

摘要

复杂网络是研究复杂系统的一门新兴学科,近几年受到国内外学者的广泛关注。任何复杂系统都可以从实际背景出发,根据不同的研究角度,抽象成为由相互作用的个体组成的网络。网络无处不在,遍及自然界、生物系统和人类社会。其中深具代表性并广为人们熟知的网络包括因特网、万维网、超文本链接网络、电力网、铁路网、公路网、航空网、蛋白质相互作用网、神经网络、人际关系网等等。研究这些网络不仅对人们的工作和生活具有重要的现实意义,而且对了解自然界和生物系统具有深远的科学意义。

研究复杂网络的最终目的是了解网络的结构对发生于其上的动力学行为的影响。同步是其中的一项重要研究内容。关于复杂网络上动力系统同步的研究经历了网络的整体同步规律和同步稳定性分析、网络的结构特征量与网络同步能力之间的关系、提高网络同步能力的各种方法、复杂网络同步现象的应用这几个发展阶段。本文主要调研了近几年来关于提高网络同步能力的各种方法。一般来说,提高同步能力的方法可以分为两类:调节网络结构和调节网络耦合方式的方法。前者通过减少网络的平均距离或者去掉网络的最大介数等方法来达到提高网络的同步能力的目的,后者则是保持网络的结构不变,通过改变网络的耦合方式来达到提高网络同步能力的目的。这里我们通过充分的调研,提出一种新的提高网络同步能力的方法,找到了一种可以使网络同步达到最优化的耦合方法。

在本文中,我们主要研究了在生长无标度网络的同步问题。我们提出了一种基于节点年龄特点且只有一个可调参数的非对称的耦合方式。尽管节点间的耦合是非对称的,但可以保证的是在我们提出的耦合方式下耦合矩阵特征值全为非负实数。而且当可调参数趋向于无穷大时,耦合矩阵特征值之比等于1。所以在这种耦合方式作用下,网络的同步能力可以达到最优化。

以上研究成果已经分别发表于: *Phy. Rev. E* 76, 057103(2007)。

关键词: 复杂网络 同步 耦合矩阵 特征值 平均距离 度分布

Abstract

Complex networks have been considered as an important approach for describing and understanding complex systems. Any complex system is composed of interacted individuals, which can be naturally represented by graphs with individuals denoted by nodes and interactions by links. From this point of view, complex networks are ubiquitous, ranging from nature and biological system to society. The well-known and extensively studied networks include Internet, World Wide Web, HTTP, the power grid, airport networks, protein-protein interaction networks, collaboration networks, epidemic spreading networks, etc. In the past few years, we have witnessed a great devotion by scientists to understand the underlying mechanisms of complex networks together with dynamical process taking place on them.

The ultimate goal of studying complex networks is to understand how topological properties affect the dynamical processes taking place on them. The synchronization of dynamical systems on networks is an important issue. The several stages it has gone through include the synchronization phenomena on complex networks and the synchronization stability analysis, the investigation of the relationship between network ingredients and network synchronizability, the method that improve the network synchronizability and the application of network synchronization. The main job is research on the methods which improving the synchronization of the network. Generally speaking, these methods can be divided into two classes: the modification of the network structure and the regulation of the coupling pattern. In the former class, networks are modified either to shorten the average distance or to eliminate the maximal betweenness. In the latter case, the network structure is kept unchanged, while the coupling matrix is elaborately designed to improve the synchronizability. Here, we propose a new method which through regulate the couple patten of the network in order to improve network synchronization, and we found in this method, the synchronizability of network can

be achieve the optimum case.

In the paper, we study the sunchronization of growing scale-free networks. An asymmetrical age-base coupling method is proposed with only one free parameter. Although the coupling matrix is asymmetric, our coupling method could guarantee that all the eigenvalues are non-negative reals. The eigenration R will approach 1 in the large limit of the free parameter. So in this method of the couple pattern, the synchronizability of network can be achieve the optimum case.

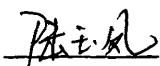
Keywords : complex networks; synchronization; coupling matrix; eigenvalue; average distance; degree distribution

中国科学技术大学学位论文原创性和授权使用声明

本人声明所呈交的学位论文,是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

本人授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权,即:学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,允许论文被查阅和借阅,可以将学位论文编入有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

作者签名: 

2008年 6月 1 日

第1章 绪论

1.1 复杂网络上动力系统同步研究的意义

说到网络,人们首先想到的是鱼网:由一些经纬线形成的无数方格子,并且经纬交叉的地方被固定,这是人们最熟悉也最直观的一种物质网络。随着社会的发展,网络的概念逐步得到引申与扩展,出现了各种具有抽象意义的网络的概念,比如人际关系网。人际关系网是将每一个人作为一个节点,如果两个人之间存在某种关系,比如相识就连一条边。很明显,这样的网络比鱼网要复杂得多,仅从结构上看,鱼网是一种各向同性的均质网络,并且经纬线交叉形成的交点都与四条线相连,而在人际关系网中,由于不同的人的交际能力是不同的,导致网络中连接到每个节点上的边的数目也不尽相同。人际关系网比鱼网这种规则网络要复杂得多。

随着人类认识能力的进一步提高,人们发现自然界、社会生活中、生物系统中许多大量的复杂系统都可以通过网络的概念加以描述^[14]。一个典型的网络是由许多节点(node)与连接两个节点之间的边(edge)组成的,其中节点用来代表真实系统中不同的个体,而边则用来表示个体间的关系,往往是两个节点之间具有某种特定的关系则连一条边,反之则不连边,有边相连的两个节点被看作是相邻的。例如,神经系统可以看作是由大量神经细胞通过神经纤维相互连接形成的网络^[7];计算机网络可以看作是自主工作的计算机通过通信介质如光缆、双绞线、同轴电缆等相互连接形成的网络^[8];类似的还有电力网络^[7]、社会关系网络^[7,9-10]、交通网络^[11]等等。

对网络最早进行研究的是数学家,其基本理论是图论。由于人们认识的局限,经典的图论总是倾向于用某种规则的拓扑结构模拟真实网络^[12-13],到了二十世纪五十年代末期,数学家们想出了一种新的构造网络的方法,在这种方法下,两个节点之间连边与否不再是确定的事情,而是根据一个概率决定。数学家把这样生成的网络叫做随机网络^[14-16],它在接下来的近半个世纪里一直被很多科学家认为是描述真实系统最适宜的网络^[17]。直到最近几年,由于计算机数据处理和计算能力的飞速发展,科学家们发现大量的真实网络既不是规则网络,也不是

随机网络，而是具有与前两者皆不同的统计特征的网络，这样的一些网络被科学家们叫做复杂网络(complex networks)。1998 年和 1999 年小世界网络(small-world networks)^[18-19] 和无标度网络(scale-free networks)^[20-21] 这两个重要的复杂网络模型建立后，复杂网络理论更是得到了迅猛的发展。

对于物理学家而言，研究复杂网络的终极目标是理解网络的拓扑结构对复杂系统物理过程的影响。复杂网络上动力系统的同步是其中一项重要的研究课题。同步是指性质全同或相近的两个或多个动力系统，通过系统间的相互作用，使得在不同的初始条件下各自演化的动力系统其状态逐步接近，最后达到全同的状态。同步现象在自然界中非常常见。早在三百多年前，科学家惠更斯就在给父亲的信中提到他卧病在床的几天中观察到挂在墙上的两只摆钟会出现钟摆摆动趋于同步的现象，并正确地理解了这种现象发生的原因是它们通过悬挂其上的横梁相互作用^[22]。除了这种两个个体相互作用产生的同步现象之外，很多重要的同步现象出现在多体系统中^[23,24]，例如夏日夜晚青蛙的齐鸣，萤火虫的同步发光，心肌细胞和大脑神经网络的同步^[25-27]，剧场中观众鼓掌频率的逐渐同步等等^[28]。多体系统自发同步的现象，典型如萤火虫的同步发光，早在 280 年前就有比较正式的报道^[29]，而且更早就作为浪漫场景的代表见诸小说，但是一直缺乏合理的科学解释。早期的解释千奇百怪，甚至眼睑的颤搐和岸边的湿气都一度被认为是这种现象发生的缘由。直到四十年前 Buck 通过实验证明萤火虫闪烁的频率会受到周围发光体闪烁频率的影响^[30]，对于自组织形成的同步现象的研究才开始步入正途，这也同时开创了网络同步研究的先河。Buck 相隔半个世纪的两篇题目相同的综述^[31,32] 是这个领域坎坷发展的最佳见证。

在网络的概念被引入同步研究之前，大量的关于耦合系统同步的讨论，不论是针对两个振子还是无穷多个振子，也不论是针对极限环系统还是混沌系统，一个基本的假设是振子间的相互作用是全局的，并且动力学系统是全同的^[33]。如果将每一个动力学系统用一个点来表示，存在相互作用的两个系统间连一条边，就形成了一个动力网络。从这个角度看，因为任何两个振子之间都存在相互的耦合作用，以前的大部分研究就等价于完全图(complete graph)上的同步问题。另外，针对规则网络(regular network)和随机网络(random network) 的研究也是比较深入的。但是，最近大量实证研究却表明，从 Internet^[9] 到 WWW^[34]，从性伴侣关系^[9] 到合作网络^[35]，从神经网络^[36]到蛋白质相互作用网络^[37]，从语义关系网^[38] 到数学关系网^[39] ……丰富的真实网络具有完全不同于规则网络和随机网络

的复杂结构。因此，一个自然的问题就是这些结构上的特征是如何影响网络的同步行为的。复杂网络上动力系统同步的研究也是围绕这个中心问题展开的。

1.2 复杂网络的结构特征及其数学模型

1.2.1 复杂网络的结构特征

为了更好的了解复杂网络，这里我们首先介绍几个常用的用来描述网络结构特点的特征量。它们分别是平均距离(average distance)、簇系数(clustering coefficient)、度分布(degree distribution)、介数(betweenness)等，下面我们就来介绍它们的定义。

平均距离：网络中任何两节点间的距离是指从其中一个节点出发到达另外一个节点所要经过的边的最少数目。将网络中任何两节点对的距离做平均就得到了网络的平均距离。

簇系数：单个节点簇系数定义为它所有的邻居节点中仍然是邻居占总的可能性的百分比。举个例子来说，如果某个节点有 5 个邻居，如果它们之间都是邻居，那么它们之间就有 10 条边，但实际上这些节点间只有 6 条边，那么该点的簇系数就是 $6/10=0.6$ 。将网络中所有节点的簇系数做平均，就得到了网络的簇系数。

度分布：某个节点的度表示连接到该节点上的边的数目，也就是该节点的邻居数。通常情况下，网络中不同节点的度并不相同，因此网络中度的分布规律也是刻画网络特点的一个重要参量。

最大介数：某个节点的最大介数，指的是网络中的最短路径经过该节点的次数。

当然，描述网络结构的特征量还有很多，这里就暂不一一介绍，在使用到它们的地方再给出详细的说明。

1.2.2 复杂网络的四个基本数学模型

随着社会的发展，人们惊讶地发现：大量真实网络的结构具有异常独特的

统计特性，人们一时难以理解这些复杂的结构，因此称这些网络为复杂网络。经过数百年的研究，科学家们提出了众多模型来描述复杂网络，例如规则网络模型，随机网络模型，小世界网络模型，无标度网络模型，偏好依附与随机依附竞争网络模型，信息不完全时的网络生长模型，没有偏好依附的自组织无标度模型或者专门针对合作网络或者含权网络的模型，这里我们重点介绍其中应用最广泛，最具代表性的主要有以下四个基本模型：规则网络模型，随机网络模型，WS 小世界网络模型和 BA 无标度网络模型。

规则网络。规则网络在图论中有很严格的定义，即指每个节点度都相同的图。这里我们介绍一种很具代表性的规则网络近邻耦合网络，见图 1.1 (a) 在这样的网络中，节点被排成一圈，首先最近邻的节点被连接起来，然后再将次近邻的节点连接起来……直到距离为 m 的节点连接起来，在该图中 $m=2$ 。对于 N 节点的近邻耦合网络，网络平均距离 $L \sim N/4m$ ，即网络的平均距离随着网络规模的增大线性增长； m 为 2 的近邻耦合网络的簇系数 $C=0.5$ ，比较大；所有节点的度都相同，即度分布满足 δ 函数的形式。

随机网络。随机网络就是随机图，见图 1.1 (b) 该网络可以通过这样的方式建立：首先确定网络中的节点数目 N ，然后以概率 p 连接网络中的任意两节点，最后所形成的网络中大约有 $pN(N-1)/2$ 条边。在随机网络中，网络的平均距离 $L = \log N / \log [p(N-1)]$ ，簇系数 $C=p$ ，度分布满足泊松分布(Poisson distribution)。

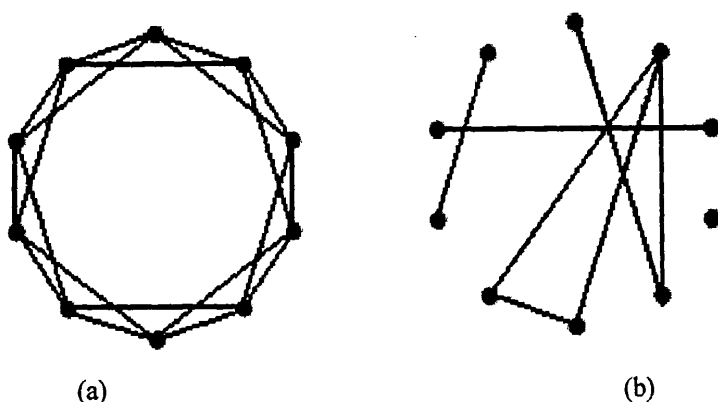


图1.1 几种网络构型：(a)近邻耦合网络，(b)随机网络。[参考文献40]

WS 小世界网络模型^[18,19] 由于绝大多数真实网络具有大的簇系数和短的平均距离, 因此既不同于规则网络, 又异于随机网络。为了更好地刻画真实网络, 1998 年 Watts 和 Strogatz 提出该网络模型: 从具有 N 个节点, 配分数为 z 的最近邻环网开始, 对于每一条环网上的边, 以概率 p 断开再随机重连到其它节点上去, 在这个操作过程中不允许边的重连(连接两个节点的边不止一条)和自连(边的两端连接到同一个节点上)。图1.2 展示了重连概率 p 从 0 到 1 增加, 网络结构的变化: 当 $p=0$ 时, 网络是规则的近邻耦合网络; p 的增加使得网络中存在一些“捷径(shortcut)”, 这些捷径的存在使得网络的平均距离显著降低, 但由于大部分的边还是连接到近邻节点, 所以网络的簇系数依然保持很大; 当 $p=1$ 时, 网络变为随机网络。图1.3 画出了网络的平均距离和簇系数随重连概率 p 的变化规律, 可以看到 p 在大约 0.001 到 0.1 的变化范围内, 网络的平均距离很小, 但簇系数依然保持很大, 我们称在这个范围内的网络为小世界网络。

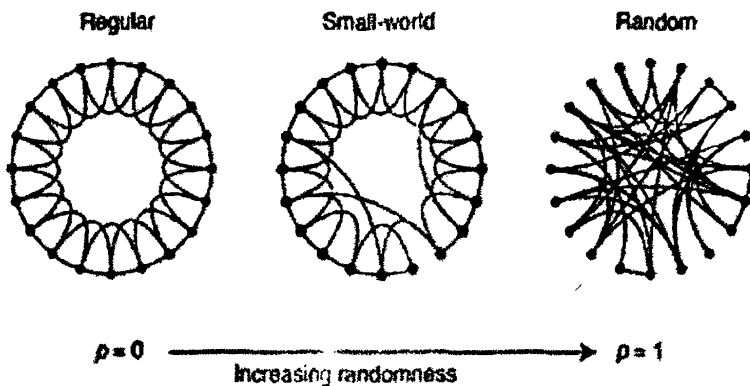


图1.2 WS小世界网络模型, 从左到右重连概率 p 由 0 增加到 1。随着重连概率的增加, 网络由近邻耦合网络变为小世界网络再变为随机网络。[参考文献7]

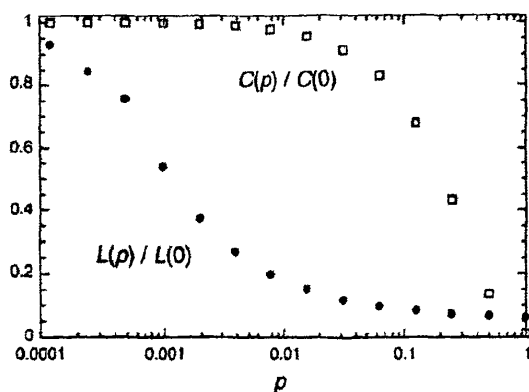


图1.3 WS 小世界网络的平均距离和簇系数随重连概率 p 的变化[参考文献7]

BA 无标度网络模型^[20,21] Barabási 和 Albert 认为网络规模的不断增加和新增加的节点伸出的边有偏好地连接到已有节点上是网络具有无标度特性的根本原因,根据这两个原则他们在 1999 年提出了一个无标度网络模型。在该模型中,网络初始时具有 m_0 个节点,以后每一时步增加一个新节点,新节点在网络中已经存在的节点中选择 m 个($m \leq m_0$)并与之相连,其中节点 i 被选中的概率与它的度 k_i 成正比。可以证明,以这样的机制生成的无标度网络,当节点数 $N \rightarrow \infty$ 时,其度分布的幂指数 $\gamma \rightarrow 3$, 平均距离 $l \sim \ln(N)$, 簇系数 $C \sim N^{-0.75}$

下面我们比较一下根据这四种网络模型生成的网络与真实网络的主要性质的异同,如表 1.4 所示。由表格得知,真实网络具有短平均距离,大簇系数和幂律分布。后来,科学家们为了更好的再现真实网络的三大特征建立了许多模型,但由于 WS 小世界网络和 BA 无标度网络各捕捉到了真实网络三个主要性质中的两个,而且这两种网络模型规则简洁并抓住了复杂网络的基本性质,到目前依然是使用最普遍的复杂网络模型。

表 1.4 各种网络主要拓扑特征一览

	平均距离	簇系数	度分布
规则网络	大	大	δ 函数分布
随机网络	小	小	泊松分布
WS 小世界网络	小	大	指数分布
BA 无标度网络	小	小	幂率分布
部分真实网络	小	大	近似幂率分布

1.3 复杂网络同步的数学描述

如果在网络的每个节点上加上一个动力系统，这个动力系统既可以是极限环也可以是混沌系统；而让有边相连的两个节点的动力系统之间存在相互的耦合作用，就形成了一个动力网络。严格地说，设网络有 N 个节点，第 i 个节点在 t 时刻的 m 维状态变量是 $\mathbf{x}_i$ ，单个节点在不考虑耦合作用时所满足的动力学方程： $\dot{\mathbf{x}}_i = F(\mathbf{x}_i) - \sigma \sum_j G_{ij} H(\mathbf{x}_j)$ ， $\mathbf{H}: R^m \rightarrow R^m$ 是每个节点状态变量的函数，用于对其它节点进行耦合。这样，在存在耦合作用的情况下，第 i 个节点所满足的状态方程是

$$\dot{\mathbf{x}}_i = F(\mathbf{x}_i) - \sigma \sum_j G_{ij} H(\mathbf{x}_j) \quad (1.1)$$

对于离散系统

$$\mathbf{x}_i(n+1) = F(\mathbf{x}_i(n)) - \sigma \sum_j G_{ij} H(\mathbf{x}_j(n)) \quad (1.2)$$

其中 σ 是耦合强度， G_{ij} 表示耦合矩阵 G 的矩阵元。

耦合矩阵可以取各种各样的形式，拉普拉斯矩阵是其常用的一种。下面我们就以拉普拉斯矩阵为例给出一种耦合矩阵的形式，并分析从耦合矩阵可以得到什么样的信息。拉普拉斯矩阵 L 的定义如下：如果节点 i 和 j 之间存在耦合，那么对应的矩阵元就为 -1 ，如果不存在耦合，对应的矩阵元就为 0 ，对角元的取值是同一行其它元素的和的相反数，以保证每一行的所有元素和为 0 ，在这里，对角元刚好是所对应的节点的度。具体地，拉普拉斯矩阵具有如下形式：

$$L_{ij} = \begin{cases} k_i & i=j \\ -1 & j \in \Lambda_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (1.3)$$

其中 k_i 是节点 i 的度, Λ_i 是与节点 i 相邻的节点的集合。例如, 最近邻耦合网络、星型网络 (图 1.5 给出了其结构的示意图) 以及完全网络的拉普拉斯矩阵分为:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} N-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_3 = \begin{pmatrix} N-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & N-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & N-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & N-1 \end{pmatrix}.$$

从上面三个矩阵我们可以发现这是一种对称矩阵, 表示节点间的耦合是相互的, 并且强度相同。

在耦合的作用下, 经过一段时间的演化, 使得 $x_1 = x_2 = \cdots = x_N = s$, 网络就进入了同步状态。

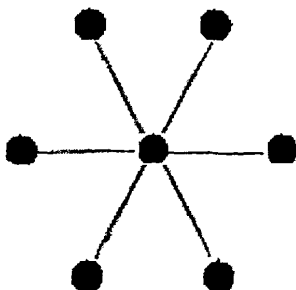


图 1.5 星型网络结构示意图

1.4 网络上动力系统同步的稳定性分析

Pecora 和 Carroll 研究了由全同振子构成的线性耦合网络同步的稳定性问题, 给出了主稳定函数判据^[40]。他们首先假设: (1) 所有的耦合振子都是完全相同的, (2) 从每个振子提取的用于耦合其它振子的函数也是完全相同的, (3) 同步流形是不变流形, (4) 节点的耦合方式可以在同步流形附近线性化。假设(1)和(3)是为了保证相空间中同步超平面的存在, 假设(2)是为了使动力学系统和网络结构的稳定性图象更加清晰具体, 假设(4)是为了更好地应用线性近似这一研究耦合系统最常用的方法。

在此基础上, Pecora 和 Carroll 逐步完成了当网络上的耦合振子系统的同步混沌态存在短波分岔时的同步稳定性分析, 提出用主稳定性函数方法确定动力网络同步的稳定性^[40-42]。对动力网络的同步稳定性分析, 很多人已经做了这方面的工作^[40-59], 我们得出这样的结论: 一个动力网络是否能够实现同步, 取决于节点上动力系统的特性、节点的耦合方式以及网络结构。在这里我们更关心网络结构对动力网络同步稳定性的影响。具体说来, 对于同步稳定区域封闭的动力学系统而言, 耦合矩阵的特征值比越小, 它能使更多种类的动力系统同步, 我们说这样的网络同步能力强; 同样, 对于同步稳定区域半开半闭的情况, 耦合矩阵次最大特征值的绝对值越大, 网络的同步能力越强。下面我们取耦合矩阵为拉普拉斯矩阵, 即 $G=L$, 来考察几个规则网络的同步能力, 并利用汪小帆和 Pecora 的判定方法^[40,48,54]来进行分析。

首先考虑最近邻耦合网络, 其耦合矩阵 G 的特征值是 $\gamma_k = 4 \sin^2(\pi k / N)$ 其中 $k=0, 1, \dots, N-1$ 。由上式可知: $\gamma_1 = 4 \sin^2(\pi / N)$, $\gamma_{\max} = 4 \gamma_{\max} / \gamma_1 = 1$ 特征值比 $\gamma_{\max} / \gamma_1 = 1 / \sin^2(\pi / N)$ 。当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\gamma \sim 0$, $\gamma_{\max} / \gamma_1 \sim N^2$, 可以看到无论同步区域是什么情况, 随着节点数目的增加网络的同步能力逐渐减弱, 动力网络的同步稳定性逐渐降低, 直至失稳, 脱离同步状态。

再看星型网络, 它的耦合矩阵的特征值除了零以外只能取两个值 $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{N-2} = 1$ 和 $\gamma_{\max} = \gamma_{N-1} = N$, 特征值比 $\gamma_{\max} / \gamma_1 = N$ 。当同步区域半开半闭, 只要耦合强度 $\sigma \geq |a|$, 网络就会同步; 当同步区域封闭, 随着节点数目的增加网络的同步能力减弱, 直至引起动力网络同步状态的失稳。

最后我们再来看一下完全网络, 其耦合矩阵的特征值只有 0 和 N , 特征值比 $\gamma_{\max} / \gamma_1 = 1$ 。因此, 对于同步区域半开半闭的动力网络, 当耦合强度选定, 只

要节点数目足够大,网络都会同步;对于同步区域封闭的动力网络,无论节点的数目是多少,恰当选择 σ 的大小,总可以使网络的同步状态稳定。

小世界网络和无标度网络由于结构复杂,耦合矩阵的特征值分布没有简单规律,要做具体分析。通过研究可以发现小世界网络具有极强的同步能力,其同步能力不但远强于同规模的近邻耦合网络,并在有些情况下强于非常易于同步的随机网络,无标度网络虽然同随机网络相比同步能力差一些,但也强于规则的近邻耦合网络。

在很多真实情况下,网络中每个节点上的动力系统不可能完全相同,其参数可能会出现失配的现象,那么用全同的振子来描述网络的动力行为可能就是不恰当的了,于是有人用耦合相振子:Kuramoto 振子^[60-64]来分析网络上的动力学行为。由于本文介绍的提高同步能力的方法中,采用的是全封闭网络,而且网络中每个节点的动力学系统都是完全相同的,因此这里关于非全封闭网络,网络中每个节点动力学系统不全同的情况就不多做解释了。

1.5 网络的几何特征量对同步稳定性的影响

前面已经提到了,描述复杂网络结构特点的特征量很多,如度,度分布,平均距离,簇系数,介数等等,那么哪一个或者哪几个量会对网络的同步稳定性产生影响呢,这个影响又是怎么实现的呢?下面我们来回答这些问题。大量的研究结果^[48-49,54,65-69]表明,小世界网络和无标度网络的同步稳定性好于最近邻耦合网络的,对于这一现象的普遍解释是由于小世界网络和无标度网络的平均距离小,使得振子间的信息交流更为有效。Niishikawa 等人^[70]研究了同步区域有界时半随机无标度网络^[64]的平均距离 $\bar{D}$ 、平均度 $\bar{k}$ 、度分布的标准差 s 、耦合矩阵特征值比 λ_N/λ_2 及节点的最大介数 $l_{\max}$ 与度分布的幂指数 γ 间的关系,如图 1.6 (a)和 (b)所示:随着 γ 的减小,虽然平均距离 $\bar{D}$ 减小了,平均度 $\bar{k}$ 增大了,但同步稳定性却变差了。他们认为这是由度和负载的不均匀性造成的。图 1.6 (c)(d)和图 1.7 (a)(b)分别给出了 DM 老化网络^[69]和一种变形的小世界网络的一些相应结果,它们对网络同步稳定性的影响与半随机无标度网络是一致的。Nishikawa 等人强调度分布的不均匀性对网络同步性质有重要影响:度和负载分布越不均匀,网络同步的稳定性越差。最后他们总结各个几何特征量对同步稳定性的影响,给出下面的不等式(未经理论上的严格证明):

$$\left[1 - \frac{1}{N}\right] \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \leq \frac{\lambda_N}{\lambda_2} \leq (N-1) k_{\max} l_{\max}^{\alpha} D_{\max} \bar{D} \quad (1.4)$$

其中 N 是节点数, $k_{\max}$ 、 $k_{\min}$ 分别指网络的最大最小度, $l_{\max}^{\alpha}$ 是最大介数, $D_{\max}$ 是最大路径长度。式子 (1.4) 给出了网络的各个特征量与耦合矩阵的特征值比的关系, 已知网络的各几何参量可以定性的确定特征值比的范围, 即网络的同步能力。

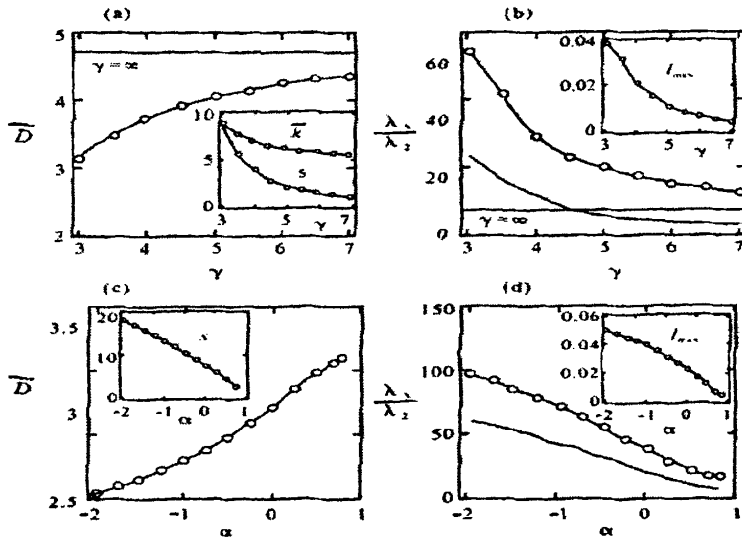


图 1.6 同步区域有界时半随机无标度网络的 (a) 平均距离 $\bar{D}$ 、平均度 $\bar{k}$ 、度分布的标准差 s ; (b) 耦合矩阵特征值比 λ_N/λ_2 及节点的最大介数 $l_{\max}$ 与度分布的幂指数 γ 间的关系; (c) (d) DM 网络的相应几何参量随参数 α 的变化关系[参考文献 70]

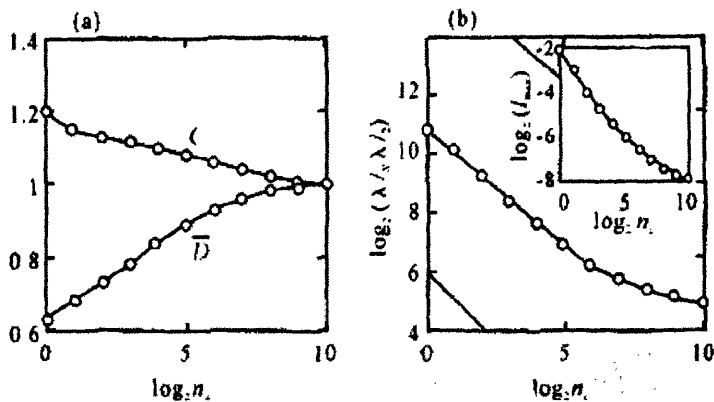


图 1.7 一种变形的小世界网络的几何参量随参数的变化关系[参考文献 70]

Hong 等人^[70]研究了 WS 小世界网络中各个特征量对动力学系统同步区域有界时网络同步稳定性的影响,如图 1.8 所示。随着重连概率 p 的增大,虽然度分布的方差 $\sigma_k^2 \equiv \langle N^{-1} \sum_i k_i^2 \rangle - \langle N^{-1} \sum_i k_i \rangle^2$ 和最大度 $k_{\max}$ 越来越大,即度分布的不均匀性增大,但耦合矩阵特征值比 $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 单调递减,即网络的同步能力增强了,这与 Nishikawa 等人的观点相矛盾。图 1.8 (b) 的插图中给出了平均距离 l 随 p 的关系,由图可知,在 WS 型小世界网络中平均距离越小网络同步能力越强,这符合人们的感受。图 1.8 (c) 表明:在 WS 型小世界网络中最大介数 $B_{\max}$ 越小,网络同步稳定性越好,这与 Nishikawa 等人的结果是一致的。因此, Hong 等人得出这样的结论:最大介数是描述网络同步能力的最恰当的特征量,并且网络的最大介数越小,同步稳定性越好。但最大介数为什么会对网络同步的稳定性有这样大的影响呢?直观解释如下:假设在网络中两个连接度很高的集团间通过少量的几个点相连,同步信息通过其中介数最大的节点传播,这就会造成信息的拥塞。因此,网络的最大介数越大,信息的传播越不通畅,网络的同步能力下降。为了证明这一点, Hong 等人还做了如下计算:定义 δ 为除去网络中某个节点后耦合矩阵特征值比的变化。若 δ 几乎不变说明除去该点对网络同步

的稳定性几乎没有影响, 若为负数说明除去改点使得特征值比变小, 网络同步稳定性增强。图 1.8 (e) 给出了随机除去一点 (圆点) 和除去网络中介数最大的点 (方点) 时 δ 的变化: 随机去点对同步影响不大, 而去掉介数最大的点可以使特征值比大大减少, 从而增强网络同步的稳定性。

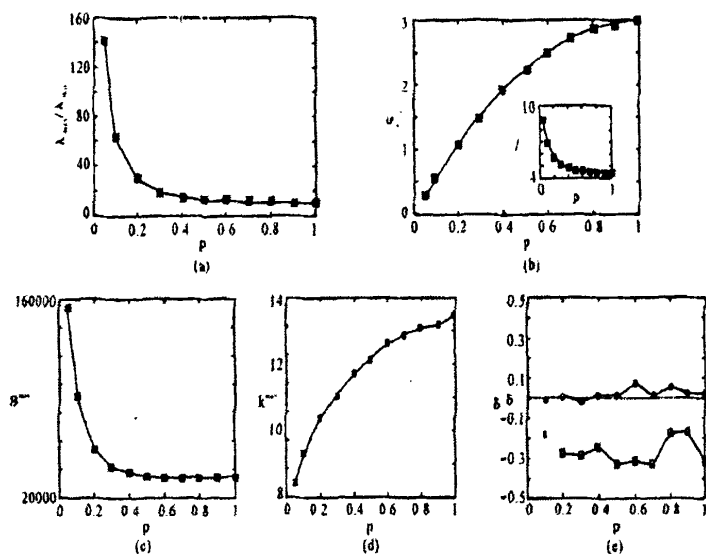


图 1.8 (a) 耦合矩阵特征值比 $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ (b) 方差 σ_k^2 和平均距离 l (c) 最大介数 $B_{\max}$ 和最大度 $k_{\max}$ 随重连概率 p 的变化规律; (e) 随机除去一点 (圆点) 和除去网络中介数最大的点 (方点) 时 δ 的变化[参考文献 71]

1.6 本文的内容安排

随着 WS 小世界网络和 BA 无标度网络模型的建立, 对复杂网络的研究迅速发展起来。人们研究复杂网络的一个根本目的就是要了解发生在其上的动力学行为, 而同步这个古老的研究课题又在复杂网络上焕发了新的青春。关于复杂网络上动力系统同步的研究经历了以下几个主要阶段: 网络上动力系统同步的稳定性分析; 复杂网络上动力系统同步的特点; 复杂网络的结构特征量与网络同步能力之间的关系; 提高网络同步能力的方法; 复杂网络同步的应用。当人们了解了复杂网络同步的整体特性后就开始探究网络的各个结构特征量与

网络同步能力之间的关系,且利用它们之间的关系提出了各种各样的方法来提高网络的同步能力,进而找到了同步能力最优化的耦合网络。各部分的基本内容如下。

在第二章,我们主要介绍利用网络结构特征,通过改变网络的结构来提高同步能力的方法。我们首先介绍了复杂网络同步领域在网络同步能力与网络结构特征量之间关系的研究现状,重点在于阐述通过改变网络的结构提高同步能力的几种有代表性的方法。包括降低网络的平均距离提高同步能力的方法,降低网络的最大介数提高同步能力的方法,以及通过去耦合方式提高同步能力的方法和调节网络的簇系数提高同步能力的方法。

在第三章,我们首先回顾了2005年以来提出的各种不改变网络的结构,通过调节节点间的耦合方式来提高网络同步能力的方法,其中这类方法又可以分为静态耦合法和动态耦合法。静态耦合法包括MZK方法,利用网络的全局信息(边的介数)来提高网络同步能力的方法,利用网络的局部信息提高网络同步能力的方法,利用节点的年龄特点来提高网络同步能力的方法,等等。其中MZK方法是将网络中每个节点接收到的耦合信号进行标准化(normalize),使得度大的节点对度小的节点的耦合强度大于度小的节点对度大的节点的耦合强度,网络的同步能力得以显著的提高。这是目前人们常用的一种耦合方法。利用边的介数提高网络同步能力的方法需要知道网络的全局信息,当网络规模比较大时边的介数是很难计算的。利用网络的中心节点提高网络同步能力的方法,其耦合矩阵形式由两个可调参数来调整,实际操作中总要先假设一个参数不变,考察另外一个参数变化的情况下网络的同步情况,操作起来显麻烦。

一些无标度网络模型在网络的生成过程中节点是逐步加入到网络中的,这就使得网络中的节点具有年龄特点。Hwang等人提出了利用网络的年龄特点来提高网络的同步能力。但是他们只是定性的分析了节点受到年龄大的邻居的耦合强度大于年龄小的节点,并没有考虑节点和邻居间的具体年龄差会对网络的同步有一定影响。而且在其提出的耦合方式下耦合矩阵特征值之比是复数,需同时考虑实部和虚部的变化,这对考察网络的同步能力是否提高带来了不便。在Hwang等人提出的方法上,提出了由节点编号代表节点的具体年龄,编号小表示节点首先加入了网络在网络中实际年龄大,编号大的表示节点在网络中的实际年龄小,我们提出了一种新的耦合方式考虑了节点具体的年龄差,该方法只有一个可调参数,虽然是非对称耦合,但是可以证明其耦合矩阵特征值全为

实数,其网络的同步能力可以在 MZK 耦合方法的基础上进一步得到提高。而且我们注意到,在上述方法的使用中,可调参数取得极限值时,相当于只有该年龄最大的节点起到了耦合的作用,即网络中每一个节点只受到其邻居中年龄最大的节点的耦合,这时的耦合网络在经过简单的处理后等价于一个树状图,网络的同步能力达到了最优化的状态。这样,我们可以通过一个简单的方法获得了同步最优化的耦合网络。该部分的内容发表于 *Physical Review E* 76,057103(2007)。

动态耦合方式也可以分成两类:一类是耦合结构不变,耦合强度随时间变化的情况;另一类是不单耦合强度随时间变化,且耦合矩阵结构也随时间变化的情况。

在第四章我们充分调研了由 Donetti 等人提出的通过全局优化算法提高网络的同步能力的方法和由 Nishikawa 和 Motter 提出的通过广度搜索法使网络达到同步最优化的耦合方式,进而分析了由我们提出的基于网络节点的年龄特点的耦合方式也可以使网络达到同步最优化,而且不需要知道网络的全局结构信息和不需要做过多的硬性规定,不需要经过复杂的算法设计和大量的计算仅仅通过简单的引入节点具有年龄的特点,精妙的设计了一种新的耦合方法,在该方法下就可以让网络的同步最优化。

文章的最后对本文进行了总结,并提出了以后的研究工作中值得关注的问题。

第2章 通过改变网络结构提高同步能力的方法

在本章,我们主要介绍了通过改变网络结构提高同步能力的方法。首先澄清了网络的平均距离和度分布,簇系数等结构特征与网络同步能力之间的关系,介绍了复杂网络同步领域在网络同步能力与网络结构特征量之间关系研究的发展现状。然后介绍在明确网络的结构特征量对同步能力的影响后,各种通过改变网络的结构特征-平均距离,最大介数,簇系数来提高同步能力的方法。

2.1 复杂网络的各个结构特征量与网络同步能力之间的关系

大量的研究结果^[48,49,54,65-69]表明,小世界网络和无标度网络的同步能力远强于最近邻耦合网络,对这一现象人们不假思索的认为是由于小世界网络和无标度网络的平均距离小,使得振子间的信息交流更为高效,从而使复杂网络具有比规则网络强得多的同步能力。但复杂网络的结构非常复杂,描述其结构特点的特征量有很多,如度、度分布、平均距离、簇系数、介数等等,单单平均距离这一个量就能表达出复杂网络的同步特点吗? Nishikawa 等人^[70]和 Hong^[71]等人先后就网络的平均距离,最大度,度分布方差和最大介数等几个结构特征量与网络同步能力之间的关系展开了讨论, McGraw 和 Menzinger 详细的讨论了簇系数与网络同步能力间的关系^[72]。赵明等人^[73]在前人研究的基础下,提出了利用随机交叉边的方法,在不改变网络中各个节点的度的条件下调节网络的其他结构特征量,这样就可以把网络的平均距离和度分布这两个饱受争议的结构特征量分开讨论了。清楚的阐明了网络结构特征量与网络同步能力的精确关系。

从 Nishikawa 等人研究结果得知,网络的同步能力与网络的平均距离无明显关系,而度和介数的分布特点却可以很好地表征网络的同步能力:网络的度和介数分布越均匀,网络的同步能力越强。Hong 等人通过进一步研究认为网络的最大介数表征了网络的同步能力:网络的最大介数越大,同步能力越差;网络的最大介数越小,同步能力越强。赵明等人经过深入研究发现,最大介数也不能完全刻画不同网络间的同步能力。使用最大介数作为评价网络同步能力的结构特征量对于同一个网络是适用的,即对网络的结构进行一些小的扰动后可以

通过比较网络的最大介数的变化来判断网络同步能力的变化，但不能用来比较不同网络间的同步能力的强弱。因此用最大介数来描述网络的同步能力的方法使用是有条件的。具体的分析过程，原文献中有详细的描述，在本文就不多做介绍了。

2.2 改变网络结构特征提高同步能力的方法

在了解了网络的结构特征和网络同步能力之间的关系后，科学家们就想看是否可以通过调节网络结构特征的办法，使网络更加容易同步呢？科学家们开始用具体行动来验证这个想法，于是各种各样的通过改变网络的结构特征来提高同步能力的方法被提出。

2.2.1 降低网络的最大介数提高网络的同步能力

研究表明，最大介数是描述网络同步能力最恰当的特征量，并且网络的最大介数越小，网络的同步能力越强。人们自然而然的想到了只要降低了网络中节点的最大介数，就能提高网络的同步能力了。但是实际系统中，最大介数的节点在网络中往往具有很高的地位，因此通过去掉该节点的方法来提高同步能力往往不能实现。为了降低中心节点的最大介数，赵明等人^[7]提出了一种结构微扰的方法，使网络的结构特性没有大的改变，保留了该点，却降低其介数的大小，同步能力得到了提升。具体来讲，对于一个介数很大的中心节点 x_0 ，围绕该节点添加 $(m-1)$ 个辅助节点 $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ ，这 m 个节点两两互相连接，而以前与中心节点 x_0 连接的边现在随机选择这 m 个节点中的一个并与之连接。经过这个处理，中心节点 x_0 上的信号负载被几乎平均地分配到这 m 个节点上。为了方便，这个过程被称为“ m 分割”，图 2.1 给出了一个 3 分割的示意图。

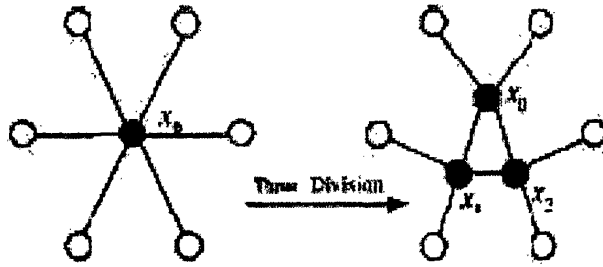


图2.1 针对 x_0 节点的3分解示意图。左侧的圆实点是度为6的节点 x_0 ，经过一次3分解后， x_0 被分解为全连接的三个点 x_0 ， x_1 和 x_2 ，原来连接到 x_0 的6条边被重新连接到这三个点上。[参考文献73]

考虑到在大规模网络中计算节点的介数非常困难，而大部分无标度网络的节点度和介数都具有很强的正相关性^[74]，即是度大的节点往往具有更大的介数，因此可以近似的利用节点的度排序来代替介数排序。整个结构微扰的过程如下：

1. 对一个给定的网络，将它各个节点的度按照从大到小排序；
2. 选择度最大的节点为中心节点，执行一次 m 分割操作；
3. 对操作后的网络度大小进行重新排序，然后回到第2步；
4. 循环执行直到占原网络节点数比例为 ρ 的节点被分割。

为了考察网络同步能力的变化，文章比较了分割前后网络耦合矩阵特征值之比。记 r 为原来网络所对应耦合矩阵的特征值比， r' 为执行分割操作后网络所对应的耦合矩阵特征值比。图 2.2 给出了 $R=r/r'$ 随分割节点比例 ρ 的变化规律。从图可以看出，执行 3 分割操作下，网络的同步能力得到了迅速提高。

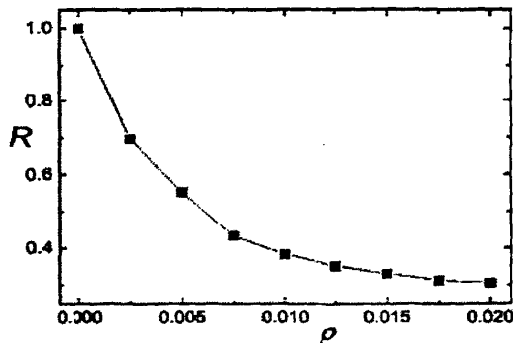


图2.2 3 分割下 R 随 ρ 的变化规律。[参考文献73]

2.2.2 降低网络的平均距离提高网络的同步能力

有关网络平均距离对网络同步能力的影响的研究很多，但是到目前为止还没有一个统一的令人信服的结论。很多研究表明，平均距离越小，网络的同步能力越好^[49,66]。为了进一步澄清这个问题，同时也探索一种可能的提高同步能力的方法，周涛等人^[79]研究了一种名为交叉双环网（crossed double-cycle）的网络模型，并讨论了其上的同步问题。用图论的语言来说，环 c_N 表示一个具有 N 个节点， $x_1, x_2, \dots, x_N$ ，和 N 条无向边， $x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n$ 和 x_nx_1 的网络。将 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 顺次放成一个圆圈， c_N 正好首尾相连成一个封闭的环。在环 c_N 的每一个节点上添加两条边，连接到原来距离为 m 的两个节点上，就构成了交叉双环网，记做 $G(N, m)$ 。图2.3给出了 $G(20, 4)$ 的示意图。交叉双环网这种结构在组合网络分析中很早就为数学家所熟悉，并且广泛应用于分布式处理系统和局域网络设计中^[76]。事实上，最早的并行计算机的多个处理器之间数据传输线形成的网络就是 $G(16, 4)$ ^[77]。

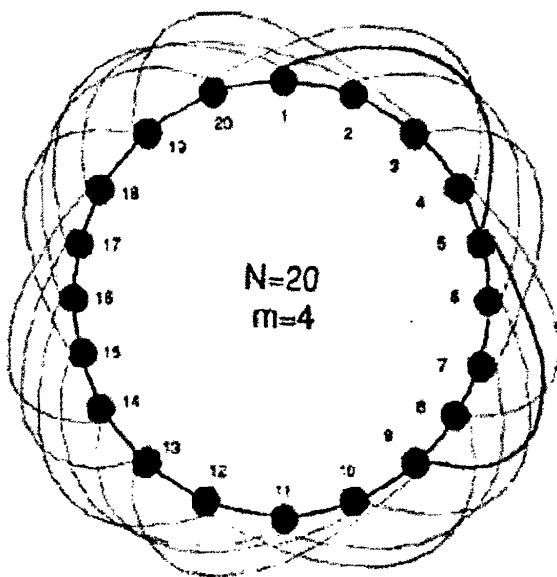


图 2.3 $G(20, 4)$ 示意图。

记 $L(k)$ 为环 c_N 的平均距离, 则有

$$L(k) = \begin{cases} (k+2)/4, & k \text{ 为偶数} \\ (k+1)^2/4k, & k \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (2.1)$$

当 $N \sim m$ 时, 可以利用一些图论的技巧^[75], 得到 $G(N, m)$ 的平均距离的近似表达式:

$$L_G(N, m) = L(m) + L(k) - 1 \quad (2.2)$$

其中 $k = [N/m]$, $[\cdot]$ 表示取整。注意到交叉双环网的耦合矩阵是轮换对称 (shift invariant) 的, 它的 N 个特征值可以通过离散傅立叶变换得到^[75]:

$$\gamma_i = 2(2 - \cos \frac{2\pi i}{N} - \cos \frac{2\pi im}{N}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.3)$$

如果 m 为奇数而 N 为偶数, 则最大特征值 $\gamma_{\max} = 8$; 反之最大特征值略小于 8。利用泰勒展开易知最小特征值约为

$$\gamma_{\min} = \gamma_1 \approx \frac{4\pi^2}{N^2} (1 + m^2) \quad (2.4)$$

图 2.4 左侧图给出了最小特征值随平均距离 m 变化的关系, 在 $N \sim m$ 范围内与上式吻合。右侧图给出了耦合矩阵特征值比 $R = \gamma_{\max} / \gamma_{\min}$ 随网络平均距离 L 变化规律。可以看到, 随着交叉边距离 m 的变大, 在网络规模 $N \sim 10^3$ 的情况下, 特征值比可以下降三个数量级, 说明网络的同步能力可以通过加入交叉边得到明显改善。从插图中可以看出, 特征值比与平均距离之间存在近似幂律关系 $R \sim L^{1.5}$ 。该研究除了提出了一种有效提高网络同步能力的方法外, 也从一个侧面证明了短平均距离是有利于上动力学系统的同步的。

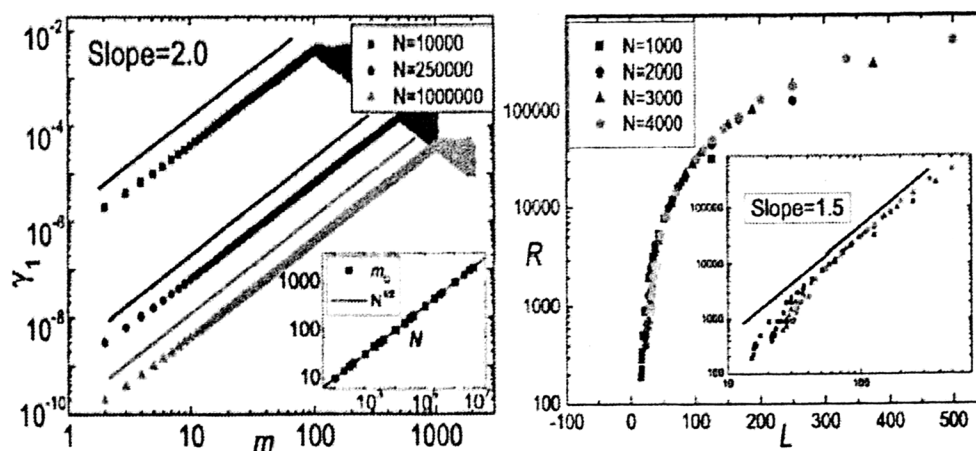


图 2.4 左侧图:最小特征值随 m 变化的规律。 m 较小时,在双对数坐标下,最小特征值与 m 是幂律关系,拟合直线斜率为 2.当 m 变大时会出现一个截断(cut-off),如插图所示,截断点的位置 m_c 在网络规模的 $1/2$ 次方处。右侧图:特征值比 R 随网络平均距离 L 的变化规律。插图显示了两者在双对数坐标下的关系,其中直线的斜率为 1.5[参考文献 75]

2.2.3 无标度网络上耦合的方式提高网络的同步能力

在信息传输的过程中,如果信息量过大,不仅介数最大的节点会出现拥堵的现象,一些边也会因为过载而发生堵塞,从而降低信息传输的效率。在无标度网络的同步过程中,如何去掉一些容易过载的边使得同步信息分散到其他边来传播,会显著提高网络的同步能力。殷传洋等人最近提出的去耦合的方法证明了这一观点^[78]。去耦合的过程如下:定义边 l_{ij} 的贡献为 W_{ij} 为这两条边所连接的两个节点 i, j 的度的乘积,即 $W_{ij} = k_i k_j$ 。计算所有边的贡献后,将所有的 W_{ij} 从大到小排序,然后按顺序一一切断这些边,也就是去掉边所连接的两个节点之间的耦合。这样当耦合强度一致并对称时,所得到的新的网络的耦合矩阵的特征值比与原网络相比明显降低了,即网络的同步能力可以得到显著提高(如图 2.5 所示)。

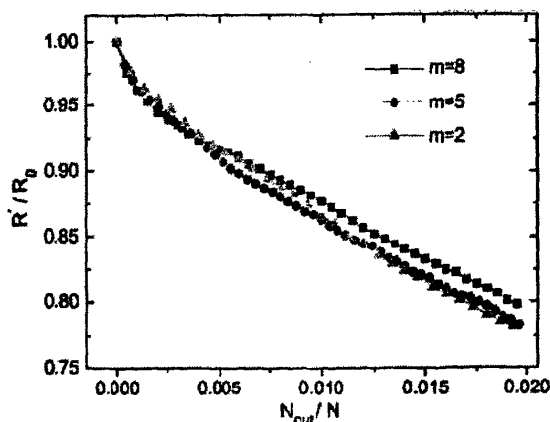


图 2.5 耦合矩阵特征值比的变化率随被去掉的边的比率的变化关系。

2.2.4 调节网络中的簇系数提高同步能力

由前面可知, 网络的簇系数代表的是节点邻居中仍然是彼此是邻居的比例。单个节点的簇系数定义为它所有的邻居节点中仍然是邻居占总可能性的百分比, 将网络中所有节点的簇系数做平均就得到了网络的簇系数。一直以来, 科学家们都想弄清楚簇系数这个网络结构特征量对网络同步有何影响, 科学家 McGraw 和 MenZinger 详细讨论了簇系数和同步能力之间的关系^[101]。他们以随机网络和 BA 无标度网络为研究对象, 以 Kuramoto 振子为节点上的动力学系统, 采用随机交叉边的方法^[103,104]来调节网络的簇系数研究了簇系数与网络同步能力间的关系。下面我们首先来介绍一下随机交叉边方法。

随机交叉边的方法是一种在调节网络的簇系数的过程中保持网络的度分布不变的方法, 其过程如下:

- (1) 随机的找到网络中存在的两条边 $e_1 = x_1x_2$ 和 $e_2 = x_3x_4$, 要求 $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_4$, 并且在 x_1 和 x_4 与 x_2 和 x_3 之间不存在边;
- (2) 交叉重连这两条边, 也就是说去掉边 e_1 和 e_2 , 连接节点 x_1 和 x_4 以及节点 x_2 和 x_3 ;
- (3) 保证网络仍然连通, 然后计算这种操作是否增加(降低)网络的簇系数, 如果是, 就保留这种新的网络构型, 如果否, 就恢复原来的网络构型;
- (4) 重复操作(1)到(3), 直到达到所需的要求。

由于这种操作只是将边断开再重新连接，并没有改变任何节点的度，因此网络的度分布保持变。为了更好的理解随机交叉边方法，图 2.6 给出了该方法的示意图。

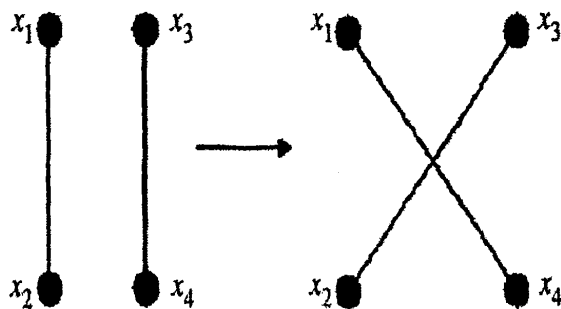


图 2.6 随机交叉边方法[参考文献 102]

McGraw 和Menzinger 将Kuramoto 振子的固有频率在 $0.9 \leq \omega_i \leq 1.1$ 范围内随机选择，并且给每个振子的初始位相随机赋值。在数值模拟的过程中，用Euler方法以步长0.02 解在不同的耦合强度下振子所满足的微分方程，去掉前100 步的暂态过程，计算了经过500 个时间步平均的序参量，其结果如图2.7 所示。其中 m 表示序参量， γ 表示网络的簇系数， λ 是耦合强度。为了研究簇系数对从非同步态到同步态的相变的影响，他们首先研究了序参量 m 随耦合强度 λ 的变化。图2.7(a)(b)分别是在不同的簇系数下随机网络和BA 无标度网络的序参量 m 随耦合强度 λ 的变化关系。随机网络[图2.7(a)]的序参量变化简单：当簇系数比较小，耦合强度一旦大于0.12 时序参量就迅速抬升。增大簇系数抑制了网络的全局同步并且序参量的这种迅速抬升变得越来越不明显。

在BA 无标度网络[图2.7(b)(c)]中，簇系数对网络同步有更复杂的影响。当簇系数 $\gamma \approx 0.0$ 时，在耦合强度 $\lambda \approx 0.7$ 附近就开始进入同步态，但序参量的变化过程并不像随机网络那样陡峭。奇怪的是，增大簇系数在弱的耦合强度下会提高网络的同步程度但在强的耦合强度下会降低网络的同步程度。

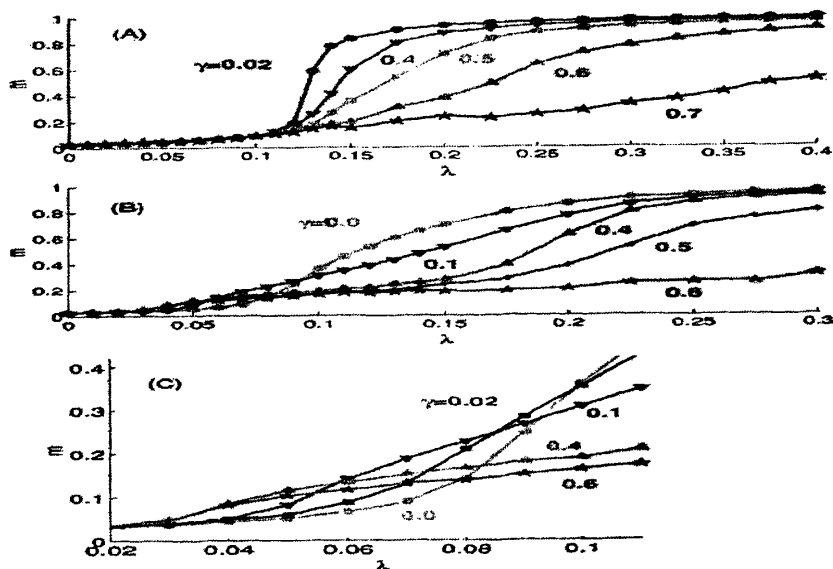


图 2.7 序参量 m 在不同的簇系数 γ 下随耦合强度 λ 的变化关系。(a) 随机网络；(b), (c) BA 无标度网络；(c) 在相变区域的放大图，表明簇系数大的网络首先发生相变。[参考文献 102]

为了更细致的研究同步过程，他们还考察了演化稳定后的相振子的固有频率 ω_i 与实际的振子振动频率 Ω_i 。注意到当耦合强度为零时，每个振子以各自的固有频率独立演化， $\Omega = \omega$ ；增大耦合强度，振子经过一段时间演化达到稳定状态后，当耦合强度较大，使振子系统实现整体的同步，那么所有节点的实际的振动频率相同， Ω_i 取单一的值；当耦合强度处在两者之间，使稳定后的系统处在部分同步状态，这时 Ω_i 的取值也与振子的固有频率不同，其值大小与耦合强度有关。图 2.8 给出了随机网络的同步稳定后振子的振动频率 Ω_i 与节点的固有频率 ω_i 的变化关系。可以看到在固有频率为 1 附近的节点首先开始进入同步态，随着耦合强度的增加，越来越多的远离平均频率的振子也进入了同步态。在相同的耦合强度下，当网络的簇系数比较大时，振子振动的频率分布范围更大些，这是因为每个振子的振动状态不仅取决于振子的固有频率和所有振子的平均频率，还取决于它的局域连接状况。对于簇系数比较大的网络，振动频率的分布有两个主要特点，一是振动频率的分布比较分散，二是振子会形成不同振动频率的同步簇(图中的多条横带)。随着耦合强度的增加，不同的同步簇会融合进

而形成一个同步簇，但需要比同步簇系数小的网络大得多的耦合强度。

对于BA 无标度网络的情况，从图2.8 可以看出在弱的耦合强度的情况下簇系数大的网络先开始同步。但这种同步只涉及网络中的一部分节点，其它的节点还是在自己的固有频率上演化，好像完全没有受到其它的节点的影响。这与随机网络的情况完全不同。由于无标度网络的度分布异质性非常强，一个节点是否受到其它节点的强烈的影响主要取决于其邻居的数量。在图2.9 中给出了节点的振动频率与网络节点的度的关系。很明显，网络中度大的节点首先进入同步态，随着耦合强度的增加，度小的节点也慢慢的进入同步态。与随机网络相同的一个特点是簇系数大的网络更容易形成在度大的节点周围的频率同步的簇，这抑止了网络的整体同步。在弱的耦合强度下，早期形成的同步的簇会有助于提高网络的序参量。

总之，网络簇系数的增加会增强网络的局域同步但却抑止了网络的整体同步。

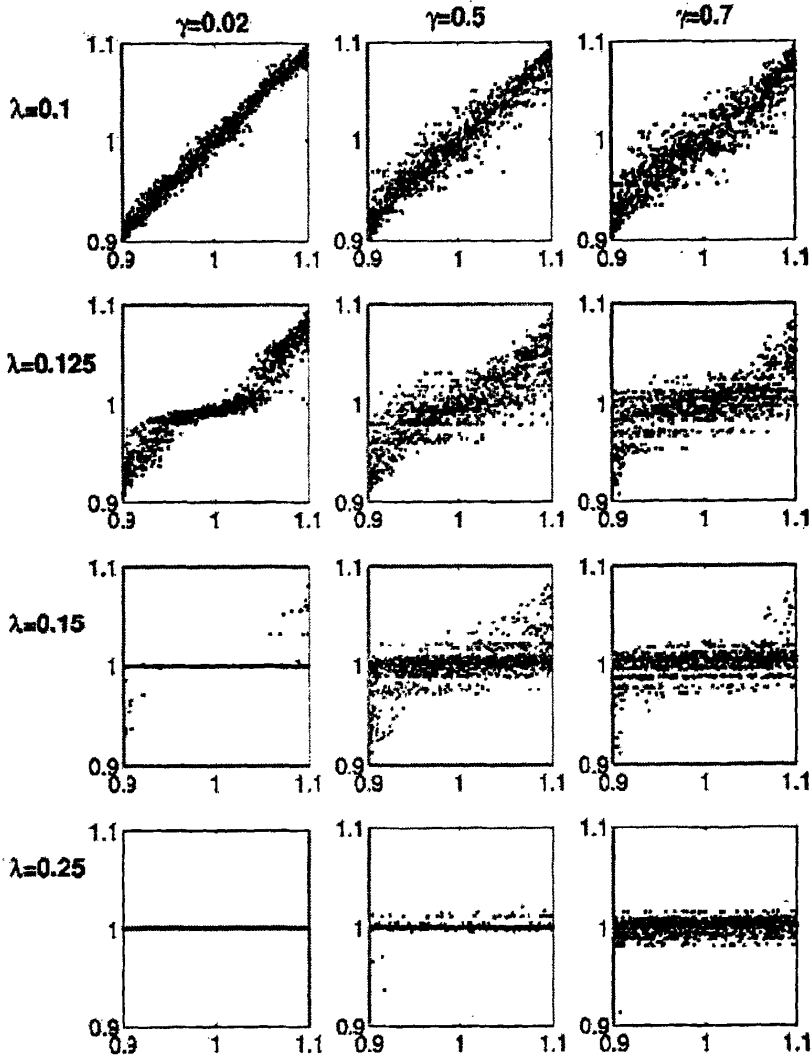


图2.8 随机网络：演化稳定后振子振动的频率 Ω （纵坐标）与振子的固有频率 ω （横坐标）之间的关系。当耦合强度为零时，所有的点都落在曲线 $\Omega=\omega$ 上；增大耦合强度，振子的振动频率逐渐接近同步态的频率。当簇系数比较大时，会形成几个频率同步的簇，而不会像簇系数比较小时所有的节点的振动频率都相同。[参考文献102]

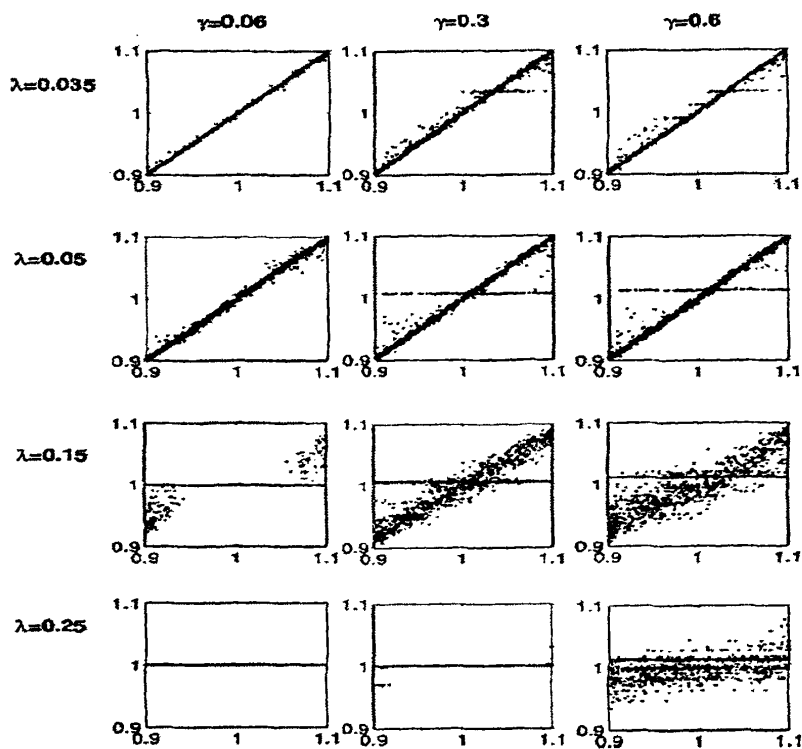


图 2.9 BA 无标度网络: 演化稳定后振子振动的频率 Ω_i 与振子的固有频率 ω_i 之间的关系。当簇系数很大时, 在弱的耦合强度下就会形成一些频率同步的簇(水平带), 这样的网络频率同步簇很明显。[参考文献 102]

第3章 通过改变耦合方式提高网络同步能力的方法

一个动力网络的同步能力是由网络结构，耦合方式和动力学本身性质（不在本文讨论范围之内）三者共同决定的。常用的提高网络同步能力的方法粗略的分可以分为两类，一类是利用网络的结构特性和同步能力之间的关系，通过改变网络的结构从而达到提高网络同步能力的目的。这种方法我们在上一章已作了相关介绍。真实网络的规模巨大，用全局优化算法找到网络的同步最优构型几乎不可能，而规模巨大的网络通常很难获得节点的介数，而且改变网络的其中一个特征量，势必会引起其他特征量的改变，而使网络不易于同步的实现。因此，一个自然的问题就是如果网络的结构无法改变，能否通过改变网络节点间的耦合方式来提高系统的同步能力？MZK方法^[82]可以说是这类方法的开山鼻祖，此方法提出后，各种利用网络的结构特征调节网络中节点间耦合方式来提高网络同步能力的方法不断涌现。这类方法又可以细分成两类：静态耦合方法和动态耦合方法。静态耦合的方法，即节点间的耦合方式一旦确定，在振子的演化过程中就不再改变；动态耦合的方法，即节点间的耦合强度随着演化的进行不停的根据当时的状态进行变化。在本章，我们会详细介绍上面提到的几种有代表性的方法。随后提出我们设计的利用网络节点的年龄特点提高网络同步能力的方法，而且这种方法还简单的实现网络同步的最优化。

3.1 提高网络同步能力的 MZK 方法

2005 年初，Motter、Zhou 和Kurths 首先提出了通过调节耦合方式来提高网络同步能力的方法(我们简称为MZK 方法)^[82]，该方法一经提出就受到了广泛的关注。其后，各种以该方法为基础，采用调节网络中节点间的耦合方式来提高网络同步能力的方法不断涌现，掀起了提高网络同步能力方法研究的高潮。下面我们就来详细介绍一下MZK 方法。

Motter 等人注意到这样一个现象：在网络的同步过程中，如果耦合矩阵是拉普拉斯矩阵，网络中每个节点接收到的耦合信号量与其度呈正比，那么网络中度大的节点接收到的耦合信号量要远大于度小的节点。为了便于理解，我们

将动力网络所满足的方程及拉普拉斯矩阵重写在下面：

$$\dot{x}_i = F(x_i) - \sigma \sum_j G_{ij} H(x_j) \quad (3.1)$$

$$L_{ij} = \begin{cases} k_i & i = j \\ -1 & j \in \Lambda_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.2)$$

他们提出一种新的耦合方法，耦合矩阵具有如下形式：

$$G_{ij} = L_{ij} / k_i^\beta \quad (3.3)$$

其中 L_{ij} 是拉普拉斯矩阵 L 的矩阵元， k_i 是网络中第 i 个节点的度， β 是可调参数。当参数 $\beta=0$ 时，耦合矩阵退化为拉普拉斯矩阵，可以认为此时的网络是无向无权网络，节点间的耦合是对称的；当 $\beta \neq 0$ 时，这时网络相当于有向含权网络，这种网络中每个节点的出度数量和入度数量是相同的，但是节点间的耦合是非对称的。

虽然耦合矩阵 G 并不对称，但可以证明其所有的特征值都是非负实数，可以按照如下顺序排列 $0 = \gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_{N-1}$ 。下面我们就来分析耦合矩阵特征值的分布特性。将(3.3)改写成如下形式

$$G = D^{-\beta} L \quad (3.4)$$

其中 $D = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$ 是节点度的对角矩阵。通过相似变换：

$$\det(D^{-\beta} L - \lambda I) = \det(D^{-\beta/2} L D^{-\beta/2} - \lambda I) \quad (3.5)$$

该变换对任何 λ 都成立，其中“ $\det$ ”表示行列式， I 是 $N \times N$ 维的单位阵。就能得到耦合矩阵 G 的特征值谱与一个对称矩阵 H 的特征值谱相同

$$H = D^{-\beta/2} L D^{-\beta/2} \quad (3.6)$$

也就是说， $\rho(G) = \rho(H)$ ，其中 ρ 表示特征值的集合。因此，耦合矩阵 G 的所有特征值都是实数。实际上，由于矩阵 H 是半正定的，所以耦合矩阵 G 的所有特征值都是非负的，并且由于 G 中每一行元素的和为零，所以 G 的最小特征值为零。另外，如果网络是连通的，那么将只有一个特征值为零。当然，也只有在网络保持连通的情况下，才能实现网络的全局同步。

对于 $\beta=1$ 的情况，矩阵 H 是归一化了的拉普拉斯矩阵^[83]。在这里，如果 $N \geq 2$ 并且网络是连通的，那么 $0 < \gamma_1 \leq N/(N-1)$ 、 $N/(N-1) \leq \gamma_{N-1} \leq 2$ 。对于 $\beta < 1$ 或 $\beta > 1$

的情况,一些节点要比其它的节点具有更大的影响力,网络的同步能力主要由影响力最弱或最强的节点限制:对于耦合强度 σ 比较小(大)的情况,由于影响力最弱(强)的节点的存在,系统将出现长波(短波)分岔现象。那么,预计当 $\beta=1$ 时,网络具有最强的同步能力。

Motter 等人计算了四种复杂网络模型下的数值模拟的结果,四个网络模型分别是:

1. 随机无标度网络(Random SFN's)^[84] 根据度分布几率 $p(k) \sim k^{-\gamma}$, 给每个节点分配数量为 $k_i \geq k_{\min}$ 的“半条边”,其中 γ 是幂指数, $k_{\min}$ 是个整的常数。随机的将这些“半条边”连接起来成为完整的边,禁止边的重连和自连边,就形成了一个无标度网络。当 $\gamma = \infty$ 时,所有的节点具有相同的度 $k = k_{\min}$ 。
2. 确定性无标度网络(Networks with expected scale-free sequence)^[85] 根据度分布几率 $p(k) \sim k^{-\gamma}$ 获得节点的度序列 $k_1, k_2, \dots, k_N$, 要求 $k_i \geq k_{\min}$, 并且 $\max_i k_i^2 < \sum_i k_i$ 。根据概率 $p_{ij} = k_i k_j / \sum_i k_i$ 连接节点 i, j , 允许自连,就构成了确定性无标度网络。
3. 生长无标度网络(Growing SFN's)^[86] 从 m 个全连通的节点出发,每步增加一个新的节点,同时有 m 条边从这个节点出发连接到网络中已有节点上。每一条新边连接到节点 i 上的概率为 $\Pi_i \sim (1-p)k_i + p$, 其中 k_i 表示第 i 个节点当前的度, $0 \leq p \leq 1$ 是可调参数。所生成的网络在度大的部分其度分布幂指数为 $\gamma = 3 + p[m(1-p)]^{-1}$ 。当 $p=0$ 时,幂指数 $\gamma = 3$,网络退化为 BA 无标度网络。
4. NW 型小世界网络(SWN's) 从一个 N 节点的近邻耦合网络出发,网络中每个节点与其距离为 z 以内的节点相连,通过随机的连接网络中的节点对来增加 $M \leq N(N-2z-1)/2$ 条新边,不允许边的重连。

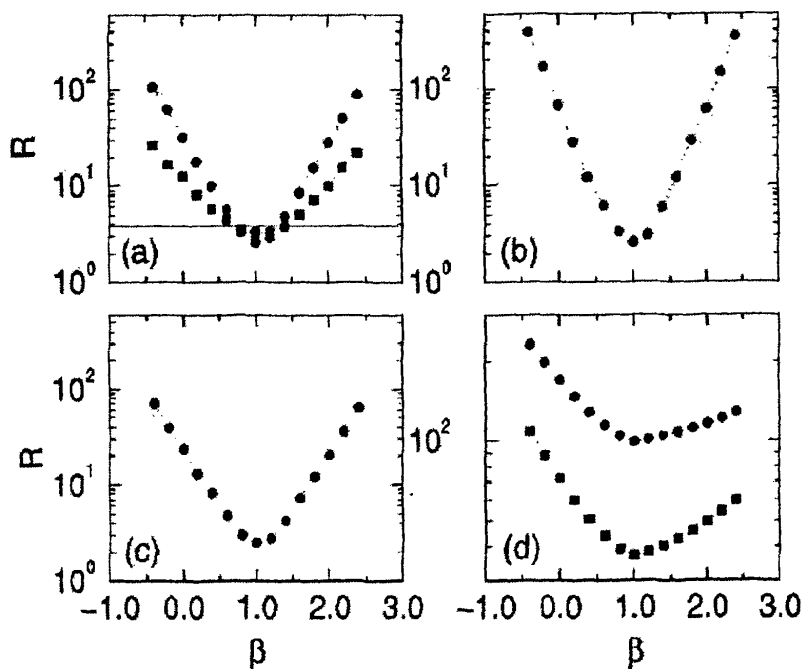


图3.1 耦合矩阵的特征值比 R 随可调参数 β 的变化规律：(a)随机无标度网络，其中实心圆表示幂指数 $\gamma=3$ ，实心正方形 $\gamma=5$ ；(b)确定性无标度网络；(c)生长无标度网络和(d)NW 型小世界网络，其中实心圆表示 $M=256$ ，实心正方形 $M=512$ 。[参考文献82]

图 3.1 给出了跟据这四种网络模型计算出的网络的耦合矩阵的特征值比 R 随参数 β 的变化规律，这几个数值模拟的结果有个共同的特点：当 $\beta=1$ 时， R 都取最小值，表明此时网络的同步能力最强。

在无标度网络中，随着度分布幂指数 γ 的减小，网络度分布的异质性增强。

从图 3.1(a)的随机无标度网络的数值模拟结果可以看出，随着度分布异质性的增强，耦合矩阵特征值比的降低更明显，表明网络的异质性越强，该方法提高网络同步能力的效果越显著。在 NW 型小世界网络中，随着网络中增加的随机边的数目 M 的增加，网络的度分布的异质性增强。在 $\beta=0$ 处，随着 M 的增加，耦合矩阵的特征值比 R 降低，但在 $\beta=1$ 处两个网络的耦合矩阵的特征值差异比在 $\beta=0$ 处更明显，表明耦合矩阵特征值比的变化比度分布的异质性的变化更显著[图 3.1(d)]。这两个图的模拟结果表明，网络的异质性越强，该方法提高网络同步能力的效果就越显著。

3.2 静态耦合的方法

MZK 方法的提出, 为人们在提高网络同步能力方法这个领域开辟了一条新的道路, 之后以 MZK 方法为基础、各种利用网络的结构特性调节网络中节点间的耦合方式来提高网络同步能力的方法不断提出。这些方法总的来说可以分成两类: 一类是静态耦合的方法, 另一类是动态耦合方法。在这节我们重点介绍静态耦合方法的典型代表。静态耦合方法即节点间的耦合方式一旦确定, 在振子的演化过程中就不再改变了。下面我们将介绍除了 MZK 方法外, 其他几种比较典型的利用网络的结构特征, 通过调节网络中动力学系统的耦合方式来提高网络同步能力的静态耦合法。

3.2.1 利用网络的全局信息提高网络同步能力的方法

Chavez 等人提出了一种利用边权这个全局信息来提高网络同步能力的方法^[67]。边权是指网络中所有最短路径经过这条边的次数, 也叫边的介数。他们注意到, 由于两个节点间的边权(边的介数)会受到距离非常远的节点的显著影响, 边权实际上反映了网络的全局结构信息。权大的边在网络的结构具有更大的重要性。于是他们设计出了网络节点间如下的耦合方式:

$$G_{ij} = \begin{cases} -l_{ij}^\alpha / \sum_{j \in \Lambda_i} l_{ij}^\alpha & j \in \Lambda_i \\ 1 & j = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.7)$$

其中 l_{ij} 是连接节点 i, j 之间边的权值, 是可调参数, Λ_i 是与第 i 个节点相连节点的集合。

对于任意的 α , 耦合矩阵 G 都是非对称的, 可以将其改写成如下形式: $G=QL$, 其中 L 是一个行元素和为零的对称矩阵, 其非对角元为 $L_{ij} = -l_{ij}^\alpha$, 且

$$Q = \text{diag}\left\{\frac{1}{\sum_j l_{1j}^\alpha}, \dots, \frac{1}{\sum_j l_{Nj}^\alpha}\right\}。利用矩阵相似变化可知耦合矩阵 G 有与 $W = Q^{\frac{1}{2}} L Q^{-\frac{1}{2}}$$$

相同的特征值谱。因此无论网络的规模有多大, 耦合矩阵 G 的所有特征值都是处于 0 到 2 的非负实数, 并且在网络连通的情况下只有一个特征值为零。

从 (3.7) 式注意到, 当 $\alpha=0$ 时, 该耦合方式退化到 MZK 耦合方式在 $\beta=1$

的情形；当 $\alpha = +\infty$ ($\alpha = -\infty$) 时，连接到节点 i 上的所有边中只有介数最大（小）的边的耦合信号被接收。因此，网络就等价于一个至少有 N 条边的简单图，这个图既可能是连通也可能断开了。当这个等价图保持连通（断开）时，耦合矩阵的特征值比 λ_N/λ_2 等于 2 ($+\infty$)，网络的同步能力会非常强（弱）。

Chavez 等人以具有初始吸引度的无标度网络和随机网络为研究对象

$$\frac{d\eta_j}{dt} = K_j \eta_j - \sum_{i=1}^N v_j^T(t) \frac{dv_i(t)}{dt} \eta_i, \text{ 调节参数 } \alpha, \text{ 考察这两种网络耦合矩阵的特征}$$

值比 λ_N/λ_2 的变化规律 (如图 3.2 左侧图 (a) 所示)。并通过计算

$\Gamma = \log(\lambda_N/\lambda_2) - [\log(\lambda_N/\lambda_2)]_{\alpha=0}$ 比较了该方法与 MZK 方法的差异 (如图 3.2 左侧图 (b) 所示)，其中两条黑实线之间小于零的部分是该方法同步能力强于 MZK 方法的参数区域。

图 3.2 右侧 (a) 给出了该方法应用于随即图的情况下网络耦合矩阵的特征值比随参数 α 的变化关系，并计算了该方法应用于具有初始吸引度的无标度网络和随机网络的同步能力间的差异 $\Gamma = [\log(\lambda_N/\lambda_2)]_{SF} - [\log(\lambda_N/\lambda_2)]_{random}$ ，如图 3.2 右侧 (b) 所示。可以看到对于参数空间 $\alpha > 0$ 当使用该种耦合方式进行同步时无标度网络比随机网络具有更强的同步能力。从这四个图可以看出，中存在一个参数区域，使得通过该方法进行耦合的网络其同步能力强于 MZK 方法进行耦合的网络，并且当 $\alpha \approx 1$ 时网络表现出最强的同步能力。

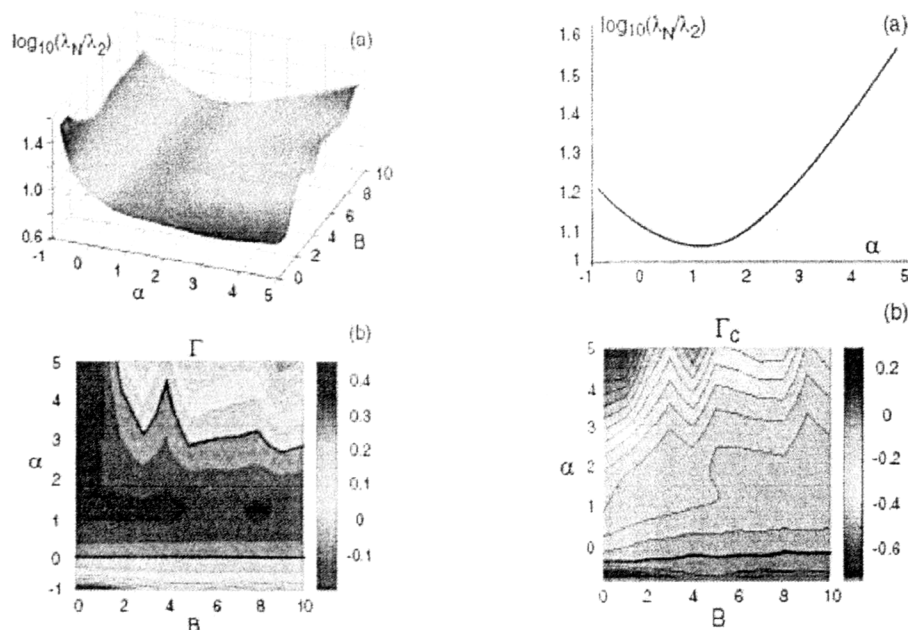


图 3.2 左侧图: (a) 具有初始吸引度的无标度网络其耦合矩阵特征值比在参数空间(α , B) 中的变化规律, (b) 两粗实线之间实该方法同步能力强于 MZK 方法的参数区域; 右侧图: (a) 随即图的耦合矩阵特征值比随参数 α 的变化规律, (b) 粗实线之上的区域是该方法应用于具有初始吸引度的无标度网络同步能力强于随机网络同步能力的参数区域[参考文献 60]

3.2.2 利用网络的局部信息提高网络的同步能力

利用边的介数来调节耦合强度要利用网络的全局信息, 对大规模网络来说其计算量巨大, 使用起来也不现实。为此提出了只利用网络的局部信息来调节网络的耦合形式, 以达到提高网络同步能力的目的。前文提到的 MZK 方法是这种方法的一种典型代表。在该方法中, 每个节点接收到的耦合信号受自身节点度的调节。在该方法中, 每个节点的邻居对该节点的耦合强度都是一样的, 这就与真实网络不符。在真实系统中, 网络中不同的节点其影响力往往是不同的。为此, 赵明等人^[88] 提出了利用节点度的不同来调节耦合强度的分布, 其耦合矩阵具有以下形式:

$$G_{ij} = \begin{cases} S_i/S_i^\beta & i = j \\ -k_j^\alpha/S_i^\beta & j \in \Lambda_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.8)$$

其中 $S_i = \sum_{j \in \Lambda_i} k_j^\alpha$ ，其余记号同前。当 $\alpha = \beta = 0$ 时，该耦合方式退化到对称无向的传统耦合；当 $\alpha > 0$ 时，节点演化主要受度大的邻居节点的影响；当 $\alpha < 0$ 时，度小的邻居起主导的作用；当 $\alpha = 0$ 时，每个邻居起到相等的作用，该耦合方式退化为 MZK 耦合方式。图 3.3 左侧图给出了耦合矩阵特征值比 R 在参数空间 (α, β) 中的变化图，右侧图给出了在不同的参数 β 下 R 随参数 α 的变化关系。由图可见，无论 β 取何值，都存在一个区间使得 R 小于 $\alpha = 0$ 的情况，并且 $\beta = 1$ 时网络显示出最强的同步能力。因此在该耦合方式的作用下，恰当的选择参数 α 和 β ，网络的同步能力不仅强于对称无向同步耦合方式下的网络，也强于 MZK 同步耦合方式下的网络。而且该耦合方式仅利用网络的局域信息就能显著地提高网络的同步能力，不仅适用于各种网络结构，而且不受网络规模的限制。

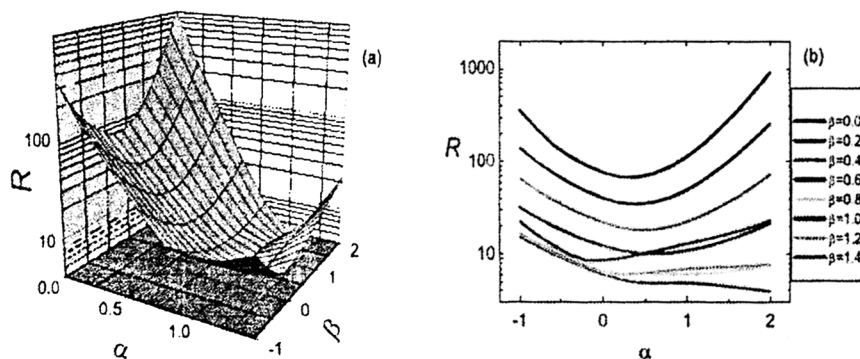


图 3.3 左侧图：耦合矩阵的特征值比 R 在参数空间 (α, β) 中的变化规律；右侧图：

不同的参数 β 下 R 随参数 α 的变化规律。[参考文献 88]

3.2.3 利用节点的年龄特点来提高网络同步能力的方法

Hwang 等人在生长无标度网络中引入了年龄的概念，提出了一种利用网络中节点具有年龄的特点来提高网络的同步能力的方法^[89]。他们注意到，在生长无

标度网络中，节点由于加入网络的时间不同而具有“年龄”的特点：加入网络的时间越找，节点的“年龄”就越大。他们认为网络中一个节点受到其邻居的耦合，年龄比它大和比它小的邻居节点对它的耦合强度应该是不一样的。于是他们提出了网络中节点间具有如下的耦合方式：

$$G_{ij} = \begin{cases} -\theta_{ij} / \sum_{j \in \Lambda_i} \theta_{ij} & j \in \Lambda_i, \\ 1 & j = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.9)$$

当 $i > j (i < j)$ 时 $\theta_{ij} = \frac{1-\theta}{2}$ ($\theta_{ij} = \frac{1+\theta}{2}$)，其中 i, j 标记节点加入到网络的时间，

$i > j$ 表示节点 i 比节点 j 年轻， Λ_i 是第 i 个节点邻居的集合，参数 $-1 < \theta < 1$ 控制着网络耦合不对称的程度。具体来说，当 $\theta < 0$ 时，老节点向新节点的耦合强度更强，老节点在网络同步中起主要作用，反之新节点起主要作用。 $\theta \rightarrow -1 (\theta \rightarrow +1)$ 标志着老的节点（新的）向新的（老的）节点单向耦合。 $\theta = 0$ 对应于前述 MZK 耦合方式在 $\beta = 1$ 的情形。

在这种耦合方式下耦合矩阵特征值一般是复数，并且除了一个特征值为零外，所有其他特征值的实部都大于零，而虚部的特征值都是以成对共轭形式出现 ($M \equiv \max_l \{|\lambda_l'|\} \lambda_1 = 0; \lambda_l = \lambda_l' + j\lambda_l'', l = 2, \dots, N$)。根据主稳定函数方法，若 R 是复平面上的同步稳定区域，那么网络同步稳定的条件是针对给定的耦合强度 σ ，所有 $\{\sigma\lambda_l, l = 2, \dots, N\}$ 都处于 R 中，并且 λ_N' / λ_2' 和 $M \equiv \max_l \{|\lambda_l'|\}$ 越小，网络的同步能力越强。从图 3.4 展示了耦合矩阵最大的特征值实部和非零最小特征值实部，两者的比值以及虚部的最大绝对值随参数 θ 的变化关系。从图 3.4 (a) 可以看到，对于随机网络 $\theta = 0$ 时曲线 $\lambda_N'(\theta)$ 和 $\lambda_2'(\theta)$ 都有最小值，也就是说“年龄”的引入降低了随机网络的同步能力。但是对于无标度网络，随着 θ 的减小，这两条曲线间的差异也一直在缩小，因此比值 $\lambda_N'(\theta) / \lambda_2'(\theta)$ 也在降低。这表明对于随机网络 $\theta = 0$ 时网络的同步能力最强。对于无标度网络， $\theta \rightarrow -1 (\theta \rightarrow +1)$ 对应于网络的最强（弱）的同步能力，如图 3.4b 所示。对于这两种网络，他们的虚部的差异很小，但随着 θ 绝对值的增加，虚部的值都在加大，如图 3.4c 所示。

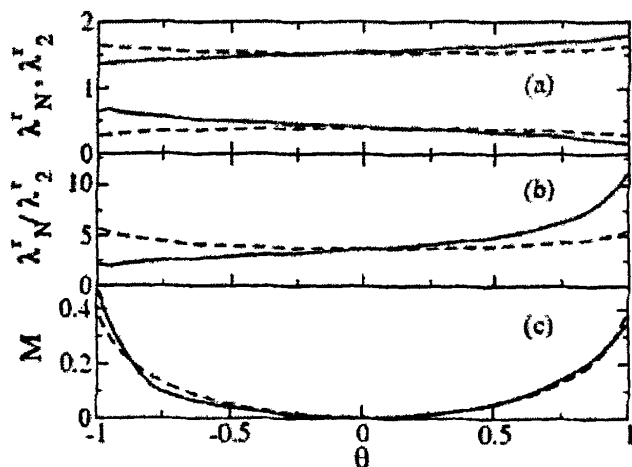


图 3.4 耦合矩阵最大特征值实部和非零最小的特征值实部，两者的比值以及虚部的最大绝对值随参数 θ 的变化关系，其中实线对应于一种无标度网络，虚线对应于随机网络；随机网络节点的“年龄”随机给出。[考文献 89]

3.2.4 基于网络节点具体的年龄特点来提高网络同步的方法

3.2.4.1 方法背景

MZK 方法提出掀起了利用调节耦合方式提高同步能力方法研究的高潮，其中 Huang 等人提出的利用无标度网络加入网络的先后，引入了年龄的概念，让每个节点赋给一定的年龄值，适当的增加年龄大的节点对年龄小的节点的耦合强度，提出了一种耦合方式以提高网络同步能力。但是我们注意到，Huang 等人提出的方法，只定性的分析了年龄的大小，假设某个节点的邻居节点年龄比它大（小），就固定的给其一个固定的大（小）的耦合强度。并没有考虑具体的年龄差异对网络同步能力的影响。而且他们提出的耦合矩阵的特征值是复数形式，要保证同步能力最强，必须同时保证实部特征值中的次大特征值与最小特征值比 $(\lambda_N^r/\lambda_2^r)$ 和虚部特征值的绝对值最大值 $(M \equiv \max_i \{|\lambda_i^i|\})$ 这两个值同时取得最小值。然而在真实系统中，网络中不同节点的影响力明显是不一样的。例如在社会中，同样是领导，国家主席对某个人的影响明显大于这个人经理对他

的影响。而且在 Huang 等人的讨论中，我们发现他们提出的这种方法很难保证 λ'_N/λ'_2 和 $M \equiv \max_i \{|\lambda'_i|\}$ 同时取得最小值，当 λ'_N/λ'_2 取得最小值时， $M \equiv \max_i \{|\lambda'_i|\}$ 却最大值，因此这很难保证网络具有最强的同步能力。根据不同节点有着不同的影响力这样的一个设想，我们给网络中每个节点赋给一个年龄，根据节点具体的年龄来调节网络的同步能力。

在这里，我们采用的网络模型是具有生长性的无标度网络模型，其生成规则是：从 m_0 个全连通的节点出发，每一时步增加一个新的节点，新节点随机选择 m ($< m_0$) 个已经存在在网络的节点，将该节点与这些节点相连，选择这些节点所依据的概率是：

$$p_i \propto \frac{k_i + B}{\sum_{j=1}^N (k_j + B)} \quad (3.10)$$

其中 k_i 和 p_i 分别表示第 i 个节点度和被选择概率， B 是节点的初始吸引度。通过调节可调参数 m , B 就可以得到不同的无标度网络构型了。我们知道在生长无标度网络中，节点是一个个的加入到网络中的，并且按照加入网络的时间先后被分别编号。这里我们用节点的编号来表示节点的年龄，节点的标号越小，其加入网络的时间越早，年龄越大，反之年龄越小。通过这样一个简单的规定，每个节点的年龄都被具体化了。

3.2.4.2 耦合矩阵形式及其特征值谱

在这里，我们考虑进去每个节点都具有之间独有的年龄特点，两个节点间的耦合强度大小取决于它们之间年龄大小差异的多少。因此我们的耦合矩阵具有如下形式：

$$G_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ e^{-\alpha(j-i)/N} & j \in \Lambda_i \\ \frac{1}{S_i} & \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (3.11)$$

其中 $S_i = \sum_{j \in \Lambda_i} e^{-\alpha(j-i)/N}$ ， α 是可调参数。当 $\alpha=0$ 该耦合方式退化为 MZK 耦合方式。当 $\alpha>0$ 时，年老节点的耦合强度强于年轻节点，在网络同步中起更重要作用；当 $\alpha<0$ 时，年轻节点的耦合强度强与年老节点，在网络同步中起更重

要作用。

下面我们来分析耦合矩阵的特征值谱的特性。将等式 (3.11) 写成如下两个矩阵相乘的形式

$$G = DL \quad (3.12)$$

其中

$$D = \text{diag}(e^{2\alpha}/S_1, e^{4\alpha}/S_2, e^{6\alpha}/S_3, \dots, e^{2N\alpha}/S_N) \quad (3.13)$$

是一个对角阵, $L = (L_{ij})$ 是一个对称的行元素为零的矩阵, 其对角元 $L_{ij} = -e^{-\alpha_i} e^{-\alpha_j}$ 。经过相似变换

$$\det(DL - \lambda I) = \det(D^{1/2} L D^{1/2} - \lambda I) \quad (3.14)$$

我们知道耦合矩阵 G 有与下列对称矩阵相同的特征值谱

$$H = D^{1/2} L D^{1/2} \quad (3.15)$$

因此, 虽然耦合矩阵 G 是非对称的, 但是 G 的所有特征值都是非负数, 并且网络连通时只有一个特征值为零。

3.2.4.3 数值模拟结果

这里, 我们用耦合矩阵特征值比 R 来表征网络的同步能力。首先我们研究了以下情况下网络同步能力的差异: 两个网络规模一样, 平均度 (m), 初始吸引度 (B) 都一样, 只是让初始网络的节点数目不一样, 研究在这种耦合方式下, 网络同步能力的变化情况, 结果如图 3.5 所示, 研究表明, 具有大的初始网络节点数的网络具有更好的同步能力。接下来我们还研究了不同网络初始吸引度下, 网络同步能力的变化情况, 结果显示在我们的耦合方式下, 不同的网络初始吸引度, 网络的同步能力没有多大的变化, 网络度分布的异质性对网络同步能力没有多大的影响, 如图 3.6 所示。

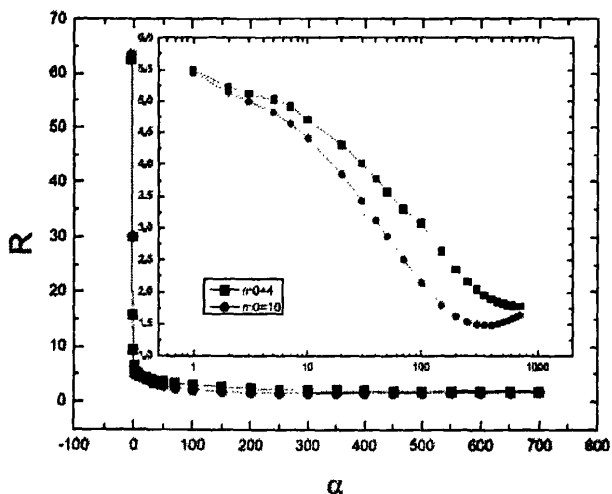


图 3.5 不同网络构型下（网络的节点数 $N=1000$ ，平均度 $m=3$ ，初始吸引度 $B=4$ ，红线代表初始节点 $m_0=10$ ，黑线代表 $m_0=4$ ），耦合矩阵特征值比 R 随可调参数 α 变化情况。图中每个数据都是经过 100 次平均所得。

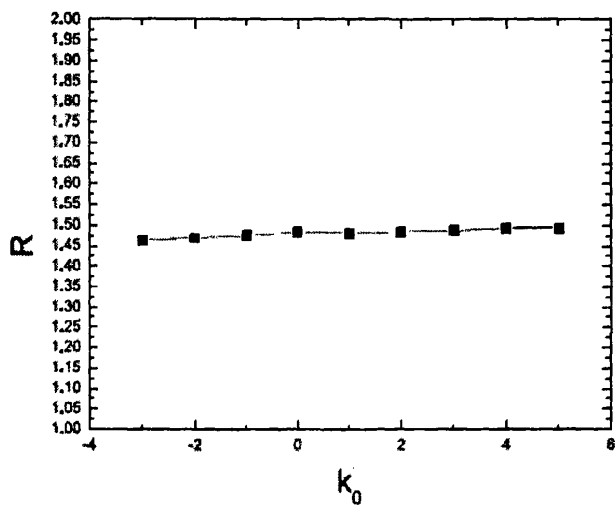


图 3.6 在可调参数取一定值，耦合矩阵特征值比与网络初始吸引度之间的关系。其中 $N=2000$ ， $m=3$ ， $m_0=10$ ， $\alpha=700$ ，图中每个数据都是经过 100 次平均所得。

图 3.7 给出了 R 在不同规模的网络中随着参数 α 的变化规律。从图中我们可以看出, 无论网络规模如何改变, R 都随着参数 α 的增加而迅速的减少。这就表明了, 在生长无标度网络中, 年老节点对年轻节点的耦合强度大于年轻节点对年老节点的耦合强度时, 网络更容易达到同步稳定状态。反之, 如果年轻节点对年老节点的耦合强度大于年老节点对年轻节点的耦合强度的话, 系统会很难达到同步稳定状态 (见插图 $\alpha < 0$ 的情况)。

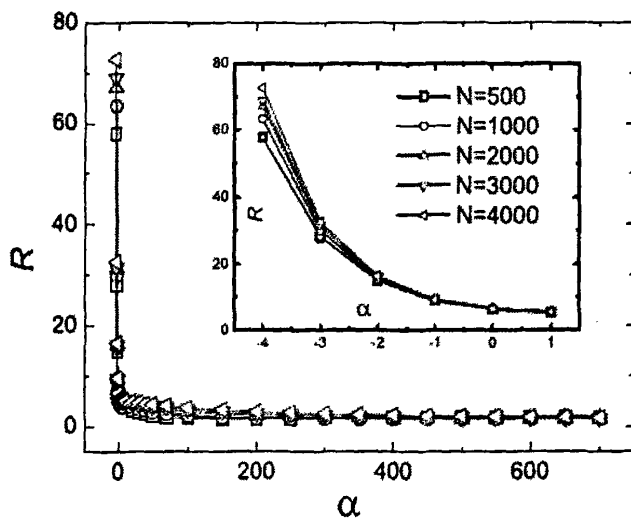


图 3.7 耦合矩阵特征值比 R 在不同网络规模下随着参数 α 的变化规律。插图显示的是当参数 $\alpha \in [-4, 1]$ 时的情况。该结果在 $m_0=10$, $m=3$, $B=4$ 的生长无标度网络模型经过 50 次构型平均得到的。[参考文献 98]

3.2.4.4 结论

同样是在网络中引入年龄的概念, Huang 等人提出的工作仅定性的讨论年龄的大小, 提出的耦合矩阵的特征值是复数形式, 为了考察网络同步能力的改变必须同时考察耦合矩阵特征值的实部和虚部这两个部分, 这给我们的工作带来了负担。而我们具体的定义了网络中每个节点的年龄, 使每个网络节点的年龄能用一个具体的量来表示, 提出的耦合矩阵虽然是非对称的, 但是可以证明其特征值全为实数, 考察网络的同步能力只需要考察耦合矩阵的特征值比 R 的大

小就可以了，免去了耦合矩阵特征值比是复数时候需要同时分析实部和虚部的麻烦。

3.3 动态耦合的方法

前面的讨论都是基于静态的耦合矩阵，就是说一旦耦合矩阵确定，其元素在同步过程中就不再改变。如果耦合矩阵是随时间变化或者耦合矩阵和耦合强度都随时间变化，将会出现什么情形呢？下面我们详细讨论这两种情况。

3.3.1 耦合矩阵结构不变，耦合强度随时间变化的情况

Zhou 和 Kurths 研究了无标度网络耦合强度随时间演化的情况^[91]，发现如果节点的耦合强度随该节点与其邻居之间局域同步性质自适应调节，即耦合强度是该节点与其邻居状态变量差异的函数，那么当网络在耦合的作用下演化达到稳定的同步状态时，节点间的耦合强度也会达到一个稳定值，其值与网络结构有关。重要的是，该方法能够显著地提高复杂网络的同步能力。在这种耦合方式下，其节点上的动力系统满足：

$$\dot{x}^i = F(x^i) + \sum_j M_{ij} [H(x^j) - H(x^i)] \quad (3.16)$$

其中矩阵 $M_{ij} = a_{ij}W_{ij}$ ， a_{ij} 是邻接矩阵的矩阵元， $M_{ij} > 0$ 是相邻节点 j 到 i 的耦合强度。在一致的耦合方式中， $M_{ij} = 1$ 。为了减少节点 i 与其邻居节点状态变量的差，假设从其 k_i 个邻居耦合到节点 i 的耦合强度随着时间单调增加，即

$$G_{ij}(t) = a_{ij}V_i(t), \quad V_i = \gamma\Delta_i / (1 + \Delta_i) \quad (3.17)$$

其中 $\Delta_i = \left| H(x^i) - (1/k_i) \sum_j a_{ij} H(x^j) \right|$ ，实数 $\gamma > 0$ 是自适应参数 (self-adaptive parameter)。并假设初始耦合强度是一个小的随机数。通过这样对耦合强度的选择，一个点的输入耦合强度 $W_{ij} = V_i$ 和它对改点的输出耦合强度 $W_{ji} = V_j$ 通常是非对称的。

根据主稳定函数判断网络同步稳定性的方法，当满足条件

$$\varepsilon_1 < \sigma\lambda_2 \leq \dots \leq \sigma\lambda_N < \varepsilon_2 \quad (3.18)$$

时，网络就能实现同步。 ε_2 的取值存在两种情况， $\varepsilon_2 = \infty$ 和 $\varepsilon_2 < \infty$ 。对于 $\varepsilon_2 = \infty$ ，

只需 $\sigma > \varepsilon_1 / \lambda_2$ 。现在 BA 网络模型下分别讨论这两种情况。

对于第一种情况, 当 $\Delta_i \geq 1$ 时, 网络中每个节点的输入强度随时间线性增加, 即 $W_{ij} = V_i(t) \approx \gamma t$, 如图 3.8 (a) 插图所示。经过一段很短的时间, 各节点的输入强度 $V_i(t)$ 趋于不同的稳定值 $\tilde{V}_i$ 。平均说来, 度大的点 (标号 i 比较小) 稳定的输入强度比较小 (如图 3.6(b) 所示)。

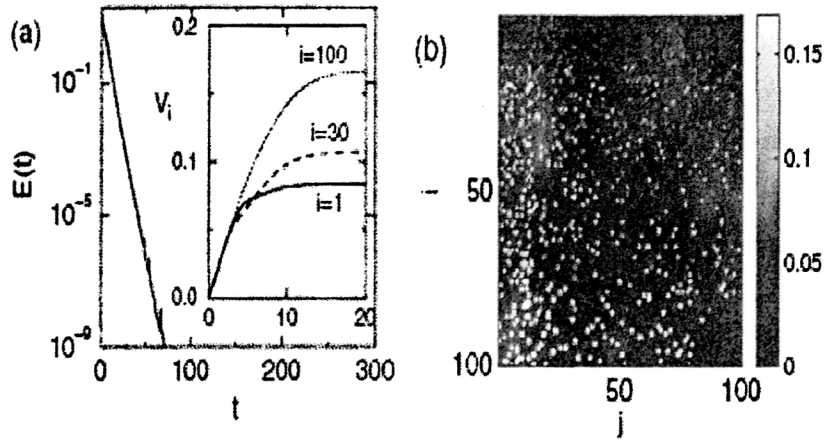


图 3.8 (a) 网络通过自适应耦合实现同步的过程, $E(t) = \left\langle \left\| x_i - \langle x' \rangle \right\| \right\rangle$, 其中 $\langle \cdot \rangle$ 表示平均值。(b) 通过自适应耦合实现同步稳定性后耦合矩阵也达到稳定状态。[参考文献 91]

为了更加细致地研究节点的输入耦合强度与其度的关系, 图 3.9a 给出了度为 k 的节点的平均耦合强度 $V(k) = (1 + N_k) \sum_{k_i=k} \tilde{V}_i$ 随度的变化关系图, 其中 N_k 是度为 k 的节点总数, 可以发现他们之间满足一种幂律关系:

$$V(k) \sim k^{-\theta} \quad (3.19)$$

而且幂指数 $\theta = 0.48 \pm 0.01$ 不随振子模型发生改变。重要的是, 这个幂指数不随最小度 (图 3.9b), 网络规模 (3.9c) 和自适应参数 γ (3.9d) 而改变。

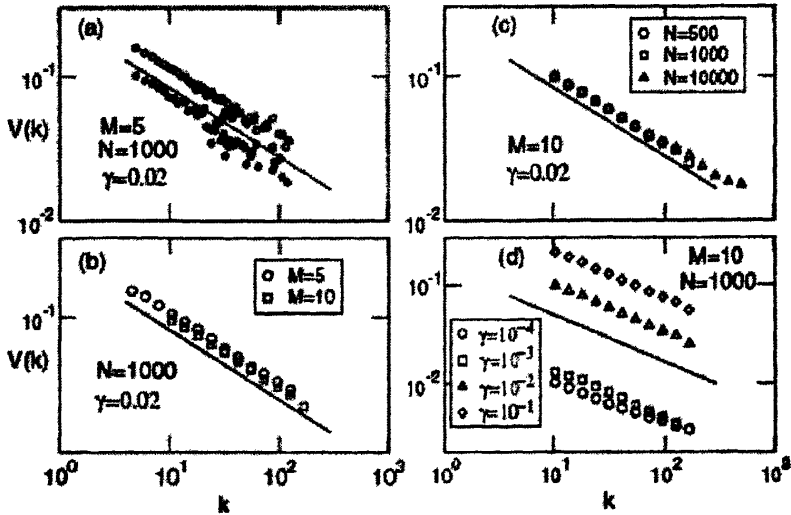


图 3.9 节点的平均输入强度随度的变化规律。

对于第二种情况，他们发现自适应参数 γ 存在一个上界 γ_c ，只有当 $\gamma < \gamma_c$ 时才能保证网络实现同步。对于不同的网络规模和振子系统，这个上界 γ_c 有细微差异。稳定后耦合矩阵满足与 (3.19) 式相同的幂律关系，但对于不同的振子系统幂指数有所不同。

图 3.10 给出了同步稳定后自适应耦合的稳定耦合矩阵的特征值比与传统耦合方式下的耦合矩阵的特征值比 R 随网络规模 N 的变化关系，由图可以看到前者有远强于后者的同步能力。

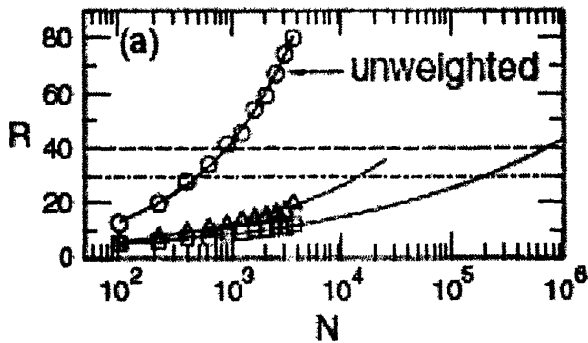


图 3.10 同步稳定后自适应耦合的稳定耦合矩阵特征值比与传统耦合方式下的耦合矩阵特征值比 R 随网络规模 N 的变化；图中 unweighted 标记传统的耦合方式[参考文献 91]

在利用 Zhou 和 Kurths 给出的自适应方法对节点进行耦合时,在同一时刻节点受到的周围邻居的耦合强度是相同。黄德斌等人研究了另外一种自适应耦合的方法^[92],节点受到其邻居耦合作用强度由该节点与其邻居节点状态变量的差决定:邻居的状态变量不同,耦合强度也不同。其耦合强度的变化率如下:

$$k_{i,j} = \gamma [H(x^i) - H(x^j)] \otimes [H(x^i) - H(x^j)] \quad (3.20)$$

在这种耦合方式作用下,网络的同步能力亦能得到增强。

3.3.2 耦合矩阵结构和耦合强度都随时间变化的情况

前面两个工作讨论的是耦合矩阵结构不变,仅耦合强度随时间变化的情况,Boccaletti 等人提出了一种不但耦合强度而且耦合矩阵结构也随时间变化的提高网络同步能力的方法^[93]。在这种情况下耦合矩阵是时变的(即 $G_{ij} = G_{ij}(t)$)并为对称。在所有时刻其行元素的和都为零,并且对角元为正,非对角元非正。因此,在所有时刻耦合矩阵都有一系列实特征值 $\lambda_i(t)[V_i(t)]$,使得 $G(t)V_i(t) = \lambda_i(t)V_i(t)$,并且 $V_j^T V_i = \delta_{ij}$ 。在这些特征值中除了一个为零外,其他都大于零。

令第 i 个节点变分为 $\delta x^i(t) = x^i(t) - x^s(t) = [\delta x_1^i(t), \dots, \delta x_{i,m}(t)]$,又令 $X = (x^1, x^2, \dots, x^N)^T$,并且 $\delta X = (\delta x^1, \delta x^2, \dots, \delta x^N)^T$,便得到

$$\delta \dot{X} = [I_N \otimes DF(x^s) - \sigma G(t) \otimes DH(x^s)] \delta X \quad (3.21)$$

其中 x^s 是稳定同步流形(synchronization manifold), $\otimes$ 表示直积(direct product), $DF(\cdot)$ 和 $DH(\cdot)$ 分别是函数 F 和 H 的 $m \times m$ 阶雅可比矩阵。由于任意 δX 可以写成 $\delta X = \sum_{i=1}^N v_i(t) \otimes \eta_i(t)$ 的形式,可以得到

$$\frac{d\eta_j}{dt} = K_j \eta_j - \sum_{i=1}^N v_j^T(t) \frac{dv_i(t)}{dt} \eta_i \quad (3.22)$$

其中 $k_j = [DF(x^s) - \sigma \lambda_j(t) DH(x^s)]$ 。

如果 $\sum_{i=1}^N v_j^T(t) \frac{dv_i(t)}{dt} \eta_i = 0$, 即所有特征向量为常数的时候, (3.22) 式就转

化为 $\frac{d\eta_i}{dt} = K_j \eta_j$ 。有两种方法可以实现这个目的：一是耦合矩阵是恒定的，二是从一个初始 $G_0 = G(t=0)$ 出发，耦合矩阵 $G(t)$ 在任意时刻与 G_0 是可交换的，即 $G_0 G(t) = G(t) G_0$ 。注意到初始矩阵可以写成 $G_0 = V \Lambda V^T$ ，其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ ，并且 $\Lambda_0 = \text{diag}[0, \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)]$ 是由 G_0 的特征值构成的对角阵。在任意时刻，可以得到与矩阵 G_0 可交换的矩阵 $G(t)$ 为

$$G(t) = V \Lambda(t) V^T \quad (3.23)$$

其中 $\Lambda(t) = \text{diag}[0, \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)]$ ，并且 $\lambda_i(t)$ 是随机的。这样，就得到了一系列元素和为零，对称且与矩阵 G_0 可交换的耦合矩阵。

利用这一系列可交换矩阵，就能实现耦合矩阵结构和权同时随时间变化的耦合同步过程，并可以证明这种同步方式也可以显著提高网络的同步能力[参考文献 93]。

第4章 通过优化算法（结构）提高网络的同步能力

4.1 通过全局优化算法提高网络的同步能力

由于网络的同步能力在一定条件下可以转化为计算网络特征值之比，因此，可以利用全局优化算法寻找给定条件下的具有最优或者近似最优同步能力的网络，并研究这类网络的结构特征。利用改进的模拟退火算法，Donetti 等人最早从这个角度出发讨论了该类问题^[79]。对于一个已知初始结构的网络，设计算法的步骤如下：

1. 随机选择一条边，然后去掉这条边并且在网络中重新生成一条边（这个过程称为一次重连）；
2. 如果该重连造成网络不连通，就拒绝这次重连，返回第 1 步；
3. 计算重连前后网络特征值比的差值：如果特征值比下降了（说明网络的同步能力得到了加强），就接收这次重连，并回到第 1 步；
4. 如果特征值比增加，就以一定的概率接收这次重连（差异越大，接收概率越小，拒绝概率也就越大）；返回第 1 步。

图 4.1 给出了特征值比随着算法迭代过程的变化趋势，可以发现，尽管初始条件不同，算法最后得到的最优化构型的特征值比几乎是一致的。事实上，算法采用的重连方法很快就会将网络的初始信息破坏掉，只有节点总数和平均度在迭代过程中一直保持不变。右图是一个优化得到的网络构型，它的度分布，介数分布，每个点到所有节点的平均距离分布，环长分布等都非常的均匀，是一个典型的同质网络（homogenous network）。

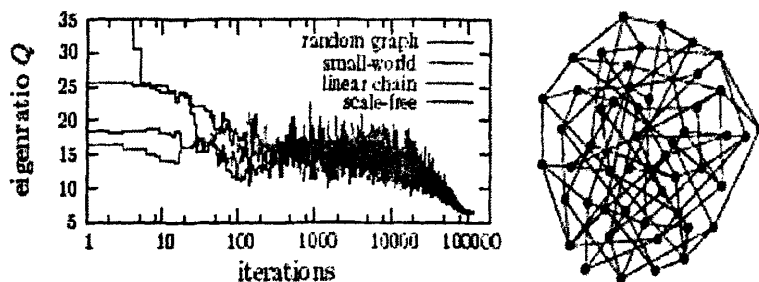


图 4.1 左侧图是特征值比 Q 随着算法迭代过程的变化趋势；右侧图是优化后得到的同步能力近似最优的网络构型。试验选用了节点为 50，平均度为 4 的网络。各种不同初始条件得到的最优化构型是基本一致的[参考文献 79]

在算法执行过程中，会出现一系列的网络（算法每接收一次重连就生成一个新网络），图 4.2 给出了这些网络的特征值比和一些结构参数之间的关系。与赵明等人的结论一致，降低网络的度分布方差和网络的平均距离都可以提高网络的同步能力。注意到介数分布方差与度分布方差具有极强的正相关，而平均介数与平均距离只相差一个与网络规模有关的常数因子，因图 4.2 中 2, 4 两图实际上并没有给出任何超出 1, 3 两图的新信息。

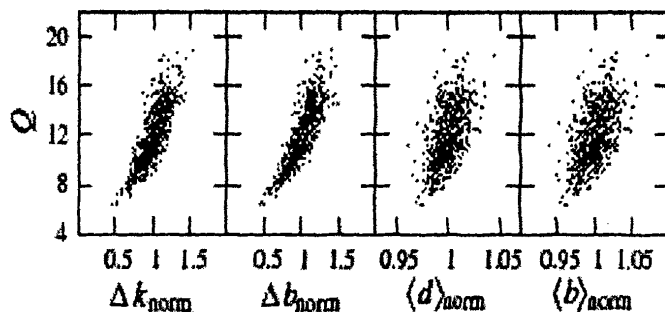


图 4.2 算法执行过程中出现的网络的特征值比与网络度分布方差,介数分布方差,平均距离以及平均介数的关联性质[参考文献 79]

Donetti 等人设计的网络优化算法，只对网络节点和边的数目有限制，而对网络中各个节点的度没有任何限制，因此优化后总是得到度分布很窄的同质网络。王冰等人^[80]利用第二章提到的随机交叉边的方法^[103,104]，研究了在各个节点度也保持不变的前提下进行优化的问题。这项研究采用了具有记忆的禁忌搜索算法^[81]，优化对象是度分布服从幂律分布的无标度网络。如图 4.3 所示，优化过程中，在特征值比降低的同时，网络的平均距离，簇系数，模式化程度以及度度相关性都明显降低，从一个侧面有力地支持了本文第二章第一小节开始介绍的大部分结论。

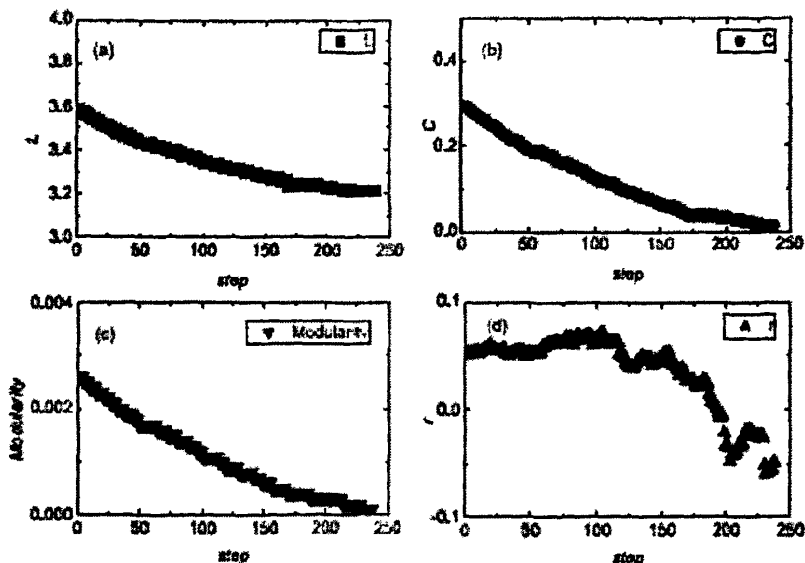


图 4.3 网络各项结构参数在优化过程中的变化趋势。(a) 图现实平均距离的变化, (b) 图显示了簇系数的变化 (c) 模块化的强度变化 (d) 相关性变化。这里模块化强度定义与具有群落结构的网络中的模块化程度稍有不同 (定性上相似性), 详情见文献[80]。实验中采用的初始网络节点数为 300, 平均度为 6 的 BA 网络[参考文献 78]

因此可知, 全局优化算法不但能够寻找到具有很强同步能力的优化网络结构, 而且有助于认识网络结构和同步能力之间的细致关系。但是, 由于全局优化算法具有相对高的时间和空间复杂新, 一般不能应用于较大规模的网络, 即使对于包含几百个节点的网络, 常常也无法找到其真正意义上的最优结构。而现实世界中, 复杂系统的节点千千万万, 想使用该方法提高网络同步能力就几乎不可能了。

4.2 Nishikawa 和 Motter 提出的使网络同步最优化的耦合方式

前面提出了各种提高网络同步能力的方法, 它们都在一定程度上使网络更易于同步, 那么有没有这样一种耦合方式, 当网络使用该方式进行耦合时, 无论节点上的动力学系统是什么类型, 网络都能迅速的同步, 也就是说网络的同步能力实现了最优化? 我们知道, 当同步区域封闭时, 用网络的耦合矩阵的特征值比 R 来描述网络的同步能力, R 值越小, 网络的同步能力越强, 1 是 R 所

能取的最小值。能保证网络的耦合矩阵的特征值比等于1的耦合方式,就是同步最优化的耦合方式。Nishikawa 和Motter 在这方面进行了尝试^[90]。下面我们就来介绍他们提出的网络耦合的方法和存在的问题,最后提出我们自己的同步最优化的节点间的耦合方式。

4.2.1 Nishikawa 和 Motter 提出的使网络同步最优化的耦合方式

经过研究,Nishikawa 和Motter 得出这样的结论:除掉一个点可以连接到所有其它节点的情况(比如星型网络和完全连通网络)外,一个给定的网络实现最优化的同步能力需要达到以下三个要求:

- (1) 网络中可以嵌入一个有向生成树(oriented spanning tree);
- (2) 网络中没有有向环;
- (3) 将每一个节点接收到的耦合信号进行归一化。

条件(1)保证网络的非零最小特征值大于零,从网络结构的角度看就是要求网络在有向网络的概念下是连通的,即总可以在网络中找到一点,从该点出发沿着有向边可以到达网络中所有的其它节点;条件(2)保证耦合矩阵的特征值是实数;条件(3) 保证耦合矩阵的所有特征值除一个为零外,所有其它的都相等。在这样的网络中可以将节点这样的排序,使得每个节点只从它的上级层次接收耦合信号,如图4.4(a)所示。在网络的这个层次结构中,耦合信息只是按顺序从高层次的节点向低层次的节点传输,没有反馈。符合这种要求的网络还包括有向生成树(oriented spanning trees),如图4.4(b)所示。从网络的任何一个节点出发,通过跨越所有节点的广度搜索(breadth-first)的方法,就可以获得一个有向生成树。

从物理的角度来说,条件(1)–(3)可以按照如下方式理解:在网络的层次结构中,第一层只有一个节点,该节点没有输入只有输出,扮演着“首领”节点的角色,统领着网络中的所有其它节点。如果恰当的选择网络的耦合强度,使得节点可以同步起来,那么紧连着第一层节点的第二层节点迅速与第一层节点同步,这样一层一层下来,网络达到整体的同步。

一个有趣的现象是,无向树状网络是一种最难同步的网络^[109],与这里的有向生成树是最易于同步的网络这一现象完全相反。这表明有向的相互作用对网络的同步起到重要的作用^[106]。另外,第一层次的节点的选择具有任意性,而不

必要选择度大的节点。进一步，耦合的方向也可以按需要选择而不必考虑被连接的两个节点的性质。

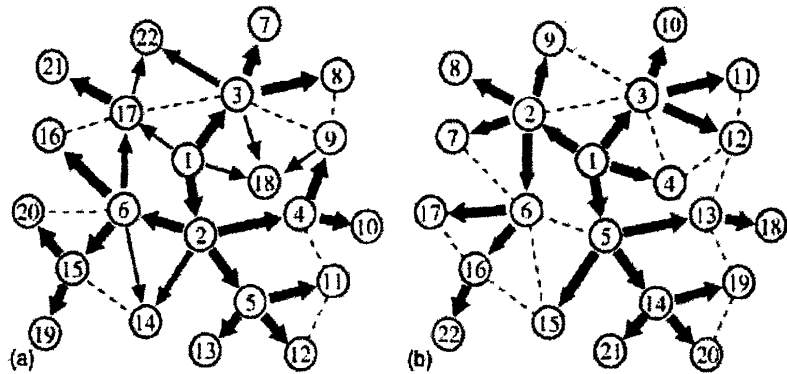


图 4.4 (a) 对于一个给定的网络构型，耦合权重和方向最优化分配的一个例子。每个节点的所有接收到的耦合信号的量都被标准化到 λ ，其中三种不同粗细的带箭头的直线分别表示耦合的权重为 λ 、 $2/3\lambda$ 和 $\lambda/3$ 和，虚线表示耦合的强度为零。节点的编号和颜色表示网络的层次结构：耦合信号只从高层次的节点到低层次的节点传输。(b) 通过广度搜索(breadth first search)找到的同样的网络结构下的有向生成树。[参考文献 90]

4.2.2 Nishikawa 和 Motter 的耦合方式所存在的问题

Nishikawa 和 Motter 提出的耦合方式可以使网络的同步能力达到了最优化，该方法是一种数学上的操作，利用它所得到的耦合网络(根据耦合矩阵所生成的网络)可以有无数种构型，但其完全失去了复杂网络的结构信息。虽然在数值上该方法使网络具有了最优化的同步能力，但同时也使网络完全失去了物理意义。这一点对于物理学家来说是难以接受的。那么是否存在这样的一种耦合方法，它既可以使网络达到最优化的同步能力，又保留了复杂网络的结构信息呢，我们就试图找出这样的方法。

4.2.3 利用网络节点的年龄特性的耦合方式使网络达到同步最优化

注意到在前面的利用节点具体年龄特性提高生长无标度网络同步能力的数值模拟中，当参数 $\alpha \rightarrow \infty$ 时，在网络保持连通，那么耦合矩阵特征值比 $R=1$ ，此时网络的同步能力达到最优化。

当参数 α 取值趋向于无穷的时候，每个节点只受其年龄最老邻居节点的耦合，不受其他任何节点的耦合，而此时网络中年龄最老的节点不受任何节点的耦合，此时耦合矩阵变成一个除了第一个对角元为零其他对角元都为 1 的下三角矩阵（注：矩阵行元素相加和为零）。因此此时耦合矩阵非零特征值都为 1，耦合矩阵特征值比 $R=1$ ，网络达到了同步最优化情况。与 Nishikawa 和 Motter 提出的耦合方式相比，我们提出的耦合方法更简单，更节省资源，不需要了解网络的全局信息，不需要经过大量复杂的计算，并且得到的耦合网络依然保持复杂网络的结构特征，仅仅通过在生长无标度网络上简单的引入了节点具有年龄的概念，以节点编号代表节点年龄，简单可行就得到了同步最优化网络。而经过我们这样一个微小精妙的设计，我们提出的利用网络节点具有年龄的特点的耦合方法虽然简单但确能是网络达到同步最优化，而且保持了复杂网络的结构特征。该部分工作已经发表在 *Phys. Rev. E* 76, 057103(2007)。

第5章 总结与展望

5.1 本文工作的总结

科学的发展和技术的进步促进了复杂网络这一学科的出现与发展,这是人们对世界认识的进步。随着小世界 (Small-world)^[1]效应和无标度 (Scale-free) 特性^[20]的发现,最近几年来复杂网络的研究吸引了包括物理、数学、生物、信息科学、管理科学等各个领域科学家以及工程技术人员的广泛关注^[1,2,4-6,94-97]。人们研究复杂网络的最终目的之一是理解发生在网络上的各种动力学过程,包括传染疾病如何通过人与人之间的接触传播,信息包如何在计算机互联网上有效传输,大型电力网络的局部故障如何通过级联放大最终影响整个网络,等等。在这些网络的动力学研究中,网络上动力学系统的同步问题也是研究的热点问题。复杂网络上动力系统的同步问题是一个既古老又年轻的课题。说它古老是因为人们关于同步现象的研究已经有了几百年的历史,又说它年轻是因为从复杂网络的角度研究同步的现象仅仅有不到十年的时间。目前是该研究领域的蓬勃发展的时期,各种各样关于网络同步的有趣现象不停地被揭示出来,人们对网络的结构特征量与网络的同步能力之间的关系的认识不断深化,各种巧妙的提高网络同步能力的方法纷纷被提出……人们对复杂网络上动力系统同步的知识每天都在增加着。

本文的作者就是在这样的时刻进入到该领域的研究,有幸见证了一个学科的成长过程,在不到三年的研究时间里,作者经历了认识该领域、熟悉把握该领域的发展状况、进而为该领域的成长作出自己的贡献的过程。虽然做出的贡献非常小,可能很快就湮没在历史发展的洪流中,但至少在工作过程中作者学到了很多经历了很多体会了很多并得到了很多快乐。下面,我们就总结一下这段时间完成的一些工作:

受到Huang等人工作的影响,我们在生长无标度网络中引入年龄的概念,使每个节点都具有之间独有的年龄。在生长无标度网络的生成过程中,节点是一个个加入到网络中来,而且每加入一个节点给节点一个编号。根据节点加入网络的时间的不同,我们用节点的编号表示节点的年龄。编号越小代表节点年龄

越老, 编号越大代表年龄越小。我们构造了一种新的耦合方式来对节点进行耦合, 虽然在这种耦合方式下, 节点是非对称耦合的, 但是可以证明其耦合矩阵所有特征值都为实数。考察网络上的同步能力只需考察耦合矩阵的特征值比 R 就可以了, R 值越小网络的同步能力越强。这样比起Huang等人提出的耦合方式下, 耦合矩阵特征值比都为虚数, 要考察网络的同步能力, 必须同时考察实部和虚部简单多了。

我们知道当网络的同步区域封闭时, 可以用耦合矩阵的特征值比 R 来表征网络的同步能力, R 值越小网络的同步能力越强。 R 可能取的最小值是1, 那么如果能够找到使耦合矩阵的特征值比为1的耦合方式, 就使得网络的同步能力最优化了。Nishikawa等人采用广度搜索的方法来寻找耦合网络, 所得到的耦合网络的特征值比就是1。但这种方法是一种数学的方法, 所找到的耦合网络也失去了网络的结构特性, 因此并不为物理学家所接受。而我们所提出的耦合方式却可以在不改变网络结构特征的情况下, 通过调节可调参数, 轻松的实现网络同步能力最优化, 是一种简单而有价值的提高网络同步能力的方法。这部分工作内容发表于Phys Rev E 76, 057103(2007)。

5.2 对未来工作的展望

关于复杂网络上动力系统同步的研究仍然处于蓬勃发展时期, 经过了理论分析同步条件、各种网络结构同步现象的发现、复杂网络的结构特征量与网络的同步能力之间的关系的分析、各种提高网络同步能力方法的提出等几个发展阶段, 复杂网络上动力系统同步的研究已经到达了应用和网络的细致同步过程以及网络的局域同步性质的研究阶段。下面就是我们认为的这个领域可能存在的几个问题。

(1) 网络的结构决定了网络的同步规律, 网络的同步规律反映了网络结构的一些信息。Arenas、Díaz-Guilera 和Pérez-Vicente 提出可以用网络的同步过程来揭示网络的具有层次的群落结构^[100]。但网络的结构非常复杂, 除了层次性和群落结构外网络还有很多其它的结构特性, 那么如何利用网络的同步来揭示网络的结构特征依然是一个富有挑战的课题。

(2) 之前对于复杂网络同步性质主要关注的一点就是网络能否同步, 而网络上的节点从开始演化到最后达到整体的同步的这个过程没有仔细的考察。实

际上,网络实现最终的同步不是一蹴而就的,必然要有一个复杂的过程,在这个过程中具有不同度、簇系数等等特征的节点其同步肯定存在一个先后的问题,并且网络的最终的同步态主要由哪些节点决定也是一个值得探讨的问题。细致研究网络的同步过程有助于我们对网络同步的理解,并为网络同步的应用提供基本的知识。

(3) 之前对于复杂网络上动力系统同步现象的研究的另一个局限就是大家考察的都是网络的整体同步的情况,而没有考察虽然经过耦合但网络没能实现整体同步时的情形。在这种情况下,网络虽然没有实现整体的同步,但由于耦合的作用,网络肯定会存在局部的同步或接近同步的区域,那么这些区域有什么样的结构特点,在不同的耦合方式及强度下会出现什么样的分布方式呢?这些都是有待解决的问题。

参考文献

- [1] R. Albert, and A. -L. Barabási, *Rev. Mod. Phys.* 74, 47-97 (2002).
- [2] M. E. J. Newman, *SIAM Rev.* 45, 167-256 (2003).
- [3] X. F. Wang, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 12, 885-916 (2002).
- [4] S. N. Dorogovtsev, and J. F. F. Mendes, *Adv. Phys.* 51, 1079-1187 (2002).
- [5] 吴金闪, 狄增如, *物理学进展*, 24, 18-46 (2004)。
- [6] 周涛, 柏文洁, 汪秉宏, 刘之景, 严钢, *物理*, 34, 31-36 (2005)。
- [7] D. J. Watts, and S. H. Strogatz, *Nature*, 393, 440-442 (1998).
- [8] M. Faloutsos, P. Faloutsos, and C. Faloutsos, *Computer Communications Review*, 29, 251-262 (1999).
- [9] F. Liljeros, C. R. Rdlings, L. A. N. Amaral, H. E. Stanley, and Y. Aberg, *Nature*, 411, 907-908 (2001).
- [10] H. Ebel, L. -I. Mielsch, and S. Borbholdt, *Phys. Rev. E* 66, 035103 (2002).
- [11] W. Li, and X. Cai, *Phys. Rev. E* 69, 046106 (2004).
- [12] J. Bond, and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, London and Basingstoke, MacMillan Press LTD, 1976.
- [13] J. -M. Xu, *Topological Structure and Analysis of Interconnection Network*, London, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [14] P. Erdős, and A. Rényi, *Publications Mathematicae*, 6, 290-297 (1959).
- [15] P. Erdős, and A. Rényi, *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Science*, 5, 17-61 (1960).
- [16] P. Erdős, and A. Rényi, *Acta Mathematica Scientia Hungary*, 12, 261-267 (1961).
- [17] B. Bollobás, *Random Graphs*, New York, Academic Press, 2001.
- [18] D. J. Watts, *Networks, dynamics, and the small world phenomenon*, *Am. J. Sociol.* 105, 493-592 (1999).
- [19] D. J. Watts, *Small Worlds*, Princeton, Princeton University Press, 1999.
- [20] A. -L. Barabási, and R. Albert, *Science*, 286, 509-512 (1999).
- [21] A. -L. Barabási, and R. Albert, and H. Jeong, *Physica A* 272, 173-187 (1999).
- [22] G. Huygenii, *Horoloquim oscilatoriumm*, France, Parisiism, 1673.

- [23] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization, a universal concept in nonlinear sciences*, New York, Cambridge University Press, 2001.
- [24] S. H. Strogatz, *SYNC-How order emerges from chaos in the universe, nature, and daily life*, New York, Theia Press, 2003.
- [25] S. H. Strogatz, and I. Stewart, *Sci. Am.* 269, 102-109 (1993).
- [26] C. M. Gray, *Comput J. Neurosci.* 1, 11-38 (1994).
- [27] L. Glass, *Nature*, 410, 277-284 (2001).
- [28] Z. Nédá, E. Ravasz, T. Vicsek, Y. Brechet, and A. -L. Barabási, *Phys. Rev. E* 61, 6987-6992 (2000).
- [29] A. T. Winfree, *Geometry of biological time*, New York, Springer-Verlag, 1990.
- [30] J. B. Buck, and E. Buck, *Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies*, *Science*, 159, 1319-1327 (1968).
- [31] J. B. Buck, *Synchronous rhythmic flashing of fireflies*, *Quarterly Review of Biology*, 13, 301-314 (1938).
- [32] J. B. Buck, *Synchronous rhythmic flashing of fireflies II*, *Quarterly Review of Biology*, 63, 265-289 (1988).
- [33] 郑志刚, 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为, 北京, 高等教育出版社, 2004 年.
- [34] R. Albert, H. Jeong, and A. -L. Barabási, *Nature*, 401, 130-131 (1999).
- [35] 张培培, 何阅, 周涛, 苏蓓蓓, 常慧, 周月平, 汪秉宏, 何大初, *物理学报*, 55, 60-67 (2006)。
- [36] O. Sporns, D. R. Chialvo, M. Kaiser, and C. C. Hilgetag, *Trends in Cognitive Sciences*, 8, 418-425 (2004).
- [37] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltvai, and A. -L. Barabási, *Nature*, 407, 651-654 (2000).
- [38] M. Sigma, and G. A. Cecchi, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 99, 1742-1747 (2002).
- [39] T. Zhou, B. -H. Wang, P. -M. Hui, and K. -P. Chan, *Physica A* 367, 613-618 (2006).
- [40] L. M. Pecora, and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* 80, 2109-2112 (1998).
- [41] J. F. Heagy, T. L. Carroll, and L. M. Pecora, *Phys. Rev. E* 50, 1874-1885 (1994).
- [42] J. F. Heagy, T. L. Carroll, and L. M. Pecora, *Phys. Rev. Lett.* 74, 4185-4188 (1995).
- [43] P. M. Gade, H. Cerdeira, and R. Ramaswamy, *Phys. Rev. E* 52, 2478-2485 (1995).
- [44] P. M. Gade, *Phys. Rev. E* 54, 64-70 (1996).
- [45] G. Hu, J. Yang, and W. Liu, *Phys. Rev. E* 58, 4440-4453 (1998).

- [46] K. S. Fink, G. Johnson, T. Carroll, D. Mar, and L. Pecora, *Phys. Rev. E* 61, 5080-5090 (2000).
- [47] J. Jost, and M. P. Joy, *Phys. Rev. E*, 65, 016201 (2001).
- [48] X. F. Wang, and G. Chen, *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* 49, 54-62 (2002).
- [49] M. Barahona, and L. M. Pecora, *Phys. Rev. Lett.* 89, 054101 (2002).
- [50] Y. Chen, G. Rangarajan, and M. Ding, *Phys. Rev. E* 67, 026209 (2003).
- [51] O. E. Rössler, *Phys. Lett. A* 57, 397-398 (1976).
- [52] Y. Jiang, M. Lozada-Gassou, and A. Vinet, *Phys. Rev. E* 68, 065201 (2003).
- [53] C. W. Wu, L. O. Chua, *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* 42, 430-447 (1995).
- [54] X. F. Wang, and G. Chen, *Int. J. Bifurcation and Chaos* 12, 187-192 (2002).
- [55] G. Rangarajan, M. Ding, *Phys. Lett. A* 296, 204-209 (2002).
- [56] C. W. Wu, *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* 3, 287-290 (1998).
- [57] C. W. Wu, *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* 3, 302-305 (1998).
- [58] M. Timme, F. Wolf, and T. Geisel, *Phys. Rev. Lett.* 89, 258701 (2002).
- [59] M. G. Earl, and S. H. Strogatz, *Phys. Rev. E* 67, 036204 (2003).
- [60] Y. Kuramoto, in *Proceedings of the International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, edited by H. Araki New York: Springer-Verlag, 1975.
- [61] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* Berlin : Springer-Verlag, 1984.
- [62] Y. Kuramoto and I. Nishikawa, *J. Stat. Phys.* 49, 569-605 (1987).
- [63] H. Daido, *Prog. Theor. Phys.* 77, 622-634 (1987).
- [64] H. Daido, *Phys. Rev. Lett* 68, 1073-1076 (1992).
- [65] P. M. Gade, and C. -K. Hu, *Phys. Rev. E* 60, 4966-4969 (1999).
- [66] P. M. Gade, and C. -K. Hu, *Phys. Rev. E* 62, 6409-6413 (2000).
- [67] F. Qi, Z. Hou, and H. Xin, *Phys. Rev. Lett.* 91, 064102 (2003).
- [68] H. Hong, M. Y. Choi, and B. J. Kim, *Phys. Rev. E* 65, 026139 (2002).
- [69] L. F. Lago-Fernández, R. Huerta, F. Corbacho, and J. A. Sigüenza, *Phys. Rev. Lett.* 84, 2758-2761 (2000).
- [70] T. Nishikawa, A. E. Motter, Y. -C. Lai, and R. C. Hoppensteadt, *Phys. Rev. Lett.* 91, 014101 (2003).
- [71] H. Hong, B. J. Kim, M. Y. Choi, and H. Park, *Phys. Rev. E* 69, 067105 (2004).
- [72] P. N. McGraw and M. Menzinger, *Phys. Rev. E* 72, 015101 (2005).

- [73] Ming Zhao, Tao Zhou and Bing-Hong Wang, *Phys. Rev. E* 72, 057102 (2005)
- [74] K.-I. Goh, B. Kahng, and D. Kim, *Phys. Rev. Lett.* 87, 278701 (2001)
- [75] Tao Zhou, Ming Zhao and Bing-Hong Wang, *Phys. Rev. E* 73, 037101 (2006)
- [76] Xu J-M. *Topological Structure and Analysis of Interconnection Network*, London: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [77] Barnes G H, Brown R M, Kato M, et al. *IEEE Trans. Comput.* 17:746-757 (1968)
- [78] Chuan-Yang Yin, Wen-Xu Wang and Guangrong Chen et al. *Phys. Rev. E* 74, 047102 (2006)
- [79] L. Donetti, P I Hurtado and M. A. Munoz, *Entangled*, *Phys. Rev. Lett.* 95 188701 (2005)
- [80] Bing Wang, Tang H-W, and Tao Zhou et al. *arXiv:cond-mat/0512079*
- [81] Ji M-J and Tang H-W. *Appl. Math. Comput* 159, 449 (2004)
- [82] A. E. Motter, C. Zhou, and J. Kurths, *Phys. Rev. E* 71, 016116 (2005)
- [83] F. R. K. Chung, *Spectral Graph Theory* (AMS, Providence, 1994)
- [84] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, *Phys. Rev. E* 64, 026118 (2001)
- [85] F. Chung, L. Lu, and V. Vu, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 100, 6313-6318 (2003)
- [86] Z. H. Liu, Y.-C. Lai, N. Ye, and P. Dasgupta, *Phys. Lett. A* 303, 337 (2002).
- [87] M. Chavez, D.-U. Hwang, A. Amann, H. G. E. Hentschel, and S. Boccaletti, *Phys. Rev. Lett.* 94, 218701 (2005).
- [88] Ming Zhao, Tao Zhou and Bing-Hong Wang et al., *Eur. Phys. J. B* 53, 375 (2006)
- [89] D. -U. Hwang, M. Chavez, A. Amann, and S. Boccaletti, *Phys. Rev. Lett.* 94, 138701 (2005).
- [90] T. Nishikawa, A. E. Motter, *Phys. Rev. E* 73, 065106 (2006).
- [91] C. Zhou and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* 96, 164102 (2006).
- [92] D. Huang, *Phys. Rev. E* 74, 046208 (2006).
- [93] S. Boccaletti, D.-H. Huang and M. Chavez et al. *Phys. Rev. E* 74, 016102 (2006).
- [94] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou, *Phys. Rep.* 366, 1-101 (2002).
- [95] 汪小帆, 李翔, 陈关荣, *复杂网络理论及其应用*, 北京, 清华大学出版社, 2006
- [96] 汪秉宏, 周涛, 何大韧, *中国基础科学*, 2005, 3:37-43.
- [97] 方锦清, *自然杂志*, 2005, 27(5):269-273.
- [98] Yu-Feng Lu, Ming Zhao, and Tao Zhou et al., *Physical Review E* 76, 057103 (2007)
- [99] Dorogovtsev S N, Mendes J F F. *Phys. Rev. E* 2002, 62(2):1842-1845
- [100] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, and C. J. Pérez-Vicente, *Phys. Rev. Lett.* 96, 114102 (2006).

参考文献

- [101] P.N. McGraw and M. MenZinger, Phys. Rev. E 72, 015101 (2005)
- [102] M. Zhao, T. Zhou, B. -H. Wang, G. Yan, H. -J. Yang, and W. -J. Bai, Physica A, 371, 773-780 (2006).
- [103] S. Maslov, K. Sneppen, Science, 296, 910-913 (2002).
- [104] B.J. Kim, Phys. Rev. E 69, 045101 (2004).
- [105] S.-H. Yook and H. Meyer-Ortmanns, Physica A 371 (2), 781-789 (2006).
- [106] Z. Zheng G. Hu, and B. Hu, Phys. Rev. E 62, 7501-7504 (2000).

致 谢

值此毕业论文顺利完成之际,谨向我的导师汪秉宏教授致以最衷心的感谢。感谢汪老师给了我在科大读研的机会,感谢汪老师给我提供的自由宽松的科研环境,感谢汪老师多次资助我参与各种学术交流、学习,感谢汪老师无私的提供各种有关科研学习的信息,感谢汪老师对我日常生活的关心。汪老师渊博的专业知识,严谨的治学态度,精益求精的工作作风,诲人不倦的高尚师德,严以律己、宽以待人的崇高风范,朴实无华、平易近人的人格魅力对我影响深远。

感谢赵明、周涛、高昆、付传技,唐传龙等师姐师兄们在这三年中给我提供的帮助,是他们无私的帮助,不厌其烦的指导,才得以让我很快的进入了复杂性科学这个领域,并作出自己的贡献。同时我要感谢实验室所有的同学对我论文工作的支持和帮助,对我日常生活的关心;谢谢你们了。

感谢学校各个部门的行政人员和后勤的工人们,这些人热情高效的工作,使我们得以全身心的投入到科研工作中去。

感谢我的母校中国科学技术大学,它营造出的自由、平等、开放的学习、科研环境让我受益良多。

感谢我的父母,感谢他们一直以来对我的宠爱和支持,是他们的辛勤工作,养育着我,为我创造了广阔的发展空间,让我可以自由的选择自己喜欢做的事情;是他们的悉心教育,让我掌握了前进的方向;同时也感谢我的姐姐弟弟们,感谢你们在我心情低落时对我的鼓励,感谢有你们和我一起成长,加油。

最后要感谢国家重点基础研究发展计划(973 项目, 编号: 2006CB705500), 国家自然科学基金(项目编号: 10635040, 10532060, 10472116, 70271070), 理论物理前沿课题专款(NSFC 编号: 10547004, A0524701)等项目的支持。

攻读硕士学位期间发表的论文

本人在研究生期间共发表论文 6 篇，其中被 SCI 收录的 4 篇，列表如下：

- [1] **Yu-Feng Lu**, Ming Zhao, Tao Zhou and Bing-Hong Wang*, Enhance synchronizability via age-based coupling , Pysical Review E 76, 057103(2007) (SCI 收录)
- [2] Gao Kun,, Wang Bing-Hong *, Fu Chuan-Ji, **Lu Yu-Feng**, Cluster-size dependent randomization traffic flow model , Chinese Physics Vol16,No11(2007)3483-3493 (SCI 收录)
- [3] Shou-Xin Hu, Kun Gao*, Bing-Hong Wang, **Yu-Feng Lu**, Chuan-Ji Fu, Abnormal hysteresis effect and phase transitions in a velocity-difference dependent randomization CA model , Physica A 386(2007)397-406 (SCI 收录)
- [4] Hu Show-Xin, Gao Kun, **Lu Yu-Feng**, Wang Bing-Hong*, Cellular Automaton model considering headway-distance effect, Chinese physics letter (SCI 收录)
- [5] 高昆, 汪秉宏, 付传技, 杨会杰, 陆玉凤, 随机延迟概率与堵塞集团长度相关的 NS 模型, 中国科学院研究生学报(2006)
- [6] 付传技, 汪秉宏, 殷传洋, 高昆, 陆玉凤, 双通道决策交通流的解析研究, 全国博士生学术论坛(物理学)论文集(2006)