摘 要

脉冲微分方程可以描述某些运动状态在某些时刻的快速变化或跳跃，能对自然界发展过程中的瞬时突变做出更真实的反映. 在生物控制领域中，生物种群的脉冲控制已成为一个饶有趣味并富有意义的课题，因此脉冲微分方程在种群动力学研究方面显示出了很好的应用前景.

本文首先介绍了脉冲微分系统在众多领域中的广泛应用，说明了研究该类问题的理论意义与使用价值. 简要地介绍了脉冲微分系统理论的发展，以及与脉冲微分系统解的稳定性相关的一些结果.

其次，根据Lyapunov函数的方法，利用Schaefer不动点定理和Arzela-Ascoli定理研究了几类三阶时滞微分系统解的局部存在性，以及脉冲指数稳定性的充分条件.

最后建立了具有脉冲效应的种群动力系统. 把脉冲引入具有阶段结构的两种群捕食系统中，建立了一类具有时滞和Monod-Haldane功能反应函数的脉冲收获和放养问题的捕食-食饵模型，得到了捕食者灭绝周期解的全局吸引性和系统持久生存的充分条件.

关键词：脉冲微分系统；脉冲控制；稳定性；食饵一捕食系统

Abstract

Impulsive differential equation presents the quick change or jump of some states of motion at the fixed or varied time. It reflects the developing process of nature more actually. Impulsive control of biological population becomes an interesting and challenging research task in the fields of biological control, so, impulsive differential equation has shown all-right applicative prospect in the study of population dynamics.

First, the wide applications of impulsive differential systems are introduced, which shows the theoretical significance and practical value of the research, introduces some related results to the stability of solutions of impulsive differential systems.

Second, by means of Lyapunov methods, we apply Schaefer fixed point theorem to prove the local existence of the solution, and obtain the sufficient conditions of exponentially stability.

Finally, a class population dynamical with the impulsive control was investigated. we investigate a delayed stage-structured Monod-Haldane predator-prey model with impulsive stocking on prey and continuous harvesting on predator. Sufficient conditions of the global attractivity of predator-extinction periodic solution and the permanence of the system are obtained.

Key words: Impulsive differential system; impulsive control; stability; predator-prey system

兰州理工大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明: 所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果. 除了文中特别加以标注引用的内容外, 本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品. 对本文的研究做出重要贡献的个人和集体, 均已在文中以明确方式标明. 本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担.

作者签名: 赵诗春　　　　日期: 09年 6月 8日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定, 即: 学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版, 允许论文被查阅和借阅. 本人授权兰州理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索, 可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文. 同时授权中国科学技术信息研究所将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》, 并通过网络向社会公众提供信息服务.

作者签名: 赵诗春　　　　日期: 09 年 6月 8日

导师签名: 黄灿云　　　　日期: 09年 5月 31日

第一章　绪论

§1.1　课题研究背景

脉冲微分方程理论是在1960年由Mil'man和Myshkis[1]在他们合作的论文《On the stability of motion in the presence of impulses》中开创性的提出，为数学界增添了一个新的数学分支. 时至今日，经过四十多年来的研究，关于脉冲微分方程解的存在性，唯一性，解对初值的连续依赖性，解的稳定性，Lyapunov方法，边值问题解的存在性，唯一性，周期解以及解的动力学系统性质，分歧理论，时滞脉冲微分方程，泛函脉冲微分方程等等，已经有一个比较完整的雏形.

脉冲微分系统主要是在一般的微分系统上建立起来的，更加完善了微分系统研究领域的一些问题. 在自然界及科学技术中的许多发展过程具有这样的特点：在发展的某些阶段，由于某些干扰，会出现快速的变化，并且干扰及突变过程同整个发展过程相比是非常短暂的，可认为是瞬间发生的. 这类问题在数学模拟中，为了方便，常常忽略快速变化持续的时间而假设这个过程是瞬间完成的，这种突变现象通常称为脉冲现象. 因此，像这样存在脉冲现象的发展过程其数学模型往往可归结为脉冲微分系统，即需要用脉冲微分系统来描述和研究.

脉冲微分系统最突出的特点是能够充分考虑到瞬时突变现象对状态的影响，能够更深刻、更精确地反映事物的变化规律. 因此，随着科学技术的突飞猛进，人们越来越认识到脉冲微分方程的重要性以及在实践中的应用价值. 脉冲微分方程不但深入到自然科学当中，如航天技术、信息科学、控制系统、通讯、网络问题、生态平衡、遗传、流行病等，而且也涉及到社会科学，如利率控制问题、商业销售问题、资本主义经济的周期性危机以及工业生产管理等. 总之，科学和技术的许多领域的变化规律都可以通过脉冲微分方程来刻画或描述.

与一般无脉冲的微分方程相比较，脉冲微分方程理论研究的内容极为丰富. 例如，即使给定的方程是充分光滑的，如果加上脉冲之后，它的初值问题的解也可能是不存在的；对于微分方程成立的解的一些基本性质如解对初值的连续依赖性等可能也不再成立；解的稳定性等的定性性质也需要重新建立. 除此之外，脉冲微分方程的解还可能产生一些新的现象，如解的脉搏现象、解的合并、解的不可延拓性等等. 近年来，脉冲控制在生物模型上的应用引起了人们的极大兴趣. 利用脉冲微分方程控制种群动态系统平衡点的稳定性，使得种群最终能够持续生存，从而保持生态平衡，实现种群资源的可持续发展. 利用脉冲控制策略来研究多种群系统的稳定

性、持续性以及对种群资源的开发与合理利用仍然是一项非常有意义的工作.

§1.2 研究概况

90年代初, 关于依赖于状态的脉冲微分系统解的基本理论已建立, 关于脉冲微分不等式的一些重要结果已出现, 关于脉冲微分系统稳定性理论的基本定理已得到等. 这些结果已被V.Lakshimikantham等进行了系统总结, 其特点是所考虑的系统只含脉冲而不含时滞.

而自90年代以来对于脉冲微分系统稳定性的研究就日趋活跃, 已经逐渐形成非线性微分系统研究领域的国际热点. 众所周知, Lyapunov第二方法是整个稳定性理论的核心方法, Lyapunov于1892年所提出的稳定性定理、渐近稳定性定理及两个不稳定性定理, 奠定了运动稳定性的基础, 被称为基本定理.

在以往研究常微分方程稳定性时, 常用到的方法是Lyapunov第二方法. 而对于脉冲微分系统的稳定性, 同样可以借助Lyapunov第二方法的思想进行研究. 由于脉冲的影响, 导致系统解的不连续性, 从而相应的Lyapunov函数也是不连续的, 并出现了与不含脉冲情形的一些本质区别. 譬如, 并不一定需要一个沿轨线的导数常负或定负的Lyapunov函数, 允许Lyapunov 函数沿轨线的连续部分递增, 而在脉冲时刻跳跃后变小, 但必须有条件使其不能增长太快, 又如可以不对系统的连续部分或离散部分分别限制条件, 而是对它们设置混合条件, 仍然可以得到脉冲微分系统的稳定性结果.

Lyapunov函数与脉冲种群系统Lyapunov函数在解决种群动力系统的稳定性、持续性等方面起着重要的作用, 特别对于Volterra种群系统, 已构造出非常成熟的Lyapunov函数, 但对具有脉冲的种群模型, 特别是Volterra系统, 到目前为止, 还未见到非常好的Lyapunov函数, 尽管在脉冲微分方程的理论研究中, 通过构造Lyapunov函数来研究稳定性已有许多理论成果. 所以, 寻找非常成熟的Lyapunov函数(泛函)来研究脉冲微分种群系统的稳定性、持续性仍然是一项非常有意义的工作. 目前关于脉冲微分系统稳定性的理论成果已相当成熟, 许多生物数学工作者利用这些理论和方法在生研究物种群方面也做了很多有意义的工作[2, 3]. 例如, 在脉冲控制下对种群资源的合理开发与利用, 通过周期性脉冲控制释放天敌和化学控制达到对害虫的综合管理, 对种群的持续发展控制以及种群的最优捕获等.

在文[4]中, 作者Li和Weng研究了两类二阶线性时滞微分方程的脉冲稳定性, 方

程如下

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)x(t-\tau) = 0, \quad t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad x'(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

和

$$\begin{cases} x''(t) + \int_{t-\tau}^{t} b(t-u)x(u)du = 0, \quad t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \ t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad x'(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中

(H_1) $\tau > 0, x(t) : [t_0 - \tau, +\infty) \to R$;

(H_2) $x'(t)$ 表示$x(t)$的右导数, 即

$$x'(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \ \text{且} x''(t) \triangleq \left[x'(t)\right]';$$

(H_3) $\varphi : [t_0 - \tau, t_0] \to R, \varphi'(t)$ 最多有有限个第一类间断点, 且在这些间断点处右连续;

(H_4) $p_1(t), p_2(t), q_1(t), q_2(t)$在$[t_0, +\infty)$上是连续的;

(H_5) $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots, \lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$, 这里$\tau \leq t_{k+1} - t_k, k \in N$;

(H_6) $I_k, J_k : R \to R$ 在R 上都连续, 且$I_k(0) = J_k(0) \equiv 0, k \in N$.

该文通过定义脉冲指数稳定性和周期脉冲指数稳定性, 利用Lyapunov函数方法, 通过施加适当的脉冲使得不稳定的系统零解稳定, 获得了脉冲稳定性的充分条件.

在文[5]中, 提出了更加一般的二阶时滞微分方程:

$$\begin{cases} x''(t) + c(t)x'(t) + b(t)x(t) + a(t)x(t-\tau) = 0, \quad t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad x'(t_0) = y_0, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x''(t) + c(t)x'(t) + b(t)x(t) + \int_{t-\tau}^{t} d(t-u)x(u)du = 0, \quad t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \ t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad x'(t_0) = y_0, \end{cases}$$

作者通过构造Lyapunov函数, 得到了更加一般的微分方程的脉冲指数稳定性的充分条件. 后来L.P.Gimenes和M.Federson等人在文[6]研究了如下的二阶非线性时滞微分方程的脉冲稳定性:

$$\begin{cases} x''(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i(t)x(t-\tau_i) + f\left(x(t), x'(t)\right) = 0, \quad t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t_0 - \tau_N \leq t \leq t_0, \quad x'(t_0) = y_0, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x''(t) + \sum\limits_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} b_i(t-u)x(u)du + f\left(x(t), x'(t)\right) = 0, & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \ t_0 - \tau_N \leq t \leq t_0, \quad x'(t_0) = y_0. \end{cases}$$

文中利用Schaefer不动点定理和Arzela-Ascoli定理, 以及构造适当的算子来证明上述方程解的局部存在性, 接着利用Lyapunov函数方法推出了脉冲指数稳定的充分条件. 总之, 以上工作考虑都是二阶的时滞微分方程, 本文在第二章里考虑的是三阶的时滞微分方程, 更进一步说明了问题的普遍性.

近年来, 人们发现有许多生物现象的发生以及人们对某些生命现象的优化控制并非是一个连续的过程, 不能单纯的用微分方程或差分方程来进行描述. 例如, 人工放养塘鱼, 在一定时间间隔进行捕捞, 大鱼就会瞬间大量减少, 投放小鱼, 小鱼就会瞬间大量增加. 动物自然保护区短期开放狩猎, 亦会使种群剧减. 由于某种原因, 导致一个地区的鼠类出现集体自杀现象. 要把这个瞬时的行为结合起来研究的数学模型则是一个脉冲微分方程模型[7~16]. 最近, 生物数学工作者主要讨论在脉冲控制下对种群资源的合理开发与利用, 通过周期性脉冲控制释放天敌和化学控制达到对害虫的综合管理, 对种群的持续发展控制以及种群的最优捕获.

在文[17]中, 作者考虑了一类带有Monod-Haldane功能反应函数的脉冲收获和放养问题的捕食者-食饵模型:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)\left[\lambda\left(1 - \frac{x_1(t)}{K}\right)\right] - \frac{mx_1(t)x_2(t)}{a+bx_1(t)+x_1^2(t)} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)\left[-d + \beta\frac{mx_1(t)}{a+bx_1(t)+x_1^2(t)}\right] \end{array}\right\}, \ t \neq (n+l-1)T, \ t \neq nT, \\ \left.\begin{array}{l} \Delta x_1(t) = -q_1 E x_1(t), \\ \Delta x_2(t) = -q_1 E x_2(t), \end{array}\right\}, \ t = (n+l-1)T, \\ \left.\begin{array}{l} \Delta x_1(t) = 0, \\ \Delta x_2(t) = p, \end{array}\right\}, \ t = nT, \end{cases}$$

其中$x_1(t), x_2(t)$分别表示被捕食者和捕食者在t时刻的密度, $\lambda, K, m, a, b, d, \beta$是正数, E, q_1, q_2, p是非负常数, 特别地, 这里的E是收获项, q_1, q_2, p是捕食能力, 此文借助Floquet定理, 比较定理以及Lyapunov函数方法, 证明了上述系统解的一致有界性和生物系统的灭亡或者持久生存.

然而, 随着研究的逐渐深入, 人们发现生物个体里的发展是分阶段的[18~22,37], 也即是通常的阶段结构, 这样以来, 对于捕食者来说是捕食未成年的被捕食者还是成年的被捕食者, 这都是人们研究的对象. 因此, 本文第三章考虑了以下一类带有脉

冲放养于被捕食者和连续收获于捕食者的具有阶段结构的捕食者和被捕食者模型:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} & x_1'(t) = x_1(t)(a - bx_1(t)) - \tfrac{\beta x_1(t)}{1+cx_1(t)+dx_1^2(t)}, \\ & x_2'(t) = rx_3(t) - re^{-w\tau_1}x_3(t-\tau_1) - wx_2(t), \\ & x_3'(t) = re^{-w\tau_1}x_3(t-\tau_1) + \tfrac{k\beta x_1(t)}{1+cx_1(t)+dx_1^2(t)}x_3(t) - d_1x_3(t) \\ & \qquad -Ex_3(t) - d_2x_3^2(t), \end{aligned}\right\} t \neq n\tau, \\ \left.\begin{aligned} & \Delta x_1(t) = p \\ & \Delta x_2(t) = 0 \\ & \Delta x_3(t) = 0 \end{aligned}\right\} t = n\tau, \quad n = 1, 2 \ldots, \\ (\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta), \varphi_3(\zeta)) \in C_+ = C\left([-\tau_1, 0], R_+^3\right), \quad \varphi_i(0) > 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

考虑了该系统解的全局吸引性和持久性.

§1.3 预备知识

为了后面推理的需要, 我们在这小节里以定义和引理的形式给出若干个已知结论作为工具.

定理1.3.1 (Arzela-Ascoli定理) 集合$A \subset C[a,b]$是列紧集的充要条件为下列两个条件均成立:

(1) A是一致有界的, 即存在常数K, 使对一切的$x(t) \in A$, 均有

$$|x(t)| \leq K$$

(2) A是等度连续的, 即对任意的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta(\varepsilon) > 0$, 使得对任意的$x(t) \in A$ 及任意的$t_1, t_2 \in [a,b]$, 只要$|t_1 - t_2| < \delta$, 就有

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

定理1.3.2 对固定的$r \geq 0$, 令$C =: C([-r,\ 0],\ R)$. 如果对某个$\delta > 0$ 和$\sigma \in R$, $x \in C([\sigma - r,\ \sigma + \delta],\ R)$, 那么$x_t \in C$, $t \in [\sigma,\ \sigma + \delta]$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-r,\ 0]$. C 中的范数指最大值范数, 即: $\|\varphi\| = \max_{\theta \in [-r,0]} |\varphi(\theta)|$, $\varphi \in C$.

定理1.3.3 (Schaefer不动点定理) ϕ是$X \to X$ 上的紧算子, 假设集合

$$S = \{u; u = \lambda\phi(u), \quad \lambda \in (0,1)\}$$

是有界的, 那么ϕ 有一个不动点.

定义1.3.1 设$L : X \supset domL \to Z$是零指标的Fredholm映射, $E \subset X, N : E \to Z$ 是一个连续映射. 称N在E上是L -紧的, 如果$QN : E \to Z$ 和$K_p(I-Q\}N : E \to X$ 都在E上紧, 即$QN(E)$和$K_p(I-Q)N(E)$分别是Z和X中的相对紧集. 称N在E上是L-全连续的, 如果N在E的每个有界子集上是L-紧的.

设以下系统:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x),\quad x(t_0) = x^0, \qquad x \in R^n. \tag{1.3}$$

满足解的存在唯一性定理的条件, 其解$x(t) = x(t,\ t_0,\ x^0)$ 的存在区间是$(-\infty,\ +\infty)$, 另外, $f(t,\ x)$ 还满足条件:

$$f(t,\ x^*) = 0.$$

即$x(t) = x^*(t)$ 是(1.3)的解.

定义1.3.2 若对任意给定的$\varepsilon > 0$, 都存在$\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, 使得当$\| x - x^* \| < \delta$ 时(1.3) 的解$x(t) = x(t,\ t_0,\ x^0)$ 满足:

$$\left\| x\left(t,\ t_0,\ x^0\right) - x^*(t) \right\| < \varepsilon.$$

则称(1.3) 的解$x(t) = x^*(t)$ 是稳定的.

定义1.3.3 设$\alpha > 0$, 如果下列条件满足

(*i*) $x(t)$ 及$x'(t)$ 在$[t_0, t_0+\alpha) \backslash t_k$, $k \in N$ 上都连续;

(*ii*) $x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad x'(t_0) = y_0;$

(*iii*) $x(t)$ 在$[t_0, t_0+\alpha) \backslash t_k$, $k \in N$ 上满足系统(1.1或1.2) 的第一个方程;

(*iv*) $x(t)$ 和$x'(t)$ 在t_k, $k \in N$ 点的左右极限都存在, 且$x(t_k)$, $x'(t_k)$ 满足系统(1.1或1.2)的第二个方程.

则称函数$x : [t_0 - \tau, t_0 + \alpha) \to R$ 是脉冲微分方程(1.1或1.2) 过(t_0, φ, y_0) 的解.

定义1.3.4 如果存在$\alpha > 0$, 满足(H_5) 的点列$\{t_k\}$, 及满足(H_6) 的函数列I_k, J_k, $k = 1, 2, \cdots$, 使得对任意的$\varepsilon > 0$ 总能找到$\delta > 0$, 只要式(1.1或1.2)的解$x(t; t_0, \varphi, y_0)$ 满足

$$\sqrt{\|\varphi\|_{t_0}^2 + y_0^2} \le \delta$$

则有

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t)} \le \varepsilon \exp\left(-\alpha(t - t_0)\right), \quad t \ge t_0.$$

其中$\|\varphi\|_t \triangleq \sup_{t-\tau \le s \le t} \left\{ |\varphi(s)| + \left|\varphi'(s)\right| \right\}$. 则称系统(1.1或1.2)是可脉冲指数稳定的.

第二章　三阶时滞微分方程解的存在性和脉冲指数稳定性

§2.1　模型、假设和定义

脉冲微分方程已成为动力系统领域非常重要的一个分支， 脉冲的控制作用已广泛的应用于物理、化学技术、药物动力学、生物学、种群动力学、经济等许多领域， 关于脉冲控制和脉冲时滞微分系统的稳定性已有很多的结果[23~29]. 受脉冲效应的影响, 可使一个不稳定的系统变成稳定的系统， 也可以使要灭绝的种群持续生存[30~34,36]， 因此研究脉冲的控制作用相当重要.

我们主要考虑以下的三阶时滞微分方程及相关的脉冲微分方程：

$$\begin{cases} x'''(t)+\sum\limits_{i=1}^{N}a_i(t)\,x(t-\tau_i)+f\left(x(t),x'(t),x''(t)\right)=0,\ t\geq t_0, \\ x(t)=\varphi(t),\ t_0-\tau_N\leq t\leq t_0,\ x'(t_0)=y_0,\ x''(t_0)=y_{00}, \end{cases} \tag{2.1}$$

和

$$\begin{cases} x'''(t)+\sum\limits_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}b_i(t-u)x(u)du+f\left(x(t),x'(t),x''(t)\right)=0,\ t\geq t_0, \\ x(t)=\varphi(t),\ t_0-\tau_N\leq t\leq t_0,\ x'(t_0)=y_0,\ x''(t_0)=y_{00}. \end{cases} \tag{2.2}$$

下面我们给出与本文有关的定义和假设.

给定一个连续函数$z(t):R\to R$, 设$z'(t)$表示它的右导数且有$z''(t)=\left(z'(t)\right)'$, $z'''(t)=\left(z''(t)\right)'$. 如果$z(t)$是分段连续的, 那么$z(s^-)$和$z(s^+)$则分别表示当$t\to s$时的左极限和右极限.

设$[a,b]\subset R$，且$K\subset(a,b)$, K为有限集. $C([a,b],R)$表示定义在$[a,b]$上的所有连续函数构成的巴拿赫空间, 赋予其最大值范数$z:[a,b]\to R$, 记$C^1([a,b],R)$表示定义在$[a,b]$上所有可微函数构成的巴拿赫空间, 其范数$z:[a,b]\to R$

$$\|z\|=\sup_{s\in[a,b]}\left\{|z(s)|+\left|z'(s)\right|+\left|z''(s)\right|\right\},$$

同时, 我们用$C_K^1([a,b],R)$表示定义在$z:[a,b]\to R$上的可微, 且对任意的$c\in K$, 在$t=c$点处存在单侧极限且右连续.

设对于$T,t_0\in R$有$T>t_0$成立. 我们考虑如下系统的初值问题

$$\begin{cases} x'''(t)+\sum\limits_{i=1}^{N}a_i(t)\,x(t-\tau_i)+f\left(x(t),x'(t),x''(t)\right)=0, \quad t\geq t_0, \\ x(t)=\varphi(t),\quad t_0-\tau_N\leq t\leq t_0,\quad x'(t_0)=y_0,\quad x''(t_0)=y_{00}, \end{cases} \tag{2.3}$$

这里$0 \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N$, $N \ne 1$ 且$\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是单调增无界实数序列. 我们假设以下条件成立

(H_1) $\varphi(t)$ 和$\varphi'(t)$ 在$[t_0-\tau_N, t_0]$ 上是连续的, 但不包括Φ的有限集点, 其中$\varphi(t^-)$, $\varphi(t^+)$, $\varphi'(t^-)$, $\varphi'(t^+)$, $\varphi''(t^-)$, 和$\varphi''(t^+)$ 单侧极限存在, 且φ 和φ', φ'' 在这些点是右连续的.

(H_2) $f: R\times R\times R \to R$ 是连续的, $f(0,0,0)=0$ 且存在正常数$F \ge 1$使得有$|f(u,v,w)| \le F$, $\forall u,v,w \in R$ 成立.

(H_3) $AN(T-t_0)^2 < 1$, 这里$A = \max_{1\le i\le N}\|a_i\|$. 在脉冲时刻$t_k$, $k=1,2,\ldots$, 有

$$x(t_k) = I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right), \quad x'(t_k) = J_k\left(x'\left(t_k^-\right)\right), \quad x''(t_k) = P_k\left(x''\left(t_k^-\right)\right) \tag{2.4}$$

也满足条件.

(H_4) I_k; J_k; P_k; 在$R \to R$上连续且有$I_k(0) = J_k(0) = P_k(0) = 0$, $k \in N$.

(H_5) 对于任意$x \in R$, 存在常数c_k, d_k和e_k使得$|I_k(x)| \le c_k$, $|J_k(x)| \le d_k$ 和$|P_k(x)| \le e_k$, $k \in N$:

设$\Omega \subset R$ 是一个包含于$[t_0-\tau_N, T]$ 的开子集, 下面我们定义关于脉冲问题(2.3), (2.4) 的一个解.

定义2.1.1 函数$x: \Omega \subset R$ 是问题(2.3) 和(2.4) 通过点$(t_0, \varphi, y_0, y_{00})$ 的一个在$[t_0-\tau_N, T]$ 上的解, 如果有以下条件成立

(i) $x(t)$, $x'(t)$ 和$x''(t)$ 在$[t_0, T]\backslash t_k$, $k \in N$ 上是连续的, 在t_k, $k \in N$定义了单侧极限, 且在这些点右连续.

(ii) $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [t_0-\tau, t_0]$, $x'(t_0) = y_0$; $x''(t_0) = y_{00}$;

(iii) $x(t)$ 在$[t_0, t_0+\alpha)\backslash t_k$, $k \in N$ 上满足(2.2)的第一个等式

$(iiii)$ 对于每一个$k \in N$, $x(t_k)$, $x'(t_k)$, $x''(t_k)$都满足(2.4).

我们定义方程(2.3)和(2.4)的解$(t, t_0, \varphi, y_0, y_{00})$ 起始于$(t_0, \varphi, y_0, y_{00})$.

接下来我们定义问题(2.3)通过脉冲控制而达到指数稳定. 这里要注意条件$f(0,0,0)=0$ 和$I_k(0) = J_k(0) = P_k(0) = 0$包含了$x \equiv 0$是(2.3), (2.4)的一个解, 且有$\varphi \equiv 0$, $y_0 = 0$.

定义2.1.2 如果存在$\alpha > 0$, 序列$\{t_k\}_{k\in N}$ 满足

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k \to \infty \text{ 当} k \to \infty,$$

且对于所有的$\varepsilon > 0$, 函数序列$\{I_k\}$, $\{J_k\}$,和$\{P_k\}$满足(H_4), 存在$\delta > 0$, 这样如

果(2.3)(或(2.4))的一个解$x(t;t_0,\varphi,y_0,y_{00})$满足

$$\sqrt{\|\varphi\|_{t_0}^2+y_0^2+y_{00}^2}\leq\delta, \tag{2.5}$$

然后

$$\sqrt{x^2\left(t\right)+x'^2\left(t\right)+x''^2\left(t\right)}\leq\varepsilon\exp\left(-\alpha(t-t_0)\right),\quad t\geq t_0, \tag{2.6}$$

这里$\|\varphi\|_t\triangleq\sup_{t-\tau\leq s\leq t}|\varphi(s)|$. 则方程(2.3)在$[t_0,T]$上满足$f\left(0,0,0\right)=0$的平凡解, 被说成是通过脉冲控制达到指数稳定的.

当考虑周期脉冲时, 我们也考虑通过周期脉冲控制使系统达到指数稳定.

定义2.1.3 如果存在$\alpha>0$, 序列$\{t_k\}_{k\in N}$ 满足

$$t_0<t_1<t_2<\ldots<t_k\to\infty,\ k\to\infty$$

和$t_k-t_{k-1}=c>0$, 且对于所有的$\varepsilon>0$, 函数序列$\{I_k\}$, $\{J_k\}$,和$\{P_k\}$,满足(H_4)和

$$\begin{aligned}I_1\left(u\right)&=\cdots=I_k\left(u\right)=\cdots,\ k=1,2,\ldots\ \forall u\in R,\\ J_1\left(u\right)&=\cdots=J_k\left(u\right)=\cdots,\ k=1,2,\ldots\ \forall u\in R,\\ P_1\left(u\right)&=\cdots=P_k\left(u\right)=\cdots,\ k=1,2,\ldots\ \forall u\in R\end{aligned}$$

对于所有的 $\varepsilon>0$, $\delta>0$ 成立, 那么如果(2.3)(或(2.4))的解$x(t;t_0,\varphi,y_0,y_{00})$ 满足(2.5), 且有(2.6) 成立, 则问题(2.3)在$[t_0,T]$ 上满足$f\left(0,0,0\right)=0$的平凡解, 可以通过周期脉冲控制达到指数稳定.

下面我们考虑初值问题

$$\begin{cases}x'''\left(t\right)+\sum\limits_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}b_i(t-u)x(u)du+f\left(x\left(t\right),x'\left(t\right),x''\left(t\right)\right)=0, & t\geq t_0,\\ x\left(t\right)=\varphi\left(t\right),\ \ t_0-\tau_N\leq t\leq t_0,\quad x'\left(t_0\right)=y_0,\quad x''\left(t_0\right)=y_{00}, &\end{cases} \tag{2.7}$$

如前所述, 这里$0\leq\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_N$, $N\neq1$, $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是单调增无界实数序列且有$T>t_0$. 我们同样假设(H_1) 和(H_2), 且下面的假设取代(H_3),

(H_3') $BN\left(T-t_0\right)^2<1$, 这里$B=\max_{1\leq i\leq N}\int_0^{\tau_i}\left|b_i\left(s\right)\right|ds$.

在脉冲时刻t_k, $k=0,1,2,\ldots$, 有

$$x\left(t_k\right)=I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right),\ x'\left(t_k\right)=J_k\left(x'\left(t_k^-\right)\right),\ x''\left(t_k\right)=P_k\left(x''\left(t_k^-\right)\right) \tag{2.8}$$

同时也满足条件(H_4)和(H_5).

对于问题(2.7), (2.8)的解的定义和定义2.1.1是一样的. 同样地, 对于利用定义2.1.2 和2.1.3 通过脉冲或者是周期脉冲控制使得系统达到指数稳定的方法在(2.3), (2.7)中是一样的.

§2.2 系统解的存在性

在文[35], 作者研究了一类n-阶脉冲时滞微分方程, 利用Schaefer不动点定理证明了解的存在性结果. 这里我们借助[35]的思想, 证明问题(2.3), (2.4), (2.7), (2.8) 解的存在性.

首先, 介绍问题(2.3), (2.4)在$[t_0-\tau_N,T]$上解的存在性结果. 为了利用Schaefer不动点定理, 如果在每一个$[t_0-\tau_N,t_1)$和$[t_k,t_{k+1})$, $k\in N$ 上存在解, 那么证明的思想就是把问题(2.3), (2.4) 转化为找不动点问题.

值得一提的是, 在文[35]里作者考虑了脉冲微分方程里的连续空间里的算子, 但是由于脉冲的影响这些算子显然是分段连续函数. 事实上, 作者利用Arzela-Ascoli定理对这些在每一个未受脉冲影响的区间里的算子进行了限制, 但是在文[35]里没有提出这一点. 我们在下面的定理中很清楚的说明了这个问题.

定理2.2.1 假设(H_1)-(H_5) 成立, 那么问题(2.3), (2.4)在$[t_0-\tau_N,T]$上存在一个解.

证明 考虑算子

$$N_0: C_\Phi^1\left([t_0-\tau_N,T],R\right)\to C_\Phi^1\left([t_0-\tau_N,T],R\right)$$

给定

$$N_0(x)(t)=\begin{cases}\varphi(t),\ t_0-\tau_N\le t\le t_0,\\ \varphi(t_0)+y_0(t-t_0)+y_{00}(t-t_0)-\int_{t_0}^t(t-s)\sum\limits_{i=1}^N a_i(s)\,x(s-\tau_i)\,ds\\ -\int_{t_0}^t(t-s)\,f\left(x(s),x'(s),x''(t)\right)ds,\ t_0\le t\le T,\end{cases}$$

这里Φ是函数φ的不连续点的有限集.

我们证明N_0有一个不动点. 这里的$\varphi(t)$是N_0限制在$[t_0-\tau_N,t_0]$, $N_0|_{[t_0-\tau_N,T]}$上的一个不动点, 因此接下来需证明在$N_0|_{[t_0,T]}$存在一个不动点.

我们记$N_0=N_0|_{[t_0,T]}$, 那么新的算子N_0,

$$N_0: C^1\left([t_0,T],R\right)\to C^1\left([t_0,T],R\right),$$

给定

$$\begin{aligned}N_0(x)(t)\ &=\ \varphi(t_0)+y_0(t-t_0)+y_{00}(t-t_0)-\int_{t_0}^t(t-s)\sum_{i=1}^N a_i(s)\,x(s-\tau_i)\,ds\\ &\quad-\int_{t_0}^t(t-s)\,f\left(x(s),x'(s),x''(t)\right)ds.\end{aligned}$$

下面我们证明关于N_0的几个论断.

1. N_0 是连续的.

设$\{x_n\}$是$C^1([t_0,T],R)$中的一个序列, 且$x_n \to x$. 则$x_n' \to x'$, $x_n'' \to x''$, 一致收敛于$C^1([t_0,T],R)$且有

$$\begin{aligned}
& |N_0(x_n)(t) - N_0(x)(t)| \\
\le\ & (T-t_0)\|x-x_n\| \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{N} |a_i(s)|\,ds \\
& + (T-t_0)\int_{t_0}^{t} \left| f\left(x_n(s), x_n'(s), x_n''(t)\right) - f\left(x(s), x'(s), x''(s)\right) \right| ds \\
\le\ & (T-t_0)^2 AN\|x-x_n\| \\
& + (T-t_0)\int_{t_0}^{t} \left| f\left(x_n(s), x_n'(s), x_n''(t)\right) - f\left(x(s), x'(s), x''(s)\right) \right| ds
\end{aligned}$$

由f是连续的, 可得当$n \to +\infty$, 上式趋近于0 . 也即是

$$\|N_0(x_n) - N_0(x)\| \to 0,\ n \to \infty.$$

2. N_0 是从有界集到有界集的算子.

我们证明给定的$p \ge 0$, 存在$l \ge 0$使得

$$x \in B_p = \left\{y \in C^1([t_0,T],R);\ \|y\| \le p\right\} \text{ 这里 } \|N_0(x)\| \le l.$$

给定$t \in [t_0,T]$则有

$$\begin{aligned}
|N_0(x)(t)| \ \le\ & \|\varphi\| + |y_0|(T-t_0) + |y_{00}|(T-t_0) \\
& + (T-t_0)\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{N} |a_i(s)||x(s-\tau_i)|\,ds \\
& + (T-t_0)\int_{t_0}^{t} \left| f\left(x(s), x'(s), x''(s)\right) \right| ds \\
\le\ & \|\varphi\| + |y_0|(T-t_0) + AN(T-t_0)^2\|x\| + (T-t_0)^2 F,
\end{aligned}$$

这里我们取$l = \|\varphi\| + |y_0|(T-t_0) + |y_{00}|(T-t_0) + AN(T-t_0)^2 P + (T-t_0)^2 F$.

3. N_0 在$C^1([t_0,T],R)$ 上是从有界集到等度连续集的算子.

取$l_1, l_2 \in [t_0,T]$, 且有$l_1 < l_2$, $x \in B_p$. 则有

$$\begin{aligned}
& |N_0(x)(l_2) - N_0(x)(l_1)| \\
\le\ & |y_0(l_2 - l_1)| + |y_{00}(l_2 - l_1)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left|\int_{t_0}^{l_2}(l_2-s)\sum_{i=1}^{N}a_i(s)\,x(s-\tau_i)\,ds-\int_{t_0}^{l_1}(l_1-s)\sum_{i=1}^{N}a_i(s)\,x(s-\tau_i)\,ds\right|\\
&+\left|\int_{t_0}^{l_2}(l_2-s)f\Big(x(s),x'(s),x''(s)\Big)ds-\int_{t_0}^{l_1}(l_1-s)f\Big(x(s),x'(s),x''(s)\Big)ds\right|\\
=\;&|y_0(l_2-l_1)|+|y_{00}(l_2-l_1)|\\
&+\left|\int_{t_0}^{l_1}(l_2-l_1)\sum_{i=1}^{N}a_i(s)\,x(s-\tau_i)\,ds+\int_{l_1}^{l_2}(l_2-s)\sum_{i=1}^{N}a_i(s)\,x(s-\tau_i)\,ds\right|\\
&+\left|\int_{t_0}^{l_1}(l_2-l_1)f\Big(x(s),x'(s),x''(s)\Big)ds+\int_{l_1}^{l_2}(l_2-s)f\Big(x(s),x'(s),x''(s)\Big)ds\right|\\
\le\;&|y_0|(l_2-l_1)+|y_{00}|(l_2-l_1)+(l_2-l_1)\int_{t_0}^{l_2}\sum_{i=1}^{N}|a_i(s)|\,|x(s-\tau_i)|\,ds\\
&+(l_2-l_1)\int_{t_0}^{l_2}\left|f\left(x(s),x'(s),x''(s)\right)\right|ds
\end{aligned}
$$

当$l_2\to l_1$, 上式趋近于0. 对于$l_1<l_2\le 0$和$l_1\le 0\le l_2$类似可以说明N_0是等度连续的.

上面的论断1-3表明了对于所有的$p>0$, $N_0(B_P)$ 是有界且等度连续, 因此通过利用Arzela-Ascoli定理, $N_0(B_P)$是相对紧的且算子N_0是紧的. 我们接着证明下面的论断.

4. 集合

$$\Lambda(N_0)=\left\{x\in C^1([t_0,T],R):x=\lambda N_0(x)\text{ 其中}0<\lambda<1\right\}$$

有界的.

设$x\in\Lambda(N_0)$, 对于某个$0<\lambda<1$, 有$x=\lambda N_0(x)$, 则对于每个$t\in[t_0,T]$,

$$
\begin{aligned}
x(t)\;&=\lambda N_0x(t)=\lambda\left\{\varphi(t_0)+y_0(t-t_0)-\int_{t_0}^{l}(t-s)\,f\left(x(s),x'(s),x''(s)\right)ds\right.\\
&\left.+y_{00}(t-t_0)-\int_{t_0}^{l}(t-s)\sum_{i=1}^{N}a_i(s)\,x(s-\tau_i)\,ds+y_{00}(t-t_0)\right\}
\end{aligned}
$$

由上面的论断2和这里的$0<\lambda<1$, 我们可以得到

$$|x(t)|<\|\varphi\|+|y_0|(T-t_0)+|y_{00}|(T-t_0)+AN(T-t_0)^2\|x\|+(T-t_0)^2F.$$

因此

$$\|x\|\le\frac{\|\varphi\|+|y_0|(T-t_0)+|y_{00}|(T-t_0)+(T-t_0)^2F}{1-AN(T-t_0)^2}$$

所以$\Lambda\left(N_0\right)$是有界的.

结合论断1-4和Schaefer不动点定理, 则N_0有一个不动点, 设为$y_1\left(t\right)$, 则有

$$x_1\left(t\right)=\begin{cases}\varphi\left(t\right),\ t\in\left[t_0-\tau_N,t_0\right],\\ y_1\left(t\right),\ t\in\left[t_0,T\right]\end{cases}$$

它是(2.3)在$[t_0-\tau_N,T]$上的一个解.

下面我们接着考虑问题

$$\begin{cases}x'''\left(t\right)+\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t\right)x\left(t-\tau_i\right)+f\left(x\left(t\right),x'\left(t\right),x''\left(t\right)\right)=0,\quad t_1<t\leq T\\ x\left(t\right)=x_1\left(t\right),\quad t_1-\tau_N\leq t\leq t_1,\\ x\left(t_1\right)=I_1\left(x\left(t_1^-\right)\right),\quad x'\left(t_1\right)=J_k\left(x'\left(t_1^-\right)\right),\quad x''\left(t_1\right)=P_k\left(x''\left(t_1^-\right)\right),\end{cases}\tag{2.9}$$

和算子

$$N_1:C^1_{K_1}\left(\left[t_1-\tau_N,T\right],R\right)\rightarrow C^1_{K_1}\left(\left[t_1-\tau_N,T\right],R\right)$$

给定

$$N_1\left(x\right)\left(t\right)=\begin{cases}x_1\left(t\right),\ t_1-\tau_N\leq t\leq t_1,\\ I_1\left(x\left(t_1^-\right)\right)+J_k\left(x'\left(t_1^-\right)\right)\left(t-t_1\right)+P_k\left(x''\left(t_1^-\right)\right)\left(t-t_1\right)\\ -\int_{t_1}^{t}\left(t-s\right)\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(s\right)x\left(s-\tau_i\right)ds\\ -\int_{t_1}^{t}\left(t-s\right)f\left(x\left(s\right),x'\left(s\right),x''\left(s\right)\right)ds,\quad t_1\leq t\leq T,\end{cases}$$

这里$K_1=K_1\left(t_1\right)$是集合$\{t_1\}\cup\Phi$的某个子集.

再则, 我们指出$x_1\left(t\right)$是N_1限制在$[t_1-\tau_N,t_1)$, $N_1|_{[t_1-\tau_N,t_1)}$上的一个不动点, 因此我们接下来需证明在$N_1|_{[t_1,T]}$上存在一个不动点, 我们通过N_1令其为$N_1|_{[t_1,T]}$表示这个算子, 也即是

$$N_1:C^1\left(\left[t_1,T\right],R\right)\rightarrow C^1\left(\left[t_1,T\right],R\right)$$

给定

$$\begin{aligned}N_1\left(x\right)\left(t\right)\ =&\ x\left(t_1\right)+x'\left(t_1\right)\left(t-t_1\right)+x''\left(t_1\right)\left(t-t_1\right)\\ &-\int_{t_1}^{t}\left(t-s\right)\sum_{i=1}^{N}a_i\left(s\right)x\left(s-\tau_i\right)ds-\int_{t_1}^{t}\left(t-s\right)f\Big(x\left(s\right),x'\left(s\right),x''\left(s\right)\Big)ds.\end{aligned}$$

重复上面的论断1-4和条件(H_5), 则可以得到N_1 有一个不动点, 我们用$y_2\left(t\right)$来表示, 那么有

$$x_2\left(t\right)=\begin{cases}x_1\left(t\right),\ t\in\left[t_0-\tau_N,t_1\right),\\ y_2\left(t\right),\ t\in\left[t_1,T\right]\end{cases}=\begin{cases}\varphi\left(t\right),\ t\in\left[t_0-\tau_N,t_0\right],\\ y_1\left(t\right),\ t\in\left[t_0,t_1\right),\\ y_2\left(t\right),\ t\in\left[t_1,T\right],\end{cases}$$

它是(2.9)在$[t_0-\tau_N,T]$上的一个解.

类似地, 对于$t=t_k$, $k\in N$, 我们考虑问题

$$\begin{cases} x'''(t)+\sum\limits_{i=1}^{N}a_i(t)\,x(t-\tau_i)+f\left(x(t),x'(t),x''(t)\right)=0, & t_k<t\le T,\\ x(t)=x_k(t), \quad t_k-\tau_N\le t\le t_k, \\ x(t_k)=I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right), \quad x'(t_k)=J_k\left(x'\left(t_k^-\right)\right), \quad x''(t_k)=P_k\left(x''\left(t_k^-\right)\right), \end{cases} \tag{2.10}$$

算子

$$N_k: C^1_{K_k}\left([t_k-\tau_N,T],R\right)\to C^1_{K_k}\left([t_k-\tau_N,T],R\right)$$

下面给定

$$N_k(x)(t)=\begin{cases} x_k(t),\ t_k-\tau_N\le T<t_k, \\ I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right)+J_k\left(x'\left(t_k^-\right)\right)(t-t_k)+P_k\left(x''\left(t_k^-\right)\right)(t-t_k) \\ -\int_{t_k}^{t}(t-s)\sum\limits_{i=1}^{N}a_i(s)\,x(s-\tau_i)\,ds \\ -\int_{t_k}^{t}(t-s)\,f\left(x(s),x'(s),x''(s)\right)ds,\ t_k\le t\le T, \end{cases}$$

其中K_k是$\{t_1,t_2,\ldots,t_k\}\cup\Phi$ 的一个子集. 这里的$t_k\in K_k$, 但是否对于$t_i\in K_k$, $i=1,2,\ldots k-1$,都依赖于τ_N. 因此我们接着考虑$N_k|_{[t_k,T]}$.

这里的$x_k(t)$是N_k限制在$[t_k-\tau_N,t_k)$, $N_k|_{[t_k-\tau_N,t_k)}$ 上的一个不动点, 接下来需证明在$N_k|_{[t_k,T]}$ 上存在一个不动点, 我们令其为$N_k=N_k|_{[t_k,T]}$则有

$$N_k: C^1\left([t_k,T],R\right)\to C^1\left([t_k,T],R\right)$$

给定

$$\begin{aligned} N_k(x)(t) &= x(t_k)+x'(t_k)(t-t_k)+x''(t_k)(t-t_k) \\ &\quad -\int_{t_k}^{t}(t-s)\sum_{i=1}^{N}a_i(s)\,x(s-\tau_i)ds-\int_{t_k}^{t}(t-s)f\Big(x(s),x'(s),x''(s)\Big)ds. \end{aligned}$$

由论断1-4和(H_5), 则N_k存在一个不动点, 我们用$y_k(t)$来表示, 那么有

$$x_k(t)=\begin{cases} x_{k-1}(t),\ t\in[t_0-\tau_N,t_{k-1}), \\ y_k(t),\ t\in[t_{k-1},T] \end{cases} = \begin{cases} \varphi(t),\ t\in[t_0-\tau_N,t_0], \\ y_1(t),\ t\in[t_0,t_1), \\ y_2(t),\ t\in[t_0,t_2), \\ \cdots \\ y_k(t),\ t\in[t_{k-1},T] \end{cases}$$

它是(2.10)在$[t_0-\tau_N,T]$上的一个解. 如果我们重复这个过程则可得到,

$$x(t)=\begin{cases} x_m(t),\ t\in[t_0-\tau_N,t_m), \\ y_{m+1}(t),\ t\in[t_m,T] \end{cases}=\begin{cases} \varphi(t),\ t\in[t_0-\tau_N,t_0], \\ y_1(t),\ t\in[t_0,t_1), \\ y_2(t),\ t\in[t_0,t_2), \\ \cdots \\ y_k(t),\ t\in[t_{k-1},t_k), \\ \cdots \\ y_{m+1}(t),\ t\in[t_m,T], \end{cases} \tag{2.11}$$

这里$m=\max\{k\in K: t_k\le T\}$, 则$x(t)$是问题(2.3), (2.4)在$[t_0-\tau_N,T]$上的一个解. 证毕.

接下来我们证明问题(2.7), (2.8)存在一个解. 证明的思想是利用本章定理2.2.1和文[1].

定理2.2.2 假设 (H_1), (H_2), (H_3'), (H_4), (H_5) 成立. 那么问题(2.7), (2.8)在$[t_0-\tau_N,T]$ 上存在一个解.

证明 考虑算子

$$N_0: C_\Phi^1([t_0-\tau_N,T],R)\rightarrow C_\Phi^1([t_0-\tau_N,T],R)$$

给定

$$N_0(x)(t)=\begin{cases} \varphi(t),\ t_0-\tau_N\le t\le t_0, \\ \varphi(t_0)+y_0(t-t_0)+y_{00}(t-t_0) \\ -\int_{t_0}^t\left[(t-s)\sum\limits_{i=1}^N\int_{s-\tau_i}^s b_i(s-u)\,x(u)\,du\right]ds \\ -\int_{t_0}^t(t-s)\,f\left(x(s),x'(s),x''(s)\right)ds,\ t_0\le t\le T, \end{cases}$$

我们将证明N_0有一个不动点.

和定理2.2.1一样, 这里的$\varphi(t)$是N_0限制在$[t_0-\tau_N,t_0]$, $N_0|_{[t_0-\tau_N,T]}$上的一个不动点, 因此接下来需证明在$N_0|_{[t_0,T]}$ 存在一个不动点. 我们记$N_0=N_0|_{[t_0,T]}$, 那么新的算子N_0,

$$N_0: C^1([t_0,T],R)\rightarrow C^1([t_0,T],R)$$

给定

$$N_0(x)(t)\ =\ \varphi(t_0)+y_0(t-t_0)+y_{00}(t-t_0)$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{t_0}^{t}\left[(t-s)\sum_{i=1}^{N}\int_{s-\tau_i}^{s}b_i(s-u)x(u)\,du\right]ds\\
&-\int_{t_0}^{t}(t-s)f\left(x(s),x'(s),x''(s)\right)ds.
\end{aligned}
$$

下面我们证明关于N_0 的几个论断.

1. N_0 是连续的.

设$\{x_n\}$是一个在$C^1([t_0,T],R)$上的序列, 且有$x_n\to x$. 则对于所有的$t\in[t_0,T]$, $x_n'\to x'$, $x_n''\to x''$, 一致收敛于$C^1([t_0,T],R)$且有

$$
\begin{aligned}
&|N_0(x_n)(t)-N_0(x)(t)|\\
\le\ &(T-t_0)\|x-x_n\|\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{N}|b_i(s-u)|\,ds\\
&+(T-t_0)\int_{t_0}^{t}\left|f\left(x_n(s),x_n'(s),x_n''(s)\right)-f\left(x(s),x'(s),x''(s)\right)\right|ds\\
\le\ &(T-t_0)^2BN\|x-x_n\|\\
&+(T-t_0)\int_{t_0}^{t}\left|f\left(x_n(s),x_n'(s),x_n''(s)\right)-f\left(x(s),x'(s),x''(s)\right)\right|ds
\end{aligned}
$$

由f的连续性, 因此当$n\to+\infty$时, 上式趋近于0. 也即是

$$
\|N_0(x_n)-N_0(x)\|\to 0,\ n\to\infty.
$$

2. N_0 是从有界集到有界集的算子.

我们证明给定的$p\ge 0$,存在$l\ge 0$使得

$$
x\in B_p=\left\{y\in C^1([t_0,T],R);\ \|y\|\le p\right\}\ \text{这里}\ \|N_0(x)\|\le l.
$$

对于$t\in[t_0,T]$, 则有

$$
\begin{aligned}
|N_0(x)(t)|\ \le\ &\|\varphi\|+|y_0|(T-t_0)+|y_{00}|(T-t_0)\\
&+(T-t_0)\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{N}\int_{s-\tau_i}^{s}|b_i(s-u)||x(u)|\,duds\\
&+(T-t_0)\int_{t_0}^{t}\left|f\left(x(s),x'(s),x''(s)\right)\right|ds\\
\le\ &\|\varphi\|+|y_0|(T-t_0)+|y_{00}|(T-t_0)+BN(T-t_0)^2\|x\|+(T-t_0)^2F.
\end{aligned}
$$

这里我们取$l=\|\varphi\|+|y_0|(T-t_0)+|y_{00}|(T-t_0)+BN(T-t_0)^2P+(T-t_0)^2F$.

3. N_0 在$C^1([t_0,T],R)$ 上是从有界集到等度连续集的算子.

取$l_1, l_2 \in [t_0, T]$,且有$l_1 < l_2$, $x \in B_p$. 则有

$$\begin{aligned}
& \left|N_0(x)(l_2) - N_0(x)(l_1)\right| \\
\leq & \left|y_0(l_2 - l_1)\right| + \left|y_{00}(l_2 - l_1)\right| \\
& + \left|\int_{t_0}^{l_2}\left[(l_2 - s)\sum_{i=1}^{N}\int_{s-\tau_i}^{s} b_i(s-u)\,x(u)\,du\right]ds\right. \\
& \left. - \int_{t_0}^{l_1}\left[(l_1 - s)\sum_{i=1}^{N}\int_{s-\tau_i}^{s} b_i(s-u)\,x(u)\,du\right]ds\right| \\
& + \left|\int_{t_0}^{l_2}(l_2 - s)\,f\left(x(s), x'(s), x''(s)\right)ds\right. \\
& \left. - \int_{t_0}^{l_1}(l_1 - s)\,f\left(x(s), x'(s), x''(s)\right)ds\right| \\
= & \left|y_0(l_2 - l_1)\right| + \left|y_{00}(l_2 - l_1)\right| \\
& + \left|\int_{t_0}^{l_1}\left[(l_2 - l_1)\sum_{i=1}^{N}\int_{s-\tau_i}^{s} b_i(s-u)\,x(u)\,du\right]ds\right. \\
& \left. \int_{l_1}^{l_2}\left[(l_2 - s)\sum_{i=1}^{N}\int_{s-\tau_i}^{s} b_i(s-u)\,x(u)\,du\right]ds\right| \\
& + \left|\int_{t_0}^{l_1}(l_2 - l_1)\,f\left(x(s), x'(s), x''(s)\right)ds\right. \\
& \left. + \int_{l_1}^{l_2}(l_2 - s)\,f\left(x(s), x'(s), x''(s)\right)ds\right| \\
\leq & \left|y_0\right|(l_2 - l_1) + \left|y_{00}\right|(l_2 - l_1) + (l_2 - l_1)\int_{t_0}^{l_2}\sum_{i=1}^{N}\left|a_i(s)\right|\left|x(s-\tau_i)\right|ds \\
& + (l_2 - l_1)\int_{t_0}^{l_2}\left|f\left(x(s), x'(s), x''(s)\right)\right|ds
\end{aligned}$$

当$l_2 \to l_1$时, 上式趋近于0. 对于$l_1 < l_2 \leq 0$ 和$l_1 \leq 0 \leq l_2$ 类似可以说明N_0是等度连续性.

上面的论断1-3 表明了对于所有的$p > 0$, $N_0(B_P)$ 是有界且等度连续. 因此通过利用Arzela-Ascoli定理, $N_0(B_P)$是相对紧的且算子N_0是紧的. 我们接着证明下面的论断.

4. 下面的集合是有界的

$$\Lambda(N_0) = \left\{x \in C^1([t_0, T], R) : x = \lambda N_0(x) \text{ 其中} 0 < \lambda < 1\right\}.$$

设$x \in \Lambda(N_0)$.对于某个$0 < \lambda < 1$, 有$x = \lambda N_0(x)$, 则对于每个$t \in [t_0, T]$,

$$x(t) = \lambda N_0 x(t) = \lambda\left\{\varphi(t_0) + y_0(t - t_0) + y_{00}(t - t_0)\right\}$$

$$-\lambda\left\{\int_{t_0}^{l}(t-s)\sum_{i=1}^{N}a_i(s)\,x(s-\tau_i)\,ds+\int_{t_0}^{l}(t-s)f\Big(x(s),x'(s),x''(s)\Big)ds\right\}$$

由上面的论断2和这里的$0<\lambda<1$,可得

$$|x(t)|<\|\varphi\|+|y_0|(T-t_0)+|y_{00}|(T-t_0)+BN(T-t_0)^2\|x\|+(T-t_0)^2F.$$

因此

$$\|x\|\le\frac{\|\varphi\|+|y_0|(T-t_0)+|y_0|(T-t_0)+(T-t_0)^2F}{1-BN(T-t_0)^2}$$

所以$\Lambda(N_0)$是有界的.

结合论断1-4和Schaefer不动点定理, 则N_0有一个不动点, 设为$y_1(t)$. 则有

$$x_1(t)=\begin{cases}\varphi(t),\ t\in[t_0-\tau_N,t_0],\\ y_1(t),\ t\in[t_0,T],\end{cases}$$

它是(2.7)在$[t_0-\tau_N,T]$上的一个解.

下面我们接着考虑问题

$$\begin{cases}x'''(t)+\sum\limits_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}b_i(t-u)x(u)du+f\big(x(t),x'(t),x''(t)\big)=0,t_1<t\le T\\ x(t)=x_1(t),\quad t_1-\tau_N\le t\le t_1,\\ x(t_1)=I_1\left(x\left(t_1^-\right)\right),x'(t_1)=J_k\left(x'\left(t_1^-\right)\right),x''(t_1)=P_k\left(x''\left(t_1^-\right)\right),\end{cases}\tag{2.12}$$

和算子

$$N_1:C_{K_1}^1([t_1-\tau_N,T],R)\to C_{K_1}^1([t_1-\tau_N,T],R)$$

给定

$$N_1(x)(t)=\begin{cases}x_1(t),\ t_1-\tau_N\le t\le t_1,\\ I_1\left(x\left(t_1^-\right)\right)+J_k\left(x'\left(t_1^-\right)\right)(t-t_1)+P_k\left(x''\left(t_1^-\right)\right)(t-t_1)\\ -\int_{t_1}^{t}\left[(t-s)\sum\limits_{i=1}^{N}\int_{s-\tau_i}^{s}b_i(s-u)\,x(u)\,du\right]ds\\ -\int_{t_1}^{t}(t-s)\,f\left(x(s),x'(s),x''(s)\right)ds,\ t_1\le t\le T,\end{cases}$$

这里$K_1=K_1(t_1)$是集合$\{t_1\}\cup\Phi$的某个子集.

显然$x_1(t)$是N_1限制在$[t_1-\tau_N,t_1)$, $N_1|_{[t_1-\tau_N,t_1)}$上的一个不动点, 因此我们接下来需证明在$N_1|_{[t_1,T]}$ 上存在一个不动点. 利用N_1, 我们用$N_1|_{[t_1,T]}$来表示此算子, 也即是

$$N_1:C^1([t_1,T],R)\to C^1([t_1,T],R),$$

给定

$$N_1(x)(t) = x(t_1) + x'(t_1)(t-t_1) - \int_{t_1}^{t}\left[(t-s)\sum_{i=1}^{N}\int_{s-\tau_i}^{s} b_i(s-u)x(u)\,du\right]ds$$
$$- \int_{t_1}^{t}(t-s)f\left(x(s),x'(s),x''(s)\right)ds + x''(t_1)(t-t_1).$$

重复上面的论断1-4和条件(H_5)，则可以得到N_1 有一个不动点，我们用$y_2(t)$来表示，那么有

$$x_2(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in [t_0-\tau_N, t_1), \\ y_2(t), & t \in [t_1, T] \end{cases} = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [t_0-\tau_N, t_0], \\ y_1(t), & t \in [t_0, t_1), \\ y_2(t), & t \in [t_1, T], \end{cases}$$

它是(2.12)在$[t_0-\tau_N, T]$上的一个解.

类似地，对于$t = t_k$, $k \in N$, 我们考虑问题

$$\begin{cases} x'''(t) + \sum\limits_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t} b_i(t-u)x(u)du + f\left(x(t), x'(t), x''(t)\right) = 0, t_k < t \le T, \\ x(t) = x_k(t), t_k - \tau_N \le t \le t_k, \\ x(t_k) = I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right),\ x'(t_k) = J_k\left(x'\left(t_k^-\right)\right),\ x''(t_k) = P_k\left(x''\left(t_k^-\right)\right), \end{cases} \tag{2.13}$$

和算子

$$N_k : C^1_{K_k}\left([t_k-\tau_N, T], R\right) \to C^1_{K_k}\left([t_k-\tau_N, T], R\right)$$

给定

$$N_k(x)(t) = \begin{cases} x_k(t), \ t_k - \tau_N \le T < t_k, \\ I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right) + J_k\left(x'\left(t_k^-\right)\right)(t-t_k) + P_k\left(x''\left(t_k^-\right)\right)(t-t_k) \\ - \int_{t_k}^{t}(t-s)\sum\limits_{i=1}^{N} a_i(s)x(s-\tau_i)\,ds \\ - \int_{t_k}^{t}(t-s)f\left(x(s), x'(s), x''(s)\right)ds, \quad t_k \le t \le T, \end{cases}$$

这里K_k是$\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \cup \Phi$ 的一个子集，这里的$t_k \in K_k$.

这里的$x_k(t)$是N_k限制在$[t_k-\tau_N, t_k)$, $N_k|_{[t_k-\tau_N, t_k)}$ 上的一个不动点. 因此接下来需证明在$N_k|_{[t_k,T]}$ 上存在一个不动点. 我们令其为$N_k = N_k|_{[t_k,T]}$则有

$$N_k : C^1\left([t_k, T], R\right) \to C^1\left([t_k, T], R\right)$$

给定

$$N_k(x)(t) = x(t_k) + x'(t_k)(t-t_k) - \int_{t_k}^{t}\left[(t-s)\sum_{i=1}^{N}\int_{s-\tau_i}^{s} b_i(s-u)x(u)\,du\right]ds$$

$$-\int_{t_k}^{t}(t-s)f\left(x(s),x'(s),x''(s)\right)ds+x''(t_k)(t-t_k).$$

由论断1-4和(H_5),则N_k 存在一个不动点, 我们用$y_k(t)$来表示, 那么有

$$x_k(t)=\begin{cases}x_{k-1}(t),\ t\in[t_0-\tau_N,t_{k-1}),\\ y_k(t),\ t\in[t_{k-1},T]\end{cases}=\begin{cases}\varphi(t),\ t\in[t_0-\tau_N,t_0],\\ y_1(t),\ t\in[t_0,t_1),\\ y_2(t),\ t\in[t_0,t_2),\\ \cdots\\ y_k(t),\ t\in[t_{k-1},T],\end{cases}$$

它是(2.13)在$[t_0-\tau_N,T]$上的一个解. 如果我们重复这个过程则可得到,

$$x(t)=\begin{cases}x_{m-1}(t),\ t\in[t_0-\tau_N,t_{m-1}),\\ y_m(t),\ t\in[t_{m-1},T]\end{cases}=\begin{cases}\varphi(t),\ t\in[t_0-\tau_N,t_0],\\ y_1(t),\ t\in[t_0,t_1),\\ y_2(t),\ t\in[t_0,t_2),\\ \cdots\\ y_k(t),\ t\in[t_{k-1},t_k),\\ \cdots\\ y_m(t),\ t\in[t_{m-1},T],\end{cases}\tag{2.14}$$

这里$m=\max\{k\in K:t_k\le T\}$, 则$x(t)$是问题(2.7), (2.8)在$[t_0-\tau_N,T]$上的一个解. 证毕.

§2.3 脉冲指数稳定性

在这一小节里我们将证明系统(2.3)和(2.7) 能够通过脉冲控制而达到指数稳定.

定理2.3.1 假设(H_1)-(H_3)成立且对所有的$u,v\in R$ 满足$f(u,v)v\ge 0$, 且有

$$(A+F)\tau<\exp\{-(2+N(A+F))\tau\},\tag{2.15}$$

这里$\tau=\sum_{i=1}^{N}\tau_i$, 那么系统(2.3)在$[t_0,T)$上的平凡解可以通过脉冲控制而达到指数稳定.

证明 假设(2.15)成立. 存在$\alpha>0$和$l\ge\tau$则有

$$(A+F)\tau\le\exp(-2\alpha(l+\tau))\exp\{-(2+N(A+F))l\}.\tag{2.16}$$

设α, l满足于(2.16), 那么对于每一个序列$\{t_k\}$ 且满足条件$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$, $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$,和$\tau_N \le t_k - t_{k-1} \le l$, $k \in N$,取

$$I_k(u) = J_k(u) = P_k(u) = d_k(u), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.17}$$

这里

$$\begin{aligned} d_k &= \sqrt{\frac{p_k - (A+F)\tau}{2}}, \\ p_k &= \exp\left(-2\alpha\left(t_{k+1} - t_k + \tau\right)\right)\exp\left\{-\left(2 + N(A+F)\right)\left(t_{k+1} - t_k\right)\right\}. \end{aligned}$$

这里的d_k 是正实数, 由(2.16)我们可以得到$p_k \ge (A+F)\tau$. 同时(H_4)和(H_5) 满足. 由定理3.2.1, 则(2.3), (2.4)在$[t_0 - \tau_N, T]$上存在一个解, 现在利用(2.17) 施加脉冲.

对于每个$\varepsilon > 0$, 取

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + (A+F)\tau}}\exp\left(-\alpha\left(t_1 - t_0\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}(2 + (A+F)N)\left(t_1 - t_0\right)\right). \tag{2.18}$$

我们将证明对于(2.3), (2.4)的每个解$x(t; t_0, \varphi, y_0, y_{00})$满足

$$\sqrt{\|\varphi\|_{t_0}^2 + y_0^2 + y_{00}^2} \le \delta,$$

且有

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t) + x''^2(t)} \le \varepsilon \exp\left(-\alpha(t - t_0)\right), \quad t_0 \le t < T.$$

(1^0)若$t \in [t_0, t_1)$, 我们考虑Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V(t) &= x^2(t) + x'^2(t) + x''^2(t) + \sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}\left|a_i(s+\tau_i)\right| x^2(s)ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}\left|f\left(x(s+\tau_i), x'(s+\tau_i), x''(s+\tau_i)\right)\right| x^2(s)ds. \end{aligned}$$

则$V(t)$ 有以下性质:

(i) $V(t) \ge x^2(t) + x'^2(t) + x''^2(t)$;

(ii) $V(t) \le (1 + (A+F)\tau)\left(\|x\|_t^2 + x'^2(t) + x''^2(t)\right)$,

这里$\|x\|_t \triangleq \sup_{t-\tau_N \le s \le t} |x(s)|$, 因为

$$\begin{aligned} V(t) &\le x^2(t) + x'^2(t) + x''^2(t) + \|x\|_t^2 \sum_{i=1}^{N}\int_{t}^{t+\tau_i} a_i(s)ds \\ &\quad + \|x\|_t^2 \sum_{i=1}^{N}\int_{t}^{t+\tau_i}\left|f\left(x(s), x'(s), x''(s)\right)\right| ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)+\|x\|_t^2A\tau+\|x\|_t^2F\tau \\
&\leq (1+(A+F)\tau)\left(\|x\|_t^2+x'^2(t)+x''^2(t)\right).
\end{aligned}
$$

(iii) 对于$t\in(t_0,t_1)$, 如果我们用$\dot{V}(t)$表示$V(t)$沿着(2.3)的右导数, 则有

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= 2x(t)x'(t)+2x'(t)x''(t)+2x''(t)x'''(t)+\sum_{i=1}^{N}|a_i(t+\tau_i)|x^2(t) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{N}|a_i(t)|x^2(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x(s+\tau_i),x'(s+\tau_i),x''(s+\tau_i)\right)\right|x^2(t) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x(t),x'(t),x''(t)\right)\right|x^2(t-\tau_i) \\
&= 2x(t)x'(t)+2x'(t)x''(t)-2x''(t)\sum_{i=1}^{N}a_i(t)x(t-\tau_i) \\
&\quad -2x''(t)f\left(x(t),x'(t),x''(t)\right)+\sum_{i=1}^{N}|a_i(t+\tau_i)|x^2(t) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{N}|a_i(t)|x^2(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x(s+\tau_i),x'(s+\tau_i),x''(s+\tau_i)\right)\right|x^2(t) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x(t),x'(t),x''(t)\right)\right|x^2(t-\tau_i) \\
&\leq 2x(t)x'(t)+2x'(t)x''(t)+2\sum_{i=1}^{N}a_i(t)x(t-\tau_i)x''(t) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{N}|a_i(t+\tau_i)|x^2(t)-\sum_{i=1}^{N}|a_i(t)|x^2(t-\tau_i) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x(s+\tau_i),x'(s+\tau_i),x''(s+\tau_i)\right)\right|x^2(t) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x(t),x'(t),x''(t)\right)\right|x^2(t-\tau_i) \\
&\leq x^2(t)+2x'^2(t)+x''^2(t)+\sum_{i=1}^{N}|a_i(t)|x''^2(t)+\sum_{i=1}^{N}|a_i(t)|x^2(t-\tau_i) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{N}|a_i(t+\tau_i)|x^2(t)-\sum_{i=1}^{N}|a_i(t)|x^2(t-\tau_i) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x(s+\tau_i),x'(s+\tau_i),x''(s+\tau_i)\right)\right|x^2(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x(t), x^{'}(t), x^{''}(t)\right)\right| x^2(t-\tau_i) \\
\leq\; & x^2(t)+2x^{'2}(t)+x^{''2}(t)+\sum_{i=1}^{N}|a_i(t)|\, x^{''2}(t)+\sum_{i=1}^{N}|a_i(t+\tau_i)|\, x^2(t) \\
& +\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x(s+\tau_i), x^{'}(s+\tau_i), x^{''}(s+\tau_i)\right)\right| x^2(t) \\
\leq\; & x^2(t)+2x^{'2}(t)+x^{''2}(t)+ANx^{''2}(t)+ANx^2(t)+FNx^2(t) \\
\leq\; & (2+N(A+F))\left(x^2(t)+x^{'2}(t)+x^{''2}(t)\right) \\
\leq\; & (2+N(A+F))\,V(t).
\end{aligned}
$$

解不等式$\dot{V}(t) \leq (2+N(A+F))\,V(t)$, 可得

$$
\begin{aligned}
V(t) &\leq V(t_0)\exp\{(2+N(A+F))(t-t_0)\} \\
&\leq V(t_0)\exp\{(2+N(A+F))(t-t_0)\}.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
& x^2(t)+x^{'2}(t)+x^{''2}(t) \\
\leq\; & V(t) \leq V(t_0)\exp\{(2+N(A+F))(t-t_0)\} \\
\leq\; & (1+(A+F)\tau)\left(\|x\|_{t_0}^2+x^{'2}(t_0)+x^{''2}(t_0)\right)\exp\{(2+N(A+F))(t-t_0)\} \\
\leq\; & (1+(A+F)\tau)\delta^2\exp\{(2+N(A+F))(t-t_0)\} \\
\leq\; & \varepsilon^2\exp(-2\alpha(t_1-t_0)) \\
\leq\; & \varepsilon^2\exp(-2\alpha(t-t_0)).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sqrt{x^2(t)+x^{'2}(t)+x^{''2}(t)} \leq \varepsilon\exp(-\alpha(t-t_0)). \tag{2.20}
$$

由于$x(t)$, $x^{'}(t)$和$x^{''}(t)$是右连续的, 所以(2.20)也考虑$[t_0, t_1)$. 因此

$$
\sqrt{x^2(t)+x^{'2}(t)+x^{''2}(t)} \leq \varepsilon\exp(-\alpha(t-t_0)),\quad [t_0, t_1)
$$

下面, 我们对于$t \in (t_1, t_2)$重复上面的证明过程. 类似可得

$$
\begin{aligned}
V(t) &\leq V\left(t_1^+\right)\exp\{(2+N(A+F))(t_2-t_1)\} \\
&= \left(x^2\left(t_1^+\right)+x^{'2}\left(t_1^+\right)+x^{''2}\left(t_1^+\right)\right)\exp\{(2+N(A+F))(t_2-t_1)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1-\tau_i}^{t_1} |a_i(s+\tau_i)| \, x^2(s) ds \right) \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1-\tau_i}^{t_1} \left| f\left(x(s+\tau_i), x'(s+\tau_i), x''(s+\tau_i) \right) \right| x^2(s) ds \right) \cdot \\
& \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
= & \left(x^2(t_1) + x'^2(t_1) + x''^2(t_1) \right) \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1-\tau_i}^{t_1} |a_i(s+\tau_i)| \, x^2(s) ds \right) \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1-\tau_i}^{t_1} \left| f\left(x(s+\tau_i), x'(s+\tau_i), x''(s+\tau_i) \right) \right| x^2(s) ds \right) \cdot \\
& \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
= & \left(I_1\left(x^2(t_1^-) \right) + J_1\left(x'^2(t_1^-) \right) + P_1\left(x''^2(t_1^-) \right) \right) \cdot \\
& \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1-\tau_i}^{t_1} |a_i(s+\tau_i)| \, x^2(s) ds \right) \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1-\tau_i}^{t_1} \left| f\left(x(s+\tau_i), x'(s+\tau_i), x''(s+\tau_i) \right) \right| x^2(s) ds \right) \cdot \\
& \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
= & \left(d_1^2 \left(x^2(t_1^-) + x'^2(t_1^-) + x''^2(t_1^-) \right) \right) \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1-\tau_i}^{t_1} |a_i(s+\tau_i)| \, x^2(s) ds \right) \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1-\tau_i}^{t_1} \left| f\left(x(s+\tau_i), x'(s+\tau_i), x''(s+\tau_i) \right) \right| x^2(s) ds \right) \cdot \\
& \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
\leq & \; d_1^2 \sup_{t_1-\tau_i \leq t \leq t_1} \left(x^2(t) + x'^2(t) + x''^2(t) \right) \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
& + \sup_{t_1-\tau_i \leq t \leq t_1} x^2(t) A\tau \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
& + \sup_{t_1-\tau_i \leq t \leq t_1} x^2(t) F\tau \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
\leq & \left(d_1^2 + (A+F)\tau \right) \sup_{t_1-\tau_i \leq t \leq t_1} \left(x^2(t) + x'^2(t) + x''^2(t) \right) \cdot \\
& \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\} \\
\leq & \left(d_1^2 + (A+F)\tau \right) \varepsilon^2 \exp\left[-2\alpha (t_1 - t_0 - \tau) \right] \exp\left\{ (2 + N(A+F))(t_2 - t_1) \right\}.
\end{aligned}
$$

由d_1和p_1的定义可得

$$
\begin{aligned}
& x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t) \\
\leq\ & V(t) \\
\leq\ & \left(d_1^2+(A+F)\tau\right)\varepsilon^2\exp\left[-2\alpha\left(t_1-t_0-\tau\right)\right]\exp\left\{\left(2+N\left(A+F\right)\right)\left(t_2-t_1\right)\right\}. \\
=\ & \varepsilon^2\left(\frac{p_1+(A+F)\tau}{2}\right)\exp\left[-2\alpha\left(t_1-t_0-\tau\right)\right]\exp\left\{\left(2+N\left(A+F\right)\right)\left(t_2-t_1\right)\right\} \\
\leq\ & \varepsilon^2 p_1\exp\left[-2\alpha\left(t_1-t_0-\tau\right)\right]\exp\left\{\left(2+N\left(A+F\right)\right)\left(t_2-t_1\right)\right\} \\
=\ & \varepsilon^2\exp\left(-2\alpha(t_2-t_0)\right) \\
\leq\ & \varepsilon^2\exp\left(-2\alpha(t-t_0)\right),
\end{aligned}
$$

所以

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)}\leq\varepsilon\exp\left(-\alpha(t-t_0)\right), \tag{2.21}$$

事实上由$x(t)$, $x'(t)$和$x''(t)$是右连续的, 对于(2.21)在$[t_1,t_2)$上. 也有

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)}\leq\varepsilon\exp\left(-\alpha(t-t_0)\right),\quad t\in[t_1,t_2),$$

类似地, 对于$k=1,2,\ldots,m$

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)}\leq\varepsilon\exp\left(-\alpha(t-t_0)\right),\quad t\in[t_{k-1},t_k),$$

显然有

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)}\leq\varepsilon\exp\left(-\alpha(t-t_0)\right),\quad t\in[t_0,T),$$

证毕.

注2.3.1 如果对于定理4.1，t_k, I_k, J_k,和P_k也满足

$$t_k-t_{k-1}=l\ \text{和}I_k(u)=J_k(u)=P_k(u)=du,\ k=1,2,\ldots$$

和

$$d=\sqrt{\frac{p-(*+F)\tau}{2}}, p=\exp\left(-2\alpha\left(l+\tau\right)\right)\exp\left\{-\left(2+N\left(*+F\right)\right)l\right\},$$

这里$*=A$, 那么问题(2.3)在$[t_0,T)$上的零解可以通过周期脉冲控制而达到指数稳定.

接下来我们证明问题(2.7)能够通过脉冲控制而达到指数稳定.

定理2.3.2 假设(H_1), (H_2), 和(H_3') 成立且对所有的$u, v \in R$满足$f(u,v)v \geq 0$, 且有

$$(B+F)\tau < \exp\{-(2+N(B+F))\tau\}, \tag{2.22}$$

这里$\tau = \sum_{i=1}^{N}\tau_i$, 那么系统(2.7)在$[t_0, T)$上的平凡解可以通过脉冲控制而达到指数稳定.

证明 假设(2.22) 成立. 存在$\alpha > 0$和$l \geq \tau$则有

$$(B+F)\tau \leq \exp(-2\alpha(l+\tau))\exp\{-(2+N(B+F))l\}. \tag{2.23}$$

取α, l满足于(2.23), 那么对于每一个序列$\{t_k\}$ 且满足条件$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$, $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$,和$\tau_N \leq t_k - t_{k-1} \leq l$, $k \in N$,取

$$I_k(u) = J_k(u) = P_k(u) = d_k(u), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.24}$$

这里

$$\begin{aligned} d_k &= \sqrt{\frac{p_k - (B+F)\tau}{2}}, \\ p_k &= \exp(-2\alpha(t_{k+1} - t_k + \tau))\exp\{-(2+N(B+F))(t_{k+1} - t_k)\}. \end{aligned}$$

这里d_k 是正实数, 由(2.23)我们可以得到$p_k \geq (A+F)\tau$. 同时(H_4)和(H_5) 满足. 由定理2.2.2, 则(2.7), (2.8)在$[t_0 - \tau_N, T]$上存在一个解, 现在利用(2.24) 施加脉冲.

对于每个$\varepsilon > 0$,取

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+(B+F)\tau}}\exp(-\alpha(t_1 - t_0))\exp\left(-\frac{1}{2}(2+(B+F)N)(t_1 - t_0)\right). \tag{2.25}$$

我们将证明对于(2.7), (2.8)的每个解$x(t; t_0, \varphi, y_0, y_{00})$满足

$$\sqrt{\|\varphi\|_{t_0}^2 + y_0^2 + y_{00}^2} \leq \delta,$$

且有

$$\sqrt{x^2(t) + x'^2(t) + x''^2(t)} \leq \varepsilon\exp(-\alpha(t - t_0)), \quad t_0 \leq t < T.$$

对于$t \in [t_0, t_1)$, 我们定义Lyapunov函数

$$\begin{aligned} V(t) &= x^2(t) + x'^2(t) + x''^2(t) + \sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}\left[\int_u^t |b_i(u - s + \tau_i)|\, x^2(s)ds\right]du \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}\left|f\left(x(s+\tau_i), x'(s+\tau_i), x''(s+\tau_i)\right)\right| x^2(s)ds \end{aligned}$$

则$V(t)$有以下性质:

(i) $V(t) \geq x^2(t) + x'^2(t) + x''^2(t)$;

(ii) $V(t) \leq (1 + (B+F)\tau)\left(\|x\|_t^2 + x'^2(t) + x''^2(t)\right)$,

这里$\|x\|_t \triangleq \sup_{t-\tau_N \leq s \leq t} |x(s)|$,因为

$$
\begin{aligned}
V(t) \;\leq\; & x^2(t) + x'^2(t) + x''^2(t) + \|x\|_t^2 \sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} \int_0^{\tau_i} |b_i(s)|\, ds du \\
& + \|x\|_t^2 \sum_{i=1}^{N} \int_t^{t+\tau_i} \left| f\left(x(s), x'(s), x''(s)\right) \right| ds \\
\leq\; & x^2(t) + x'^2(t) + x''^2(t) + \|x\|_t^2 B\tau + \|x\|_t^2 F\tau \\
\leq\; & (1 + (B+F)\tau)\left(\|x\|_t^2 + x'^2(t) + x''^2(t)\right).
\end{aligned}
$$

(iii) 对于$t \in (t_0, t_1)$,如果我们用$\dot{V}(t)$ 表示$V(t)$沿着(2.7)的右导数, 则有

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(t) =\; & 2x(t)x'(t) + 2x'(t)x''(t) + 2x''(t)x'''(t) \\
& + \sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} |b_i(u-t+\tau_i)|\, x^2(t)\, du - \sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} |b_i(t-s)|\, x^2(s)\, ds \\
& + \sum_{i=1}^{N} \left| f\left(x(t+\tau_i), x'(t+\tau_i), x''(t+\tau_i)\right) \right| x^2(t) \\
& - \sum_{i=1}^{N} \left| f\left(x(t), x'(t), x''(t)\right) \right| x^2(t-\tau_i) \\
=\; & 2x(t)x'(t) + 2x'(t)x''(t) - 2x''(t) \sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} b_i(t-s)x(s)ds \\
& - 2x''(t) f\left(x(t), x'(t), x''(t)\right) + \sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} |b_i(u-t+\tau_i)|\, x^2(t)\, du \\
& - \sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} |b_i(t-s)|\, x^2(s)\, ds - \sum_{i=1}^{N} \left| f\left(x(t), x'(t), x''(t)\right) \right| x^2(t-\tau_i) \\
& + \sum_{i=1}^{N} \left| f\left(x(s+\tau_i), x'(s+\tau_i), x''(s+\tau_i)\right) \right| x^2(t) \\
\leq\; & 2x(t)x'(t) + 2x'(t)x''(t) - 2x''(t) f\left(x(t), x'(t), x''(t)\right) \\
& + 2x''(t) \sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} |b_i(t-s)|\, x(s)ds + \sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} |b_i(u-t+\tau_i)|\, x^2(t)\, du \\
& - \sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau_i}^{t} |b_i(t-s)|\, x^2(s)\, ds - \sum_{i=1}^{N} \left| f\left(x(t), x'(t), x''(t)\right) \right| x^2(t-\tau_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x\left(s+\tau_i\right),x'\left(s+\tau_i\right),x''\left(s+\tau_i\right)\right)\right|x^2(t) \\
\leq\ & x^2(t)+2x'^2(t)+x''^2(t)+\sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}|b_i(t-s)|\,x^2(s)\,ds \\
& +\sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}|b_i(t-s)|\,x''^2(t)\,ds-2x''(t)\,f\left(x(t),x'(t),x''(t)\right) \\
& +\sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}|b_i(u-t+\tau_i)|\,x^2(t)\,du-\sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}|b_i(t-s)|\,x^2(s)\,ds \\
& +\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x\left(s+\tau_i\right),x'\left(s+\tau_i\right),x''\left(s+\tau_i\right)\right)\right|x^2(t) \\
& -\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x(t),x'(t),x''(t)\right)\right|x^2(t-\tau_i) \\
\leq\ & x^2(t)+2x'^2(t)+x''^2(t)+\sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}|b_i(t-s)|\,x''^2(t)\,ds \\
& +\sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}|b_i(u-t+\tau_i)|\,x^2(t)\,du \\
& +\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x\left(s+\tau_i\right),x'\left(s+\tau_i\right),x''\left(s+\tau_i\right)\right)\right|x^2(t) \\
\leq\ & x^2(t)+2x'^2(t)+x''^2(t)+\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{\tau_I}|b_i(s)|\,x''^2(t)\,ds \\
& +\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{\tau_I}|b_i(s)|\,x^2(t)ds+FNx^2(t) \\
\leq\ & x^2(t)+2x'^2(t)+x''^2(t)+NBx''^2(t)+NBx^2(t)+FNx^2(t) \\
\leq\ & (2+N(B+F))\left(x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)\right) \\
\leq\ & (2+N(B+F))\,V(t).
\end{aligned}
$$

解不等式$\dot{V}(t)\leq(2+N(B+F))\,V(t)$, 可得

$$
\begin{aligned}
V(t) &\leq V(t_0)\exp\left\{(2+N(B+F))(t-t_0)\right\} \\
&\leq V(t_0)\exp\left\{(2+N(B+F))(t-t_0)\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

因此

$$x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq V(t) \leq V(t_0)\exp\{(2+N(B+F))(t-t_0)\} \\
&\leq (1+(B+F)\tau)\left(\|x\|_{t_0}^2 + x'^2(t_0) + x''^2(t_0)\right)\exp\{(2+N(B+F))(t-t_0)\} \\
&\leq (1+(B+F)\tau)\delta^2\exp\{(2+N(B+F))(t-t_0)\} \\
&\leq \varepsilon^2\exp(-2\alpha(t_1-t_0)) \\
&\leq \varepsilon^2\exp(-2\alpha(t-t_0)).
\end{aligned}
$$

所以

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)} \leq \varepsilon\exp(-\alpha(t-t_0)). \tag{2.27}$$

由于$x(t)$, $x'(t)$和$x''(t)$是右连续的, 所以(2.27) 也考虑$[t_0, t_1)$. 因此

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)} \leq \varepsilon\exp(-\alpha(t-t_0)),\ \ [t_0, t_1).$$

下面, 我们对于$t \in (t_1, t_2)$重复上面的证明过程. 类似(2.26), 可得

$$
\begin{aligned}
V(t) &\leq V(t_1^+)\exp\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\} \\
&= \left(x^2(t_1^+) + x'^2(t_1^+) + x''^2(t_1^+)\right)\exp\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}\left[\int_u^t |b_i(u-s+\tau_i)|\, x^2(s)ds\right]du\right)\cdot \\
&\quad \exp\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1-\tau_i}^{t_1}\left|f\left(x(s+\tau_i), x'(s+\tau_i), x''(s+\tau_i)\right)\right| x^2(s)ds\right)\cdot \\
&\quad \exp\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\} \\
&= \left(x^2(t_1) + x'^2(t_1) + x''^2(t_1)\right)\exp\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}\left[\int_u^t |b_i(u-s+\tau_i)|\, x^2(s)ds\right]du\right)\cdot \\
&\quad \exp\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1-\tau_i}^{t_1}\left|f\left(x(s+\tau_i), x'(s+\tau_i), x''(s+\tau_i)\right)\right| x^2(s)ds\right)\cdot \\
&\quad \exp\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\} \\
&= \left(I_1(x^2(t_1^-)) + J_1\left(x'^2(t_1^-)\right) + P_1\left(x''^2(t_1^-)\right)\right)\cdot \\
&\quad \exp\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}\left[\int_u^t |b_i(u-s+\tau_i)|\, x^2(s)ds\right]du\right)\cdot
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\} \\
& +\left(\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1-\tau_i}^{t_1}\left|f\left(x(s+\tau_i),x'(s+\tau_i),x''(s+\tau_i)\right)\right|x^2(s)ds\right)\cdot \\
& \exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\} \\
= & \left(d_1^2\left(x^2(t_1^-)+x'^2(t_1^-)+x''^2(t_1^-)\right)\right)\exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\} \\
& +\left(\sum_{i=1}^{N}\int_{t-\tau_i}^{t}\left[\int_u^t|b_i(u-s+\tau_i)|\,x^2(s)ds\right]du\right)\exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\} \\
& +\left(\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1-\tau_i}^{t_1}\left|f\left(x(s+\tau_i),x'(s+\tau_i),x''(s+\tau_i)\right)\right|x^2(s)ds\right)\cdot \\
& \exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\} \\
\le & d_1^2\sup_{t_1-\tau_i\le t\le t_1}\left(x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)\right)\exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\} \\
& +\sup_{t_1-\tau_i\le t\le t_1}x^2(t)B\tau\exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\} \\
& +\sup_{t_1-\tau_i\le t\le t_1}x^2(t)F\tau\exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\} \\
\le & \left(d_1^2+(B+F)\tau\right)\sup_{t_1-\tau_i\le t\le t_1}\left(x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)\right)\cdot \\
& \exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\} \\
\le & \left(d_1^2+(B+F)\tau\right)\varepsilon^2\exp\left[-2\alpha(t_1-t_0-\tau)\right]\exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\}.
\end{aligned}
$$

由d_1和p_1 的定义, 可得

$$
\begin{aligned}
& x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t) \\
\le & V(t) \\
\le & \left(d_1^2+(B+F)\tau\right)\varepsilon^2\exp\left[-2\alpha(t_1-t_0-\tau)\right]\exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\}. \\
= & \varepsilon^2\left(\frac{p_1+(B+F)\tau}{2}\right)\exp\left[-2\alpha(t_1-t_0-\tau)\right]\exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\} \\
\le & \varepsilon^2 p_1\exp\left[-2\alpha(t_1-t_0-\tau)\right]\exp\left\{(2+N(B+F))(t_2-t_1)\right\} \\
= & \varepsilon^2\exp\left(-2\alpha(t_2-t_0)\right) \\
\le & \varepsilon^2\exp\left(-2\alpha(t-t_0)\right).
\end{aligned}
$$

所以

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)}\le\varepsilon\exp\left(-\alpha(t-t_0)\right). \tag{2.28}$$

事实上由$x(t)$, $x'(t)$和$x''(t)$是右连续的, 对于(2.28)在$[t_1,t_2)$上. 也有

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)}\le\varepsilon\exp\left(-\alpha(t-t_0)\right),\quad t\in[t_1,t_2).$$

类似地, 对于$k=1,2,\ldots,m$

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)} \le \varepsilon \exp(-\alpha(t-t_0)), \quad t\in[t_{k-1},t_k).$$

则有

$$\sqrt{x^2(t)+x'^2(t)+x''^2(t)} \le \varepsilon \exp(-\alpha(t-t_0)), \quad t\in[t_0,T),$$

证毕.

§2.4 应用

例题2.4.1考虑方程

$$x'''(t)-0.0619x(t-0.6)-0.0321x(t-0.3)-0.0239x(t-0.1)=0,\ t\ge 0 \quad (2.29)$$

满足初始条件

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t), \ -0.6\le t\le 0, \\ x'(0) &= y_0,\ x''(0)=y_{00}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

为了证明(2.29)的不稳定性, 我们先考虑(2.29)的特征方程

$$\lambda^3-0.0619e^{-0.6\lambda}-0.0321e^{-0.3\lambda}-0.0239e^{-0.1\lambda}=0, \quad (2.31)$$

我们知道, 如果(2.31)存在一个带有正实部的特征根, 则说明(2.29)是不稳定的. 通过利用Maple 软件, 我们找到了一个带有正实部的特征根. 这里说明未加脉冲前(2.29)是不稳定的. 若取$A=0.0619$, $l=\tau=\tau_1+\tau_2+\tau_3=1$,和$\alpha=\frac{1}{8}$, 我们可以证明

$$A\tau=0.0619<\exp(-2\alpha(l+\tau))\exp(-(2+AN)l)\le\exp(-(2+AN)l),$$

考虑脉冲时刻t_k, $t_k-t_{k-1}\equiv 1$, $k=1,2,\cdots$,可得

$$\begin{aligned} x(t_k) &= I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right)=dx\left(t_k^-\right), \\ x'(t_k) &= J_k\left(x'\left(t_k^-\right)\right)=dx'\left(t_k^-\right), \\ x''(t_k) &= P_k\left(x''\left(t_k^-\right)\right)=dx''\left(t_k^-\right), \end{aligned}$$

这里$d=\sqrt{\frac{\exp(-2.6857)-0.0619}{2}}$, 同时满足定理2.1.1 的条件, 所以方程(2.29), (2.30)在$[0,T)$上的平凡解是可以通过周期脉冲控制而达到指数稳定, 这里的脉冲周期满足$T<2.32$.

例题2.4.2考虑方程

$$x'''(t)-0.0669\int_{t-0.3}^{t}x(u)du+0.0512\int_{t-0.5}^{t}x(u)du=0,\ t\geq t_0, \tag{2.32}$$

它的特征方程是

$$\lambda^4+0.0669e^{-\lambda}-0.0512e^{-2\lambda}-0.0157=0, \tag{2.33}$$

利用Mathematica软件，我们可以找到方程(2.33)的根有正实部. 说明未加脉冲前方程(2.32)是不稳定的. 如取$B=0.03345$, $l=\tau=0.8$, $\alpha=\frac{1}{2}$, 易验证下式成立

$$B\tau<\exp\left(-2\alpha\left(l+\tau\right)\right)\exp\left(-\left(2+BN\right)l\right)\leq\exp\left(-\left(2+BN\right)l\right),$$

考虑脉冲时刻t_k, $t_k-t_{k-1}\equiv 1$, $k=1,2,\cdots$, 有

$$\begin{aligned}x\left(t_k\right)&=I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right)=dx\left(t_k^-\right),\\x'\left(t_k\right)&=J_k\left(x'\left(t_k^-\right)\right)=dx'\left(t_k^-\right),\\x''\left(t_k\right)&=P_k\left(x''\left(t_k^-\right)\right)=dx''\left(t_k^-\right),\end{aligned}$$

这里$d=\sqrt{\frac{\exp(-3.2535)-0.0268}{2}}$, 满足定理2.3.2，则问题(2.32), (2.33)在$[0,T)$上的平凡解是可以通过周期脉冲控制而达到指数稳定, 这里的脉冲周期满足$T<3.86$.

第三章　一类具有脉冲控制和Monod-Haldane功能反应的捕食模型

§3.1　模型和引理

这一章的主要目的是通过研究模型(3.1)来说明人类活动对可再生资源的影响，我们的理论结果可在生物害虫控制、渔业资源的可持续发展以及在其它可再生资源的管理上得到应用. 生物害虫控制是通过天敌助增来控制害虫以使害虫灭绝或使其数量不超过经济临界水平，而可再生资源的开发和利用的主要目的是保证资源的可持续发展，通过周期性脉冲控制释放天敌和化学控制达到对害虫的综合管理，对种群的持续发展控制以及种群的最优捕获等[38~45]，因此研究在脉冲控制下对种群资源的合理开发与利用有很好的现实意义.

本文考虑以下捕食-食饵生物模型:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} & x_1'(t) = x_1(t)(a - bx_1(t)) - \frac{\beta x_1(t)}{1+cx_1(t)+dx_1^2(t)}, \\ & x_2'(t) = rx_3(t) - re^{-w\tau_1}x_3(t-\tau_1) - wx_2(t), \\ & x_3'(t) = re^{-w\tau_1}x_3(t-\tau_1) + \frac{k\beta x_1(t)}{1+cx_1(t)+dx_1^2(t)}x_3(t) - d_1x_3(t) \\ & \qquad -Ex_3(t) - d_2x_3^2(t), \end{aligned}\right\} t \neq n\tau, \\ \left.\begin{aligned} & \Delta x_1(t) = p \\ & \Delta x_2(t) = 0 \\ & \Delta x_3(t) = 0 \end{aligned}\right\} t = n\tau, \quad n = 1,2\ldots, \\ (\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \varphi_3(\xi)) \in C_+ = C\left([-\tau_1, 0], R_+^3\right),\ \varphi_i(0) > 0,\ i = 1,2,3, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中$x_1(t)$表示被捕食者的种群密度，$x_2(t)$, $x_3(t)$分别表示未成年和成年捕食者的种群密度，τ_1表示常数时滞，$a>0$表示被捕食者的内禀增长率，$b>0$表示种群内竞争系数，$r, w, d_1, d_2, k, c, \beta$,是正常数，$0<E<1$表示对捕食者连续收获率的影响. 从生物意义出发，我们假设在$t>0$的任意时间，未成年种群到成年种群的成活率和死亡率都是成比例的，w, d_1分别表示$x_2(t)$, $x_3(t)$的死亡率，d_2是种群间的密度制约项，$k>0$表示捕食者吃掉被捕食者后的转化率，$\Delta x_1(t) = x_1(t^+) - x_1(t), p \geq 0$是被捕食者在$t = n\tau, n \in Z_+$时的放养数量，$\tau$是被捕食者的脉冲放养周期.

本文我们将证明系统(3.1)有一个全局吸引的捕食者灭绝周期解，由于对被捕食者进行脉冲放养，则所有的捕食者种群在连续收获被捕食者时不会灭绝，因此系统(3.1)是持久生存的.

由于系统(3.1)的第一和第三个方程均不含$x_2(t)$，我们化简模型(3.1)转化为研究下面的模型:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} x_1'(t) = x_1(t)(a - bx_1(t)) - \frac{\beta x_1(t)}{1+cx_1(t)+dx_1^2(t)}, \\ x_3'(t) = re^{-w\tau_1}x_3(t-\tau_1) + \frac{k\beta x_1(t)}{1+cx_1(t)+dx_1^2(t)}x_3(t) - d_1x_3(t) \\ \qquad -Ex_3(t) - d_2x_3^2(t), \end{array}\right\} t \neq n\tau, \\ \left.\begin{array}{l} \Delta x_1(t) = p \\ \Delta x_3(t) = 0 \end{array}\right\} t = n\tau, \quad n = 1, 2 \ldots, \end{cases} \tag{3.2}$$

系统(3.2)的初始条件是:

$$(\varphi_1(\xi), \varphi_3(\xi)) \in C_+ = C\left([-\tau_1, 0], R_+^2\right), \quad \varphi_i(0) > 0, \quad i = 2, 3. \tag{3.3}$$

系统(3.1)的解可表示为$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$，是一个分段连续的函数$x: R_+ \to R_+^3$, $x(t)$ 在$(n\tau, (n+1)\tau]$, $n \in Z_+$上是连续的并且$x(n\tau^+) = \lim\limits_{t \to n\tau^+} x(t)$存在. 显然, 由$f$的光滑性质可保证系统(3.1)解的全局存在和唯一性, f表示定义在系统(3.1)右连续的映射[46, 47]. 由解对初值的连续性, 得

$$\varphi_2(0) = \int_{-\tau_1}^{0} ae^{bs}\varphi_3(s)\,ds. \tag{3.4}$$

在得出主要结论之前, 我们给出几个后面将要用到的引理.

引理3.1.1 令$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) > 0$对$-\tau_1 < t < 0$成立. 则系统(3.1)的任意解是正的.

证明 首先, 证明对所有的$t > 0$有$x_3(t) > 0$ 成立. 注意到$x_3(t) > 0$, 如果存在t_0使得$x_3(t_0) = 0$, 则$t_0 > 0$. 假定t_0是使得$x_3(t) = 0$成立的第一个时刻, 即

$$t_0 = \inf\{t > 0 : x_3(t) = 0\},$$

则$x_3'(t_0) = re^{-w\tau_1}x_3(t_0 - \tau_1) > 0$. 因此, 对充分小的$\varepsilon > 0$,有$x_3'(t - \varepsilon) > 0$. 但由$t_0$的定义, $x_3'(t_0 - \varepsilon) \leq 0$. 这个矛盾表明对所有的$t > 0$有$x_3(t) > 0$成立.

当$x_1(t) = 0$, $t \neq n\tau$时, $x_1'(t) = 0$且$x_1(n\tau^+) = x_3(n\tau) + p$, $p \geq 0$. 又因为系统(3.1)的解是唯一的, 易知对于所有的$t > 0$, $x_1(t) > 0$.

最后, 我们将下面的方程:

$$s'(t) = -re^{-w\tau_1}x_3(t - \tau_1) - ws(t), \tag{3.5}$$

与(3.1)相比较, 若$s(t)$是(3.5)的解且$x_1(t)$是(3.1) 的解, 则$x_2(t) > s(t)$在$0 < t < \tau_1$上. 解(3.5)可得

$$s(t) = e^{-wt}\left(x_2(0) - \int_0^t re^{r(u-\tau_1)}x_3(u-\tau_1)\,du\right).$$

又由(3.4)可得

$$s(\tau_1) = e^{-w\tau_1}\left(\int_{-\tau_1}^0 re^{rs}\varphi_3(s)\,ds - \int_0^{\tau_1} re^{w(u-\tau_1)}x_3(u-\tau_1)\,du\right).$$

因为$x_3(t) = \varphi_3(t)$, $t \in [-\tau_1, 0]$, $\int_{-\tau_1}^0 re^{ws}\varphi_3(s)\,ds$与$\int_0^{\tau_1} re^{w(s-\tau_1)}x_3(t-\tau_1)\,du$ 通过做变换这两项是相等的. 因此, 可得$s(\tau_1) = 0$, 所以$x_2(t) > 0$, 又由于$s(t)$ 是严格减少的, 所以对$t \in (0, \tau_1)$ 有$x_1(t) > s(t) > 0$. 故$x_2(t) > 0$在$0 \le t \le \tau_1$上成立.

通过归纳, 与文献[49]中定理1的证明方法类似, 可证明$x_2(t) > 0$对所有的$t \ge 0$. 证毕.

引理3.1.2[46] 设函数$m \in PC'[R^+, R]$满足下面的不等式

$$\begin{cases} m'(t) \le p(t)m(t) + q(t), \\ t \ge t_0,\ t \ne t_k,\ k = 1, 2, \cdots, \\ m(t_k^+) \le d_k m(t_k) + b_k,\ t = t_k, \end{cases} \tag{3.6}$$

这里$p, q \in PC[R^+, R]$和$d_k \ge 0, b_k$是常量, $t \ge t_0$, 则

$$\begin{aligned} m(t) \ \le\ & m(t_0)\prod_{t_0<t_k<t} d_k \exp\left(\int_{t_0}^t p(s)\,ds\right) + \sum_{t_0<t_k<t}\left(\prod_{t_k<t_j<t} d_j \exp\left(\int_{t_0}^t p(s)\,ds\right)\right) b_k \\ & + \int_{t_0}^t \prod_{s<t_k<t} d_k \exp\left(\int_s^t p(\sigma)\,d\sigma\right) q(s)\,ds, \end{aligned}$$

下面证明系统(3.1)的所有解是一致最终有界的.

引理3.1.3 存在常数$M > 0$使得当t充分大时, 对系统(3.1)的所有解$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$有$x_1(t) \le \frac{M}{k}$, $x_2(t) \le M$, $x_3(t) \le M$ 成立.

证明 设$V(t) = kx_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$. 由于$w > d$, 则当$t \ne n\tau$时有

$$\begin{aligned} D^+V(t) + wV(t) \ =\ & k(w+a)x_1(t) - kbx_1^2(t) + (r + w - d_1 - E)x_3(t) - d_2x_3^2(t) \\ \le\ & M_0, \end{aligned}$$

这里$M_0 = \frac{k(a+w)^2}{4b} + \frac{(r+w-d_1-E)^2}{4d_2}$, 当$t = n\tau$时, $V(n\tau^+) = V(n\tau) + p$. 由引理3.1.2, 对$t \in (n\tau, (n+1)\tau]$有

$$V(t) \ \le\ V(0)\exp(-dt) + \sum_{0<n\tau<t} p\exp(-d(t-n\tau)) + \int_0^t M_0\exp(-d(t-s))\,ds$$

$$
\begin{aligned}
&= V(0)\exp(-dt)+p\frac{\exp(-d(t-\tau))-\exp(-d(t-(n+1)\tau))}{1-\exp(d\tau)} \\
&\quad +\frac{M_0}{d}(1-\exp(-dt)) \\
&< V(0)\exp(-dt)+\frac{p\exp(-d(t-\tau))}{1-\exp(d\tau)}+\frac{p\exp(d\tau)}{\exp(d\tau)-1}+\frac{M_0}{d}(1-\exp(-dt)) \\
&\to \frac{M_0}{d}+\frac{p\exp(d\tau)}{\exp(d\tau)-1}, \quad t\to\infty.
\end{aligned}
$$

所以$V(t)$是一致最终有界的. 因此, 由$V(t)$的定义可得, 存在一个常数$M>0$使得$x_1(t)\le \frac{M}{k}$, $x_2(t)\le M$, $x_3(t)\le M$对所有充分大的t都成立. 证毕.

考虑下面的时滞微分方程:

$$
x'(t)=a_1x(t-\tau)-a_2x(t)=0, \tag{3.7}
$$

我们假定对于a_1, a_2, $\tau>0$; 对于$-\tau\le t\le 0$有$x(t)>0$. 则下面的系统(3.8)由引理3.1.4很容易得到.

引理3.1.4[48] 假定$a_1<a_2$, 对于系统(3.7)则有

$$
\lim_{t\to\infty}x(t)=0.
$$

引理3.1.5[50] 考虑下面的脉冲系统:

$$
\begin{cases}
v'(t)=v(t)(a-bv(t)), & t\neq n\tau, \\
v(n\tau^+)=v(n\tau)+p, & t=n\tau,\ n=1,2,\cdots,
\end{cases} \tag{3.8}
$$

这里$a>0$, $b>0$, $p>0$, 那么(3.8)存在唯一的正周期解.

$$
\widetilde{v(t)}=\frac{av^*\exp(a(t-n\tau))}{a-bv^*+bv^*\exp(a(t-n\tau))}, \qquad t\in(n\tau,\ (n+1)\tau], \qquad n\in Z_+, \tag{3.9}
$$

它是全局渐进稳定的, 这里$v^*=\frac{(a+bp)+\sqrt{(a+bp)^2+4abp/(e^{a\tau}-1)}}{2b}$. 通过对系统(3.1)的研究, 我们易知存在$t_1\in Z_+$, $t>t_1$使得$x_3(t-\tau_1)=0$和$x_3(t)=0$. 那么

$$
\begin{cases}
x_1'(t)=x_1(t)(a-bx_1(t)), & t\neq n\tau, \\
\Delta x_1(t)=p, & t=n\tau,\ n=1,2,\cdots,
\end{cases} \tag{3.10}
$$

从(3.10)和引理3.1.5, 我们知道(3.1) 有一个捕食者灭绝的周期解

$$
\left(\widetilde{x_1(t)},0,0\right)=\left(\frac{ax_1^*\exp(a(t-n\tau))}{a-bx_1^*+bx_1^*\exp(a(t-n\tau))},0,0\right),\ t\in(n\tau,\ (n+1)\tau],\ n\in Z_+,
$$

或者(3.2)有一个捕食者灭绝的周期解

$$
\left(\widetilde{x_1(t)},0\right)=\left(\frac{ax_1^*\exp(a(t-n\tau))}{a-bx_1^*+bx_1^*\exp(a(t-n\tau))},0\right),\ t\in(n\tau,\ (n+1)\tau],\ n\in Z_+,
$$

它是全局渐进稳定的, 这里$x_1^*=\frac{(a+bp)+\sqrt{(a+bp)^2+4abp/(e^{a\tau}-1)}}{2b}$.

§3.2 周期解的全局吸引性

在这一部分, 我们将给出系统(3.1)捕食者灭绝的周期解全局吸引性的充分条件.

定理3.2.1 设$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$是(3.1)的任意解. 如果

$$E > re^{-w\tau_1} + \frac{ka\beta x_1^* e^{a\tau}}{(1+cM)(a - bx_1^* + bx_1^* e^{a\tau})} - d_3$$

成立, 这里$x_1^* = \frac{(a+bp)+\sqrt{(a+bp)^2+4abp/(e^{a\tau}-1)}}{2b}$, 系统(3.1) 的捕食者灭绝周期解$\left(\widetilde{x_1(t)}, 0, 0\right)$是全局吸引的.

证明 显然, 证明系统(3.1)的捕食者灭绝周期解$\left(\widetilde{x_3(t)}, 0, 0\right)$ 的全局吸引性等价于证明系统(3.2)的捕食者灭绝周期解$\left(\widetilde{x_3(t)}, 0, 0\right)$的全局吸引性. 所以我们只需研究系统(3.2). 由于$E > re^{-w\tau_1} + \frac{ka\beta x_1^* e^{a\tau}}{(1+cM)\left(a - bx_1^* + bx_1^* e^{a\tau}\right)} - d_1$, 选择充分小的$\varepsilon_0$使得

$$re^{-w\tau_1} + \frac{k\beta}{1+cM}\left(\frac{ax_1^* e^{a\tau}}{a - bx_1^* + bx_1^* e^{a\tau}} + \varepsilon_0\right) < d_1 + E \tag{3.11}$$

这里$x_1^* = \frac{(a+bp)+\sqrt{(a+bp)^2+4abp/(e^{a\tau}-1)}}{2b}$.

从系统(3.2)的第一个方程知$\frac{dy(t)}{dt} \le x_1(t)(a - bx(t))$. 考虑下面的脉冲微分比较系统:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = x(t)(a - bx(t)), & t \ne n\tau, \\ \Delta x(t) = p, \quad t = n\tau, \\ x(0^+) = x_1(0^+). \end{cases} \tag{3.12}$$

应用引理3.1.5, 我们可以得到系统(3.12)的周期解

$$\widetilde{x(t)} = \frac{ax_1^* \exp(a(t - n\tau))}{a - bx_1^* + bx_1^* \exp(a(t - n\tau))}, \quad t \in (n\tau,\ (n+1)\tau], \quad n \in Z_+, \tag{3.13}$$

它是全局渐进稳定的, 这里$x_1^* = \frac{(a+bp)+\sqrt{(a+bp)^2+4abp/(e^{a\tau}-1)}}{2b}$.

由引理3.1.5和脉冲微分方程的比较定理, 可得$x_1(t) \le x(t)$ 且$x(t) \to \widetilde{x_1(t)}$ 当$t \to \infty$ 时. 则存在一个整数$k_2 > k_1$, $t > k_2$使得

$$x_1(t) \le x(t) \le \widetilde{x_1(t)} + \varepsilon_0, \quad n\tau < t \le (n+1)\tau, \quad n > k_2. \tag{3.14}$$

即

$$x_1(t) < \widetilde{x_1(t)} + \varepsilon_0 \le \frac{ax_1^* e^{a\tau}}{a - bx_1^* + bx_1^* e^{a\tau}} + \varepsilon_0 = Q, \quad n\tau < t \le (n+1)\tau, \quad n > k_2.$$

由(3.2)和(3.11), 可得

$$\frac{dx_3(t)}{dt} \le re^{-w\tau_1}x_3(t-\tau_1) - \left(d_1 + E - \frac{k\beta Q}{1+cM}\right)x_3(t),\ t > n\tau + \tau_1,\ n > k_2. \quad (3.15)$$

考虑下面的比较微分系统:

$$\frac{dy(t)}{dt} = re^{-w\tau_1}y(t-\tau_1) - \left(d_1 + E - \frac{k\beta Q}{1+cM}\right)y(t), \quad t > n\tau + \tau_1, \quad n > k_2. \quad (3.16)$$

由(3.11)可得$re^{-b\tau_1} < d_1 + E - \frac{k\beta Q}{1+cM}$. 根据引理3.1.4, 得$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

设$(x_1(t), x_3(t))$是系统(3.2)具有初值(3.3)且$x_3(\xi) = \varphi_3(\xi)$ $(\xi \in [-\tau_1, 0])$的解, $y(t)$是系统(3.16)具有初值$y(\xi) = \varphi_3(\xi)$ $(\xi \in [-\tau_1, 0])$的解. 由比较定理得$\lim\limits_{t\to\infty} x_3(t) < \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$, 结合$x_3(t)$的正性, 可知

$$\lim_{t\to\infty} x_3(t) = 0. \quad (3.17)$$

因此, 对任意充分小的$\varepsilon_1 > 0$, 存在整数k_3 $(k_3\tau > k_2\tau + \tau_1)$使得$x_2(t) > \varepsilon_1$ 对所有的$t > k_3\tau$成立.

对系统(3.2), 有

$$x_1(t)\left[a - bx_1(t) - \frac{k\beta\varepsilon_1}{1 + c\varepsilon_1 + d\varepsilon_1^2}\right] \le \frac{dx_1(t)}{dt} \le x_1(t)(a - bx_1(t)). \quad (3.18)$$

则有$z_1(t) \le x_1(t) \le z_2(t)$ 且$z_1(t) \to \widetilde{x_1(t)}$, $z_2(t) \to \widetilde{x_1(t)}$, $t \to \infty$. 其中$z_1(t)$和$z_2(t)$分别是

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = z_1(t)\left[a - bz_1(t) - \frac{k\beta\varepsilon_1}{1+c\varepsilon_1+d\varepsilon_1^2}\right], & t \ne n\tau, \\ z_1(t^+) = z_1(t) + p, & t = n\tau, \\ z_1(0^+) = x_1(0^+), \end{cases} \quad (3.19)$$

和

$$\begin{cases} \frac{dz_2(t)}{dt} = z_2(t)(a - bz_2(t)), & t \ne n\tau, \\ z_2(t^+) = z_2(t) + p, & t = n\tau, \\ z_2(0^+) = x_2(0^+), \end{cases}$$

的解. 对于$n\tau < t \le (n+1)\tau$,

$$\widetilde{z_1(t)} = \frac{\left(a - \frac{k\beta\varepsilon_1}{1+c\varepsilon_1+d\varepsilon_1^2}\right)z_1^* \exp\left(\left(a - \frac{k\beta\varepsilon_1}{1+c\varepsilon_1+d\varepsilon_1^2}\right)(t-n\tau)\right)}{\left(a - \frac{k\beta\varepsilon_1}{1+c\varepsilon_1+d\varepsilon_1^2}\right) - bz_1^* + bz_1^* \exp\left(\left(a - \frac{k\beta\varepsilon_1}{1+c\varepsilon_1+d\varepsilon_1^2}\right)(t-n\tau)\right)}$$

这里

$$z_1^* = \frac{\left(a - \frac{k\beta\varepsilon_1}{1+c\varepsilon_1+d\varepsilon_1^2} + bp\right)}{2b} + \frac{\sqrt{\left(a - \frac{k\beta\varepsilon_1}{1+c\varepsilon_1+d\varepsilon_1^2} + bp\right)^2 + 4\left(a - \frac{k\beta\varepsilon_1}{1+c\varepsilon_1+d\varepsilon_1^2}\right) bp / \left(e^{\left(a - \frac{k\beta\varepsilon_1}{1+c\varepsilon_1+d\varepsilon_1^2}\right)} - 1\right)}}{2b}$$

因此, 对于任意的$\varepsilon_2 > 0$, 存在一个整数k_4, $n > k_4$使得

$$\widetilde{z_1(t)} - \varepsilon_2 < x_1(t) < \widetilde{x_1(t)} + \varepsilon_2.$$

令$\varepsilon_1 \to 0$, 可得

$$\widetilde{x_1(t)} - \varepsilon_2 < x_1(t) < \widetilde{x_1(t)} + \varepsilon_2,$$

当$t \to \infty$时, 对于充分大的t, 则有$x_1(t) \to \widetilde{x_1(t)}$ 证明完毕.

§3.3 持久性

下面我们研究系统(3.1)的持久性. 在证明定理之前, 我们给出持久性的定义.

定义3.3.1 如果存在常量$m, M > 0$(与初值无关)和一个有限时刻T_0, 使得对具有初始条件$x_1(0^+) > 0$, $x_2(0^+) > 0$, $x_3(0^+) > 0$的所有解$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$有$m \le x_1(t) \le \frac{M}{k}$, $x_2(t) \le M$, $m \le x_3(t) \le M$成立, $t \ge T_0$. 这里T_0 与初值$(x_1(0^+), x_2(0^+), x_3(0^+))$ 有关, 则系统(3.1)称为持续生存的.

定理3.3.1 假定

$$E < re^{-w\tau_1} - d_1 - d_2M + k\beta\frac{((a-\beta x_3^*)+bp) + \sqrt{((a-\beta x_3^*)+bp)^2 + 4(a-\beta x_3^*)bp/\left(e^{(a-\beta x_3^*)\tau} - 1\right)}}{2b}$$

则存在一个正的常量q, 使得系统(3.2)的每一个正解$(x_1(t), x_3(t))$满足

$$x_3(t) \ge q$$

对于充分大的t成立. 这里x_3^*由下面的方程决定的:

$$\begin{aligned} &\frac{2b}{k\beta}\left(re^{-w\tau_1} - d_1 - E - d_2M\right) \\ = \;& ((a-\beta x_3^*) + bp) + \sqrt{((a-\beta x_3^*)+bp)^2 + 4(a-\beta x_3^*)bp/\left(e^{(a-\beta x_3^*)\tau} - 1\right)}. \end{aligned}$$

证明 系统(3.2)的第一个方程可写成

$$\begin{aligned}\frac{dx_3(t)}{dt} &= \left(re^{-w\tau_1}+\frac{k\beta x_1(t)}{1+cx_1(t)+dx_1^2(t)}-d_1-E-d_2x_3(t)\right)x_3(t)\\ &\quad -re^{-w\tau_1}\frac{d}{dt}\int_{t-\tau_1}^{t}x_3(u)\,du.\end{aligned}\tag{3.20}$$

考虑系统(3.2)的任一正解$(x_1(t),x_3(t))$. 根据(3.20), $V(t)$被定义为

$$V(t)=x_3(t)+re^{-w\tau_1}\int_{t-\tau_1}^{t}x_3(u)\,du.\tag{3.21}$$

我们沿着(3.2)的解求$V(t)$的导数

$$\frac{dV(t)}{dt}=\left(re^{-w\tau_1}+\frac{k\beta x_1(t)}{1+cx_1(t)+dx_1^2(t)}-d_1-E-d_2x_3(t)\right)x_3(t).\tag{3.22}$$

由引理3.1.3, (3.22)可写成

$$\frac{dV(t)}{dt}>\left(re^{-b\tau_1}+k\beta x_1(t)-d_1-E-d_2M\right)x_3(t).\tag{3.23}$$

由

$$\begin{aligned}E &< re^{-w\tau_1}-d_1-d_2M\\ &\quad +k\beta\frac{((a-\beta x_3^*)+bp)+\sqrt{((a-\beta x_3^*)+bp)^2+4(a-\beta x_3^*)bp/\left(e^{(a-\beta x_3^*)\tau}-1\right)}}{2b}\end{aligned}$$

易知, 存在充分小的$\varepsilon>0$使得

$$\begin{aligned}re^{-w\tau_1} &> -k\beta\frac{((a-\beta x_3^*)+bp)}{2b}-k\beta\varepsilon+d_1+E+d_2M\\ &\quad -k\beta\frac{\sqrt{((a-\beta x_3^*)+bp)^2+4(a-\beta x_3^*)bp/\left(e^{(a-\beta x_3^*)\tau}-1\right)}}{2b}\end{aligned}\tag{3.24}$$

我们称对任意的$t_0>0$, 使得对所有的$t>t_0$, 有$x_3(t)<x_3^*$成立. 假定上述判断不成立. 即存在一个$t_0>0$使得对所有的$t>t_0$, 有$x_3(t)<x_3^*$. 对所有的$t>t_0$, 由(3.2)的第二个方程可得

$$\frac{dx_1(t)}{dt}<((a-\beta x_3^*)-bx_1(t))x_1(t).\tag{3.25}$$

对所有的$t>t_0$, 考虑下面的脉冲比较系统:

$$\begin{cases}\frac{dv(t)}{dt}=((a-\beta x_3^*)-bx_1(t))x_1(t), & t\neq n\tau,\\ \Delta z(t)=p, \quad t=n\tau,\end{cases}\tag{3.26}$$

由引理3.1.5, 可得

$$\widetilde{v(t)}=\frac{(a-\beta x_3^*)\,v^*\exp\left((a-\beta x_3^*)(t-n\tau)\right)}{(a-\beta x_3^*)-bv^*+bv^*\exp\left((a-\beta x_3^*)(t-n\tau)\right)},\qquad n\tau<t\le(n+1)\tau,$$

是(3.26)的全局渐进稳定的唯一正周期解, 这里

$$v^*=\frac{((a-\beta x_3^*)+bp)+\sqrt{((a-\beta x_3^*)+bp)^2+4(a-\beta x_3^*)\,bp/\left(e^{(a-\beta x_3^*)\tau}-1\right)}}{2b}$$

由脉冲微分方程的比较定理, 可知存在t_1 ($>t_0+\tau_1$)使得对$t\ge t_1$, 有下面的不等式成立

$$x_1(t)\ge\widetilde{v(t)}+\varepsilon. \tag{3.27}$$

因此, 对所有的$t\ge t_1$,

$$x_1(t)\ge v^*+\varepsilon. \tag{3.28}$$

为方便起见, 记$\sigma=v^*+\varepsilon$. 由(3.24)得

$$re^{-b\tau_1}+k\beta\sigma>d_1+E+d_2M.$$

由(3.22)和(3.28), 可得

$$V'(t)>x_3(t)\left(re^{-w\tau_1}+k\beta\sigma-d_1-E-d_2M\right) \tag{3.29}$$

对所有的$t>t_1$成立. 记

$$x_3^m=\min_{t\in[t_1,t_1+\tau_1]}x_3(t).$$

我们下面表明, 对所有的$t\ge t_1$, 有$x_3(t)\ge x_3^m$. 假定不然, 则存在一个$T_0>0$, 使得$x_3(t)\ge x_3^m$ 对$t_1\le t\le t_1+\tau_1+T_0$, $x_3(t_1+\tau_1+T_0)=x_3^m$和$x_3'(t_1+\tau_1+T_0)<0$. 因此, 系统(3.2)的第一个方程和(3.24)可推出

$$\begin{aligned}x_3'(t_1+\tau_1+T_0)&=re^{-b\tau_1}x_3(t_1+T_0)+\frac{k\beta x_3(t_1+\tau_1+T_0)\,x_1(t_1+\tau_1+T_0)}{1+cx_1(t_1+\tau_1+T_0)+dx_1^2(t_1+\tau_1+T_0)}\\&\quad-(d_1+E)\,x_3(t_1+\tau_1+T_0)-d_2x_3^2(t_1+\tau_1+T_0)\\&\ge\left(re^{-w\tau_1}+\beta\sigma-d_1-E-d_2M\right)x_3^m>0\end{aligned} \tag{3.30}$$

矛盾. 因此, 对于所有的$t\ge t_1$有$x_3(t)\ge x_3^m$, 又由(3.22)和(3.25)可推得

$$V'(t)>\left(re^{-w\tau_1}+\beta\sigma-d_1-E-d_2M\right)x_3^m>0 \tag{3.31}$$

对所有的$t\ge t_1$成立.

这蕴含着当$t \to \infty$时, $V(t) \to \infty$, 这与$V(t) \le M\left(1 + a\tau_1 e^{-b\tau_1}\right)$矛盾.

由上面的论断, 我们考虑两种情形. 第一种情形, 对所有充分大的t, $x_3(t) \ge x_3^*$. 第二种情况, 对充分大的t, $x_3(t)$关于x_3^*是振荡的.

定义

$$q = \min\left\{\frac{x_3^*}{2},\ q_1\right\}, \tag{3.32}$$

其中$q_1 = x_3^* e^{-(d_1+E+d_2M)\tau_1}$.下面证明对所有充分大的$t$, $x_3(t) \ge q$. 在第一种情行下, 结论显然成立. 第二种情况, 设$t^* > 0$, $\xi > 0$, 对所有的$t^* < t < t^* + \xi$有$x_3(t^*) = x_3(t^* + \xi) = x_3^*$和$x_3(t) < x_3^*$成立, 这里$t^*$是充分大且使得

$$x_3(t) > \sigma,\ t^* < t < t^* + \xi$$

成立, 则$x_3(t)$一致连续. 系统(3.2)的正解是最终有界的且$x_3(t)$ 不受脉冲控制的影响. 因此, 存在一个$T(0 < t < \tau_1$且T依赖于t^*的选择), 使得对$t^* < t < t^* + T$, 有$x_3(t^*) > \frac{x_3^*}{3}$. 若$\xi < T$, 则不需要证明. 考虑情形$T < \xi < \tau_1$. 由于$x_3'(t) > -(d_1 + E + d_2M)\,x_3(t)$且$x_3(t^*) = x_3^*$, 很显然$x_3(t) \ge q_1$对$t \in [t^*,\ t^* + \tau_1]$成立. 接着, 对上述论断继续分段证明下去. 我们知道$x_3(t) \ge q_1$对$t \in [\,t^* + \tau_1,\ t^* + \xi]$成立. 由于区间$t \in [\,t^*,\ t^* + \xi]$是任意选取的(只需$t^*$充分大). 我们推断, 对所有充分大的$t$, 有$x_3(t) \ge q$. 第二种情形中. 纵观上述讨论, q 的选取与正解无关, 并且我们已经证明了(3.2)的任意正解对充分大的 t, 满足$x_3(t) \ge q$. 定理证明完毕.

定理3.3.2 假设条件

$$\begin{aligned} E \ &<\ re^{-w\tau_1} - d_1 - d_2M \\ &\quad + k\beta\frac{((a-\beta x_3^*)+bp)+\sqrt{((a-\beta x_3^*)+bp)^2+4\,(a-\beta x_3^*)\,bp/\left(e^{(a-\beta x_3^*)\tau}-1\right)}}{2b} \end{aligned}$$

成立, 则系统(3.1)是持久的.

证明 设$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$是系统(3.1)的任意解, 由系统(3.2)的第一个方程和定理3.3.1, 得

$$\frac{dx_1(t)}{dt} \ge x_1(t)\,(a - \beta M - bx_1(t))\,. \tag{3.33}$$

由定理3.2.1的证明可得

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) \ge l, \tag{3.34}$$

其中

$$l = \frac{((a-\beta M)+bp)+\sqrt{((a-\beta M)+bp)^2+4\,(a-\beta M)\,bp/\left(e^{(a-\beta M)\tau}-1\right)}}{2b} - \varepsilon.$$

由定理3.2.1, 系统(3.1)的第二个方程变为

$$\frac{dx_2(t)}{dt} \geq r\left(l - e^{-b\tau_1}M\right) - wx_2(t).$$

易得

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) \geq \delta,$$

其中$\delta = \frac{r\left(l-e^{-w\tau_1}M\right)}{w} - \varepsilon$. 由定理3.3.1和上面的讨论可得系统(3.1)是持久的. 证毕.

结　论

脉冲微分方程是描述某些运动状态在固定或不固定时刻的快速变化或跳跃, 它是对自然界发展过程更真实的反映. 生物种群系统的许多现象都可以用脉冲微分方程来刻画, 如某些动物的季节性出生, 种群生态系统中对种群的瞬时捕获等. 对生物种群的控制也可采取脉冲控制.

近年来, 脉冲控制在生物模型上的应用引起了人们的极大兴趣. 利用脉冲微分方程控制种群动态系统平衡点的稳定性, 对于种群资源的开发与合理利用具有重要的生态意义. 当常微分种群系统平衡点不稳定时, 对某一种群采取适当的脉冲控制, 使平衡点达到渐近稳定, 使得食饵与捕食者种群最终能够持续生存, 并稳定在这一平衡点上, 从而保持生态平衡, 实现种群资源的可持续发展. 利用脉冲控制策略来研究多种群系统的稳定性、持续性仍然是一项非常有意义的工作.

由于拓扑度理论、不动点理论, 是研究非线性问题的重要手段, 最近二十多年来, 拓扑度理论、不动点理论及临界点理论, 通过一大批数学工作者的努力, 已取得长足的发展. 今后, 我们将利用这些理论的最新成果, 来研究更加一般的微分方程, 差分方程和脉冲微分方程的周期解的存在性及其稳定性, 利用脉冲的控制作用来研究生物模型的应用.

参考文献

[1] V. Millman, A. Myshkis, On the stability of motion in the presence of impulses [J]. Sib. Math. J, 1960, 1(2): 233 - 237.

[2] 马知恩, 种群生态学的数学建模与研究[M]. 安徽教育出版社, 1996.

[3] 陈兰荪, 宋新宇, 陆征一, 数学生态学模型与研究方法[M]. 四川科学技术出版社, 2003.

[4] X. Li, P.X. Weng, Impulsive stabilization of two kinds of second-order linear delay differential equations [J]. J. Math. Anal. Appl. 291 (2004) 270 - 281.

[5] A.Z. Weng, J.T. Sun, Impulsive stabilization of second-order delay differential equations [J]. Nonlinear Anal. 8 (2007) 1410 - 1420.

[6] L.P. Gimenes, M. Federson, Existence and impulsive stability for second order retarded differential equations [J]. Appl. Math. Comput. 177 (2006) 44 - 62.

[7] X.Z. Liu, G. Ballinger, Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses [J]. Nonlinear Anal. 51 (2002) 633 - 647.

[8] X.X. Liu, B.G. Xu, Exponentially asymptotic stability with impulsive effect for delay differential systems [J]. Impuls. Dyn. Syst. Appl. 2 (2004) 59 - 66.

[9] Y. Zhang, J.T. Sun, Strict stability of impulsive functional differential equations [J]. J. Math. Anal. Appl. 301 (2005) 237 - 248.

[10] D. Bainov, M. Dimitrova, Sufficient condition for oscillation of bounded solutions of a class impulsive differential equations of second order with a constant delay [J]. Georgian Math. J. 6 (2) (1999) 99 - 106.

[11] Y. Zhang, J. Sun, Boundedness of the solutions of impulsive differential systems with time-varying delay [J]. Appl. Math. Comput. 154 (2004) 279 - 288.

[12] A. Anokhin, L. Berezansky, E. Braverman, Exponential stability of linear delay impulsive differential equations [J]. J. Math. Anal., Appl. 193 (1995) 923 - 941.

[13] G. Ballinger, X. Liu, Existence and uniqueness results for impulsive delay differential equations [J]. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. 5 (1999) 579 - 591.

[14] G. Ballinger, X.Z. Liu, Practical stability of impulsive delay differential equations and applications to control problems [M]. Optimization Methods and Applications, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[15] X.Z. Liu, Stability results for impulsive differential systems with applications to population growth models [J]. Dyn. Stab. Syst. 9 (1994) 163 - 174.

[16] Y. Kuang, Delay Differential Equations with Applications in Populational Dynamics [M]. Academic Press, San Diego, 1993.

[17] Z.J. Liu, R.H. Tan, Impulsive harvesting and stocking in a Monod-Haldane functional response predator-prey system [J]. Chaos, Solitons and Fractals 34 (2007) 454 - 464.

[18] W.G. Aiello, H.I. Freedman, A time-delay model of single-species growth with stage-structured [J]. Math. Biosci. 101 (1990) 139.

[19] W. Wang, G. Mulone, F. Salemi, V. Salone, Permanence and stability of a stage-structured predator-prey model [J]. J. Math. Anal. Appl. 262 (2) (2001) 499 - 528.

[20] J.J. Jiao, X.Z. Meng, L.S. Chen, A stage-structured Holling mass defence predator-prey model with impulsive perturbations on predators [J]. Appl. Math. Comput. 189 (2007) 1448 - 1458.

[21] Z.H. Lu, S.J. Gang, L.S. Chen, Analysis of an SI epidemic with nonlinear transmission and stage structure [J]. Acta Math. Sci. 4 (2003) 440 - 446.

[22] J.J. Jiao, G.P. Pang, L.S. Chen, G.L. Luo, A delayed stage-structured predator-prey model with impulsive stocking on prey and continuous harvesting on predator [J]. Appl. Math. Comput. 195 (2008) 316 - 325.

[23] G. Ballinger, X. Liu, Permanence of population growth models with impulsive effects [J]. Math Comput Modell. 26 (1997) 59 - 72.

[24] W. Feng, Impulsive stabilization of second order differential equations [J]. J. South China Normal Univ. Natur. Sci. Ed. 1 (2001) 16 - 19.

[25] W. Feng, Y. Chen, The weak exponential asymptotic stability of impulsive differential system [J]. Appl. Math. J. Chinese Univ. 1 (2002) 1 - 6.

[26] L. Berezansky, E. Braverman, Impulsive stabilization of linear delay differential equations [J]. Dynam. Systems Appl. 5 (1996) 263 - 276.

[27] X. Liu, Impulsive stabilization and applications to population growth models [J]. Rocky Mountain J. Math. 25 (1995) 381 - 395.

[28] X. Liu, Impulsive stabilization of nonlinear systems, IMA J. Math. Control Inform [J]. IMA J. Math. Control Inform. 10 (1993) 11 - 19.

[29] X. Liu, Stability results for impulsive differential systems with applications to population growth models [J]. Dynam. Stability Systems 10 (1995) 5 - 12.

[30] A. Anokhin, L. Berezansky, E. Braverman, Exponential stability of linear delay impulsive differential equations [J]. J. Math. Anal. Appl. 193 (1995) 923 - 941.

[31] X. Li, Impulsive stabilization of linear differential system [J]. J. South China Normal Univ. Natur. Sci. Ed. 1 (2002) 52 - 56.

[32] Y.K. Li, Impulsive stabilization of functional differential equations with infinite delay [J]. Appl. Math. Lett. 16 (2003) 695 - 701.

[33] L. Berezansky, L. Idels, Exponential stability of some scalar impulsive delay differential equation [J]. Commun. Appl. Math. Anal. 2 (1998) 301 - 309.

[34] B. Liu, X.Z. Liu, K. Teo, Q. Wang, Razumikhin-type theorems on exponential stability of impulsive delay systems [J]. IMA J. Appl. Math. 71 (2006) 47 - 61.

[35] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas, Higher order impulsive functional differential equations with variable times, [J]. Dyn. Syst. Appl. 12 (2003) 383 - 392.

[36] Q. Wang, X.Z. Liu, Exponential stability for impulsive delay differential equations by Razumikhin method [J]. J. Math. Anal. Appl. 309 (2005) 462 - 473.

[37] Y.N. Xiao, L.S. Chen, On an SIS epidemic model with stage-structure [J]. J. Syst. Sci. Complex. 16 (2003) 275 - 288.

[38] T.K. Kar, Chaudhuri K.S. Wang, Harvesting in a two-prey one-predator fishery: a bioeconomic model [J]. ANZ-IAM J. 45 (2004) 443 - 56.

[39] A. Lakmeche, O. Arino, Bifurcation of non trivial periodic solutions of impulsive differential equations arising chemotherapeutic treatment [J]. Dynam Contin Discrete Impuls Syst. 7 (2000) 265 - 87.

[40] F.D. Chen, Existence, uniqueness and stability of periodic solution for a nonlinear prey-competition model with delays [J]. J. Comput. Appl. Math. 194 (2) (2006) 368 - 387.

[41] L.L. Wang, W.T. Li, Periodic solutions and permanence for a delayed nonautonomous ratio-dependent predator-prey model with Holling type functional response [J]. J. Comput. Appl. Math. 162 (2004) 341 - 357.

[42] F.D. Chen, X.D. Xie, Permanence and extinction in nonlinear single and multiple species system with diffusion [J]. Appl. Math. Comput. 17 (1) (2006) 410 - 426.

[43] Z. Liu, R. Yuan, Stability and bifurcation in a delayed predator-prey system with Beddington - DeAngelis functional response [J]. J. Math. Anal. Appl. 296 (2004) 521 - 537.

[44] Z.P. Qiu, J. Yu, Y. Zou, The asymptotic behavior of a chemostat model with the Beddington - DeAngelis functional response [J]. Math. Biosci. 187 (2004) 175 - 187.

[45] X.N Liu, L.S. Chen, Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator [J]. Chaos, Soliton Fract. 16 (2003) 311 - 320.

[46] V. Lakshmikantham, D.D. Bainov, P. Simeonov, Theory of Impulsive Differential Equations [M]. World scientific, Singapore, 1989.

[47] D. Bainov, P. Simeonov, Impulsive differential equations: periodic solutions and applications [M]. Longman 66 (1993).

[48] Y. Kuang, Delay Differential Equation with Application in Population Dynamics [M]. Academic Press, New York, 1987, pp. 67 - 70.

[49] L.E. Caltagirone, R.L. Doutt, Global behavior of an SEIRS epidemic model with delays, the history of the vedalia beetle importation to California and its impact on the development of biological control [J]. Ann. Rev. Entomol. 34 (1989) 1 - 16.

[50] L.Z. Dong, L.S. Chen, L.H. Sun, Extinction and permanence of the predator-prey system with stocking of prey and harvesting of predator impulsively [J]. Math. Methods Appl. Sci. 29 (2006) 415 - 425.

致 谢

本文是在我尊敬的导师黄灿云副教授的悉心指导和无微不至的关怀下完成的,他严谨求实的治学态度、乐此不疲的工作热情令我众生受益. 近三年来, 黄老师不论在学习上还是在生活上都给我提供了很多帮助; 在此, 谨向黄老师表示诚挚的谢意和崇高的敬意!

在研究生学习期间, 我院霍海峰教授和孙建平教授给我莫大的的指导和帮助,衷心感谢他们! 感谢女友一直以来对我无微不至的关爱, 她和我在学业上的互相探讨和鼓励是我学习的动力. 感谢三年来与我朝夕相处的同学和师弟师妹们!

特别要感谢我的家人, 尤其是我的父母. 多年来, 他们一直支持着我, 让我有一个温馨的家庭环境; 他们辛勤劳动, 节俭生活, 为我创造良好的学习条件. 谨以此文献给他们, 作为对他们的报答!

由于作者才疏学浅, 错误之处在所难免, 敬请各位专家和老师批评指正, 学生深表谢意!

赵立春

2009年 5 月于兰州理工大学

附 录

攻读学位期间所发表的学术论文：

[1] 黄灿云, 赵立春, 赵闽, 一类二阶时滞微分方程的脉冲指数稳定性, 甘肃科学学报, 2009, Vol. 21 (2) 10-13.

[2] Can-Yun Huang, Min Zhao and Li-Chun Zhao, Permanence of Periodic Predator-Prey System with two Predators and Stage Structure for Prey, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, doi:10.1016/j.nonrwa.2009.01.001.

[3] 廖成斌, 赵立春, 一类二阶时滞微分方程的脉冲稳定性, 兰州交通大学学报（已发表）.