

摘 要

生物数学中以生物动力系统为基础的研究近年来得到了长足的发展,其中以微分方程为模型的研究工作主要集中在连续动力系统和脉冲动力系统上。数学模型在研究过程中不断演化以期更能真实地反映客观事实,其中连续生物动力系统是过去几十年的研究方向,在人们发现很多影响生态系统的因素因为时间、季节或者早晚的不同而不同时,便将自治系统改进为非自治(时变)系统以使模型更为真实。与此同时人们又发现自然界许多生命现象以及人类的一些行为如动物的季节性生育、人类的放养捕捞等用连续系统无法精确描述,而脉冲微分方程可以相对较为真实的刻画这些相对短暂的现象和行为,这使得脉冲微分方程的研究和应用得到了越来越多学者的关注。本文研究的基于不同应用背景的三个生态模型分别属于上述的时变和脉冲微分方程。

周期性是自然界和人类社会中普遍存在的现象,在周期性的环境因素或是人为外力以及系统自身内在因素的作用下这些系统都将呈现出一定的周期性。本文系统的研究了所给出的脉冲生态模型和时变生态模型的解的周期性、渐近性,并结合数值模拟的手段探讨了在这些模型中可能存在的复杂性。本文主要内容可概括如下:

第二章以农业生产中的害虫综合治理为应用背景,对原有的基于状态依赖脉冲微分方程的害虫控制模型进行了改进,增加了原系统中害虫发展的密度制约项,使得模型能更为客观地反映实际情况,但系统也因此变的较为复杂,由原来的可求解方程变为不可求解方程。本文在无法求得显式解的情况下利用构造脉冲半动力系统的不变集以及 Brouwer 不动点定理得到了改进后模型在几种情况下的阶一周周期解(一周内仅有一次脉冲)的存在性定理,并利用数值分析的方法讨论了阶一周周期解的吸引性以及系统的无脉冲正向不变集合。本章最后简单讨论了此模型在农业生产中对害虫综合治理的生物意义。

第三章考虑了一类具有非线性传染力函数的传染病模型,其中人口出生率和死亡率相同并且患病者病愈后可自然获得免疫但一段时间后免疫力也会自然丧失。模型中我们还考虑了为控制疾病的流行而采取的人工免疫接种的因素。本章研究了连续免疫接种方式和脉冲免疫接种方式对流行病的控制作用,对连续免疫接种方式的系统给出了其再生数。另外还讨论了脉冲控制的三种脉冲接种方式即比例型、常数型和第二型常数脉冲,分析研究了这三个系统的边界周期解(疾病消除周期解)的局部稳定性和全局吸引性,进而得到全局稳定性的条件,以此探讨脉冲免疫对疾病控制所起的作用。另外,本章在理论分析较为困难的前提下利用数值模拟的手段发现脉冲使原无受迫系统的周期解变得

十分复杂，在流行病不能被根除而成为地方病时，出现了拟周期解、混沌和多周期解等较为复杂的现象。

第四章讨论了两个两种群非自治（时变）的阶段结构种群生态学模型，阶段结构模型在可更新资源的管理和利用方面有着较好的应用。非自治的系统假设影响系统发展的各种因素会因季节、时间的变化而呈现周期或非周期的变化，从而使模型更加符合实际。本章研究的第一个模型是非自治两种群竞争阶段结构模型，其中一个种群与另一个种群的成年个体之间是对食物、空间等资源竞争的关系。我们研究了它的有界性、持续生存性、周期解的存在性和渐近稳定性。第二个模型是带有消化时滞的非自治两种群捕食阶段结构模型，其中食饵种群分为幼年个体和成年个体两部分，捕食者种群只能捕食食饵种群的幼年个体，对这个模型我们研究了它的有界性、持续生存性、周期解的存在性。

关键词：状态依赖脉冲微分方程；传染病脉冲免疫接种模型；时变种群动力学阶段结构模型；周期解；持续生存；全局渐近稳定

Periodic and Asymptotic Properties of Solutions of Impulsive and Nonautonomous Mathematical Biological Models

Abstract

The need for describing more actual natural system impels the evolution of mathematical biological models. In recent years, the researches in mathematical biology which modeled by normal differential equations are mainly concentrated on two branches: 1) continuous biological dynamical systems; 2) impulsive semi-dynamical systems. The discussions of continuous biological dynamical systems were main research direction in the past decades; autonomous systems were modified into nonautonomous since people found the factors which affect the systems can be various with the time or the subrogation of the four seasons. People also find recently that continuous biological dynamical systems can not represent some natural phenomena and control behavior of human accurately; impulsive semi-dynamical systems then turn out to be the hotspot of mathematical biology because the relatively instantaneous behavior mentioned above can be described well in impulsive differential equations. Our three models in this paper which have different applicative background respectively are of these two kinds of differential system.

Since periodicity exists in nature and human society generally, it has also existed in these three models because of the effect of periodic environment and manual behavior. This dissertation discussed the given impulsive or nonautonomous mathematical biological models and studied the existence and globally asymptotic behavior of periodic solutions of these models. Moreover, the possible complexity of impulsive differential equations is discussed numerically by using software such as Maple or Matlab. The result of this dissertation can be summarized as following:

Chapter two modified a state-dependent impulsive differential equations which has a background of pest control in agriculture by adding term of density dependence to make it more actual, and, also more difficult. The system became into the one which has not explicit solutions by this modification. Then we researched the existence of periodic solution of order one of this modified model by using theories of invariant set of impulsive semi-dynamical system and Brouwer's fixed point. Moreover, the attraction of periodic solution of order one and positive invariant of system has be discussed numerically.

Chapter three considered an epidemic dynamics model with nonlinear infection rate, in which birth rate equals to death rate and the infectious individuals will get immunity naturally

after recovery but will also lose it after a period of time. We also considered the factor of manual vaccination control. This paper analyzed the effect of continuous vaccination control and pulsive vaccination control of this system, and gave the reproductive number of the system with continuous vaccination as well as the system of pulsive vaccination. Three types of pulsive vaccinations are analyzed in this paper including proportional type, constant type and the second type of constant vaccination. The local stability and globally asymptotic behavior of border periodic solution (epidemic-elimination solution) of these three types of vaccination have been researched. On the other hand if the epidemic is turn out to be endemic, we studied numerically the influences of impulsive vaccination on the periodic oscillation of the system which is without impulsion and found phenomenon of chaos in this case.

In chapter four, we considered two two-species nonautonomous models with stage structure. The models of population dynamics with stage structure can be applied well in management and usage of renewable resource. Nonautonomous system is more actual because it assumes that all the factories which affect the advance of system can be various with the time or the subrogation of four seasons. The first model considered in this chapter is a two-species nonautonomous competitive model with stage structure, in which one species competes with the mature individuals of another species. We studied the boundedness, permanence, existence and globally asymptotic stability of periodic solution of this model. The second model we considered is a two-species nonautonomous predator-prey model with stage structure and delay, in which predator species prey on only immature individuals of prey species. We studied the boundedness, permanence, existence of periodic solution of this model.

Key Words: State-dependent impulsive differential equations; Epidemic dynamics with pulsive vaccination; Nonautonomous population dynamical stage-structured system; Periodic solution; Permanence; Globally asymptotically stable

独创性说明

作者郑重声明：本博士学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含为获得大连理工大学或其他单位的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

作者签名： 曾利 日期： 2005.11.22

大连理工大学学位论文版权使用授权书

本学位论文作者及指导教师完全了解“大连理工大学硕士、博士学位论文版权使用规定”，同意大连理工大学保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权大连理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，也可采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编学位论文。

作者签名： 曹利

导师签名： 陈益茹

2005 年 11 月 22 日

符号表

\mathbb{R}	实数集合
\mathbb{R}^n	n 维欧氏空间
\mathbb{R}_+^n	n 维欧氏空间的正锥
\mathbb{N}	自然数集
\mathbb{Z}	整数集合
\mathbb{C}	复数集合
\triangleq	定义式
$B(x_0, \delta)$	以 x_0 为中心 δ 为半径的开领域
$\dot{x}(t)$	$x(t)$ 关于时间 t 的导数
\bar{A}	集合 A 的闭包
$\det(A)$	矩阵 A 的行列式
PC^1	一阶可导按段连续函数空间
E	单位矩阵

第一章 引言及预备知识 Equation Chapter 1 Section 1

过去几十年生态学在连续动力系统的研究结果已经相当丰富。在连续动力系统中总是假设被描述的生命现象是连续发生的，比如动物的生育、死亡，或者是在两个相对独立的环境中的迁移过程，还有人类对可更新自然资源的管理和利用方面如对一些人工养殖的动物的放养和收获，以及在传染病控制方面实施的人工接种免疫等行为，都在数学模型里被描述为连续发生的。一般来说，这些动物的生理行为以及人类的干扰行为虽然本身不是连续的，而是离散的，但如果它们发生的时间在所处的生态系统的发展过程中分布比较平均，则看作是连续行为有一定的合理性并且有利于人们对数学模型的分析 and 研究。

但近年来，人们发现许多生物现象的发生以及人类对一些生命现象的优化控制并非是一个简单的连续的过程所能准确描述的，不能简单的用微分方程或差分方程来处理。例如在进行鱼类池塘养殖的过程中，放养鱼苗和收获都是按一定时间间隔定期地进行。自然界中有些物种如梅花鹿、骆驼、蝙蝠等并不是一年四季都进行繁殖，而是集中在一个季节中的某个时间段进行生育。有些动物的迁移活动也不是连续进行的，如一些鱼类的季节性洄游，候鸟的迁徙，一些食草动物的季节性的迁移。以及在流行病控制中使用人工接种免疫的方法也不是连续的，而是在一些离散的固定的时刻进行的。这些行为发生的时间相对于整个生态系统的发展过程来说比较短暂，可以近似的看成瞬时行为。但是这些近似瞬时的行为却会导致物种数量的突变，如投放鱼苗后，小鱼的数量剧增，而在收获后，大鱼的数量又明显下降。如果用连续系统描述这些行为，则会丢失大量的信息，而脉冲微分方程则为研究这种在一个阶段是连续发展而在一些时间点上具有脉冲式的瞬时行为的生态模型提供了有利的工具，它能恰当的描述连续与脉冲效应结合的自然现象。

脉冲微分方程是在连续的微分方程的基础上发展起来的。从理论上来说，连续的常微分方程是它的一种特殊情况，因此关于它的理论更加丰富。脉冲微分方程的理论尤其是稳定性理论在近三十年的研究中得到了不断的完善，已经形成了一个比较完整的初形 [11][10][39][9][64]，在理论上可以说已经是一个比较完整的学科。这些理论包括解的全局存在性和唯一性，解对初值的连续依赖性、比较原则、稳定性定理等等。关于解初值连续性文献 [8][72] 给出了进一步的结论。文献 [58] 最早研究了脉冲微分方程的稳定性原则，之后 [68][65] 的基础上有了比较完善的脉冲微分方程的稳定性定义，利用 [40] 中相类似的方法脉冲微分方程的稳定性原则也得到推广。 [32][31][30] 利用 Lyapunov 方法进一

步推广稳定性原则, [7]引入了一种分段连续的 Lyapunov 函数来研究稳定性。[64][3][6][67][66]研究了周期解和几乎周期解的存在性问题。文献[88][93][86][5]则对时滞脉冲的微分方程进行了研究。

但是脉冲微分方程的定性理论尤其是状态依赖的脉冲微分方程的定性理论还处在起步阶段, 另外脉冲在从理论转入应用还有一定的困难。尽管如此, 脉冲微分方程的应用已经慢慢得到学者的重视, 也出现了许多相应的论文, 包括脉冲种群动力学的研究[12][52][81][76][79][80][51][50][91][53], 脉冲优化控制的研究[59][90][4], 脉冲微生物模型的研究[25], 脉冲化学治疗的研究[38][60], 以及脉冲污染方面的研究[46]等等。本文第二章和第三章就以农业中害虫治理和传染病的控制为背景, 建立了相应的带脉冲效应的动力系统并研究它们的解的周期性及渐近性质。

本章给出一些有关脉冲动力系统和本文所要用到的一些相关的基础知识。

§1.1 脉冲半动力系统

本节介绍脉冲微分方程的一些拓扑抽象概念, 下面先介绍半动力系统的定义。

定义 1.1.1[39] 在一个三元组 (X, π, \mathbb{R}_+) 中, 假设 X 是度量空间, \mathbb{R}_+ 是非负实数集合, 如果 $\pi: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ 是一个连续函数并且满足

- (i) 对所有的 $x \in X$ 有 $\pi(x, 0) = x$,
- (ii) 对所有的 $x \in X$ 和 $t, s \in \mathbb{R}_+$, 有 $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$,

我们称三元组 (X, π, \mathbb{R}_+) 是一个半动力系统。

有时我们把 (X, π, \mathbb{R}_+) 简记为 (X, π) , 如果把 \mathbb{R}_+ 换成 \mathbb{R} , 则三元组 (X, π, \mathbb{R}) 就是称为一个动力系统。

对任意的 $x \in X$, 由 $\pi_x(t) = \pi(x, t)$ 定义的函数 $\pi_x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ 显然连续, 我们称 π_x 是过 x 的轨线。集合

$$C^+(x) = \{\pi(x, t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$$

称为过 x 的正轨道。我们令

$$C^+(x, r) = \{\pi(x, t) \mid 0 \leq t < r\}.$$

对任意 X 的子集 M , 我们定义

$$M^+(x) = C^+(x) \cap M - \{x\} \text{ 和 } M^-(x) = G(x) \cap M - \{x\},$$

其中

$$G(x) = \bigcup \{G(x, t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}, \quad G(x, t) = \{y \mid \pi(y, t) = x\}$$

是 x 在 $t \in \mathbb{R}_+$ 时的可达集合。最后我们令 $M(x) = M^+(x) \cup M^-(x)$ 。

下面我们给出脉冲半动力系统的定义。

定义 1.1.2[39] 如果 (X, π) 是一个半动力系统, M 是 X 的一个非空子集, 函数 $I: M \rightarrow X$ 连续并且满足

- (i) 没有点 $x \in X$ 是 $M(x)$ 的极限点,
- (ii) $\{t \mid G(x, t) \cap M = \emptyset\}$ 是 \mathbb{R}_+ 的一个闭子集,

则我们称 (X, π, M, I) 为一个脉冲半动力系统。

在本文中我们记 $N = I(M)$, 对任意的 $x \in X$, 记 $I(x) = x^+$ 。

引理 1.1.1[39] 令 (X, π, M, I) 是一个脉冲半动力系统, 则对任意的 $x \in X$, 存在正实数 s_i 使得 $0 < s_i \leq \infty$ 且对 $0 < t < s_i, i = 1, 2, \dots$, 有

- (i) $\pi(x, t) \notin M$, 且如果 $M^+(x) \neq \emptyset$, 则有 $\pi(x, s_1) \in M$,
- (ii) $G(x, t) \cap M = \emptyset$, 且如果 $M^-(X) \neq \emptyset$, 则 $G(x, s_2) \cap M \neq \emptyset$ 。

我们称 s_1 为 x 的无脉冲时间, 定义函数 $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}_+ - \{0\}$, $\Phi(x)$ 是 x 的无脉冲时间。

定义 1.1.3[39] 设 (X, π, M, I) 是一个脉冲半动力系统, $x \in X$. 过 x 的轨线我们定义为函数 $\tilde{\pi}_x: \mathbb{R}_+ \supset [0, s) \rightarrow X$ (s 有可能是 ∞), 这里 $\tilde{\pi}_x$ 我们按如下方法选取: 设 $x = x_0$, 如果 $M^+(x_0) = \emptyset$, 则 $\tilde{\pi}_x(t) = \pi_x(t), t \in \mathbb{R}_+$ 。如果 $M^+(x_0) \neq \emptyset$, 那么由引理 1.1.1 可知存在一个正数 $s_0 \in \mathbb{R}_+$ 使得 $\pi(x_0, s_0) = x_1 \in M$ 且 $\pi(x_0, t) \notin M, 0 < t < s_0$ 。我们在 $[0, s_0]$ 上定义 $\tilde{\pi}_x$ 如下:

$$\tilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x, t), & 0 \leq t < s_0, \\ x_1^+, & t = s_0 \end{cases}$$

为了完成 $\tilde{\pi}_x$ 的定义我们继续在 x_1^+ 点实施刚才的过程。于是, 要么 $M^+(x_1^+) = \emptyset$, 我们就可以定义 $\tilde{\pi}_x(t) = \pi(x_1^+, t - s_0), t \geq s_0, s = \infty$, 要么有 $M^+(x_1^+) \neq \emptyset$, 这说明类似前边的 s_1 存在, 我们定义

$$\tilde{\pi}_x(t) = \begin{cases} \pi(x_1^+, t - s_0), & s_0 \leq t < s_1, \\ x_2^+, & t = s_1, \end{cases}$$

其中 $x_2 = \pi(x_1^+, s_1)$ 。这个过程要么在有限次后结束, 此时有某个 n 使得 $M^+(x_n^+) = \emptyset$, 要

么无限次地进行下去, 此时 $M^+(x_n^+) \neq \emptyset$, $n=1, 2, \dots$ 。于是我们得到了一个 X 中的有限或无限点列 $\{x_n\}$, 相应于每个 x_n 存在一个实数 s_n 和脉冲值 x_n^+ 使得 $\pi(x_n^+, s_n) = x_{n+1}$ 。 $\tilde{\pi}_x$ 的定义域显然是 $[0, s) = \sum [s_{n-1}, s_n)$ 。这样就完成了轨线 $\tilde{\pi}_x$ 的定义。

我们称上述定义中的 $\{x_n\}$ 为 x 的脉冲点序列。

定义 1.1.4[39] 一个轨线 $\tilde{\pi}_x$ 如果存在正数 $m \geq 1$ 和 $k \geq 1$, 这里 k 是最小的使得 $x_m^+ = x_{m+k}^+$ 和 $r = \sum_{i=m}^{m+k-1} s_i$ 成立的正数, 则我们称轨线 $\tilde{\pi}_x$ 是阶 k 的 r -周期解。

§1.2 脉冲微分方程的基本定理

设 Ω 是 \mathbb{R}^n 的开子集, $D = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ 。假设对每一个 $k=1, 2, \dots$, $r_k \in C[\Omega, (0, \infty)]$, $r_k(x) < r_{k+1}(x)$, 并且对任意的 $x \in \Omega$ 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = \infty$, 定义 $r_0(x) = 0$, 并假设 k 总是从 1 到 ∞ , 称 $S_k: t = r_k(x)$ 为曲面。

考虑下面的脉冲微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \neq r_k(x), \\ \Delta x = I_k(x), & t = r_k(x), \\ x(t_0^+) = x_0, & t_0 \geq 0, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

其中 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。

定义 1.2.1[39] 函数 $x(t_0, t_0 + a) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$, $a > 0$, 如果满足如下条件:

- (i) $x(t_0^+) = x_0$ 和 $(t, x(t)) \in D$ 对任意的 $t \in [t_0, t_0 + a)$ 成立,
- (ii) $x(t)$ 是连续可微的, 导数为 $x'(t) = f(t, x(t))$, $t \in [t_0, t_0 + a)$, $t \neq r_k(x(t))$,
- (iii) 如果 $t \in [t_0, t_0 + a)$, $t = r_k(x(t))$, 则 $x(t^+) = x(t) + I_k(x(t))$, 且在这样的 t 时刻

我们总假设 $x(t)$ 是左连续的, 而且存在 $\delta > 0$ 使得当 $t < s < \delta$ 时, $s \neq r_j(x(s))$,

则我们称 $x(t)$ 是系统(1.2.1)的一个解。

解的存在性定理:

定理 1.2.1[39] 假设

- (i) $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在 $t \neq r_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$) 处连续, 且对任意的 $(t, x) \in D$, 存在一个

满足局部 Lipschitz 条件的函数 ℓ ，使得在 (t, x) 的一个很小的邻域有

$$|f(s, y)| \leq \ell(s)$$

- (ii) 对任意的 k ，如果 $t_1 = r_k(x_1)$ ，则存在一个 $\delta > 0$ 使得对任意的 $0 < t - t_1 < \delta$ 和 $|x - x_1| < \delta$ ，有 $t \neq r_k(x)$ ，

则对每一个 $(t_0, x_0) \in D$ ，存在一个满足系统 (1.2.1) 的初值的解 $x[t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，这里 $\alpha > 0$ 。

稳定性定义：

定义 1.2.2[39] 设 $x_0(t) = x(t, t_0, y_0)$ 是系统 (1.2.1) 的一个定义在 $t \geq t_0$ 的解，并假设 $x_0(t)$ 与曲面 $S_k : t = r_k(x)$ 相遇的时刻为 t_k ， $t_k < t_{k+1}$ ， $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ ，则系统 (1.2.1) 的解 $x_0(t)$ 被称为是：

- (i) 稳定的，如果对任意的 $\varepsilon > 0$ ， $\eta > 0$ ， $t_0 \in \mathbb{R}_+$ ，存在 $\delta = \delta(t_0, \varepsilon, \eta) > 0$ 使得 $|x_0 - y_0| < \delta$ 蕴含着 $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ 对任意 $t \geq t_0$ 和 $|t - t_k| > \eta$ 成立，这里 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是任意一个定义在 $t \geq t_0$ 的系统 (1.2.1) 的解；
- (ii) 一致稳定的，如果在 (i) 中 δ 与 t_0 无关；
- (iii) 吸引的，如果对任意的 $\varepsilon > 0$ ， $\eta > 0$ ， $t_0 \in \mathbb{R}_+$ ，存在 $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ 和一个 $T = T(t_0, \varepsilon, \eta) > 0$ 使得 $|x_0 - y_0| < \delta_0$ 蕴含着 $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ 对任意的 $t \geq t_0 + T$ 和 $|t - t_k| > \eta$ 成立；
- (iv) 一致吸引的，如果在 (iii) 中 δ_0 和 T 与 t_0 无关；
- (v) 渐近稳定的，如果 (i) 和 (iii) 成立；
- (vi) 一致渐近稳定的，如果 (ii) 和 (iv) 成立。

下面是关于脉冲微分方程不等式的定理：

定理 1.2.2[39] 假设：

- (i) 序列 $\{t_k\}$ 满足 $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ ， $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ ，
- (ii) $m \in PC^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ ，且 $m(t)$ 在 t_k 左连续， $k = 1, 2, \dots$ ，
- (iii) 对 $k = 1, 2, \dots$ ，当 $t \geq t_0$ 时有

$$\begin{cases} m'(t) \leq p(t)m(t) + q(t), & t \neq t_k, \\ m(t_k^+) \leq d_k m(t_k) + b_k, & t = t_k, \end{cases}$$

其中 $p, q \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$, $d_k \geq 0$ 和 b_k 都是常数,

则有

$$m(t) \leq m(t_0) \prod_{t_0 < t_k < t} d_k \exp\left(\int_{t_0}^t p(s) ds\right) + \sum_{t_0 < t_k < t} \left(\prod_{t_k < t_j < t} d_j \exp\left(\int_{t_0}^t p(s) ds\right) \right) b_k \\ + \int_{t_0}^t \prod_{s < t_k < t} d_k \times \exp\left(\int_s^t p(\sigma) d\sigma\right) q(s) ds, \quad t \geq t_0.$$

本文涉及到以下两类脉冲非分方程

1) 固定时刻的脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \neq t_k, k = 1, 2, \dots \\ \Delta x = I_k(t), & t = t_k, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.2.2)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$, $f: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I_k: \Omega \rightarrow \Omega$, Ω 是 \mathbb{R}^n 的开子集, \mathbb{R}^n 是 n -维欧氏空间, \mathbb{R}_+ 是非负实数集,

2) 状态依赖的自治脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(x), & x \notin M, \\ \Delta x = I(x), & x \in M, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I: \Omega \rightarrow \Omega$, $M \subset \mathbb{R}^n$ 且满足定义 1.1.2 中的条件(i).

由定义 1.1.2 系统 (1.2.2) 和 (1.2.3) 都是脉冲半动力系统. 设 $\phi(t)$ ($t \in \mathbb{R}_+$) 是方程 (1.2.2) 的一个解, 且脉冲时刻为 $\{\tau_k\}$, 并有

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$$

和

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \phi(t), t \in \mathbb{R}_+\}.$$

定义 1.2.3[73] 系统 (1.2.2) 的解 $\phi(t)$ 是

- (i) 轨道稳定的, 如果对每一个 $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$ 和 $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $|t_0 - \tau_k| > \theta$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x_0 \in \Omega$, $x_0 \notin \bar{B}(\phi(\tau_k), \theta) \cup \bar{B}(\phi(\tau_k^+), \theta)$, 不等式 $\rho(x_0, L) < \delta$ 隐含着对任意的 $t \in J^+(t_0, x_0)$, 有 $\rho(x(t, t_0, x_0), L) < \varepsilon$ 成立, 这里 $J^+(t_0, x_0)$ 表示解的最大存在区间.
- (ii) 轨道吸引的, 如果对每一个 $\varepsilon > 0$, $\theta > 0$ 和 $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $|t_0 - \tau_k| > \theta$, 存在 λ 和 σ

使得 $\rho(x_0, L) < \lambda$, 且当 $x_0 \in \Omega$, $x_0 \notin \bar{B}(\phi(\tau_k), \theta) \cup \bar{B}(\phi(\tau_k^+), \theta)$ 和 $t \geq t_0 + \sigma$, $t \in J^+(t_0, x_0)$, $t_0 + \sigma \in J^+(t_0, x_0)$ 时有 $\rho(x(t), L) < \varepsilon$ 成立。

(iii) 轨道渐近稳定的, 如果它是轨道稳定的和轨道吸引的。

定义 1.2.4[73] 系统(1.2.2) 的解 $\phi(t)$ 具有渐近相图的性质: 如果对任意的 $\eta > 0$ 和 $t_0 \in \mathbb{R}_+$, 满足 $|t_0 - \tau_k| > \eta$, 存在 $\lambda > 0$, 且对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 满足 $|x_0 - \phi(t_0)| < \lambda$ 和存在常数 $c \in \mathbb{R}$, 对任意的 $\rho > 0$, 存在 $\sigma > |c|$, 使得 $t_0 + \sigma \in J^+(t_0, x_0)$, 且对任意 $t \geq t_0 + \sigma$, $t \in J^+(t_0, x_0)$, $|t_0 - \tau_k| > \eta$ 有

$$|x(t+c, t_0, x_0) - \phi(t)| < \rho.$$

§1.3 齐次线性周期脉冲微分方程的 Floquet 理论

对于齐次线性 T -周期脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x, & t \neq \tau_k, t \in \mathbb{R}, \\ \Delta x = B_k x, & t = \tau_k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

我们假设有下面的条件:

条件 1.3.1: $A(\cdot) \in PC(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times n})$, $A(t+T) = A(t) (t \in \mathbb{R})$;

条件 1.3.2: $B_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det(E + B_k) \neq 0$, $\tau_k < \tau_{k+1} (k \in \mathbb{Z})$;

条件 1.3.3: 存在 $q \in \mathbb{N}$ 使得 $B_{k+q} = B_k$, $\tau_{k+q} = \tau_k + T$, $k \in \mathbb{Z}$;

定理 1.3.1[9] 如果条件 1.3.1、条件 1.3.2、条件 1.3.3 成立, 则每一个 (1.3.1) 的基解矩阵都可以表示为如下形式:

$$X(t) = \phi(t)e^{\Lambda t} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1.3.2)$$

这里 $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是常值矩阵, 矩阵 $\phi(\cdot) \in PC^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times n})$ 是非奇异和 T -周期的。

注释 1.3.1: 由定理 1.3.1 和条件 1.3.3 可知 Floquet 表达式(1.3.2)中的 $\phi(t)$ 是一个 Lyapunov 矩阵, 也即满足:

- (i) $\phi(\cdot) \in PC^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times n})$,
- (ii) $\phi(t)$ 和 $\frac{d\phi(t)}{dt}$ 在 \mathbb{R} 有界,
- (iii) $\inf_{t \in \mathbb{R}} |\det \phi(t)| > 0$.

定义 1.3.1: 在定理 1.3.1 的证明过程用来构造 Λ 的矩阵 M 满足 $X(t+T) = X(t)M$, ($t \in \mathbb{R}$), $\Lambda = \frac{1}{T} \ln M$, 我们称之为系统 (1.3.1) 相应于 $X(t)$ 的单值矩阵 (Monodromy matrix), 它的特征根 μ_1, \dots, μ_n 称之为系统 (1.3.1) 的 Floquet 乘子 (Multipliers)。

注释 1.3.2: 可以证明系统 (1.3.1) 所有的单值矩阵都相似且有相同的特征根。

注释 1.3.3: 可以选取 (1.3.1) 的任一个基解矩阵 $X(t)$ 并按公式:

$$M = X(t_0 + T)X^{-1}(t_0)$$

计算单值矩阵, 如果 $X(0^+) = E$, 则我们可以取 $M = X(T)$ 。

定理 1.3.2[9] 如果条件 1.3.1、条件 1.3.2 和条件 1.3.3 成立, 则 T -周期的线性脉冲方程 (1.3.1) 是:

- (i) 稳定的, 当且仅当所有 (1.3.1) 的乘子 $\mu_j (j=1, \dots, n)$ 满足不等式 $|\mu_j| \leq 1$, 并且 $|\mu_j| = 1$ 的那些特征根 μ_j 重数都为 1;
- (ii) 渐近稳定的, 当且仅当所有 (1.3.1) 的乘子 $\mu_j (j=1, \dots, n)$ 满足 $|\mu_j| < 1$;
- (iii) 不稳定的, 如果有某些 $j=1, \dots, n$ 使得 $|\mu_j| > 1$ 。

§1.4 一类特殊函数的定义和其性质

定义 1.4.1[17] LambertW 函数 $W: [-\frac{1}{e}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 被定义为实值函数 $f: y \rightarrow ye^y = x$ 的反函数, $W(x)$ 有两个分支, 我们定义 $W(0, x)$ 为主分支, 它满足 $W(0, x) \geq -1$, 另一个分支我们记为 $W(-1, x)$, $W(-1, x) \leq -1$ (见图 1.4.1)。

我们很容易得出 LambertW 函数的下列性质:

$$W(x)e^{W(x)} = x,$$

它的导数满足

$$x(1 + W(x))W'(x) = W(x),$$

这里 $x \neq 0$ 且 $x \neq -\frac{1}{e}$, 在零点的极限如下:

$$\lim_{x \rightarrow 0} W(0, x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} W(-1, x) = -\infty,$$

更多关于 LambertW 函数的内容参见文献[17]。

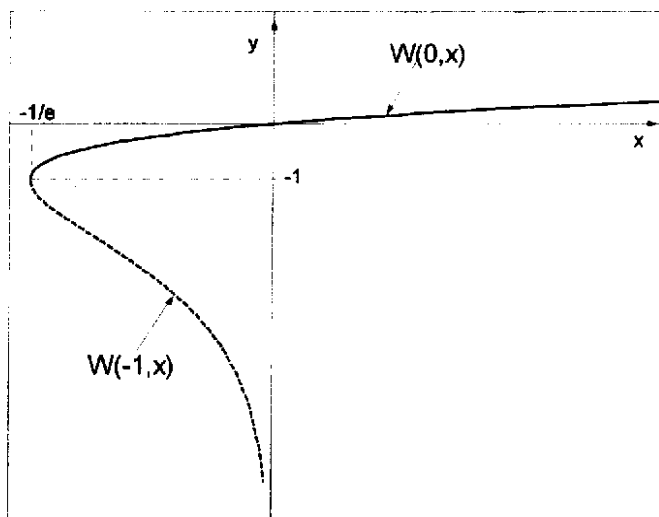


图 1.4.1

§1.5 本文用到的一些定理

Brouwer 不动点定理:

定理 1.5.1(Brouwer)[29] 任意一个从 \mathbb{R}^n 中的有界闭凸集到其自身的连续映射都至少有一个不动点。

下面定理是关于如下的一般形式的泛涵微分方程:

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t), \quad (1.5.1)$$

这里 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $F(t, x_t)$ 是 $\mathbb{R} \times C^n[-\tau, 0]$ 上的实连续泛涵, $F(t, x_t)$ 关于 t 是 ω -周期的, 并且关于 x_t 满足局部 Lipschitz 条件。对任意的 $\Phi \in C^n[-\tau, 0]$, 记 $x(t, 0, \Phi) = x(x_1(t, 0, \Phi), x_2(t, 0, \Phi), \dots, x_n(t, 0, \Phi))$ 是方程(1.5.1)的具有初值 $x_0 = \Phi$ 的解。

定理 1.5.2[100] 如果存在正的常数 m 和 M 使得:

$$m < \liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t, 0, \Phi) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t, 0, \Phi) < M, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

对任意的 $\Phi \in C_+^n[-\tau, 0]$, 则系统 (1.5.1) 必有 ω -周期解。

定理 1.5.3[13] 如果 $[0, +\infty]$ 上的非负函数 f 可积且在 $[0, +\infty]$ 上一致连续, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

第二章 害虫治理的状态依赖脉冲微分方程

§2.1 生物背景及模型的建立

害虫治理方法的研究在农业生产中是非常有应用价值和意义的,在过去的二十年间人们不断研究对有害昆虫和节肢动物的控制,而这种控制也因为人类活动或气候变迁而变得更加复杂。在单一的控制策略指导下,喷洒杀虫剂即化学控制是作为控制害虫数量的主要方法,但其弊端在于会对环境产生污染以及耗费大量的人力物力,另外喷洒杀虫剂或其他的一些农药也会杀伤大量有益动物如害虫的天敌,这样不仅没有达到预期的害虫治理效果,反而产生了不小的负面影响[22][87],文献[69]还就此提出了一种被称为半化学的害虫控制方法。治理害虫的另一种方法是生物防治,利用人工培养天敌,再定期的或害虫数量到达一定的危害水平时将其投放。生物防治有其悠久的历史,同时因为它能避免化学药剂对环境产生的污染问题而倍受人们的关注,许多学者对生物控制进行了研究和讨论[18][24][56][26]。

考虑到化学控制的快速性和生物控制的无污染性,人们提出了综合害虫治理(Integrated pest management or IPM)的方法来替代过去单一的化学防治措施,即将化学控制与生物控制结合起来,利用所有适当的方法和技术以尽可能互相配合的方式,将害虫控制在经济危害的水平以下。IPM 有很长的历史,定义也较多[62][63], Bartlett 于 1956 年在[15]最早提出了综合防治(Integrated pest control), Stern 等在[77]中作了进一步的阐述,还有学者将此概念提倡到全方位大系统途径(Total systems approach)[45]。

IPM 被证实是比任何一种单一的方法(如化学控制,生物控制)都更加有效[44][42][43]。为了更进一步的深入发展 IPM,一些学者利用数学模型从理论上进行更深层次的探讨。如果将天敌的投放和化学药剂的喷洒看作是一种瞬时行为,这种瞬间行为导致了害虫数量和天敌数量的不连续性。天敌的投放和化学药剂的喷洒时间不是定期的,而是根据害虫的数量,如果害虫的数量达到了一定危害值的时候,即瞬时的投放天敌和喷洒药剂。这个数量我们称之为经济临界值(Economic Threshold or ET)[77][44][42][43]。基于此想法,唐在文献[99]首先将状态依赖的自治脉冲微分方程(1.2.3)应用在综合害虫治理中,构造了如下状态依赖的自治脉冲微分方程来描述 IPM 策略:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(cx - d) \end{cases} & x < x_1, \\ \begin{cases} \Delta x = -px \\ \Delta y = q \end{cases} & x = x_1, \\ x(0^+) = x_0^+ < x_1, y(0^+) = y_0^+, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

这里 x 表示害虫的密度, y 表示天敌的密度, x_1 是经济临界值, 系数 a, b, c, d, p, q 均为正数。虽然脉冲微分方程的稳定性理论已经有了很深入的发展, 但其定性理论特别是这种状态依赖的脉冲微分方程的定性理论还处在发展阶段。研究此类模型的定性性质如周期解的存在性等还是有一定的困难。但由于系统 (2.1.1) 的特殊性, 它的显示解可以求出, 系统可以转化为等价的差分方程, 利用此方法, 唐[99]得出了系统 (2.1.1) 的阶一周解的存在性和稳定性以及阶二周期解的存在性等问题。

系统 (2.1.1) 在描述两个脉冲点之间的连续过程时采用了没有密度之约束项的两种捕食 Lotka-Volterra 模型。密度制约项表示随着种群数量的增加, 个体平均生存空间的减少而使得整个种群的增长速度变慢, 当种群数量不断增大到接近系统容纳量的时候, 种群的增长速度将会变得很慢甚至是停滞的状态。这是符合自然界中实际的情况的, 因此我们将模型 (2.1.1) 改进为在脉冲点之间的连续阶段具有密度制约因素, 以使模型更能真实反映实际情况。但由于有关状态依赖的脉冲微分方程的定性理论还处在起步阶段, 具有一定的难度, 我们首先只在害虫的发展中加上密度制约项, 改进后的方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - rx - by) \\ \dot{y} = y(cx - d) \end{cases} & x < x_1, \\ \begin{cases} \Delta x = -px \\ \Delta y = q \end{cases} & x = x_1, \\ x(0^+) = x_0^+ < x_1, y(0^+) = y_0^+, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

系统 (2.1.2) 是本章所要研究的模型, 它在系统 (2.1.1) 的基础上增加了一个密度制约项, 这将使得系统由原来的可求解的方程变为不可求解的方程, 因此在[99]中使用的基于求出显示解的分析方法在对系统 (2.1.2) 的研究中将不能使用, 这使得对系统 (2.1.2) 的研究变得非常困难。受 Poincaré-Bendixson 环域定理[34]的启发, 我们将利用微分方程比较原理和 Brouwer 不动点定理[29]解决系统 (2.1.2) 的阶一周解存在性等问题, 并采用数值模拟的方法讨论周期解的吸引力。

§2.2 平面自治脉冲微分方程阶一周期解的存在性定理

本节首先考虑一个较一般形式的平面自治脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \notin M, \\ \begin{cases} \Delta x = I_1(x, y) \\ \Delta y = I_2(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in M, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

其中 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, P, Q, I_1, I_2 是从 \mathbb{R}^2 到 \mathbb{R} 的映射, $M \subset \mathbb{R}^2$ 是脉冲状态集, 我们还给出以下假设:

条件 2.2.1 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 关于 x, y 连续;

条件 2.2.2 $M \subset \mathbb{R}^2$ 是一条直线, $I_1(x, y)$ 和 $I_2(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 是关于 x, y 的线性函数。

对任一点 $S(x, y) \in M$, 我们定义 $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 如下:

$$I(S) \triangleq S^+ = (x^+, y^+) \in \mathbb{R}^2,$$

$$x^+ = x + I_1(x, y), \quad y^+ = y + I_2(x, y),$$

很显然 $N=I(M)$ 在条件 2.2.2 的前提下也是 \mathbb{R}^2 中的一条直线或是直线的一部分, 另外为了使系统 (2.2.1) 满足定义 1.1.2 中的条件(i) 我们始终假设 $N \cap M = \emptyset$, 这样系统 (2.2.1) 就是一个脉冲半动力系统。下面定理将给出系统 (2.2.1) 存在由定义 1.1.4 定义的阶一周期解的充分条件。

定理 2.2.1 如果系统 (2.2.1) 满足条件 2.2.1 和条件 2.2.2, 并且存在一个有界的单连通闭区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 满足下列条件:

- (i) D 没有奇点, D 的边界 ∂D 由三部分: L_1, L_2 和 L_3 组成,
- (ii) $L_1 = D \cap M$ 是一条线段, 除了在端点外它不和系统 (2.2.1) 任一条轨线相切,
- (iii) $L_2 \subset I(M)$ 是一条线段, 满足 $I(L_1) \subset L_2$,
- (iv) 从 $L_2 \cup L_3$ 上的点出发的系统 (2.2.1) 的轨线都将进入区域 D 的内部, 则在区域 D 内必存在一个系统 (2.2.1) 的阶一周期解 (见图 2.2.1)。

证明: 首先我们要证明每一个从线段 L_2 上的点 S 出发的系统 (2.2.1) 的轨线都将与线段 L_1 相交, 即 $C^+(S) \cap L_1 \neq \emptyset$, 这里 $C^+(S)$ 是从 S 出发的正半轨。

如果上面陈述不成立, 则由定理条件可得 $C^+(S) \subset \text{int}(D)$, 这里 $\text{int}(D)$ 表示区域 D 的内部。于是此正半轨的 ω -极限集 $\Omega(C^+(S))$ 应满足 $\Omega(C^+(S)) \subset D$, 同时由定理条件知

$\Omega(C^+(S))$ 中无系统 (2.2.1) 的奇点。再根据 Poincaré-Bendixson 定理[34], ω -极限集 $\Omega(C^+(S))$ 必是一闭轨, 但是二维自治系统的闭轨一定会包含奇点, 这与定理条件中区域 D 是单连通的并且内部无奇点相矛盾。

另外, 我们还可以指出从线段 L_2 上的点 S 出发的系统 (2.2.1) 的轨线不可能在线段 L_1 的端点与之相交。否则, 这条轨线将区域 D 分隔成两个区域, 而其中一定有一个区域是不含有除端点之外的线段 L_1 上的点。进入到这个区域的轨线将不可能再出来, 于是和前面的讨论类似, 利用平面自治动力系统的性质我们很容易得出这个区域一定含有奇点, 这同样与定理中的条件矛盾。

下面我们定义一个后继函数 $f: L_2 \rightarrow L_2$, 对每一个 $S \in L_2$, $f(S) = I(S^*) \in L_2$, 其中 S^* 定义为线段 L_1 和从 S 出发的系统 (2.2.1) 的轨线的交点。

接下来我们证明函数 f 在 L_2 上是连续的, 也就是说, 我们要证明对给定的 $S_0 \in L_2$, 满足对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $S \in B(S_0, \delta) \cap L_2$ 时, 有 $f(S) \in B(f(S_0), \varepsilon)$, $B(S_0, \delta)$ 表示 S_0 的以 δ 为半径的开邻域。

记 S_0^* 为系统 (2.2.1) 从 S_0 出发的轨线与 L_1 的交点, 由前述知 S_0^* 不是 L_1 的端点, 且有 $f(S_0) = I(S_0^*)$ 。因为映射 $I: M \rightarrow N$ 连续, 所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $S^* \in B(S_0^*, \delta_1) \cap L_1$ 时, 有 $f(S) = I(S^*) \in B(f(S_0), \varepsilon)$ 。

设直线 M 的方程为 $ax+by+c=0$, 则平行于 M 的直线族为:

$$\lambda(x, y) \triangleq ax + by = C,$$

由定理条件(ii)可知, 直线 M 不会在 S_0^* 处与系统 (2.2.1) 的轨线相切, 也就是说二元函数 $\lambda(x, y)$ 沿系统轨线的导数不为零, 我们有:

$$\left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{S_0^*} > 0, \text{ 或者, } \left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{S_0^*} < 0,$$

不失一般性, 我们假设 $\left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{S_0^*} > 0$ 。因为 $\frac{d\lambda}{dt} = ax + by = aP(x, y) + bQ(x, y)$ 在 R^2 中关于 x 和 y 连续, 所以必存在 $\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \delta_1$, 使得当 $S \in B(S_0^*, \delta_2)$ 时, $\left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_S > 0$, 这意味着在 $B(S_0^*, \delta_2)$ 里, 所有的轨线都将从平行直线族 $\lambda(x, y) = C$ 的同一侧穿越到另一侧。

我们在线段 L_1 上 S_0^* 的两侧分别选取点 S_1^* 和 S_2^* , $S_1^* \in L_1$, $S_2^* \in L_1$, $S_1^*, S_2^* \in B(S_0^*, \delta_2)$, 然后我们继续在 $B(S_0^*, \delta_2)$ 里按如下方法选取四个点 A_1, A_2, B_1, B_2 : A_1 和 B_1 在同一条

经过 S_1^* 的轨线上, 它们分别在 S_1^* 的两侧, A_2 和 B_2 在同一条经过 S_2^* 的轨线上, 它们分别在 S_2^* 的两侧, A_1 和 A_2 在平行直线族 $\lambda(x, y) = C$ 的同一条直线上, B_1 和 B_2 在平行直线族 $\lambda(x, y) = C$ 的同一条直线上。

线段 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{B_1B_2}$ 、 A_1 和 B_1 之间的轨线、 A_2 和 B_2 之间的轨线构成一个曲边平行四边形, 我们称由曲边平行四边形围成的开区域为流闸, 记为 $\square\overline{A_1B_1B_2A_2}$ 。特别的, 根据这个流闸的选取方法我们可以使得 $\square\overline{A_1B_1B_2A_2} \subset B(S_0^*, \delta_2)$ 。在 $\square\overline{A_1B_1B_2A_2}$ 中每条轨线与平行直线族 $\lambda(x, y) = C$ 中的每条直线都有且仅有一个交点, 特别地, 与直线 L_1 有且仅有一个交点。因为 $\square\overline{A_1B_1B_2A_2}$ 是个开集, S_0^* 是它的内点, 所以存在 $\delta_3 > 0$, $\delta_3 < \delta_2$, 使得 $B(S_0^*, \delta_3) \subset \square\overline{A_1B_1B_2A_2}$ 。

设 $\pi(t, t_0, S_0)$ 是过点 S_0 的系统 (2.2.1) 的解轨线, $\pi(t_0, t_0, S_0) = S_0$, $S_0^* = \pi(T, t_0, S_0)$, 而且对给定的 $S \subset L_2$, 令 $\bar{S} \triangleq \pi(T, t_0, S)$ 。根据微分方程解对初值的连续性可知, 对前面提到的 $\delta_3 > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $S \in B(S_0, \delta) \cap L_2$ 时, 有 $\bar{S} \in B(S_0^*, \delta_3)$, 此时点 \bar{S} 一定在流闸 $\square\overline{A_1B_1B_2A_2}$ 中, 轨线 $\pi(t, t_0, S)$ 必与直线 L_1 相交, 设交点为 $S^* \in \square\overline{A_1B_1B_2A_2}$, 所以必有 $I(S^*) \in B(f(S_0), \varepsilon)$, 综上, 我们即证明了函数 f 是连续的。由不动点定理 1.5.1 可知函数 f 在 L_2 上必有不动点, 而这个不动点就对应着系统的阶一周期解。■

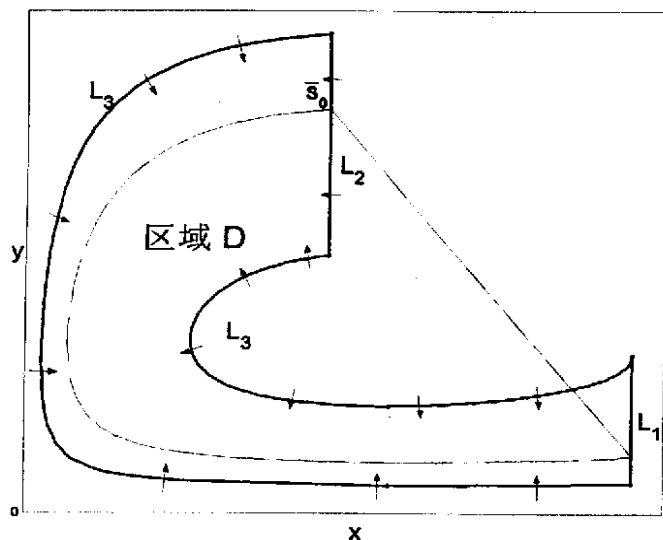


图 2.2.1: 定理示意图

注释 2.2.1 上面定理中的区域 D 显然也是系统 (2.2.1) 的一个不变集。

我们可将此定理条件减弱, 得到如下定理。

定理 2.2.2 如果系统 (2.2.1) 满足条件 2.2.1 和条件 2.2.2, 并且存在一个有界的单连通闭区域 $D \subset R^2$ 满足下列条件:

- (v) D 没有奇点, D 的边界为 ∂D , $(D - \partial D) \cap M = \emptyset$
- (vi) $L_1 = \partial D \cap M$ 是一条线段, 除了在端点外它不和系统 (2.2.1) 任一条轨线相切, 且有 $I(L_1) \subset D$,
- (vii) 从 $\partial D - L_1$ 上的点出发的系统 (2.2.1) 的轨线都将进入区域 D 的内部, 则在区域 D 内必存在一个系统 (2.2.1) 的阶一周期解。

证明: 首先我们可以用与定理 2.2.1 中相同的方法证明从 $I(L_1)$ 上的点出发的轨线必然要与线段 L_1 相交。下面我们再证明这个交点不可能是 L_1 的端点。

假设有一点 $S \in I(L_1)$, 从 S 出发的轨线 $\pi(0, S, t)$ 与 L_1 相交于 L_1 的端点, $\pi(0, S, 0) = S$, 我们证明必然存在 $t < 0$ 使得 $\pi(0, S, t) \in \partial D$, 如若不然, 则 S 的负半轨将包含在区域 D 内, 利用 Poincaré-Bendixson 定理[34], 我们可以证明这将与区域 D 不含奇点相矛盾。于是从点 S 出发的轨线 $\pi(0, S, t)$ 将区域 D 分为两部分, 其中必有一部分使得轨线不能越出, 这又与条件矛盾。所以从 $I(L_1)$ 上的点出发的轨线不可能与线段 L_1 相交于 L_1 的端点。

下面我们定义一个后继函数 $f: I(L_1) \rightarrow I(L_1)$, 对每一个 $S \in I(L_1)$, $f(S) = I(S^*) \in I(L_1)$, 其中 S^* 定义为线段 L_1 和从 S 出发的系统 (2.2.1) 的轨线的交点。利用与定理 2.2.1 相同的方法我们可以证明函数 f 是连续的, 再利用不动点定理即可证明本定理。■

§2.3 治理害虫的状态依赖脉冲微分方程的解的周期性

本节考虑系统 (2.1.2) 的阶一周期解的存在性问题, 其中的系数 a, b, c, d, p, q 和 r 同模型 (2.1.1) 中一样均为正数。

我们给出一些假设:

条件 2.3.1 $a - rx_1 > 0$;

条件 2.3.2 $x_1 > \frac{d}{c}$;

条件 2.3.3 $p < 1$;

很显然 \mathbb{R}_+^2 是系统 (2.1.2) 的正不变集, 另外由于此模型的生物背景, 故我们只在 \mathbb{R}_+^2 中讨论. 由文献[95]可知如果模型 (2.1.2) 没有脉冲, 则在条件 2.3.1 和条件 2.3.2 成立的情况下具有唯一的全局渐近稳定的正平衡点, 所以系统 (2.1.2) 的每一条正初值的轨线要么经过至多有限次的脉冲后收敛到这个正平衡点, 要么则有无穷多次脉冲.

我们引入如下两个比较系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(cx - d), \end{cases} \quad (2.3.1)$$

和

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - rx_1 - by), \\ \dot{y} = y(cx - d), \end{cases} \quad (2.3.2)$$

我们指出, 系统 (2.1.2)、(2.3.1) 和 (2.3.2) 都有一个正平衡点, 我们分别记为: $O(x^*, y^*)$, $O_1(x^*, y_1^*)$ 和 $O_2(x^*, y_2^*)$, 其中 $x^* = d/c$, $y^* = \frac{ca - rd}{bc}$, $y_1^* = a/b$, $y_2^* = \frac{a - rx_1}{b}$, 在条件 2.3.1 和条件 2.3.2 的前提下我们还可以得到: $0 < y_2^* < y^* < y_1^*$.

对于比较系统 (2.3.1) 和 (2.3.2), 我们很容易可以计算出它们的解在相空间中都是一系列闭轨并且分别具有如下解析式:

$$V_1(x, y) \triangleq by + cx - a \ln y - d \ln x + V_1^0 = C_1,$$

$$V_2(x, y) \triangleq by + cx - a_1 \ln y - d \ln x + V_2^0 = C_2,$$

其中 $a_1 = a - rx_1$, $V_1^0 = a \ln \frac{a}{b} + d \ln \frac{d}{c} - a - d$, $V_2^0 = a_1 \ln \frac{a}{b} + d \ln \frac{d}{c} - a_1 - d$, $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$, $V_1(x, y)$ 和 $V_2(x, y)$ 都是正定的函数.

引理 2.3.1 如果条件 2.3.1 和条件 2.3.2 成立, 则在区域 $\mathbb{R}_+^2 \cap \{(x, y) | x < \frac{d}{c}\}$ 中, 系统 (2.1.2) 的所有轨线都将由内侧向外侧穿越闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 中的每条闭曲线, 而由外侧向内侧穿越闭曲线族 $V_2(x, y) = C_2$ 中的每条闭曲线, 在区域 $\mathbb{R}_+^2 \cap \{(x, y) | \frac{d}{c} < x < x_1\}$ 情况则相反, 即轨线由外侧向内侧穿越闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 中的每条闭曲线, 而由内侧向外侧穿越闭曲线族 $V_2(x, y) = C_2$ 中的每条闭曲线.

证明: 我们沿着系统 (2.1.2) 的轨线对 $V_1(x, y)$ 和 $V_2(x, y)$ 求导:

$$\frac{dV_1}{dt} = -crx \left(x - \frac{d}{c} \right),$$

$$\frac{dV_2}{dt} = -cr(x - x_1) \left(x - \frac{d}{c} \right),$$

所以当 $0 < x < \frac{d}{c}$ 时, $\frac{dV_1}{dt} > 0$, 当 $x > \frac{d}{c}$ 时, $\frac{dV_1}{dt} < 0$; 当 $0 < x < \frac{d}{c}$ 时, $\frac{dV_2}{dt} < 0$, 当 $\frac{d}{c} < x < x_1$ 时, $\frac{dV_2}{dt} > 0$, 由此很容易得到引理中的结论。■

引理 2.3.2 如果条件 2.3.1 成立, 且有 $x_1 > 0$ 和 $x_1 \neq \frac{d}{c}$, 则直线 $x = x_1$ 将与闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 和 $V_2(x, y) = C_2$ 中的唯一一条闭曲线相切, 切点分别为 (x_1, y_1^*) 和 (x_1, y_2^*) .

证明: 对方程 $V_1(x, y) = C_1$ 两边关于 y 求导:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b}{y} \left(\frac{a}{b} - y \right) \left(\frac{x}{cx - d} \right),$$

当且仅当 $y = y_1^* = \frac{a}{b}$, $x \neq \frac{d}{c}$ 时, $\frac{dx}{dy} = 0$ 成立, 也就是说直线 $x = x_1$ 与闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 中过点 (x_1, y_1^*) 的唯一的一条曲线相切, (x_1, y_1^*) 同时也是切点。

类似的, 我们可对对方程 $V_2(x, y) = C_2$ 两边关于 y 求导:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{cx - d} \left(\frac{a_1}{y} - b \right),$$

当且仅当 $y = y_2^* = \frac{a}{b}$, $x \neq \frac{d}{c}$ 时, $\frac{dx}{dy} = 0$ 成立, 与前面类似, 可得到直线 $x = x_1$ 与闭曲线族 $V_2(x, y) = C_2$ 中过点 (x_1, y_2^*) 的唯一的一条曲线相切, 切点为 (x_1, y_2^*) 。■

引理 2.3.3 如果 $x > 0$, $x \neq \frac{d}{c}$, 则闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 中过点 (x, y_1^*) 的曲线将与 $x = \frac{d}{c}$ 交于两点, 这两点的 y 坐标分别是:

$$-\frac{a}{b} W \left(0, -\frac{b}{a} e^\alpha \right) \quad \text{和} \quad -\frac{a}{b} W \left(-1, -\frac{b}{a} e^\alpha \right),$$

其中

$$\alpha = -1 - \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} \left(1 - \ln \frac{d}{c} \right) + \ln y_1^* + \frac{d}{a} \ln x.$$

证明: 设交点是 $\left(\frac{d}{c}, y \right)$, 则点 (x, y_1^*) 和 $\left(\frac{d}{c}, y \right)$ 在闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 中的同一条曲线上, 于是有:

$$by_1^* + cx - a \ln y_1^* - d \ln x = by + d - a \ln y - d \ln \frac{d}{c},$$

也即:

$$by - a \ln y = by_1^* + cx - d + d \ln \frac{d}{c} - a \ln y_1^* - d \ln x,$$

进一步可化为:

$$-\frac{b}{a}y + \ln y = -1 - \frac{cx_1}{a} + \frac{d}{a}\left(1 - \ln \frac{d}{c}\right) + \ln y_1^* + \frac{d}{a} \ln x_1 = \alpha,$$

两边取以 e 为底的幂可得:

$$-\frac{b}{a}ye^{-\frac{b}{a}y} = -\frac{b}{a}e^\alpha,$$

由 LambertW 函数的性质可知:

$$y = -\frac{a}{b}W\left(0, -\frac{b}{a}e^\alpha\right), \text{ 或者, } y = -\frac{a}{b}W\left(-1, -\frac{b}{a}e^\alpha\right),$$

y 有意义仅当 $-\frac{b}{a}e^\alpha$ 在 LambertW 函数的定义域里, 即要满足 $-\frac{b}{a}e^\alpha > -\frac{1}{e}$, 而这个不等式

我们可以化为 $\frac{cx}{d} - \ln \frac{cx}{d} > 1$, 很容易判定它总成立. 这样我们就得到了两个交点的 y 坐标,

另外由 LambertW 函数的性质还可以得到:

$$-\frac{a}{b}W\left(0, -\frac{b}{a}e^\alpha\right) < y_1^*, \quad -\frac{a}{b}W\left(-1, -\frac{b}{a}e^\alpha\right) > y_1^*,$$

引理证毕. ■

引理 2.3.4 如果 $x > 0$, $x \neq \frac{d}{c}$, 则闭曲线族 $V_2(x, y) = C_2$ 中过点 (x, y_2^*) 的曲线将与 $x = \frac{d}{c}$ 交于两点, 这两点的 y 坐标分别是:

$$-\frac{a_1}{b}W\left(0, -\frac{b}{a_1}e^\beta\right) \text{ 和 } -\frac{a_1}{b}W\left(-1, -\frac{b}{a_1}e^\beta\right),$$

其中

$$\beta = \frac{1}{a_1}(d - by_2^* - cx) + \ln y_2^* + \frac{d}{a_1} \ln x - \frac{d}{a_1} \ln \frac{d}{c}.$$

此引理的证明与引理 2.3.3 类似.

引理 2.3.5 如果 $x_0 > 0$ 给定, $y_0 < y_1^*$ 且足够小, 则直线 $x = x_0$ 与闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 中过点 $\left(\frac{d}{c}, y_0\right)$ 的曲线必相交于两点, 如果记为 $(x_0, h_1(y_0))$ 和 $(x_0, h_2(y_0))$, 这

里 $h_1(y_0) < h_2(y_0)$, 则还有:

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} h_1(y_0) = 0, \quad \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} h_2(y_0) = +\infty.$$

证明: 设 (x_0, h) 和 $(\frac{d}{c}, y_0)$ 在闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 中的同一条上, 则有

$$by_0 + d - a \ln y_0 - d \ln \frac{d}{c} = bh + cx_0 - a \ln h - d \ln x_0,$$

即:

$$-\frac{b}{a}h + \ln h = -\frac{b}{a}y_0 - \frac{d}{a} + \frac{c}{a}x_0 + \ln y_0 + \frac{d}{a} \ln \frac{d}{c} - \frac{d}{a} \ln x_0,$$

两边取以 e 为底的幂可得:

$$-\frac{b}{a}he^{-\frac{b}{a}h} = -\frac{b}{a}e^\gamma,$$

其中

$$\gamma = \frac{c}{a}x_0 - \frac{b}{a}y_0 - \frac{d}{a} + \ln y_0 + \frac{d}{a} \ln \frac{d}{c} - \frac{d}{a} \ln x_0,$$

当 $y_0 \rightarrow 0$ 时, $\gamma \rightarrow -\infty$, 所以当 y_0 足够小的时候有 $-\frac{b}{a}e^\gamma > -\frac{1}{e}$, LambertW 函数有意义, 此时上面关于 h 的方程有两个根:

$$h_1(y_0) = -\frac{a}{b}W\left(0, -\frac{b}{a}e^\gamma\right), \quad h_2(y_0) = -\frac{a}{b}W\left(-1, -\frac{b}{a}e^\gamma\right),$$

在由 LambertW 函数的性质我们得到:

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} h_1(y_0) = 0, \quad \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} h_2(y_0) = +\infty. \blacksquare$$

和引理 2.3.5 类似, 我们有:

引理 2.3.6 如果 $x_0 > 0$ 给定, $y_0 < y_2^*$ 且足够小, 则直线 $x = x_0$ 与闭曲线族 $V_2(x, y) = C_2$ 中过点 $(\frac{d}{c}, y_0)$ 的曲线必相交于两点, 如果记为 $(x_0, h_1(y_0))$ 和 $(x_0, h_2(y_0))$, 这里 $h_1(y_0) < h_2(y_0)$, 则还有:

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0^+} h_1(y_0) = 0, \quad \lim_{y_0 \rightarrow 0^+} h_2(y_0) = +\infty.$$

定理 2.3.1 如果条件 2.3.1、条件 2.3.2 和条件 2.3.3 成立, 并且 $q > \frac{a}{b} - \frac{r}{b}(1-p)x_1$, 那么如果系统 (2.1.2) 在 \mathbb{R}_+^2 有阶一周解, 则这个阶一周解是唯一的。

证明: 首先我们分析系统 (2.1.2) 的向量场, 它有两等倾线 $x = \frac{d}{c}$ 和 $a-rx-by=0$, 这

两条等倾线将平面上的正锥 \mathbb{R}_+^2 分为四个区域:

$$S_1 \triangleq \mathbb{R}_+^2 \cap \{(x, y) \mid cx - d > 0, a - rx - by < 0\},$$

$$S_2 \triangleq \mathbb{R}_+^2 \cap \{(x, y) \mid cx - d < 0, a - rx - by < 0\},$$

$$S_3 \triangleq \mathbb{R}_+^2 \cap \{(x, y) \mid cx - d < 0, a - rx - by > 0\},$$

$$S_4 \triangleq \mathbb{R}_+^2 \cap \{(x, y) \mid cx - d > 0, a - rx - by > 0\},$$

这里 $S_i (i=1,2,3,4)$ 在条件 2.3.1 和条件 2.3.2 下都不为空。

我们很容易看出如果没有脉冲的作用, 系统 (2.1.2) 的从 S_1 中的点出发的轨线都将进入区域 S_2 , 类似的, 从 S_2 中的点出发的轨线都将进入区域 S_3 , 从 S_3 中的点出发的轨线都将进入区域 S_4 , 最后从 S_4 出发的轨线又都将回到 S_1 。

现在假设系统 (2.1.2) 有两个阶一周解 $\pi_1(z_1, t)$ 和 $\pi_2(z_2, t)$, $z_1(x_1, y_0^1)$ 和 $z_2(x_1, y_0^2)$ 是这两个解的脉冲点, 不失一般性, 我们设 $y_0^1 > y_0^2$, 于是我们可以由上面的向量场分析断定 z_1 和 z_2 一定在线段 $\overline{AD_1}$ 上, 这里点 A 是 $(x_1, 0)$, $D_1 = (x_1, y_2^*)$, 记 $z_1^+ = I(z_1)$, $z_2^+ = I(z_2)$, 则从 z_1^+ 和 z_2^+ 出发的轨线要到达 z_1 和 z_2 必然会在区域 S_2 或 S_3 相交, 这与系统的自治性矛盾, 故不可能有两个阶一周解。■

当 $x_1 > \frac{d}{c}$ 时, 闭曲线族 $V_2(x, y) = C_2$ 中过点 $D_1(x_1, y_2^*)$ 的曲线将与直线 $x = \frac{d}{c}$ 交于两点, 其中在直线 $y = y_2^*$ 下方的交点我们记为 $D_2\left(\frac{d}{c}, y_2\right)$, 利用引理 2.3.4 我们可以计算出:

$$y_2 \triangleq -\frac{a_1}{b} W\left(0, -\frac{b}{a_1} \exp\left(\frac{1}{a_1}(d - by_2^* - cx_1) + \ln y_2^* + \frac{d}{a_1} \ln x_1 - \frac{d}{a_1} \ln \frac{d}{c}\right)\right)$$

$$0 < y_2 < y_2^* < y_1^*,$$

点 D_2 必在闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 中的某条曲线上, 由上面的不等式可知这条曲线必与直线 $x = \frac{d}{c}$ 交于两点, 记其中在直线 $y = y_1^*$ 上方的交点为 $\hat{D}_2 = \left(\frac{d}{c}, \hat{y}_2\right)$, 这里 \hat{y}_2 很容易可以计算出:

$$\hat{y}_2 \triangleq -\frac{a}{b} W\left(-1, -\frac{b}{a} y_2 e^{-\frac{b}{a} y_2}\right) > y_1^*,$$

这里 \hat{y}_2 与脉冲系数 p, q 无关。

闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 中经过点 $D_2\left(\frac{d}{c}, y_2\right)$ 的闭曲线在直线 $x = \frac{d}{c}$ 的左侧有一条垂直

切线, 由引理 2.3.2 我们不妨设切点为 $E(x_E, y_1^*)$, 其中 x_E 可按如下方法计算: 因为 E 和 D_2 在同一条 $V_1(x, y) = C_1$ 中的曲线, 我们有

$$by_1^* + cx_E - a \ln y_1^* - d \ln x_E = by_2 + d - a \ln y_2 - d \ln \frac{d}{c},$$

即

$$-\frac{c}{d}x_E + \ln x_E = \frac{b}{d}(y_1^* - y_2) - 1 + \frac{a}{d}(\ln y_2 - \ln y_1^*) + \ln \frac{d}{c},$$

于是可解得

$$x_E = -\frac{d}{c} W\left(0, -\frac{c}{d} \exp\left(\frac{b}{d}(y_1^* - y_2) - 1 + \frac{a}{d}(\ln y_2 - \ln y_1^*) + \ln \frac{d}{c}\right)\right),$$

上式的 Lambert W 函数若要有意义, 则下面的不等式一定要成立:

$$-\frac{c}{d} \exp\left(\frac{b}{d}(y_1^* - y_2) - 1 + \frac{a}{d}(\ln y_2 - \ln y_1^*) + \ln \frac{d}{c}\right) > -\frac{1}{e},$$

此不等式可化简为:

$$\frac{a}{d} - \frac{a}{d} \ln \frac{a}{b} - \frac{b}{d} y_2 + \frac{a}{d} \ln y_2 < 0,$$

很容易验证这个不等式当其中参数都为正的情况下始终成立, 因此也就保证了 x_E 的存在性。

当 $x_E < x_1(1-p) \leq \frac{d}{c}$ 时, 闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 中经过 D_2 的曲线和直线 $x = (1-p)x_1$ 会有两个交点, 我们记其中在直线 $y = y_1^*$ 上方的为 $D_3((1-p)x_1, y_3)$, 我们声明 y_3 是存在的, 事实上由引理 2.3.5 我们可计算出

$$y_3 \triangleq -\frac{a}{b} W\left(-1, -\frac{b}{a} e^\eta\right),$$

其中

$$\eta = \frac{c}{a}(1-p)x_1 - \frac{b}{a}y_2 - \frac{d}{a} + \ln y_2 + \frac{d}{a} \ln \frac{d}{c} - \frac{d}{a} \ln((1-p)x_1),$$

要使 y_3 有意义, 则必须 $-\frac{b}{a} e^\eta > -\frac{1}{e}$, 而这个不等式我们可以验证它是和 $x_1(1-p) > x_E$ 等价的。

下面我们给出几个系统 (2.1.2) 的阶一周解的存在定理。

定理 2.3.2 如果条件 2.3.1、条件 2.3.2、条件 2.3.3 成立, 并且下面的条件满足

$$x_E < x_1(1-p) < \frac{d}{c},$$

$$q > y_3,$$

则系统 (2.1.2) 在 \mathbb{R}_+^2 中有一个唯一的阶一周解。

证明：我们要构造一个包含阶一周解的区域。点 D_1 和 D_2 已经在前面定义过，因为 $x_1(1-p) > x_E$ ，按前面也可以定义出 D_3 。

现在我们在直线 $x = \frac{d}{c}$ 上选取点 $D_5\left(\frac{d}{c}, y_5\right)$ ，满足 $0 < y_5 < y_3$ ，而且我们可以选取足够小的 y_5 使得下面的 5 条成立：

a) 闭曲线族 $V_2(x, y) = C_2$ 中通过 D_5 的曲线与直线 $x = (1-p)x_1$ 交于两点，记上方的那个交点为 $D_4 = (x_1(1-p), y_4)$ ；

b) 闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 中过 D_5 的曲线和直线 $x = x_1$ 交于两点，记下方的交点为 $D_6 = (x_1, y_6)$ ；

c) 记 $\overline{D_1 D_2}$ 为区域 $\mathbb{R}_+^2 \cap \{(x, y) \mid x > \frac{d}{c}, y < y_1^*\}$ 中点 D_1 和 D_2 之间 $V_2(x, y) = C_2$ 的曲线段， $\overline{D_5 D_6}$ 为区域 $\mathbb{R}_+^2 \cap \{(x, y) \mid x > \frac{d}{c}, y < y_1^*\}$ 中点 D_5 和 D_6 之间 $V_1(x, y) = C_1$ 的曲线段， $\overline{D_1 D_2}$ 与 $\overline{D_5 D_6}$ 不相交；

d) 记 $\overline{D_2 D_3}$ 为区域 $\mathbb{R}_+^2 \cap \{(x, y) \mid x < \frac{d}{c}\}$ 中点 D_2 和 D_3 之间 $V_1(x, y) = C_1$ 的曲线段， $\overline{D_4 D_5}$ 为区域 $\mathbb{R}_+^2 \cap \{(x, y) \mid x > \frac{d}{c}\}$ 中点 D_4 和 D_5 之间 $V_2(x, y) = C_2$ 的曲线段， $\overline{D_2 D_3}$ 与 $\overline{D_4 D_5}$ 不相交；

$$e) y_4 > y_2^* + q,$$

事实上，a)，b)，e) 可以由引理 2.3.5 和引理 2.3.6 直接得到。由引理 2.3.5 y_5 可以取得足够小使得 $y_6 < y_2$ ，又因为 $V_1(x, y) = C_1$ 和 $V_2(x, y) = C_2$ 中的曲线在区域 $\mathbb{R}_+^2 \cap \{(x, y) \mid x > \frac{d}{c}, y < y_1^*\}$ 中是单调递增的，所以此时 c) 也成立。最后我们说明 d) 也可以成立，否则，这两段弧就至少有一个交点 (x_0, y_0) ，我们假设 $\overline{D_2 D_3}$ 的方程是： $by + cx - a \ln y - d \ln x = C_1^0$ ， $\overline{D_4 D_5}$ 的方程是： $by + cx - a_1 \ln y - d \ln x = C_2^0$ ，所以我们有：

$$\begin{cases} by_0 + cx_0 - a \ln y_0 - d \ln x_0 = C_1^0, \\ by_0 + cx_0 - a_1 \ln y_0 - d \ln x_0 = C_2^0, \end{cases}$$

可得:

$$rx_1 \ln y_0 = C_2^0 - C_1^0, \quad (2.3.3)$$

我们注意到当 $y_5 \rightarrow 0$ 时, 有 $C_2^0 \rightarrow +\infty$, 而 C_1^0 相对固定, 由此当 $y_5 \rightarrow 0$ 时, $y_0 \rightarrow +\infty$, 但这不可能, 因为 C_1^0 相对固定, y_0 有上界, 所以当 y_5 充分小的时候, 可以使(2.3.3)不成立, 这样 d) 也就可以成立了。

这样我们构造了一个区域, 它是由弧 $\widehat{D_1 D_2}$ 、弧 $\widehat{D_2 D_3}$ 、线段 $\overline{D_3 D_4}$ 、 $\overline{D_4 D_5}$ 、弧 $\widehat{D_5 D_6}$ 和线段 $\overline{D_6 D_1}$ 围成的闭的单连通的区域。

最后, 因为 $q > y_3$, 进而我们得到不等式:

$$y_6 + q > y_3,$$

再联系不等式 $y_4 > y_2^* + q$, 我们可以断定线段 $\overline{D_6 D_1}$ 中的点经过脉冲后都将在线段 $\overline{D_3 D_4}$ 中。至此, 我们构造的这个区域完全满足定理 2.2.1 中的条件, 所以此时系统 (2.1.2) 存在一个阶一周解, 再由定理 2.3.1 可知这个阶一周解也是唯一的, 如图 2.3.1。■

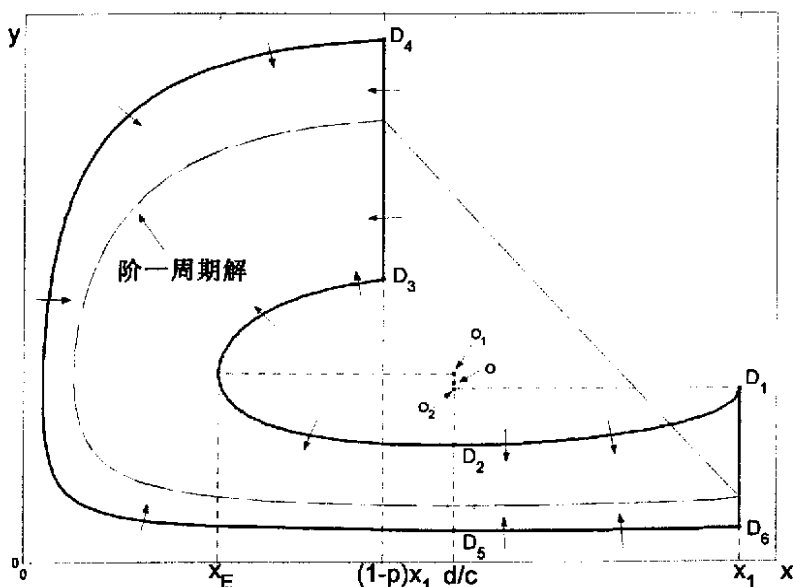


图 2.3.1: 定理图示

定理 2.3.3 如果条件 2.3.1、条件 2.3.2、条件 2.3.3 成立, 并且还有:

$$x_1(1-p) \leq x_E,$$

则系统 (2.1.2) 在 R_+^2 中存在阶一周期解。

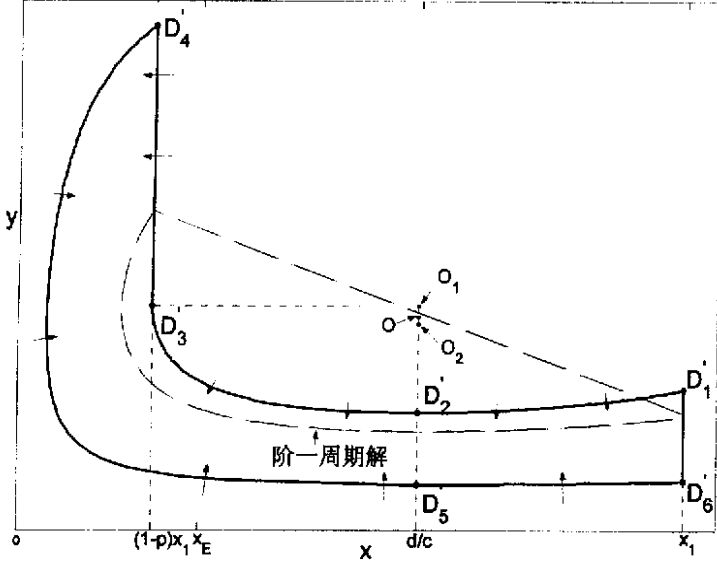


图 2.3.2: 定理图示

证明：从定理 2.3.3 的证明过程中我们知道，当 $x_1(1-p) < x_E$ 时，闭曲线族 $V_2(x, y) = C_2$ 中过 D_2 的曲线与直线 $x = (1-p)x_1$ 不相交，所以我们须重新选择点 D_1 、 D_2 和 D_3 以构造我们所需的区域。

我们取 $D_3' = ((1-p)x_1, y_1^*)$ ， $D_2' = (\frac{d}{c}, y_2')$ ，其中 D_2' 表示闭曲线族 $V_1(x, y) = C_1$ 中过 D_3' 的曲线和直线 $x = \frac{d}{c}$ 下方的交点， $y_2' < y_1^*$ ，由引理 2.3.3 有：

$$y_2' \triangleq -\frac{a}{b} W\left(0, -\frac{b}{a} e^\lambda\right),$$

$$\lambda = -1 - \frac{cx_1(1-p)}{a} + \frac{d}{a} \left(1 - \ln \frac{d}{c}\right) + \ln y_1^* + \frac{d}{a} \ln((1-p)x_1),$$

$$y_2' < y_2,$$

此时， $V_2(x, y) = C_2$ 中过 D_2' 的曲线必与直线 $x = x_1$ 交于两点，我们记在直线 $y = y_2^*$ 下方的交点为 $D_1' = (x_1, y_1')$ ，由引理 2.3.6 我们可以得到：

$$y_1' \triangleq -\frac{a_1}{b} W\left(0, -\frac{b}{a_1} \exp\left(\frac{c}{a_1} x_1 - \frac{b}{a_1} y_2' - \frac{b}{a_1} + \ln y_2' + \frac{d}{a_1} \ln \frac{d}{c} - \frac{d}{a_1} \ln x_1\right)\right).$$

与定理 2.3.3 中的 D_4 , D_5 , D_6 的选取类似, 我们可以选取点 $D_4'((1-p)x_1, y_4')$, $D_5'(\frac{d}{c}, y_5')$, $D_6'(x_1, y_6')$ 使得构造出如图 2.3.2 的单连通区域 $D_1'D_2'D_3'D_4'D_5'D_6'$ 。

我们记闭曲线族 $V_2(x, y) = C_2$ 中通过 D_5' 的曲线与直线 $x = (1-p)x_1$ 下方的那个交点为 $D_7'(x_1(1-p), y_7')$, 由引理 2.3.6 知可以选取点 D_5' 的纵坐标 y_5' 足够小使得 $y_6' + q > y_7'$ 和 $y_1' + q < y_4'$ 同时成立, 可知此时线段 $\overline{D_6'D_1'}$ 经过脉冲后都将在线段 $\overline{D_4'D_7'}$ 内, 也在区域 $D_1'D_2'D_3'D_4'D_5'D_6'$ 中, 根据定理 2.2.2, 故区域 $D_1'D_2'D_3'D_4'D_5'D_6'$ 中存在阶一周解。■

当 $(1-p)x_1 > \frac{d}{c}$ 时, 情况与前面的都不同, 我们将作如下讨论。我们按照定理 2.3.2 中的方法选取点 D_1 和 D_2 , $\hat{D}_2 = (\frac{d}{c}, \hat{y}_2)$ 也如前面所定义, 但 D_3 我们重新选取为 \bar{D}_3 , 它为线族 $V_2(x, y) = C_2$ 中过点 \hat{D}_2 的曲线与直线 $x = x_1(1-p)$ 上方的交点, 这里我们声明 \bar{D}_3 是存在的, 事实上闭曲线族 $V_2(x, y) = C_2$ 中过点 D_2 的曲线和直线 $x = x_1(1-p)$ 会相交, 我们记这条曲线和 $x = \frac{d}{c}$ 上方的交点为 $\bar{D}_2(\frac{d}{c}, \bar{y}_2)$, 我们可解得

$$\hat{y}_2 = -\frac{a}{b} W\left(-1, -\frac{b}{a} y_2 e^{-\frac{b}{a} y_2}\right),$$

$$\bar{y}_2 = -\frac{a_1}{b} W\left(-1, -\frac{b}{a_1} y_2 e^{-\frac{b}{a_1} y_2}\right),$$

由 Lambert W 函数很容易验证 $\bar{y}_2 < \hat{y}_2$, 也就是说闭曲线族 $V_2(x, y) = C_2$ 中过点 \hat{D}_2 的曲线在过 D_2 的曲线的外侧, 所以 \bar{D}_3 是一定存在的。由引理 2.3.5 可计算出它的纵坐标为

$$\bar{y}_3 \triangleq -\frac{a_1}{b} W\left(-1, -\frac{b}{a_1} \exp\left(\frac{c}{a_1} (1-p)x_1 - \frac{b}{a_1} \hat{y}_2 - \frac{d}{a_1} + \ln \hat{y}_2 + \frac{d}{a_1} \ln \frac{d}{c} - \frac{d}{a_1} \ln(1-p)x_1\right)\right).$$

定理 2.3.4 如果条件 2.3.1、条件 2.3.2、条件 2.3.3 成立, 并且下面的条件满足

$$x_1(1-p) > \frac{d}{c},$$

$$q > \bar{y}_3,$$

则系统 (2.1.2) 在 \mathbb{R}_+^2 中有一个唯一的阶一周解 (见图 2.3.3)。

证明过程与定理 2.3.2 的类似。这里不在赘述。

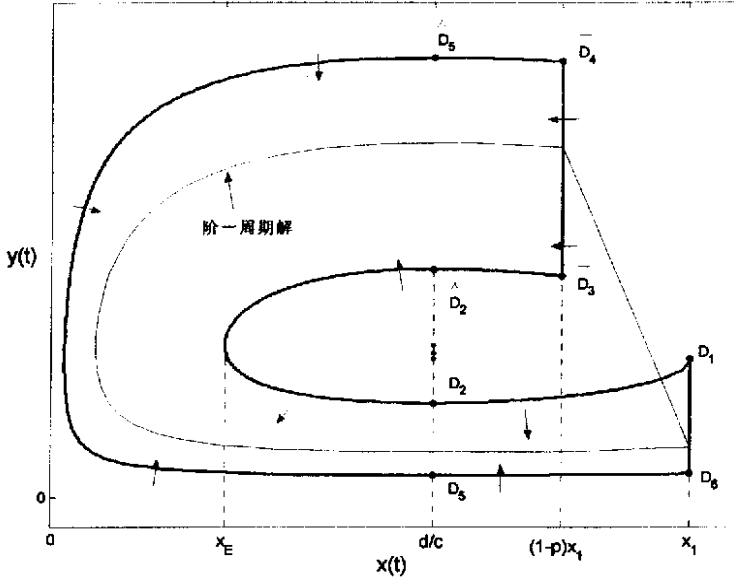


图 2.3.3

§2.4 系统的不变集和周期解的渐近性的数值分析

从上一节的讨论我们知道系统 (2.1.2) 在一定条件下可以存在阶一周期解, 使得系统可以周期性的持续发展。但因为无法求出其阶一周期解的显示表达式, 因此我们暂时无法对周期解的稳定性和吸引性作进一步的理论证明。本节将采用数值模拟的方法来描述在不同情况下所存在的阶一周期解的轨道吸引性以及无脉冲的系统不变集。

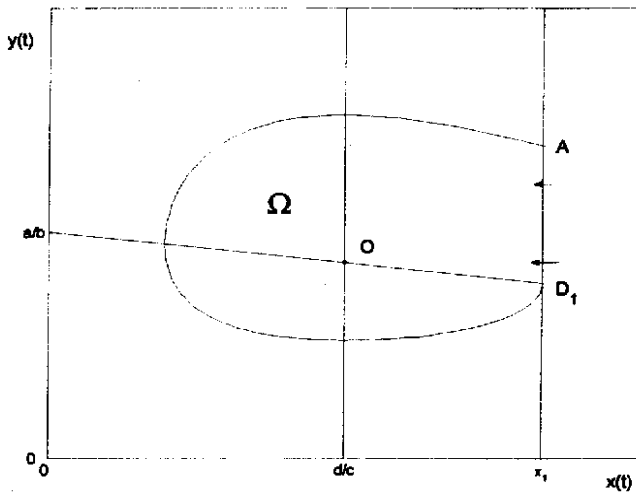
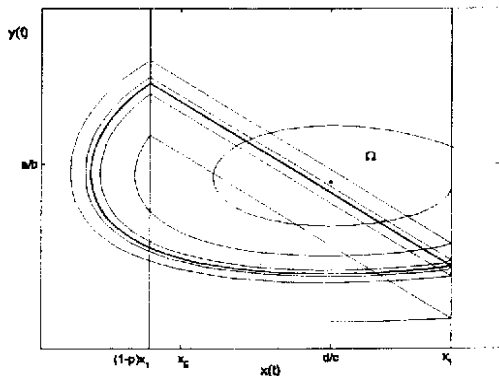
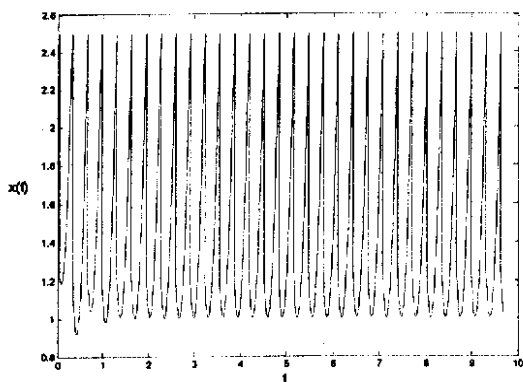


图 2.4.1: 系统不变集

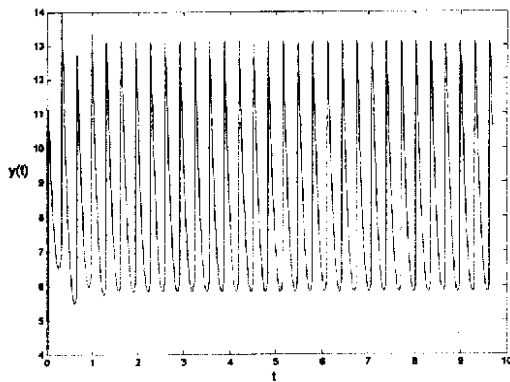
首先我们来讨论系统的无脉冲不变集，我们先计算系统轨线与脉冲状态集 $x = x_1$ 相切的切点，在 (2.1.2) 中令 $a - rx - by = 0$ ，它与 $x = x_1$ 的交点即为切点，可计算出它正是上一节多定义的点 D_1 ，我们记这条在 D_1 处与 $x = x_1$ 相切的的轨线在系统 (2.1.2) 所对应的连续系统中的解为 $\pi(x_0, y_0, t)$ ， $\pi(x_0, y_0, 0) = (x_0, y_0)$ ，设 $\pi(x_0, y_0, t_1) = D_1$ ，我们定义 $t_2 = \sup\{t | t < t_1, \pi(x_0, y_0, t) = (x_1, h)\}$ ，这里 h 是任意正数，则我们记点 $A = \pi(x_0, y_0, t_2)$ ，并记由曲线弧 $\pi(x_0, y_0, t), (t \in [t_2, t_1])$ 和直线 $x = x_1$ 所围成的开区域为 Ω ，如图 2.4.1。由系统 (2.1.2) 的向量场分析我们可知由 Ω 内任意一点出发的系统 (2.1.2) 的轨线都不可能再与直线 $x = x_1$ 相交并将一直停留在此区域内，因此 Ω 是系统的一个正不变集。而初值不在 Ω 内的轨线则至少要与直线 $x = x_1$ 相交一次，也就是说至少有一次脉冲。



a): 渐近阶一周解相图



b): $x(t)$ 的时间序列图



c): $y(t)$ 的时间序列图

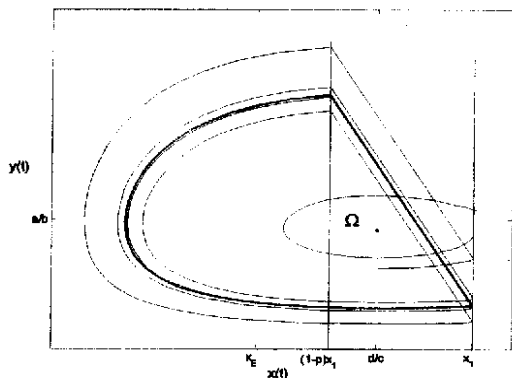
注：本图所选取的系统参数为 $a=15, b=1.5, c=4, d=8, x_1=2.5, r=0.5, p=0.5, q=7$ ，初值为 $x(0)=2, y(0)=4$

图 2.4.2: $(1-p)x_1 < x_E$ 时的阶一周解

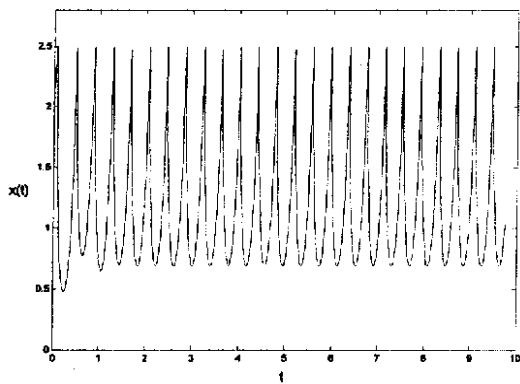
下面我们按照上一节的三个阶一周解的存在定理的条件分三种情况对于取定的参

数值来数值模拟系统 (2.1.2) 的解轨线。

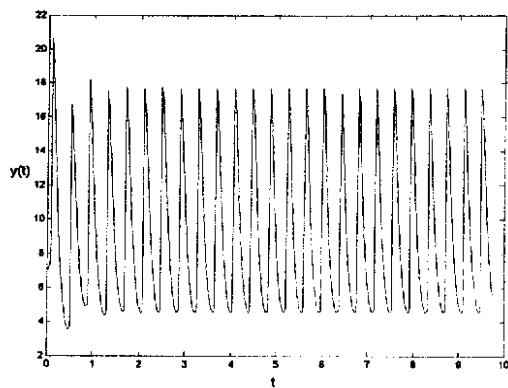
首先我们取定 $a=15, b=1.5, c=4, d=8, x_1=2.5, r=0.5; p=0.5, q=7$, 并从初值 $x(0)=2, y(0)=4$ 开始绘制轨线相图和时间序列, 见图 2.4.2, 此时可计算出 $x_E=1.37$, $(1-p)x_1 < x_E$, 根据定理 2.3.3 可知此时系统总存在阶一周期解, 而且由图 2.4.2a 可以看出这个解渐近于一个阶一周期解, 此阶一周期解是轨道吸引的, 并由时间序列图 2.4.2b 和图 2.4.2c 我们可以看出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 最后都渐近到以大约 0.32 为周期的函数。



a): 渐近阶一周期解相图



b): $x(t)$ 的时间序列图



c): $y(t)$ 的时间序列图

注: 本图所选取的系统参数为 $a=15, b=1.5, c=4, d=8, x_1=2.5, r=0.5; p=0.3, q=7$, 初值为 $x(0)=2, y(0)=13$

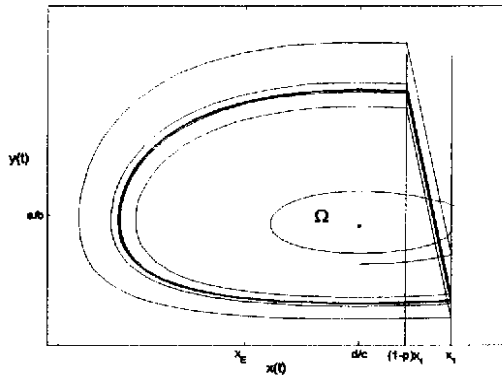
图 2.4.3: $x_E < (1-p)x_1 < d/c$ 时的阶一周期解

另外, 由定理 2.3.3 的证明过程可知其中包含阶一周期解的区域是一个吸引子, 在结合图 2.4.2, 我们可以很容易的发现当初值落在区域 Ω 内, 则轨线一直停留在这个区域内, 不会发生脉冲。当初值不在此区域内时(注: 由于生物背景我们只讨论 $x(0) < x_1$ 的情形), 解轨线最终渐近到一个阶一周期解, 其周期大约为 0.32。

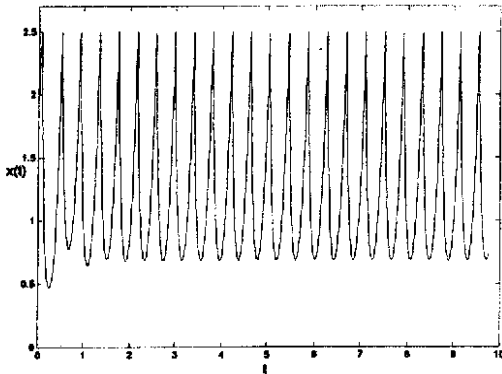
第二种情况是 $x_E < (1-p)x_1 < d/c$ 时, 这时我们取定参数为 $a=15, b=1.5, c=4, d=8, x_1=2.5,$

$r=0.5$; $p=0.3$, $q=13$, 并从初值 $x(0)=2$, $y(0)=7$ 开始绘制解的相图, 见图 2.4.3, 因为此时有 $q=13 > y_3=12.6$, 根据定理 2.3.2, 此时系统有唯一的阶一周期解, 由图上我们可以看出, 绘制的解轨线渐近于这个阶一周期解, 说明此时这个阶一周期解是轨道吸引的。如果初值落在区域 Ω 内, 则轨线一直停留在这个区域内, 不会发生脉冲。如果初值在 Ω 之外, 则将进入到定理 2.3.2 的证明中所定义的吸引子区域中, 由时间序列图 2.4.3b 和图 2.4.3c, 解将最终渐近于周期大约为 0.39 的周期解。

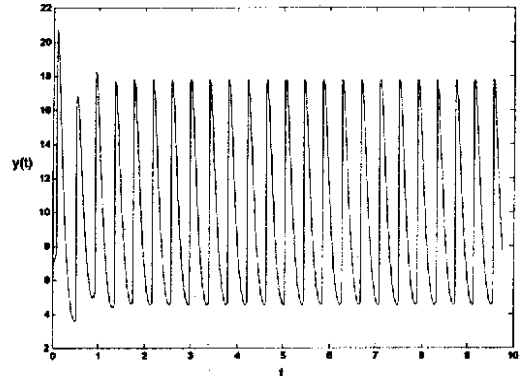
第三种情况是 $(1-p)x_1 > d/c$, 见图 2.4.4, 此时解将最终渐近于周期大约为 0.41 的阶一周期解。



a): 渐近阶一周期解相图



b): $x(t)$ 的时间序列图



c): $y(t)$ 的时间序列图

注: 本图所选取的系统参数为 $a=15$, $b=1.5$, $c=4$, $d=8$, $x_1=2.5$, $r=0.5$; $p=0.1$, $q=7$, 初值为 $x(0)=2$, $y(0)=13$

图 2.4.4: $(1-p)x_1 > d/c$ 时的阶一周期解

§2.5 生物结论及意义

本章研究了一个用于害虫控制的状态脉冲微分方程, 其中杀虫剂的喷洒和天敌的投

放是当害虫数量达到一定的危害值时进行的，目的是要研究此控制方法对害虫的影响。

由前面的理论和数值的结论可以看出，当初值不同时，所进行的控制也不同，对于在系统无脉冲不变集内的初值，我们无需进行人工控制即可使害虫数量保持低于经济危害值的水平。而对于不在此不变集内的初值的情况，杀虫剂喷洒量和天敌投放量满足一定条件时，控制将被最终稳定到一个阶一周解，也就是说一个周期内一次脉冲最终控制害虫数量，这说明此时系统的可持续发展；或者出现另一种情况，即第一次脉冲后的值落入系统无脉冲不变集内，此后害虫数量将一直低于经济危害值的水平而无需再进行人工控制。

从上一节的数值分析可以看出，当杀虫剂喷洒量和天敌投放量在几种不同情况下，阶一周解的周期各不相同，因此我们根据所耕种的农作物的生长周期的不同而采取不同的控制策略，使得控制周期和生长周期保持同步，使害虫控制得效果得到最好的体现。

基于状态依赖的控制策略，需要在实际应用中详细观测和记录害虫和天敌的数量，以便决定如何及何时喷洒杀虫剂投放天敌。从我们的理论和数值研究结果表明阶一周解是存在的并可以通过数值方法计算出其周期，这样当我们知道害虫和天敌的初值时，便可以预测到其周期性，而不需要反复测量害虫数量，节省了大量人力物力。

第三章 具有非线性传染力和免疫接种的传染病模型

§3.1 模型的背景

传染病的防治是关系到人类健康的和国计民生的重大问题。传染病历来就对人类有着极大的危害，如历史上的麻疹、黑死病等等，人类与传染病的斗争一直未停息，2003年在世界范围爆发的 SARS 传染病也同样给人类带来了巨大的损失。传染病模型就是利用数学的方法对疾病进行研究，预测疾病的发展趋势，为控制疾病的蔓延提供指导性的策略。近几十年，利用微分方程对传染病进行的研究得到不断完善，模型也不断细化、改进。文献[98]就近几十年的传染病动力学的建模思想、国内外研究成果进行了系统的整理

在流行动力学中我们通常将所有的人分为如下三类：易感类（可能被传染的个体）、染病类（已被感染的人群）、移出类（病愈恢复或者在有死亡率时包括因病死亡的人）。下面是一个具有出生率和死亡率的较一般的 SIRS 传染病模型[94]

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -IH(I, S) - bS + r_1 R + B(N), \\ \frac{dI}{dt} = IH(I, S) - (b + \nu)I, \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - (b + r_1)R, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

这里 S 表示 t 时刻易感人群的数量， I 表示染病者的数量， R 表示移出者（恢复者）的数量， R 类里的人因为病愈而获得自然免疫力，其中 $H(I, S)$ 是非线性传染力函数，它是和 I, S 有关的函数， b 是三种人群的自然死亡率， $B(N)$ 是和 N 有关的出生率， N 是总人口，即 $N=S+I+R$ ，并且在这个模型里我们假设所有的新生婴儿都是易感者。 ν 是移出率， r_1 是得病后获得免疫力的人失去免疫力的概率，所有的系数均为正数。

将方程组 (3.1.1) 的两端相加可得：

$$\frac{dN}{dt} = B(N) - bN,$$

为了简化模型 (3.1.1) 及使它更具体化，我们假设模型 (3.1.1) 有一个正平衡点为 N_0 ，它是唯一的和全局渐近稳定的，满足 $B(N_0) = bN_0$ 。此假设意为总人口最终将趋于一个定数 N_0 ，因此我们可以将讨论局限在三维空间中的平面 $S+I+R=N_0$ 上，由此方程组(3.1.1)简化

为:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -IH(I, S) - bS + r_1R + bN_0 \\ \frac{dI}{dt} = IH(I, S) - (b + v)I, \\ \frac{dR}{dt} = vI - (b + r_1)R, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

因为传染力函数 $H(I, S)$ 形式太一般, 因此没有太多关于模型 (3.1.2) 的结论。很多学者研究了传染力函数 $H(I, S)$ 是关于 S 的线性函数的模型, 而还有一些学者研究 $H(I, S)$ 为更特殊形式的模型 (3.1.2), 如 $KS^p I^q$ 或 $\frac{KS^p I^q}{N_0}$, 见[49][48]。之后[94][101]提出了更具体的传染力函数 $H(I, S) = KIS$, 这样发生率 $IH(I, S) = KI^2S$, 而非通常的双线性发生率。此时方程变为:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -KI^2S - bS + r_1R + bN_0 \\ \frac{dI}{dt} = KI^2S - (b + v)I, \\ \frac{dR}{dt} = vI - (b + r_1)R, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

另外再作如下的无量纲变换:

$$r = v/(b+v), \quad h = v/(b+r_1), \quad a = K/(b+v), \quad \tau = (b+v)t,$$

方程 (3.1.3) 可变为:

$$\begin{cases} \frac{dI}{d\tau} = aI^2(N_0 - I - R) - I, \\ \frac{dR}{d\tau} = r\left(I - \frac{R}{h}\right), \end{cases} \quad (3.1.4)$$

这个模型在条件 $aN_0^2 > 4(1+h)$ 成立时有三个平衡点: $O(0,0)$, $P_1(I_1, R_1)$, $P_2(I_2, R_2)$,

其中

$$I_{1,2} = \frac{aN_0 \pm \sqrt{(aN_0)^2 - 4a(h+1)}}{2a(h+1)}, \quad I_1 < I_2,$$

$$R_{1,2} = hI_{1,2}.$$

系统 (3.1.4) 有着较为复杂的动力学性质, 文献[49]通过数值模拟的方法发现系统 (3.1.4) 可能存在两个极限环, 之后汪[101]证明了系统 (3.1.4) 在一定条件下存在两个极

限环和同宿轨（分界线环），详见下面的定理。又因为零点总是稳定的，所以根据初值的不同流行病有可能被消除或成为地方病。

定理 3.1.1[101] 假设 $aN_0^2 > 4(1+h)$ ，则

- (i) 如果 $\frac{r}{h} \leq 1 + \frac{a}{r}hI_1^2$ ，那么 P_2 是稳定的，系统 (3.1.4) 没有极限环；
- (ii) 如果 $\frac{r}{h} \leq 1 + \frac{a}{r}hI_4^2$ ，那么 P_2 是不稳定的，系统 (3.1.4) 没有极限环；
- (iii) 如果 $0 < h \leq 2$ 且 $0 < -T_r \ll 1$ ，那么 P_2 是稳定的，系统 (3.1.4) 有一个分支出的不稳定极限环；
- (iv) 如果 $h > 2$ ， $I_2^2 < \frac{3r}{ah(h-2)}$ ，且 $0 < -T_r \ll 1$ ，那么 P_2 是稳定的，系统 (3.1.4) 有一个分支出的不稳定极限环；
- (v) 如果 $h > 2$ ， $I_2^2 < \frac{3r}{ah(h-2)}$ ，且 $0 < T_r \ll 1$ ，那么 P_2 是不稳定的，系统 (3.1.4) 有一个分支出的稳定极限环；
- (vi) 如果 $\sqrt{\frac{a}{r}N_0} > 2\left(\frac{1}{h} + 1\right)$ ，那么一定存在 a^* 使得当 $a = a^*$ 时系统 (3.1.4) 有一个分界线环；
- (vii) 如果 $h > 2$ ，那么一定存在 a ， r ，和 N_0 使得系统 (3.1.4) 有两个极限环，其中

$$T_r = 1 - \frac{r}{h} - aI_2^2,$$

I_4 是曲线 $L_1: U(I, R) = U(I_1, hI_1)$ 上的 I 坐标的最大值， $U(I, R)$ 定义如下：

$$U(I, R) = \ln I + \frac{r}{hI} - \frac{aN_0}{r}R + \frac{a(1+h)}{2rh}R^2 + \frac{h-r}{r} \ln R.$$

本章将讨论在模型 (3.1.3) 和 (3.1.4) 的基础上增加不同方式的免疫接种包括连续接种和脉冲接种，并讨论其对流行病所产生的作用。

§3.2 连续免疫接种模型

我们首先在 (3.1.3) 的基础上增加连续免疫接种，方程变为：

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -KI^2S - bS + r_1R + bN_0 - pS \\ \frac{dI}{dt} = KI^2S - (b + v)I, \\ \frac{dR}{dt} = vI - (b + r_1)R + pS, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

其中 $0 \leq p \leq 1$ 是接种比例。我们令: $\alpha = b + r_1$, $\beta = b + v$, 并利用 $S + I + R = N_0$ 可将 (3.2.1) 化为:

$$\begin{cases} \dot{S} = -KI^2S - (\alpha + p)S + \alpha N_0 - r_1I, \\ \dot{I} = KI^2S - \beta I, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

系统 (3.2.2) 显然有一个正不变集 $\Omega \triangleq \{(S, I) | S > 0, I > 0, S + I \leq N_0\}$, 这是因为

$$\left. \frac{d(S+I)}{dt} \right|_{S+I=N_0} = -pS - vI < 0,$$

根据生物意义我们将在区域 Ω 内进行我们的讨论。

下面我们讨论系统 (3.2.2) 的平衡点, 显然 $\left(\frac{\alpha N_0}{\alpha + p}, 0\right)$ 是它的一个边界平衡点, 当

$$(\alpha KN_0)^2 > 4K\beta(r_1 + \beta)(\alpha + p)$$

时, 系统还有两个正平衡点 (S_1, I_1) , (S_2, I_2) :

$$S_{1,2} = \frac{\beta}{KI_{1,2}}, \quad I_{1,2} = \frac{\alpha KN_0 \pm \sqrt{(\alpha KN_0)^2 - 4K\beta(r_1 + \beta)(\alpha + p)}}{2K(r_1 + \beta)},$$

方程 (3.2.2) 的右端函数在平衡点 $\left(\frac{\alpha N_0}{\alpha + p}, 0\right)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$\begin{pmatrix} -(\alpha + p) & -r_1 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

显然 $\left(\frac{\alpha N_0}{\alpha + p}, 0\right)$ 为稳定结点。而在平衡点 (S_2, I_2) 处我们也很容易计算出方程 (3.2.2) 的右端函数的 Jacobian 矩阵为

$$\begin{pmatrix} -KI_2^2 - (\alpha + p) & -2\beta - r_1 \\ KI_2^2 & \beta \end{pmatrix},$$

进一步计算可知它有两个异号实特征根, 所以 (S_2, I_2) 为系统的鞍点, 故至少有一个特解趋向于此平衡点。

我们定义系统的再生数:

$$R_1^0 = \frac{(\alpha KN_0)^2}{4K\beta(r_1 + \beta)(\alpha + p)},$$

于是我们根据上面的讨论有下面的定理:

定理 3.2.1 当 $R_1^0 < 1$ 时, 系统 (3.2.2) 从不变集 Ω 出发的解最终都将趋于平衡点 $(\frac{\alpha N_0}{\alpha + p}, 0)$, 即此时疾病消除; 当 $R_1^0 > 1$ 时, 从不变集 Ω 出发的解并不都将趋于 $(\frac{\alpha N_0}{\alpha + p}, 0)$, 部分解将趋于平衡点 (S_2, I_2) , 也即此时疾病将成为地方流行病。

证明: 当 $R_1^0 < 1$ 时, 此时系统 (3.2.2) 除了 $(\frac{\alpha N_0}{\alpha + p}, 0)$ 之外没有正平衡点, 因为 $(\frac{\alpha N_0}{\alpha + p}, 0)$ 是局部渐近稳定的, 所以此时它也是在不变集 $\{(S, I) | S > 0, I > 0, S + I \leq N_0\}$ 内全局渐近稳定的。当 $R_1^0 > 1$ 时, 由上面的讨论定理自明。■

§3.3 按比例脉冲免疫接种模型

3.3.1 模型的建立

过去描述传染病的模型通常采用连续系统, 在对疾病的控制中人工接种免疫预防的方法都被描述为连续行为, 但当接种是定期的进行时, 这种描述方法就不是十分合理了。在这种情况下, 对易感者的免疫接种往往是定时的批量进行的, 接种的过程相当短暂, 相对于疾病的流行时间来说可以近似的看成瞬时行为, 但这种瞬时行为却使得有免疫力的个体数量在短时间内发生剧变。脉冲微分方程则可以更加精确的描述这种现象。固定时刻脉冲系统 (1.2.2) 被引入传染病学是近几年一些学者关注的课题 [71][97][20][78][55][70]。

基于上述想法, 我们在系统 (3.1.3) 的基础上引入脉冲接种, 即在一定的时刻按比例的对易感者进行免疫接种, 我们将考虑这种脉冲接种免疫对流行病的控制作用及影响, 对系统 (3.1.3) 引入脉冲后的改进模型如下:

$$\begin{cases} \dot{S} = -KI^2S - bS + r_1R + bN_0 \\ \dot{I} = KI^2S - (b+v)I \\ \dot{R} = vI - (b+r_1)R \end{cases} & t \neq nT, n=1,2,\dots \\
 \left. \begin{cases} S(t^+) = (1-p)S(t^-) \\ I(t^+) = I(t^-) \\ R(t^+) = R(t^-) + pS(t^-) \end{cases} \right\} & t = nT, n=1,2,\dots \\
 S(0^+) \geq 0, I(0^+) \geq 0, R(0^+) \geq 0, &
 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

其中 p 是接受免疫的易感者个体数量占总易感者人数的比例, 本节中我们总 $0 < p < 1$, 如果 $p=0$ 则变为原先的方程, 我们令: $\alpha = b + r_1$, $\beta = b + v$, 再根据 $S + I + R = N_0$ 可将 (3.3.1) 简化为:

$$\begin{cases} \dot{S} = -KI^2S - \alpha S + \alpha N_0 - r_1I \\ \dot{I} = KI^2S - \beta I \end{cases} & t \neq nT, n=1,2,\dots \\
 \left. \begin{cases} S(t^+) = (1-p)S(t^-) \\ I(t^+) = I(t^-) \end{cases} \right\} & t = nT, n=1,2,\dots \\
 S(0^+) \geq 0, I(0^+) \geq 0, &
 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

显然, $\alpha > r_1$.

3.3.2 无病周期解的渐近性质

引理 3.3.1 设 $x(t) = (S(t), I(t))$ 是系统 (3.3.2) 的具有初值 $S(0^+) \geq 0, I(0^+) \geq 0$ 的解, 则有 $x(t) \geq 0$, 即 $S(t) \geq 0$ 和 $I(t) \geq 0$; 而且, 如果 $S(0^+) > 0, I(0^+) > 0$, 则 $x(t) > 0$ 对所有 $t \geq 0$ 成立.

证明: 由方程组 (3.3.2) 和条件 $I(t) \leq N_0$, $\alpha > r_1$ 可得:

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{\substack{I>0 \\ S=0}} > 0, \quad \left. \frac{dI}{dt} \right|_{I=0} = 0$$

引理结论显然成立。■

而且系统有一个正不变集 $\Omega \triangleq \{(S, I) | S > 0, I > 0, S + I \leq N_0\}$, 根据生物意义我们将在区域 Ω 内进行我们的讨论.

下面研究系统 (3.3.2) 的一个无病子系统:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\alpha S + \alpha N_0, & t \neq nT, n=1, 2, \dots \\ S(t^+) = (1-p)S(t^-), & t = nT, n=1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.3.3)$$

关于这个系统我们有下面引理:

引理 3.3.2: 系统 (3.3.3) 有一个全局渐近稳定的 T -周期解:

$$S^*(t) = N_0 - \frac{pN_0}{1-(1-p)e^{-\alpha T}} e^{-\alpha(t-nT)}, \quad t \in [nT, (n+1)T).$$

证明: 很容易验证 $S^*(t)$ 是 (3.3.3) 的一个周期解, 令 $x(t) = S(t) - S^*(t)$, 方程 (3.3.3) 化为:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x, & t \neq nT, n=1, 2, \dots \\ x(t^+) = (1-p)x(t^-), & t = nT, n=1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.3.4)$$

系统 (3.3.4) 是一个齐次线性 T -周期脉冲微分方程, 它的单值矩阵可求出:

$$M = (1-p)e^{-\alpha T},$$

由系统的条件可知 M 的特征根绝对值小于 1, 根据定理 1.3.2 可得 (3.3.4) 的零解是全局渐近稳定的, 也即 $S^*(t)$ 是 (3.3.3) 的全局渐近稳定的 T -周期解。■

在系统 (3.3.2) 中令 $I=0$ 就可以得到系统 (3.3.3), 于是周期解 $(S(t) = S^*(t), I(t) = 0)$ 是 (3.3.2) 的一个边界周期解 (无病周期解)。关于这个边界周期的稳定性解我们有下面定理。

定理 3.3.1 系统 (3.3.2) 的边界周期解 $(S^*(t), 0)$ 是局部渐近稳定的。

证明: 我们令 $x(t) = S(t) - S^*(t)$, $y(t) = I(t)$, 方程 (3.3.2) 可化为如下等价系统:

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x - r_1 y - KS^*(t)y^2 - Kxy^2 \\ \dot{y} &= -\beta y + KS^*(t)y^2 + Kxy^2 \end{aligned} \right\} & t \neq nT, n=1, 2, \dots \\ \left. \begin{aligned} x(t^+) &= (1-p)x(t^-) \\ y(t^+) &= y(t^-) \end{aligned} \right\} & t = nT, n=1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.3.5)$$

系统 (3.3.2) 的边界周期解 $(S^*(t), 0)$ 对应着系统 (3.3.5) 的零解, 下面我们研究系统 (3.3.5) 的零解的稳定性, 它在零解的近似线性系统为

$$\begin{cases} \left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x - r_1 y \\ \dot{y} &= -\beta y \end{aligned} \right\} & t \neq nT, n=1, 2, \dots \\ \left. \begin{aligned} x(t^+) &= (1-p)x(t^-) \\ y(t^+) &= y(t^-) \end{aligned} \right\} & t = nT, n=1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.3.6)$$

其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & r_1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$

所以可求得 (3.3.6) 连续部分的基础解矩阵为

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha t} & \frac{r_1}{\alpha - \beta} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \\ 0 & e^{-\beta t} \end{bmatrix}$$

脉冲量为

$$\begin{bmatrix} x(t^+) \\ y(t^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t^-) \\ y(t^-) \end{bmatrix},$$

则我们可以计算出单值矩阵:

$$M = \begin{bmatrix} (1-p) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{AT} = \begin{bmatrix} (1-p)e^{-\alpha T} & \frac{(1-p)r_1}{\alpha - \beta} (e^{-\alpha T} - e^{-\beta T}) \\ 0 & e^{-\beta T} \end{bmatrix}$$

它的两个实特征根 $\mu_1 = (1-p)e^{-\alpha T}$, $\mu_2 = e^{-\beta T}$ 都满足 $|\mu_i| < 1$, 根据定理 1.3.2, (3.3.6) 的零解是渐近稳定的, 因此系统 (3.3.2) 的边界周期解 $(S^*(t), 0)$ 是局部渐近稳定的。■

我们定义:

$$R_2^0 = KN_0^2 \left[\frac{1}{\beta} - \frac{p(e^{(\alpha+\beta)T} - 1)}{(\alpha + \beta)(e^{\alpha T} - 1 + p)(e^{\beta T} - 1)} \right]$$

定理 3.3.2: 如果 $R_2^0 < 1$, 则 $(S^*(t), 0)$ 是系统 (3.3.2) 在 Ω 内全局吸引的边界周期解, 即有 $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S^*(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$.

证明: 设 $(S(t), I(t))$ 是系统 (3.3.2) 的一个解, $0 \leq S(t) \leq N_0$, $0 \leq I(t) \leq N_0$.

根据定理条件可找到充分小的 $\varepsilon > 0$ 使得

$$1 - R_2^0 - \varepsilon \frac{KI(0)}{\beta} > 0,$$

再由 (3.3.2) 的第一个方程可得

$$\dot{S} \leq -\alpha S + \alpha N_0$$

由微分方程的比较定理及引理 3.3.2 可知, 对上面的 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_1 > 0$, 使得当 $t > t_1$ 时有:

$$S(t) \leq S^*(t) + \varepsilon,$$

再由 (3.3.2) 的第二个方程可得

$$\dot{I} \leq KI^2(S^*(t) + \varepsilon) - \beta I, \quad t > t_1,$$

我们不妨假设上式对于所有的 $t > 0$ 都成立, 于是我们解得:

$$I(t) \leq \frac{I(0)e^{-\beta t}}{1 - I(0) \int_0^t K(S^*(\sigma) + \varepsilon)e^{-\beta\sigma} d\sigma},$$

其中当 $t \in [nT, (n+1)T)$ 时

$$\begin{aligned} \int_0^t S^*(\sigma)e^{-\beta\sigma} d\sigma &= \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)T}^T S^*(\sigma)e^{-\beta\sigma} d\sigma + \int_{nT}^t S^*(\sigma)e^{-\beta\sigma} d\sigma \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(i-1)T}^T S^*(\sigma)e^{-\beta\sigma} d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_0}{e^{(i-1)\beta T}} \left[\frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta} - \frac{p(e^{\alpha T} - e^{-\beta T})}{(\alpha + \beta)(e^{\alpha T} - 1 + p)} \right] \\ &= \frac{R_2^0}{KN_0} \end{aligned}$$

所以

$$I(t) \leq \frac{I(0)e^{-\beta t}}{-R_2^0 - K\varepsilon I(0) \int_0^t e^{-\beta\sigma} d\sigma + 1} \leq \frac{I(0)e^{-\beta t}}{-R_2^0 - \varepsilon \frac{KI(0)}{\beta} + 1},$$

由 ε 的选取可知上式右边分母为正, 因此可得当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $I(t) \rightarrow 0$.

下面证明 $S(t) \rightarrow S^*(t)$, 有前面讨论我们知道对任意小的 $\varepsilon > 0$, 当 t 充分大时有 $S(t) \leq S^*(t) + \varepsilon$, 因此我们只需证明对任意小的 $\varepsilon > 0$, 当 t 充分大时有 $S(t) \geq S^*(t) - \varepsilon$, 为此, 我们利用前面的结果 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$, 再由 $S(t)$ 有界, 根据 (3.3.2) 第一个方程可知对任意小的 $\varepsilon_1 > 0$ 一定存在 $t_2 > 0$ 使得当 $t > t_2$ 时有:

$$\dot{S} \geq -\alpha S + \alpha N_0 - \alpha \varepsilon_1,$$

与引理 3.3.2 中类似我们可求得下面系统

$$\begin{cases} \dot{u} = -\alpha u + \alpha N_0 - \alpha \varepsilon_1, & t \neq nT, n=1, 2, \dots \\ u(t^+) = (1-p)u(t^-), & t = nT, n=1, 2, \dots \end{cases}$$

有一个全局渐近稳定的 T -周期解:

$$u^*(t) = (N_0 - \varepsilon_1) - \frac{p(N_0 - \varepsilon_1)}{1 - (1-p)e^{-\alpha T}} e^{-\alpha(t-nT)}, \quad t \in [nT, (n+1)T)$$

这里

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= S^*(t) - \varepsilon_1 \left(1 - \frac{p}{1 - (1-p)e^{-\alpha T}} e^{-\alpha(t-nT)} \right) \\
&\geq S^*(t) - \varepsilon_1 \left(1 - \frac{p}{1 - (1-p)e^{-\alpha T}} e^{-\alpha T} \right) \\
&= S^*(t) - \varepsilon_2
\end{aligned}$$

其中 ε_2 也是任意小的正数, 对这个 ε_2 , 当 $t > t_2$ 时, 显然有 $S(t) \geq S^*(t) - \varepsilon_2$, 于是我们证明了 $S(t) \rightarrow S^*(t)$, 定理证毕。■

由定理 3.3.1 和定理 3.3.2 我们可以得到下面定理:

定理 3.3.3 如果 $R_2^0 < 1$, 则 $(S^*(t), 0)$ 是系统 (3.3.2) 在 Ω 内全局渐近稳定的边界周期解。

3.3.3 系统复杂性

当脉冲的条件不能使得无病周期解成为渐近周期解时, 此时有可能疾病流行而成为地方病。(3.3.2) 对应的无脉冲连续系统的边界平衡点 $(N_0, 0)$ 是局部渐近稳定的, 因此初值的不同可能导致疾病的消除或是流行。当脉冲免疫接种不能使疾病消除时, 系统 (3.3.2) 有可能变得非常复杂, 而此时系统的解析解我们无法求出, 因此我们无法将脉冲微分方程转化为等价的差分方程来处理, 所以我们在下面将通过数值模拟的手段来揭示系统可能存在的复杂性。

我们在这部分始终将参数取定为 $k = 0.000027$, $\alpha = 0.03375$, $\beta = 0.3$, $r_1 = 0.00375$, $N_0 = 1000$, 由定理 3.1.1 及系数的关系我们可以知道此时系统(3.3.2)对应的无脉冲连续系统有一个由正平衡点分支出的极限环 Γ , 在脉冲周期 T 我们始终设定为 12 的情况下, 我们来用数值模拟的方法研究比较小的脉冲值 p 对这个极限环 Γ 的影响。具体的方法如下, 我们让 p 以一个非常小的步长从 0 变化到 0.14, 对每一个 p 值我们设定初值在原连续系统固有极限环 Γ 的附近, 并以这些系统参数求出系统的数值解, 以脉冲周期 T 为 Poincare 映射的周期并以此得到变量 $S(t)$ 和 $I(t)$ 的频闪映射序列, 也即在 $S(t)$ 和 $I(t)$ 的数值解中每隔时间 T 便取出样本值作为频闪映射的序列点, 本文中我们对每一个 p 值我们求出时间长度为 700 个脉冲周期的数值解, 然后画出 $S(t)$ 和 $I(t)$ 的后 400 个频闪点。由于每一个频闪点是在脉冲时刻取的, 因此在图上每一个 p 值对应的频闪点集如果是一个点, 则表示为 T -周期解, 两个点则表示为 $2T$ -周期解, 如果这些点几乎填充了 \mathbb{R} 上的一个区域, 则有可能是拟周期解或混沌。依据这个方法我们可以做出相应 p 值的分支图 (见图 3.3.1), 文献[21]也称之为最终状态图, 文献[61]中讨论了很多连续非自治、自治系统分支图的制

作方法，本文也采用了与之类似的方法。

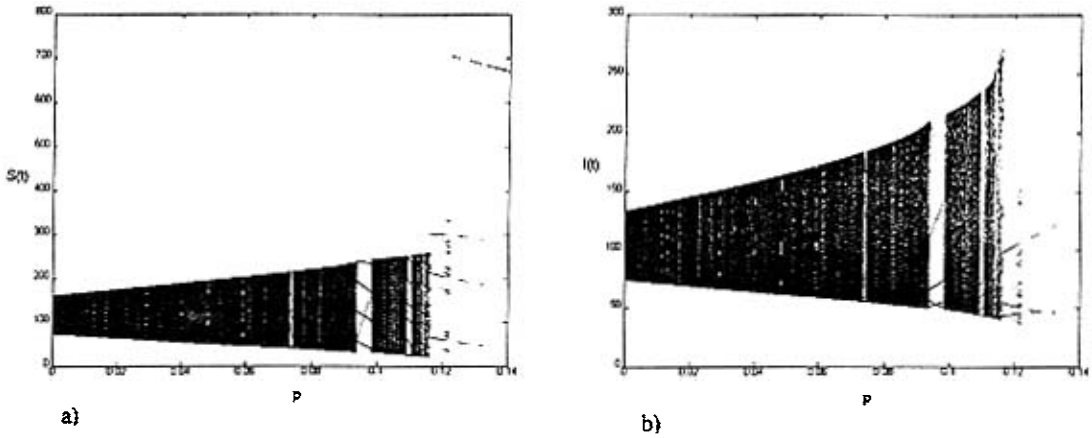


图 3.3.1: $S(t)$ 和 $I(t)$ 的分支图

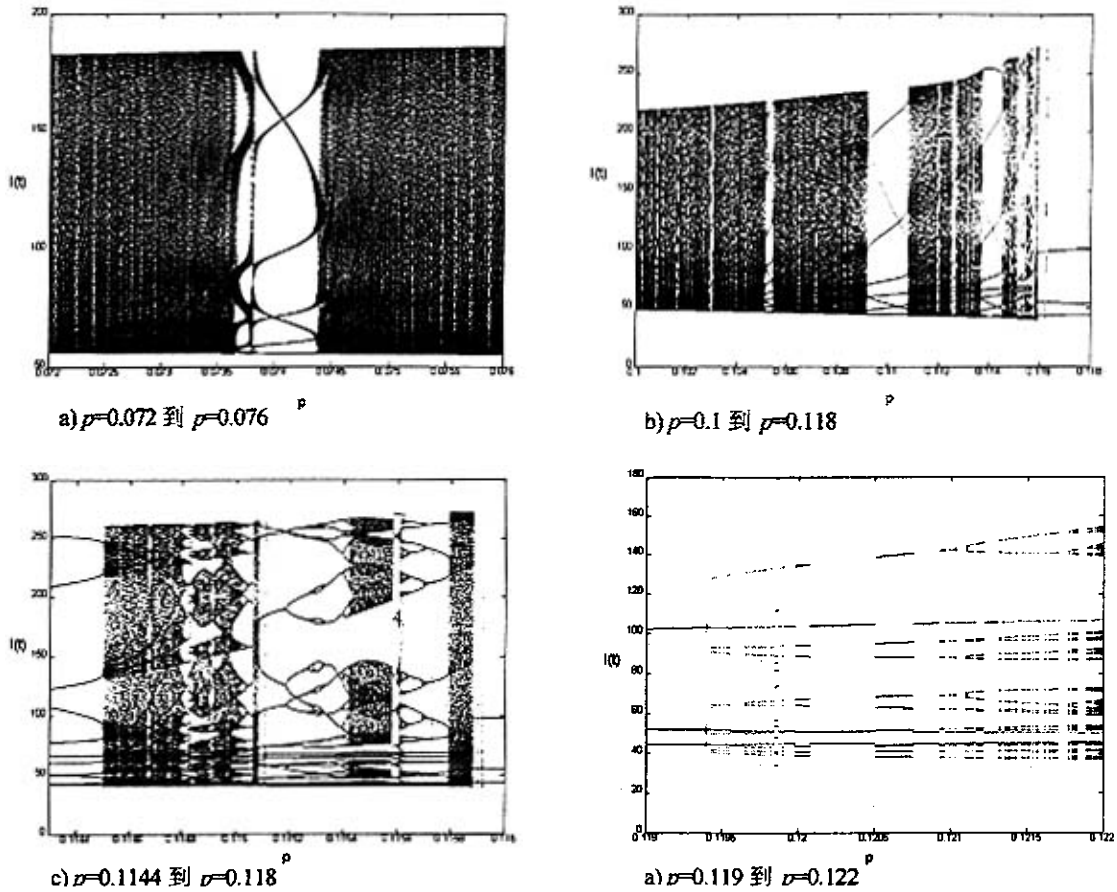


图 3.3.2: 局部放大分支图

从图 3.3.1上我们可以看出当 p 增加到大约 0.13 后，疾病消失，而在这之前当 p 由

零开始不断增加时系统呈现出一系列的复杂现象，为了更清楚的观察我们对图 3.3.1b 进行了某些局部的放大，如图 3.3.2。当 p 比较小时原来的周期解 Γ 演变为拟周期解，图 3.3.3a 给出了一个当 $p=0.0725$ 时的具有代表性的拟周期解。由图 3.3.2a 可以看到当 p 大约在 0.0736 和 0.07436 之间有一个周期窗口，但有趣的是在这个区间中我们取定 $p=0.07425$ 绘制出的轨线相图却如图 3.3.3b 所呈现的奇怪吸引子。

从图 3.3.2b 我们看到当 p 大约在 0.1 和 0.118 之间变化时，又有很多的周期窗口出现，例如在大约 0.1092 到 0.1108 之间的 $8T$ 周期窗口，其轨线代表相图如图 3.3.4a；而当 p 大约在 0.1137 到 0.1145 之间时，从图上可以看出是一个 $10T$ 周期解窗口，图 3.3.4b 是其中一个 $10T$ 周期轨线相图。图 3.3.3c 是当 $p=0.1132$ 时的一个混沌解。在这两个周期窗口的左侧，我们可以观察到系统从混沌突然变为稳定周期解，而在右侧，又从稳定解突然变为混沌，这种混沌突然消失和出现的突变现象在文献[27]里有进一步的研究。

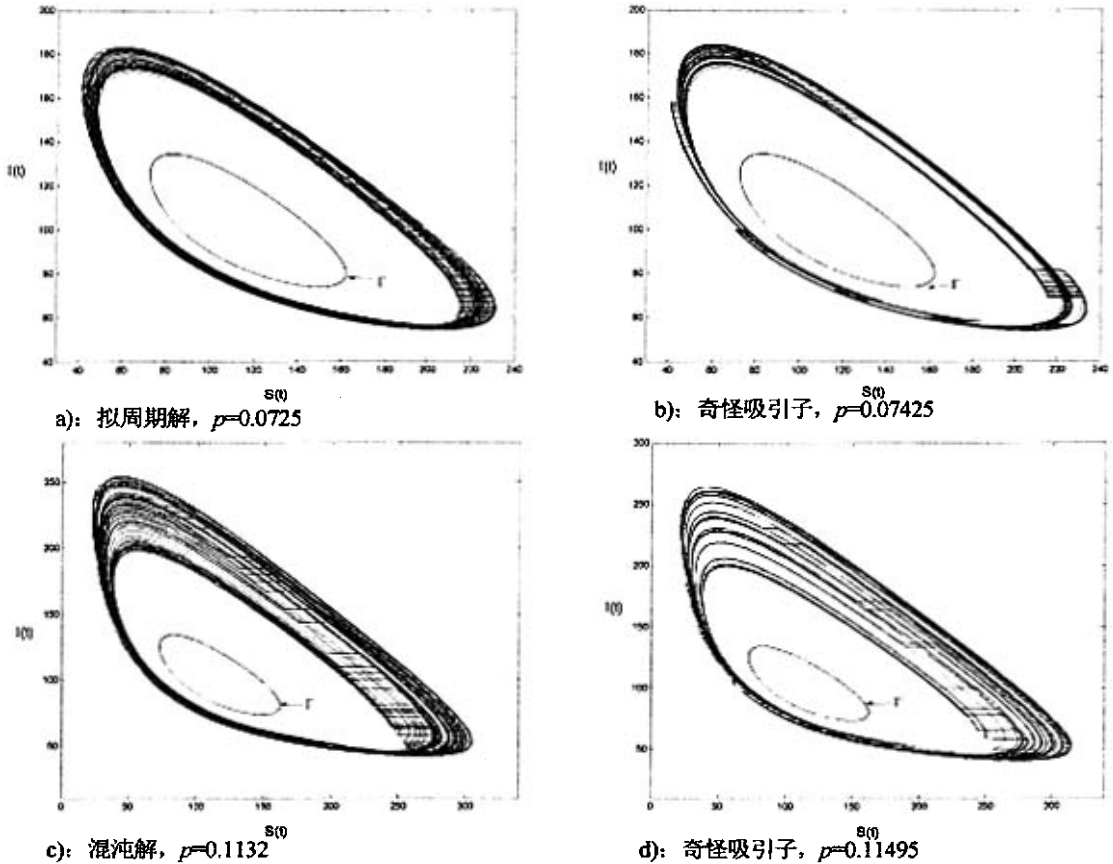
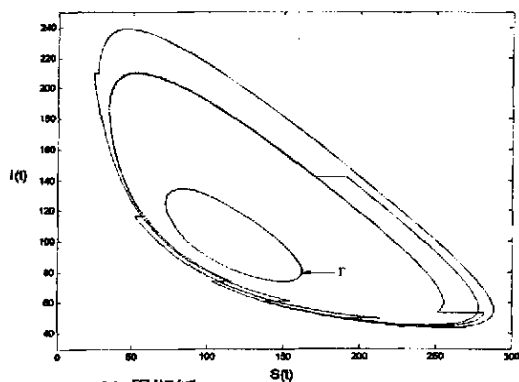


图 3.3.3: 拟周期与混沌解相图

图 3.3.2c 显示出当 p 大约在 0.1144 和 0.116 之间变化时，系统演变过程变得更为复

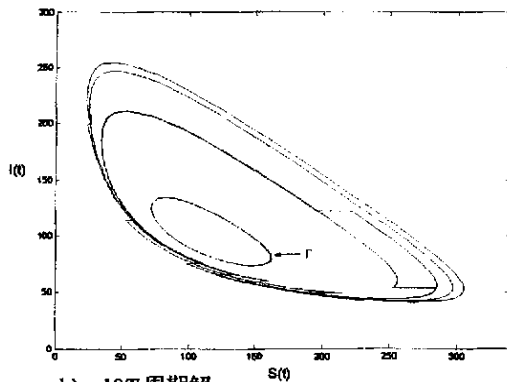
杂, 这期间出现了很多的多重倍周期分支紧接着再多重半周期分支的叠加过程, 图 3.3.3d 是其中当 $p=0.11495$ 时的一个奇怪吸引子的相图。

最后, 当 p 大约在 0.119 到 0.122 之间时, 系统出现了 $3T$ 周期解与其他多周期解以及奇怪吸引子共存的现象, 图 3.3.4c 和图 3.3.4d 就是当 p 取同一值 0.12 但初值不同的两个周期解, 前者是初值为 $S(0)=36.6989, I(0)=14.5232$ 的 $3T$ 周期解, 后者是初值为 $S(0)=177, I(0)=77.5$ 的 $9T$ 周期解。



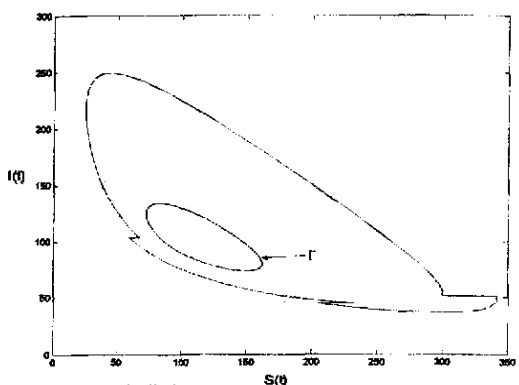
a): $8T$ 周期解

$$S(0)=177, I(0)=77.5, p=0.11$$



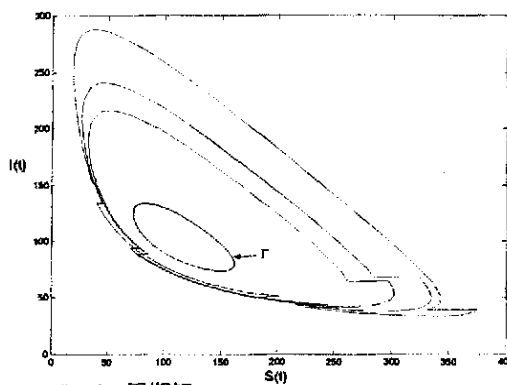
b): $10T$ 周期解

$$S(0)=177, I(0)=77.5, p=0.114$$



c): $3T$ 周期解

$$S(0)=36.6989, I(0)=14.5232, p=0.12$$



d): $9T$ 周期解

$$S(0)=177, I(0)=77.5, p=0.12$$

图 3.3.4: 多重周期解相图

§3.4 常数脉冲免疫接种模型

3.4.1 模型的建立

在上一节中我们对易感者的脉冲定期免疫接种是按比例进行的，但是当易感者数量很大时，须接种的人数也成比例的增加。从实际应用的背景来看，一个地区的防疫接种能力是有限的，每一次定期接种免疫的人数并不可能随着易感者数量增加而增加，而是受到这个地区的卫生部门的具体防疫能力等客观因素制约的。为此，我们将上一节模型中的脉冲免疫接种方式由原来的按比例型改为每次接种数量都为一个常数，而这个表示接种数量的常数在实际当中不应该超过防疫部门所能承受的最大接种数量。

基于上述想法，本节将讨论常数脉冲接种免疫对流行病的控制作用及影响。为了便于处理，我们在系统 (3.1.4) 的基础上考虑引入常数脉冲后的改进模型：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= aI^2(N_0 - I - R) - I, \\ \frac{dR}{dt} &= r\left(I - \frac{R}{h}\right), \end{aligned} \right\} t \neq nT, n=1, 2, \dots$$

$$\left. \begin{aligned} I(t^+) &= I(t) \\ R(t^+) &= R(t) + b \end{aligned} \right\} t = nT, n=1, 2, \dots$$

$$I(0^+) \geq 0, R(0^+) \geq 0,$$
(3.4.1)

其中 b 是常数脉冲接种免疫的量，显然应该有 $0 < b \leq N_0$ ， N_0 为总人口。

3.4.2 有界性及边界周期解的性质

引理 3.4.1 设 $x(t)=(I(t), R(t))$ 是系统 (3.4.1) 的具有初值 $I(0^+) \geq 0, R(0^+) \geq 0$ 的解，则有 $x(t) \geq 0$ ，即 $I(t) \geq 0$ 和 $R(t) \geq 0$ ；而且，如果 $I(0^+) > 0, R(0^+) > 0$ ，则 $x(t) > 0$ 对所有 $t \geq 0$ 成立。

证明：由方程组 (3.4.1) 可得：

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{I=0} = 0, \quad \left. \frac{dR}{dt} \right|_{\substack{I>0 \\ R=0}} > 0$$

和

$$R(t^+) > R(t),$$

所以引理结论显然成立。■

定理 3.4.1 如果 $h > r$ 则系统 (3.4.1) 具有正初值的解是一致最终有界的, 也就是说存在一个常数 $M > 0$ 使得对任意的解 $x(t) = (I(t), R(t)) > 0$ 当 t 充分大时有 $I(t) < M, R(t) < M$.

证明: 设 $\beta = \frac{hr}{h-r}$, $V(t) = \beta I(t) + R(t)$, 我们可以估计函数 $V(t)$ 沿着系统 (3.4.1) 的右导数:

$$D^+V(t) \leq a\beta N_0 I^2 - a\beta I^3 - \frac{r}{h} \left(\frac{hr}{h-r} I + R \right),$$

由于 $a\beta N_0 I^2 - a\beta I^3$ 当 $I > 0$ 时可以在 $I = \frac{2}{3} N_0$ 处取到最大值, 所以有:

$$\begin{cases} D^+V(t) \leq \frac{4}{27} a\beta N_0^3 - \frac{r}{h} V(t), & t \neq nT, n=1,2,\dots \\ V(t^+) \leq V(t) + b, & t = nT, n=1,2,\dots \end{cases}$$

在由定理 1.2.2 可得:

$$V(t) \leq \left(V(0^+) + \frac{4ha\beta N_0^3}{27r} \right) e^{-\frac{r}{h}t} + b \left(\frac{1 - e^{-\frac{r}{h}nT}}{1 - e^{-\frac{r}{h}T}} \right) e^{-\frac{r}{h}(t-nT)} + \frac{4ha\beta}{27r} N_0^3,$$

$$t \in [nT, (n+1)T),$$

显然 $V(t)$ 是一致最终有界的, 即存在 $M > 0$, 使得当 t 充分大时 $V(t) < M$, 也即系统是一致最终有界的。■

下面我们研究系统 (3.4.1) 的一个子系统:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = -\frac{r}{h} R, & t \neq nT, n=1,2,\dots \\ R(t^+) = R(t) + b, & t = nT, n=1,2,\dots \end{cases} \quad (3.4.2)$$

这个子系统是在系统(3.4.1) 中令 $I=0$ 得到的, 也就是说这个系统代表着原系统中无病的情况。

关于系统 (3.4.2) 我们有如下的引理:

引理 3.4.2 系统 (3.4.2) 有一个全局吸引的周期解

$$R^*(t) = \frac{b \exp\left(-\frac{r}{h}(t-nT)\right)}{1 - \exp\left(-\frac{r}{h}T\right)}, \quad (t \in [nT, (n+1)T)), \quad \text{初值为 } R^*(0^+) = \frac{b}{1 - \exp\left(-\frac{r}{h}T\right)}.$$

证明: 很容易验证 $R^*(t)$ 是系统 (3.4.2) 具有给出初值的周期解。设 $R(t)$ 是 (3.4.2) 得任意解, 我们可以解出:

$$R(t) = \left(R(0) - \frac{b}{1 - \exp\left(-\frac{r}{h}T\right)} \right) \exp\left(-\frac{r}{h}t\right) + R^*(t), \quad t \in [nT, (n+1)T),$$

所以有: $\lim_{t \rightarrow \infty} |R(t) - R^*(t)| = 0$, 证明完毕。■

定理 3.4.2 $(0, R^*(t))$ 是系统 (3.4.1) 的一个边界周期解, 它是局部渐近稳定的。

证明: 我们令 $x(t) = I(t)$, $y(t) = R(t) - R^*(t)$, 则系统 (3.4.1) 可以化为:

$$\left. \begin{cases} \dot{x} = -x + ax^2 (N_0 - x - y - R^*(t)), \\ \dot{y} = r \left(x - \frac{y}{h} \right), \end{cases} \right\} \quad t \neq nT, n=1, 2, \dots$$

$$\left. \begin{cases} x(t^+) = x(t^-) \\ y(t^+) = y(t^-) \end{cases} \right\} \quad t = nT, n=1, 2, \dots$$

这实际上是一个连续系统, 它的零解对应着 (3.4.1) 的边界周期解 $(0, R^*(t))$, 它在零点的线性化系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = r \left(x - \frac{y}{h} \right), \end{cases}$$

很容易验证此系统的零解是渐近稳定的, 因此也就得到了定理中的结论。■

定理 3.4.3 如果 $h > r$, $b > \frac{r}{h} N_0 T$, 则系统 (3.4.1) 的任意具有正初值的解 $x(t) = (I(t), R(t))$ 都满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} |R(t) - R^*(t)| = 0$, 这里

$$R^*(t) = \frac{b e^{-\frac{r}{h}(t-nT)}}{1 - e^{-\frac{r}{h}T}}, \quad t \in [nT, (n+1)T), \quad R^*(0^+) = \frac{b}{1 - e^{-\frac{r}{h}T}}.$$

证明: 设 $x(t) = (I(t), R(t))$ 是系统 (3.4.1) 任意一个具有初值 $I(0^+) > 0$, $R(0^+) > 0$ 的解, 有方程 (3.4.1) 可知 $\frac{dR}{dt} > -\frac{r}{h}R$, 另外根据条件 $b > \frac{r}{h} N_0 T$ 我们可以选择充分小的 ε 使得:

$$\sigma = \frac{h}{r} b - N_0 T - \varepsilon T > 0.$$

考虑下面的脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{r}{h}u, & t \neq nT, \quad n=1,2,\dots \\ u(t^+) = u(t) + b, & t = nT, \quad n=1,2,\dots \end{cases}$$

由引理 3.4.2 我们有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - R^*(t)| = 0$, 并且 $R(t) \geq u(t)$, 不是一般性我们可以假设对任意的 $t \geq 0$ 有

$$R(t) \geq u(t) > R^*(t) - \varepsilon,$$

有方程 (3.4.1) 可得:

$$\frac{dI}{dt} \leq aI^2(t)(N_0 + \varepsilon - R^*(t))$$

在区间 $[nT, (n+1)T]$ 上对上面不等式两端积分得:

$$\frac{1}{I(nT)} - \frac{1}{I((n+1)T)} \leq a \int_{nT}^{(n+1)T} (N_0 + \varepsilon - R^*(t)) dt = -a\sigma,$$

于是

$$I((n+1)T) \leq \frac{I(nT)}{1 + a\sigma I(nT)},$$

由此可以递推得:

$$I((n+1)T) \leq \frac{I(0^+)}{1 + a\sigma(n+1)I(0^+)},$$

所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I((n+1)T) = 0,$$

另外, 有定理 3.4.1 我们不失一般性的假设存在一个 $M > 0$ 使得 $I(t) \leq M$ 对任意的 $t \geq 0$ 都

成立, 则当 $t \neq nT$ 时, 有 $\frac{dI}{dt} \leq aMN_0I$, 于是

$$I(t) \leq I(nT)e^{aMN_0(t-nT)} \leq I(nT)e^{aMN_0T}$$

在 $t \in [nT, (n+1)T]$ 上成立, 综上所述有 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$.

下面我们将证明在 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ 的前提下有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |R(t) - R^*(t)| = 0$, 于是对任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $t_1 > 0$ 使得当 $t > t_1$ 时有 $I(t) < \varepsilon_1$ 成立, 此时

$$\frac{r}{h}R(t) \leq \frac{dR}{dt} \leq \frac{r}{h}R(t) + r\varepsilon_1$$

当 $t \in [nT, (n+1)T]$ 和 $t > t_1$ 时成立。

考虑下面两个系统:

$$\begin{cases} \frac{dR_1}{dt} = -\frac{r}{h} R_1, & t \neq nT, \quad n=1,2,\dots \\ R_1(t^+) = R_1(t) + b, & t = nT, \quad n=1,2,\dots \\ R_1(0^+) = R(0^+) > 0, \end{cases} \quad (3.4.3)$$

和

$$\begin{cases} \frac{dR_2}{dt} = -\frac{r}{h} R_2 + r\varepsilon_1, & t \neq nT, \quad n=1,2,\dots \\ R_2(t^+) = R_2(t) + b, & t = nT, \quad n=1,2,\dots \\ R_2(0^+) = R(0^+) > 0, \end{cases} \quad (3.4.4)$$

由引理 3.4.2 系统 (3.4.3) 的解 $R_1(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} |R_1(t) - R^*(t)| = 0$, 系统 (3.4.4) 的解 $R_2(t)$ 可以表示为:

$$R_2(t) = R_2(0^+) e^{-\frac{r}{h}t} + b e^{-\frac{r}{h}(t-nT)} \frac{1 - e^{-\frac{r}{h}nT}}{1 - e^{-\frac{r}{h}T}} - h\varepsilon_1 \left(e^{-\frac{r}{h}t} - 1 \right),$$

于是 $\lim_{t \rightarrow \infty} |R_2(t) - R^*(t) - h\varepsilon_1| = 0$.

现在我们由以上的讨论可以得到对任意的 $\varepsilon_2 > 0$ 存在 $t_2 > t_1$, 使得

$$R^*(t) - \varepsilon_2 - h\varepsilon_1 \leq R_1(t) \leq R(t) \leq R_2(t) \leq R^*(t) + \varepsilon_2 + h\varepsilon_1$$

对所有的 $t > t_2$ 成立, 于是由 ε_1 和 ε_2 得任意性可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} |R(t) - R^*(t)| = 0$, 证明完毕. ■

由定理 3.4.2 和定理 3.4.3 我们立刻可以得到如下定理.

定理 3.4.4 如果 $h > r$, $b > \frac{r}{h} N_0 T$, 则系统 (3.4.1) 的边界周期解 $(0, R^*(t))$ 是全局渐近稳定的.

注释 3.4.1 因为生物意义的需要我们在本节默认 $S(t) > b, t \geq 0$, 从而未考虑 $S(t^-) < b, t = nT$ 的情形, 因为此时经过脉冲后 $S(t^+) < 0$, 而这也符合实际意义. 为了弥补这个缺陷, 我们将在下一节中对脉冲免疫的方式作进一步的改进.

3.4.3 系统的复杂性

如果系统 (3.4.1) 的边界周期解 $(0, R^*(t))$ 不是吸引的时候, 此时根据初值的不同系统的解可能会具有非常复杂的性质, 下面我们就采用与上一节类似的数值模拟的方法描

述其复杂性。我们取定参数为 $a = 0.00009$, $N_0 = 1000$, $h = 8$, $r = 1$, 同时我们取定脉冲周期 $T = 5$, 由定理 3.1.1 知道此时系统 (3.4.1) 对应的无脉冲的连续系统有一个由正平衡点分支出的极限环 Γ , 与上一节类似, 我们依旧讨论当初值取在这个极限环 Γ 附近时脉冲对这个极限环的影响以及可能出现的复杂性。我们让 b 从 1 变到 20, 用前面陈述的方法我们可以得到变量 $I(t)$ 和 $R(t)$ 的分支图 (见图 3.4.1)。

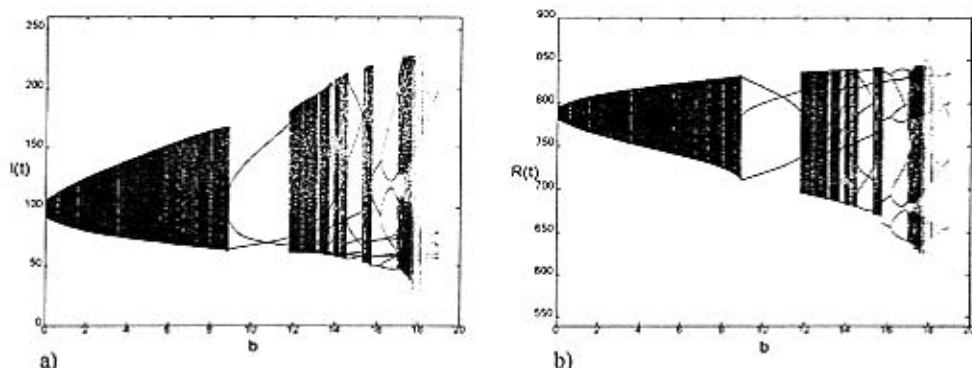
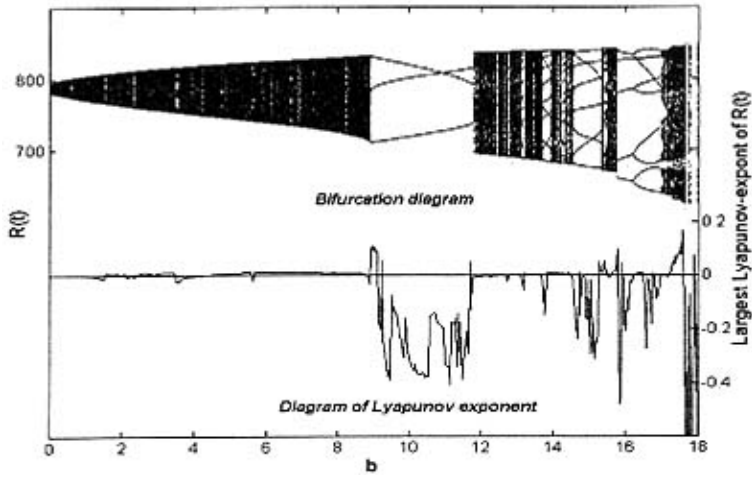


图 3.4.1: $I(t)$ 和 $R(t)$ 的分支图

如果把得到的 $I(t)$ 和 $R(t)$ 的频闪点序列看成是一个时间序列, 则我们还可以用 Wolf[84] 提出的方法数值计算出最大 Lyapunov 指数, 这里我们计算 $R(t)$ 的 Lyapunov 指数, 我们将它与分支图放在一起 (图 3.4.2), 可以看出这是一个很有意义的对比。

从图 3.4.1 我可以看出, 当 b 大于大约 17.6 时, $I(t)$ 将最终趋于零, 此时疾病消除, 而当 b 小于大约 17.6 时, 系统将出现许多复杂的现象。从分支图上我们可以看出当 b 由零开始慢慢增加时, 原来的周期解 Γ 受迫而成为拟周期解, 图 3.4.6 是当 $b = 3$ 时的一个典型的拟周期解相图。可以看到拟周期解处在 Γ 的外围并且当 b 继续增加时这个拟周期解逐渐远离 Γ , 当 b 不断增加到接近大约 8.9 时, 拟周期解变为奇怪吸引子 (如图 3.4.4a), 继而当 b 达到 8.9 时混沌现象突然消失。当 b 在大约 8.9 到大约 11.8 之间变化时, 系统呈现出稳定的 $3T$ -周期解, 图 3.4.5a 是一个典型 $3T$ -周期解, 当 b 在大约 11.8 时又突然从稳定的 $3T$ -周期解变为混沌, 这种混沌突然消失和出现的突变现象在文献[27]里有进一步的研究。

当 b 从大约 11.8 到大约 15.78 之间, 系统轨线呈现出更为复杂的演变过程, 从图 3.4.1b 中我们可以观察到在这个时间片段除了混沌之外还有许多小的甚至有些是很微小的周期窗口, 图 3.4.4b 是这其中比较典型的一个混沌解相图。



注：上面的图是关于 $R(t)$ 的分支图，下面的是对应的 Lyapunov 指数图，左边的坐标是 $R(t)$ 的大小，右边的左边是 Lyapunov 指数的大小

图 3.4.2: $R(t)$ 的 Lyapunov 指数图

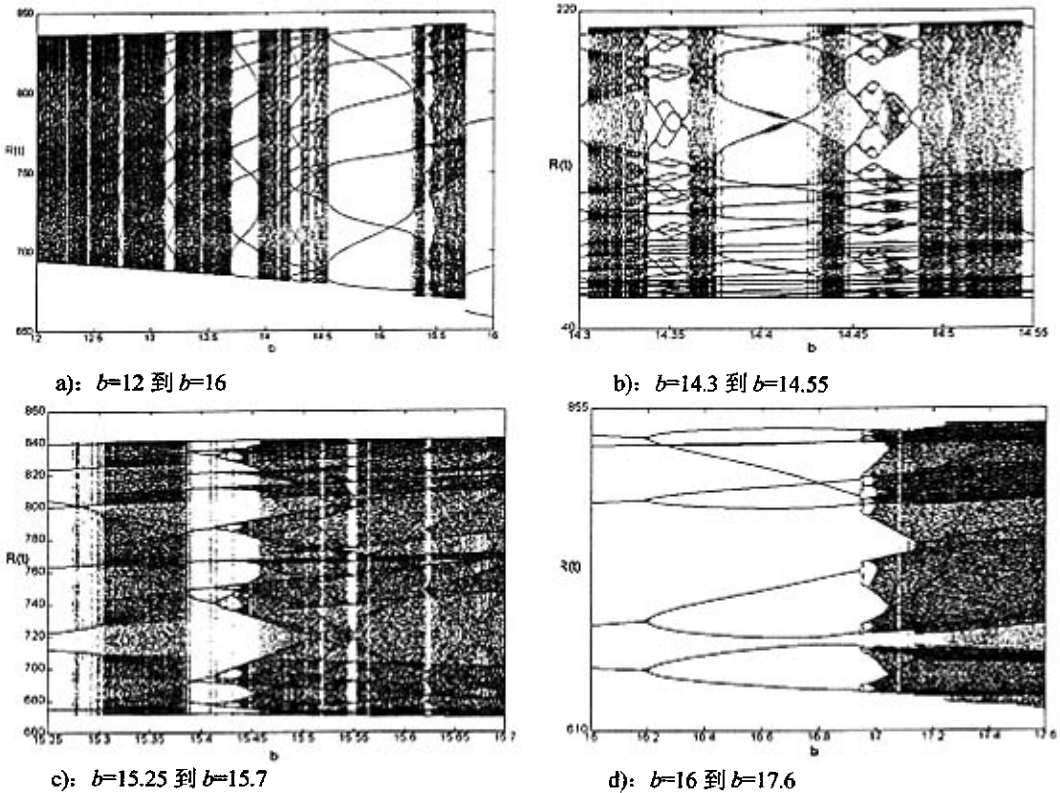


图 3.4.3: 放大的局部分支图

为了更清楚的观察，我们将图 3.4.1b 进行多处局部放大，见图 3.4.3。从图 3.4.3a

我们可以看到当 b 从大约 12 到大约 16.5 之间有许多周期窗口并伴随着很多突变现象，如在大约 13.12 到 13.2 之间的 $14T$ 周期窗口(代表相图见图 3.4.5e)，在大约 13.7 到 13.93 之间的 $11T$ 周期窗口(代表相图见图 3.4.5b)，在大约 14.21 到 14.31 之间的 $19T$ 周期窗口(代表相图见图 3.4.5f)，以及在大约 14.54 到 15.28 之间的 $8T$ 周期窗口(代表相图见图 3.4.5c)，除此之外还有很多观察不到的周期窗口这里未能列出。

从图 3.4.3b 我们可以观察到在这期间有很多倍周期分支紧接着又半周期分支的叠加过程，从而使得这个局部分支图显得异常复杂而有趣。图 3.4.4c 是当 $b=14.475$ 的时候一个奇怪吸引子的相图。由图 3.4.3c 我们可以看到当 b 大约等于 15.39 时，系统突然从混沌变为稳定的 $11T$ 周期解，并在这之后通过多个倍周期分支通向混沌，而这种倍周期到混沌的过程最具有代表性就是 Logistic 和 Ricker 映射[57][28]。

最后当 b 在大约 15.78 到 17.6 之间，系统又一次从倍周期分支最后通向混沌，图 3.4.5d 和图 3.4.4d 给出了这期间一个典型的 $5T$ 周期解和奇怪吸引子的相图。

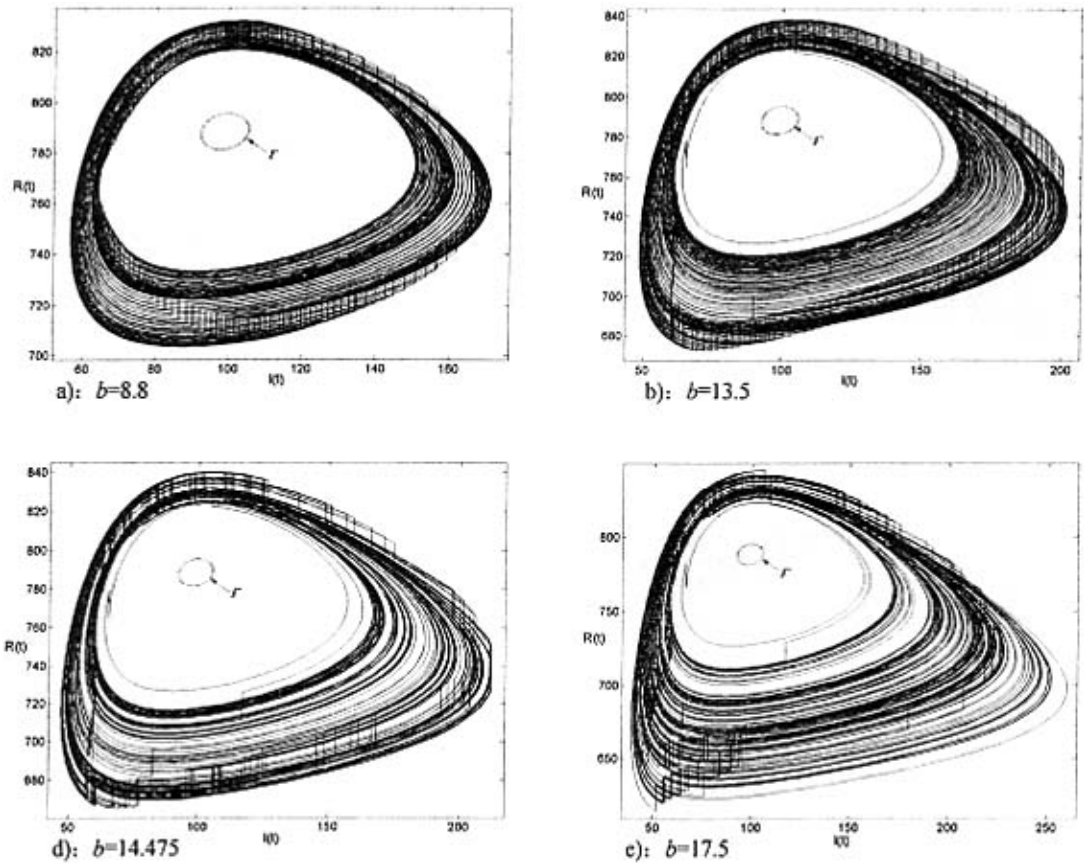


图 3.4.4: 混沌解相图

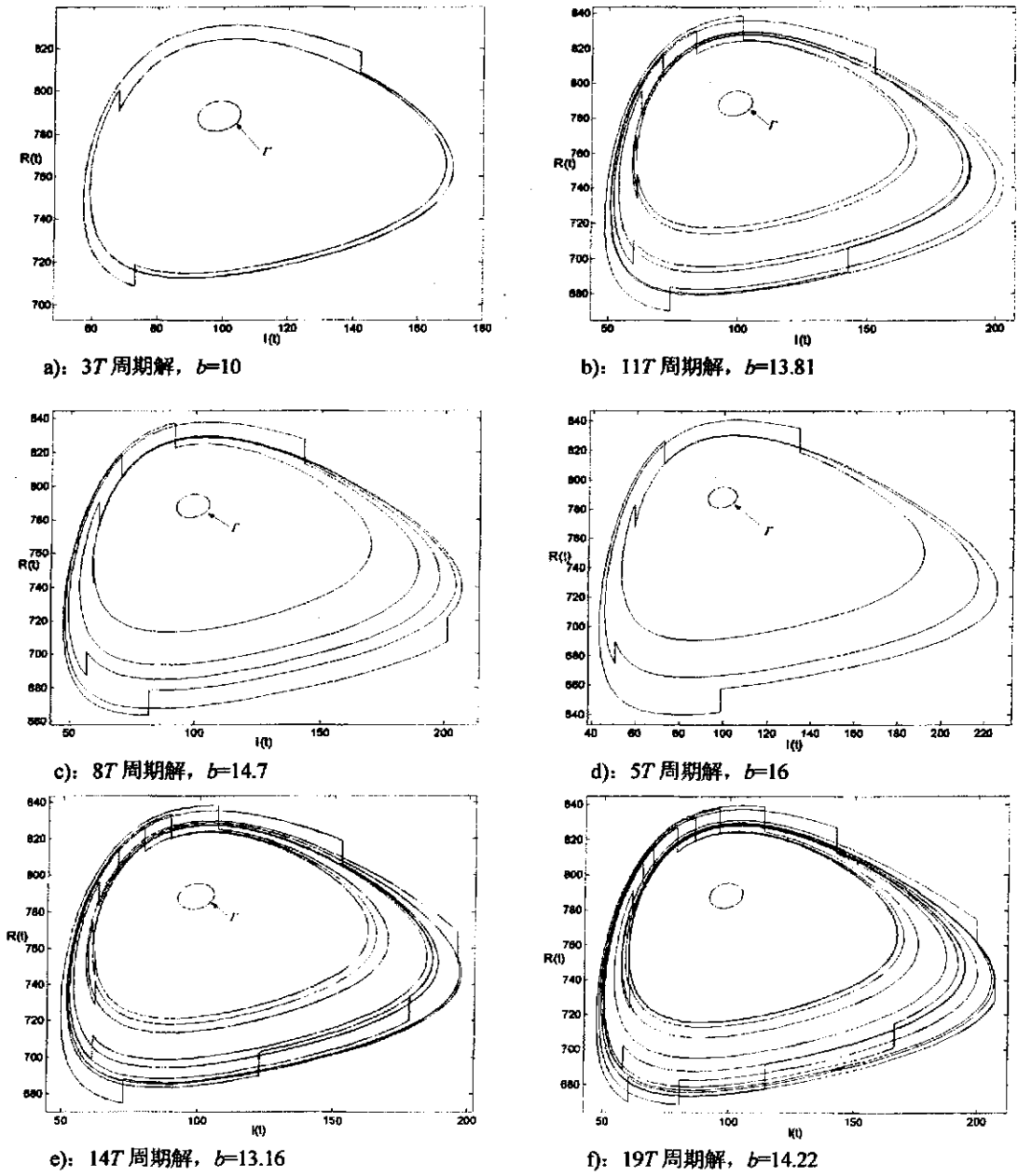
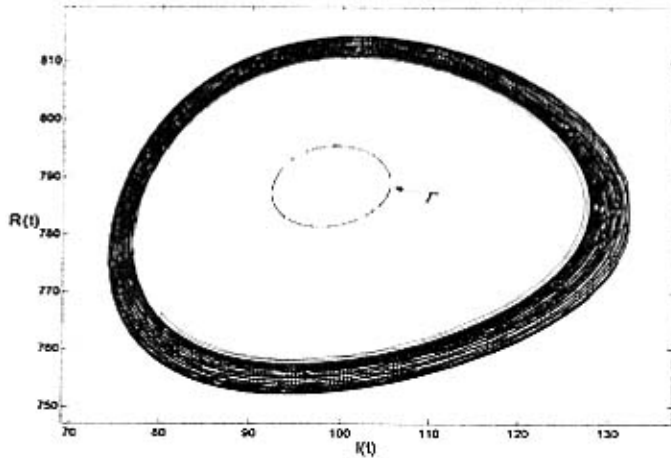


图 3.4.5: 多重周期解的相图

图 3.4.6: 拟周期解相图 $b=3$

§3.5 第二型常数脉冲免疫接种模型

3.5.1 模型

本节中我们将前一节的常数脉冲接种方式作一些改进。因为常熟脉冲是定期的按一个固定值进行免疫接种，不仅符合实际背景，而且具有很好的可操控性，比起按比例的进行接种更容易实施，但它却如注释 3.4.1所说的不能保证三维系统的正性，这使得系统不能够十分准确的描述生物意义，比例型的脉冲接种方式虽然可以保证系统的正性，但是如前所述在具体实施的时候不一定能按预期的方案进行，这是因为当易感者数量很大时所需接种之人数也成比例的增长，而这与一个地区的防疫能力有限会产生矛盾。

综上，我们考虑当易感者数量很大时我们采用常数脉冲接种，而当易感者数量较小时采用比例型脉冲接种方式，这样既可以保证系统的正性，又使得其有很好的可应用性。具体的改进后的脉冲微分方程如下：

$$\begin{cases} \dot{S} = -KI^2S - \alpha S + \alpha N_0 - r_1 I \\ \dot{I} = KI^2S - \beta I \end{cases} \quad t \neq nT, n=1,2,\dots$$

$$\begin{cases} S(t^+) = \begin{cases} 0, & S(t^-) < p, \\ S(t^-) - p, & S(t^-) \geq p, \end{cases} \\ I(t^+) = I(t^-), \end{cases} \quad t = nT, n=1,2,\dots \quad (3.5.1)$$

初值满足 $S(0^+) \geq 0$, $I(0^+) \geq 0$, p 为免疫接种的脉冲量, 当易感者数量小于这个量时, 我们采用的是比例型脉冲 $\Delta S(t) = -S(t^-)$, 而当易感者大于这个量时, 我们采用的是常数型脉冲 $\Delta S(t) = -p$, 其他参数和 (3.3.2) 中的相同。

3.5.2 无病周期解的性质

很显然我们首先有下面引理:

引理 3.5.1 设 $x(t) = (S(t), I(t))$ 是系统 (3.5.1) 的具有初值 $S(0^+) \geq 0, I(0^+) \geq 0$ 的解, 则有 $x(t) \geq 0$, 即 $S(t) \geq 0$ 和 $I(t) \geq 0$; 而且, 如果 $S(0^+) > 0, I(0^+) > 0$, 则 $x(t) > 0$ 对所有 $t \geq 0$ 成立。

显然系统 (3.5.1) 有一个不变集 $\{(S, I) | S \geq 0, I > 0, S + I \leq N_0\}$ 。

考虑下面两个一维脉冲系统:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\alpha S + \alpha N_0, & t \neq nT, n=1,2,\dots \\ S(t^+) = 0, & t = nT, n=1,2,\dots \end{cases} \quad (3.5.2)$$

和

$$\begin{cases} \dot{S} = -\alpha S + \alpha N_0, & t \neq nT, n=1,2,\dots \\ S(t^+) = S(t^-) - p, & t = nT, n=1,2,\dots \end{cases} \quad (3.5.3)$$

关于这两个系统我们有如下引理

引理 3.5.2 系统 (3.5.2) 有一个全局渐近稳定的 T -周期解:

$$S_r^*(t) \triangleq N_0 + (S_r^0 - N_0)e^{-\alpha(t-nT)}, \quad t \in [nT, (n+1)T), \quad \text{初值为 } S_r^0 = 0.$$

引理 3.5.3 系统 (3.5.3) 有一个全局渐近稳定的 T -周期解:

$$S_c^*(t) \triangleq N_0 + (S_c^0 - N_0)e^{-\alpha(t-nT)}, \quad t \in [nT, (n+1)T), \quad \text{初值为 } S_c^0 = N_0 - \frac{p}{1 - e^{-\alpha T}}.$$

特别是当 $N_0 - N_0 e^{-\alpha T} \geq p$ 时, $S_c^*(t)$ 将是一个非负周期解。

这两个引理的证明与前面的类似, 这里不再赘述。

系统 (3.5.1) 当 $I=0$ 时有一个无病子系统:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\alpha S + \alpha N_0, & t \neq nT, n=1,2,\dots \\ S(t^+) = \begin{cases} 0, & S(t^-) < p, \\ S(t^-) - p, & S(t^-) \geq p, \end{cases} & t = nT, n=1,2,\dots \end{cases} \quad (3.5.4)$$

关于这个无病子系统我们有如下引理:

引理 3.5.4 系统 (3.5.4) 有如下形式的 T -周期解

$$S^*(t) \triangleq \begin{cases} S_r^*(t), & N_0 - N_0 e^{-\alpha T} < p \\ S_c^*(t), & N_0 - N_0 e^{-\alpha T} \geq p \end{cases}$$

并且它是渐近稳定的。

证明: 分情况讨论,

1) $N_0 - N_0 e^{-\alpha T} < p$

此时 $S_r^*((n+1)T^-) < p$, 如果有某个 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $S(t^+) = 0 (t = kT)$, 则我们可以断定对所有的 $t = nT, n > k$, 有 $S(t^+) = 0, S(t) = S_r^*(t), t \geq kT$, 如果这样的 k 不存在, 则对所有的 $t = nT$ 有 $S(t^+) = S(t^-) - p$, 但此时 $S_c^0 = N_0 - \frac{p}{1 - e^{-\alpha T}} < 0$, 由引理 3.5.3 可知 $S(t)$ 终将有一时刻为负, 这与系统的正性矛盾, 故在这种情况下所有解最终都将趋向于 $S_r^*(t)$, 而 $S_r^*(t)$ 的稳定性也可根据前面的讨论类似证明。

2) $N_0 - N_0 e^{-\alpha T} \geq p$

此时 $S_r^*((n+1)T^-) \geq p$, 脉冲 $\Delta S(t) = -S(t^-)$ 当 $t = nT (n > 1)$ 时不可能发生, 也就是说对所有的 $nT (n > 1)$ 有 $S(t^+) = S(t^-) - p$, 由引理 3.5.3 可知结论显然成立。■

定理 3.5.1 系统 (3.5.1) 的边界周期解 $(S^*(t), 0)$ 是局部渐近稳定的。

因为 $S_r^*(t)$ 与 $S_c^*(t)$ 不会同时存在, 所以此定理的证明与定理 3.3.1 的证明类似, 这里不再写出。

设

$$R_3^0 \triangleq N_0 K \left[\frac{N_0}{\beta} - \gamma \frac{e^{(\alpha+\beta)T} - 1}{(\alpha+\beta)(e^{\alpha T} - 1)(e^{\beta T} - 1)} \right]$$

其中 $\gamma = \min\{p, N_0(1 - e^{-\alpha T})\}$ 。

定理 3.5.2 如果 $R_3^0 < 1$ 成立, 则系统 (3.5.1) 所有的从区域

$\{(S, I) | S \geq 0, I > 0, S + I \leq N_0\}$ 内出发的解 $(S(t), I(t))$ 都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |S(t) - S^*(t)| = 0$,
 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$.

证明: 设 $(S(t), I(t))$ 是系统 (3.3.2) 的一个解, $0 \leq S(t) \leq N_0, 0 \leq I(t) \leq N_0$.

分情况讨论:

$$1) N_0 - N_0 e^{-\alpha T} < p$$

$$\text{此时 } R_3^0 = N_0 K \left[\frac{N_0}{\beta} - N_0 (1 - e^{-\alpha T}) \frac{e^{(\alpha+\beta)T} - 1}{(\alpha + \beta)(e^{\alpha T} - 1)(e^{\beta T} - 1)} \right]$$

根据定理条件 $R_3^0 < 1$, 我们可以找到足够小的 $\varepsilon_1 > 0$ 使得

$$1 - R_3^0 - \varepsilon_1 \frac{KI(0)}{\beta} > 0,$$

再由 (3.5.1) 的第一个方程可得:

$$\dot{S} \leq -\alpha S + \alpha N_0,$$

根据引理 3.5.4 可得, 对上面的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $t_1 > 0$, 当 $t > t_1$ 时, 有

$$S(t) \leq S_r^*(t) + \varepsilon_1,$$

不假设上式对所有的 $t > 0$ 都成立, 再由 (3.5.1) 的第二个方程可得:

$$\dot{I} \leq KI^2 (S_r^*(t) + \varepsilon_1) - \beta I,$$

于是我们解得:

$$I(t) \leq \frac{I(0)e^{-\beta t}}{1 - I(0) \int_0^t K(S_r^*(\sigma) + \varepsilon_1)e^{-\beta \sigma} d\sigma},$$

其中当 $t \in [nT, (n+1)T)$ 时

$$\begin{aligned}
 \int_0^t S_r^*(\sigma)e^{-\beta\sigma} d\sigma &= \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)T}^T S_r^*(\sigma)e^{-\beta\sigma} d\sigma + \int_{nT}^t S_r^*(\sigma)e^{-\beta\sigma} d\sigma \\
 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(i-1)T}^T S_r^*(\sigma)e^{-\beta\sigma} d\sigma \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_0}{e^{(i-1)\beta T}} \left[\frac{1-e^{-\beta T}}{\beta} - \frac{e^{\alpha T} - e^{-\beta T}}{(\alpha + \beta)e^{\alpha T}} \right] \\
 &= \left[\frac{N_0}{\beta} - N_0(1-e^{-\alpha T}) \frac{e^{(\alpha+\beta)T} - 1}{(\alpha + \beta)(e^{\alpha T} - 1)(e^{\beta T} - 1)} \right] \\
 &= \frac{R_3^0}{N_0 K}
 \end{aligned}$$

所以

$$I(t) \leq \frac{I(0)e^{-\beta t}}{-R_3^0 - K\varepsilon_1 I(0) \int_0^t e^{-\beta\sigma} d\sigma + 1} \leq \frac{I(0)e^{-\beta t}}{-R_3^0 - \varepsilon_1 \frac{KI(0)}{\beta} + 1},$$

由 ε 的选取可知上式右边分母为正, 因此可得当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $I(t) \rightarrow 0$.

于是对充分小的 $\varepsilon_2 > 0$, 存在 $t_2 > t_1$, 使得当 $t > t_2$ 时有:

$$\dot{S} \geq -\alpha S + \alpha N_0 - \alpha \varepsilon_2,$$

这里我们可以要求所选取的 ε_2 足够小以满足 $(N_0 - \varepsilon_2)(1 - e^{-\alpha T}) < p$, 在此条件下, 类似于引理 3.5.4 我们可以得知, 如下的脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\alpha S + \alpha(N_0 - \varepsilon_2), & t \neq nT, n=1, 2, \dots \\ S(t^+) = \begin{cases} 0, & S(t^-) < p, \\ S(t^-) - p, & S(t^-) \geq p, \end{cases} & t = nT, n=1, 2, \dots \end{cases}$$

具有全局稳定的周期解

$$S_r^*(t) - \varepsilon_2 [1 - e^{-\alpha(t-nT)}] \geq S_r^*(t) - \varepsilon_2 [1 - e^{-\alpha T}] = S_r^*(t) - \varepsilon_3,$$

这里 ε_3 因为 ε_2 的任意性也可以任意的小, 继而我们得到当 $t > t_2$ 时有:

$$S(t) \geq S_r^*(t) - \varepsilon_3,$$

结合前面的讨论结果对任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $t_1 > 0$, 当 $t > t_1$ 时, 有 $S(t) \leq S_r^*(t) + \varepsilon_1$, 我们

便可以得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} |S(t) - S^*(t)| = 0$;

$$2) N_0 - N_0 e^{-\alpha T} > p$$

根据定理条件, 我们可以找到足够小的 $\varepsilon_1 > 0$ 使得

$$1 - R_3^0 - \varepsilon_1 \frac{KI(0)}{\beta} > 0$$

此时依然有 $\dot{S} \leq -\alpha S + \alpha N_0$, 由引理 3.5.4 可知对任意小的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $t_1 > 0$, 当 $t > t_1$ 时, 有

$$S(t) \leq S_c^*(t) + \varepsilon_1,$$

不假设上式对所有的 $t > 0$ 都成立, 再由 (3.5.1) 的第二个方程可得:

$$\dot{I} \leq KI^2(S_c^*(t) + \varepsilon_1) - \beta I,$$

于是我们解得:

$$I(t) \leq \frac{I(0)e^{-\beta t}}{I(0) \int_0^t -K(S_c^*(\sigma) + \varepsilon_1)e^{-\beta\sigma} d\sigma + 1},$$

其中当 $t \in [nT, (n+1)T)$ 时

$$\begin{aligned} \int_0^t S_c^*(\sigma)e^{-\beta\sigma} d\sigma &= \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)T}^{iT} S_c^*(\sigma)e^{-\beta\sigma} d\sigma + \int_{nT}^t S_c^*(\sigma)e^{-\beta\sigma} d\sigma \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(i-1)T}^{iT} S_c^*(\sigma)e^{-\beta\sigma} d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{i\beta T}} \left[N_0 \frac{e^{\beta T} - 1}{\beta} - p \frac{e^{(\alpha+\beta)T} - 1}{(\alpha+\beta)(e^{\alpha T} - 1)} \right] \\ &= \left[\frac{N_0}{\beta} - p \frac{e^{(\alpha+\beta)T} - 1}{(\alpha+\beta)(e^{\alpha T} - 1)(e^{\beta T} - 1)} \right] \\ &\leq \frac{R_3^0}{N_0 K} \end{aligned}$$

所以

$$I(t) \leq \frac{I(0)e^{-\beta t}}{-R_3^0 - K\varepsilon_1 N_0 \int_0^t e^{-\beta\sigma} d\sigma + 1} \leq \frac{I(0)e^{-\beta t}}{-R_3^0 - \varepsilon_1 \frac{KN_0}{\beta} + 1},$$

由前面讨论可知上式右边分母当 $t > 0$ 时为正, 因此可得当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $I(t) \rightarrow 0$.

于是对充分小的 $\varepsilon_2 > 0$, 存在 $t_2 > t_1$, 使得当 $t > t_2$ 时有:

$$\dot{S} \geq -\alpha S + \alpha N_0 - \alpha \varepsilon_2,$$

这里我们可以要求所选取的 ε_2 足够小以满足 $(N_0 - \varepsilon_2)(1 - e^{-\alpha T}) > p$, 在此条件下, 类似

于引理 3.5.4 我们可以得知, 如下的脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\alpha S + \alpha(N_0 - \varepsilon_2), & t \neq nT, n=1, 2, \dots \\ S(t^+) = \begin{cases} 0, & S(t^-) < p, \\ S(t^-) - p, & S(t^-) \geq p, \end{cases} & t = nT, n=1, 2, \dots \end{cases}$$

具有全局稳定的周期解

$$S_c^*(t) - \varepsilon_2,$$

继而我们得到当 $t > t_2$ 时有:

$$S(t) \geq S_c^*(t) - \varepsilon_2,$$

结合前面的讨论结果我们便可以得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} |S(t) - S^*(t)| = 0$;

$$3) N_0 - N_0 e^{-\alpha T} = p$$

根据引理 3.5.4 我们可以找到足够小的 $\varepsilon_1 > 0$ 使得 $S(t) \leq S_c^*(t) + \varepsilon_1$, 并且类似于第二种情况, 我们可以证明 $I(t) \rightarrow 0$.

于是对充分小的 $\varepsilon_2 > 0$, 存在 $t_2 > t_1$, 使得当 $t > t_2$ 时有:

$$\dot{S} \geq -\alpha S + \alpha N_0 - \alpha \varepsilon_2,$$

而此时由于 $N_0 - N_0 e^{-\alpha T} = p$, 所以 $(N_0 - \varepsilon_2)(1 - e^{-\alpha T}) < p$, 由引理 3.5.4

$$\begin{aligned} S(t) &\geq S_r^*(t) - \varepsilon_2 [1 - e^{-\alpha(t-nT)}] \\ &\geq S_r^*(t) - \varepsilon_2 [1 - e^{-\alpha T}] \\ &= S_r^*(t) - \varepsilon_3 \end{aligned}$$

因为此时有 $S_r^*(t) = S_c^*(t)$, 所以 $S(t) \geq S_c^*(t) - \varepsilon_3$, 结合前面的结果我们得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |S(t) - S^*(t)| = 0.$$

这样我们就证明了这个定理。■

由定理 3.5.1 和定理 3.5.2 我们可以得到:

定理 3.5.3 如果 $R_3^0 < 1$ 成立, 则系统 (3.5.1) 的边界周期解 $(S^*(t), 0)$ 在不变集 $\{(S, I) | S \geq 0, I > 0, S + I \leq N_0\}$ 内是全局渐近稳定的。

注释 3.5.1: 系统 (3.5.1) 同样具有其复杂性, 其研究方法与前两节类似, 故在这里省略复杂性的数值分析。

§3.6 生物结论

本章研究了几种不同的免疫接种方式包括脉冲免疫接种方式对疾病流行系统所产生的作用。比例型的接种方式在实际应用中不易实施，常数型的接种方式虽然较易实行，但从数学的角度来看当被接种人数小于需接种人数时有一定的不合理性，而第二型常数脉冲免疫接种方式即有着常数型所具有的易实施性，又弥补了其不合理性，是一个较为实用的疾病控制脉冲接种方式。对每种方法我们给出了控制疾病的流行所需的条件，结论表明当控制值 R_i^0 ($i=1,2,3$) 小于 1 时，疾病最终将被消除。

其中 $R_1^0 = \frac{(\alpha KN_0)^2}{4K\beta(r_1 + \beta)(\alpha + p)}$ 当 $p=0$ 时相当于无免疫接种系统 (3.1.3) 的再生数，另

外对于 $R_2^0(T) = KN_0^2 \left[\frac{1}{\beta} - \frac{p(e^{(\alpha+\beta)T} - 1)}{(\alpha + \beta)(e^{\alpha T} - 1 + p)(e^{\beta T} - 1)} \right]$ ，当 p 固定时，我们有

$\lim_{T \rightarrow 0^+} R_2^0(T) = 0$ ，对于

$$R_3^0(T) \triangleq N_0 K \left[\frac{N_0}{\beta} - \gamma \frac{e^{(\alpha+\beta)T} - 1}{(\alpha + \beta)(e^{\alpha T} - 1)(e^{\beta T} - 1)} \right]$$

其中 $\gamma = \min \{ p, N_0(1 - e^{-\alpha T}) \}$ ，同样有 $\lim_{T \rightarrow 0^+} R_3^0(T) = 0$ 。

因此当 $R_1^0 > 1$ 连续免疫接种无法根除疾病的时候，我们可以采取比例形式或第二型常数形式的脉冲免疫接种预防，选取适当的接种量和接种周期从而最终可以使疾病得到控制。

第四章 两种群非自治的阶段结构种群动力学

§4.1 阶段结构模型介绍

在阶段结构未被引入种群动力学之前，在一个系统中我们都是用一个单一变量去描述一个物种，在这个前提下，我们实际上默认了这个物种的个体从出生到死亡都表现出相同或近似的生理特征和生理行为。很显然，这并不很符合实际情况。我们知道自然界中有很多种群如一些昆虫、两栖类动物等，它们从出生到死亡要经历各种不同的生命阶段，最终才能演变成成年个体。比如青蛙要经历蝌蚪、成体蛙两个截然不同的生命阶段，再比如蝴蝶，它是属于完全变态类的昆虫，它的一生具有四个明显不同的发育阶段：卵期（胚胎时期）、幼虫期（生长时期）、蛹期（转变时期）和成虫期（有性时期）。

这些物种的个体在生命的每一个阶段中都有着不同的外形和生理行为，例如蝴蝶在化蛹期便停止取食，到了成虫期才具有繁殖功能，称为有性时期，有雌雄两种形态，在这期间具有翅膀，可以在不同生存斑块之间移动。一些食肉型的动物在幼年期不具有捕食的能力，而只有到了成年后才能独立捕食。

为了更准确地反应这些现象，有必要建立反应种群在各个生命阶段的不同行为的数学模型，即用多个变量来描述一个种群，每个变量代表在不同阶段的种群的数量或密度，每个生命阶段，其死亡率、生存至下一个阶段的几率都依赖于生存环境和其自身的形态大小。阶段结构模型在较早前就有学者开始研究，如[14][33][35][37][41][82][85]，但是自从 Aiello 和 Freedman[2]于 1990 年提出著名的单种群时滞转化的阶段模型之后，阶段结构模型的才开始集中的被研究。随后 Aiello 和 Freedman 等[1]又对文献[2]中的模型进行改进，Freedman 等还在[23]中提出带扩散的阶段结构模型，另外陈[96]还提出一种比例转化的阶段结构模型。之后陆续有很多学者研究了阶段结构模型[16][19][36][83]，文献[89][74][75]研究了阶段结构模型在对自然资源的管理和收获中的应用。文献[47]就近几年阶段结构方面的模型研究作了一个系统地总结。

在以上这些模型中都是常数参数的，也就是说模型假定环境对生态系统的影响因素是恒定不变的。但事实上这种恒定的环境是不存在的，自然界中影响系统发展的因素往往会随着季节或白天黑夜的交替而变化。所以为了精确的描述自然，研究时变环境的生态系统也是很有必要的，于是又有学者对非自治即时变的阶段结构模型作了研究[92][54]，但有关非自治的阶段结构模型的研究结果还不是很多，本章第二节研究了一个两种群竞争的非自治阶段结构模型，第三节研究了一个带有消化时滞的两种群捕食的阶

段结构模型。

§4.2 非自治竞争的两种群阶段结构模型

4.2.1 模型的建立

文献[19]中研究的是如下的模型：

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \alpha x_m(t) - \gamma x_i(t) - \Omega x_i(t) - \eta x_i^2(t), \\ \dot{x}_m(t) = \Omega x_i(t) - \theta x_m(t) - \beta x_m^2(t), \end{cases} \quad (4.2.1)$$

这是一个比例转化的阶段结构模型， x_i 表示未成年种群密度， x_m 表示成年种群密度，我们将这个模型与经典的竞争 Lotka-Volterra 结合起来，而且我们假设系数都是随时间变化的，构造的模型如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_1(t)x_1(t) + b_1(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_2(t)x_1(t) - b_2(t)x_2(t) - c(t)x_2^2(t) - \beta_1(t)x_2(t)x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t)(d(t) - e(t)x_3(t) - \beta_2(t)x_2(t)), \end{cases} \quad (4.2.2)$$

这里 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别表示第一个种群的未成年个体和成年个体密度， $x_3(t)$ 表示第二个种群密度，它和第一个种群的成年个体是竞争关系。 $a_1(t)$ 表示第一个种群幼年个体向成年个体转化或者自然死亡的比率， $a_2(t)$ 表示由幼年个体成功转化为成年个体的概率， $b_1(t)$ 表示成年个体生育幼年个体的出生率， $b_2(t)$ 表示第一个种群的成年个体的自然死亡率， $c(t)$ 表示成年个体的密度制约项， $d(t)$ 表示第二个种群的内禀增长率， $e(t)$ 表示第二个种群的密度制约系数， $\beta_1(t)$ 为第一个种群成年个体与第二个种群竞争产生的对自身的影响系数， $\beta_2(t)$ 为第二个种群与第一个种群成年个体竞争产生的对自身的影响系数，所有的系数 $a_i(t)$ ， $b_i(t)$ ， $\beta_i(t)$ ， $(i=1, 2)$ ， $c(t)$ ， $d(t)$ ， $e(t)$ 都是连续函数。

定义 4.2.1 如果存在一个紧区域 $D \subset \text{int } \mathbb{R}_+^3$ ，使得每一个 (4.2.2) 的给定初值的解 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 都会最终进入并停留在区域 D 内，则我们称系统 (4.2.2) 是持久生存的。

对于实函数 $g(t)$ ， $t \in [0, +\infty)$ ，我们定义：

$$g^U \triangleq \sup_{[0, +\infty)} \{g(t)\}, \quad g^L \triangleq \inf_{[0, +\infty)} \{g(t)\}.$$

利用上面的定义我们在整个的讨论过程作如下的假设：

$$\max_{i=1,2} \{a_i^U, b_i^U, \beta_i^U, c^U, d^U, e^U\} < +\infty,$$

和

$$\min_{i=1,2} \{a_i^L, b_i^L, \beta_i^L, c^L, d^L, e^L\} > 0.$$

4.2.2 持久性

引理 4.2.1 $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i > 0, i = 1, 2, 3\}$ 是系统 (4.2.2) 的一个正向不变集。

证明: 设 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 是 (4.2.2) 的一个解, 它具有正的初值 $x_1(0) > 0$, $x_2(0) > 0$, $x_3(0) > 0$, 由方程 (4.2.2) 我们得到:

$$\dot{x}_1|_{x_1=0} \geq 0,$$

$$\dot{x}_2|_{x_2=0} \geq 0,$$

和

$$x_3(t) = x_3(0)e^{\int_0^t (d(u) - e(u)x_3(u) - \beta_2(u)x_2(u)) du},$$

所以解轨线不会越出 \mathbb{R}_+^3 , 引理得证。■

引理 4.2.2 存在 $M_i > 0 (i = 1, 2, 3)$, 使得 $K_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 < x_i < M_i, i = 1, 2, 3\}$ 是系统 (4.2.2) 的一个正不变集, 而且每一个 (4.2.2) 的具有正初值的解都将最终进入这个区域。

证明: 设 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 是 (4.2.2) 的一个解, 它具有正的初值 $x_1(0) > 0$, $x_2(0) > 0$, $x_3(0) > 0$ 。

从 (4.2.2) 的前两个方程, 我们得到:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \leq -a_1^L x_1(t) + b_1^U x_2(t), \\ \dot{x}_2 \leq a_2^U x_1(t) - b_2^L x_2(t) - c^L x_2^2(t), \end{cases}$$

我们只考虑 $a_2^U b_1^U - a_1^L b_2^L \geq 0$ 的情况, 因为这也是后面的定理所要讨论的情况 (事实上, 此引理的结论当 $a_2^U b_1^U - a_1^L b_2^L < 0$ 时依然成立)。我们按如下要求选择 M_1 和 M_2

$$M_1 > \frac{b_1^U}{a_1^L} \left(\frac{a_2^U b_1^U - a_1^L b_2^L}{a_1^L c^L} \right),$$

$$M_2 > \left(\frac{a_2^U b_1^U - a_1^L b_2^L}{a_1^L c^L} \right),$$

同时我们还要求

$$\frac{b_1^U}{a_1^L} M_2 < M_1 < \frac{b_2^L M_2 + c^L M_2^2}{a_2^U},$$

而且根据 M_2 的选取, 这个要求是合理的。

现在我们可以计算出:

$$\dot{x}_1 \Big|_{\substack{x_1=M_1 \\ x_2 \leq M_2}} \leq -a_1^L M_1 + b_1^U M_2 < 0,$$

$$\dot{x}_2 \Big|_{\substack{x_2=M_2 \\ x_1 \leq M_1}} \leq a_2^U M_1 - b_2^L M_2 - c^L M_2^2 < 0,$$

由此我们可以断定在 $x_1 - x_2$ 平面上如果初值满足 $0 < x_1(0) \leq M_1$ 和 $0 < x_2(0) \leq M_2$, 则 $(x_1(t), x_2(t))$ 必将永久停留在区域 $\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 \leq M_1, 0 < x_2 \leq M_2\}$.

如果初值 $(x_1(0), x_2(0)) \notin \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 \leq M_1, 0 < x_2 \leq M_2\}$, 则我们作如下讨论, 我们定义:

$$R_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > M_1, M_2 x_1 \geq M_1 x_2, x_2 > 0\},$$

$$R_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > M_2, M_2 x_1 \leq M_1 x_2, x_1 > 0\}$$

和

$$g(t) = \max \{M_2 x_1(t), M_1 x_2(t)\},$$

于是我们有:

$$g(t) = \begin{cases} M_2 x_1(t), & (x_1(t), x_2(t)) \in R_1 \\ M_1 x_2(t), & (x_1(t), x_2(t)) \in R_2 \end{cases},$$

下面我们分别计算 $g(t)$ 在区域 R_1 和 R_2 中的导数:

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) \Big|_{R_1} &\leq M_2 [b_1^U x_2(t) - a_1^L x_1(t)] \\ &\leq M_2 x_1(t) \left[\frac{M_2}{M_1} b_1^U - a_1^L \right] \\ &< 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{g}(t)|_{R_2} &\leq M_1 \left[a_2^U x_1(t) - b_2^L x_2(t) - c^L x_2^2(t) \right] \\
&\leq \frac{M_1}{M_2} \left[a_2^U M_1 x_2(t) - b_2^L M_2 x_2(t) - c^L M_2 x_2^2(t) \right] \\
&\leq \frac{M_1}{M_2} x_2(t) \left[a_2^U M_1 - b_2^L M_2 - c^L M_2^2 \right] \\
&< 0,
\end{aligned}$$

于是当 $(x_1(t), x_2(t)) \in R_1 \cup R_2$ 时, $g(t)$ 单调减少, 如果初值满足 $(x_1(0), x_2(0)) \in R_1 \cup R_2$, 则有 $g(0) > 0$, 我们有:

$$\begin{aligned}
\dot{g}(t)|_{R_1} &\leq g(0) \left[\frac{M_2}{M_1} b_1^U - a_1^L \right] = -\alpha_1 < 0, \\
\dot{g}(t)|_{R_2} &\leq \frac{g(0)}{M_2} \left[a_2^U M_1 - b_2^L M_2 - c^L M_2^2 \right] = -\alpha_2 < 0,
\end{aligned}$$

最终我们可以估计出 $g(t)$ 在区域 $R_1 \cup R_2$ 中的上右导数:

$$Dg^+(t) \leq -\alpha < 0,$$

这里 $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 。这说明当 $(x_1(t), x_2(t)) \in R_1 \cup R_2$ 时, $g(t)$ 将以不小于 α 的速度递减, 于是必然存在 $t' > 0$ 使得当 $t > t'$ 时, $g(t) < M_1 M_2$, 也即 $x_1(t) < M_1$, $x_2(t) < M_2$ 。

由 (4.2.2) 的第三个方程可得:

$$\dot{x}_3(t) \leq x_3(t)(d^U - e^L x_3(t)),$$

现在我们可以选取 M_3 使得 $M_3 > \frac{d^U}{e^L}$, 于是当 $x_3(0) \leq M_3$ 时 $x_3(t) \leq M_3$ 对所有的 $t > 0$ 成立, 如果 $x_3(0) > M_3$, $x_3(t)$ 会以一个恒定的速度递减, 则必然存在 t'_1 使得 $x_3(t) \leq M_3$ 对所有的 $t > t'_1$ 成立。

综上, 具有正初值的 (4.2.2) 的解 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 最终都将进入并停留在区域 K_0 中。■

定理 4.2.1 如果系统 (4.2.2) 满足:

$$a_2^L b_1^L > a_1^U b_2^U + a_1^U \beta_1^U M_3, \quad (4.2.3)$$

和

$$d^L > \beta_2^U M_2, \quad (4.2.4)$$

则必然存在一个紧区域 $K_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid m_i \leq x_i \leq M_i, i=1, 2, 3\} \in R_+^3$ 使得 K_1 是系统

(4.2.2) 的一个正不变集, 而且每一个具有正初值的 (4.2.2) 的解 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 最终都将进入 K_1 , 这里 $M_i > 0 (i=1, 2, 3)$ 在引理 4.2.2 中已经定义过, $m_i > 0 (i=1, 2, 3)$.

证明: 设 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 是 (4.2.2) 的一个解, 它具有正的初值 $x_1(0) > 0$, $x_2(0) > 0$, $x_3(0) > 0$, 并且根据引理 4.2.2 我们不妨假设对所有的 $t \geq 0$ 有 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in K_0$, K_0 是引理 4.2.2 中已经定义过的.

由 (4.2.2) 的前两个方程可得到:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \geq -a_1^U x_1(t) + b_1^L x_2(t), \\ \dot{x}_2 \geq a_2^L x_1(t) - (b_2^U + \beta_1^U M_3)x_2(t) - c^U x_2^2(t), \end{cases}$$

令:

$$x_2^* = \frac{a_2^L b_1^L - a_1^U b_2^U - a_1^U \beta_1^U M_3}{c^U a_1^U},$$

由条件 (4.2.3) 知 $x_2^* > 0$, 于是我们可以选取 m_1 和 m_2 , 使得:

$$0 < m_2 < x_2^*,$$

和

$$\frac{(b_2^U + \beta_1^U M_3)m_2 + c^U m_2^2}{a_2^L} < m_1 < \frac{b_1^L m_2}{a_1^U},$$

于是我们可以计算出:

$$\dot{x}_1 \Big|_{\substack{x_1=m_1 \\ x_2 \geq m_2}} > 0, \quad \dot{x}_2 \Big|_{\substack{x_2=m_2 \\ x_1 \geq m_1}} > 0,$$

这样如果 $x_1(0) \geq m_1$, $x_2(0) \geq m_2$, 则 $(x_1(t), x_2(t)) \in \{(x_1, x_2) \mid m_i \leq x_i \leq M_i, i=1, 2\}$ 对所有的 $t > 0$ 成立.

如果初值不满足 $x_1(0) \geq m_1$, $x_2(0) \geq m_2$, 即 $0 < x_1(0) < m_1$, 或者 $0 < x_2(0) < m_2$, 则我们作如下讨论, 设:

$$R_1 \triangleq \{(x_1, x_2) \mid m_2 x_1 \leq m_1 x_2, 0 < x_1 < m_1\},$$

$$R_2 \triangleq \{(x_1, x_2) \mid m_1 x_2 \leq m_2 x_1, 0 < x_2 < m_2\},$$

和

$$g(t) = \min \{m_2 x_1(t), m_1 x_2(t)\},$$

于是可得:

$$g(t) = \begin{cases} m_2 x_1(t), & (x_1(t), x_2(t)) \in R_1, \\ m_1 x_2(t), & (x_1(t), x_2(t)) \in R_2, \end{cases}$$

$g(t)$ 的导数满足:

$$\begin{aligned} \dot{g}(t)|_{R_1} &\geq m_2 \left[-a_1^U x_1(t) + b_1^L x_2(t) \right] \\ &\geq m_2 x_1(t) \left[b_1^L \frac{m_2}{m_1} - a_1^U \right] \\ &> 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{g}(t)|_{R_2} &\geq m_1 \left[a_2^L x_1(t) - (b_2^U + \beta_1^U M_3) x_2(t) - c^U x_2^2(t) \right] \\ &\geq \frac{m_1}{m_2} x_2(t) \left[a_2^L m_1 - (b_2^U + \beta_1^U M_3) m_2 - c^U m_2^2 \right] \\ &> 0, \end{aligned}$$

于是 $g(t)$ 在 $R_1 \cup R_2$ 上单调递增。如果给定初值 $g(0) > 0$, 我们有

$$\dot{g}(t)|_{R_1} \geq g(0) \left[b_1^L \frac{m_2}{m_1} - a_1^U \right] = \alpha_1 > 0,$$

$$\dot{g}(t)|_{R_2} \geq \frac{g(0)}{m_2} \left[a_2^L m_1 - (b_2^U + \beta_1^U M_3) m_2 - c^U m_2^2 \right] = \alpha_2 > 0,$$

$g(t)$ 在 $R_1 \cup R_2$ 上的右上导数满足:

$$D^+ g(t) \geq \alpha > 0,$$

$$\alpha = \min \{ \alpha_1, \alpha_2 \},$$

这说明 $g(t)$ 将在 $R_1 \cup R_2$ 上以不低于 α 的速度递增, 那么最终会有 $g(t) > m_1 m_2$ 成立, 也即 $x_1(t) > m_1$ 和 $m_2(t) > m_2$ 将最终成立

再根据 (4.2.2) 的第三个方程, 我们得到:

$$\dot{x}_3 \geq x_3(t) \left[(d^L - \beta_2^U M_2) - e^U x_3(t) \right],$$

现在我们按如下条件选取 m_3 :

$$0 < m_3 < \frac{d^L - \beta_2^U M_2}{e^U},$$

由条件 (4.2.4) 可知这种选取方法是合理的, 而此时我们也可以用类似的方法很容易证明如果 $x_3(0) \geq m_3$, 则 $x_3(t) \geq m_3$ 对所有的 $t > 0$ 成立, 或者如果 $x_3(0) < m_3$, 则存在 $t' > 0$, 使得 $x_3(t) \geq m_3$ 对所有的 $t > t'$ 成立。

至此, 我们证明了设 (4.2.2) 的任一个具有正初值的解 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 最终都将进入并停留在区域 K_1 中。■

如果 (4.2.2) 满足定理 4.2.1 中的条件, 则此时系统是持久生存的。

4.2.3 周期解的存在性和渐近稳定性

影响系统发展的因素随时间变化体现在系数是时间 t 的函数, 而自然界很多因素是随着季节呈周期变化的, 因此本部分将讨论特殊情况下的非自治竞争的阶段结构模型, 即假设所有的系数 $a_i(t)$, $b_i(t)$, $\beta_i(t)$, ($i=1, 2$), $c(t)$, $d(t)$, $e(t)$ 都是 ω -周期函数, 此时系统 (4.2.2) 是一个 ω -周期系统, 我们将讨论周期解的存在性和渐近性质。

定理 4.2.2 如果 ω -周期系统 (4.2.2) 满足条件 (4.2.3)、(4.2.4) 和

$$\begin{aligned} a_1^L &> \frac{a_2^U}{m_2}, \\ c^L &> b_1^U - \beta_2^U, \\ e^L &> \beta_1^U, \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

则系统 (4.2.2) 有一个全局渐近稳定的正 ω -周期解。

证明: 根据定理 4.2.1, 不失一般性, 设 $X(t, t_0, X_0) \in R_+^3$ 是系统 (4.2.2) 的任意一个解, 满足 $m_i \leq x_i^0 \leq M_i (i=1, 2, 3)$, 其中 $X_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, $X(t_0, t_0, X_0) = X_0$, m_i 和 $M_i (i=1, 2, 3)$ 是按照定理 4.2.1 的证明过程中选取的。我们构造映射: $A: AX_0 = X(\omega, 0, X_0)$, 由定理 4.2.1 可知, A 将 K_1 映射到自身, 再根据不动点定理 1.5.1 可知 A 有在 K_1 中至少有一个不动点, 而这个不动点正好对应着系统 (4.2.2) 的一个周期解, 我们设为: $X^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t))$ 。

我们选取如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = |x_1(t) - x_1^*(t)| + \sum_{i=2}^3 |\ln x_i(t) - \ln x_i^*(t)|, \quad t \geq 0,$$

显然有:

$$V(0) < +\infty,$$

和

$$V(t) \geq 0, \quad t \geq 0.$$

我们估计 $V(t)$ 的上右导数:

$$D^+V(t) \leq -a_1^L |x_1(t) - x_1^*(t)| - (c^L - b_1^U - \beta_2^U) |x_2(t) - x_2^*(t)| \\ - (e^L - \beta_1^U) |x_3(t) - x_3^*(t)| + \bar{D}(t),$$

其中

$$\bar{D}(t) = \begin{cases} a_2(t) \left[\frac{x_1(t)}{x_2(t)} - \frac{x_1^*(t)}{x_2^*(t)} \right], & x_2(t) \geq x_2^*(t), \\ a_2(t) \left[\frac{x_1^*(t)}{x_2^*(t)} - \frac{x_1(t)}{x_2(t)} \right], & x_2(t) < x_2^*(t). \end{cases}$$

我们分情况讨论, 如果 $x_2(t) \geq x_2^*(t)$, 则

$$\bar{D}(t) \leq \frac{a_2(t)}{x_2(t)} [x_1(t) - x_1^*(t)] \leq \frac{a_2(t)}{m_2} [x_1(t) - x_1^*(t)];$$

如果 $x_2(t) < x_2^*(t)$, 则

$$\bar{D}(t) \leq \frac{a_2(t)}{x_2^*(t)} [x_1^*(t) - x_1(t)] \leq \frac{a_2(t)}{m_2} [x_1^*(t) - x_1(t)],$$

所以有

$$\bar{D}(t) \leq \frac{a_2^U}{m_2} |x_1(t) - x_1^*(t)|.$$

于是:

$$D^+V(t) \leq - \left(a_1^L - \frac{a_2^U}{m_2} \right) |x_1(t) - x_1^*(t)| - (c^L - b_1 - \beta_2^U) |x_2(t) - x_2^*(t)| \\ - (e^L - \beta_1^U) |x_3(t) - x_3^*(t)| \\ \leq -\gamma \sum_{i=1}^3 |x_i(t) - x_i^*(t)| \\ < 0,$$

其中 γ 是一个正数. 对上式两边积分可得:

$$V(t) - V(0) \leq -\gamma \int_0^t \sum_{i=1}^3 |x_i(t) - x_i^*(t)| dt,$$

即

$$\int_0^t \sum_{i=1}^3 |x_i(t) - x_i^*(t)| dt \leq \frac{V(0)}{\gamma} < +\infty,$$

所以 $\sum_{i=1}^3 |x_i(t) - x_i^*(t)| \in L^1[0, +\infty]$, 因为 $x_i(t)$ 和 $x_i^*(t)$ 是有界的, 所以 $\dot{x}_i(t)$ 和 $\dot{x}_i^*(t)$ 也是有界的, 于是 $\sum_{i=1}^3 |x_i(t) - x_i^*(t)|$ 在 $[0, +\infty]$ 上是一致连续的, 根据定理 1.5.3 我们得到 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^3 |x_i(t) - x_i^*(t)| = 0$, 说明 $X^*(t)$ 是全局渐近稳定的。■

4.2.4 例子及图示

这里我们给出一个具体的系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -(9.05 + 0.05 \sin t)x_1(t) + (8.05 - 0.05 \cos t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = (2.05 - 0.05 \sin t)x_1(t) - (0.105 + 0.005 \cos t)x_2(t) \\ \quad - (6.05 - 0.05 \sin t)x_2^2(t) - (1.05 + 0.05 \cos t)x_2(t)x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t)[(3.05 - 0.05 \sin t) - (21.05 + 0.05 \cos t)x_3(t) \\ \quad - (5.05 - 0.05 \sin t)x_2(t)]. \end{cases}$$

这个 2π -周期系统满足定理 4.2.2 中的所有条件, 因此它有一个全局渐近稳定的周期解 (见图 4.2.1), 此时也是持久生存的。

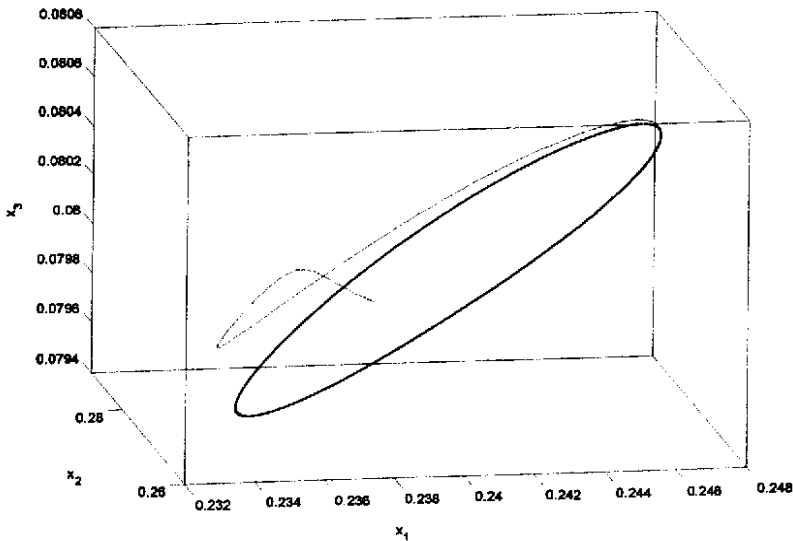


图 4.2.1

§4.3 非自治捕食的两种群带消化时滞的阶段结构模型

4.3.1 模型的建立

本节是将按比例转化的阶段结构模型 (4.2.1) 与经典的 Lotka-Volterra 两种群捕食模型结合起来。在自然界中有一些捕食种群大多是捕食食饵种群中的幼年个体，而成年个体有较好的防护能力，被捕食的概率比较小，所以我们建立如下结构模型：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_1(t)x_1(t) + b_1(t)x_2(t) - \beta_1(t)x_1(t)x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_2(t)x_1(t) - b_2(t)x_2(t) - c(t)x_2^2(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t)[-d(t) - e(t)x_3(t)] + \beta_2(t)x_1(t-\tau)x_3(t-\tau), \\ x_i(t) = \phi_i(t) > 0, -\tau \leq t \leq 0, i=1,2,3 \end{cases} \quad (4.3.1)$$

其中 x_1 和 x_2 表示食饵种群的幼年个体和成年个体的密度或数量， x_3 表示捕食种群密度或数量，它以食饵种群的幼年个体为食饵。 $a_1(t)$ 表示食饵种群幼年个体向成年个体转化或者自然死亡的比率， $a_2(t)$ 表示由幼年个体成功转化为成年个体的概率， $b_1(t)$ 表示成年个体生育幼年个体的出生率， $b_2(t)$ 表示食饵种群的成年个体的自然死亡率， $c(t)$ 表示成年个体的密度制约项， $d(t)$ 表示捕食者种群的内禀增长率， $e(t)$ 表示捕食者种群的密度制约系数， $\beta_1(t)$ 为捕食者种群捕获食饵种群的幼年个体的捕食率， $\beta_2(t)$ 表示捕食者种群捕食后吸收的概率，常数 τ 表示消化时滞，也即捕食种群捕食后要经过时间 τ 之后才能消化吸收。所有的系数 $a_i(t)$ ， $b_i(t)$ ， $\beta_i(t)$ ，($i=1,2$)， $c(t)$ ， $d(t)$ ， $e(t)$ 都是连续函数， $\tau > 0$ 。

类似于第二节对于实函数 $g(t)$ ， $t \in [0, +\infty)$ ，我们定义：

$$g^U \triangleq \sup_{[0, +\infty)} \{g(t)\}, \quad g^L \triangleq \inf_{[0, +\infty)} \{g(t)\}.$$

利用上面的定义我们在整个的讨论过程作如下的假设：

$$\max_{i=1,2} \{a_i^U, b_i^U, \beta_i^U, c^U, d^U, e^U\} < +\infty,$$

和

$$\min_{i=1,2} \{a_i^L, b_i^L, \beta_i^L, c^L, d^L, e^L\} > 0.$$

4.3.2 持久生存性

引理 4.3.1 $R_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i > 0, i=1,2,3\}$ 是系统 (4.3.1) 的一个正向不变集。

证明：设 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 是 (4.3.1) 的一个解且满足 (4.3.1) 中所给出的初值。

如果 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 不是对所有 $t > 0$ 都是正的, 那么必存在 $t' > 0$, 使得 $x_1(t') = 0$, 或 $x_2(t') = 0$, 或 $x_3(t') = 0$, 令 $t_0 = \inf_{t > 0} \{t \mid x_1(t) = 0 \text{ 或 } x_2(t) = 0 \text{ 或 } x_3(t) = 0\}$, $t_0 > 0$, 现在我们分三种情况讨论:

$$i) \quad x_1(t_0) = 0, \quad x_i(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, t_0], \quad i=1,2,3$$

在这个情况下我们有:

$$\dot{x}_1 \geq x_1(t)[-a_1(t) - \beta_1(t)x_3(t)], \quad t \in [0, t_0],$$

所以:

$$x_1(t) \geq x_1(0) \exp \left[\int_0^t (-a_1(u) - \beta_1(u)x_3(u)) du \right], \quad t \in [0, t_0],$$

于是

$$x_1(t_0) \geq \phi_1(0) \exp \left[\int_0^{t_0} (-a_1(u) - \beta_1(u)x_3(u)) du \right] > 0,$$

而这与前述矛盾。

$$ii) \quad x_2(t_0) = 0, \quad x_i(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, t_0], \quad i=1,2,3$$

类似于第一种情况, 我们可得到:

$$\dot{x}_2 \geq x_2(t)[-b_2(t) - c(t)x_2(t)], \quad t \in [0, t_0],$$

同样有:

$$x_2(t_0) \geq \phi_2(0) \exp \left[\int_0^{t_0} [-b_2(t) - c(t)x_2(t)] dt \right] > 0,$$

导致矛盾。

$$iii) \quad x_3(t_0) = 0, \quad x_i(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau, t_0], \quad i=1,2,3$$

如果这种情况成立, 那么根据 (4.3.1) 的第三个方程可得:

$$\dot{x}_3(t) \geq x_3(t)[-d(t) - e(t)x_3(t)],$$

与前面两种情况类似, 一样可以导致矛盾。

综上所述, 这三种情况都不可能成立, 证明完毕。■

引理 4.3.2[75] 考虑下面的方程:

$$\dot{x} = ax(t - \tau) - bx(t) - cx^2(t),$$

$(a, b, c, \tau > 0, x(t) > 0, -\tau \leq t \leq 0)$, 我们有:

$$(i) \quad \text{如果 } a > b, \text{ 则 } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = (a - b) / c;$$

(ii) 如果 $a < b$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

引理 4.3.3 存在 $M_i > 0 (i=1,2,3)$, 使得每一个满足初值 $x_i(t) = \phi_i(t)$, $\phi_i(t) > 0$, $-\tau \leq t \leq 0$, $i=1,2,3$ 的系统 (4.3.1) 的解都将最终进入并停留在区域 $K_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 < x_i < M_i, i=1,2,3\}$ 中.

证明: 从 (4.3.1) 前两个方程我们有:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \leq -a_1^L x_1(t) + b_1^U x_2(t), \\ \dot{x}_2 \leq a_2^U x_1(t) - b_2^L x_2(t) - c^L x_2^2(t), \end{cases}$$

我们在这里只讨论 $a_2^U b_1^U - a_1^L b_2^L \geq 0$ 的情况, 这也是在后面定理中的情况 (事实上, $a_2^U b_1^U - a_1^L b_2^L < 0$ 的情况下结论也是成立的), 我们选取 M_1 和 M_2 使得:

$$M_1 > \frac{b_1^U}{a_1^L} \left(\frac{a_2^U b_1^U - a_1^L b_2^L}{a_1^L c^L} \right),$$

$$M_2 > \frac{a_2^U b_1^U - a_1^L b_2^L}{a_1^L c^L},$$

而且要求:

$$\frac{b_1^U}{a_1^L} M_2 < M_1 < \frac{b_2^L M_2 + c^L M_2^2}{a_2^U},$$

可以验证这种选取是合理的.

下面我们可计算出:

$$\dot{x}_1 \Big|_{\substack{x_1=M_1 \\ x_2 \leq M_2}} \leq -a_1^L M_1 + b_1^U M_2 < 0,$$

$$\dot{x}_2 \Big|_{\substack{x_2=M_2 \\ x_1 \leq M_1}} \leq a_2^U M_1 - b_2^L M_2 - c^L M_2^2 < 0,$$

由此我们可以断定在 $x_1 - x_2$ 平面上如果初值满足 $0 < x_1(0) \leq M_1$ 和 $0 < x_2(0) \leq M_2$, 则 $(x_1(t), x_2(t))$ 必将永久停留在区域 $\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 \leq M_1, 0 < x_2 \leq M_2\}$.

如果初值 $(x_1(0), x_2(0)) \notin \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 \leq M_1, 0 < x_2 \leq M_2\}$, 则我们作如下讨论, 我们定义:

$$R_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > M_1, M_2 x_1 \geq M_1 x_2, x_2 > 0\},$$

$$R_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > M_2, M_2 x_1 \leq M_1 x_2, x_1 > 0\}$$

和

$$g(t) = \max \{M_2 x_1(t), M_1 x_2(t)\},$$

于是我们有:

$$g(t) = \begin{cases} M_2 x_1(t), & (x_1(t), x_2(t)) \in R_1 \\ M_1 x_2(t), & (x_1(t), x_2(t)) \in R_2 \end{cases},$$

下面我们分别计算 $g(t)$ 在区域 R_1 和 R_2 中的导数:

$$\begin{aligned} \dot{g}(t)|_{R_1} &\leq M_2 [b_1^U x_2(t) - a_1^L x_1(t)] \\ &\leq M_2 x_1(t) \left[\frac{M_2}{M_1} b_1^U - a_1^L \right] \\ &< 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{g}(t)|_{R_2} &\leq M_1 [a_2^U x_1(t) - b_2^L x_2(t) - c^L x_2^2(t)] \\ &\leq \frac{M_1}{M_2} [a_2^U M_1 x_2(t) - b_2^L M_2 x_2(t) - c^L M_2 x_2^2(t)] \\ &\leq \frac{M_1}{M_2} x_2(t) [a_2^U M_1 - b_2^L M_2 - c^L M_2^2] \\ &< 0, \end{aligned}$$

于是当 $(x_1(t), x_2(t)) \in R_1 \cup R_2$ 时, $g(t)$ 单调减少, 如果初值满足 $(x_1(0), x_2(0)) \in R_1 \cup R_2$, 则有 $g(0) > 0$, 我们有:

$$\dot{g}(t)|_{R_1} \leq g(0) \left[\frac{M_2}{M_1} b_1^U - a_1^L \right] = -\alpha_1 < 0,$$

$$\dot{g}(t)|_{R_2} \leq \frac{g(0)}{M_2} [a_2^U M_1 - b_2^L M_2 - c^L M_2^2] = -\alpha_2 < 0,$$

最终我们可以估计出 $g(t)$ 在区域 $R_1 \cup R_2$ 中的上右导数:

$$Dg^+(t) \leq -\alpha < 0,$$

这里 $\alpha = \min \{\alpha_1, \alpha_2\}$. 这说明当 $(x_1(t), x_2(t)) \in R_1 \cup R_2$ 时, $g(t)$ 将以不小于 α 的速度递减, 于是必然存在 $t' > 0$ 使得当 $t > t'$ 时, $g(t) < M_1 M_2$, 也即 $x_1(t) < M_1, x_2(t) < M_2$.

根据上面的讨论, 我们不失一般性的假设 $x_i(t) < M_i (i=1, 2)$ 对所有的 $t \geq -\tau$ 都成立.

由 (4.3.1) 的第三个方程我们有

$$\dot{x}_3(t) \leq \beta_2^U M_1 x_3(t - \tau) - x_3(t)(d^L + e^L x_3(t)),$$

当 $\beta_2^U M_1 > d^L$ (我们不考虑 $\beta_2^U M_1 \leq d^L$ 的情形是因为这种情况在后面定理的条件里已经

排除了), 我们按如下选取 M_3

$$M_3 > \frac{\beta_2^U M_1 - d^L}{e^L},$$

根据引理 4.3.2 $x_3(t) < M_3$ 将最终成立。证明完毕。■

现在我们构造一个紧区域 $K_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid m_i \leq x_i \leq M_i, i = 1, 2, 3\} \in R_+^3$, 其中 M_i 是引理 4.3.3 中所定义的, m_i 将按如下选取。

令

$$x_2^* = \frac{a_2^L b_1^L - a_1^U b_2^U - b_2^U \beta_1^U M_3}{c^U (a_1^U + \beta_1^U M_3)},$$

如果

$$a_2^L b_1^L > a_1^U b_2^U + b_2^U \beta_1^U M_3, \quad (4.3.2)$$

则我们可以选取 m_1 和 m_2 使得满足

$$0 < m_2 < x_2^*,$$

和

$$\frac{b_2^U m_2 + c^U m_2^2}{a_2^L} < m_1 < \frac{b_1^L m_2}{a_1^U + \beta_1^U M_3},$$

同时选取 m_3 使得

$$0 < m_3 < \frac{\beta_2^L m_1 - d^U}{e^U},$$

当

$$\beta_2^L m_1 > d^U \quad (4.3.3)$$

成立时, m_3 的选取是合理的。

定理 4.3.1 如果系统 (4.3.1) 满足条件 (4.3.2) 和 (4.3.3), 则每一个具有方程 (4.3.1) 中给定正初值的解都将最终进入并停留在区域 $K_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid m_i \leq x_i \leq M_i, i = 1, 2, 3\} \in R_+^3$ 中, 这里 M_i 是引理 4.3.3 中所定义的, m_i 按照上面的方法选取。

证明: 设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 是 (4.3.1) 的一个解且满足给定初值的解, 根据引理 4.3.3 我们不妨假设 $X(t) \in K_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 < x_i < M_i, i = 1, 2, 3\}$, $t \geq -\tau$ 。

由 (4.3.1) 的前两个方程我们可得到:

$$\dot{x}_1 \geq -(a_1^U + \beta_1^U M_3)x_1(t) + b_1^L x_2(t),$$

$$\dot{x}_2 \geq a_2^L x_1(t) - b_2^U x_2 - c^U x_2^2,$$

于是我们可得:

$$\dot{x}_1 \Big|_{\substack{x_1=m_1 \\ x_2 \geq m_2}} > 0, \quad \dot{x}_2 \Big|_{\substack{x_2=m_2 \\ x_1 \geq m_1}} > 0,$$

这样如果 $x_1(0) \geq m_1$, $x_2(0) \geq m_2$, 则 $(x_1(t), x_2(t)) \in \{(x_1, x_2) \mid m_i \leq x_i \leq M_i, i=1, 2\}$ 对所有的 $t > 0$ 成立。

如果初值不满足 $x_1(0) \geq m_1$, $x_2(0) \geq m_2$, 即 $0 < x_1(0) < m_1$, 或者 $0 < x_2(0) < m_2$, 则我们作如下讨论, 设:

$$R_1 = \{(x_1, x_2) \mid m_2 x_1 \leq m_1 x_2, 0 < x_1 < m_1\},$$

$$R_2 = \{(x_1, x_2) \mid m_1 x_2 \leq m_2 x_1, 0 < x_2 < m_2\},$$

和

$$g(t) = \min \{m_2 x_1(t), m_1 x_2(t)\},$$

于是可得:

$$g(t) = \begin{cases} m_2 x_1(t), & (x_1(t), x_2(t)) \in R_1, \\ m_1 x_2(t), & (x_1(t), x_2(t)) \in R_2, \end{cases}$$

$g(t)$ 的导数满足:

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) \Big|_{R_1} &\geq m_2 [b_1^L x_2(t) - (a_1^U + \beta_1^U M_3)x_1(t)] \\ &\geq m_2 x_1(t) \left[b_1^L \frac{m_2}{m_1} - (a_1^U + \beta_1^U M_3) \right] \\ &> 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) \Big|_{R_2} &\geq m_1 [a_2^L x_1(t) - b_2^U x_2(t) - c^U x_2^2(t)] \\ &\geq \frac{m_1 x_2(t)}{m_2} [a_2^L m_1 - b_2^U m_2 - c^U m_2^2] \\ &> 0, \end{aligned}$$

于是 $g(t)$ 在 $R_1 \cup R_2$ 上单调递增。如果给定初值 $g(0) > 0$, 我们有

$$\dot{g}(t) \Big|_{R_1} \geq g(0) \left[b_1^L \frac{m_2}{m_1} - (a_1^U + \beta_1^U M_3) \right] = \alpha_1 > 0,$$

$$\dot{g}(t)|_{R_2} \geq \frac{g(0)}{m_2} [a_2^L m_1 - b_2^U m_2 - c^U m_2^2] = \alpha_2 > 0,$$

$g(t)$ 在 $R_1 \cup R_2$ 上的右上导数满足:

$$D^+ g(t) \geq \alpha > 0,$$

$$\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\},$$

这说明 $g(t)$ 将在 $R_1 \cup R_2$ 上以不低于 α 的速度递增, 那么最终会有 $g(t) > m_1 m_2$ 成立, 也即 $x_1(t) > m_1$ 和 $m_2(t) > m_2$ 将最终成立。

最后我们根据上面的讨论不妨假设 $x_i(t) \geq m_i$ ($i=1, 2$) 对所有的 $t > -\tau$, 由 (4.3.1) 的第三个方程我们得到:

$$\dot{x}_3 \geq \beta_2^L m_1 x_3(t-\tau) - d^U x_3(t) - e^U x_3^2(t),$$

由 m_3 的定义和引理 4.3.2 我们可以得到 $x_3(t) \geq m_3$ 将最终成立。于是我们证明了系统 (4.3.1) 的所有解都将最终进入并停留在区域 K_1 中, 也即是持久生存的。■

4.3.3 周期解的存在性

如果我们假设所有的系数 $a_i(t)$, $b_i(t)$, $\beta_i(t)$, ($i=1, 2$), $c(t)$, $d(t)$, $e(t)$ 都是 ω -周期函数, 此时系统 (4.3.1) 是一个 ω -周期系统, 我们将讨论周期解的存在性。

定理 4.3.2 假设 ω -周期系统 (4.3.1) 满足条件 (4.3.2) 和 (4.3.3), 则系统 (4.3.1) 至少有一个正 ω -周期解。

证明: 由定理 4.3.1 和定理 1.5.2 我们很容易知道 ω -周期系统 (4.3.1) 至少有一个 ω -周期解 $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t))$ 。■

4.3.4 例子及图示

这里我们给出一个具体的两种群时变阶段结构捕食-食饵模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -(7.05 + 0.05 \sin t)x_1(t) + (8.05 + 0.05 \cos t)x_2(t) \\ \quad - (1.05 + 0.05 \cos 4t)x_1(t)x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = (2.05 + 0.05 \cos 2t)x_1(t) - (0.105 + 0.005 \sin 2t)x_2(t) \\ \quad - (11.05 + 0.05 \sin t)x_2^2(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t)[-(1.05 + 0.05 \sin 4t) - (21.05 + 0.05 \cos t)x_3(t)] \\ \quad + (5.05 + 0.05 \sin t)x_1(t-\tau)x_3(t-\tau). \end{cases}$$

这个 8π -周期系统满足定理 4.3.1 中的所有条件, 因此它是持久生存的, 由图 4.3.1 可以

看出它有一个正的周期解而且，从数值模拟的结果还可以看出此周期解是一个渐近稳定的周期解。

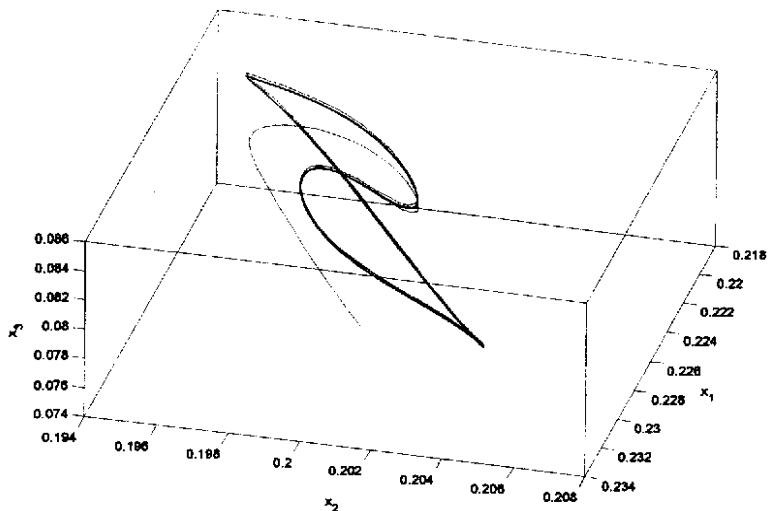


图 4.3.1

§4.4 生物意义

本章研究的两种非自治阶段结构模型可以用来描述人类在渔业以及畜牧业中的养殖过程，当养殖圈中的生物物种不只一种时，我们要考虑种间相互作用会给养殖带来哪些影响，同时也要进一步考虑种间竞争或捕食会给不同的年龄阶段的物种带来的影响。本章结论得到的持续生存性和周期解的存在性、渐近性等各种性质可以用来指导如何保持生态系统持久发展。

结 论

本文分别研究了以实际生态环境为背景的脉冲微分方程模型和时变微分方程模型的解的周期性, 并利用理论与数值模拟相结合的方法研究了相应周期解的渐近性质。模型包括应用于害虫治理的状态依赖脉冲微分方程, 具有非线性传染力和出生死亡率的脉冲免疫接种传染病模型, 和非自治的阶段结构两种群竞争与捕食模型。

研究表明在这些模型在周期性的环境影响或人工干预控制行为影响下其解都具有一定的周期性, 而且其周期性是稳定的。

在农业生产中害虫治理采用综合治理有其一定的优越性和可持续发展性, 根据具体的杀虫剂喷洒量和天敌投放量的不同系统将被最终稳定到一个阶一周期解或者稳定到一个无脉冲平衡点。在传染病的控制中采用适当的周期脉冲免疫接种则可以最终使疾病消除。关于非自治的阶段结构两种群竞争与捕食模型的研究结果则表明系统在适当的条件下可以持续发展, 并可以指导人类如何更好的开发可再生资源, 并同时保持生态系统的持久发展。

参 考 文 献

- [1] Aiello W G, Freedman H I, Wu J. Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay. *SIAM J. Appl. Math.*, 1992, 52(3): 855-869.
- [2] Aiello W G, Freedman H I. A time-delay model of single-species growth with stage structure. *Math. Biosci.*, 1990, 101: 139-153.
- [3] Akhmetov M V, Perestyuk N A. On the almost periodic solutions of a class of systems with impulse effect. *Ukr. Math Jour.*, 1984, 36: 486-490.
- [4] Angelova J, Dishliev A. Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics. *Nonlinear Analysis*, 2000, (39): 483-497.
- [5] Anokhin A, Berezansky L, Braverman E. Exponential stability of linear delay impulsive differential equations. *J of Math. And Appl*, 1995, 193: 923-941.
- [6] Bainov D D, Hristova S G. Existence of periodic solutions of nonlinear systems of differential equations with impulse effect. *Jour. Math. Anal. App*, 1987, 125: 192-202.
- [7] Bainov D D, Simeonov P S. Stability with respect to part of the variables in systems with impulse effect. *Jour. Math. Anal. Appl*, 1987, 124: 547-560.
- [8] Bainov D, Dishliev A B. Continuous dependence on the initial condition of the solution of a system of differential equations with variable structure and with impulses. *Publ. Rims. Kyoto Univ*, 1987, (23): 923-936.
- [9] Bainov D, Simeonov P. *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications*. Longman Scientific & Technical, 1993.
- [10] Bainov D, Simeonov P. *System with Impulsive Effect: Stability, theory and application*. New York: John Wiley & Sons, 1986..
- [11] Bainov D. *Impulsive Differential Equations*. Longman, 1993.
- [12] Ballinger G, Liu X. Permanence of population growth models with impulsive effects. *Math. Comput. Modelling*, 1997, (26): 59-72.
- [13] Barbălat I. Systems d'equations differentielle d'oscillations nonlinearies. *Rev Rounmaine Math. Prues Appl*, 1959, 4(2): 267-270.
- [14] Barclay H J, Van Den Driessche P. A model for a single species with two life history stages and added mortality. *Ecol. Model*, 1980, (11): 157-166.
- [15] Barclay H J. Models for pest control using predator release, habitat management and pesticide release in combination. *J. Appl. Ecol.*, 1976, (19): 337-348.
- [16] Cao Y, Fan J, Gard T C. The effects of state-structured population growth model. *Nonlin. Anal.*, 1992, (16): 95-105.

- [17] Corless R M, Gonnet D E G, Hare D J, et al. On the Lambert W function. *Advances in Computational Math*, 1996, (5): 329-359.
- [18] Croft B A. *Arthropod biological control agents and pesticides*, New York :John Wiley & Sons, 1990.
- [19] Cui J, Chen L. The effect of dispersal on population growth with stage-structure. *Computers Math. Applic.*, 2000, 39(1-2): 91-102.
- [20] d'Onofrio A. Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model. *Math. Bios.*, 2002, 179(1):57-72.
- [21] Davies B. *Exploring chaos, theory and experiment*. Reading, Mass: Perseus Books, 1999.
- [22] Dissous C. Chemical Methods for the Control of Vectors and Pests of Public Health Importance. *Parasitology Today*, 1999, 15(3): 126.
- [23] Freedman H I, Wu J. Persistence and global asymptotical stability of single species dispersal models with stage structure. *Quart. Appl. Math.*, 1991, 49: 351-371.
- [24] Freedman H J, Graphical stability, enrichment, and pest control by a natural enemy. *Math. Biosci*, 1976, (31): 207-225.
- [25] Funasaki E, Kot M. Invasion and chaos in a periodically pulsed mass-action chemostat. *Theor. Popul. Bio*, 1993, (44): 203-224.
- [26] Grasman J, Van Herwaarden O A, Hemerik L, et al. A two-component model of host-parasitoid interactions: determination of the size of inundative releases of parasitoids in biological pest control. *Math. Biosci*, 2001, 169: 207-216.
- [27] Grebogi C, Ott E, Yorke Ja. Crises, sudden changes in chaotic attractors and chaotic transients. *Physica D* 1983, 7:181-200.
- [28] Grebogi C, Ott E, Yorke Ja. Crises, sudden changes in chaotic attractors and chaotic transients. *Physica D* 1983, 7:181-200.
- [29] Griffel D H. *Applied Functional Analysis*. Chichester: Ellis Horwood Ltd, 1981.
- [30] Gurgula S I, Perestyuk N A. Lyapunov's direct method for differential equations with impulse effect. *Math. Phy. And Nonlinear Mech*, 1986, (5):4-9.
- [31] Gurgula S I, Perestyuk N A. On Lyapunov's second for systems with impulse effect. *Reports of Acad. Sci. Ukr. SSR. Ser. A*, 1982: 11-14.
- [32] Gurgula S I. A study of the stability of solutions of impulse systems by Lyapunov's second method. *Ukr. Math. J*, 1982, (34): 100-103.
- [33] Gurney W S C, Nisbet R M, Lawton J H. The systematic formulation of tractable single species population models incorporating age structure. *J. Animal Ecol*, 1983, (52): 479-495.

- [34] Hartman P. Ordinary Differential equations. Boston :Birkhäuser, 1982.
- [35] Hastings A. Age-dependent predation is not a simple process, I Continuous time models. *Theor. Popul. Biol*, 1983, (23): 347-362.
- [36] Huo H, Li W, Agarwal R P. Optimal harvesting and stability for two species stage-structured system with cannibalism, *International J. Appl. Math.*, 2001, (6): 59-79.
- [37] Koslesov Yu S. Properties of solutions of a class of equations with lag which describe the dynamics of change in the population of a species with the age structure taken into account. *Math. USSR Sb*, 1983, (45): 91-100.
- [38] Lakmeche A, Arino O. Bifurcation of non trivial periodic solutions of impulsive differential equations arising chemotherapeutic treatment. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2000, (7): 165-287.
- [39] Lakshmikantham V, Bainov D, Simeonov P. *Theory of Impulsive Differential Equations*. Singapore: World Scientific, 1989.
- [40] Lakshmikantham V, Leela S. *Differential and integral inequalities, Vol. I and II*. New York: Academic Press, 1969.
- [41] Landehl H D, Hanson D D. A three stage population model with cannibalism. *Bull. Math. Biol*, 1975, (37): 11-17.
- [42] Lenteren V, J C. Integrated pest management in protected crops, in: D. Dent (Ed.), *Integrated pest management*. London :Chapman & Hall, 1995:311-320.
- [43] Lenteren V, J C. Measures of success in biological control of anthropoids by augmentation of natural enemies, in: S. Wratten, G. Urr (Eds.), *Measures of Success in Biological Control*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000:77-89.
- [44] Lenteren V, J C, Woets J. Biological and integrated pest control in greenhouses. *Ann. Rev. Ent.*, 1988, (33): 239-250.
- [45] Lewis W J, Lenteren J C, Phatak V, et al. A total system approach to sustainable pest management. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1997, 94(23): 12243-12248.
- [46] Liu B, Chen L, Zhang Y. The effects of impulsive toxicant input on a population in a polluted environment. *Journal of Biological System*, 2003, 11(3): 265-274.
- [47] Liu S, Chen L. Recent Progress on Stage-structured Population Dynamics. *Mathematical and Computer Modelling*, 2002(36): 1319-1360.
- [48] Liu W M, Hethcote H W, Levin S A. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates. *J. Math. Biol.*, 1987: (25): 359-380.
- [49] Liu W, Levin S A, Lwasa Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models. *J. Math. Biol.*, 1986, (23): 187-204.

- [50] Liu X N, Chen L S. Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, (16): 311-320.
- [51] Liu X Z. Stability results for impulsive differential systems with applications to population growth models. *Dynamics and Stability of System*, 1994, 9(2):163-174.
- [52] Liu X, Ballinger G. Boundedness for impulsive delay differential equations and applications to population growth models. *Nonlinear Analysis*, 2003, (53): 1041-1062.
- [53] Liu X, Chen L. Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations. *J. Math. Anal. Appl*, 2004, (289): 279-291.
- [54] Lu Z, Chi X, Chen L. Global attractivity of nonautonomous stage-structured population models with dispersal and harvest. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, 166(2): 411-425.
- [55] Lu Z, Chi X, Chen L. The effect of constant and pulse vaccination on SIR epidemic model with horizontal and vertical transmission. *Math Comput. Model*, 2002, 36(9-10): 39-57.
- [56] Luff M L. The potential of predators for pest control. *Agri. Ecos. Environ*, 1983, *19(: 159-181.
- [57] May RM, Oster GF. Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models. *Am Natur* 1976, 110:573-599.
- [58] Mil'man V D, Myshkis A D. On the stability of motion in the presence of impulses. *Sib. Math J*, 1960, (1): 233-237.
- [59] Nenov S I. Impulsive controllability and optimization problems in population dynamics. *Nonlinear Analysis*, 1999, (36): 881-890.
- [60] Panetta J C. A mathematical model of periodically pulsed chemotherapy: tumor recurrence and metastasis in a competition environment. *Bulletin of Math. Biol*, 1996, 58: 425-447.
- [61] Parker T S, Chua L O. Practical numerical algorithms for chaotic systems[M]. New York: Springer; 1989.
- [62] Pedigo L P, Entomology and Pest Management. Second Edition. Prentice-Hall Pub., Englewood Cliffs, NJ.1996:679.
- [63] Pedigo L P, Higley L G. A new perspective of the economic injury level concept and environmental quality. *American Entomologist*, 1992, (38): 12-20.
- [64] Perestyuk N A, Samoilenko A M. Differential equations with impulse effect. "Višča Škola": Kiev, 1987.

- [65] Perestyuk N A, Samoilenko A M. On the stability of systems with impulse effect. *Diff. Uravn*, 1981, (11):1955-2001.
- [66] Perestyuk N A, Samoilenko A M. Periodic and almost periodic solutions of differential equations with impulse effect. *Ukr. Math. Jour*, 1981, (1): 66-73.
- [67] Perestyuk N A, Samoilenko A M. Periodic solutions of weakly nonlinear systems with impulse effect. *Diff. Uravn*, 1978, (6): 1034-1042.
- [68] Perestyuk N A, Samoilenko A M. Stability of solutions of differential equations with impulse effect. *Diff. Uravn*, 1977, (13): 1981-1992.
- [69] Pickett J A, Wadhams L J, Woodcock C M. Developing sustainable pest control from chemical ecology. *Agriculture, Ecosystems and Environment*, 1997, 64(2): 149-156.
- [70] Roberts M G, Kao R R. The dynamics of an infectious disease in a population with birth pulses. *Math. Biosci*, 1998, (149): 23-36.
- [71] Shulgin B, Stone L, Agur Z. Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model. *Bull. Math. Biol.*, 1998, (60):1-26.
- [72] Simeonov P S. Continuous dependence of solutions of systems with impulse effect on the initial data and a parameter. *Godishnik VUZ Appl. Math*, 1986, (22): 57-67.
- [73] Simeonov P, Bainov D. Orbital stability of periodic solutions of autonomous systems with impulsive effect. *INT. J. Systems SCI.*, 1988, 19:2561-2585.
- [74] Song X, Chen L. Modelling and analysis of a single species system with stage structure and harvesting. *Mathl. Comput. Modelling*, 2002, 36(1-2): 67-82.
- [75] Song X, Chen L. Optimal harvesting and stability for a two species competitive system with stage-structure. *Math. Biosci.*, 2001, 170: 173-186.
- [76] Stamova I M, Stamov G T. Lyapunov-Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2001, (130): 163-171.
- [77] Stern V M. Economic Thresholds. *Annual review of Entomology*, 1973: 259-280.
- [78] Stone L, Shulgin B, Agur Z. Theoretical examination of the pulse vaccination policy in the sir epidemic model. *Math. Comput. Model*, 2000, 31(4-5):207-215.
- [79] Tang S Y, Chen L S. Density-dependent birth rate, birth pulses and their population dynamic consequences. *J. Math. Biol*, 2002, (64): 169-184.
- [80] Tang S Y, Chen L S. Multiple attractor in stage-structured population models with birth pulses. *Bull. Math. Biol*, 2003, (65): 479-495.
- [81] Tang S, Chen L. Global attractivity in a "food-limited" population model with impulsive effects. *J. Math. Anal. Appl*, 2004, (292): 211-221.
- [82] Tognetti K. The two stage stochastic model. *Math. Biosci*, 1975, (25): 195-204.

- [83] Wang W, Chen L. A predator-prey system with stage structure for predator. *Computers Math. Applic.*, 1997, 33(8): 83-92.
- [84] Wolf A, Swift J B, Swinney L, Vastano A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 1985, 16:285-317.
- [85] Wood S N, Blythe S P, Gurney W S C, et al. Instability in mortality estimation schemes related to stage-structure population models. *IMA J. Math. Appl. In Medicine and Biology*, 1989, (6): 47-68.
- [86] Yan J, Zhao A. Oscillation and Stability of Linear Impulsive Delay Differential Equations. *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 1988, 227:187-194.
- [87] Zettler J L, Arthur F H. Chemical control of stored product insects with fumigants and residual treatments. *Crop Protection*, 2000, 19(8-10): 577-582.
- [88] Zhang B, Liu Y. Global attractivity for certain impulsive delay differential equations. *Nonlinear Analysis*, 2003, (52): 725-736.
- [89] Zhang X, Chen L, Neumann A U. The stage-structured predator-prey model and optimal harvesting policy. *Math. Biosci.*, 2000, 168: 201-210.
- [90] Zhang X, Shuai Z, Wang K. Optimal impulsive harvesting policy for single population. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2003, (4): 639-651.
- [91] Zhang Y, Liu B, Chen L. Extinction and permanence of a two-prey one-predator system with impulsive effect. *IMA Journal of Mathematical Medicine and Biology*, 2003, 20(4): 309-325.
- [92] Zhang Z, Wu J; Wang Z. Periodic solutions of nonautonomous stage-structured cooperative system. *Computers and Mathematics with Applications*, 2004, 47(4-5): 699-706.
- [93] Zhao A, Yan J. Asymptotic Behavior of Solutions of Impulsive Delay Differential Equations. *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 1996, 201:943-954.
- [94] 陈兰荪, 陈键. 非线性生物动力系统. 北京: 科学出版社, 1993..
- [95] 陈兰荪, 宋新宇, 陆征一. 数学生态学模型与研究方法. 成都: 四川科学技术出版社, 2003.
- [96] 陈兰荪. 数学生态模型及研究方法. 北京: 科学出版社, 1988.
- [97] 靳祯, 在脉冲作用下的生态和流行病模型的研究. 西安交通大学博士论文, 2001.
- [98] 马知恩, 周义仓, 王稳地. 传染病动力学的数学建模与研究. 北京: 科学出版社, 2004.
- [99] 唐三一. 脉冲半动力系统及其在生物资源管理中的应用研究. 中国科学院博士论文, 2003.

- [100] 滕志东, 陈兰荪. 高维时滞周期的 Lotmogorov 型系统的正周期解. 应用数学学报, 1999, 22(3): 446-456.
- [101] 汪宏喜. 非线性传染率的流行病模型的周期解与 Hopf 分支的存在性. 安徽农业大学学报, 2002, 29(2): 199-202.

攻读博士学位期间发表学术论文情况

- [1] Guangzhao Zeng, Lansun Chen. Modelling SARS Outbreak in China: Quarantine as an MainControl Measure. (Submitted)
- [2] Guangzhao Zeng, LanSun Chen, Lihua Sun. Existence of One-order Periodic Solution of Planar Impulsive Autonomous System. Journal of Computational and Applied Mathematics. (Accepted) (SCI Expanded)
- [3] Guangzhao Zeng, LanSun Chen, Lihua Sun. Permanence and Existence of Periodic Solution of Non-autonomous Two-species Competitive Model with Stage Structure. Advances in Complex Systems, 2004, 7(3-4): 385-393.(SCI Expanded)
- [4] Guangzhao Zeng, LanSun Chen, Lihua Sun. Permanence and Existence of Periodic Solution of Non-autonomous Predator-Prey Model with Stage Structure and delay. 生物数学学报, 2005, 20(2):149-156.. (核心期刊)
- [5] Guangzhao Zeng, LanSun Chen, Lihua Sun. Complexity of an SIR Epidemic Dynamics Model with Impulsive Vaccination Control.. Chaos, Solitons and Fractals. 2005, 26(2):495-505. (SCI)
- [6] Guangzhao Zeng, LanSun Chen, Lihua Sun. Study of an SIR Epidemic Dynamics Model with Ratio Dependent Pulsive Vacciantion.(Submitted)
- [7] Guangzhao Zeng, LanSun Chen, Lihua Sun. Study of an SIR Epidemic Dynamics Model with Integrative Pulsive Vacciantion. (To be submitted)
- [8] Guangzhao Zeng, LanSun Chen, Lihua Sun. A Pest Management Model with State-Dependent Pesticide-dusting and Natural Enemy Releasing. (To be submitted)

创新点摘要

1、状态依赖脉冲微分方程的定性分析及应用现仍在起步阶段，唐三一建立了害虫控制状态依赖脉冲微分方程模型，并利用求出解的解析式的方法对其阶一周期解的存在性及渐近性进行了分析研究。本文研究了在此基础上增加密度制约项的模型，改进后的模型是一类不可求显式解的状态依赖脉冲微分方程，通过构造脉冲不变集的方法我们从理论上给出了几种不同情况下阶一周期解存在的充分条件，避免了求解方法的局限性。

2、近期对脉冲免疫接种传染病模型的研究多集中于线性传染力，本文则研究了一类非线性传染力且出生、死亡率相同的脉冲免疫接种传染病模型，其中染病者因病愈而能自然获得免疫但在一段时间后也会自然丧失。本文对几种不同接种方式包括连续免疫接种，常数、比例型脉冲免疫接种做了研究，分别给出了疾病消除的充分条件，并利用数值模拟的手段发现了脉冲系统中可能存在的复杂性。

3、建立了非自治的阶段结构两种群竞争以及捕食的生态模型，非自治的系统假设系数都是周期或非周期的变化从而使模型更加符合实际，本文对它们进行了有界性、持久性等分析，并进一步分析了周期系数作用下系统的周期解的存在性及渐近稳定性。

致 谢

本文是在导师陈兰荪研究员和孙丽华教授的精心指导下完成的。10年前是陈先生带我踏入生物数学的殿堂，近10年后又能在二位导师的门下学习是我这一生最大的荣幸。他们严谨求实和不断开拓进取的治学态度深深的影响着我，尤其是他们引领潮流的学术思想更让我钦佩和仰慕，将对我今后的学习和工作产生极大的影响。二位导师不仅在学业上悉心指导着我，在生活上也如慈父慈母般的关心着我，在这里谨向他们表示我最衷心的感谢！

感谢冯恩民教授、张鸿庆教授、吴微教授、郑斯宁教授、宋立新教授、唐涣文教授对本文提出的宝贵意见，感谢蔡晶老师、孙鸣老师、冯敬海老师以及数学系的各位老师，他们为我的学习创造了良好的环境。

感谢唐三一、刘贤宁、刘胜强、惠静、刘兵、张树文、张玉娟、王丽敏、董玲珍、王凤筵、裴永珍、高淑京、刘志军、孙树林、庞国萍、孙明晶等各位师兄、师弟、师姐、师妹，他们在我的学习过程中给予了很多帮助。

感谢韶关学院及数学系还有我身边每一位关心支持我的同事和朋友，

感谢我的父母及家人，他们虽然在远方，但总是时刻给予我无私的关怀。

最后我要特别感谢我的夫人刘英女士，感谢她这三年来对我的理解和支持，感谢她在生活上对我无微不至的关心和照顾，在我最低沉的时候，她给了我一如既往的鼓励和安慰，没有她的支持，我将很难顺利完成学业，在这里我要向她说一声：谢谢！

曾广钊

2005年9月于大连理工大学