

中文摘要

随着发电机组向大型化发展,特别是其高电压、大电流的进一步提高,势必导致发电机磁场强度和电场强度的提高,发电机定子壳体的磁应力张量、电应力张量也将增加,发电机中的磁固耦合作用越来越不容忽视,对大型水轮发电机组定子系统的磁固耦合动力学进行深入的研究变得越来越重要。本文以 ABB 公司产的 777.8MW 水轮发电机组为实际工程背景,对大型水轮发电机组定子系统三相对称稳态运行状态下的磁固耦合振动进行了系统的研究。文中通过建立定子系统的双壳系统模型,结合圆柱壳的梁函数组合法,来分析双壳系统的固有频率和振型,并建立了定子系统的磁固耦合动力学方程,用多尺度法分析了定子系统的磁固耦合非线性振动。主要工作概括为以下几个部分:

- 一 建立水轮发电机组定子系统的双壳模型,把定子系统简化为弹性联系的两个同心圆柱壳,连接弹簧的刚度冷态时视为零,热态时取为无穷大。
- 二 计算了三相对称稳态运行状态下考虑定子铁心径向振动位移与气隙磁场的相互耦合时,作用于水轮发电机定子铁心内圆表面的电磁力。计算电磁力时,考虑了定子铁心的径向振动位移对电磁力的影响。
- 三 利用圆柱壳的梁函数组合法给出了水轮发电机组定子系统双壳模型的固有频率和振型的表达式,得到了水轮发电机组定子系统双壳模型的固有频率。
- 四 建立系统振动的微分方程,并利用多尺度法分析了水轮发电机组定子系统双壳模型由电磁激发的强迫共振的非线性动力学特性。
- 五 分析了电磁刚度对水轮发电机定子系统固有频率的影响,电磁刚度对低阶固有频率影响较大,因此电磁刚度对低阶固有频率的影响是不能忽视的。

关键词: 水轮发电机组 定子系统 双壳系统 固有特性 梁函数组合法
磁固耦合 非线性振动 多尺度法 强迫共振 电磁刚度

ABSTRACT

As the turbogenerator are developing towards the large scale, especially with it's voltage and electric current enhancing even more than before, inevitable results are that electromagnetism field intensity and electromagnetism stress of turbogenerator are increased, and that the magnetism and solid coupling in the turbogenerator become more and more apparent. Hence it becomes more important to study the magnetism and solid coupling dynamics of turbogenerator stator system. The engineering background of the thesis is based on the 777.8MW water turbogenerator produced by ABB Corporations. Magnetism and solid coupling vibration of water turbogenerator stator system is studied systematically when three-phase symmetric steady state. Through establishing a double-shell model of the water turbogenerator stator system, and the natural characteristic of the double-shell stator system is derived by means of the combination method of beam function. Magnetism and solid coupling dynamic equation of the stator system is proposed. By using the method of multiple scales for nonlinear oscillation, nonlinear oscillation of magnetism and solid coupling of stator system is investigated. The main work can be outlined as follows:

(1) To establish the double-shell from the water turbogenerator stator system, the water turbogenerator stator system is simplified as double cylinder shells which contact with springs each other. The spring stiffness of cold state is considered as zero, and the spring stiffness of hot state is regarded as infinity.

(2) In three-phase symmetric steady state the electromagnetic forces acting on the inner surface of the water turbogenerator stator core are obtained in consideration of the radial vibration displacements with the magnetic field in air gap coupling of the stator core. While calculating the electromagnetic forces, the effect of the radial vibration displacements of stator core on the electromagnetic forces is taken into account.

(3) By means of the combination method of beam function, the analytic expressions formula of the inherent vibration modes of the stator system double-shell model are derived, and the inherent frequency of the stator system double-shell model is obtained.

(4) The stator system vibration differential equation is established. Through using the method of multiple scales, the nonlinear dynamic characteristics of the forced resonances of the stator system double-shell model excited by electromagnetic forces are analyzed.

(5) The effect of electromagnetism stiffness upon the inherent frequency of the stator system is analysed.

Key words: Water turbogenerator Stator system Double-shell system Inherent characteristic The combination method of beam function Magnetism and solid coupling Nonlinear oscillation Method of multiple scales Forced resonances Electromagnetism stiffness

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作和取得的研究成果，除了文中特别加以标注和致谢之处外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 天津大学 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

学位论文作者签名：黄学君 签字日期：2004 年 2 月 20 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 天津大学 有关保留、使用学位论文的规定。特授权 天津大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，并采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编以供查阅和借阅。同意学校向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘。

（保密的学位论文在解密后适用本授权说明）

学位论文作者签名：黄学君

签字日期：2004 年 2 月 20 日

导师签名：邱家俊

签字日期：2004 年 2 月 21 日

第一章 绪论

振动问题分为线性振动问题和非线性振动问题，其中非线性振动问题是物理学、技术科学及工程中广泛存在的问题。一般的振动系统，如机械系统、电磁系统、控制系统、跟踪系统等等大多存在非线性因素。从二十世纪二十年代以来，对非线性振动系统的研究取得了许多重要的成果，解决了许多工程中实际存在的非线性振动问题。非线性振动问题是一个很复杂的问题，引起非线性振动的因素有很多：有来自系统的物理因素，如复合材料的非线性、粘弹性的非线性等；有来自耗散系统的因素，如结构阻尼、油膜阻尼、高速流体阻尼、电磁阻尼、干摩擦等；有来自几何的、运动的、结构的及机电耦联的因素。正是由于这些非线性因素的影响，使得系统的动力学行为变得更加复杂。

机电耦联系统是一个非线性系统，其动力学问题相当复杂，他涉及到多个学科的理论，包括机械学、电机学、电磁学、电路理论、振动理论等等，要对此系统进行研究，首先必须建立正确的数学模型。现在常用的方法是给出机械系统的模型和电系统的模型，当然，根据问题的需要可以选择或简单或复杂的模型，然后对其进行分析、综合，得到系统的数学模型。但是仅从电着度或仅从机械着度都无法解决系统的机电耦联动力系统问题，机电分析动力学为建立机电耦联动力学问题的数学模型提供了有效的工具。它从能量观点出发，对机械与电系统作统一考虑，建立一般力学与电路理论、连续介质力学与电磁场相耦合的微分方程组。其次是运用数学工具对微分方程组进行定性和定量分析。机电耦联动力系统的非线性振动作为机电分析动力学的深入，对机电系统的振动问题作了更进一步的、更全面的、更详细的研究，揭示了机电系统振动问题的更全面、更深刻的内在规律。

电机是典型的机电耦联非线性动力系统。由于电机定子系统、转子轴系振动系统具有多个固有频率并受多个频率的电磁力（矩）的作用，因此，电机定子系统、转子轴系不仅有可能发生主共振，还有可能发生各种不同类型的组合共振、内共振以及多重共振，多重共振的特点是多个模态同时被激发起来，模态与模态振动之间发生能量交换现象，出现调幅与调相运动。多自由度非线性系统多重共振问题涉及发电、造船、航空航天、大型结构动态设计等多个领域，具有广阔的

工程背景，多重共振的研究进展势必对相关领域的发展起到积极的推动作用。

发电机组是机电耦联动力系统，随着发电机组日益朝大型化方向发展，特别是高电压、大电流的进一步提高，会产生强大的磁场和电场，机组在强大的磁场和电场作用下，会使转子系统的机电耦联振动、稳定性及动强度出现新的问题，发电机定子系统的振动也会越来越严重，振动的规律越来越复杂，特别是水轮发电机组定子的磁振动将变得更加强烈。因此深入研究其振动规律，寻找控制其振动的有效手段，已成为一个十分重要的问题。

三峡工程是当今世界上最大的水利枢纽工程，它主要由大坝、水电站和通航建筑物等三部分组成。大坝为混凝土重力坝，坝顶全长 2309 米，坝高 185 米，泄洪坝段位于大坝中部，水电站厂房位于泄洪坝两端，并分别安装 14 台和 12 台水轮发电机组，单机容量 70 万千瓦，总装机容量 1820 万千瓦，年平均发电 846.8 亿度，三峡工程动态总投资预计为 2039 亿元人民币。工程竣工后，可充分发挥在长江中下游防洪体系中的关键作用，对于缓解华东、华中和重庆的能源紧张状况、减轻煤炭供应和运输的压力、提高电网运行质量和效率都有非常重要的意义。因此三峡工程发电机组发电后机组运转的安全性、可靠性和稳定性也成为倍受重视的问题。本文以 ABB 公司产的 777.8MW 水轮发电机组为实际工程背景，对大型水轮发电机组定子系统三相对称稳态运行状态下的磁固耦合振动进行了系统的研究。文中通过建立定子系统的双壳系统模型，结合圆柱壳的梁函数组合法，来分析双壳系统的固有频率和振型，建立了定子系统的磁固耦合动力学方程，并用多尺度法分析了定子系统的磁固耦合非线性振动，即主共振。

电机的振动和噪音不仅污染环境，造成对人体的危害，同时影响它周围的仪器设备的工作质量和寿命，妨碍它自身的正常运行，振动和噪音是电机的主要技术指标之一。电机的振动和噪音通常由三类构成：电磁振动和噪音、机械振动和噪音、通风噪音。电磁振动和噪音是由于电机气隙中磁通相互作用，产生随时间和空间变化的径向力波，使定子铁心和机座产生振动，引起周围空气脉动而发生的气载噪音；机械振动和噪音是由于转子机械不平衡和轴承振动等引起的；通风也引起振动，其噪声是一种气息流。对于中小感应电机，其电磁噪声和机械噪声都直接与电机定、转子特别是定子的固有频率有关，因此，要减小电机的振动和噪音，就必须认真研究定子的固有频率、固有模态等机械振动特性。对于大中

型电机，由于采用滑动轴承及对旋转部件作动平衡，因而机械振动和噪音并不突出，在极数较多的电机中，通风噪声一般也不突出，因此功率较大的电机中，由于电磁力波引起的定子振动就可能成为主要噪声源。当电磁力波的频率与定子的固有频率相同或相近时，就会引起共振，以至产生较大的噪声，因此，对大中型交流电机的振动和噪声的研究，离不开对电机定子的结构振动特性的研究。

对于水轮发电机，国内外水电站的运行经验表明：定子铁心的磁振动是水轮发电机发生事故和严重损坏的根源之一。铁心的振动使定子绕组绝缘层磨损、电腐蚀现象加剧、拉紧螺杆疲劳断裂、以及机座的地脚螺杆损坏等。在情况严重时，振动传到地基而把周围的仪器设备振坏。由此可见，准确地计算定子系统的固有频率，深入系统地研究水轮发电机定子铁心的磁振动非常重要。

定子铁心磁振动的简单概念是：定、转子电流产生磁势，磁势在气隙中建立磁场，当磁场交变时产生作用于铁心的力波，引起铁心振动。作用于铁心的力波和由它引起的振动可能同时存在径向、轴向和切向分量，但在一般情况下最主要的是径向分量。因此人们只关心定子系统的径向振动。

定子铁心的磁振动是由作用于定子铁心内表面的电磁力波引起的，但是，定子铁心的径向振动位移和气隙磁场是相互影响的，实际上，气隙磁场交变产生作用于铁心的力波，引起定子系统的振动，而定子铁心的径向振动位移反过来又会影响气隙磁场，进而影响到电磁力的成分。考虑气隙磁场与定子铁心径向振动位移相互影响时定子系统的振动是磁固耦合振动。本文就是在考虑了气隙磁场与定子铁心径向振动位移相互影响时，分析定子系统的振动特性。

水轮发电机组定子系统的双壳模型是把定子系统视为由弹簧联接的两个同心圆柱壳系统，认为冷态时联结弹簧的刚度为零，机座和铁心的径向振动没有耦联作用，要独立考虑它们各自的振动特性，热态时联结弹簧的刚度取为无穷大，双壳系统作为一个整体振荡系统。双壳模型的特点是既考虑了机座对铁心的固定作用，又可顾及上、下端边界约束的影响，同时还可以用解析式表达系统的振动形态。

本文内容共分为六章，具体安排如下：

第一章 对振动问题和机电耦联动力系统作了概述，并简述了机电耦联动力系统振动的研究方法。

第二章 建立了水轮发电机组定子系统的双壳系统模型，把定子系统简化为由弹簧联系的两个同心圆柱壳，连接弹簧的刚度冷态时视为零，热态时取为无穷大。该模型克服了工程上常用的双环模型和数值计算所采用的整体振荡系统的弊端，可以用解析式表达系统的振动形态，而且顾及了上下端边界约束的影响。

第三章 计算了水轮发电机三相对称稳态运行状态下作用在定子铁心内圆表面的电磁力。水轮发电机定子绕组是分数槽绕组，其磁势的计算和整数槽绕组是不一样的，有其特殊性。

第四章 用梁函数组合法来分析双壳系统的固有频率和振型，给出了双壳系统的固有频率和振型的解析表达式，结合定子系统的边界约束，计算了定子系统的固有频率。

第五章 建立了考虑铁心径向振动位移与气隙磁势相互产生影响的双壳系统的磁固耦合非线性振动方程。并利用多尺度法对定子系统的主共振的特性进行了分析。

第六章 分析了电磁刚度对水轮发电机定子系统固有频率的影响。电磁刚度对低阶固有频率影响较大，对高阶固有频率影响较小。

第二章 建立定子系统的力学模型

§ 2.1 引言

为了研究水轮发电机组定子系统的磁固耦合振动特性,首先要确定出既反映发电机组定子系统实际结构特征又便于分析的物理模型。物理模型的优劣,直接影响到分析结果的准确程度,给出既符合工程实际又简便易行的物理模型是准确分析定子系统磁固耦合振动特性的前提。

水轮发电机组定子系统的结构非常复杂,由机座、铁心、线圈、端箍、铜环及基础螺杆等部件组成,其典型结构如图 2.1 所示。由于运输条件的限制,根据铁心外径和结构型式,水轮发电机组定子可分为整圆定子、分瓣定子和工地整圆叠装定子。当铁心外径小于等于 3 米时采用整圆定子,在制造厂内叠片,下线,整体运输。当铁心外径大于 3 米时采用分瓣定子,在制造厂内整圆装压铁心,分瓣下线,分瓣运输,工地整圆组合后,下合缝线圈。当铁心长度受运输条件限制,或是为了减小定子铁心振动和变形,可采用工地整圆叠装定子,将分瓣机座装焊成整圆后,进行整圆叠片,再根据条件,在安装间或机坑内进行组装下线。对定子系统整体结构来说,定子主要包括铁心和机座两大部分,并通过定位筋将它们连接起来。

定子铁心是定子系统的一个重要部件,它是磁路的主要组成部分并用以固定绕组。在发电机运行时,铁心要受到机械力、热应力及电磁力的综合作用。定子铁心由扇形片、通风槽片、定位筋、齿压板、拉紧螺杆及固定片等零部件装压而成。定位筋通过托块焊于机座上,扇形片、通风槽片叠装于定位筋的鸽尾上,并通过上、下齿压板及拉紧螺杆将铁心压紧成整体。如图 2.2 所示。

定子铁心扇形片为热轧、冷轧两类硅钢片。每张扇形片的弦距一般为 740 毫米左右。整张扇形片的槽数应为整数,并使片间接缝不在齿上。为避免叠片时相邻扇形片边缘搭叠,接缝边应留有 0.2 毫米的间隙。单块的定子铁心扇形片如图 2.3 所示。

通风槽片是由扇形片以及固定于扇形片上的通风槽钢及衬口环组成,定子的通风沟就是由通风槽片构成的,通风槽片所用扇形片材料一般为 0.5、0.65、0.75 毫米厚酸洗钢板。

扇形片是通过定位筋和托块固定在机座上的。定位筋由方钢加工而成,呈鸽

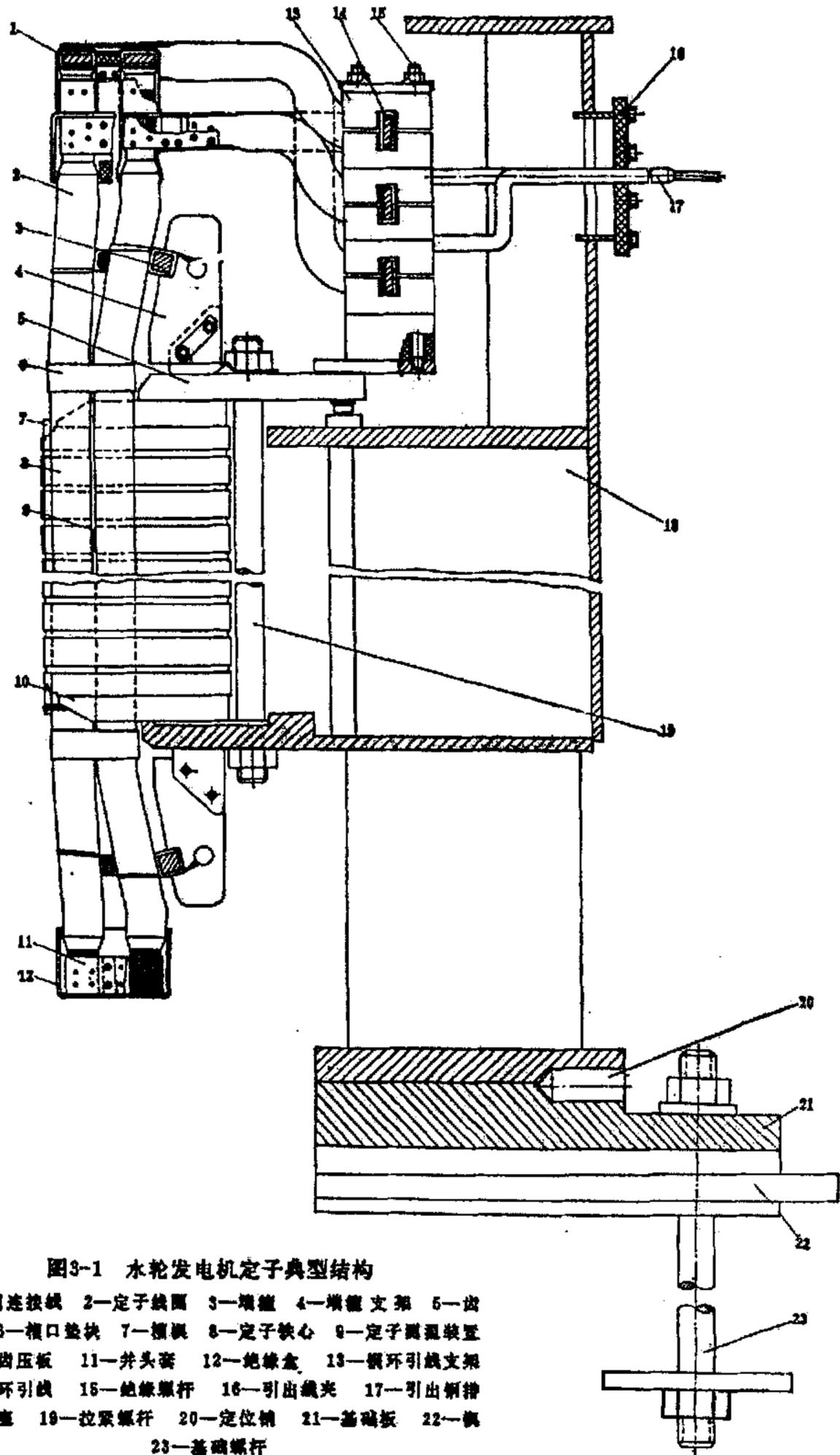


图3-1 水轮发电机定子典型结构

- 1—极间连接板 2—定子线圈 3—端盖 4—端盖支架 5—出
压板 6—槽口垫块 7—槽楔 8—定子铁心 9—定子线圈装置
10—下齿压板 11—并头套 12—绝缘盒 13—铜环引线支架
14—铜环引线 15—绝缘螺杆 16—引出线夹 17—引出铜排
18—机座 19—拉紧螺杆 20—定位销 21—基础板 22—螺
23—基础螺杆

图2.1 水轮发电机定子系统的典型结构

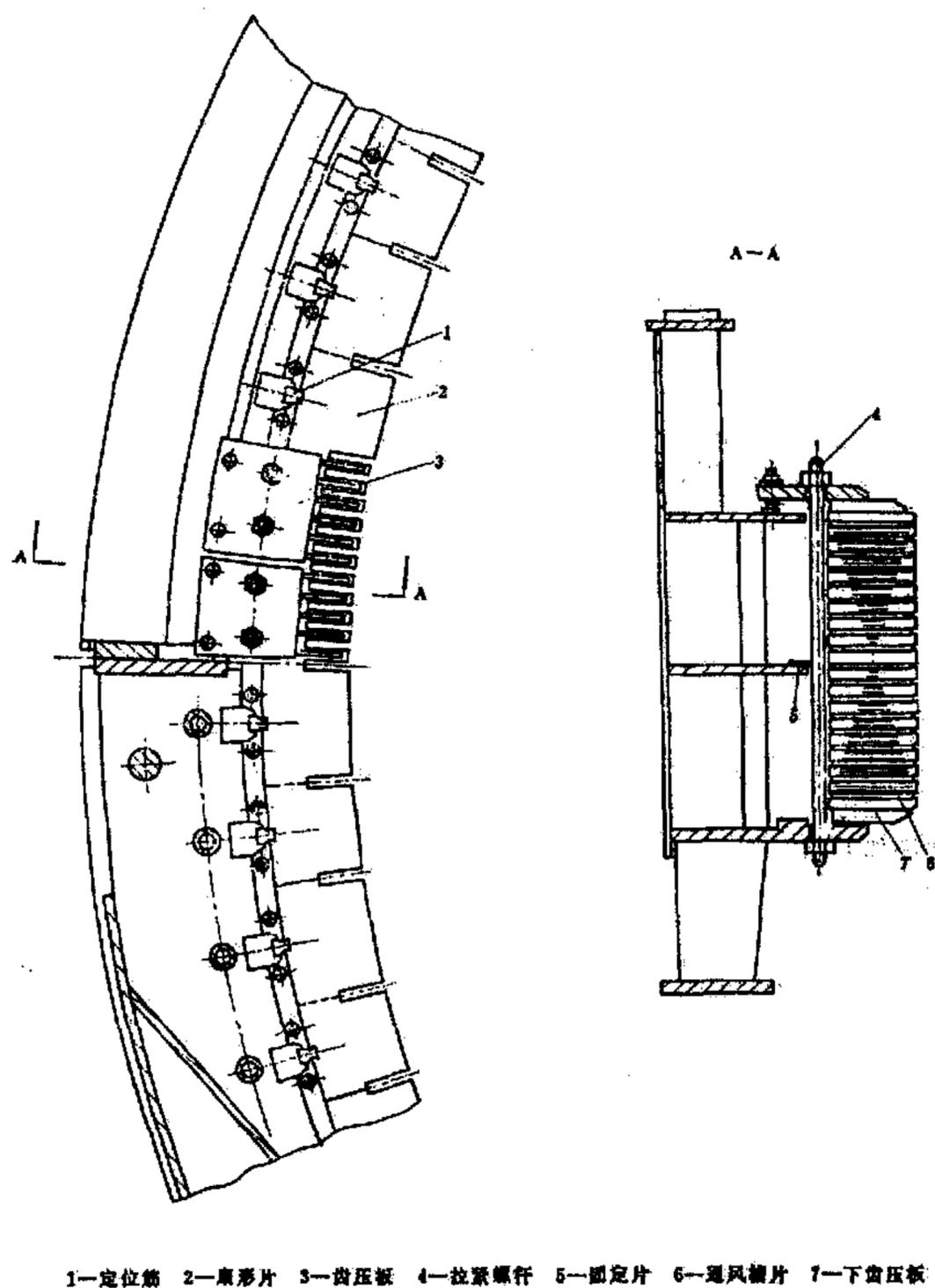


图2.2 定子铁心

尾形，因此定位筋亦称鸽尾筋。齿压板由压板和齿压片构成，将齿压片焊接在压板上，对于大压板，则是将齿压片铆在矩形薄钢板上，然后再将矩形薄钢板搭焊在机座大压板上。

铁心的轴向压紧力是由齿压板及拧紧螺母的拉紧螺杆产生并维持的。在结构布置上，一般采用定位筋、拉紧螺杆分开的结构。根据扇形片的弦距一般为 740 毫米左右，以每张扇形片上布置两根定位筋、两块齿压板、四根拉紧螺杆为宜。在齿压板结构布置上，有铁心上、下端均采用小齿压板，或上端为小齿压板而下

端是与机座连成一体的呈环形的大齿压板结构，后者往往可以提高铁心装压质量，并能够增强机座刚度。目前，国产中、大容量水轮发电机的机座多采用下端为大齿压板的结构。

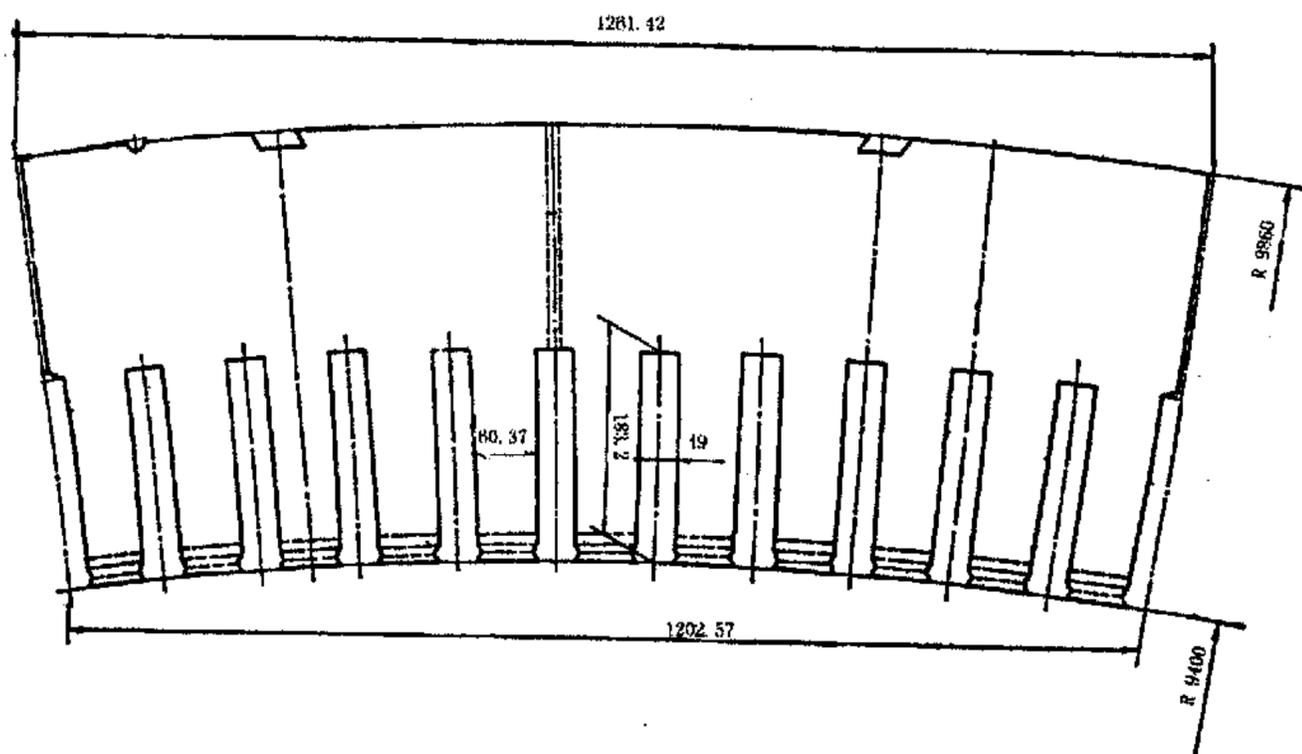


图 2.3 定子铁心扇形片

定子机座主要用以固定铁心，一般呈圆形或多边形。小容量水轮发电机多采用铸铁整圆机座，或采用钢板焊接的箱形机座。中、大容量的水轮发电机的机座是由 12~60 毫米厚的钢板制成的壁、环、立筋及合缝板等零件焊接组装而成。立式机座承受轴向荷重、定子自重、电磁力及电磁扭矩并传递欲基础上。机座顶环与上机架相连，下环与基础板间有径向销，承受短路切向剪力。机座应有足够的刚度，同时机座还应能适应铁心的热变形，使铁心在热膨胀时不会对机座产生过大的压应力，引起铁心产生变形。在国外，对于铁心外径约为 11000 毫米的定子，在定位筋与定子铁心鸽尾槽间有采用加临时垫片（垫片厚约 0.7 毫米）的措施，使铁心与定子机座鸽尾筋之间保留一定的间隙（叠片后将临时垫片抽出），以适应铁心的热变形。当铁心外径超过 18000 毫米时，应考虑采用适应热变形的机座。

通常，卧式机座的刚度比相同机座号的立式机座的刚度大。

与机座主要尺寸有关的各部件名称如图 2.4 所示。机座的主要尺寸包括定子机座外径、定子机座高度、中环内径、中环部分高度、中环厚度和中环数量等

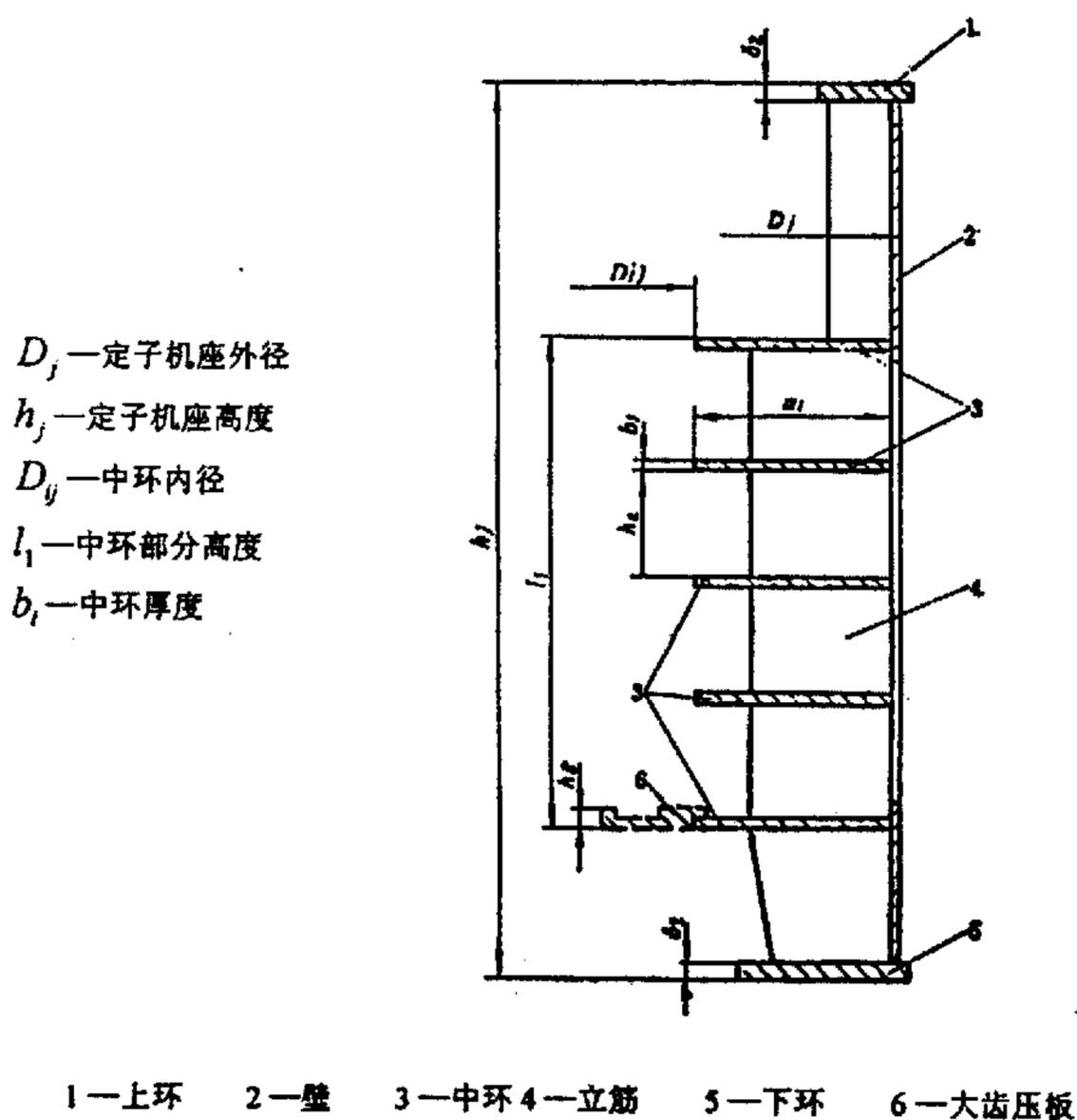


图 2.4 机座主要尺寸和各部件名称

§ 2.2 建立定子系统的力学模型

根据铁心和机座的几何尺寸，假定铁心各扇形片之间不产生滑移，可以把铁心和机座简化为两个圆柱壳，把连接两者的定位筋看作连接弹簧，则定子系统的振动问题可以简化为用弹簧连结的两个同心圆柱壳的振动问题。

连接弹簧的刚度值是可变的，并与定位筋处的配合间隙情况有关。假设在该处的设计间隙为 Δ_1 ，在车间叠片时又在机座合缝处置有厚度为 Δ_2 的垫片，而在工地安装时将垫片取掉。因此安装以后铁心与定位筋之间的实际间隙为：

$$\Delta = \Delta_1 - \frac{m\Delta_2}{2\pi}$$

式中 m 为定子分瓣数。

在水轮发电机组开始运行时，定子温升为零，铁心和定位筋之间的间隙即

为 Δ 。这时铁心和机座之间没有力的传递，连接铁心和机座的弹簧的刚度为零。这种状态称为冷态。

发电机带负载后，产生电流，由于电流的发热作用使铁心开始升温。因为铁心的升温高于机座的升温，铁心和定位筋之间的间隙逐渐减小。到某一升温时，上述间隙减小到零。温升继续增加时，定位筋就开始受力。当达到额定温升时，定位筋可能受到很大的热变形力。这时，由于定位筋的刚度非常大，因此可以近似地认为连接弹簧的刚度为无穷大。这种状态称为热态。

显然，冷态和热态是两个重要的极端状态。其他过度状态都在这两个极端状态之间的范围内。冷态是振动的最不利状态，热态是正常运转状态，定子系统的电磁振动一般要考虑这两个极端状态。本文只考虑正常运转状态下定子系统的电磁振动问题。

铁心的重心半径按其轭部尺寸计算，惯性矩按带齿的纵截面和带槽的纵截面分别计算再取平均值确定，绕组视为附加质量。铁心圆柱壳的轴上长度为定子铁心的长度，中曲面半径为铁心的重心半径，壳的厚度通过计算定子铁心纵截面的等效抗弯刚度（既等效惯性矩）来确定。铁心的重心半径计算如图 2.5 所示。

图中标注的尺寸为：

R_1 -- 铁心的重心半径

R_{in} -- 铁心的内半径

R_{tw} -- 铁心的外半径

h_s -- 铁心的槽高

R_2 -- 机座的重心半径

R_{jn} -- 机座的内半径

R_{jw} -- 机座的外半径

x_c -- 机座截面对 y 轴的重心距（即图 2.6 中的 y_c ）

以上已知的尺寸的具体数据如下：

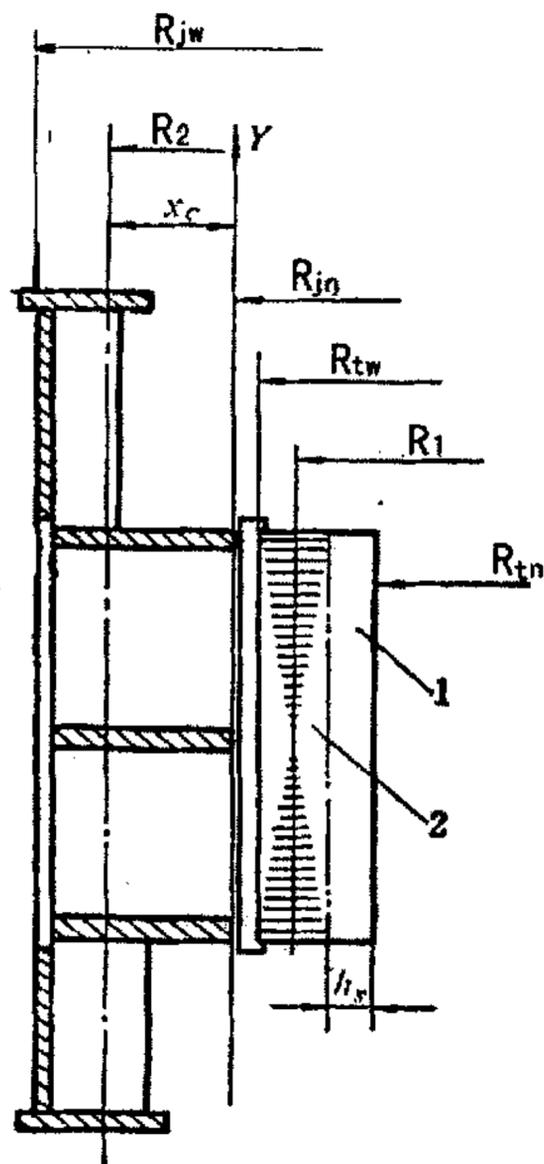
R_{in} 为 9400 毫米， R_{tw} 为 9860 毫米， R_{jn} 为 9900 毫米， R_{jw} 为 11014 毫米，

h_s 为 183.2 毫米。

由 $R_1 = \frac{R_{tw} + (R_{in} + h_s)}{2}$ 可得：

R_1 为 9721.6 毫米

另外，通过计算定子铁心纵截面的等效抗弯刚度（即等效惯性矩）可求得定子铁心的等效厚度 h_1 为 325 毫米。



1—铁心齿部 2—铁心轭部

图 2.5 计算定子铁心的重心半径

机座圆柱壳简化为与铁心圆柱壳等高的圆柱壳，简化的原则是保持其纵截面

的重心半径和截面惯性矩不变。

机座纵截面计算尺寸如图 2.6 所示。

机座重心位置：

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

A_i -- 断面 i 的面积。

y_i -- 断面 i 的几何中心的 y 坐标。

机座的重心半径为：

$$R_c = y_c + R_{ij}$$

R_{ij} -- 机座中环内径，为 9900 毫米。

机座的截面惯性矩为：

$$J = J_{xc} = \sum A_i y_i^2 + \frac{1}{12} \sum A_i a_i^2 - y_c^2 \sum A_i$$

a_i -- 机座中环径向宽度，为 740 毫米。

b_i -- 机座中环厚度，为 20 毫米。

δ_1 -- 机座壁厚度，为 18 毫米。

δ_2 -- 机座上、下环的厚度，为 90 毫米。

h_j -- 定子机座高度，为 5575 毫米。

计算出机座的截面惯性矩后，设机座圆柱壳的等效厚度为 h_2 ，则有

$$J = J_{xc} = \frac{1}{12} L h_2^3$$

其中 L 为定子系统简化后的长度，也就是铁心的长度，为 2950 毫米。

由以上各式即可确定出机座的重心位置 y_c 、等效厚度 h_2 、重心半径 R_c 。

代入数据即可求出： y_c 为 578 毫米， h_2 为 488 毫米， R_c 为 10478 毫米。

通过以上的简化，定子系统就简化成了长为 L ，中曲面半径分别为 R_1 和 R_2 ，厚度分别为 h_1 和 h_2 的由均布弹簧连接的两个同心圆柱壳模型，将这个由均

布弹簧连接的两个同心圆柱壳模型称为双壳模型，如图 2.7 所示。

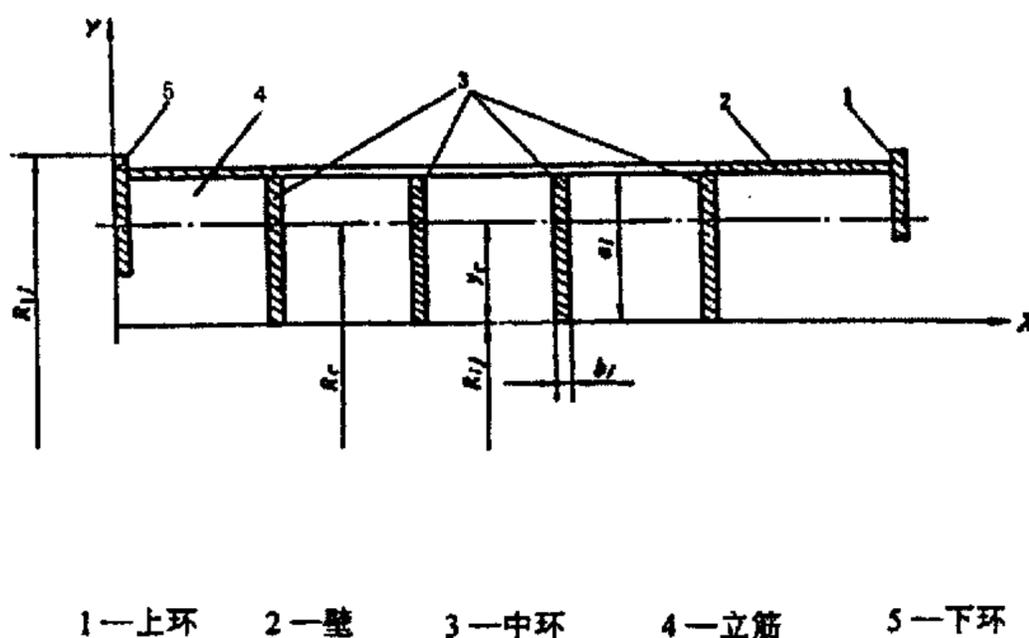


图 2.6 机座纵截面计算尺寸

双壳模型的内圆柱壳的两端看成自由端，外圆柱壳的上端看成自由端，下端看成固定端。定子机座的弹性模量 E_1 为 211000 牛顿/平方毫米。定子铁心的弹性模量 E_2 为 130000 牛顿/平方毫米。定子铁心和定子机座的泊松比 μ 为 0.31。定子铁心和定子机座的密度 ρ 为 7.65 克/立方厘米。

由内、外壳的 L/R 和 h/R 可知双壳系统的内、外壳都属于短薄壳。

R_1 -- 定子铁心圆柱壳的重心半径

R_2 -- 定子机座圆柱壳的重心半径

h_1 -- 定子铁心的等效厚度（既定子铁心圆柱壳的厚度）

h_2 -- 定子机座的等效厚度（即定子机座圆柱壳的厚度）

L -- 定子铁心的长度（既定子系统简化后双壳系统的长度）

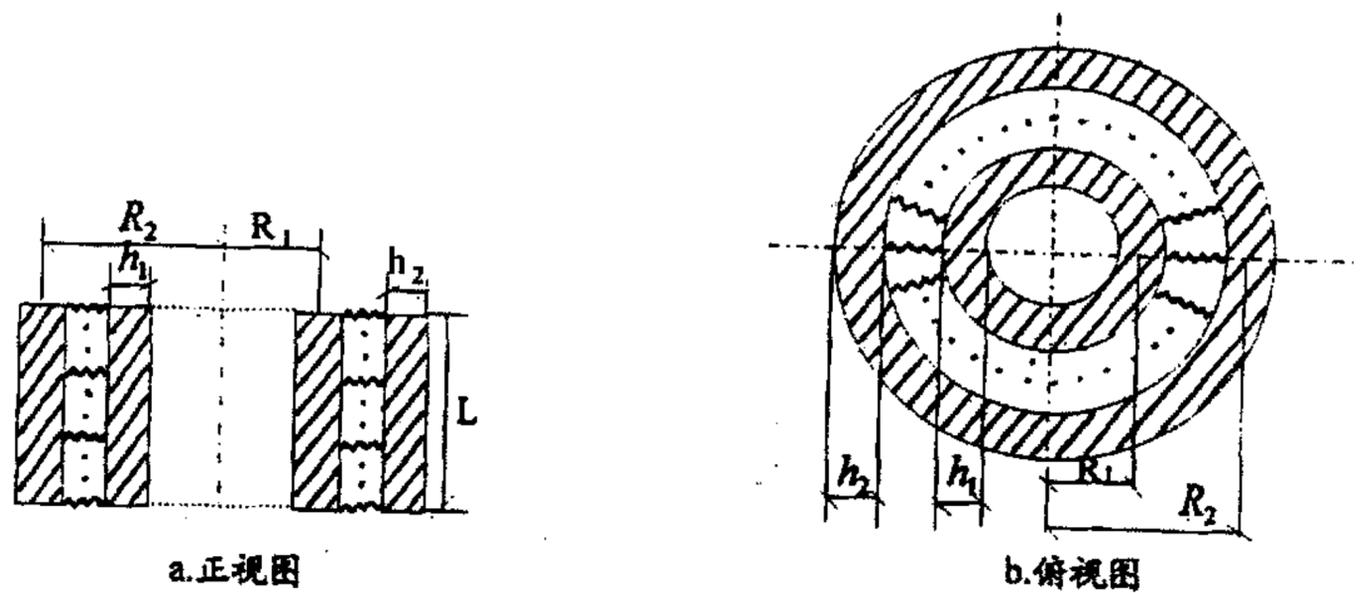


图 2.7 双壳系统模型

§ 2.3 本章小结

本章利用截面惯性矩等效的原理把机座和定子铁心简化成具有各自等效厚度的两个圆柱壳，把连接机座和定子铁心的定位筋看成弹簧，这样就把定子系统简化成了双圆柱壳系统，内、外壳之间有分布弹簧连接。并且认为大型水轮发电机组正常运转时（即处于热态时），在电磁力的激发下定子铁心不是作为一个孤立体振动，而是与机座联成一个整体同步振动。因此，简化后的双圆柱壳系统中，内、外壳之间分布的连接弹簧的刚度在冷态时视为零，在热态时视为无穷大。

第三章 定子铁心内圆表面的电磁力的计算

§ 3.1 引言

水轮发电机定、转子线圈中通过电流时，电流会产生磁动势，磁动势会在定、转子之间的气隙中建立磁场，当磁场交变时便产生作用于铁心的力波，从而引起定子系统的电磁振动。作用于铁心的力波和由它引起的振动可能同时存在径向、轴向和切向分量，但在一般情况下径向分量是最主要的因素，因此，水轮发电机定子系统的电磁振动主要是径向振动。

水轮发电机中较高的定子振动级在多数情况下是由于励磁基波和电枢反应磁场的分数次谐波相互作用产生的。水轮发电机的定子绕组采用每极每相槽数为分数，其电枢反应磁场中含有次谐波磁场，次谐波磁场的幅值将随定子负载电流的增大而增大。

定子系统的电磁振动是引起水轮发电机事故及其损坏的主要原因之一，因此正确地分析和计算作用于定子铁心内圆表面的电磁力是关键。

气隙磁场交变产生作用于定子铁心内圆表面的电磁力波，定子系统由于电磁力波的作用产生径向振动。实际上，定子铁心的径向振动位移对气隙磁场又发生影响，进而影响到电磁力的成分。

随着国民经济的发展，发电机组正朝着大型化发展，其高压、大电流的趋势进一步增强，在强大的电场、磁场的作用下，对发电机定子系统进行更准确的振动分析变得日益重要。

本章在计算三相对称稳态运行状态下作用于定子铁心内圆表面的电磁力时，考虑了定子径向振动位移对气隙的影响，即考虑了定子径向振动位移对电磁力的影响，因此，所得到的电磁力的成分更加丰富，同时，这将使定子系统的振动规律和现象更加复杂。

§ 3.2 水轮发电机定子磁势谐波分析

三峡水轮发电机定子采用分数槽绕组，槽数 $z = 510$ ，极对数 $p = 40$ ，相数 $m = 3$ ，

每极每相槽数 $q = \frac{z}{2pm} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$ 。由 $q = \frac{N}{D}$ 知： $D = 8$ ， $N = 17$ ， D 为偶数，则

整个定子的单元电机数 $t = \frac{2p}{D} = 10$ ，每个单元电机的极对数 $p_0 = \frac{p}{t} = 4$ ，每个单

元电机的槽数 $z_0 = 3N = 51$ 。电机的极距 $\tau = \frac{z_0}{2p_0} = \frac{51}{8} = 6\frac{3}{8}$ 个槽距，节距 $y_1 = 6$ 个槽

距。根据电机的绕组理论列出一个单元电机的 51 个槽在三相中的布置情况如下：

A 相槽号包括：1, 2, 3, 14, 15, 27, 28, 40, 41, -8, -9, -21, -22, -33, -34, -46, -47。

B 相槽号包括：6, 7, 18, 19, 20, 31, 32, 44, 45, -12, -13, -25, -26, -38, -39, -50, -51。

C 相槽号包括：10, 11, 23, 24, 35, 36, 37, 48, 49, -4, -5, -16, -17, -29, -30, -42, -43。

-A 相槽号包括：8, 9, 21, 22, 33, 34, 46, 47, -1, -2, -3, -14, -15, -27, -28, -40, -41。

-B 相槽号包括：12, 13, 25, 26, 38, 39, 50, 51, -6, -7, -18, -19, -20, -31, -32, -44, -45。

-C 相槽号包括：4, 5, 16, 17, 29, 30, 42, 43, -10, -11, -23, -24, -35, -36, -37, -48, -49。

负槽号表示电流为负值的导体或线圈的矢量，它与同号码的正槽号隔开一段相当于 π 弧度或 180° 的电角度。

因为 $D = 8$ ，为偶数，所以单元电机内也不存在 $\nu_0 = 3$ 或其倍数的谐波，这时，定子三相合成磁势中只存在谐波的极对数为 $\nu_0 = 1, -2, 4, -5, 7, -8, \dots$ 的谐波，其中 $\nu_0 = p_0 = \frac{D}{2} = 4$ 为单元电机的基波的极对数，式中带负号谐波的旋转方向与不带负号的相反。这时，每个谐波都是圆形旋转波（即正、负序中只有一个分量），因此，在 $D = 8$ 为偶数的情况下，三相合成磁势中只存在下列次数的

$$\text{谐波: } \nu' = \frac{\nu}{p} = \frac{\nu_0}{2p_0} = \frac{\nu_0}{4} = \frac{1}{4}, -\frac{2}{4}, 1, -\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, -\frac{8}{4}, \frac{10}{4}, -\frac{11}{4}, \frac{13}{4}, \dots \quad (3-1)$$

$$\text{或写成: } \nu' = \pm \frac{2(3n' \pm 1)}{D} \quad (3-2)$$

式中 $n' = 0, 1, 2, 3, \dots$; 两个“ \pm ”号应取得一致。

$D = \text{偶数}$ 的 60° 相带分数槽绕组中，其三相合成磁势中存在的 ν' 次谐波的

分布系数为:

$$|k_{qv'}| = \frac{1}{2N \cos v' DX \frac{15^\circ}{N}} \quad (3-3)$$

其中 X 由公式 $X = 2 \frac{3N(n-1)+1}{D}$ 这样来确定: 选取使 $X/2$ 取得最小整数

值的 n 值, 把 n 的值代入 X 的表达式即可得到 X 的值。由于在此 $N=17$, $D=8$, 这样可得 $X=64$ 。

因此, 对于本文, 式 (3-3) 又可写为:

$$|k_{qv'}| = \frac{1}{34 \cos v' \frac{7680^\circ}{17}} \quad (3-4)$$

$$\text{绕组短距系数为: } k_{yv} = \sin v \frac{\theta_y}{2} \quad (3-5)$$

其中 θ_y 为单个线圈所嵌的两个槽的槽距, θ_y 可以表示为:

$$\theta_y = y \frac{2\pi}{z_0} \quad (3-6)$$

其中 $y=6$, $z_0=51$ 。把 y 和 z_0 代入 (3-6) 式可得: $\theta_y=42.35294^\circ$

把 θ_y 的值代入 (3-5) 得: $k_{yv}=21.17647^\circ v$

相绕组对 v 对极谐波的绕组系数 k_{wv} 为:

$$k_{wv} = k_{yv} |k_{qv'}| \quad (3-7)$$

选择如下几次分布系数较大的谐波: $v' = \frac{1}{4}, -\frac{2}{4}, 1, \frac{7}{4}, -\frac{47}{4}, \frac{55}{4}$,

由 (3-4) 式计算以上各次谐波的分布系数:

$$\text{当 } v' = \frac{1}{4} \text{ 时, } |k_{qv'}| = 0.075456$$

$$\text{当 } v' = -\frac{2}{4} \text{ 时, } |k_{qv'}| = 0.04225$$

$$\text{当 } v' = 1 \text{ 时, } |k_{qv'}| = 0.955081$$

$$\text{当 } v' = \frac{7}{4} \text{ 时, } |k_{qv'}| = 0.088495$$

$$\text{当 } \nu' = -\frac{47}{4} \text{ 时, } |k_{q\nu'}| = 0.955081$$

$$\text{当 } \nu' = \frac{55}{4} \text{ 时, } |k_{q\nu'}| = 0.955081$$

由 (3-5) 式计算以上各次谐波的短距系数:

$$\text{当 } \nu = 1 \text{ 时, } k_{y\nu} = 0.3612$$

$$\text{当 } \nu = 2 \text{ 时, } k_{y\nu} = 0.6737$$

$$\text{当 } \nu = 4 \text{ 时, } k_{y\nu} = 0.9957$$

$$\text{当 } \nu = 7 \text{ 时, } k_{y\nu} = 0.5264$$

$$\text{当 } \nu = 47 \text{ 时, } k_{y\nu} = -0.9957$$

$$\text{当 } \nu = 55 \text{ 时, } k_{y\nu} = 0.9957$$

由 (3-7) 式计算以上各次谐波的绕组系数:

$$\text{当 } \nu = 1 \text{ 时, } k_{w\nu} = 0.02725$$

$$\text{当 } \nu = 2 \text{ 时, } k_{w\nu} = 0.02846$$

$$\text{当 } \nu = 4 \text{ 时, } k_{w\nu} = 0.9510$$

$$\text{当 } \nu = 7 \text{ 时, } k_{w\nu} = 0.04659$$

$$\text{当 } \nu = 47 \text{ 时, } k_{w\nu} = 0.9510$$

$$\text{当 } \nu = 55 \text{ 时, } k_{w\nu} = 0.9510$$

定子三相合成磁势用谐波形式可以表示如下:

$$F(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{2}}{\pi\nu} k_{w\nu} wI \sin(\omega t \mp \nu x \pm \nu \frac{\theta_y}{2} \pm \phi_{A\nu}) \quad (3-8)$$

由于除以上各次谐波以外的其它次谐波的幅值很小,因此可以忽略其它各次谐波,这样,定子三相合成磁势就可以用以上各次谐波的合成来表示。

(3-8) 式括号中,当与 ν 对应的 ν' 为正时取上面的符号,为 ν 对极(即 ν' 次)正转谐波, ν' 为负时取下面的符号,为 ν 对极(即 ν' 次)反转谐波。 w 为每相每条并联支路的串联匝数, I 为每相电流有效值(安)。 $\phi_{A\nu}$ 为 A 相的 ν 对极谐波合

成磁势矢量 \vec{F}_{Av} 滞后于横坐标轴的相位角, ϕ_{Av} 可以如下表示:

$$\phi_{Av} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y_{Av}}{x_{Av}} - \left(\frac{x_{Av}}{|x_{Av}|} - 1 \right) 90^\circ \quad (3-9)$$

$$\text{式中 } x_{Av} = \sum_{x=1}^{z_0/3} \frac{M_{Ax}}{|M_{Ax}|} \cos M_{Ax} v \alpha \quad (3-10)$$

$$y_{Av} = \sum_{x=1}^{z_0/3} \sin M_{Ax} v \alpha \quad (3-11)$$

M_{Ax} 为 A 相所占的 $\frac{z_0}{3}$ 个槽号的号码 (包括正、负号)。

v 分别取 1, 2, 4, 7, 47, 55, 计算 (3-8) 式中的第 v 项如下:

$$F_1(x, t) = 0.0368 WI \sin(\omega t - x + 0.616) \quad (3-12a)$$

$$F_2(x, t) = 0.0192 WI \sin(\omega t + 2x - 1.232) \quad (3-12b)$$

$$F_4(x, t) = 0.3211 WI \sin(\omega t - 4x + 2.464) \quad (3-12c)$$

$$F_7(x, t) = 0.009 WI \sin(\omega t - 7x + 1.1704) \quad (3-12d)$$

$$F_{47}(x, t) = 0.0273 WI \sin(\omega t + 47x + 2.464) \quad (3-12e)$$

$$F_{55}(x, t) = 0.0234 WI \sin(\omega t - 55x + 2.464) \quad (3-12f)$$

把 (3-12) 各式相加可求得定子三相绕组合成磁势为:

$$\begin{aligned} F(x, t) = & 0.0368 WI \sin(\omega t - x + 0.616) + 0.0192 WI \sin(\omega t + 2x - 1.232) + \\ & 0.3211 WI \sin(\omega t - 4x + 2.464) + 0.009 WI \sin(\omega t - 7x + 1.1704) + \\ & 0.0273 WI \sin(\omega t + 47x + 2.464) + 0.0234 WI \sin(\omega t - 55x + 2.464) \end{aligned} \quad (3-13)$$

在这里, x 为在单元电机圆周上量得的机械角, 而 $4x$ (即 $p_0 x$) 为单元电机基波的电角度, 令 $\alpha = 4x$, 则 $F(x, t)$ 可化为:

$$\begin{aligned} F(\alpha, t) = & 0.0368 WI \sin\left(\omega t - \frac{1}{4}\alpha + 0.616\right) + 0.0192 WI \sin\left(\omega t + \frac{2}{4}\alpha - 1.232\right) + \\ & 0.3211 WI \sin(\omega t - \alpha + 2.464) + 0.009 WI \sin\left(\omega t - \frac{7}{4}\alpha + 1.1704\right) + \\ & 0.0273 WI \sin\left(\omega t + \frac{47}{4}\alpha + 2.464\right) + 0.0234 WI \sin\left(\omega t - \frac{55}{4}\alpha + 2.464\right) \end{aligned} \quad (3-14)$$

对 (3-14) 式中的基波项 $0.3211WI \sin(\omega t - \alpha + 2.464)$ 作移相处理 (即去掉相位角 2.464), 由于基波为正转波, 所以其它谐波参照基波移相时, 正转谐波要减去一个相应的相位角, 反转谐波要加上一个相应的相位角。对 (3-14) 式中的各项作移相处理并进行符号变换后得到:

$$\begin{aligned} F(\alpha, t) = & -0.0368WI \sin\left(\frac{1}{4}\alpha - \omega t\right) + 0.0192WI \sin\left(\frac{2}{4}\alpha + \omega t\right) - \\ & 0.3211WI \sin(\alpha - \omega t) + 0.009WI \sin\left(\frac{7}{4}\alpha - \omega t\right) + 0.0273WI \sin\left(\frac{47}{4}\alpha + \omega t\right) - \\ & 0.0234WI \sin\left(\frac{55}{4}\alpha - \omega t\right) \end{aligned} \quad (3-15)$$

令 $A_1 = -0.0368WI$, $A_2 = 0.0192WI$, $A_4 = -0.3211WI$, $A_7 = 0.009WI$, $A_{47} = 0.0273WI$, $A_{55} = -0.0234WI$ 。并令 $\alpha = px = 40x$, 在这里, x 为在整个电机定子上量得的机械角。则 (3-15) 又可化为以整个电机定子的机械角 x 表示的式子:

$$\begin{aligned} F(x, t) = & A_1 \sin\left(\frac{p}{4}x - \omega t\right) + A_2 \sin\left(\frac{2p}{4}x + \omega t\right) + A_4 \sin(px - \omega t) + \\ & A_7 \sin\left(\frac{7p}{4}x - \omega t\right) + A_{47} \sin\left(\frac{47p}{4}x + \omega t\right) + A_{55} \sin\left(\frac{55p}{4}x - \omega t\right) \end{aligned} \quad (3-16)$$

§ 3.3 水轮发电机转子磁势谐波分析

转子磁势以每两个磁极为一个周期, 磁势波形如图 3.1b 所示, 在一个周期内的磁势可用如下分段函数表示:

$$f(\alpha) = I_f N \cdot \begin{cases} 0 & 0 \sim 0.3775 \text{rad} \\ 1 & 0.3775 \sim 2.7641 \text{rad} \\ 0 & 2.7641 \sim 3.5191 \text{rad} \\ -1 & 3.5191 \sim 5.9057 \text{rad} \\ 0 & 5.9057 \sim 6.2832 \text{rad} \end{cases} \quad (3-17)$$

其中 I_f 为转子励磁电流, N 为励磁绕组的匝数。以 2π 为周期对 $f(\alpha)$ 进行傅立叶级数展开, 则转子磁势可表示为:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = & 1.18359I_f N \sin \alpha + 0.18012I_f N \sin 3\alpha - 0.079302I_f N \sin 5\alpha - \\ & 0.1597I_f N \sin 7\alpha - 0.136865I_f N \sin 9\alpha \end{aligned} \quad (3-18)$$

由凸极发电机的向量图知, 在相位上, 转子磁势基波应超前定子磁势基波

$\delta = \frac{\pi}{2} + \psi = \frac{\pi}{2} + \theta + \phi$ 电角度, 其中 θ 为功率角, ϕ 为功率因数角。考虑到转子

的旋转, 以 $\alpha - \left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \psi \right)$ 代替 α , 则 (3-18) 式可以写成:

$$f(\alpha, t) = -1.1836 I_f N \cos(\alpha - \omega t - \psi) + 0.1801 I_f N \cos(3\alpha - 3\omega t - 3\psi) + \\ 0.0793 I_f N \cos(5\alpha - 5\omega t - 5\psi) - 0.1597 I_f N \cos(7\alpha - 7\omega t - 7\psi) + \\ 0.1369 I_f N \cos(9\alpha - 9\omega t - 9\psi) \quad (3-19)$$

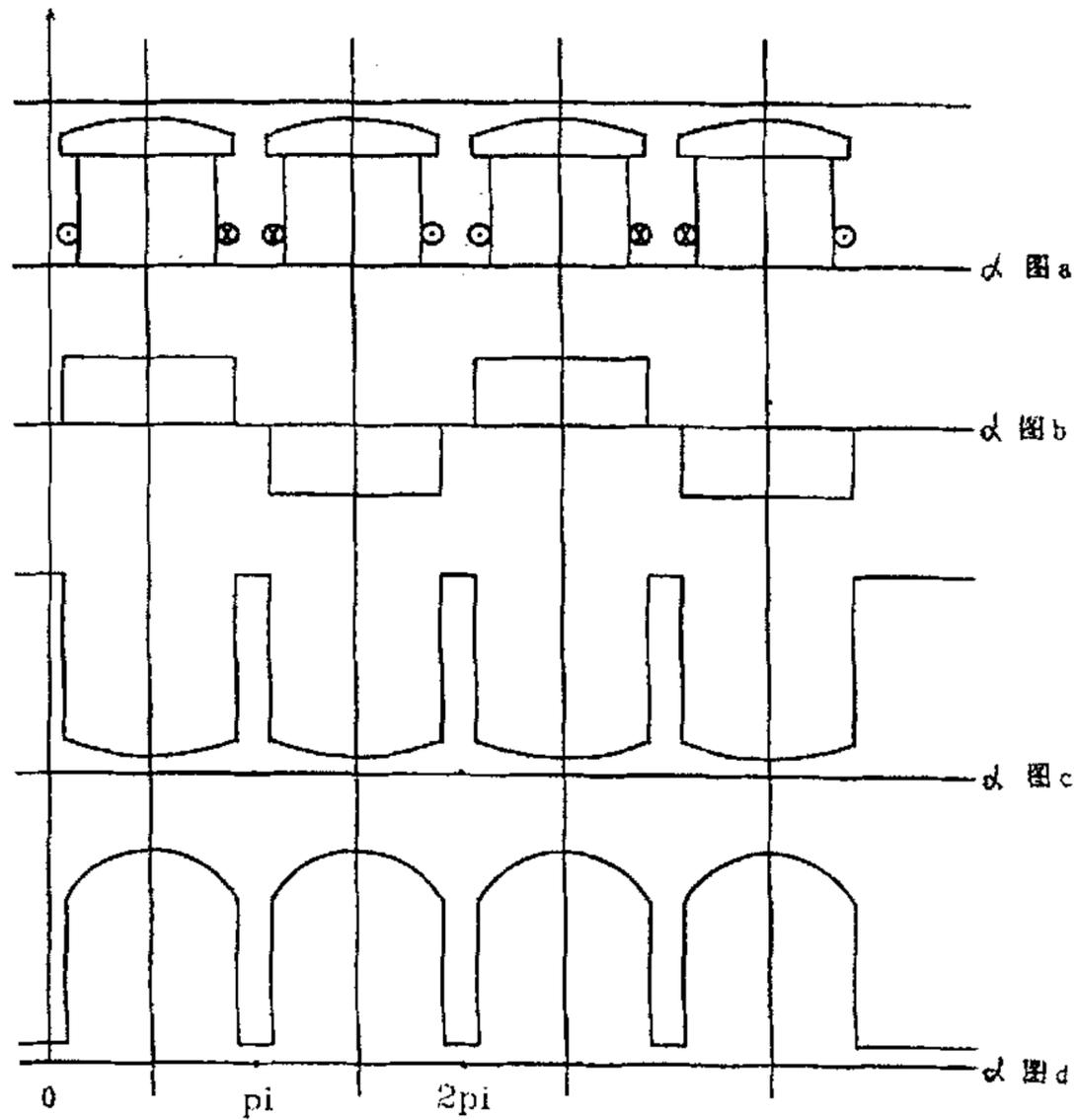


图 3.1 转子磁极、磁势、气隙、磁导示意图

令 $B_1 = -1.1836 I_f N$, $B_3 = 0.1801 I_f N$, $B_5 = 0.0793 I_f N$, $B_7 = -0.1597 I_f N$, $B_9 = 0.1369 I_f N$ 。并将电角度 α 转换为电机的机械角度 x , 即 $\alpha = px = 40x$ 。

则 (3-19) 式可化为:

$$f(x,t) = B_1 \cos(px - \omega t - \psi) + B_3 \cos(3px - 3\omega t - 3\psi) + B_5 \cos(5px - 5\omega t - 5\psi) + B_7 \cos(7px - 7\omega t - 7\psi) + B_9 \cos(9px - 9\omega t - 9\psi) \quad (3-20)$$

§ 3.4 水轮发电机气隙磁导分析

由于制造和安装的原因, 发电机转子不可避免地存在各种形式的偏心, 包括安装时转子轴心 o_2 与定子圆心 o 不重合引起的静偏心 e_1 以及转子轴心 o_2 与转子质心 o_1 不重合时引起的动偏心 e_2 , 把两者综合起来考虑, 按机电分析动力学理论, 如图 3.2 所示, 由于定、转子间的偏心距 $e (= \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + 2e_1e_2 \cos \alpha})$ 而引起的定、转子间的不均匀气隙可近似表示为:

$$\delta(\alpha, t) \approx \delta_0 - e \cos \beta = \delta_0 - e \cos(\alpha - \gamma) \quad (3-21)$$

若同时考虑气隙偏心和定子铁心径向变形 w_s 时, 定、转子间的气隙可近似表示为:

$$\delta(\alpha, t) \approx \delta_0 - e \cos(\alpha - \gamma) + w_s \quad (3-22)$$

则气隙磁导为:

$$\Lambda(\alpha, t) = \frac{\mu_0}{k_\mu \delta_0 (1 - \varepsilon \cos(\alpha - \gamma) + W)} = \Lambda_0 + \Lambda_0 \varepsilon \cos(\alpha - \gamma) - \Lambda_0 \varepsilon (2W - 3W^2) \cos(\alpha - \gamma) + \Lambda_0 (-W + W^2 - W^3) \quad (3-23)$$

其中 $\Lambda_0 = \frac{\mu_0}{k_\mu \delta_0}$ 为平均气隙磁导

δ_0 为平均气隙大小

μ_0 为空气导磁系数

e 为定、转子间的总偏心距

$\varepsilon = \frac{e}{\delta_0}$ 为相对偏心

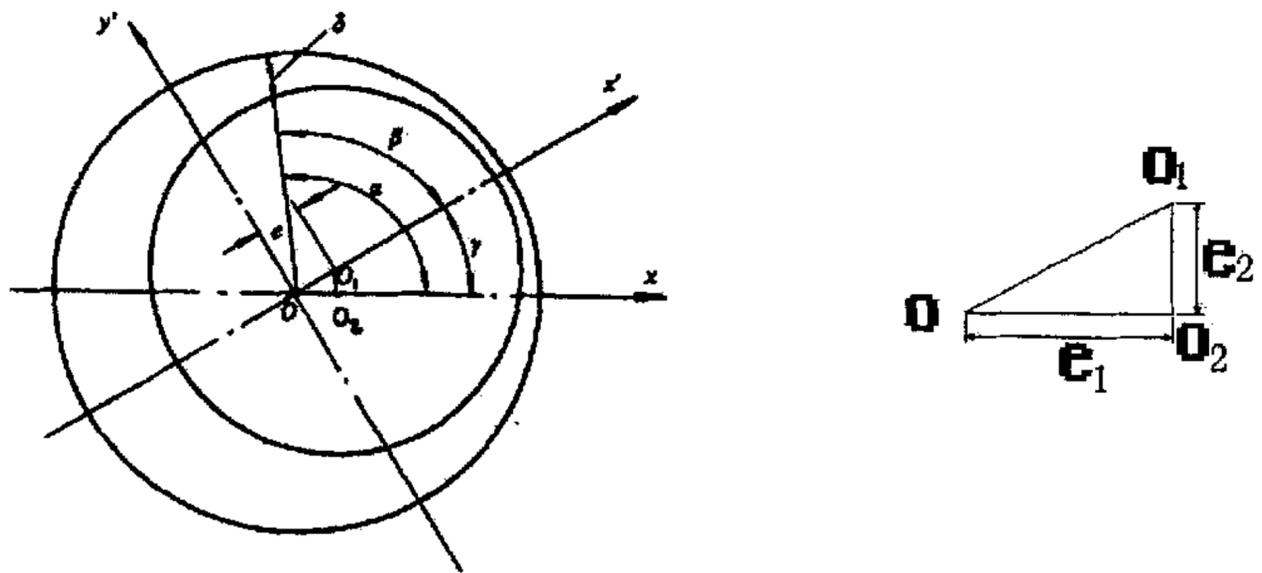
w_s 为定子铁心的径向位移

$W = \frac{w_s}{\delta_0}$ 为转子相对振动位移

$k_\mu = \frac{k_1\delta_0 + \delta_{Fe}}{k_1\delta_0}$ 为饱和度

k_1 为平均气隙的计算气隙系数

δ_{Fe} 为铁磁材料的当量气隙



O_2 为转子轴心

O_1 为转子外圆圆心

O 为定子内圆圆心

图 3.2 定、转子间的气隙示意图

本文只考虑动偏心 e_2 ，而不考虑静偏心 e_1 ，即令 $e_1=0$ ，则 $\gamma = \lambda = \Omega t = \frac{\omega t}{p}$ ，

其中 λ 为连线 o_1o_2 与 x 轴正向的夹角， Ω 为转子的机械角速度， ω 为电网的角频率， p 为发电机的极对数 ($p=40$)，式 (3-23) 中的 α 为整个电机上的机械角，且 $\alpha = x$ ，因此 (3-23) 式可化为：

$$\Lambda(x,t) = \frac{\mu_0}{k_\mu \delta_0 (1 - \varepsilon \cos(x - \frac{\omega t}{p}) + W)} = \Lambda_0 + \Lambda_0 \varepsilon \cos(x - \frac{\omega t}{p}) -$$

$$\Lambda_0 \varepsilon (2W - 3W^2) \cos(x - \frac{\omega t}{p}) + \Lambda_0 (-W + W^2 - W^3) \quad (3-24)$$

§ 3.5 水轮发电机电磁力的计算

在 3.1 至 3.4 节分别计算了水轮发电机定子磁势、转子磁势和定、转子间气隙磁导。由此可以得到：

$$\text{气隙合成磁势 } F_h(x, t) = F(x, t) + f(x, t) \quad (3-25)$$

$$\text{气隙磁密 } B(x, t) = \Lambda(x, t) F_h(x, t) \quad (3-26)$$

因此在只考虑气隙偏心 e 和定子铁心径向位移 w_s 时，定、转子间气隙磁场作用于定子铁心内圆表面的电磁力为：

$$q(x, t) = \frac{B^2(x, t)}{2\mu_0} \quad (\text{牛/米}^2) \quad (3-27)$$

把 (3-16), (3-20), (3-24), (3-25), (3-26) 代入 (3-27) 得：

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{\Lambda^2(x, t) (F(x, t) + f(x, t))^2}{2\mu_0} \\ &= c_1 \cos(10x + 2\omega t) + c_2 w_s + c_3 w_s^2 + c_4 w_s^3 + \dots \end{aligned} \quad (3-28)$$

其中：

$$c_1 = \frac{\Lambda_0^2 A_1 A_2}{2\mu_0}$$

$$c_2 = -\frac{\Lambda_0^2 (A_1^2 + A_2^2 + A_4^2 + A_7^2 + A_{47}^2 + A_{55}^2 + B_1^2 + B_3^2 + B_5^2 + B_7^2 + B_9^2)}{2\mu_0 \delta_0}$$

$$c_3 = \frac{3\Lambda_0^2 (A_1^2 + A_2^2 + A_4^2 + A_7^2 + A_{47}^2 + A_{55}^2 + B_1^2 + B_3^2 + B_5^2 + B_7^2 + B_9^2 + 2A_4 B_1 \sin \psi)}{4\mu_0 \delta_0^2}$$

$$c_4 = -\frac{\Lambda_0^2 (A_1^2 + A_2^2 + A_4^2 + A_7^2 + A_{47}^2 + A_{55}^2 + B_1^2 + B_3^2 + B_5^2 + B_7^2 + B_9^2 + 2A_4 B_1 \sin \psi)}{\mu_0 \delta_0^3}$$

水轮发电机为凸极电机，在不考虑磁饱和的条件下，利用双反应理论和叠加原理，可得电机一相的电势相量方程式：

$$\dot{E}_0 + \dot{E}_{ad} + \dot{E}_{aq} + \dot{E}_\sigma = \dot{U} + \dot{I}R_a \quad (3-29)$$

其中： \dot{E}_0 为激磁电势

$\dot{E}_{ad} = -j\dot{I}_d X_{ad}$ 为直轴电枢反应电势

$\dot{E}_{aq} = -j\dot{I}_q X_{aq}$ 为交轴电枢反应电势

$\dot{E}_\sigma = -j\dot{I} X_\sigma$ 为定子电枢绕组的漏抗电势

\dot{U} 为电枢端电压

\dot{I} 为电枢电流

R_a 为电枢电阻

X_{ad} 为同步电机的直轴电枢反应电抗

X_{aq} 为同步电机的交轴电枢反应电抗

\dot{I}_d 为电枢电流的直轴分量

\dot{I}_q 为电枢电流的交轴分量

由 (3-29) 式可作出凸极同步发电机的相量图 3.3。图中 ψ 为内功率因素角， ϕ 为功率因数角， δ 为功率角。

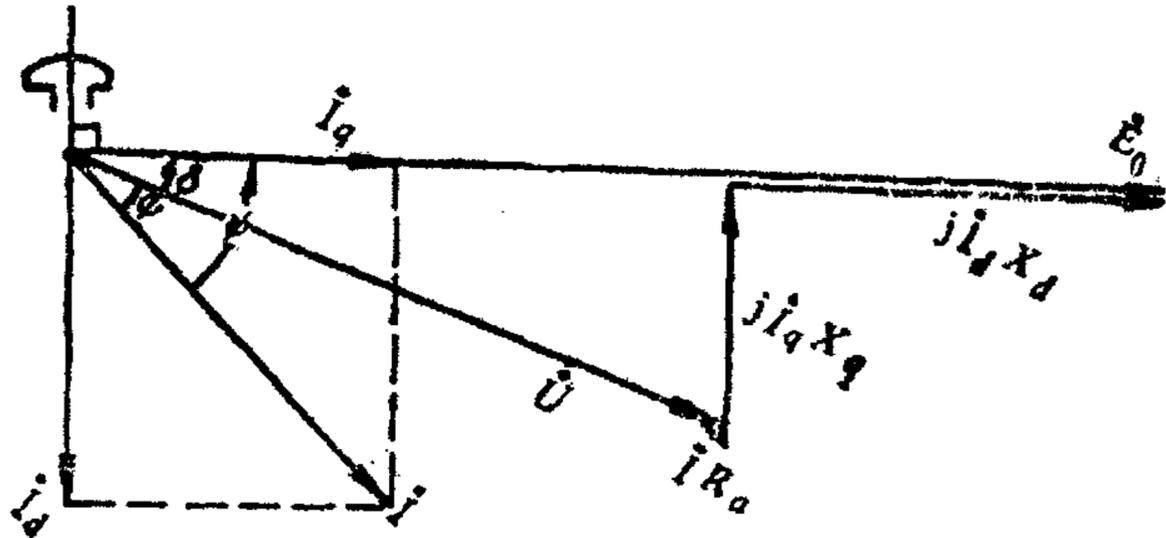


图 3.3 凸极同步发电机的相量图

在实际电机中 R_a 很小，忽略电阻压降 iR_a 时，有下面四个等式成立：

$$IX_q \cos \psi = U \sin \delta \quad (3-30)$$

$$IX_d \sin \psi = E_0 - U \cos \delta \quad (3-31)$$

$$E_0 = f(I_f) \quad (3-32)$$

$$P = m \frac{E_0 U}{X_d} \sin \delta + m \frac{U^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta \quad (3-33)$$

其中： $X_d = X_\sigma + X_{ad}$ 为直轴同步电抗， $X_q = X_\sigma + X_{aq}$ 为交轴同步电抗， X_σ 为电枢漏抗。(3-32) 式由空载特性曲线确定。电枢电流 I 和激磁电流 I_f 的变化不是任意的，它们之间要遵从一定的关系，(3-30) 式 ~ (3-33) 式 给出了电枢电流 I 、激磁电流 I_f 和有功功率 P 之间的关系，将电枢电流 I 和激磁电流 I_f 代入 (3-28) 式即可得到相应的作用于定子铁心内圆表面的电磁力。

§ 3.6 本章小结

本章计算了三相对称稳态运行状态下作用于定子铁心内圆表面的电磁力。在分析定子和转子磁势时，采用谐波分析法，把定、转子磁势分别用谐波形式表示，进而得到用谐波形式表示的气隙合成磁势。在计算气隙磁导时，同时考虑了定、转子间的气隙偏心（动偏心）和定子铁心的径向振动位移。气隙磁场交变产生作用于定子铁心内圆表面的电磁力波，引起定子系统的振动，而定子铁心的径向振动位移对气隙磁场又产生影响，进而影响电磁力的成分。因此，本章计算电磁力时考虑了磁场与变形场的相互耦合作用，使得所得到的电磁力的成分更加丰富。

第四章 水轮发电机组定子系统的固有频率和振型

§ 4.1 引言

双壳系统模型是把水轮发电机组定子铁心与机座看成具有弹性连接的两个同心圆柱壳，连接弹簧的刚度冷态时视为零，热态时视为无穷大。为了更好地分析定子系统的磁固耦合振动，必须准确地求得系统的固有频率和振型。本文只讨论三相对称稳态运行状态（即热态）时定子系统的磁固耦合振动，因此我们只关心热态时定子系统的固有特性。

水轮发电机组定子系统的磁固耦合振动是定子系统在定子铁心内圆表面的电磁力作用下发生的振动。由第三章电磁力的计算知，作用在定子铁心内圆表面的电磁力中含有非线性成分，因此定子系统的磁固耦合振动属于连续体的非线性振动。对于连续体的非线性振动，一般情况下是得不到精确解的，只能借助近似分析方法得到近似解。本文采用一种数值—分析方法来研究定子系统的磁固耦合

非线性振动：假设将振动位移表示为 $w(r,t) = \sum_{n=1}^N \psi_n(t) \phi_n(r)$ ，其中 ϕ_n 是系统的线

性无阻尼固有模态，然后用梁函数组合法决定 ϕ_n ，再将 w 代入运动微分方程，利用 ϕ_n 的正交性，可得到一组关于 ψ_n 的 N 个耦合的二阶常微分方程，然后用多尺度法求解这些方程。

§ 4.2 弹性薄壁圆柱短壳的固有振动

根据薄壳、短壳的定义，简化得到的发电机定子系统的双壳模型中，按照长径比（设 h 为壳的厚度， R 为壳的中曲面的曲率半径， L 为壳的长度，则 $\max(\frac{h}{R}) \leq \frac{1}{20}$ 时为薄壳， $\frac{L}{R} < 0.5$ 时为短壳）和厚径比可知，双壳模型中的内壳和外壳均属于薄壁短圆柱壳。下面先分析一般的薄壁短圆柱壳的固有振动。

4.2.1 圆柱壳的动力学微分方程

薄壳振动理论的几点基本假设：

- (1) 变形前垂直中曲面的直线在变形后仍保持为直线，并垂直中曲面。
- (2) 相对其它应力分量，沿中曲面垂直方向的应力可忽略不计。
- (3) 相对壳体微体的移动惯性力，可忽略其转动惯性力矩。

(4) 法向挠度沿中曲面法线上各点是不变的。

设壳体的正交曲线坐标为 α 、 β 、 z ，如图 4.1a 所示，其中 α 、 β 在壳体中曲面上， z 为中曲面的法线，中曲面上任意一点 p 沿 α 、 β 方向的拉梅参数分别为 A 、 B ， R_1 、 R_2 为 p 点处沿 α 、 β 方向的曲率半径，中曲面上任意一点 p 在 α 、 β 和中面法线 z 方向的位移分量分别为 u 、 v 、 w ，距中曲面为 z 的壳层上任意一点 p_z 的位移分量为 u_z 、 v_z 、 w_z 。选取 $\alpha = \text{常数}$ 和 $\beta = \text{常数}$ 的两个法截面将壳体内部的应力揭露出来示于图 4.1b 中，各应力的符号规定和弹性力学一样；将壳体内部的内力和内力矩的正方向示于图 4.1c 中。

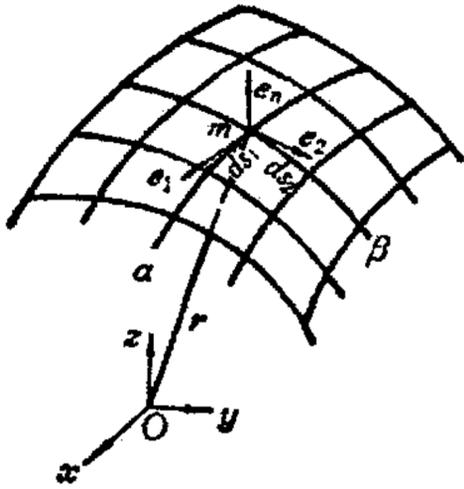


图 4.1a

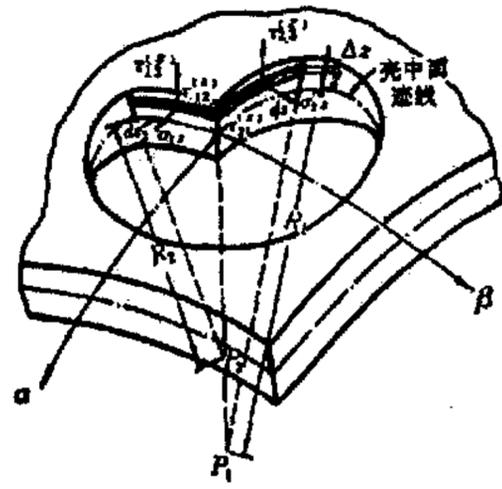


图 4.1b

一、壳体的几何方程

中曲面上 α 方向线素的伸长率为：

$$\epsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{A \cdot B} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1} \quad (4-1a)$$

中曲面上 β 方向线素的伸长率为：

$$\epsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{A \cdot B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_2} \quad (4-1b)$$

中曲面上的剪切变形为：

$$\omega = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) \quad (4-1c)$$

距中曲面为 z 的壳层上任意一点 p_z 的位移分量为：

$$u_z = u + z\vartheta_1 \quad (4-2a)$$

$$v_z = v + z\vartheta_2 \quad (4-2b)$$

$$w_z = w \quad (4-2c)$$

其中:

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \quad (4-3a)$$

$$\vartheta_2 = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \quad (4-3b)$$

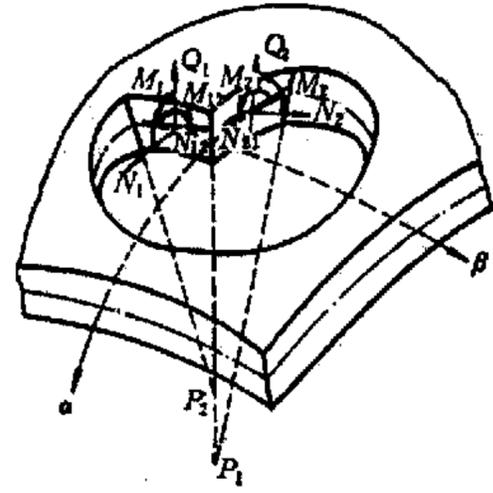


图 4.1c

壳层 z 的变形:

$$\text{线素在 } \alpha \text{ 方向的伸长率 } \varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + z\chi_1 \quad (4-4a)$$

$$\text{线素在 } \beta \text{ 方向的伸长率 } \varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + z\chi_2 \quad (4-4b)$$

$$\text{剪切变形 } \omega_z = \omega + 2z\chi_{12} \quad (4-4c)$$

其中:

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \alpha} + \frac{\vartheta_2}{A \cdot B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad (4-5a)$$

$$\chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \beta} + \frac{\vartheta_1}{A \cdot B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad (4-5b)$$

$$\chi_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{u}{A \cdot R_1} - \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{v}{B \cdot R_2} - \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] \quad (4-5c)$$

二、壳体的内力方程和物理方程

将壳体的作用于过 α 线的法向截面内的内力向 α 线作简化, 如图 4.1c 所示, 得作用于 α 线的单位长度上的内力为:

$$\text{拉力 } N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{2z} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz \quad (4-6a)$$

$$\text{剪力 } N_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21}^{(z)} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz \quad (4-6b)$$

$$\text{横向力 } Q_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{23}^{(z)} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz \quad (4-6c)$$

同理得作用于 β 线的单位长度上的内力为:

$$\text{拉力 } N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{1z} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (4-7a)$$

$$\text{剪力 } N_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12}^{(z)} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (4-7b)$$

$$\text{横向力 } Q_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{13}^{(z)} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (4-7c)$$

取 σ_{1z} 、 $\tau_{12}^{(z)}$ 对 e_1 、 e_2 方向的力矩之和, 得到 β 线的单位长度上的弯矩和扭矩为:

$$M_1 = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{1z} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) z dz \quad (4-8a)$$

$$M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12}^{(z)} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) z dz \quad (4-8b)$$

同理可得 α 线的单位长度上的弯矩和扭矩为:

$$M_2 = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{2z} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) z dz \quad (4-9a)$$

$$M_{21} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21}^{(z)} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) z dz \quad (4-9b)$$

物理方程为:

$$\sigma_{1z} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{1z} + \mu\varepsilon_{2z}) \quad (4-10a)$$

$$\sigma_{2z} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{2z} + \mu\varepsilon_{1z}) \quad (4-10b)$$

$$\tau_{12}^{(z)} = \tau_{21}^{(z)} = \frac{E}{2(1+\mu)} \omega_z \quad (4-10c)$$

把 (4-4) 式代入 (4-10) 式后, 将所得结果再代入 (4-6) 式至 (4-9) 式经过化简可得壳体内力与中曲面变形之间的关系:

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) \quad (4-11a)$$

$$M_1 = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(\chi_1 + \mu\chi_2) \quad (4-11b)$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) \quad (4-11c)$$

$$M_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(\chi_2 + \mu\chi_1) \quad (4-11d)$$

$$N_{12} = N_{21} = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\omega \quad (4-11e)$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\chi_{12} \quad (4-11f)$$

式中： E 为壳体的弹性模量， μ 为壳体的泊松比。

三、壳体的动力平衡方程

在壳体中曲面上取出一微元，如图 4.2a 所示，沿 α 、 β 线方向的弧长分别为 $A d\alpha$ 和 $B d\beta$ ，在一般情况下，拉梅参数 A 、 B 也是坐标 α 、 β 的函数，

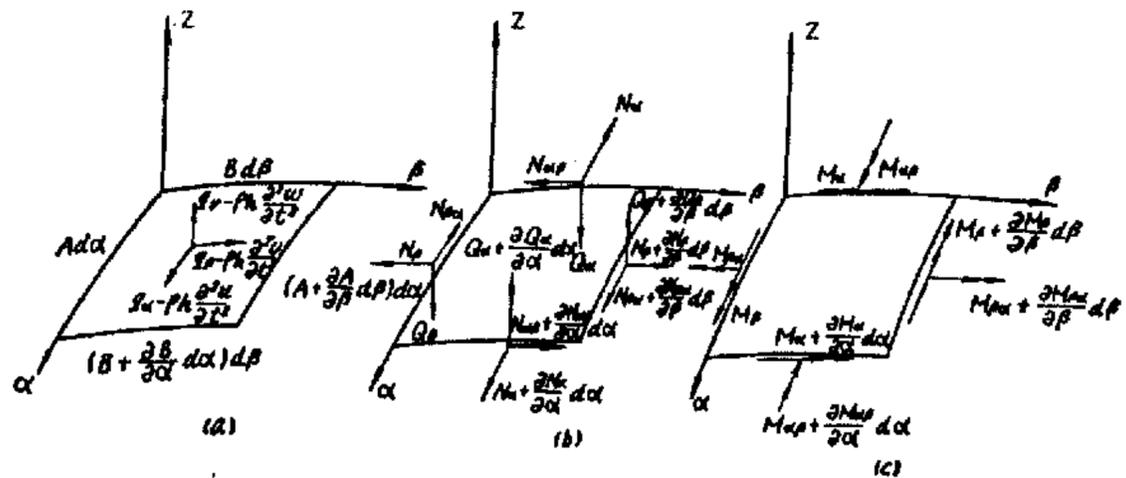


图 4.2

因此，另两边的弧长应分别为 $\left(A + \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta\right) d\alpha$ 和 $\left(B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha\right) d\beta$ ，在这些弧

边上作用有五个内力分量： N_1 、 N_2 、 N_{12} 、 Q_1 、 Q_2 ，如图 4.2b 所示；还作用

有三个内力矩分量： M_1 、 M_2 、 M_{12} ，如图 4.2c 所示。图上均表示各内力的正方向。在中面微元上尚作用有沿 α 、 β 、 z 三个方向的单位面积外载分量 q_α 、 q_β 、 q_z 以及相应惯性力项 $\left(-\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$ 、 $\left(-\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)$ 、 $\left(-\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$ ，如图 4.2a 所示。将所有内力素乘所在边的弧长，所有外载分量及惯性力项乘微元面积，并投影到 α 、 β 、 z 三个方向上，并略出高阶小量项，即可建立动态平衡方程组：

$$\frac{\partial(BN_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_{21})}{\partial \beta} + N_{12} \frac{\partial A}{\partial \beta} - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + AB \frac{Q_1}{R_1} + ABq_\alpha - AB\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4-12a)$$

$$\frac{\partial(BN_{12})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_2)}{\partial \beta} + N_{21} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + AB \frac{Q_2}{R_2} + ABq_\beta - AB\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (4-12b)$$

$$\frac{\partial(BQ_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AQ_2)}{\partial \beta} - AB \frac{N_1}{R_1} - AB \frac{N_2}{R_2} + ABq_z - AB\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4-12c)$$

$$Q_1 = \frac{1}{AB} \left[-\frac{\partial(BM_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AM_{21})}{\partial \beta} + M_{12} \frac{\partial A}{\partial \beta} + M_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] \quad (4-12d)$$

$$Q_2 = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(BM_{12})}{\partial \alpha} - \frac{\partial(AM_2)}{\partial \beta} + M_{21} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] \quad (4-12e)$$

四、圆柱壳的动力学微分方程

对于半径为 R ，长为 L 的圆柱壳，取如图 4.3 所示的圆柱壳。

坐标系为：

$$\alpha = x, \quad \beta = \theta, \quad z = z \quad (4-13a)$$

拉梅参数：

$$A = 1, \quad B = R \quad (4-13b)$$

主曲率半径：

$$R_\alpha = \infty, \quad R_\beta = R \quad (4-13c)$$

P 为壳体中曲面上任一点， u 、 v 、 w 分别为 P 点的轴向、切向、法向位移， q_x 、 q_θ 、 q_z 为作用在中曲面单位面积上的外载分量。

将(4-13)式代入(4-1)式、(4-3)式、(4-5)式得中曲面上任意一点应变与其位移的关系式:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R}, \quad \omega = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4-14a)$$

$$\chi_x = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{g_\theta}{R} \cdot 0 = \frac{\partial g_x}{\partial x}, \quad \chi_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial g_\theta}{\partial \theta}, \quad \chi_{x\theta} = \frac{\partial g_\theta}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial g_x}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4-14b)$$

$$g_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad g_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{R} \quad (4-14c)$$

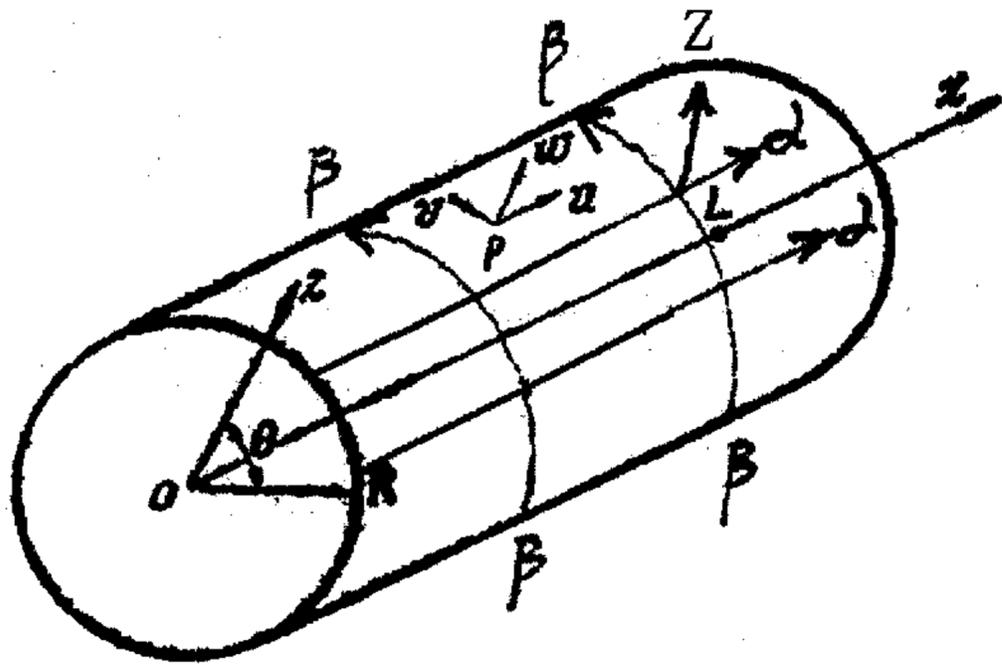


图 4.3

将(4-13)式代入(4-11)式得内力与中面应变的关系:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_\theta) \quad (4-15a)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_x) \quad (4-15b)$$

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\chi_x + \mu\chi_\theta) \quad (4-15c)$$

$$M_\theta = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\chi_\theta + \mu\chi_x) \quad (4-15d)$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \omega \quad (4-15e)$$

$$M_{x\theta} = M_{\theta x} = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \chi_{x\theta} \quad (4-15f)$$

式中:

E 为壳体的弹性模量, μ 为壳体的泊松比。

将圆柱壳的基本参数 (4-13) 式代入 (4-12) 式, 得到圆柱壳的动力平衡方程:

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + Rq_x - R\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4-16a)$$

$$R \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + Q_\theta + Rq_\theta - R\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (4-16b)$$

$$R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - N_\theta + Rq_z - R\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4-16c)$$

$$Q_x = -\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{R\partial \theta} \quad (4-16d)$$

$$Q_\theta = \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - \frac{\partial M_\theta}{R\partial \theta} \quad (4-16e)$$

将 (4-14)、(4-15) 代入 (4-16) 即可得到以中面位移分量表示的圆柱壳振动的基本微分方程组:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \mu \frac{\partial w}{R \partial x} = \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \left[\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \right] \quad (4-17a)$$

$$\frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} +$$

$$\frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \theta^3} \right] = \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \left[\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right] \quad (4-17b)$$

$$\frac{12}{h^2} \left(\mu \frac{\partial u}{R \partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} + \frac{w}{R^2} \right) - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{R^2 \partial \theta^3} \right) + \nabla^2 \nabla^2 w$$

$$= \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} \left(q_z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (4-17c)$$

式中:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \theta^2} \quad (4-18)$$

E 为壳体的弹性模量, μ 为壳体的泊松比。

为了书写简便, 将 (4-17) 式简记为:

$$L_1(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_x = 0 \quad (4-19a)$$

$$L_2(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_\theta = 0 \quad (4-19b)$$

$$L_3(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_z = 0 \quad (4-19c)$$

方程 (4-19) 的边界条件为 (对于齐次边界):

$$x = x_0: u = 0 \text{ 或 } N_x = 0 \quad (4-20a)$$

$$v = 0 \text{ 或 } N_{x\theta} + \frac{M_{x\theta}}{R} = 0 \quad (4-20b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ 或 } M_x = 0 \quad (4-20c)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_x + \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial \theta} = 0 \quad (4-20d)$$

$$\theta = \theta_0: v = 0 \text{ 或 } N_\theta = 0 \quad (4-20e)$$

$$u = 0 \text{ 或 } N_{x\theta} = 0 \quad (4-20f)$$

$$\frac{v}{R} - \frac{\partial w}{R \partial \theta} = 0 \text{ 或 } M_\theta = 0 \quad (4-20g)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_\theta + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} = 0 \quad (4-20h)$$

4.2.2 用梁函数组合法求圆柱壳的固有频率和振型

梁函数组合法是一种适合于求解各种边界条件的矩形板的固有频率和振型的近似解法, 这是利用了二维板振型的一维分布和相应边界条件的梁的振型函数接近的力学特性。在圆柱壳振动分析中也类似具有这样的特性, 即圆柱壳振型的轴向分布接近于相应边界条件的梁的振型函数, 可用轴向梁函数和周向三角函数的组合来逼近圆柱壳的振型函数。因此该法同样可以用来求解任意边界条件的圆柱壳的固有频率和振型, 该法虽然也是近似解法, 但振型表达式规则, 便于引用到计算双壳系统的固有频率和振型, 且所得固有频率也符合工程计算要求。

一、圆柱壳的变分方程

弹性体振动的基本方程表示方法除 4.2.1 小节所叙述的微分方程外, 还有变分方程形式。对于一般性薄壳同样可以建立用动能、变形能及外力做功来表示的变分方程, 而且和微分方程是等价的。

任何弹性体的动能可表达为:

$$T = \iiint_V \frac{\rho}{2} (\dot{u}_z^2 + \dot{v}_z^2 + \dot{w}_z^2) dV \quad (4-21)$$

对于薄壳, 有:

$$u_z = u + z\vartheta_1, \quad v_z = v + z\vartheta_2, \quad w_z = w, \quad dV = ABd\alpha d\beta dz \quad (4-22)$$

(4-22) 式代入 (4-21) 式可得薄壳的动能表达式 (忽略转动动能) 为:

$$T = \iint_S \frac{\rho h}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] ABd\alpha d\beta \quad (4-23)$$

式中积分沿薄壳中面进行。

任何弹性体的变形能可表达为:

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (4-24)$$

由薄壳理论可得薄壳变形能为:

$$U = \iint_S \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\mu) \left(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{4} \right) \right] ABd\alpha d\beta + \iint_S \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \left[(\chi_1 + \chi_2)^2 - (1-\mu) \left(\chi_1 \chi_2 - \frac{\chi_{12}^2}{4} \right) \right] ABd\alpha d\beta \quad (4-25)$$

将圆柱壳的基本关系式 (4-13) 代入 (4-23) 式即可得圆柱壳的动能表达式:

$$T = \iint_S \frac{\rho h}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R dx d\theta \quad (4-26)$$

将圆柱壳的中面应变表达式 (4-14) 代入 (4-25) 式得圆柱壳的变形能:

$$U = \iint_S \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{w}{R} \right]^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{w}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R\partial\theta} \right)^2 \right] \right\} + \frac{h^2}{12R^2} \left\{ R^2 (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial v}{\partial \theta} \nabla^2 w + \left(\frac{\partial v}{R\partial\theta} \right)^2 \right\}$$

$$2(1-\nu)\left[-\frac{\partial \nu}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2\right] R dx d\theta \quad (4-27)$$

有齐次边界的圆柱壳的变分方程为:

$$\delta \int_0^1 (T-U) dt + \int_0^1 \iint_S [q_x \delta u + q_\theta \delta v + q_z \delta w] R dx d\theta dt \quad (4-28a)$$

将(4-26)式、(4-27)式代入(4-28)式得圆柱壳的变分方程:

$$\begin{aligned} & \frac{Eh}{1-\mu^2} \int_0^1 \iint_S \left\{ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\mu)}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \left(q_x - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \frac{(1+\mu)}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta u + \left[\frac{(1+\mu)}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{(1-\mu^2)}{Eh} (q_\theta - \right. \right. \\ & \left. \left. \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}) + k \left(\frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} - k \left(\frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \theta^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right] \delta v - \\ & \left[\frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} - k \left(\frac{\partial^3 v}{R^2 \partial \theta^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right) + \frac{w}{R^2} + \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \left(\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q_z \right) + \right. \\ & \left. \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) \right] \delta w \} R dx d\theta dt + \frac{Eh}{1-\mu^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ - \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\mu}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right] \delta u \Big|_0^L - \frac{(1-\mu)}{2} \left[\frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{h^2}{6R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{2 \partial x} \right) \right] \delta v \Big|_0^L \right. \\ & \left. - \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2} \left((2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \right) \right] \delta w \Big|_0^L \} R d\theta dt = 0 \quad (4-28b) \end{aligned}$$

式中 $k = \frac{h^2}{12R^2}$, q_x 、 q_θ 、 q_z 分别为圆柱壳沿 x 、 θ 、 z 三个方向的单位面积

的外载, 圆柱壳自由振动时, $q_x = q_\theta = q_z = 0$, 此时与(4-28)式相应的振型方程为:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 U}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 V}{R \partial x \partial \theta} + \mu \frac{\partial W}{R \partial x} + \frac{\rho h}{K} \omega^2 U = 0 \quad (4-29a)$$

$$\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 U}{R \partial x \partial \theta} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial W}{R^2 \partial \theta} + k \left[\frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 W}{R^2 \partial \theta^3} \right] + \frac{\rho h}{K} \omega^2 V = 0 \quad (4-29b)$$

$$\frac{12}{h^2} \left\{ \mu \frac{\partial U}{R \partial x} + \frac{\partial V}{R^2 \partial \theta} + \frac{W}{R^2} - k \left[\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 V}{R^2 \partial \theta^3} \right] \right\} + \nabla^2 \nabla^2 W - \frac{\rho h}{D} \omega^2 W = 0 \quad (4-29c)$$

式中 $K = \frac{Eh}{1-\mu^2}$ 为薄膜刚度, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 为弯曲刚度。

二、用梁函数组合法求圆柱壳的固有频率和振型

设有限长圆柱壳的位移振型解为:

$$U(x, \theta) = \sum_{m=1}^p A_m \frac{dX_m(x)}{d(x/L)} \cos n\theta \quad (4-30a)$$

$$V(x, \theta) = \sum_{m=1}^p B_m X_m(x) \sin n\theta \quad (4-30b)$$

$$W(x, \theta) = \sum_{m=1}^p C_m X_m(x) \cos n\theta \quad (4-30c)$$

表4.1 梁函数

边界条件		$X_m(x)$
$X=0$	$X=a$	
简支	简支	$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi}{a} x$
固定	固定	$(\operatorname{ch} \alpha_m x - \cos \alpha_m x) - C_m (\operatorname{Sh} \alpha_m x - \sin \alpha_m x)$
自由	自由	$X_1=1, X_2=\sqrt{3}\left(1-\frac{2x}{a}\right), X_m=(\operatorname{ch} \alpha_m x + \cos \alpha_m x) - C_m (\operatorname{sh} \alpha_m x + \sin \alpha_m x) (m>2)$
固定	简支	$(\operatorname{ch} \alpha_m x - \cos \alpha_m x) - C_m (\operatorname{sh} \alpha_m x - \sin \alpha_m x)$
固定	自由	$(\operatorname{ch} \alpha_m x - \cos \alpha_m x) - C_m (\operatorname{sh} \alpha_m x - \sin \alpha_m x)$
自由	简支	$X_1=\sqrt{\frac{2}{a}}\left(1-\frac{x}{a}\right), X_m=(\operatorname{ch} \alpha_m x + \cos \alpha_m x) - C_m (\operatorname{sh} \alpha_m x + \sin \alpha_m x) (m>1)$

式中 $n=0,1,2,3, \dots m=1,2,3, \dots X_m(x)$ 为与轴向两端边界条件相应的梁的 m 阶振型函数, 详见表 4.1, A_m, B_m, C_m 为待定系数。对于短圆柱壳, 可

在振型表达式(4-30)中仅取一项(第 m 项,相当与轴上有 m 个半波的情形):

$$U = A_m \frac{dX_m(x)}{d(x/L)} \cos n\theta \quad (4-31a)$$

$$V = B_m X_m(x) \sin n\theta \quad (4-31b)$$

$$W = C_m X_m(x) \cos n\theta \quad (4-31c)$$

将(4-31)式代入振型方程(4-29)式,得到关于系数 A_m 、 B_m 、 C_m 的线性代数方程组:

$$\begin{bmatrix} S_{11} - H_m \Omega^2 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - \Omega^2 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{bmatrix} = 0 \quad (4-32)$$

由系数行列式为零给出如下频率方程:

$$\begin{aligned} & H_m \Omega^6 - (S_{11} + H_m S_{22} + H_m S_{33}) \Omega^4 \\ & - (S_{12}^2 + S_{13}^2 + H_m S_{23}^2 - H_m S_{22} S_{33} - S_{11} S_{33} - S_{11} S_{22}) \Omega^2 \\ & + (S_{12}^2 S_{33} + S_{23}^2 S_{11} + S_{13}^2 S_{22} - S_{11} S_{22} S_{33} + 2S_{12} S_{23} S_{13}) = 0 \end{aligned} \quad (4-33)$$

表4.2 梁函数系数

边界条件		C_n						一般公式
$X=0$	$X=a$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m \geq 6$	
简支	简支	—	—	—	—	—	—	—
固定	固定	0.982502	1.000777	0.999966	1.000001	1.000000	1.000000	$\frac{\text{ch}\alpha_n a - \cos\alpha_n a}{\text{sh}\alpha_n a - \sin\alpha_n a}$
自由	自由	—	—	0.982502	1.000777	0.999966	1.000000	$\frac{\text{ch}\alpha_n a - \cos\alpha_n a}{\text{sh}\alpha_n a - \sin\alpha_n a}$
固定	简支	1.000777	1.000001	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	$\frac{\text{ch}\alpha_n a + \cos\alpha_n a}{\text{sh}\alpha_n a + \sin\alpha_n a}$
固定	自由	0.734096	1.018467	0.999224	1.000034	0.999999	1.000000	$\frac{\text{ch}\alpha_n a + \cos\alpha_n a}{\text{sh}\alpha_n a + \sin\alpha_n a}$
自由	简支	—	1.000777	1.000001	1.000000	1.000000	1.000000	$\frac{\text{ch}\alpha_n a + \cos\alpha_n a}{\text{sh}\alpha_n a + \sin\alpha_n a}$

式中

$$S_{11} = \beta_m^2 + \frac{1}{2}(1+k)(1-\mu)n^2 H_m \quad (4-34a)$$

$$S_{22} = n^2 + \frac{1}{2}(1+3k)(1-\mu)\beta_m^2 H_m \quad (4-34b)$$

$$S_{33} = 1 + k \left[\beta_m^4 + (n^2 - 1)^2 - 2\mu n^2 \beta_m^2 E_m + 2(1 - \mu) n^2 \beta_m^2 H_m \right] \quad (4-34c)$$

$$S_{12} = S_{21} = \mu n \beta_m E_m - \frac{1 - \mu}{2} n \beta_m H_m \quad (4-34d)$$

$$S_{13} = S_{31} = \mu \beta_m E_m + k \beta_m \left[\frac{1 - \mu}{2} n^2 H_m - \beta_m^2 \right] \quad (4-34e)$$

$$S_{23} = S_{32} = n + k n \beta_m^2 \left[\frac{3}{2} (1 - \mu) H_m - \mu E_m \right] \quad (4-34f)$$

而

$$\Omega^2 = \frac{\rho(1 - \mu^2)}{E} \omega^2 R^2 \quad (4-34g)$$

$$\beta_m = \alpha_m L \frac{R}{L} = (\alpha L)_m \frac{R}{L} \quad (4-34h)$$

$$k = \frac{h^2}{12R^2} \quad (4-34i)$$

表4.3 梁频率系数

边界条件		$\alpha_m L = (ab)_m$					
$x=0$	$x=L$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m \geq 6$
简支	简支	π	2π	3π	4π	5π	$m\pi$
固定	固定	4.73004	7.85320	10.9956	14.1372	17.2788	$(2m+1)\frac{\pi}{2}$
自由	自由	0	0	4.73004	7.85320	10.9956	$(2m-3)\frac{\pi}{2}$
固定	简支	3.92660	7.06858	10.2102	13.3518	16.4934	$(4m+1)\frac{\pi}{4}$
固定	自由	1.87510	4.69409	7.85476	10.9955	14.1372	$(2m-1)\frac{\pi}{2}$
自由	简支	0	3.92660	7.06858	10.2102	13.3518	$(4m-3)\frac{\pi}{4}$

$$E_m = L \int_0^L X_m'(x) X_m(x) dx \quad (4-34j)$$

$$H_m = L \int_0^L (X_m'(x))^2 dx \quad (4-34k)$$

其中相应各种边界条件的梁的第 m 阶梁函数系数 C_m 、梁频率系数 $(ab)_m$ 及梁函数积分值 E_m 、 H_m 见表 4.2, 表 4.3, 表 4.4, 表 4.5。

从 (4-33) 式解得频率系数 Ω_{imn} ($i=1,2,3$)，则固有频率为：

$$\omega_{imn} = \frac{\Omega_{imn}}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}} \quad (\text{rad/s}) \quad (4-35a)$$

$$\text{或 } f_{imn} = \frac{\omega_{imn}}{2\pi} \quad (\text{Hz}) \quad (4-35b)$$

相应各阶振型比为:

$$\left(\frac{A}{C}\right)_{imn} = \frac{(S_{33} - \Omega_{imn}^2)(S_{22} - \Omega_{imn}^2) - S_{23}^2}{S_{12}S_{23} - (S_{22} - \Omega_{imn}^2)S_{13}} \quad (4-36a)$$

$$\left(\frac{B}{C}\right)_{imn} = \frac{S_{12}(S_{33} - \Omega_{imn}^2) - S_{13}S_{23}}{(S_{22} - \Omega_{imn}^2)S_{13} - S_{23}S_{12}} \quad (4-36b)$$

ω_{imn} 的下标 m 、 n 代表相应振型沿轴向有 m 个半波, 沿周向有 n 个波。对于每一组 (m, n) 值, 可以求出三个固有频率及三组振型比, 代表 U 、 V 、 W 间比值不同, 但均有 m 个轴向半波和 n 个周向波, 本文取三个中最小的为圆柱壳的相应于 (m, n) 值的固有频率, 即取径向振动为主 (相应于振型中 W 为主) 的固有频率及振型。由 (4-33) 式求得各阶频率系数 Ω_{imn} ($i=1, 2, 3$), 然后把每阶的三个频率系数 Ω_{imn} 中的最小的那个代入 (4-35) 式、(4-36) 式, 分别求得各阶固有频率和振型比。

表 4.4 常用的梁函数及其导数积分值

边界条件		$H_{m-a} = \int_0^1 (X^a)^m dX$					
$x=0$	$x=a$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m \geq 6$
简支	简支	π^2	$4\pi^4$	$8\pi^6$	$16\pi^8$	$25\pi^{10}$	$m^2\pi^2$
固定	固定	12.3062	48.0591	98.9048	171.588	243.908	$(m + \frac{1}{2})\pi \left[(m + \frac{1}{2})\pi - 2 \right]$
自由	自由	0	12.0000	48.4808	108.925	186.867	$(m - \frac{3}{2})\pi \left[(m - \frac{3}{2})\pi + 6 \right]$
固定	简支	11.3539	42.8182	94.0342	164.925	255.581	$(m + \frac{1}{4})\pi \left[(m + \frac{1}{4})\pi - 1 \right]$
固定	自由	4.64778	32.4174	77.2889	142.901	228.183	$(m - \frac{1}{2})\pi \left[(m - \frac{1}{2})\pi + 3 \right]$
自由	简支	3.00000	26.8724	71.0903	134.875	218.332	$(m - \frac{3}{4})\pi \left[(m - \frac{3}{4})\pi + 3 \right]$

根据以上的分析, 下面结合双壳系统中的内壳 (定子铁心) 和外壳 (定子机座) 的实际情况, 分别计算内壳和外壳的固有频率。

内壳的约束看成两端自由，其弹性模量 $E=130000\text{ N/mm}^2$ ，密度 $\rho=7.65\text{ g/cm}^3$ ，泊松比 $\mu=0.31$ ，长 $L=2950\text{ mm}$ ，中曲面半径 $R=9721.6\text{ mm}$ ，壁厚 $h=325\text{ mm}$ 。

表 4.5 常用的梁函数及其导数积分值

边界条件		$E_{xx} = a \int_0^x X_n X_n dx$					
$x=0$	$x=a$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m \geq 6$
简支	简支	$-\pi^2$	$-4\pi^2$	$-9\pi^2$	$-16\pi^2$	$-25\pi^2$	$-m^2\pi^2$
固定	固定	-12.3062	-46.0501	-98.9048	-171.586	-263.998	$-(m + \frac{1}{2})\pi[(m + \frac{1}{2})\pi - 2]$
自由	自由	0	0	-12.3062	-46.0501	-98.9048	$-(m - \frac{3}{2})\pi[(m - \frac{3}{2})\pi - 2]$
固定	简支	-11.1539	-42.8162	-94.0343	-164.925	-255.581	$-(m + \frac{1}{4})\pi[(m + \frac{1}{4})\pi - 1]$
固定	自由	0.858238	-13.2943	-45.6042	-98.6182	-171.586	$-(m - \frac{1}{2})\pi[(m - \frac{1}{2})\pi - 2]$
自由	简支	0	-11.1539	-42.8162	-94.0342	-164.925	$-(m - \frac{3}{4})\pi[(m - \frac{3}{4})\pi - 1]$

通过取不同的 m 、 n 值，计算内壳的频率如下：

$$f_{m,n}^n = f_{2,5}^n = 15.3\text{ Hz}, f_{1,2}^n = 1.8\text{ Hz}, f_{3,5}^n = 67.9\text{ Hz}, f_{1,3}^n = 5.2\text{ Hz}, f_{1,4}^n = 10\text{ Hz},$$

$$f_{3,3}^n = 17.6\text{ Hz}, f_{2,2}^n = 1.5\text{ Hz}, f_{1,5}^n = 16.1\text{ Hz}, f_{2,4}^n = 9.2\text{ Hz}, f_{1,6}^n = 23.6\text{ Hz}$$

外壳的约束看成一端自由，一端固定，其弹性模量 $E=211000\text{ N/mm}^2$ ，密度 $\rho=7.65\text{ g/cm}^3$ ，泊松比 $\mu=0.31$ ，长 $L=2950\text{ mm}$ ，中曲面半径 $R=10477.87\text{ mm}$ ，壁厚 $h=488\text{ mm}$ 。

通过取不同的 m 、 n 值，计算外壳的频率如下：

$$f_{m,n}^w = f_{2,5}^w = 45.7\text{ Hz}, f_{1,2}^w = 98\text{ Hz}, f_{3,5}^w = 181.4\text{ Hz}, f_{1,3}^w = 102.3\text{ Hz},$$

$$f_{1,4}^w = 109.3\text{ Hz}, f_{3,3}^w = 90.6\text{ Hz}, f_{2,2}^w = 99.5\text{ Hz}, f_{1,5}^w = 119.4\text{ Hz}, f_{2,4}^w = 101.9\text{ Hz},$$

$$f_{1,6}^w = 133.1\text{ Hz}$$

求出内、外壳的各阶固有频率后，将其代入 (3-36) 式，可以得到相应的各阶振型。

§ 4.3 双圆柱壳系统的固有振动

求出圆柱壳的固有频率和振型后，可设圆柱壳振动微分方程组 (4-19) 的解为：

$$u(x, \theta, t) = \sum_i T_i(t) U_i(x, \theta) \quad (4-37a)$$

$$v(x, \theta, t) = \sum_i T_i(t) V_i(x, \theta) \quad (4-37b)$$

$$w(x, \theta, t) = \sum_i T_i(t) W_i(x, \theta) \quad (4-37c)$$

其中 U_i 、 V_i 、 W_i 为圆柱壳的各阶振型， $T_i(t)$ 为圆柱壳的各阶振型分量，且

$$U_i(x, \theta) = A_i \frac{dX_i(x)}{d(x/L)} \cos n\theta, \quad V_i(x, \theta) = B_i X_i(x) \sin n\theta, \quad W_i(x, \theta) = C_i X_i(x) \cos n\theta。$$

将 (4-37) 式代入 (4-19) 式得：

$$\sum_i T_i(t) L_1(U_i, V_i, W_i) - \rho h \sum_i \ddot{T}_i(t) U_i + q_x = 0 \quad (4-38a)$$

$$\sum_i T_i(t) L_2(U_i, V_i, W_i) - \rho h \sum_i \ddot{T}_i(t) V_i + q_\theta = 0 \quad (4-38b)$$

$$\sum_i T_i(t) L_3(U_i, V_i, W_i) - \rho h \sum_i \ddot{T}_i(t) W_i + q_z = 0 \quad (4-38c)$$

考虑到振型 U_i 、 V_i 、 W_i 已满足振型方程组：

$$L_1(U_i, V_i, W_i) = -\rho h \omega_i^2 U_i \quad (4-39a)$$

$$L_2(U_i, V_i, W_i) = -\rho h \omega_i^2 V_i \quad (4-39b)$$

$$L_3(U_i, V_i, W_i) = -\rho h \omega_i^2 W_i \quad (4-39c)$$

将 (4-39) 式代入 (4-38) 式得：

$$\sum_i [\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t)] \rho h U_i = q_x \quad (4-40a)$$

$$\sum_i [\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t)] \rho h V_i = q_\theta \quad (4-40b)$$

$$\sum_i [\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t)] \rho h W_i = q_z \quad (4-40c)$$

进一步将 (4-40) 中各式分别乘以 U_j 、 V_j 、 W_j ，再分别沿圆柱壳的中曲面积分，并利用壳体振型的正交性，可得到关于 $T_i(t)$ 的独立方程：

$$\frac{d^2 T_i(t)}{dt^2} + \omega_i^2 T_i(t) = \frac{P_i(t)}{M_i} \quad (4-41)$$

其中

$$P_i(t) = \iint_S [q_x U_i + q_\theta V_i + q_z W_i] R dx d\theta \quad (4-42a)$$

$$M_i = \iint_S \rho h [U_i^2 + V_i^2 + W_i^2] R dx d\theta \quad (4-42b)$$

对于双圆柱壳系统，如图 4.4 所示，先由 (4-33) 式、(4-36) 式分别求出系

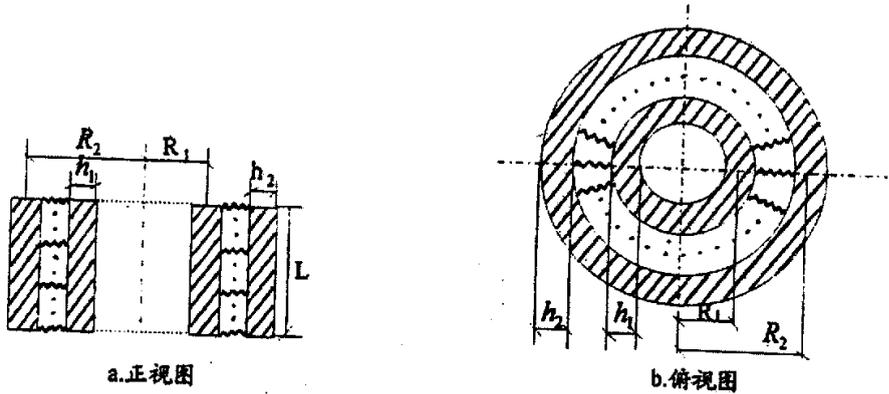


图 4.4 双壳系统模型

统的内、外壳的固有频率和振型，再求双圆柱壳系统的固有特性。设内、外壳接触面相互作用的径向力为简谐力，力的幅值为 $P(x, \theta)$ ，频率为系统的固有频率 ω_j ，则内、外壳所受的载荷分别为：

$$q_x^n(x, \theta, t) = 0 \quad (4-43a)$$

$$q_\theta^n(x, \theta, t) = 0 \quad (4-43b)$$

$$q_z^n(x, \theta, t) = -(R_a / R_1) P(x, \theta) \sin \omega_j t \quad (4-43c)$$

$$q_x^w(x, \theta, t) = 0 \quad (4-43d)$$

$$q_\theta^w(x, \theta, t) = 0 \quad (4-43e)$$

$$q_z^w(x, \theta, t) = (R_a / R_2) P(x, \theta) \sin \omega_j t \quad (4-43f)$$

其中

R_1 为内壳中曲面半径， R_2 为外壳中曲面半径， R_a 为定子铁心的外径。

在(4-43)式所表示的力的作用下,水轮发电机定子系统的振动满足位移基本微分方程组:

$$L_1(u_n, v_n, w_n) - \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + q_x^n = 0 \quad (4-44a)$$

$$L_2(u_n, v_n, w_n) - \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + q_\theta^n = 0 \quad (4-44b)$$

$$L_3(u_n, v_n, w_n) - \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} + q_z^n = 0 \quad (4-44c)$$

$$L_1(u_w, v_w, w_w) - \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 u_w}{\partial t^2} + q_x^w = 0 \quad (4-44d)$$

$$L_2(u_w, v_w, w_w) - \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 v_w}{\partial t^2} + q_\theta^w = 0 \quad (4-44e)$$

$$L_3(u_w, v_w, w_w) - \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w_w}{\partial t^2} + q_z^w = 0 \quad (4-44f)$$

为此可设其解为:

$$u_n(x, \theta, t) = \sum_i T_{in}(t) U_{in}(x, \theta) \quad (4-45a)$$

$$v_n(x, \theta, t) = \sum_i T_{in}(t) V_{in}(x, \theta) \quad (4-45b)$$

$$w_n(x, \theta, t) = \sum_i T_{in}(t) W_{in}(x, \theta) \quad (4-45c)$$

$$u_w(x, \theta, t) = \sum_i T_{iw}(t) U_{iw}(x, \theta) \quad (4-45d)$$

$$v_w(x, \theta, t) = \sum_i T_{iw}(t) V_{iw}(x, \theta) \quad (4-45e)$$

$$w_w(x, \theta, t) = \sum_i T_{iw}(t) W_{iw}(x, \theta) \quad (4-45f)$$

其中 U_{in} 、 V_{in} 、 W_{in} 和 U_{iw} 、 V_{iw} 、 W_{iw} 分别为内、外壳的各阶振型, $T_{in}(t)$ 、 $T_{iw}(t)$ 分别为内、外壳的各阶振型分量。

依照(4-41)式有关于 $T_{in}(t)$ 、 $T_{iw}(t)$ 的方程:

$$\frac{d^2 T_{in}(t)}{dt^2} + \omega_{in}^2 T_{in}(t) = \frac{P_{in}(t)}{M_{in}} \quad (4-46a)$$

$$\frac{d^2 T_{iw}(t)}{dt^2} + \omega_{iw}^2 T_{iw}(t) = \frac{P_{iw}(t)}{M_{iw}} \quad (4-46b)$$

其中:

$$\begin{aligned} P_{in}(t) &= \iint_{S_1} [q_x^n U_{in} + q_\theta^n V_{in} + q_z^n W_{in}] R_1 dx d\theta \\ &= -R_a \left[\int_0^L \int_0^{2\pi} P(x, \theta) X_m(x) \cos i\theta dx d\theta \right] \sin \omega_i t \end{aligned} \quad (4-47a)$$

$$M_{in} = \iint_{S_1} \rho_1 h_1 [U_{in}^2 + V_{in}^2 + W_{in}^2] R_1 dx d\theta \quad (4-47b)$$

$$\begin{aligned} P_{iw}(t) &= \iint_{S_2} [q_x^w U_{iw} + q_\theta^w V_{iw} + q_z^w W_{iw}] R_2 dx d\theta \\ &= R_a \left[\int_0^L \int_0^{2\pi} P(x, \theta) X_m(x) \cos i\theta dx d\theta \right] \sin \omega_i t \end{aligned} \quad (4-47c)$$

$$M_{iw} = \iint_{S_2} \rho_2 h_2 [U_{iw}^2 + V_{iw}^2 + W_{iw}^2] R_2 dx d\theta \quad (4-47d)$$

求解方程 (4-46a) 式得:

$$T_{in}(t) = a_{in} \cos \omega_{in} t + b_{in} \sin \omega_{in} t + \frac{P_{0n}}{M_{in} \omega_{in}} \prod_{in}(t) \quad (4-48)$$

其中杜哈梅积分:

$$\prod_{in}(t) = \frac{\omega_{in}}{P_{0n}} \int_0^t P_{in}(\tau) \sin \omega_{in}(t-\tau) d\tau \quad (4-49)$$

因系统都有阻尼, 去掉 (4-48) 式中与初始条件有关的随时间衰减的自由振动项, 则 (4-46a) 的稳态响应为:

$$T_{in}(t) = -\frac{R_a \int_0^L \int_0^{2\pi} P(x, \theta) X_m(x) \cos i\theta dx d\theta}{M_{in} (\omega_{in}^2 - \omega_i^2)} \sin \omega_i t \quad (4-50a)$$

相同的过程可解出 (4-46b) 的稳态响应为:

$$T_{iw}(t) = -\frac{R_a \int_0^L \int_0^{2\pi} P(x, \theta) X_m(x) \cos i\theta dx d\theta}{M_{iw} (\omega_{iw}^2 - \omega_i^2)} \sin \omega_i t \quad (4-50b)$$

解出稳态响应 $T_{in}(t)$ 、 $T_{iw}(t)$ 后，反代回 (4-45) 中得到内、外壳的振动位移，再由系统的变形协调条件 $w_n = w_w$ 得：

$$\frac{\int_0^L \int_0^{2\pi} P(x, \theta) X_m(x) \cos i \theta dx d\theta}{M_{in} [\omega_{in}^2 - \omega_i^2]} = \frac{\int_0^L \int_0^{2\pi} P(x, \theta) X_m(x) \cos i \theta dx d\theta}{M_{iw} [\omega_{iw}^2 - \omega_i^2]} \quad (4-51)$$

为保证振型的幅值不恒为零，必须要有：

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} P(x, \theta) X_m(x) \cos i \theta dx d\theta \neq 0$$

所以有：

$$\omega_i^2 = \frac{M_{in} \omega_{in}^2 + M_{iw} \omega_{iw}^2}{M_{in} + M_{iw}} \quad (4-52a)$$

$$f_i^2 = \frac{M_{in} f_{in}^2 + M_{iw} f_{iw}^2}{M_{in} + M_{iw}} \quad (4-52b)$$

(4-52) 式即为双壳系统固有频率的计算表达式。

令

$$M_i = \frac{M_{in}}{M_{iw}}, \quad f = \frac{f_{in}}{f_{iw}}$$

则

$$f_i^2 = \frac{M_i f_{in}^2 + f_{iw}^2}{M_i + 1} = \frac{1 + M_i f^2}{1 + M_i} f_{iw}^2$$

当 $f < 1$ 时， $f_i < f_{iw}$ ， $f > 1$ 时， $f_i > f_{iw}$ ，双壳系统的固有频率介于内、外壳各自的固有频率之间。

求出系统的各阶频率后反代回 (4-45) 式，并适当调整传递力的大小，使系统的径向振型为：

$$W_i(x, \theta) = W_{in}(x, \theta) = W_{iw}(x, \theta) = X_m(x) \cos i \theta \quad (4-53)$$

因此，对于具体的双壳系统，只要按照梁函数组合法求出内、外壳的固有频率和振型，就可以按 (4-52) 式求出双壳系统的固有频率。

对于本文的双壳系统，把 4.2 节所求得的内、外壳的固有频率和振型代入 (4-52) 式，求得双壳系统在一端固定、一端自由时的固有频率如下：

$f_{2,5} = 45.6\text{Hz}$ 、 $f_{1,2} = 73.9\text{Hz}$ 、 $f_{3,5} = 78.4\text{Hz}$ 、 $f_{1,3} = 79.2\text{Hz}$ 、 $f_{1,4} = 85.6\text{Hz}$ 、
 $f_{3,3} = 88.6\text{Hz}$ 、 $f_{2,2} = 92.7\text{Hz}$ 、 $f_{1,5} = 94.0\text{Hz}$ 、 $f_{2,4} = 100.6\text{Hz}$ 、 $f_{1,6} = 105.9\text{Hz}$

把频率的双下标改为单下标，并且按照由低到高的顺序排列如下：

$f_1 = 45.6\text{Hz}$ 、 $f_2 = 73.9\text{Hz}$ 、 $f_3 = 78.4\text{Hz}$ 、 $f_4 = 79.2\text{Hz}$ 、 $f_5 = 85.6\text{Hz}$ 、
 $f_6 = 88.6\text{Hz}$ 、 $f_7 = 92.7\text{Hz}$ 、 $f_8 = 94.0\text{Hz}$ 、 $f_9 = 100.6\text{Hz}$ 、 $f_{10} = 105.9\text{Hz}$

本文只分析双壳系统的径向振型，径向振型又可分解为沿横截面的径向振型和沿纵截面的径向振型，沿横截面的径向振型如图 4.5 所示，沿纵截面的径向振型如图 4.6 所示，三维径向振型如图 4.7—4.16 所示。

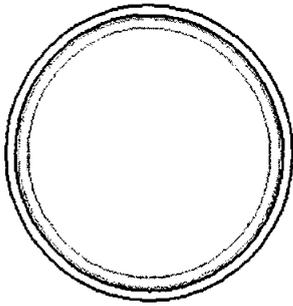


图 4.5a ($n=0$)

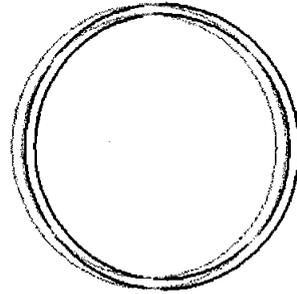


图 4.5b ($n=1$)

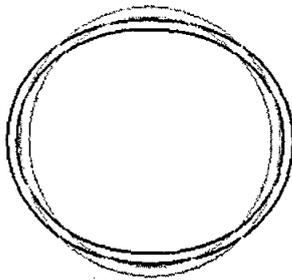


图 4.5c ($n=2$)

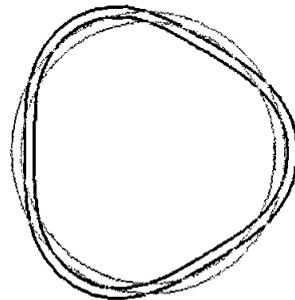


图 4.5d ($n=3$)

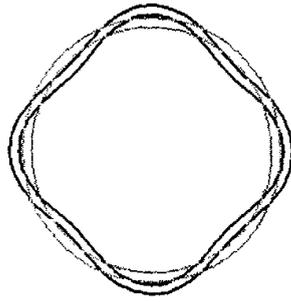


图 4.5e ($n=4$)

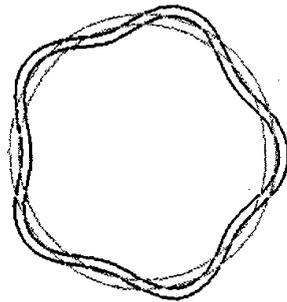


图 4.5f ($n=5$)

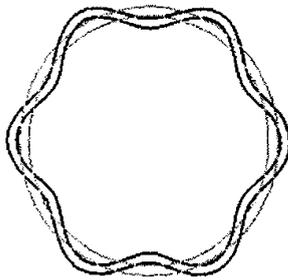


图 4.5g ($n=6$)

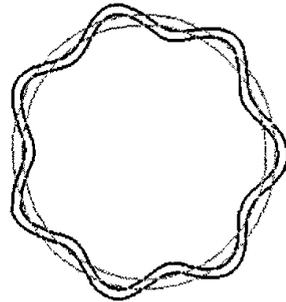


图 4.5h ($n=7$)

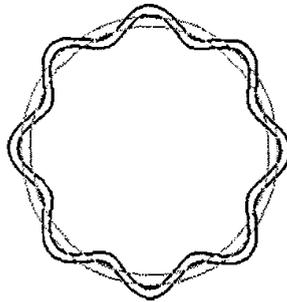


图 4.5i ($n=8$)

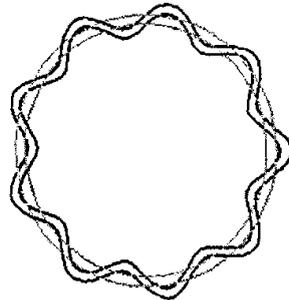


图 4.5j ($n=9$)

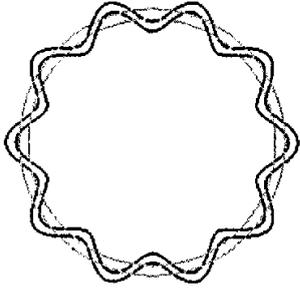


图 4.5k ($n=10$)

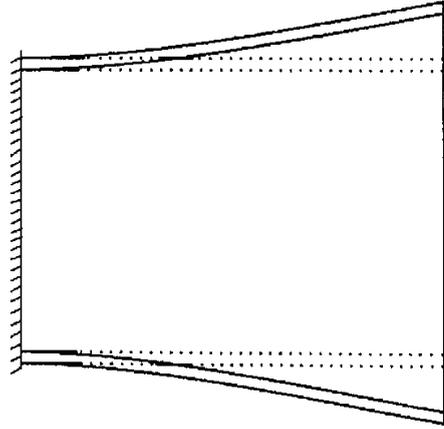


图 4.6a ($m=1$)

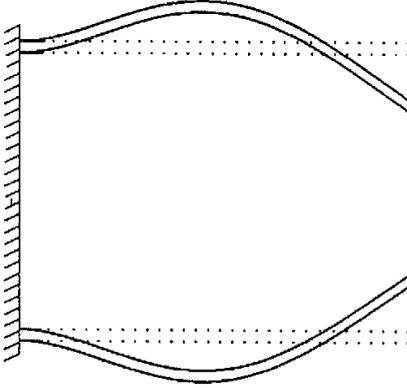


图 4.6b ($m=2$)

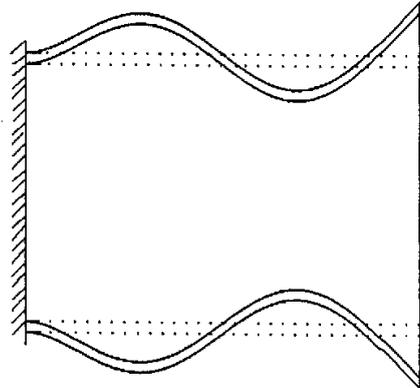


图 4.6c ($m=3$)

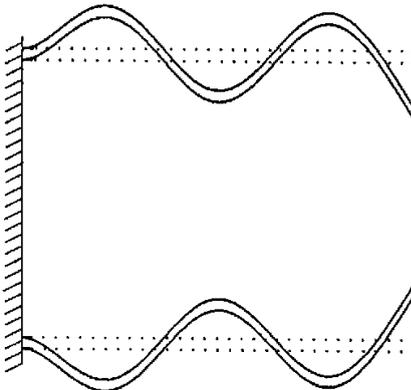


图 4.6d ($m=4$)

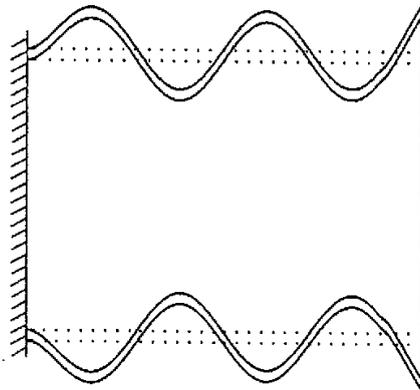


图 4.6e ($m=5$)



图 4.7a ($m=2, n=5$)



图 4.7b ($m=2, n=5$)



图 4.8a ($m=1, n=2$)



图 4.8b ($m=1, n=2$)

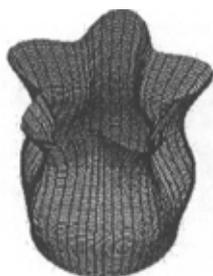


图 4.9a ($m=3, n=5$)



图 4.9b ($m=3, n=5$)



图 4.10a ($m=1, n=3$)



图 4.10b ($m=1, n=3$)



图 4.11a ($m=1, n=4$)



图 4.11b ($m=1, n=4$)



图 4.12a ($m=3, n=3$)



图 4.12b ($m=3, n=3$)



图 4.13a ($m=2, n=2$)



图 4.13b ($m=2, n=2$)



图 4.14a ($m=1, n=5$)



图 4.14b ($m=1, n=5$)



图 4.15a ($m=2, n=4$)



图 4.15b ($m=2, n=4$)



图 4.16a ($m=1, n=6$)



图 4.16b ($m=1, n=6$)

§ 4.4 本章小结

本章首先采用梁函数组合法来分析单圆柱壳的固有特性，分别得出内、外圆柱壳的固有频率和振型后，进一步给出了把内、外壳看成一个整体发生同步振动时双壳系统的固有频率和振型的解析表达式。这种分析双壳系统的固有特性的方法适用于任意边界情况的长径比很小的双壳系统，该法克服了精确分析计算的复杂繁难，避免了数值解法描述振动形态的困难，因而运用起来快捷简便，容易操作，便于工程计算引用。

第五章 水轮发电机定子系统的振动分析

§ 5.1 引言

随着经济的发展,对能源的需求越来越大,因此,发电机组也日益朝大型化方向发展。随着高电压、大电流的进一步提高,会产生强大的磁场和电场,机组在强大的磁场和电场作用下,会使转子系统的机电耦联振动、稳定性及动强度出现新的问题,发电机定子系统的振动也会越来越严重,振动的规律越来越复杂,特别是水轮发电机组定子的磁振动将变得更加强烈。因此深入研究其振动规律,寻找控制其振动的有效手段,已成为一个十分重要的问题。

定子铁心的磁振动的简单概念是:定、转子电流产生磁势,磁势在气隙中建立磁场,当磁场交变时产生作用于定子铁心的力波,引起定子铁心的振动。

对于大型水轮发电机,由于电磁场强度很大,定子铁心内电磁场与变形场的相互耦合作用是不容忽视的,按传统的磁振动的概念去研究定子的振动已经与实际情况不符了。为了更加全面地分析讨论定子系统的振动特性,以便更好地指导水轮发电机组的设计、制造和运行,必须对定子系统的磁固耦合动力特性进行深入的研究。本章首先建立考虑定子铁心径向振动位移与气隙磁场的相互作用时双壳系统的磁固耦合动力学方程,该磁固耦合动力学方程是非线性的,定子系统磁固耦合非线性振动方程与多自由度非线性振动方程具有一样的形式,分析定子系统磁固耦合非线性振动就变成了求解多自由度非线性振动方程的问题,通常采用摄动法求解,如谐波平衡法、平均法、多尺度法等,本文采用多尺度法求解。

§ 5.2 双壳系统的磁固耦合动力学方程

5.2.1 圆柱壳的电磁固体动力学方程

对于圆柱壳取如图 5.1 所示的圆柱坐标系, q_x 、 q_θ 、 q_z 为中曲面上单位面积的外载分量, P 为圆柱壳中曲面上任一点, u 、 v 、 w 分别为 P 点的轴向、切向、法向位移。圆柱壳上任一点的位移为 u_1 、 v_1 、 w_1 。

圆柱坐标系:

$$\alpha = x, \quad \beta = \theta, \quad \gamma = z \quad (5-1a)$$

拉梅参数:

$$A=1, B=R \quad (5-1b)$$

主曲率半径:

$$R_\alpha = \infty, R_\beta = R \quad (5-1c)$$

中曲面上任意一点应变与其位移的关系式:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R}, \quad \omega = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5-2a)$$

$$\chi_x = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{g_\theta}{R} \cdot 0 = \frac{\partial g_x}{\partial x}, \quad \chi_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial g_\theta}{\partial \theta}, \quad \chi_{x\theta} = \frac{\partial g_\theta}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial g_x}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5-2b)$$

$$g_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad g_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{R} \quad (5-2c)$$

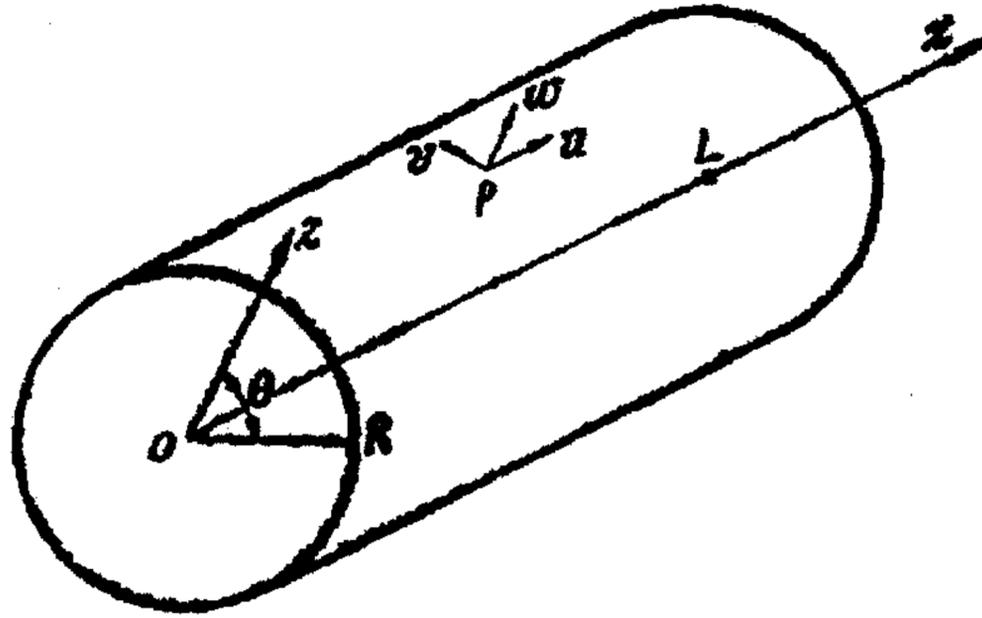


图 5.1

内力与中面应变的关系为:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_\theta) \quad (5-3a)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_x) \quad (5-3b)$$

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (\chi_x + \mu\chi_\theta) \quad (5-3c)$$

$$M_{\theta} = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(\chi_{\theta} + \mu\chi_x) \quad (5-3d)$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\omega \quad (5-3e)$$

$$M_{x\theta} = M_{\theta x} = \frac{Eh^3}{12(1+\mu)}\chi_{x\theta} \quad (5-3f)$$

式中:

E 为壳体的弹性模量, μ 为壳体的泊松比。

与第四章中建立圆柱壳的动力平衡方程一样的方法, 取圆柱壳中曲面上任一微元, 微元受内力、外力及惯性力的作用, 将所有内力素乘所在边的弧长, 所有外载荷和惯性力乘微元的面积, 并投影到 x 、 θ 、 z 三个方向, 略去高阶小量, 即可建立圆柱壳的电磁固体动力学方程

$$R\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + Rq_x - R\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5-4a)$$

$$R\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + Q_{\theta} + Rq_{\theta} - R\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (5-4b)$$

$$R\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - N_{\theta} + Rq_z - R\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5-4c)$$

$$Q_x = -\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{R\partial \theta} \quad (5-4d)$$

$$Q_{\theta} = \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - \frac{\partial M_{\theta}}{R\partial \theta} \quad (5-4e)$$

将几何方程 (5-2) 式代入内力方程 (5-3) 式, 然后将内力方程 (5-3) 式代入 (5-4) 式, 即得圆柱壳的电磁固体微分方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \mu \frac{\partial w}{R \partial x} = \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \left[\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \right] \quad (5-5a)$$

$$\frac{(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} +$$

$$\frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \theta^3} \right] = \frac{(1-\mu^2)}{Eh} \left[\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_{\theta} \right] \quad (5-5b)$$

$$\frac{12}{h^2} \left(\mu \frac{\partial u}{R \partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} + \frac{w}{R^2} \right) - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{R^2 \partial \theta^3} \right) + \nabla^2 \nabla^2 w$$

$$= \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3} \left(q_z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (5-5c)$$

式中:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \theta^2} \quad (5-6)$$

E 为壳体的弹性模量, μ 为壳体的泊松比。

为了书写方便, 将 (5-5) 式简记为:

$$L_1(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_x = 0 \quad (5-6a)$$

$$L_2(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_\theta = 0 \quad (5-6b)$$

$$L_3(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_z = 0 \quad (5-6c)$$

其中 L_1 、 L_2 、 L_3 是线性算子。

5.2.2 双圆柱壳系统的磁固耦合动力学方程

双圆柱壳系统在定子铁心内圆表面的电磁力 $q(x, \theta, t)$ 的作用下, 设内、外壳接触面通过定位筋传递的径向力为 $P(x, \theta, t)$, 则内、外壳所受的外力为:

$$q_x^n(x, \theta, t) = 0 \quad (5-7a)$$

$$q_\theta^n(x, \theta, t) = 0 \quad (5-7b)$$

$$q_z^n(x, \theta, t) = (R_l / R_1) q(x, \theta, t) - (R_a / R_1) P(x, \theta, t) \quad (5-7c)$$

$$q_x^w(x, \theta, t) = 0 \quad (5-7d)$$

$$q_\theta^w(x, \theta, t) = 0 \quad (5-7e)$$

$$q_z^w(x, \theta, t) = (R_a / R_2) P(x, \theta, t) \quad (5-7f)$$

其中

R_1 为内壳中曲面半径

R_2 为外壳中曲面半径

R_f 为定子铁心的内径

R_a 为定子铁心的外径

则在 (5.7) 式作用下, 双壳系统的磁固耦合动力学微分方程为:

$$L_1(u_n, v_n, w_n) - \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + q_x^n = 0 \quad (5-8a)$$

$$L_2(u_n, v_n, w_n) - \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + q_\theta^n = 0 \quad (5-8b)$$

$$L_3(u_n, v_n, w_n) - \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} + q_z^n = 0 \quad (5-8c)$$

$$L_1(u_w, v_w, w_w) - \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 u_w}{\partial t^2} + q_x^w = 0 \quad (5-8d)$$

$$L_2(u_w, v_w, w_w) - \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 v_w}{\partial t^2} + q_\theta^w = 0 \quad (5-8e)$$

$$L_3(u_w, v_w, w_w) - \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w_w}{\partial t^2} + q_z^w = 0 \quad (5-8f)$$

为此可设 (5-8) 式的解为:

$$u_n(x, \theta, t) = \sum_i T_{in}(t) U_{in}(x, \theta) \quad (5-9a)$$

$$v_n(x, \theta, t) = \sum_i T_{in}(t) V_{in}(x, \theta) \quad (5-9b)$$

$$w_n(x, \theta, t) = \sum_i T_{in}(t) W_{in}(x, \theta) \quad (5-9c)$$

$$u_w(x, \theta, t) = \sum_i T_{iw}(t) U_{iw}(x, \theta) \quad (5-9d)$$

$$v_w(x, \theta, t) = \sum_i T_{iw}(t) V_{iw}(x, \theta) \quad (5-9e)$$

$$w_w(x, \theta, t) = \sum_i T_{iw}(t) W_{iw}(x, \theta) \quad (5-9f)$$

其中 U_{in} 、 V_{in} 、 W_{in} 和 U_{iw} 、 V_{iw} 、 W_{iw} 分别为内、外壳的各阶振型, $T_{in}(t)$ 、 $T_{iw}(t)$ 分别为内、外壳的各阶振型分量。与 § 4.3 中同样的过程, 可以得到内、

外壳关于 $T_{in}(t)$ 、 $T_{iw}(t)$ 的独立方程:

$$\frac{d^2 T_{in}(t)}{dt^2} + \omega_{in}^2 T_{in}(t) = \frac{P_{in}(t)}{M_{in}} \quad (5-10a)$$

$$\frac{d^2 T_{iw}(t)}{dt^2} + \omega_{iw}^2 T_{iw}(t) = \frac{P_{iw}(t)}{M_{iw}} \quad (5-10b)$$

其中:

$$\begin{aligned} P_{in}(t) &= \iint_{S_1} [q_x^n U_{in}(x, \theta) + q_\theta^n V_{in}(x, \theta) + q_z^n W_{in}(x, \theta)] R_1 dx d\theta \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} R_1 q(x, \theta, t) W_{in}(x, \theta) d\theta dx \\ &\quad - \int_0^L \int_0^{2\pi} R_a P(x, \theta, t) W_{in}(x, \theta) d\theta dx \end{aligned} \quad (5-11a)$$

$$M_{in} = \iint_{S_1} \rho_1 h_1 [U_{in}^2 + V_{in}^2 + W_{in}^2] R_1 dx d\theta \quad (5-11b)$$

$$\begin{aligned} P_{iw}(t) &= \iint_{S_2} [q_x^w U_{iw} + q_\theta^w V_{iw} + q_z^w W_{iw}] R_2 dx d\theta \\ &= R_a \int_0^L \int_0^{2\pi} P(x, \theta, t) W_{iw}(x, \theta) d\theta dx \end{aligned} \quad (5-11c)$$

$$M_{iw} = \iint_{S_2} \rho_2 h_2 [U_{iw}^2 + V_{iw}^2 + W_{iw}^2] R_2 dx d\theta \quad (5-11d)$$

定子处于热态时, 取 $W_{in} = W_{iw}$, 内、外壳的变形协调条件为:

$$w_n \equiv w_w \quad (5-12)$$

由 (5-9) 式可得:

$$T_{in}(t) \equiv T_{iw}(t) \quad (5-13)$$

将 $T_{in}(t)$ 、 $T_{iw}(t)$ 统一记作 $T_i(t)$, 将 (5-10a) 式和 (5-10b) 式两边相加得:

$$(M_{in} + M_{iw}) \ddot{T}_i(t) + (M_{in} \omega_{in}^2 + M_{iw} \omega_{iw}^2) T_i(t) = P_{in}(t) + P_{iw}(t) \quad (5-14)$$

将 (5-11) 式代入 (5-14) 式并整理得:

$$\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) = \frac{R_1}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} q(\theta, t) W_{in}(x, \theta) d\theta dx \quad (5-15)$$

其中 ω_i 为双壳系统的第 i 阶固有频率, 且

$$\omega_i^2 = \frac{M_{in}\omega_{in}^2 + M_{iw}\omega_{iw}^2}{M_{in} + M_{iw}} \quad (5-16)$$

如果考虑结构本身的阻尼, 在方程中加上模态阻尼, 则 (5-15) 式变为:

$$\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) + 2\mu_i \dot{T}_i(t) = \frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} q(\theta, t) W_{in}(x, \theta) d\theta dx \quad (5-17)$$

把 § 3.5 节的 $q(x, t)$ 中的 x 换成 θ , 则有

电磁力 $q(\theta, t)$ 的表达式为:

$$\begin{aligned} q(\theta, t) &= \frac{\Lambda^2(\theta, t)(F(\theta, t) + f(\theta, t))^2}{2\mu_0} \\ &= c_1 \cos(10\theta + 2\omega t) + c_2 w_s + c_3 w_s^2 + c_4 w_s^3 + \dots \end{aligned} \quad (5-18)$$

其中:

$$c_1 = \frac{\Lambda_0^2 A_1 A_2}{2\mu_0}$$

$$c_2 = -\frac{\Lambda_0^2 (A_1^2 + A_2^2 + A_4^2 + A_7^2 + A_{47}^2 + A_{55}^2 + B_1^2 + B_3^2 + B_5^2 + B_7^2 + B_9^2)}{2\mu_0 \delta_0}$$

$$c_3 = \frac{3\Lambda_0^2 (A_1^2 + A_2^2 + A_4^2 + A_7^2 + A_{47}^2 + A_{55}^2 + B_1^2 + B_3^2 + B_5^2 + B_7^2 + B_9^2 + 2A_4 B_1 \sin \psi)}{4\mu_0 \delta_0^2}$$

$$c_4 = -\frac{\Lambda_0^2 (A_1^2 + A_2^2 + A_4^2 + A_7^2 + A_{47}^2 + A_{55}^2 + B_1^2 + B_3^2 + B_5^2 + B_7^2 + B_9^2 + 2A_4 B_1 \sin \psi)}{\mu_0 \delta_0^3}$$

把 (5-18) 式代入 (5-17) 式右端得:

$$\begin{aligned} &\frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} q(\theta, t) W_{in}(x, \theta) d\theta dx = \\ &\frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} c_1 \cos(10\theta + 2\omega t) W_{in}(x, \theta) d\theta dx \\ &+ \frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} c_2 w_s W_{in}(x, \theta) d\theta dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} c_3 w_s^2 W_{in}(x, \theta) d\theta dx \\
& + \frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} c_4 w_s^3 W_{in}(x, \theta) d\theta dx
\end{aligned} \tag{5-19}$$

其中:

$$\begin{aligned}
& \frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} c_1 \cos(10\theta + 2\omega t) W_{in}(x, \theta) d\theta dx \\
& = \frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} c_1 \cos(10\theta + 2\omega t) X_m(x) \cos(i\theta) d\theta dx \\
& = \frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \begin{cases} 0 & i \neq 10 \\ \frac{2 * 1.018467}{4.69409} c_1 \pi L \cos 2\omega t = 0.783 c_1 \pi L \cos 2\omega t & i = 10 \end{cases}
\end{aligned} \tag{5-19a}$$

$$\frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} c_2 w_s W_{in}(x, \theta) d\theta dx = \frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} c_2 L \sum_j \Gamma_{ij} T_j(t) \tag{5-19b}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} c_3 w_s^2 W_{in}(x, \theta) d\theta dx \\
& = \frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} c_3 \sum_j T_j(t) W_{jn}(x, \theta) \sum_k T_k(t) W_{kn}(x, \theta) W_{in}(x, \theta) d\theta dx \\
& = \frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} c_3 \sum_j T_j(t) X_m(x) \cos j\theta \sum_k T_k(t) X_m(x) \cos k\theta X_m(x) \cos i\theta d\theta dx \\
& = \frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} c_3 \int_0^L X_m^3(x) \int_0^{2\pi} \sum_j T_j(t) \cos j\theta \sum_k T_k(t) \cos k\theta \cos i\theta d\theta dx \\
& = \frac{c_3 R_I \sum_j \sum_k T_j(t) T_k(t)}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L X_m^3(x) dx \int_0^{2\pi} \cos j\theta \cos k\theta \cos i\theta d\theta \\
& = \frac{1.4778 c_3 L R_I \sum_j \sum_k T_j(t) T_k(t)}{M_{in} + M_{iw}} \Gamma_{ijk}
\end{aligned} \tag{5-19c}$$

$$\frac{R_I}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} c_4 w_s^3 W_{in}(x, \theta) d\theta dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R_l}{M_{in} + M_{iw}} \int_0^L \int_0^{2\pi} c_4 \sum_j T_j(t) W_{jn}(x, \theta) \sum_k T_k(t) W_{kn}(x, \theta) \\
&\quad \sum_l T_l(t) W_{ln}(x, \theta) W_{in}(x, \theta) d\theta dx \\
&= \frac{R_l}{M_{in} + M_{iw}} c_4 \int_0^L \int_0^{2\pi} \sum_j T_j(t) X_m(x) \cos j\theta \sum_k T_k(t) X_m(x) \cos k\theta \\
&\quad \sum_l T_l(t) X_m(x) \cos l\theta X_m(x) \cos i\theta d\theta dx \\
&= \frac{R_l}{M_{in} + M_{iw}} c_4 \int_0^L X_m^4(x) dx \cdot \sum_j \sum_k \sum_l T_j(t) T_k(t) T_l(t) \\
&\quad \int_0^{2\pi} \cos j\theta \cdot \cos k\theta \cdot \cos l\theta \cdot \cos i\theta \cdot d\theta \\
&= \frac{2.3486 c_4 L R_l}{M_{in} + M_{iw}} \sum_j \sum_k \sum_l T_j(t) T_k(t) T_l(t) \Gamma_{ijkl} \tag{5-19d}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{ij} = \int_0^{2\pi} \cos i\theta \cdot \cos j\theta \cdot d\theta$$

$$\Gamma_{ijk} = \int_0^{2\pi} \cos j\theta \cdot \cos k\theta \cdot \cos i\theta \cdot d\theta$$

$$\Gamma_{ijkl} = \int_0^{2\pi} \cos j\theta \cdot \cos k\theta \cdot \cos l\theta \cdot \cos i\theta \cdot d\theta$$

将 (5-19) 式代入 (5-17) 式得:

$$\begin{aligned}
\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) + 2\mu_i \dot{T}_i(t) &= \frac{R_l c_2 L}{M_{in} + M_{iw}} \sum_j T_j(t) \Gamma_{ij} \\
&+ \frac{1.4778 R_l c_3 L}{M_{in} + M_{iw}} \sum_j \sum_k T_j(t) \cdot T_k(t) \cdot \Gamma_{ijk} \\
&+ \frac{2.3486 R_l c_4 L}{M_{in} + M_{iw}} \sum_j \sum_k \sum_l T_j(t) \cdot T_k(t) \cdot T_l(t) \cdot \Gamma_{ijkl} \quad (i \neq 10) \tag{5-20a}
\end{aligned}$$

$$\ddot{T}_{10}(t) + \omega_{10}^2 T_{10}(t) + 2\mu_{10} \dot{T}_{10}(t) = \frac{0.783 c_1 R_l \pi L \cos 2\omega t}{M_{10w} + M_{10n}}$$

$$+ \frac{R_l c_2 L}{M_{10n} + M_{10w}} \sum_j T_j(t) \Gamma_{10j}$$

$$+ \frac{1.4778 R_l c_3 L}{M_{10n} + M_{10w}} \sum_j \sum_k T_j(t) \cdot T_k(t) \cdot \Gamma_{10jk}$$

$$+ \frac{2.3486R_f c_4 L}{M_{10n} + M_{10w}} \sum_j \sum_k \sum_l T_j(t) T_k(t) T_l(t) \Gamma_{10jkl} \quad (i=10) \quad (5-20b)$$

$$\Gamma_{10j} = \int_0^{2\pi} \cos 10\theta \cdot \cos j\theta \cdot d\theta$$

$$\Gamma_{10jk} = \int_0^{2\pi} \cos j\theta \cdot \cos k\theta \cdot \cos 10\theta \cdot d\theta$$

$$\Gamma_{10jkl} = \int_0^{2\pi} \cos j\theta \cdot \cos k\theta \cdot \cos l\theta \cdot \cos 10\theta \cdot d\theta$$

Γ_{ij} 、 Γ_{ijk} 、 Γ_{ijkl} 、 Γ_{10j} 、 Γ_{10jk} 、 Γ_{10jkl} 称为耦合系数，它们将系统的各阶模态耦合起来。

定子系统的磁固耦合非线性振动方程 (5-20) 与多自由度非线性振动方程具有一样的形式，分析定子系统的磁固耦合非线性振动就变成了求解多自由度非线性振动方程的问题。

§ 5.3 定子系统的主共振

第四章求得定子系统的前 10 阶固有频率为：

$$f_{2,5} = 45.6\text{Hz}、f_{1,2} = 73.9\text{Hz}、f_{3,5} = 78.4\text{Hz}、f_{1,3} = 79.2\text{Hz}、f_{1,4} = 85.6\text{Hz}、$$

$$f_{3,3} = 88.6\text{Hz}、f_{2,2} = 92.7\text{Hz}、f_{1,5} = 94.0\text{Hz}、f_{2,4} = 100.6\text{Hz}、f_{1,6} = 105.9\text{Hz}$$

把频率的双下标改为单下标，并且按照由低到高的顺序排列如下：

$$f_1 = 45.6\text{Hz}、f_2 = 73.9\text{Hz}、f_3 = 78.4\text{Hz}、f_4 = 79.2\text{Hz}、f_5 = 85.6\text{Hz}、$$

$$f_6 = 88.6\text{Hz}、f_7 = 92.7\text{Hz}、f_8 = 94.0\text{Hz}、f_9 = 100.6\text{Hz}、f_{10} = 105.9\text{Hz}$$

又电网的频率 $f = 50\text{Hz}$ ，所以外激励的频率 $\Omega = 2\omega = 4\pi f = 200\pi(\text{rad/s})$ ，如以赫兹表示，则外激励的频率为 $2f = 100\text{Hz}$ 。由于系统只受到一种频率的外激励的作用，所以系统只可能产生单频振动。

根据以上计算结果有：

$2f \approx f_{1,6}$ ，即 $2f \approx f_{10}$ ，所以系统存在主共振。下面分析系统的主共振，振动方程为：

$$\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) + 2\mu_i \dot{T}_i(t) = \frac{R_f c_2 L}{M_{in} + M_{iw}} \sum_j T_j(t) \Gamma_{ij}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1.4778R_1c_3L}{M_{in} + M_{iw}} \sum_j \sum_k T_j(t) \cdot T_k(t) \cdot \Gamma_{ijk} \\
& + \frac{2.3486R_1c_4L}{M_{in} + M_{iw}} \sum_j \sum_k \sum_l T_j(t) \cdot T_k(t) \cdot T_l(t) \cdot \Gamma_{ijkl} \quad (i \neq 10) \quad (5-21a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{T}_{10}(t) + \omega_{10}^2 T_{10}(t) + 2\mu_{10} \dot{T}_{10}(t) &= \frac{0.783c_1 R_1 \pi L \cos 2\omega t}{M_{10w} + M_{10w}} \\
& + \frac{R_1 c_2 L}{M_{10n} + M_{10w}} \sum_j T_j(t) \Gamma_{10j} \\
& + \frac{1.4778R_1c_3L}{M_{10n} + M_{10w}} \sum_j \sum_k T_j(t) \cdot T_k(t) \cdot \Gamma_{10jk} \\
& + \frac{2.3486R_1c_4L}{M_{10n} + M_{10w}} \sum_j \sum_k \sum_l T_j(t) \cdot T_k(t) \cdot T_l(t) \cdot \Gamma_{10jkl} \quad (i=10) \quad (5-21b)
\end{aligned}$$

令

$$\frac{0.783c_1 R_1 \pi L}{M_{10w} + M_{10w}} = 2\varepsilon F_{10}, \quad \frac{R_1 c_2 L}{M_{in} + M_{iw}} = \varepsilon \alpha_i, \quad \frac{1.4778c_3 R_1 L}{M_{in} + M_{iw}} = \varepsilon \beta_i,$$

$$\frac{2.3486c_4 R_1 L}{M_{in} + M_{iw}} = \varepsilon \gamma_i, \quad \text{并在 } \mu_i \text{ 前加一小量标志 } \varepsilon, \text{ 则方程 (5-21) 式变为:}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) &= -2\varepsilon \mu_i \dot{T}_i(t) + \varepsilon \alpha_i \sum_j \Gamma_{ij} T_j(t) + \varepsilon \beta_i \sum_j \sum_k T_j(t) \cdot T_k(t) \cdot \Gamma_{ijk} \\
& + \varepsilon \gamma_i \sum_j \sum_k \sum_l T_j(t) \cdot T_k(t) \cdot T_l(t) \cdot \Gamma_{ijkl} \quad (i \neq 10) \quad (5-22a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{T}_{10}(t) + \omega_{10}^2 T_{10}(t) &= -2\varepsilon \mu_{10} \dot{T}_{10}(t) + 2\varepsilon F_{10} \cos 2\omega t + \varepsilon \alpha_{10} \sum_j T_j(t) \Gamma_{10j} \\
& + \varepsilon \beta_{10} \sum_j \sum_k T_j(t) \cdot T_k(t) \cdot \Gamma_{10jk} \\
& + \varepsilon \gamma_{10} \sum_j \sum_k \sum_l T_j(t) \cdot T_k(t) \cdot T_l(t) \cdot \Gamma_{10jkl} \quad (i=10) \quad (5-22b)
\end{aligned}$$

用多尺度法求解 (5-22) 式, 设:

$$T_i(t, \varepsilon) = T_{i0}(T_0, T_1) + \varepsilon T_{i1}(T_0, T_1) + \dots \quad (5-23)$$

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t$$

则有:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (5-24a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (5-24b)$$

其中

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

对于 $i \neq 10$, 将 (5-23) 式, (5-24) 式代入方程 (5-22a), 并令等式两边的 ε 同次幂的系数相等, 得到下列微分方程组:

$$D_0^2 T_{i0} + \omega_i^2 T_{i0} = 0 \quad (5-25a)$$

$$D_0^2 T_{i1} + \omega_i^2 T_{i1} = -2D_0 D_1 T_{i0} - 2\mu_i D_0 T_{i0} + \pi\alpha_i T_{i0} + \beta_i \sum_j \sum_k \Gamma_{ijk} T_{j0} T_{k0} + \gamma_i \sum_j \sum_k \sum_l \Gamma_{ijkl} T_{j0} T_{k0} T_{l0} \quad (5-25b)$$

由 (5-25a) 可解得:

$$T_{i0} = A_i(T_1) e^{i\omega_i T_0} + \bar{A}_i(T_1) e^{-i\omega_i T_0} \quad (5-26)$$

将 (5-26) 式代入 (5-25b) 得:

$$\begin{aligned} D_0^2 T_{i1} + \omega_i^2 T_{i1} = & (-2i\omega_i A_i' - 2i\mu_i \omega_i A_i + \pi\alpha_i A_i) e^{i\omega_i T_0} \\ & + \sum_j \sum_k \Gamma_{ijk} \left[A_j A_k e^{i(\omega_j + \omega_k) T_0} + A_j \bar{A}_k e^{i(\omega_j - \omega_k) T_0} \right] \beta_i \\ & + \sum_j \sum_k \sum_l \Gamma_{ijkl} \gamma_i \left[A_j A_k A_l e^{i(\omega_j + \omega_k + \omega_l) T_0} + A_j \bar{A}_k A_l e^{i(\omega_j - \omega_k + \omega_l) T_0} + \right. \\ & \left. \bar{A}_j A_k A_l e^{i(-\omega_j + \omega_k + \omega_l) T_0} + A_j A_k \bar{A}_l e^{i(\omega_j + \omega_k - \omega_l) T_0} \right] + cc \end{aligned} \quad (5-27)$$

这里 cc 为前面各项的共轭项, 要使 (5-27) 式的解中不出现长期项, 必须有:

$$-2i\omega_i A_i' - 2i\mu_i \omega_i A_i + \pi\alpha_i A_i + 3\gamma_i A_i \sum_j \Gamma_{ijj} A_j \bar{A}_j = 0 \quad (5-28)$$

$$\text{令 } A_i(T_1) = \frac{1}{2} a_i(T_1) e^{i\phi_i(T_1)} \quad (5-29)$$

式中

a_i 和 ϕ_i 都是实函数

将 (5-29) 式代入 (5-28) 式得:

$$-i\omega_i a_i' + \omega_i a_i \phi_i' - i\mu_i \omega_i a_i + \frac{1}{2} \pi \alpha_i a_i + \frac{3}{8} \gamma_i a_i \sum_j \Gamma_{ijj} a_j^2 = 0 \quad (5-30)$$

将 (5-30) 式分离实部和虚部得到:

$$a_i' + \mu_i a_i = 0 \quad (5-31a)$$

$$\omega_i \phi_i' + \frac{\pi}{2} \alpha_i + \frac{3}{8} \gamma_i \sum_j \Gamma_{ijj} a_j^2 = 0 \quad (5-31b)$$

由 (5-31a) 式得:

$$a_i = c e^{-\mu_i T_i} \quad (i \neq 10) \quad (5-32)$$

其中 c 为积分常数。

由 (5-32) 式知除了 a_{10} 以外的所有 a_i 都衰减。

对于 $i=10$ ，将 (5-23) 式，(5-24) 式代入方程 (5-22b)，并令等式两边的 ε 同次幂的系数相等，得到下列微分方程组:

$$D_0^2 T_{10,0} + \omega_{10}^2 T_{10,0} = 0 \quad (5-33a)$$

$$D_0^2 T_{10,1} + \omega_{10}^2 T_{10,1} = -2D_0 D_1 T_{10,0} - 2\mu_{10} D_0 T_{10,0} + 2F_{10} \cos 2\omega t + \pi \alpha_{10} T_{10,0} \\ + \beta_{10} \sum_j \sum_k \Gamma_{10jk} T_{j0} T_{k0} + \gamma_{10} \sum_j \sum_k \sum_l \Gamma_{10jkl} T_{j0} T_{k0} T_{l0} \quad (5-33b)$$

方程 (5-33a) 的解为:

$$T_{10,0} = A_{10}(T_1) e^{i\omega_{10} T_0} + \bar{A}_{10}(T_1) e^{-i\omega_{10} T_0} \quad (5-34)$$

将 (5-34) 式代入 (5-33b) 得:

$$D_0^2 T_{10,1} + \omega_{10}^2 T_{10,1} = (-2i\omega_{10} A_{10}' - 2i\mu_{10} \omega_{10} A_{10} + \pi \alpha_{10} A_{10}) e^{i\omega_{10} T_0} \\ + F_{10} e^{2i\omega t} + \beta_{10} \sum_j \sum_k \Gamma_{10jk} \left[A_j A_k e^{i(\omega_j + \omega_k) T_0} + A_j \bar{A}_k e^{i(\omega_j - \omega_k) T_0} \right] \\ + \gamma_{10} \sum_j \sum_k \sum_l \Gamma_{10jkl} \left[A_j A_k A_l e^{i(\omega_j + \omega_k + \omega_l) T_0} + A_j \bar{A}_k A_l e^{i(\omega_j - \omega_k + \omega_l) T_0} + \right. \\ \left. \bar{A}_j A_k A_l e^{i(-\omega_j + \omega_k + \omega_l) T_0} + A_j A_k \bar{A}_l e^{i(\omega_j + \omega_k - \omega_l) T_0} \right] + cc \quad (5-35)$$

这里 cc 为前面各项的共轭项。

令

$$2\omega = \omega_{10} + \sigma\varepsilon \quad (5-36)$$

则

$$e^{i.2\omega t} = e^{i(\omega_{10} + \sigma\varepsilon)T_0} = e^{i\sigma T_1} \cdot e^{i\omega_{10}T_0} \quad (5-37)$$

将 (5-37) 式代入 (5-35) 式得:

$$\begin{aligned} D_0^2 T_{10,1} + \omega_{10}^2 T_{10,1} = & (-2i\omega_{10}' A_{10}' - 2i\mu_{10}\omega_{10} A_{10} + \pi\alpha_{10} A_{10}) e^{i\omega_{10}T_0} \\ & + F_{10} e^{i\sigma T_1} \cdot e^{i\omega_{10}T_0} + \beta_{10} \sum_j \sum_k \Gamma_{10jk} \left[A_j A_k e^{i(\omega_j + \omega_k)T_0} + A_j \bar{A}_k e^{i(\omega_j - \omega_k)T_0} \right] \\ & + \gamma_{10} \sum_j \sum_k \sum_l \Gamma_{10jkl} \left[A_j A_k A_l e^{i(\omega_j + \omega_k + \omega_l)T_0} + A_j \bar{A}_k A_l e^{i(\omega_j - \omega_k + \omega_l)T_0} + \right. \\ & \left. \bar{A}_j A_k A_l e^{i(-\omega_j + \omega_k + \omega_l)T_0} + A_j A_k \bar{A}_l e^{i(\omega_j + \omega_k - \omega_l)T_0} \right] + cc \end{aligned} \quad (5-38)$$

要使 (5-38) 式的解中不出现长期项, 必须有:

$$-2iA_{10}'\omega_{10} - 2iA_{10}\mu_{10}\omega_{10} + \pi\alpha_{10}A_{10} + F_{10}e^{i\sigma T_1} + 6\gamma_{10}A_{10} \sum_j \Gamma_{10,10jj} A_j \bar{A}_j = 0 \quad (5-39)$$

考虑到除了 A_{10} 以外的所有 A_j 都衰减, 所以 (5-39) 式变为:

$$-2iA_{10}'\omega_{10} - 2iA_{10}\mu_{10}\omega_{10} + \pi\alpha_{10}A_{10} + F_{10}e^{i\sigma T_1} + \frac{9\pi\gamma_{10}}{2} A_{10}^2 \bar{A}_{10} = 0 \quad (5-40)$$

设:

$$A_{10}(T_1) = \frac{1}{2} a_{10}(T_1) e^{i\phi_{10}(T_1)} \quad (5-41)$$

这里 a_{10} 和 ϕ_{10} 是实函数。将 (5-41) 式代入 (5-40) 式后, 分离实部和虚部

得到:

$$\begin{aligned} & \omega_{10}' a_{10} \sin \phi_{10} + \omega_{10} a_{10} \phi_{10}' \cos \phi_{10} + \mu_{10} \omega_{10} a_{10} \sin \phi_{10} \\ & + \frac{\pi}{2} \alpha_{10} a_{10} \cos \phi_{10} + \frac{9\pi}{16} \gamma_{10} a_{10}^3 \cos \phi_{10} + F_{10} \cos \sigma T_1 = 0 \end{aligned} \quad (5-41a)$$

$$\begin{aligned} & -\omega_{10}' a_{10} \cos \phi_{10} + \omega_{10} a_{10} \phi_{10}' \sin \phi_{10} - \mu_{10} \omega_{10} a_{10} \cos \phi_{10} \\ & + \frac{\pi}{2} \alpha_{10} a_{10} \sin \phi_{10} + \frac{9\pi}{16} \gamma_{10} a_{10}^3 \sin \phi_{10} + F_{10} \sin \sigma T_1 = 0 \end{aligned} \quad (5-41b)$$

由 (5-41) 的两式化简可得:

$$\omega_{10}' a_{10} + \mu_{10} \omega_{10} a_{10} + F_{10} \sin \gamma = 0 \quad (5-42a)$$

$$\omega_{10}a_{10}\sigma + \omega_{10}a_{10}\gamma' + \frac{\pi}{2}\alpha_{10}a_{10} + \frac{9\pi}{16}\gamma_{10}a_{10}^3 + F_{10}\cos\gamma = 0 \quad (5-42b)$$

其中 $\gamma = \phi_{10} - \sigma T_1$, $\gamma' = \phi_{10}' - \sigma$

由 (5-42) 式解出 a_{10}' 和 γ' :

$$a_{10}' = -\frac{1}{\omega_{10}}(\mu_{10}\omega_{10}a_{10} + F_{10}\sin\gamma) \quad (5-43a)$$

$$\gamma' = -\frac{1}{\omega_{10}a_{10}}(\omega_{10}a_{10}\sigma + \frac{\pi}{2}\alpha_{10}a_{10} + \frac{9\pi}{32}\gamma_{10}a_{10}^3 + F_{10}\cos\gamma) \quad (5-43b)$$

稳态运动时有 $a_{10}' = 0$, $\gamma' = 0$, 合并 (5-43) 的两式得幅频响应方程:

$$ka_{10}^6 + la_{10}^4 + ma_{10}^2 + n = 0 \quad (5-44)$$

其中

$$k = \frac{81\pi^2}{256}\gamma_{10}^2$$

$$l = \frac{9\pi}{8}\gamma_{10}\left(\omega_{10}\sigma + \frac{\pi}{2}\alpha_{10}\right)$$

$$m = \left(\omega_{10}\sigma + \frac{\pi}{2}\alpha_{10}\right)^2 + \mu_{10}^2\omega_{10}^2$$

$$n = -F_{10}^2$$

由 (5-44) 式解出幅频响应曲线 $a_{10} - \sigma$ 。

下面分几种情况绘制幅频响应曲线 $a_{10} - \sigma$:

- (1) 在额定工况下, 改变阻尼系数 (即衰减系数) μ_{10} , 绘出 $a_{10} - \sigma$ 曲线如图 5.2 所示。随着阻尼系数 μ_{10} 的增大, 共振区振幅 a_{10} 的峰值明显减小, 当阻尼比 ξ ($\xi = \frac{\mu_{10}}{\omega_{10}}$) 达到 0.5 时, 共振区消失, 系统已不具有振动的性质; 而且随着阻尼比 ξ 的增大, 振动的非线性性减弱, 当阻尼比 ξ 达到 0.02 时, 在共振区的右侧和某一频率相对应的振幅已没有多值性了。

- (2) 阻尼比 ξ 取 0.01, 改变激磁电流 I_f , 绘出 $a_{10} - \sigma$ 曲线如图 5.3 所示。

随着激磁电流 I_f 的增加, 共振区振幅 a_{10} 的峰值明显增大; 同时, 随着激磁电流 I_f 的增大, 振动的非线性性明显增强, 当激磁电流 I_f 达到 3560 安培时, 共振区右侧与某一频率相对应的振幅开始具有多值性了。

(3) 阻尼比 ξ 取 0.01, 激磁电流 I_f 取额定值, 改变有功功率 P , 绘出 $a_{10}-\sigma$ 曲线如图 5.4 所示。当有功功率 P 增大时, 共振区振幅 a_{10} 也随之增大; 同时, 随着有功功率 P 增大, 振动的非线性性增强。

(4) 阻尼比 ξ 取 0.01, 在额定工况下, 改变强迫激励 F 的幅值, 绘出 $a_{10}-\sigma$ 曲线如图 5.5 所示。随着强迫激励 F 的幅值的增大, 共振区振幅 a_{10} 也随之增大。

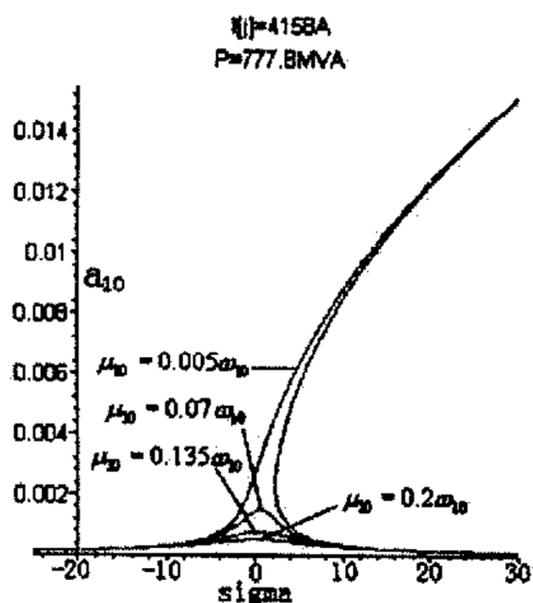


图 5.2

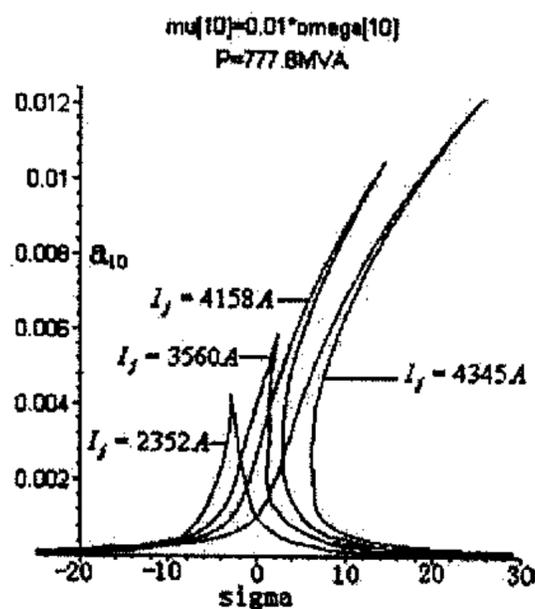


图 5.3

由上述分析计算得:

(1) 水轮发电机在额定运行状态下, 阻尼对定子系统径向振动的稳态响应影响很大。随着阻尼的增大, 共振区振幅明显减小, 而且振动的非线性性明显减弱。因而可以通过适当增大定子系统的阻尼来达到减小共振区振幅的目的。

(2) 当改变激磁电流和有功功率时, 共振区振幅的大小和振动的非线性性也发生变化。当激磁电流和有功功率增大时, 共振区振幅增大, 振动的非线性性也增强; 当激磁电流和有功功率减小时, 共振区振幅减小, 振动的非线性性也减弱。

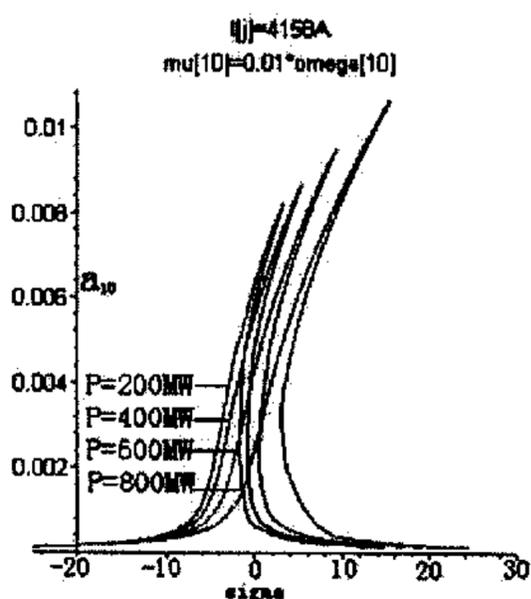


图 5.4

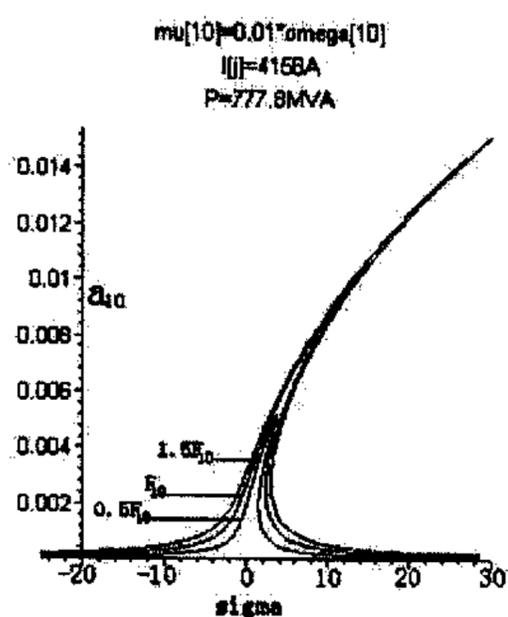


图 5.5

(3) 在额定工况下, 改变强迫激励的幅值, 共振区振幅也随之变化。强迫激励增大时, 共振区振幅也增大; 强迫激励减小时, 共振区振幅也减小;

§ 5.4 本章小结

本章研究了只考虑定子铁心径向振动位移与气隙磁场相互影响时定子系统的磁固耦合振动。由于定子铁心的变形场与磁场相互耦合, 使得方程中出现了非线性项, 从而使系统的振动规律变得复杂。

(1) 阻尼、激磁电流、有功功率、强迫激励等诸因素对定子系统的主共振的性质产生很大的影响。增加阻尼会使主共振振幅明显减小, 而且会使振动的非线性性明显减弱; 增大激磁电流和有功功率时, 主共振振幅会增大, 振动的非线性性也会增强; 在额定工况下, 增大强迫激励的幅值时, 共振区振幅会随之增大。因此, 必要时可以通过适当改变某些参数来改变主共振的特性。

(2) 通过对水轮发电机定子系统磁固耦合的研究, 揭示了一些新的现象和振动规律。对其进行更加深入细致的研究和探讨具有极为重要的理论意义和广泛的工程应用前景, 这些研究的日渐成熟, 将对水轮发电机的优化设计提供必要的理论指导。

第六章 电磁刚度对定子系统固有频率的影响

§ 6.1 引言

本章为了探讨电磁刚度对水轮发电机定子系统固有频率的影响,认定定子系统的机座和铁心都是两端自由的。在计算定子铁心内圆表面的电磁力时,考虑了定子铁心的径向振动位移对气隙磁场的影响,所得电磁力与定子铁心的径向振动位移有关,磁场与定子铁心圆柱壳的振动位移相互耦合。从 § 3.5 知,水轮发电机组定子系统的电磁力中存在电磁刚度项 $c_2 w_s$, 本章就探讨定子处于热态时电磁刚度对定子系统固有频率的影响。

§ 6.2 计算定子系统固有频率

把定子系统的机座和铁心分别看成是内、外两个圆环,热态时两环紧套在一起,内、外环在环平面内弯曲的固有频率由 (6-1) 式计算。

$$f_n = \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{EJ_z}{\rho A} \cdot \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}} \quad (n=2,3,4\dots) \quad (6-1)$$

其中

r —环的中线半径

E —材料的弹性模量

ρ —材料的密度

J_z —环的截面惯性矩

A —环的截面面积

把内、外环的几何参数和物理参数分别代入 (6-1) 得到内、外环在环平面内弯曲的前九阶固有频率为:

$$f_{2n} = 10.98 \text{ Hz}, \quad f_{3n} = 31.06 \text{ Hz}, \quad f_{4n} = 59.55 \text{ Hz}, \quad f_{5n} = 96.31 \text{ Hz}, \quad f_{6n} = 141.28 \text{ Hz},$$

$$f_{7n} = 194.45 \text{ Hz}, \quad f_{8n} = 225.82 \text{ Hz}, \quad f_{9n} = 325.37 \text{ Hz}, \quad f_{10n} = 403.12 \text{ Hz}$$

$$f_{2w} = 18.08 \text{ Hz}, \quad f_{3w} = 51.14 \text{ Hz}, \quad f_{4w} = 98.06 \text{ Hz}, \quad f_{5w} = 158.59 \text{ Hz}, \quad f_{6w} = 232.65 \text{ Hz},$$

$$f_{7w} = 320.21 \text{ Hz}, \quad f_{8w} = 421.27 \text{ Hz}, \quad f_{9w} = 535.81 \text{ Hz}, \quad f_{10w} = 663.83 \text{ Hz}$$

由(4-52)式计算内、外环组合在一起的频率为:

$$f_2 = 15.75\text{Hz}, f_3 = 44.55\text{Hz}, f_4 = 85.43\text{Hz}, f_5 = 138.16\text{Hz}, f_6 = 202.67\text{Hz},$$

$$f_7 = 278.96\text{Hz}, f_8 = 366.99\text{Hz}, f_9 = 466.77\text{Hz}, f_{10} = 578.30\text{Hz}$$

§ 6.3 计算电磁刚度对定子系统固有频率的影响

为了求出电磁刚度项 $c_2 w_s$ 对定子系统固有频率的影响, 将电磁刚度项 $c_2 w_s$ 加在定子铁心的内圆表面上。设内、外壳接触面相互作用的径向力为幅值为 $P(x, \theta)$ 、频率为系统的固有频率的简谐力, 则内、外壳所受载荷分别为:

$$q_x^n(x, \theta, t) = 0 \quad (6-2a)$$

$$q_\theta^n(x, \theta, t) = 0 \quad (6-2b)$$

$$q_z^n(x, \theta, t) = (R_l / R_1) c_2 w_s - (R_a / R_1) P(x, \theta) \sin \omega_i t \quad (6-2c)$$

$$q_x^w(x, \theta, t) = 0 \quad (6-2d)$$

$$q_\theta^w(x, \theta, t) = 0 \quad (6-2e)$$

$$q_z^w(x, \theta, t) = (R_a / R_2) P(x, \theta) \sin \omega_i t \quad (6-2f)$$

其中

R_1 为内壳中曲面半径, R_2 为外壳中曲面半径, R_a 为定子铁心的外径, R_l 为定子铁心的内径

在(6-2)式的作用下, 圆柱壳的强迫振动满足位移基本方程组:

$$L_1(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_x = 0 \quad (6-3a)$$

$$L_2(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_\theta = 0 \quad (6-3b)$$

$$L_3(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_z = 0 \quad (6-3c)$$

为此可设内、外壳的振动位移方程组的解为:

$$u_n(x, \theta, t) = \sum_i T_{in}(t) U_{in}(x, \theta) \quad (6-4a)$$

$$v_n(x, \theta, t) = \sum_i T_{in}(t) V_{in}(x, \theta) \quad (6-4b)$$

$$w_n(x, \theta, t) = \sum_i T_{in}(t) W_{in}(x, \theta) \quad (6-4c)$$

$$u_w(x, \theta, t) = \sum_i T_{iw}(t) U_{iw}(x, \theta) \quad (6-4d)$$

$$v_w(x, \theta, t) = \sum_i T_{iw}(t) V_{iw}(x, \theta) \quad (6-4e)$$

$$w_w(x, \theta, t) = \sum_i T_{iw}(t) W_{iw}(x, \theta) \quad (6-4f)$$

其中 U_{in} 、 V_{in} 、 W_{in} 和 U_{iw} 、 V_{iw} 、 W_{iw} 分别为内、外壳的各阶振型， $T_{in}(t)$ 、 $T_{iw}(t)$ 分别为内、外壳的各阶振型分量。由 § 4.3 同样的方法可得到：

$$\frac{d^2 T_{in}(t)}{dt^2} + \omega_{in}^2 T_{in}(t) = \frac{P_{in}(t)}{M_{in}} \quad (6-5a)$$

$$\frac{d^2 T_{iw}(t)}{dt^2} + \omega_{iw}^2 T_{iw}(t) = \frac{P_{iw}(t)}{M_{iw}} \quad (6-5b)$$

其中：

$$\begin{aligned} P_{in}(t) &= \iint_{S_1} [q_x^n U_{in} + q_\theta^n V_{in} + q_z^n W_{in}] R_1 dx d\theta \\ &= \pi R_1 c_2 \left[\int_0^L X_m^2(x) dx \right] T_{is}(t) \\ &\quad - R_a \left[\int_0^L \int_0^{2\pi} P(x, \theta) X_m(x) \cos i\theta dx d\theta \right] \sin \omega_1 t \end{aligned} \quad (6-6a)$$

$$M_{in} = \iint_{S_1} \rho_1 h_1 [U_{in}^2 + V_{in}^2 + W_{in}^2] R_1 dx d\theta \quad (6-6b)$$

$$\begin{aligned} P_{iw}(t) &= \iint_{S_2} [q_x^w U_{iw} + q_\theta^w V_{iw} + q_z^w W_{iw}] R_2 dx d\theta \\ &= R_a \left[\int_0^L \int_0^{2\pi} P(x, \theta) X_m(x) \cos i\theta dx d\theta \right] \sin \omega_1 t \end{aligned} \quad (6-6c)$$

$$M_{iw} = \iint_{S_2} \rho_2 h_2 [U_{iw}^2 + V_{iw}^2 + W_{iw}^2] R_2 dx d\theta \quad (6-6d)$$

考虑到 (6-6) 式，则 (6-5) 式化为：

$$\frac{d^2 T_{in}(t)}{dt^2} + \bar{\omega}_{in}^2 T_{in}(t) = -\frac{P_{in}(t)}{M_{in}} \quad (6-7a)$$

$$\frac{d^2 T_{iw}(t)}{dt^2} + \omega_{iw}^2 T_{iw}(t) = \frac{P_{iw}(t)}{M_{iw}} \quad (6-7b)$$

其中

$$\bar{\omega}_{in}^2 = \omega_{in}^2 - \frac{\pi R_l c_2}{M_{in}} \int_0^L X_m^2(x) dx$$

由 § 4.3 双壳系统固有特性的求解方法得到考虑电磁刚度 $c_2 w_s$ 时, 定子系统的固有频率为:

$$\omega_i^2 = \frac{M_{in} \left[\omega_{in}^2 - \frac{\pi c_2 R_l}{M_{in}} \int_0^L X_m^2(x) dx \right] + M_{iw} \omega_{iw}^2}{M_{in} + M_{iw}} \quad (6-8a)$$

$$f_i^2 = \frac{M_{in} \left[f_{in}^2 - \frac{c_2 R_l}{4\pi M_{in}} \int_0^L X_m^2(x) dx \right] + M_{iw} f_{iw}^2}{M_{in} + M_{iw}} \quad (6-8b)$$

其中

$$X_m(x) = 1$$

f_{in} 和 f_{iw} 为 § 6.2 所求得的值,

$$M_{in} = \rho h_1 R_l L \int_0^{2\pi} \cos^2(i\theta) d\theta$$

$$M_{iw} = \rho h_2 R_2 L \int_0^{2\pi} \cos^2(i\theta) d\theta$$

径向振型为 $W_i(x, \theta) = X(x) \cos i\theta = \cos i\theta$

由 (6-8b) 式计算可得到考虑电磁刚度 $c_2 w_s$ 时, 定子系统的固有频率为:

$$f_2' = 19.51 \text{ Hz}, \quad f_3' = 46.02 \text{ Hz}, \quad f_4' = 86.20 \text{ Hz}, \quad f_5' = 138.64 \text{ Hz}, \quad f_6' = 203.0 \text{ Hz},$$

$$f_7' = 279.19 \text{ Hz}, \quad f_8' = 367.17 \text{ Hz}, \quad f_9' = 466.92 \text{ Hz}, \quad f_{10}' = 578.42 \text{ Hz}$$

通过两组频率 f_i ($i=2,3,4,\dots,10$) 和 f_i' ($i=2,3,4,\dots,10$) 比较易知, 电磁刚度对低阶固有频率影响较大, 对高阶固有频率影响较小, 但是电磁刚度不改变定

子系统的振型。图 6.1 表示有功功率和激磁电流额定时，电磁刚度对各阶频率影响的大小；图 6.2 表示有功功率额定时，最低阶 ($n=2$) 频率随激磁电流的变化而变化的情况；图 6.3 表示激磁电流额定时，最低阶 ($n=2$) 频率随有功功率的变化而变化的情况；

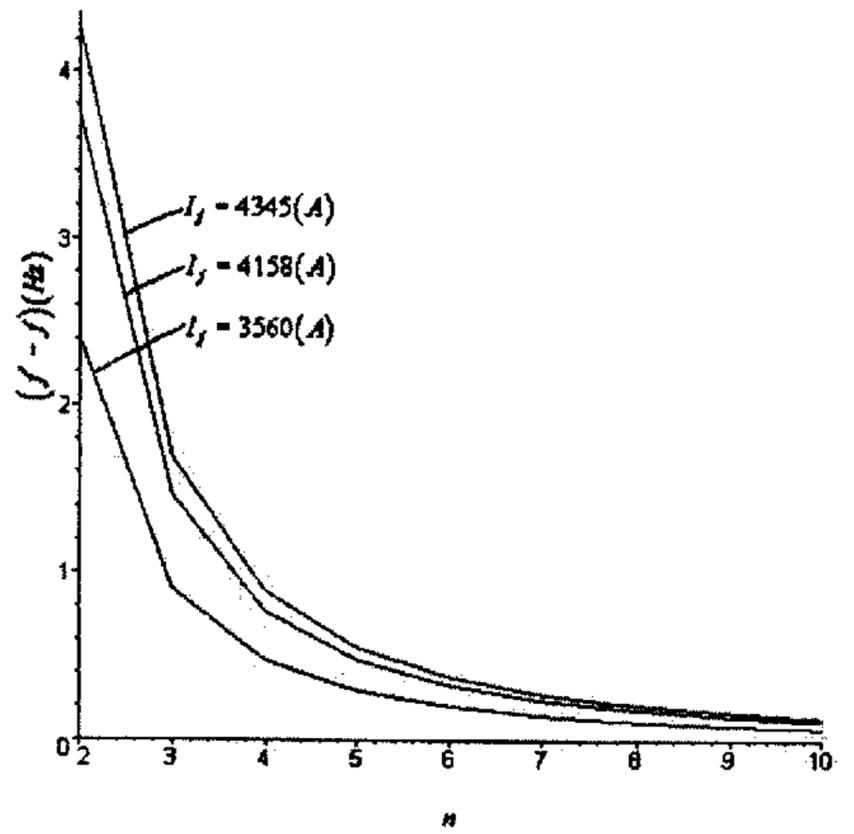


图 6.1

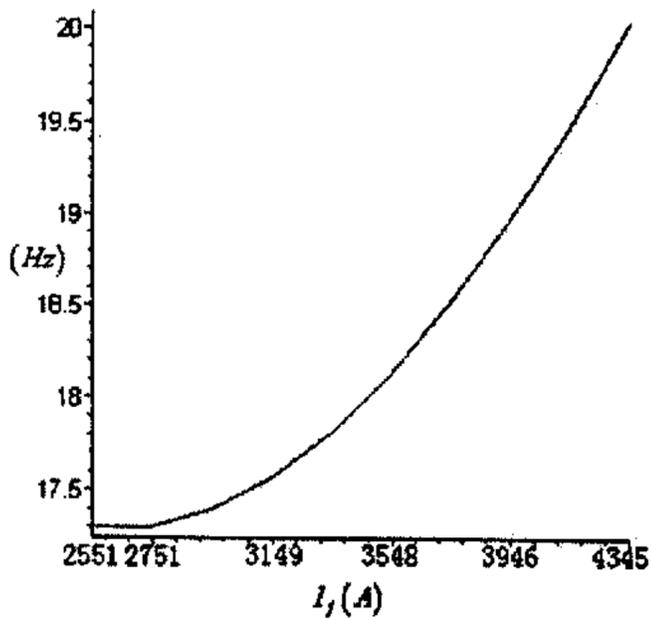


图 6.2

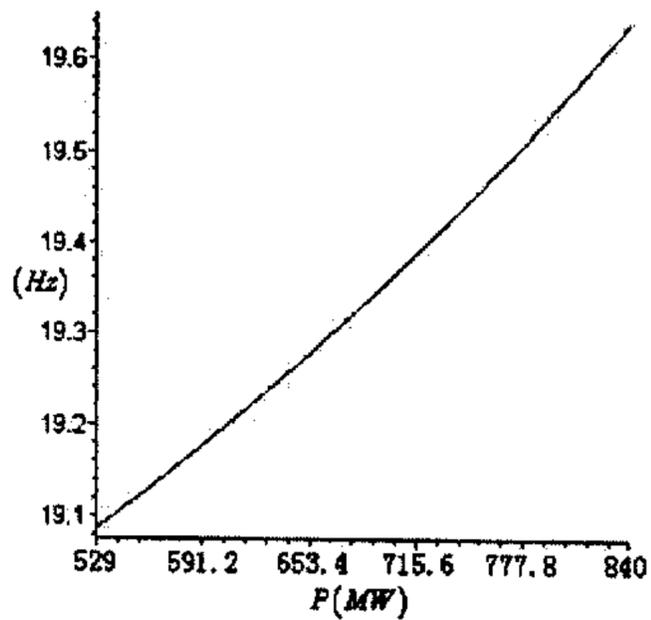


图 6.3

§ 6.4 本章小结

通过分析知电磁刚度对定子系统的固有频率有一定的影响，使各阶频率变大了，其中，对最低阶的固有频率影响最大，随着阶数的增大，影响愈来愈小。当有功功率额定时，各阶频率随激磁电流的增大而增高。当激磁电流额定时，各阶频率随有功功率的增大而增高。

总结与展望

机电耦联动力系统日益广泛地应用于工业、农业、国防和科学技术领域，在国民经济中占有十分重要的地位。水轮发电机组就是一种典型的机电耦联动力系统，随着发电机组向大型化方向发展，机组的机械尺寸以及转子和定子绕组上的电压、电流越来越大，对机组的动态稳定性的要求越来越高。在强电场和强磁场的作用下，机电耦联必将给机组正常运行带来新的问题。对于大型水轮发电机定子系统，气隙磁场交变产生作用于定子铁心内圆表面的电磁力波，引起定子系统的振动，而定子铁心的径向振动位移反过来又对气隙磁场产生影响，从而影响到电磁力的成分。定子系统的变形场与电磁场的这种耦合会给定子系统的正常运作带来新的问题，为了更好地指导水轮发电机组的设计、制造和运行，对定子系统的磁固耦合动态特性进行深入研究变得越来越重要。本文以 ABB 公司产的 777.8MW 水轮发电机组为实际工程背景，对大型水轮发电机组定子系统三相对称稳态运行状态下的磁固耦合振动进行了系统的研究，揭示了大型水轮发电机组定子系统振动的一些独特的现象和规律，本文所做的主要工作以及得到的一些重要结论如下：

（一）采用双壳系统模型的思想把水轮发电机定子系统简化为由弹簧连接的两个同心圆柱壳，连接弹簧的刚度冷态时视为零，热态时视为无穷大。采用该模型克服了工程上常用的双环模型和数值计算所采用的整体震荡系统的弊端，可以用解析表达式表达系统的振动形态，又可以考虑上、下端边界约束的影响。

（二）气隙磁场交变产生作用于定子铁心内圆表面的电磁力波，引起定子系统的振动，定子铁心的径向振动位移反过来又对气隙磁场产生影响，从而影响到电磁力的成分。本文就是在考虑磁场与变形场相互耦合的情况下，给出了三相对称稳态运行状态下作用于定子铁心内圆表面的电磁力的表达式。

（三）采用圆柱壳的梁函数组合法来分析双壳系统的固有特性，给出了双壳系统固有频率和振型的解析表达式。该法适用于任意边界情况的长径比很小的双壳系统。

（四）在磁固耦合动力学基本理论的基础上，建立了三相对称稳态运行状态下考虑定子铁心径向振动位移与气隙磁场相互影响时双壳系统的磁固耦合非线性动力学方程。

(五) 利用多尺度法分析了定子铁心的径向振动位移与气隙磁场相互影响时定子系统的磁固耦合非线性振动, 研究了定子系统在电磁力激发下的主共振。分析了阻尼、激磁电流、有功功率、强迫激励等诸因素对定子系统的主共振特性的影响, 增加阻尼会使主共振振幅明显减小, 而且会使振动的非线性性明显减弱; 增大激磁电流和有功功率时, 主共振振幅会增大, 振动的非线性性也会增强; 在额定工况下, 增大强迫激励的幅值时, 共振区振幅会随之增大。因此, 必要时可以通过适当改变某些参数来改变定子系统主共振的特性。

(六) 分析了电磁刚度对水轮发电机定子系统固有频率的影响, 电磁刚度对低阶固有频率影响较大, 因此电磁刚度对低阶固有频率的影响是不能忽视的。

定子系统磁固耦合动态特性的研究还有待于进一步深入, 对定子系统磁固耦合动态特性进一步深入的研究具有重要的理论意义和广泛的应用前景, 作者认为还须更深入地做下列工作:

(1) 研究电磁场在定子铁心内的有质动力对定子系统动态特性的影响, 从而使定子系统磁固耦合振动的研究更加完善。

(2) 在不同的运行状态下研究定子系统磁固耦合非线性振动极其稳定性, 这对于全面、准确地了解定子系统的动态特性具有重大意义。

(3) 大型发电机定子系统磁固耦合振动的实验研究对推进磁固耦合动力学的研究意义重大。

参考文献

- [1] 邱家俊 机电分析动力学 北京: 科学出版社 1992
- [2] 邱家俊 机电耦联动力系统的非线性振动 北京: 科学出版社 1996
- [3] 陈予恕 非线性振动 天津科学技术出版社 1983
- [4] 王海期 非线性振动 北京: 高等教育出版社 1992
- [5] 王洪礼 张琪昌 非线性动力学理论及应用 天津科学技术出版社 2002
- [6] 褚亦清 李翠英 非线性振动分析 北京理工大学出版社 1996
- [7] 谢应齐 曹杰 非线性动力学数学方法 北京: 气象出版社 2001
- [8] 米海珍 李春燕 弹性力学 重庆大学出版社 2001
- [9] 翁智远 王远功 弹性薄壳理论 北京: 高等教育出版社 1986
- [10] 刘人怀 板壳力学 北京: 机械工业出版社 1990
- [11] 陈位宫 力学变分原理 同济大学出版社 1989
- [12] 成祥生 应用板壳理论 山东科学技术出版社 1989
- [13] 曹志远 板壳振动理论 北京: 中国铁道出版社 1989
- [14] 白延年 水轮发电机设计与计算 北京: 机械工业出版社 1982
- [15] 李发海 朱东起 电机学 北京: 科学出版社 2001
- [16] 王正茂 苏少平 电机学 西安交通大学出版社 2000
- [17] 汤蕴璆 电机学—机电能量转换 北京: 机械工业出版社 1986
- [18] 许实章 交流电机绕组理论 北京: 机械工业出版社 1985
- [19] 孟传富 钱庆镛 机电能量转换 北京: 机械工业出版社 1993.10
- [20] 马志云 电机瞬态分析 北京: 中国电力出版社 1998
- [21] 刘习军 贾启芬 张文德 工程振动与测试技术 天津大学出版社 1999
- [22] 周建华 黄燕 MATLAB5.3 学习教程 北京大学出版社 2000
- [23] 李世奇 杜慧琴 Maple 计算机代数系统应用及程序设计 重庆大学出版社 1999
- [24] 精英科技 孙非 Maple6 实例教程 北京: 中国电力出版社 2001
- [25] 陈晓霞 Maple 指令参考手册 北京: 国防工业出版社 2002
- [26] 冯玮 涂伟霞 超强数学工具精点——由浅入深学 Maple 北京: 国防工业出版社 2002.1
- [27] 马开平 冯玮 超强数学工具精点——Maple 高级应用和经典实例 北京: 国防工业出版社 2002.1
- [28] 方其桂 易学易用 Photoshop 4.0 北京: 科学出版社 1998
- [29] 王军 李万红 全面接触 Photoshop 6.0 中文版 清华大学出版社 2002
- [30] 杨国华 江春 精通 Photoshop 7 中文版 清华大学出版社 2003
- [31] 汤蕴璆 史乃 电机学 北京: 机械工业出版社 2001
- [32] 辜承林 陈乔夫 熊永前 电机学 武汉: 华中科技大学出版社 2001
- [33] 蒋德川 电工学 上册 电路和电机 北京: 高等教育出版社 1986
- [34] 汤蕴璆 电机理论与运行 北京: 水利电力出版社 1983-1984
- [35] 陈予恕 唐云 非线性动力学中的现代分析方法 北京: 科学出版社 1992
- [36] 李文兰 邱家俊 杨志安 水轮发电机定子系统磁固耦合双重共振 应用数学和力学 第 21 卷第 10 期 2000.10

- [37] 李文兰 邱家俊 杨志安 考虑电磁刚度时水轮发电机定子系统的振动 天津大学学报 第 31 卷第 6 期 1998.11
- [38] 卿光辉 Hamilton 正则方程体系下大型汽轮发电机定子系统的振动研究 天津大学博士学位论文 2002.12
- [39] 邱家俊 机电系统的动力学问题 第一界结构与介质相互作用理论与应用学术会论文集 南京: 河海大学出版社 1993
- [40] 邱家俊 转子系统机电耦联动力学研究进展 全国第四界转子动力学会会议论文集 西安 1995: 20-27
- [41] 邱家俊 交流电机电磁力激发参、强联合共振 力学学报 第 21 卷第 1 期 1989
- [42] 邱家俊 交流电机电磁力激发的非线性振动 中国电机工程学报 第 9 卷第 2 期 1989
- [43] 邱家俊 汽轮发电机转子由电磁力激发的参数振动规律 天津大学学报 第 14 卷第 4 期 1981
- [44] 邱家俊 电机的电磁参数对转子共振的影响 固体力学学报 第 10 卷第 1 期 1989
- [45] 塔娜 电机的电磁阻尼理论与转子的非线性振动 天津大学硕士学位论文 2000.6
- [46] 刘云川 水轮发电机组轴系电磁力激发的扭转振动研究 天津大学硕士学位论文 1997.3
- [47] 李文兰 大型水轮发电机组定子系统磁固耦合非线性振动研究 天津大学博士学位论文 1998.1
- [48] 蔡赣华 发电机组转子系统机电耦联的非线性动力学研究 天津大学博士学位论文 1998.5
- [49] 杨志安 发电机组轴系扭振多重共振及电磁激发横、扭耦合振动研究 天津大学博士学位论文 1997.2
- [50] 胡宇达 大型汽轮发电机定子端部绕组的电磁固体振动问题研究 天津大学博士学位论文 2002.12
- [51] 邱家俊 弹性体非线性振动多重共振的能量法 力学学报 第 22 卷第 6 期 1990
- [52] 邱家俊 李文兰 边界约束对水轮发电机定子系统固有频率的影响 大电机技术
- [53] 宋梅君 邱家俊 隐极同步发电机组由电磁力激发的双重共振 全国第二界转子动力学会会议论文集 江西九江 1989.8
- [54] 李翠英 多自由度非线性振动系统多频振动的渐近解 北京理工大学学报 第 16 卷第 3 期 1996
- [55] 钱学智 董毓新 沙锡林 水轮发电机定子机座、铁心耦联振动分析 大电机技术 No2. 1991
- [56] 刘禄臣 水轮发电机定子的磁振动与热膨胀 大电机技术 No4. 1981
- [57] 钱学智 董毓新 用有限元法计算水轮发电机定子铁心的磁振动 大电机技术 No4. 1989
- [58] 许实章等 水轮发电机定子铁心的磁振动 华中工学院学报 创刊号 1973.12
- [59] 哈尔滨电工学院电机教研室 水轮发电机的振动 大电机技术 1974(1)

- [60] 沈旭东 次谐波引起的铁心振动分析 大电机技术 No1. 1988
- [61] 乐中 五强溪水轮发电机定子机座刚度的合理选取 大电机技术 No4. 1996
- [62] 陈永校 诸自强 电机定子的固有频率及其模态的实验研究
- [63] 张碧英 曹剑绵 大中型交流电机定子的振动特性研究 电工技术学报 (2).1994.5
- [64] 诸自强 陈永校 电机定子固有频率及其模态的有限元分析 (4).1987.11
- [65] 叶志明 何福保 徐福娣 大型气轮发电机的若干力学问题 力学与实践 第14卷第6期 1992
- [66] 刘习军 特种交流电机转子的非线性机电耦联双重共振 天津大学学报 第28卷第6期 1995
- [67] 卿光辉 邱家俊 胡宇达 双壳耦合结构与大型发电机定子系统的振动特性分析 工程力学 2003
- [68] 卿光辉 邱家俊 胡宇达 大型发电机定子系统圆柱双壳模型及其电磁力下的响应分析 大电机技术 2003
- [69] 邱家俊 卿光辉 胡宇达 气轮发电机定子系统固有频率新算法 大电机技术 2001No.6:1~5

附录:三峡水轮发电机组部分数据

额定转速 $n_r = 75r / \text{min}$

最小气隙长度 $\delta_0 = 32\text{mm}$

定子槽数 $z = 510$

极对数 $p = 40$

激磁绕组串联匝数 $W_j = 14$

直轴同步电抗 (标么值) $x_d^* = 0.939$

交轴同步电抗 (标么值) $x_q^* = 0.69$

磁饱和度 $k_\mu = 1.2$

并联支路数 $a = 5$

每相每条并联支路所串联的匝数 $W = 74$

额定功率 $P_n = 777.8\text{MW}$

额定励磁电压 $U_{jn} = 475.9\text{V}$

额定励磁电流 $I_{jn} = 4158\text{A}$

额定电压 $U_n = 20\text{KV}$

额定功率因素 $\cos \varphi = 0.9$

最大容量 $P_{\max} = 840\text{MW}$

每极每相槽数 $q = 2\frac{1}{8}$

空载励磁电流 $I_{j0} = 2352\text{A}$

空载励磁电压 $U_{j0} = 191.8\text{V}$

定子铁心的长度 $L = 2950\text{mm}$

机座外径 $D_{jw} = 22028\text{mm}$

机座内径 $D_{jn} = 19800\text{mm}$

定子铁心外径 $D_w = 19720\text{mm}$

定子铁心内径 $D_m = 18800\text{mm}$

致谢

本论文是在导师邱家俊教授的精心指导下完成的，值此论文完成之际，谨向导师邱家俊教授致以最诚挚的谢意！在这段跟随先生的求学生涯中，先生为我的学业付出了大量艰辛的劳动，在此，我要郑重地说一声：老师，您辛苦了。同时先生渊博的学识、敏锐深邃的洞察力、严谨治学的科学态度、诲人不倦的学者风范给我留下了深刻的印象，使我从中受益匪浅，先生高尚的人格、豁达的胸怀、高度的敬业精神永远是我学习的楷模。

在做论文期间，得到了李文兰老师、卿光辉博士后、塔娜博士、张德栋硕士、段昊昱硕士等人的诸多热情帮助，尤其是卿光辉博士后、塔娜博士在学习上给予了极大的帮助，张德栋硕士在生活上给予了极大的帮助，在此，本人向各位表示衷心的感谢！

感谢岳父、岳母和母亲的理解、关心、爱护和各方面的大力支持，他们为我的学业能够得以完成付出了大量的艰辛和汗水。妻子刘芬女士与我结婚多年，历尽辛苦，特别是在我求学期间，一个人肩负起家庭的担子，而且在怀儿子和生儿子期间我不在她身边，我没有尽到应该尽的责任，所有这些都使我深感内疚。同时由于忙学业，疏于关心和照顾儿子文文，歉疚之情，难以释怀。