元都适于计算 J 积分（在不可压缩条件下），除了完全积分的四边形和六面体单元（没有杂交公式）。
 - 应用这些材料时不要应用 CPE8, CAX8, C3D20 单元。当材料为不可压缩时，它们会发生自锁（过约束）。
 - 含有缩减积分的二阶单元（CPE8R, CED20R 等）非常适于计算总体应力集中及裂尖应力集中问题。
 - 如果位移变形图表明变形不怎么变化，这暗示着单元网格发生自锁。如果应用为完全积分单元可以改为缩减积分单元。如果缩减积分单元已经被应用就提高网格的密度。如果还没有效果，应用杂交单元。
- 杂交单元必须被用于完全不可压缩材料（如超弹性，线弹性， $\nu=0.5$ ）。
- 相比小变形线弹性问题，弹-塑性材料（一般为非线性材料）的结果对网格的划分更敏感。线弹性问题网格划分不需要太精细。
- 结果越是复杂，J 积分越偏向于路径相关。若路径相关不明显则表明网格集中不明显；然而，J 积分的路径无关不能证明网格集中。

6.12 关于断裂其它的 ABAQUS 应用

1. 线弹性单元



- 在壳结构中计算局部穿透裂纹的 J , J^{el} , J^{pl} , K_I , K_{II} 和 K_{III} , 给出三维几何的较经济的结果。
- 一般来说, 上述的断裂参数的期望值为正确结果的 10-15%。
- 在裂纹与自由面交叉处不能给出很好的结果, 这个区域的变形不能通过一维的线弹性单元来合理近似。
- 当这一区域有很高的断裂参数时, 线弹性对预测趋势非常有用。
- 假设仅在 I 型裂纹时, 塑性变形可穿过线弹性。
- 限制为小应变, 小旋转 (在 ABAQUS 中)。
- 对于直管裂纹, 线弹性工作非常好, 但在管子的弯曲处工作不是很好。
- Parks 最近的工作表明线弹性的扩展能力, 可以对中度塑性及非常浅和非常深的裂纹给出比较好的结果 (在 ABAQUS 中还不可用)。

2. 塑性变形: Ramberg-Osgood 模型

$$E\varepsilon = \sigma + \alpha \left(\frac{|\sigma|}{\sigma_0} \right)^{n-1} \sigma$$

- 通过将线弹性和全塑性 (幂律硬化) 结果结合, 发展标准几何试件弹-塑性断裂手册的结果。(参见第 4 讲) 如果不需要发展手册型结果, 应用增量塑性代替。
- EPRI 给出了很多关于这种技术的详细报告, 并给出了很多用于核工业几何试件的结果。

后 记

来 simwe 论坛将至一年时间了，这期间从 simwe 上学到了不少东西，开阔了眼界，当然也下了不少资料。在此谨表达我个人对 simwe 论坛广大热心会员的感谢，并希望论坛能越办越好，真正成为大家的良师益友。

ABAQUS 断裂力学培训 (Fracture Mechanics with ABAQUS) 是我从论坛上下载的，因为学习需要，我经常翻看。后来便想，既然如此，倒还不如把它翻译过来，这样大家都能受用，所以每天闲来翻译几页，日积月累倒也完成了，因页数不算太多也不觉甚累。

虽然我不清楚这个 PDF 的具体来由及时间，但整体感觉这本教程对我们学习软件还是很有帮助的，尽管有些地方在翻译时感觉其论述未必正确，却也不能说其过时。翻译时，我也遇到了些困难，有的来于语言，有的来于理论，但细细考虑，大体上也总能解决。因为并不了解某些塑性理论，所以不能保证翻译得正确，但在翻译时也尽可能尊重原著，不敢妄加猜测。总的说来，这本教程还是蛮注重基础理论的 (前 5 讲)，到任何时候，理论基础都是应用的前提，理论不好，往往会发生错误的应用，也便失去了仿真的意义。

另外还想谈些学习的感想：学习真的是自己的事。想弄明白某个问题，主要还得自己去努力钻研。有外人的帮助当然是好，但不能奢求。别人的帮助往往是起到画龙点睛的作用，让你眼前一亮，这也是 simwe 存在的一个意义。

古语有云：尽信书不如无书。所以大家在看此翻译版时千万不要完全相信我的翻译，最好和英文版对照着看，这样会更清晰明白。建议大家有时间的话，还是看英文原版为好，翻译过来的汉语有时很生硬很晦涩难懂，不如原汁原味来的痛快。加之本人水平实在有限，完成后也没再校对，翻译过程中出现错误、误解及不妥之处应属正常，非常希望大家在发现问题后能告知我，以求共同进步提高，并及时更正文本。

来而无往，非礼也！老是从论坛上索取，也实在让我过意不去，所以本人把这份翻译稿献给大家，希望能对大家有用。取之于 simwe，用之于 simwe，在翻译稿的页眉上作了 simwe 论坛的标记，以表感谢 simwe 论坛。